UNIVERSIDADE FEDERAL TECNOLÓGICA DO PARANÁ
VARIÁVEIS COMPLEXAS
LISTA Nro. 2

Prof. Dr. Iván Gonzáles

28 de março de 2022

1 A exponencial

1.) Reduza à forma $re^{i\theta}$ cada um dos números complexos dados:

(a) $1+i$

(b) $-1+i$

(c) $1+i\sqrt{3}$

(d) $\sqrt{3}+i$

(e) $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$

(f) $\frac{i}{1+i}$

2.) Mostre que $exp(3+7\pi i) = -e^3$.

3.) Estabeleça as fórmulas de Euler:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad e \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

4.) Sendo $z = re^{i\theta}$, prove que $|e^{iz}| = e^{-r\sin\theta}$.

5.) Prove que $e^z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2k\pi i$, k inteiro.

6*.) Prove que $r_1e^{i\theta_1} + r_2e^{i\theta_2} = r_3e^{i\theta_3}$, onde

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)},$$

e

$$\tan\theta_3 = \frac{r_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2}{r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2}.$$

Faça um gráfico.

7*.) Estabeleça as duas identidades seguintes:

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta = \frac{1}{2}+\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\theta]}{2\sin(\frac{\theta}{2})},$$

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta = \frac{1}{2\sin(\theta/2)}\left[\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left[(n+\frac{1}{2})\theta\right]\right].$$

8*.) Determine z de forma que o triângulo de vértices i, z e iz seja equilátero.

9*.) Mostre que se ω é qualquer raíz n-esima da unidade distinta da unidade, então

$$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1} = 0.$$

2 Conjunto de pontos no plano

1.) Represente graficamente os conjuntos dados:

(a) $Re\ z < 3$

(b) $Im\ z \geq 1$

(c) $|z-2i| > 2$

(d) $z \neq 0,\ 0 \leq\ arg(z) \leq \pi/3$

(e) $1 < |z+1-2i| < 2$

(f) $Re(\frac{1}{z}) < \frac{1}{4}$

(g) $Im\ z^2 < 0$

(h) $Re\ z^2 > 0$

(i) $z \neq 0,\ |arg(z^3)| < 2\pi/3$

(j) $|z - 2| = |z - 3i|$

(k) $|z + 5| = |z - 1 - i|$

(l) $|(z - i)(1 - i\sqrt{3})| = |2z|$

2.) Identifique cada um dos conjuntos de pontos dados. Faça os respectivos gráficos.

(a) $|z - i| + |z + 2| = 3$

(b) $|z - 2 + i| + |z| \leq 4$

(c) $|z - 2| = 2|z + 2i|$

(d) $Re(1 - z) = |z|$

3.) Esboçar o gráfico de:

(a) $|z - 1 + i| = 1$

(b) $(z + i) \leq 3$

(c) $|z - 4i| \geq 4$

(d) $Re(\overline{z} - i) = 2$

(e) $|2z - i| = 4$

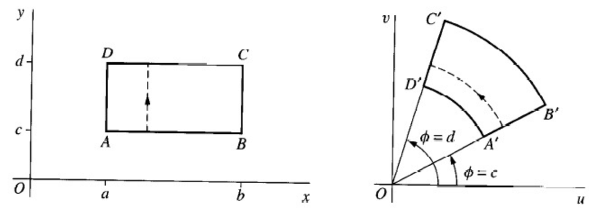
4.) Determine os pontos de acumulação de cada um dos seguintes conjuntos:

a.) $z_n = i^n,\ n = 1, 2, 3, \cdots.$

b.) $z_n = i^n/n,\ n = 1, 2, 3, \cdots.$

c.) $0 \leq arg(z) < \pi/2,\ z \neq 0.$

5*.) Estude a transformação $w = e^z$ e mostre que segmentos verticais e horizontais são mapeados em porções de círculos e raios respectivamente. Faça um gráfico!. Use isto e deduzca que esta transformação mapea regiões retângulares de lados paralelos aos eixos, em uma porção de um anel circular tal como indica o gráfico :



6.) Identifique a região imagem do setor $r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/4$ mapeado pela transformação

a.) $w = z^2$.

b.) $w = z^3$.

c.) $w = z^4$.

7.) Encontre a imagem da faixa infinita $x \geq 0, 0 \leq y \leq \pi$ mapeada pela transformação $w = exp(z)$ e grafique as respectivas fronteiras.

8*.) Encontre a grafique as imagens das hipérbolas

$$x^2 - y^2 = c_1,\ (c_1 < 0)\ e\ 2xy = c_2,\ (c_2 < 0),$$

mapeadas pela transformação $w = z^2$.

3 Funções de Variável Complexa

1.) Determine as partes real e imaginária de cada uma das seguintes funções:

a) $w = z^2 - 5z + 3$

b) $w = \frac{3}{z-5}$

c) $w = \frac{z+2}{z-2}$

d) $w = \frac{z-4i}{z+3i}$

e) $w = e^z(z - i)$

2.) Determine o domínio máximo de definição das funções dadas

a) $w = \frac{z}{(z-i)\sin y}$

b) $w = \frac{z}{x} - \frac{y}{z}$

c) $w = \frac{z^2+(z-1)^3}{(e^z-1)\cos y}$

4 Funções Analíticas I - Limites

1.) Calcule os limites:

a.) $\lim_{z \to -3i} (z^2 - 5z)$.

b.) $\lim_{z \to i} (\frac{4z+i}{z+1})$.

c.) $\lim_{z \to \infty} \frac{z+1}{z^2-7}$

d.) $\lim_{z \to \infty} \frac{z^3 - 3z^2 + 1}{z^2 + 5z - 3}$.

e.) $\lim_{z \to i} \frac{6z+7}{2z-3}$.

f.) $\lim_{z \to \infty} \frac{6z+7}{2z-3}$.

g.) $\lim_{z \to 3} \frac{z^3 - 27}{z-3}$.

h.) $\lim_{z \to \infty} \frac{z^3 - 27}{z-3}$.

i.) $\lim_{z \to 0} \frac{\sqrt{1+z} - 1}{z}$.

j.) $\lim_{z \to 0} \frac{(1+z)^{1/4} - 1}{z}$.

k.) $\lim_{z \to 0} \frac{(1+z)^{1/3} - (1-z)^{1/3}}{z}$.

5 Limites II

1.) Considere o $\lim_{z \to 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$.

a) A valor tende o limite a medida que z se aproxima de 0 ao longo do eixo real?

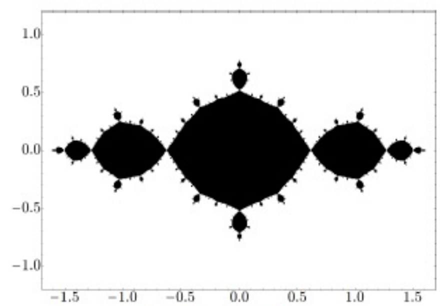
b) A valor tende o limite a medida que z se aproxima de 0 ao longo do eixo imaginário?

c) Suas respostas para os itens a) e b) implicam que $\lim_{z \to 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$ existe? Justifique sua resposta.

d) A valor tende o limite a medida que z se aproxima de 0 ao longo da reta $y = x$?

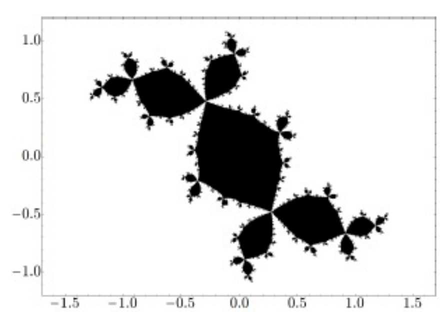
e) O que se pode concluir a respeito de $\lim_{z \to 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$?

2.*) [Julia´s set] Considere a aplicação $f(z) = z^2$. Dado um ponto z_0 tente calcular o limite $\lim_{n \to \infty} f^n(z)$, onde $f^n(z) = f(f^{n-1}(z))$. Pinte de preto os pontos sobre o plano complexo tais que o limite acima existe e de vermelho os pontos tais que o limite acima é ∞. O conjunto colorido de preto é chamado o conjunto de Julia da função z^2. Desenhe no plano complexo teus resultados!
Os conjuntos de Julia são gerados pelas funções $f(z) = z^2 + c$, onde c é uma constante.
Alguns Conjuntos de Julia:



(a) The Basilica

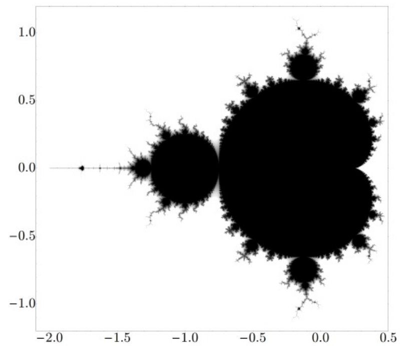
Filled Julia set for $z^2 - 1$.



(b) The Douady Rabbit

Filled Julia set for $z^2 - 0.123 + 0.745i$.

O conjunto de Mandelbrot M é definido como o conjunto de pontos c para os quais o conjunto de Julia $z^2 + c$ é conexo por caminhos. Segundo esta definição temos a figura seguinte:



The Mandelbrot set.

O conjunto de Mandelbrot inicia o estudo da Geometria Fractal!

3.) Usando as propriedades de limites, calcule:

a) $\lim_{z \to i} \dfrac{(3+i)z^4 - z^2 + 2z}{z+1}$.

b) $\lim_{z \to 1+\sqrt{3}i} \dfrac{z^2 + 2z + 4}{z - 1 - \sqrt{3}i}$.

c) $\lim_{z \to -i} \dfrac{z^4 - 1}{z + i}$.

d) $\lim_{z \to 2+i} \dfrac{z^2 - (2+i)^2}{z - (2+i)}$.

4.) Verifique se a função dada é contínua ou não no ponto z_0 especificado.

a) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z+i}$ em $z_0 = -i$.

b) $f(z) = z^3 - \dfrac{1}{z}$ em $z_0 = 3i$.

c) $f(z) = \dfrac{z^3}{z^3 + 3z^2 + z}$ em $z_0 = i$

6 Derivação e Analiticidade

1.) Calcule as derivadas das funções:

a) $f(z) = 1 - z^2 + 4iz^5$.

b) $f(z) = (z^2 - i)^3 (iz + 1)^2$

c) $f(z) = \frac{z-3i}{z+3i}$.

d) $f(z) = (2z^2 + i)^5$.

e) $f(z) = (1 - 4z^2)^3$.

f) $f(z) = \frac{(1+z^2)^4}{z^2}$, $z \neq 0$.

2.) Mostre as identidades:

a) $(z^n)' = nz^{n-1}$, para todo inteiro positivo n.

b) Sendo $z \neq 0$, prove que $(1/z)' = -1/z^2$.

c*) Se f e g são funções analíticas, então o produto é uma função analítica com derivada:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Mostre a regra de derivação de Leibniz

$$(fg)^n = f^{(n)}g + nf^{(n-1)}g' + \frac{n(n-1)}{2} f^{(n-2)}g'' + \cdots + fg^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(n-j)} g^{(j)}.$$

d) Mostre que o quociente de duas funções analíticas f e g num ponto, z onde $g(z) \neq 0$, é função analítica e

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}.$$

3.)* Mostre que um polinômio

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, \ \ a_n \neq 0,$$

de grau n é derivável em todo ponto, com derivada

$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}.$$

Mostre também que os coeficientes do polinômio podem ser escritos na forma:

$$a_0 = p(0), \ a_1 = \frac{p'(0)}{1!}, \ a_2 = \frac{p''(0)}{2!}, \ \cdots, a_n = \frac{p^{(n)(0)}}{n!}.$$

4.) Em quais pontos existem as derivadas das funções:

a) $f(z) = \bar{z}$.

b) $f(z) = Re(z)$.

c) $f(z) = Im(z)$.

d) $f(z) = z - \bar{z}$.

e) $f(z) = 2x + ixy^2$.

f) $f(z) = e^x e^{-iy}$

5.) Mostre que as equações de Cauchy-Riemann são equivalentes a cada uma das formas seguintes:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}.$$

6.) Use as equações de Cauchy-Riemann para verificar quais das funções a seguir é analítica e em qual domínio. No caso em que a função seja analítica calcule a derivada. $f'(z)$:

a) $w = z^3$.

b) $w = \overline{e^z}$.

c) $w = \overline{z}$

d) $w = \frac{1}{z}$

e) $w = (e^y + e^{-y})\sin x + (e^y - e^{-y})\cos x$.

f) $w = e^y(\cos x + i\sin x)$

g) $w = e^{-y}(\cos x + i\sin x)$

h) $w = \sqrt{z}$.

7.) Calcule f' e f'' em cada caso:

a) $f(z) = iz + 2$.

b) $f(z) = z^3$.

c) $f(z) = e^{-x}e^{-iy}$.

d) $f(z) = \cos x cosh y - i\sin x sinh y$.

7 Logaritmo

1.) Demostre que $\log\frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - log z_2$, no sentido de igualdade de conjunto de valores.

2.*) Mostre que

$$log(-1) = (2k+1)\pi i$$

e

$$\log i = \frac{4k+1}{2}\pi i, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

3.*) Mostre que, sendo $x \neq 0$

$$\log(x+iy) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + (\theta_0 + 2k\pi)i,$$

onde θ_0 é uma das determinações de $arctg(y/x)$. Se $x = 0$, então $y \neq 0$ e θ_0 pode ser tomado igual a $\pm\pi/2$ conforme seja $y > 0$ ou $y < 0$, respectivamente.

4.) Determine todas as raízes das equações seguintes:

a) $e^z = -1$.

b) $e^{2z} = -e$.

c) $e^z = -\sqrt{3} + 3i$.

d) $e^z + 6e^{-z} = 5$.

e) $\log z = \pi i/2$.

1.) Calcule o $\log z$, onde:

a) $z = 1 - i$

b) $z = e$

c) $z = -1 + i$

d) $z = -1 - \sqrt{3}i$

e) $z = -ei$

2.) Calcule o $\log z$ nos ramos indicados:

a) $z = 1 - i$ no ramo $0 \leq \theta < 2\pi$.

b) $z = e$ no ramo $-\pi < \theta \leq \pi$.

c) $z = -1 + i$ no ramo $\frac{3\pi}{2} \leq \theta < \frac{7\pi}{2}$.

d) $z = -1 - \sqrt{3}i$ no ramo $-\frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{7\pi}{4}$.

3.) Demonstre que $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$ no sentido de igualdade de conjuntos de valores.

4.) Mostre que $\log(-1) = (2k+1)\pi i$.