Questões 1-4 de forma didática

Cálculo para Computação

Luiz Glomyer, Luiz Osmar, Christian Cruz, Farley

Escola Superior de Tecnologia - UEA

1 de Abril de 2019

1) Um investidor aplica na bolsa de valores determinada quantia que triplica em 30 meses. Em quanto tempo essa quantia será quadruplicada, supondo-se que o aumento é proporcional ao investimento feito?

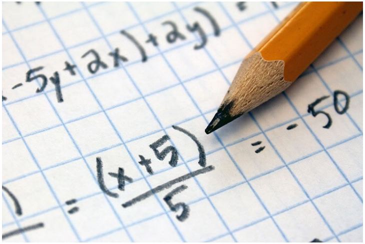
Modelando o problema

Para modelar, ou seja, transformar o nosso problema na linguagem matemática, faremos as seguintes convenções:

Modelando o problema

Para modelar, ou seja, transformar o nosso problema na linguagem matemática, faremos as seguintes convenções:

- mediremos o tempo em meses e o chamaremos de t
- a quantia em um determinado instante de tempo será chamada de y
- chamaremos o investimento feito em uma certa quantidade de meses de y_0 (investimento inicial)



Devemos achar o tempo necessário até que a quantia investida se quadruplique, ou seja, o valor de t para a quantia $4y_0$. Temos, portanto:

$$\frac{dy}{dt} = Ky$$

Devemos achar o tempo necessário até que a quantia investida se quadruplique, ou seja, o valor de t para a quantia $4y_0$. Temos, portanto:

$$\frac{dy}{dt} = Ky$$

$$\frac{dy}{y} = Kdt$$

Devemos achar o tempo necessário até que a quantia investida se quadruplique, ou seja, o valor de t para a quantia $4y_0$. Temos, portanto:

$$\frac{dy}{dt} = Ky$$

$$\frac{dy}{y} = Kdt$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int Kdt$$

Devemos achar o tempo necessário até que a quantia investida se quadruplique, ou seja, o valor de t para a quantia $4y_0$. Temos, portanto:

$$\frac{dy}{dt} = Ky$$

$$\frac{dy}{y} = Kdt$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int Kdt$$

$$\ln y = Kt + C$$

Devemos achar o tempo necessário até que a quantia investida se quadruplique, ou seja, o valor de t para a quantia $4y_0$. Temos, portanto:

$$\frac{dy}{dt} = Ky$$

$$\frac{dy}{y} = Kdt$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int Kdt$$

$$\ln y = Kt + C$$

Mas como C é uma constante arbitrária (pode assumir qualquer valor), podemos fazer $C = \ln C_1$

Substituindo a constante C e usando as propriedades de logaritmos:

$$\ln y = Kt + \ln C_1$$

Substituindo a constante C e usando as propriedades de logaritmos:

$$\ln y = Kt + \ln C_1$$

$$Kt = \ln \frac{y}{C_1}$$

Substituindo a constante C e usando as propriedades de logaritmos:

$$\ln y = Kt + \ln C_1$$

$$Kt = \ln \frac{y}{C_1}$$

$$\frac{y}{C_1} = e^{Kt}$$

Substituindo a constante C e usando as propriedades de logaritmos:

$$\ln y = Kt + \ln C_1$$

$$Kt = \ln \frac{y}{C_1}$$

$$\frac{y}{C_1} = e^{Kt}$$

Chegando, finalmente, na equação

$$\boxed{y = C_1 e^{Kt}} \tag{1}$$

O investimento inicial é dado por y_0, no tempo $t = 0$. Substituindo na equação (1):

$$y_0 = C_1 e^0 \therefore C_1 = y_0$$

O investimento inicial é dado por y_0, no tempo $t = 0$. Substituindo na equação (1):

$$y_0 = C_1 e^0 \therefore C_1 = y_0$$

Substituindo o valor de C_1 na equação (1):

$$\boxed{y = y_0 e^{Kt}} \tag{2}$$

Obtemos então nossa equação geral. Como o valor investido na bolsa de valores triplica em 30 meses, fazemos $y = 3y_0$ (triplicando o investimento inicial) e $t = 30$ (30 meses) e substituímos os valores na equação (2):

$$3y_0 = y_0 e^{30K} \therefore 3 = e^{30K}$$

$$3y_0 = y_0 e^{30K} \therefore 3 = e^{30K}$$

Para descobrir o tempo até que a quantia seja quadruplicada, fazemos $y = 4y_0$ na equação (2):

$$4y_0 = y_0 e^{Kt} \therefore 4 = e^{Kt}$$

$$3y_0 = y_0 e^{30K} \therefore 3 = e^{30K}$$

Para descobrir o tempo até que a quantia seja quadruplicada, fazemos $y = 4y_0$ na equação (2):

$$4y_0 = y_0 e^{Kt} \therefore 4 = e^{Kt}$$

Mas, das duas equações acima, temos que: $4^{30} = e^{30Kt}$ e $3^t = e^{30Kt}$. Portanto:

$$4^{30} = 3^t \implies 30 \ln 4 = t \ln 3$$

$$t = 30\frac{\ln 4}{\ln 3} \therefore t = 37,8 \text{ meses}$$

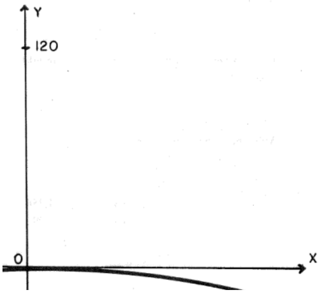
Ou seja, o tempo necessário até que a quantia se quadruplique é de 37 meses e 24 dias

2) De um ponto situado a 120 m do solo joga-se uma pedra de massa 0,5 kg para o alto com uma velocidade inicial de 8 m/s. Desprezando-se a resistência do ar e quaisquer outras forças que porventura atuem sobre a pedra, à exceção da gravidade (10 m/s^2), calcular o tempo, a velocidade, e o espaço percorrido pela pedra até esta tocar o solo.

Lançamento Vertical

Fonte: Livro Didático Público/SEED

Tomamos o nosso referencial (origem) na superfície da Terra, local onde a pedra foi arremessada.



Temos que $F = ma = mg$, mas como o peso atua no sentido contrário ao movimento, temos que $F = -mg$. Devemos ainda notar que a velocidade terá valores positivos na subida e negativos na descida.

Como a aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo e $g = 10$, temos que:

Como a aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo e g = 10, temos que:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg$$

$$\frac{dv}{dt} = -10 \therefore dv = -10dt$$

$$v = -10t + C_1 \tag{1}$$

Como a aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo e g = 10, temos que:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg$$

$$\frac{dv}{dt} = -10 \therefore dv = -10dt$$

$$v = -10t + C_1 \tag{1}$$

No tempo t = 0 a velocidade inicial é 8 m/s. Substituindo na equação (1):

$$8 = -10(0) + C_1 \therefore C_1 = 8$$

Como a aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo e g = 10, temos que:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg$$

$$\frac{dv}{dt} = -10 \therefore dv = -10dt$$

$$v = -10t + C_1 \tag{1}$$

No tempo t = 0 a velocidade inicial é 8 m/s. Substituindo na equação (1):

$$8 = -10(0) + C_1 \therefore C_1 = 8$$

De posse do valor da constante C_1 e aplicando-o na equação (1), obtemos a seguinte equação:

$$\boxed{v = -10t + 8} \tag{2}$$

Mas como a velocidade é a derivada do espaço percorrido em relação ao tempo, isso nos leva a:

$$\frac{dy}{dt} = -10t + 8$$

$$\int dy = \int (-10t + 8)dy \therefore y = \frac{-10t^2}{2} + 8t + C_2$$

Mas como a velocidade é a derivada do espaço percorrido em relação ao tempo, isso nos leva a:

$$\frac{dy}{dt} = -10t + 8$$

$$\int dy = \int (-10t + 8)dy \therefore y = \frac{-10t^2}{2} + 8t + C_2$$

Quando t = 0 e y = 120 tem-se que $C_2 = 120$. Assim:

$$\boxed{y = -5t^2 + 8t + 120} \tag{3}$$

Mas como a velocidade é a derivada do espaço percorrido em relação ao tempo, isso nos leva a:

$$\frac{dy}{dt} = -10t + 8$$

$$\int dy = \int (-10t + 8)dy \therefore y = \frac{-10t^2}{2} + 8t + C_2$$

Quando t = 0 e y = 120 tem-se que $C_2 = 120$. Assim:

$$\boxed{y = -5t^2 + 8t + 120} \qquad (3)$$

A pedra chega ao solo em y = 0, então:

$$5t^2 - 8t - 120 = 0$$

Resolvendo a equação de segundo grau obtemos os valores possíveis de t:

$$\begin{cases} t = 5,7 \\ t = -4,1 \end{cases}$$

Resolvendo a equação de segundo grau obtemos os valores possíveis de t:

$$\begin{cases} t = 5,7 \\ t = -4,1 \end{cases}$$

Para se obter a velocidade no instante que a pedra toca o chão usamos o valor positivo de t na equação (2):

$$v = -10(5,7) + 8 \therefore v = -49 \text{ m/s}$$

Resolvendo a equação de segundo grau obtemos os valores possíveis de t:

$$\begin{cases} t = 5,7 \\ t = -4,1 \end{cases}$$

Para se obter a velocidade no instante que a pedra toca o chão usamos o valor positivo de t na equação (2):

$$v = -10(5,7) + 8 \therefore v = -49 \text{ m/s}$$

Na altura máxima a velocidade da pedra é igual a 0, ou seja, v = 0. Usando a equação (2):

$$0 = -10t + 8 \therefore t = 0,8 \text{ segundos}$$

Resolvendo a equação de segundo grau obtemos os valores possíveis de t:

$$\begin{cases} t = 5,7 \\ t = -4,1 \end{cases}$$

Para se obter a velocidade no instante que a pedra toca o chão usamos o valor positivo de t na equação (2):

$$v = -10(5,7) + 8 \therefore v = -49 \text{ m/s}$$

Na altura máxima a velocidade da pedra é igual a 0, ou seja, v = 0. Usando a equação (2):

$$0 = -10t + 8 \therefore t = 0,8 \text{ segundos}$$

Que é o tempo para a pedra chegar a 120 m. Como v = v_0 - gt e v = $\frac{dy}{dt}$, tem-se: $\frac{dy}{dt} = 8 - 10t$

Integrando:

$$\int dy = \int (8 - 10t)dt \therefore y = -5t^2 + 8t + C$$

Tomando C = 0 como referencial, temos que y = 3,20 m, ou seja, a distância do lançamento até a altura máxima. A distância total percorrida será:

$$3,2 + 3,2 + 120 = \boxed{126,4 \text{ m}}$$

3) Em um depósito há 100 L de uma solução aquosa que contém 10 kg de sal. Joga-se água neste depósito com uma velocidade de 3 L/min ao mesmo tempo que, através de um orifício desse tanque, a mistura se escoa com uma velocidade de 2 L/min. A mistura se mantém homogênea mexendo-se a água com um agitador. Que quantidade de sal haverá no tanque 1 h depois de iniciada a operação?

Definiremos

- y como o peso de sal escoado em kg

Definiremos

- y como o peso de sal escoado em kg
- v como o volume

Definiremos

- y como o peso de sal escoado em kg
- v como o volume
- t como o tempo decorrido em minutos

Definiremos

- y como o peso de sal escoado em kg
- v como o volume
- t como o tempo decorrido em minutos
- $\frac{dv}{dt}$ como a vasão (volume escoado por unidade de tempo)

Definiremos

- y como o peso de sal escoado em kg
- v como o volume
- t como o tempo decorrido em minutos
- $\frac{dv}{dt}$ como a vasão (volume escoado por unidade de tempo)
- $\frac{dy}{dv}$ como a concentração, ou seja, a quantidade de sal por unidade de volume

Definiremos

- y como o peso de sal escoado em kg
- v como o volume
- t como o tempo decorrido em minutos
- $\frac{dv}{dt}$ como a vasão (volume escoado por unidade de tempo)
- $\frac{dy}{dv}$ como a concentração, ou seja, a quantidade de sal por unidade de volume

A taxa de escoamento do sal será:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dt}$$

Definiremos

- y como o peso de sal escoado em kg
- v como o volume
- t como o tempo decorrido em minutos
- $\frac{dv}{dt}$ como a vasão (volume escoado por unidade de tempo)
- $\frac{dy}{dv}$ como a concentração, ou seja, a quantidade de sal por unidade de volume

A taxa de escoamento do sal será:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dt}$$

A concentração em cada instante será dada por:

$$\frac{dy}{dv} = \frac{10 - y}{100 + t}$$

Ou seja, pela razão entre o peso inicial de sal menos o peso escoado e o volume igual ao inicial (100 L) mais o adicionado ($\int_0^v dv = 3\int_0^t dt$) menos o escoado ($\int_0^v dv = 2\int_0^t dt$)
Assim:

$$100 + 3\int_0^t dt - 2\int_0^t dt = 100 + t$$

Ou seja, pela razão entre o peso inicial de sal menos o peso escoado e o volume igual ao inicial (100 L) mais o adicionado ($\int_0^v dv = 3\int_0^t dt$) menos o escoado ($\int_0^v dv = 2\int_0^t dt$)
Assim:

$$100 + 3\int_0^t dt - 2\int_0^t dt = 100 + t$$

Logo:

$$\frac{dy}{dt} = 2\frac{10-y}{100+t} \therefore \frac{dy}{10-y} = 2\frac{dt}{100+t}$$

Ou seja, pela razão entre o peso inicial de sal menos o peso escoado e o volume igual ao inicial (100 L) mais o adicionado ($\int_0^v dv = 3\int_0^t dt$) menos o escoado ($\int_0^v dv = 2\int_0^t dt$)
Assim:

$$100 + 3\int_0^t dt - 2\int_0^t dt = 100 + t$$

Logo:

$$\frac{dy}{dt} = 2\frac{10-y}{100+t} \therefore \frac{dy}{10-y} = 2\frac{dt}{100+t}$$

Integrando a igualdade acima, obtemos:

$$-\ln(10-y) = 2\ln(100+t) + C$$

Pelas condições iniciais, t = 0 e y = 0 (nenhuma quantidade de sal escoada), determina-se C

$$-\ln 10 = 2\ln 100 + C \therefore C = -5\ln 10$$

Pelas condições iniciais, t = 0 e y = 0 (nenhuma quantidade de sal escoada), determina-se C

$$-\ln 10 = 2\ln 100 + C \therefore C = -5\ln 10$$

Então:

$$-\ln(10 - y) = 2\ln(100 + t) - 5\ln 10$$

Pelas condições iniciais, t = 0 e y = 0 (nenhuma quantidade de sal escoada), determina-se C

$$-\ln 10 = 2\ln 100 + C \therefore C = -5\ln 10$$

Então:

$$-\ln(10 - y) = 2\ln(100 + t) - 5\ln 10$$

$$\ln(10 - y) = 5\ln 10 - 2\ln(100 + t)$$

Pelas condições iniciais, t = 0 e y = 0 (nenhuma quantidade de sal escoada), determina-se C

$$-\ln 10 = 2\ln 100 + C \therefore C = -5\ln 10$$

Então:

$$-\ln(10 - y) = 2\ln(100 + t) - 5\ln 10$$

$$\ln(10 - y) = 5\ln 10 - 2\ln(100 + t)$$

$$10 - y = e^{5\ln 10} \cdot e^{-2\ln(100+t)}$$

Pelas condições iniciais, t = 0 e y = 0 (nenhuma quantidade de sal escoada), determina-se C

$$-\ln 10 = 2\ln 100 + C \therefore C = -5\ln 10$$

Então:

$$-\ln(10 - y) = 2\ln(100 + t) - 5\ln 10$$

$$\ln(10 - y) = 5\ln 10 - 2\ln(100 + t)$$

$$10 - y = e^{5\ln 10} \cdot e^{-2\ln(100+t)}$$

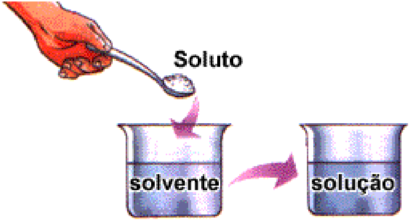
$$10 - y = e^{ln(10^5)} \cdot e^{\ln(100+t)^{-2}}$$

Simplificando:

$$10 - y = 10^5 \cdot (100+t)^{-}2 \therefore \boxed{y = 10 - \frac{10^5}{(100+t)^2}}$$

Para achar a o peso do sal restante após uma hora, fazemos t = 60

$$y = 10 - \frac{10^5}{160^2} \therefore \boxed{y = 3,91 \text{ kg de sal}}$$



4) Uma lancha se desloca numa lagoa com a velocidade de 10 m/s. Em dado instante seu motor é desligado; a lancha sofre com isso uma redução de velocidade proporcional à resistência da água. Sabendo-se que ao cabo de 5 s sua velocidade é de 8 m/s, qual será o tempo necessário para que a lancha adquira velocidade de 1 m/s?

$$F = ma \implies m\frac{dv}{dt} = -Kv$$

$$F = ma \implies m\frac{dv}{dt} = -Kv$$

Separando as variáveis:

$$m\int \frac{dv}{v} = \int -Kdt \therefore m \ln v = -Kt + C$$

Para t = 0 e v = 10 m/s temos que $\boxed{C = 2,3025m}$ Para t = 5, v = 8 m/s:

$$F = ma \implies m\frac{dv}{dt} = -Kv$$

Separando as variáveis:

$$m\int \frac{dv}{v} = \int -Kdt \therefore m\ln v = -Kt + C$$

Para t = 0 e v = 10 m/s temos que $\boxed{C = 2,3025m}$ Para t = 5, v = 8 m/s:

$$m\ln 8 = -5K + 2,3025m$$

$$F = ma \implies m\frac{dv}{dt} = -Kv$$

Separando as variáveis:

$$m\int \frac{dv}{v} = \int -Kdt \therefore m\ln v = -Kt + C$$

Para t = 0 e v = 10 m/s temos que $\boxed{C = 2,3025m}$ Para t = 5, v = 8 m/s:

$$m\ln 8 = -5K + 2,3025m$$

$$m(\ln 8 - 2,3025) = -5K$$

$$F = ma \implies m\frac{dv}{dt} = -Kv$$

Separando as variáveis:

$$m\int \frac{dv}{v} = \int -Kdt \therefore m\ln v = -Kt + C$$

Para t = 0 e v = 10 m/s temos que $\boxed{C = 2,3025m}$ Para t = 5, v = 8 m/s:

$$m\ln 8 = -5K + 2,3025m$$

$$m(\ln 8 - 2,3025) = -5K$$

$$m(2,0794 - 2,3025) = -5K$$

$$F = ma \implies m\frac{dv}{dt} = -Kv$$

Separando as variáveis:

$$m\int \frac{dv}{v} = \int -Kdt \therefore m\ln v = -Kt + C$$

Para t = 0 e v = 10 m/s temos que $\boxed{C = 2,3025m}$ Para t = 5, v = 8 m/s:

$$m\ln 8 = -5K + 2,3025m$$

$$m(\ln 8 - 2,3025) = -5K$$

$$m(2,0794 - 2,3025) = -5K$$

Quando v = 1 m/s, t = ?

$$m \ln 1 = -Kt + 2,3025m$$

Quando v = 1 m/s, t = ?

$$m \ln 1 = -Kt + 2,3025m$$

$$m(\ln 1 - 2,3025) = -Kt$$

Quando v = 1 m/s, t = ?

$$m \ln 1 = -Kt + 2,3025m$$

$$m(\ln 1 - 2,3025) = -Kt$$

$$2,3025m = Kt \therefore \boxed{m = \frac{Kt}{2,3025}} \tag{2}$$

Quando v = 1 m/s, t = ?

$$m \ln 1 = -Kt + 2,3025m$$

$$m(\ln 1 - 2,3025) = -Kt$$

$$2,3025m = Kt \therefore \boxed{m = \frac{Kt}{2,3025}} \qquad (2)$$

Substituindo o valor de m na equação (1):

$$0,2231\frac{Kt}{2,3025} = 5K \therefore t = \frac{5(2,3025)}{0,2231} \therefore \boxed{t = 51,6 \text{ s}}$$