UNIVERSIDADE FEDERAL TECNOLÓGICA DO PARANÁ
VARIÁVEIS COMPLEXAS
LISTA Nro. 4

Prof. Dr. Iván Gonzáles

9 de maio de 2022

1 Integração Complexa II

1.)* Prove o seguinte teorema : *Qualquer polinômio* $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, *com* $a_n \neq 0$, *de grau* n $(n > 1)$ *possui pelo menos uma raíz. Isto é, existe pelo menos um ponto* z_0 *tal que* $P(z_0) = 0$. **Dica:** Use redução ao absurdo!: Suponha que o polinômio não possui raíz, então a função $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ é inteira, mostre que ela é limitada e contínua e use o teorema de Liouville.

2)* Seja $C : |z| = 3$ e parametrize em sentido positivo. Mostre que se

$$g(w) = \int_C \frac{2z^2 - z - 2}{z - w} dz$$

com $|w| \neq 3$, então $g(2) = 8\pi i$. Qual é o valor de $g(w)$ quando $|w| > 3$?.

3)* Seja C o círculo unitário $z = re^{i\theta}$, onde $\pi \leq \theta \leq \pi$. Mostre primeiro que, para qualquer constante real a temos

$$\int_C \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i.$$

Logo, re-escreva esta integral em termos de θ para obter a fórmula de integração

$$\int_0^\pi e^{a\cos\theta} \cos(a \sin\theta) d\theta = \pi.$$

2 Séries de funções

1) Ache a região de convergência das séries

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4n}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$.

2) Seja $S_n = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots + nz^n$, $T_n = z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n$.

(a) Prove que $S_n = \dfrac{T_n - nz^{n+1}}{1 - z}$.

(b) Use (a) para calcular a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ e determine o conjunto de valores para os quais ela converge.

3) Mostre que:

(a) $\displaystyle\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$.

(b) $\displaystyle ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

(c) $\displaystyle\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$.

(d) $\displaystyle\frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$.

(e) $\displaystyle ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$.

4) Use o teste de Weierstrass para testar a convergência das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos 3n}{1+5n} z^n$, no disco $|z| \leq r < 1$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 2\cos n}{10n^2+7} z^{2n-1}$, no disco $|z| \leq r < 1$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+7\sqrt{n+1}}{(n+1)2^n} z^{2n-1}$, no disco $|z| \leq r < 2\sqrt{2}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(z-1)^n}{n+1}$, no disco $|z-1| \leq r < 1$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{R^n} z^n$, no disco $|z| \leq r < R$, quaisquer R e k.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} z^n$, no disco $|z| < R$, quaisquer R e a.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - z}$, em qualquer desco compacto que exclua os quadrados perfeitos.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{z/n}}{n^2 + z^2}$, em qualquer conjunto compacto que não contenha os números da forma $z = \pm in$ com n natural.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(z-n)}$, em qualquer conjunto compacto que exclua os números naturais.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2 - z^2}$, em qualquer conjunto que exclua os números inteiros.

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{n^3}$, no disco $|z| \leq 1$.em qualquer conjunto que exclua os números inteiros.

5)* [A função que vale 1 milhão de dólares!] Mostre que a função **ZETA DE RIEMANN**

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

define uma função analítica em $Re(z) > 0$.

6.)* Escreva $z = re^{i\theta}$, onde $0 < r < 1$. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{r\cos\theta - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

Dica: use a série geométrica.