UFMG/ICEx/DCC	DCC216 – Matemática Discreta

Trabalho Prático

Ciências Exatas & Engenharias	1º Semestre 2024

Observações:

1. Comece a fazer este trabalho imediatamente. Você nunca terá tanto tempo para resolvê-lo quanto agora!
2. **Data de entrega**: 31 de maio de 2024, até **às 23:59 horas**, ou antes.
3. **Submissão**: Faça a submissão deste trabalho no Moodle, conforme instruções postadas lá. A submissão deve ser um arquivo zip, descrito abaixo, com o nome `MD_"SeuNomeCompleto".zip` onde a string `"SeuNomeCompleto"` é o seu nome completo sem espaços em branco.

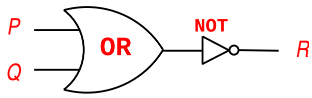
   Exemplo para o aluno Zoroastro Felizardo e Sortudo:

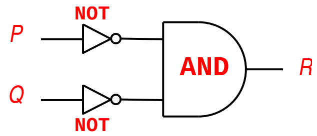
   - Arquivo zip: `MD_ ZoroastroFelizardoESortudo.zip` contendo apenas os três arquivos abaixo:
     (a) O arquivo `relacao.c`: arquivo fonte na linguagem C
     (b) O arquivo `relacao.pdf`: documentação
     (c) O arquivo `leiame.txt`: instruções de execução
4. **Plataforma computacional**: O seu trabalho deve ser executado em alguma máquina do ambiente computacional do Departamento de Ciência da Computação da UFMG, onde o monitor irá avaliá-lo.
5. **Linguagem**: Você deve escrever o seu programa obrigatoriamente na linguagem de programação C. Não será aceita outra linguagem.
6. **Documentação**:
   - Uma documentação que explique como cada um dos três pontos abaixo foi resolvido. Em particular, descreva as fases de especificação, projeto (solução adotada) e implementação dos algoritmos e estruturas de dados desses pontos.
   - Um arquivo `leiame.txt`, a ser incluído no arquivo zip, como informações sobre o ambiente computacional para executar o seu TP bem como todas as instruções necessárias.
7. **Testes**: O seu programa será avaliado conforme descrito no Moodle da disciplina.

Problema: Propriedades de Relações Binárias em Conjuntos

"Objetos" da Matemática e da Ciência da Computação podem estar relacionados de diversas formas. Por exemplo, podemos relacionar circuitos lógicos digitais entre si caso tenham a mesma tabela de entrada/saída, ou seja, a mesma tabela da verdade.

Considere circuitos lógicos com duas entradas e uma saída. Os circuitos lógicos abaixo





têm a mesma tabela de entrada/saída:

P	Q	*Saída*
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

e, assim, estão relacionados entre si por essa regra: "ter a mesma tabela de entrada/saída". Isto significa que podemos substituir um circuito pelo outro e continuaremos a ter o mesmo resultado.

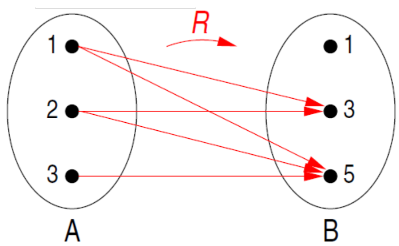
Uma pergunta interessante é: por que escolher um circuito ou outro? Questão desse tipo é central em Computação!

Uma outra pergunta é: existem outros circuitos de duas entradas e uma saída que têm essa mesma tabela? A resposta é sim, ou seja, podemos projetar outros circuitos que possuem essa tabela.

O problema de relação em conjuntos é central em Ciência da Computação e é a base de várias áreas como projeto de algoritmos, bancos de dados, autômatos e linguagens.

Relações Binárias

Sejam os conjuntos A e B. Uma relação binária R de A para B é um subconjunto de $A \times B$, ou seja, um subconjunto do produto cartesiano de A por B. Dado um par ordenado (x, y) em $A \times B$, x está relacionado com y através de R, escrito xRy, se e somente se o par (x, y) pertence à relação R. O termo binário é usado nessa definição para referir ao fato que uma relação é um subconjunto do produto cartesiano de **dois** conjuntos. A figura abaixo apresenta um exemplo de uma relação R de um conjunto A para um conjunto B, onde as setas indicam como os elementos do conjunto A estão relacionados com os elementos do conjunto B.



Nessa definição, os conjuntos A e B não precisam ser distintos. Se for esse o caso, falamos de uma **relação binária no conjunto** A, ou seja, uma relação de A para A que pode ser representada por um grafo dirigido. Assim, ao invés de representar A como dois conjuntos separados de pontos, representa-se A somente uma única vez e desenha-se uma aresta de cada ponto de A para cada ponto relacionado. No restante deste trabalho considere sempre uma relação binária de A para A.

Exemplo. Seja $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e seja a relação binária R no conjunto A definida como:

$$\text{para todo } x, y \in A, (x, y) \in R \Leftrightarrow (x - y) \bmod 2 = 0.$$

A relação R será um subconjunto de $A \times A$, i.e.,

$$\begin{aligned} A \times A \quad = \quad & \{(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8), \\ & (4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8), \\ & (5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(5,7),(5,8), \\ & (6,3),(6,4),(6,5),(6,6),(6,7),(6,8), \\ & (7,3),(7,4),(7,5),(7,6),(7,7),(7,8), \\ & (8,3),(8,4),(8,5),(8,6),(8,7),(8,8), \\ & \} \end{aligned}$$

A relação R deste exemplo diz que um elemento x está relacionado com um elemento y, caso o resto da divisão por dois da diferença entre eles seja 0, i.e., $(x - y) \bmod 2 = 0$. Para essa regra ser satisfeita, os dois elementos devem ser pares ou ímpares simultaneamente. Assim, a diferença entre eles sempre será um número par que deixa resto 0 quando dividido por dois.

Os pares de $A \times A$ que satisfazem essa regra e, consequentemente, definem a relação R são:

$$\begin{array}{rcllllll} R & = & \{(3,3), & & (3,5), & & (3,7), & \\ & & & (4,4), & & (4,6), & & (4,8), \\ & & (5,3), & & (5,5), & & (5,7), & \\ & & & (6,4), & & (6,6), & & (6,8), \\ & & (7,3), & & (7,5), & & (7,7), & \\ & & & (8,4), & & (8,6), & & (8,8) \\ & & \} & & & & & \end{array}$$

A figura 1 mostra o grafo dirigido de R, que representa os pares acima.

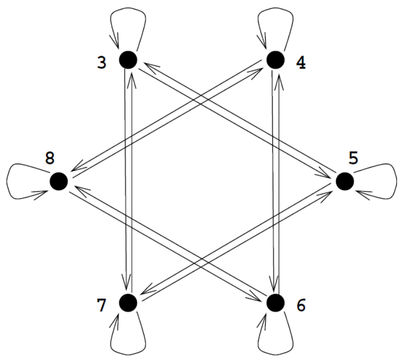


Figura 1: Grafo dirigido da relação R.

Se R é uma relação binária no conjunto A as seguintes propriedades podem ser definidas:

1. R é **reflexiva** $\Leftrightarrow$ para todo x em A, $(x, x) \in R$.
2. R é **irreflexiva** $\Leftrightarrow$ para todo x em A, $(x, x) \notin R$.
3. R é **simétrica** $\Leftrightarrow$ para todo x e y em A, se $(x, y) \in R$ então $(y, x) \in R$.
4. R é **anti-simétrica** $\Leftrightarrow$ para todo x e y em A, se $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$ então $x = y$.
5. R é **assimétrica** $\Leftrightarrow$ para todo x e y em A, se $(x, y) \in R$ então $(y, x) \notin R$.
6. R é **transitiva** $\Leftrightarrow$ para todo x, y e z em A, se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ então $(x, z) \in R$.

É importante frisar que os elementos x, y e z não precisam ser distintos.

Como consequência dessas propriedades, existem dois tipos de relações importantes: equivalência e ordem parcial. Uma relação R é uma relação de equivalência se e somente se R é reflexiva, simétrica e transitiva. Uma relação R é uma relação de ordem parcial se e somente se R é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Finalmente, pode-se definir informalmente o fecho reflexivo, simétrico e transitivo de uma relação R como uma nova relação que tem os pares de R acrescida do menor número de pares ordenados necessários para transformar R em reflexiva, simétrica e transitiva, respectivamente. Se uma relação R já é reflexiva ou simétrica ou transitiva, então a sua relação de fecho reflexivo ou simétrico ou transitivo é a própria relação R original, respectivamente.

Implementação do Problema

Neste trabalho você deve implementar um programa obrigatoriamente na linguagem C que seja capaz de ler um conjunto indeterminado de pares ordenados.

Pede-se:

1. Indicar se cada uma das seis propriedades acima é válida ou não. Se não for, você deve apresentar todos os pares ordenados presentes ou ausentes que não satisfazem a propriedade.
2. Dizer se a relação é de equivalência ou ordem parcial.
3. Apresentar o fecho reflexivo, simétrico e transitivo da relação, caso ela não tenha essas propriedades.

Entrada dos dados. Considere a entrada dos dados da seguinte forma:

- A primeira linha do arquivo contém a quantidade de elementos do conjunto A e, em seguida na mesma linha, os elementos desse conjunto. O número máximo de elementos do conjunto A é 50. Assim, cada elemento desse conjunto será identificado por um número inteiro entre 1 e 50.
- Cada linha seguinte contém um par ordenado (x, y) onde o primeiro número representa o x e o segundo o y. Não considere qualquer tipo de classificação dos pares nesse arquivo.

Nota: Os formatos da entrada e da saída serão confirmados assim que o monitor da disciplina for definido!

Para a relação mostrada na figura 1 uma possível entrada de dados seria a seguinte:

```
6 3 4 5 6 7 8
3 5
5 7
7 3
5 3
7 5
3 7
4 6
6 8
8 4
6 4
8 6
4 8
3 3
4 4
5 5
6 6
7 7
8 8
```

Possível saída. Para a relação mostrada na figura 1, uma possível saída seria a seguinte:

```
Propriedades
1. Reflexiva: V
2. Irreflexiva: F
   (3,3); (4,4); (5,5); (6,6); (7,7); (8,8);
3. Simétrica: V
4. Anti-simétrica: F
   (3,5) e (5,3); (3,7) e (7,3); (5,7) e (7,5); (4,6) e (6,4); (4,8) e (8,4); (6,8) e (8,6);
5. Assimétrica: F
6. Transitiva: V

Relação de equivalência: V
Relação de ordem parcial: F

Fecho reflexivo da relação = {(3,3),(3,5),(3,7),(4,4),(4,6),(4,8),(5,3),(5,5),(5,7),(6,4),
                              (6,6),(6,8),(7,3),(7,5),(7,7),(8,4),(8,6),(8,8)}
Fecho simétrico da relação = {(3,3),(3,5),(3,7),(4,4),(4,6),(4,8),(5,3),(5,5),(5,7),(6,4),
                              (6,6),(6,8),(7,3),(7,5),(7,7),(8,4),(8,6),(8,8)}
Fecho transitivo da relação = {(3,3),(3,5),(3,7),(4,4),(4,6),(4,8),(5,3),(5,5),(5,7),(6,4),
                               (6,6),(6,8),(7,3),(7,5),(7,7),(8,4),(8,6),(8,8)}
```

Note que a relação é assimétrica se for irreflexiva e anti-simétrica. Assim, no caso da relação não ser assimétrica não é necessário listar os pares porque já foram listados anteriormente.