UNIVERSIDADE FEDERAL TECNOLÓGICA DO PARANÁ
VARIÁVEIS COMPLEXAS
LISTA Nro. 1

Prof. Dr. Iván Gonzáles

11 de março de 2022

1 Números Complexos

1.) Reduza à forma $a + bi$ cada uma das exepressões dadas:

(a) $(1 + \frac{i}{3})(\frac{6}{5} + 3i)$

(b) $7 - 2i(2 - \frac{2i}{5})$

(c) $(1 + i)^3$

(d) $1 + 2i + 3i^{+}4i^3 + 5i^4 + 6i^5$

(e) $\frac{1}{2+3i}$

(f) $\frac{1-i}{3-2i}$

(g) $\frac{4-3i}{i-1}$

(h) $(\frac{1+i}{1-i})^{30}$

2.) Verificar que:

(a) $(\sqrt{2} - i) - i(1 - \sqrt{2}i) = -2i$

(b) $(3, 1)(3, -1)(\frac{1}{5}, \frac{1}{10}) = (2, 1)$

(c) $(2, 3)(-2, 1) = (-1, 8)$

3.) Calcule:

(a) $\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}$

(b) $\frac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$

(c) $(1 - i)^4$

4.) Mostre que $(x + iy)^2(x - iy)^2 = (x^2 + y^2)^2$.

5.) Mostre que $(x + iy)^n(x - iy)^n = (x^2 + y^2)^n$.

6.) Provar que:

(a) $Re(iz) = -Im\ z$ (b) $Im(iz) = Re\ z$

7.) Mostre que os números $z = 1 \pm i$ satisfazem a equação $z^2 - 2z + 2 = 0$.

8.) Represente graficamente os seguintes números complexos:

(a) $z = 3 + 4i$

(b) $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

(c) $\frac{1+i}{2\sqrt{2}}$

(d) $z = 1 + 2i$

(e) $z = 3 - i/2$

9.) Mostre que:

(a) $Re[-i(2 - 3i)^2] = -12$

(b) $\frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i} = -i$

(c) $Im[\frac{(1-i\sqrt{3})^2}{i-2}] = \frac{2(1+2\sqrt{3})}{5}$

(d) $\frac{1+i\ tg\ \theta}{1-i\ tg\ \theta} = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$

10.) Dado dois números complexos α e β, prove que

$$|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2.$$

11.) Prove que o produto de dois números complexos é zero se e somente se um dos fatores se anula.

12.) Provar que $\sqrt{2}|z| \geq |Re\ z| + |Im\ z|$.

13.) Sabendo que $|z_1 - z_2|$ representa a distância entre os pontos z_1 e z_2. Dar uma interpretação geométrica para justificar que:

(a) $|z-4i|+|z+4i|=10$ representa uma elipse com focos em $(0,\pm 4)$.

(b) $|z-i|=|z+i|$ representa a reta que passa pela origem com pendente -1.

14.) Mostre que:

(a) $\overline{z+3i}=z-3i$

(b) $\overline{iz}=-i\overline{z}$

(c) $\overline{(2+i)^2}=3-4i$

(d) $|(2\overline{z}+5)(\sqrt{2}-i)|=\sqrt{3}|2z+5|$

15.) Demonstre que:

(a) z é real se, e somente se, $\overline{z}=z$.

(b) z é real ou imaginário puro se, e somente se, $\overline{z}^2=z^2$.

16.*) Demonstrar que $|z-z_0|=R$, a equação de uma circunferência de raio R centrada em z_0 pode-se escrever como:

$$|z|^2-2Re(z\overline{z_0})+|z_0|^2=R^2$$

17.) Provar que

$$|Re(2+\overline{z}+z^3)|\leq 4,\quad \text{quando } |z|\leq 1$$

18.) Ache números reais x e y tais que $3x+2iy-ix+5y=5i+7$.

19.) Prove que:

(a) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ (b) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$

20.) Prove que:

(a) $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

(b) $|z_1+z_2+z_3|\leq|z_1|+|z_2|+|z_3|$

(c) $|z_1-z_2|\geq|z_1|-|z_2|$

21.*) Seja $p(x)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ um polinômio com coeficientes reais. Demonstre que se z_1 for raiz de $p(z)=0$, então o conjugado de z_1 também será raiz de esta equação.

2 Representação Polar e Fórmula de Moivre

1.) Determine o argumento dos números complexos dados, escreva esses números na forma polar e represente-os geometricamente.

(a) $z=-2+2i$

(b) $z=1+i\sqrt{3}$

(c) $z=(\frac{i}{1+i})^5$

(d) $z=\frac{1}{-1-i\sqrt{3}}$

(e) $z=\frac{-3+3i}{1+i\sqrt{3}}$

(f) $z=\frac{-4}{\sqrt{3}-i}$

(g) $z=1+2i$

(h) $z=4-i$

2.) Escreva os seguintes números complexos em forma polar:

(a) $2+2\sqrt{3}i$

(b) $-5+5i$

(c) $-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$

(d) $-3i$

3.) Reduza os números z_1 e z_2 à forma polar e determine as formas polares de z_1z_2 e z_1/z_2.

(a) $z_1=\sqrt{3}+3i,\ z_2=\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$

(b) $z_1=1+i,\ z_2=\sqrt{3}+i$

(c) $z_1=1+2i,\ z_2=2+i$

(d) $z_1=-1-i,\ z_2=-1-i\sqrt{3}$

4.) Escreva o número complexo $[2^{19}(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12))]^{36}$ sob a forma $a+bi$.

5.) Utilize a fórmula de Moivre para deduzir as seguintes idêntidades trigonométricas:

(a) $\cos 3\theta z=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$

(b) $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta \sin\theta - \sin^3\theta$

6.) Obtenha fórmulas análogas às do exercício anterior para $\cos 4\theta$ e $\sin 4\theta$.

7.) Prove que se z e ω são números complexos com $z \neq 0$, então:

$$arg(\omega/z) = arg(\omega) - arg(z) \;\; e \;\; |\omega/z| = |\omega|/|z|.$$

8.) Provar que:

(a) $|e^{i\theta}| = 1$ (b) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

9.*) Demonstre a identidade:

$$1+z+z^2+\cdots+z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \quad (z \neq 1)$$

e utilize para mostrar a identidade trigonométrica de Lagrange:

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(2n+1)\theta/2]}{2\sin(\theta/2)},$$

onde $0 < \theta < 2\pi$.

10.) Graficar:

(a) $6(\cos 240° + i\sin 240°)$

(b) $4e^{3\pi i/5}$

(c) $2e^{-\pi i/4}$

11.) Suponha $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Prove:

(a) $z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

(b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$

3 Raízes n-ésimas

1.) Calcule as raízes dos seguintes números complexos:

(a) $\sqrt[3]{-1}$

(b) $(1+i\sqrt{3})^{1/2}$

(c) $\sqrt[3]{i}$

(d) $(-1+i\sqrt{3})^{1/4}$

(e) $\sqrt{-2i}$

(f) $\sqrt{-5-12i}$

(g) $\sqrt{3+4i}$

(h) $\sqrt{1+2i\sqrt{6}}$

2.) Ache as raízes quadradas de:

(a) $z = 2i$ (b) $z = 1-\sqrt{3}i$

3.) Decomponha o polinômios $P(x) = x^4+1$ e $Q(x) = x^4+9$ em fatores de 2^{do} grau com coeficientes reais.

4.) Decomponha os seguintes polinômios em produto de fatores do 1^{er} grau.

(a) $P(z) = z^6 - 64$

(b) $P(z) = z^6 + 64$

(c) $P(z) = 5z^3 + 8$

(d) $P(z) = z^2 - 2z + 2$

(e) $P(z) = z^2 - (1+i)z + 5i$

(f) $P(z) = z^4 - (1-i)z^2 - i$

5.) Prove que se $\omega = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ é raíz n-ésima primitiva da unidade, então as n raízes n-ésimas da unidade são dadas por $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$.

6.) Prove que $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1} = 0$, onde ω é qualquer raíz n-ésima da unidade, diferente de 1.

7.*) Prove que

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \cdots + n\omega^{n-1} = \frac{n}{\omega - 1},$$

onde ω é qualquer raíz n-ésima da unidade, diferente de 1.