Estudo do Método de Euler Explícito e sua convergência

Vinicius de Castro Lopes - 10770134
Luiz Guilherme Budeu - 11821639

Escola Politécnia - Universidade de São Paulo
MAP3122 - Métodos Numéricos e Aplicações
Professor Doutor Alexandre Megiorin Roma

I. Introdução[2]

Este documento tem por objetivo documentar o estudo do Método de Euler Explícito e técnicas de depuração por solução manufaturada. Para isto, foram utilizados problemas unidimensionais e bidimensionais com soluções conhecidas e desconhecidas. Com esse fim, foi seguida a Tarefa 1 da disciplina MAP3122, atividade introdutória com o objetivo de promover esses estudos, além de servir para introduzir o uso de ferramentas de matemática e plotagem. Neste caso, foram utilizados a linguagem Python, e bibliotecas Matplotlib e Numpy.

II. Método de Euler

O Método de Euler estima uma solução numérica a partir da noção básica de derivada, i. e., podemos aproximar y'(t) por:

$$\frac{y(t)}{dt} \approx \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}. \tag{1}$$

Como $\dot{y}(t)$ é igual a $f(t, y(t))$, por definição. Então o método de Euler é da seguinte forma:

$$y_{k+1} = y_k + h\phi(t_k, y_k); \quad k = 0, ..., n-1. \tag{2}$$

Para uma partição do intervalo $[t_0, T]$ em n subintervalos de tamanho $h = (T - t_0)/n$. Neste caso, $\phi(t_k, y_k) = f(t_k, y_k)$.

No método de Euler Explícito, cada aproximação da solução em cada passo é feita somente usando valores no instante imediatamente anterior.

III. Depuração por solução manufaturada[1]

A depuração por solução manufaturada consiste em utilizar um Problema de Valor Inicial (Problema de Cauchy) com solução conhecida e bem comportada. Desta maneira pode-se testar a correta implementação do método Numérico de Interesse.

A tabela de convergência numérica gerada contempla os valores do número de partições do intervalo, do erro de discretização global, da ordem de convergência.

IV. Problema Unidemensional

Para o problema unidimensional (Questão computacional 2.1), a solução manufaturada escolhida foi:

$$y(t) = e^{-2t} \tag{3}$$

Portanto, a $f(t, y(t)) = y'(t)$ correspondente será :

$$y'(t) = -2y \tag{4}$$

A. Resultados

Através desta solução conhecida, gerou-se a tabela de convergência numérica a seguir para os seguintes parâmetros:
$t_0 = 0$ $T = 2$ $y_0 = 1$

n	$h_n = \frac{(T - t_0)}{n}$	$\lvert e(T, h_n)\rvert$	ordem p
16	1.250e-01	8.293e-03	——-
32	6.250e-02	4.376e-03	9.224e-01
64	3.125e-02	2.240e-03	9.659e-01
128	1.562e-02	1.133e-03	9.840e-01
256	7.812e-03	5.694e-04	9.922e-01
512	3.906e-03	2.854e-04	9.962e-01
1024	1.953e-03	1.429e-04	9.981e-01
2048	9.766e-04	7.150e-05	9.991e-01
4096	4.883e-04	3.576e-05	9.995e-01

Tabela I: Método de Euler aplicado ao Problema de Cauchy em $t = T$.

V. Problema Bidimensional

Para o problema bidimensional (Questão computacional 2.2), foi escolhido o modelo presa-predador, as equações de Lotka-Volterra:

$$x'(t) = a.x(t) - b.x(t).y(t) \tag{5}$$
$$y'(t) = -c.y(t) + d.x(t).y(t) \tag{6}$$

Utilizando $x(t)$ como $y_1(t)$ e $y(t)$ como $y_2(t)$ podemos determinar a nossa $f(t, y_1(t), y_2(t))$

$$f(t, y_1(t), y_2(t)) = \begin{bmatrix} f(t, y_1(t)) \\ f(t, y_2(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.y_1(t) - b.y_1(t).y_2(t) \\ -c.y_2(t) + d.y_1(t).y_2(t) \end{bmatrix}$$

A. Resultados

As constantes e condições iniciais para o modelo foram:

$t_0 = 0$ $T = 20$ $y_0 = (100, 50)$ $a = 0,08$ $b = 0,001$ $c = 0,02$ $d = 0,00002$

n	$h_n = \frac{(T - t_0)}{n}$	$\lvert e(T, h_n)\rvert$	ordem p
16	1.250e+00	0.000e+00	——
32	6.250e-01	2.503e+00	0.000e+00
64	3.125e-01	1.290e+00	9.958e-01
128	1.562e-01	6.547e-01	9.975e-01
256	7.812e-02	3.299e-01	9.987e-01
512	3.906e-02	1.656e-01	9.993e-01
1024	1.953e-02	8.295e-02	9.996e-01
2048	9.766e-03	4.152e-02	9.998e-01
4096	4.883e-03	2.077e-02	9.999e-01

Tabela II: Método de Euler aplicado ao Problema de Cauchy em $t = T$.

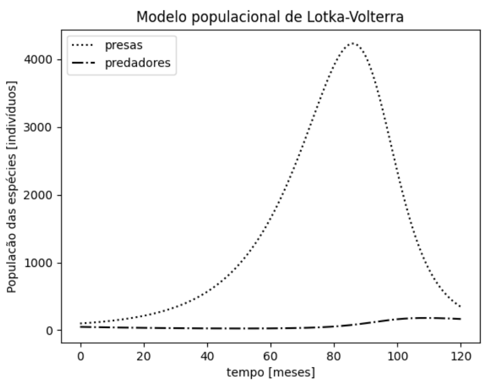

Figura 1: Caption

Visto que a implementação do Método de Euler Explícito foi validada através da solução manufaturada, podemos afirmar que a solução numérica converge para a solução exata. Portanto, podemos utilizar as próprias soluções numéricas com passos sucessivamente menores para estimar a *ordem* p do método

VI. Conclusões

O Método de Euler é útil para fins de estudos inicias sobre as aplicações de soluções numéricas de Equações Diferenciais Ordinárias. A resolução desta tarefa ilustrou a aplicabilidade para determinados problemas cuja solução exata é ou desconhecida, ou impraticável manualmente, como as equações de Lotka-Volterra.

Garantindo-se que a função em estudo mantenha-se nos limites de representação computacional, obtemos uma boa aproximação. Vale lembrar que para aplicações atuais utiliza-se métodos de ordem maior, como os de Runge-Kutta.

[1] Alexandre Megiorin Roma, Joyce Da Silva Bevilacqua, and Rudimar Luiz Nós. *Métodos para a solução numérica de equações diferenciais ordinárias a valores iniciais- Notas de Aula*. Br, IME- USP, 2020.
[2] Richard L. WBurden and J. Douglas Faires. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. PWS-Kent Publishing Company, Boston,USA, 1989.