UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS PATO BRANCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

GILSON TUMELERO
MARIELI MUSIAL TUMELERO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS.

Pato Branco - PR
2019

Aos nossos filhos
Gustavo e Manuela,
que mesmo sem
entenderem,
apoiaram.

Quando alimentamos mais a nossa coragem do que os nossos medos... passamos a derrubar muros e a construir pontes.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Este material é nada mais do que as notas de aula das disciplinas de Equações Diferenciais Ordinárias do núcleo básico das engenharias da Universidade Tecnológica Federal do Paraná e Equações Diferenciais do curso de Bacharelado em Química da mesma universidade. Elas foram elaboradas pelos professores Gilson Tumelero e professora Marieli Musial Tumelero.

O objetivo destas notas é apresentar todo o conteúdo da ementa de tal disciplina ao aluno em um único material, apresentando conceitos e os exemplos que achamos mais relevantes na aprendizagem. A ideia é fornecer este material antecipadamente para que o estudante que desejar estudar o conteúdo antes das aulas possa fazê-lo e durante a aula fazer anotações de eventuais pontos que não tenham ficado claro na sua leitura.

Estas notas, estão baseadas em livros clássicos que tratam sobre os assuntos abordados na ementa da disciplina. Elas estão divididas em capítulos. O capítulo 2 trata sobre equações diferenciais de maneira geral e como classifica-las. No capítulo 3, tratamos do estudo das EDOs de primeira ordem e como resolve-las, para no capítulo 4 fazermos uso destes métodos nas aplicações destas.

Nos capitulos 5 e 6, aprederemos, respectivamente, a resolver EDOs de segunda ordem lineares e sistemas de equações diferenciais lineares e com coeficientes constantes. Já no capítulo 7, temos o estudo de transformada de Laplace.

Ao decorrer dos capítulos e seções, indicamos listas de exercícios com o objetivo de fixação e manipulação dos conceitos estudados.

Capítulo 2

Equações Diferenciais

2.1 Equações diferenciais

Iniciemos nosso estudo de equações diferenciais dizendo o que é uma equação diferencial: "Uma equação diferencial é uma equação que envolve uma função f e/ou suas derivadas".

Fazendo $y = f(x, y)$, são exemplos de equações diferenciais:

1. $\dfrac{dy}{dx} = 5x + 3;$

2. $e^y \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 1;$

3. $4\dfrac{d^3y}{dx^3} + sen\, x \dfrac{d^2y}{dx^2} + 5xy = 0;$

4. $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^7 + y^3\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 5x.$

Relembrando que $\dfrac{dy}{dx} = y'$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = y^{''}, \cdots$, ou ainda, quando $y = f(x)$ então $y' = f'(x), \cdots$.

No curso de cálculo, você aprendeu que, dada uma função $y = f(x)$ a derivada $\dfrac{dy}{dx} = y'$ é também uma função de x e é calculada por regras apropriadas. Por exemplo, se $y = e^{x^2}$ então $\dfrac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}$ ou $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$.

O problema com o qual nos deparamos neste curso não é: *Dado uma função* f *encontre a sua derivada e sim, dado uma equação diferencial* $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$, *encontre de algum modo uma função* $y = f(x)$ *que satisfaça a equação.*

Motivação: Considere um corpo de massa m em queda vertical influenciada apenas pela gravidade g e pela resistência do ar proporcional a velocidade do corpo. Admitamos que tanto a gravidade como a massa permaneçam constante e por conveniência escolhamos o sentido "para baixo"como sentido positivo.

Lembramos agora da segunda *lei de Newton*

$$F = ma \Rightarrow F = m\frac{dv}{dt} \tag{2.1}$$

onde F é a força resultante que atua sobre o corpo e v a velocidade do corpo, ambos considerados no instante t.

No problema em foco há duas forças atuando sobre o corpo:

1. A força devido à gravidade, dada pelo peso P do corpo, que é igual a mg.
2. A força devido à resistência do ar dada por -kv, onde $k \geq 0$ é uma constante de proporcionalidade.
   Obs.: O sinal negativo (-kv) se dá pelo fato da força estar atuando no sentido contrário ao movimento.

Assim a força resultante é:

$$F_R = mg - kv \tag{2.2}$$

Substituindo (2.2) em (2.1) temos:

$$\begin{aligned} mg - kv = m\frac{dv}{dt} \quad &\Rightarrow \quad g - \frac{k}{m}v = \frac{dv}{dt} \\ &\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Se a resistência do ar é desprezível, ou não existe, então $k = 0$ e (2.3) simplifica por:

$$\frac{dv}{dt} = g \tag{2.4}$$

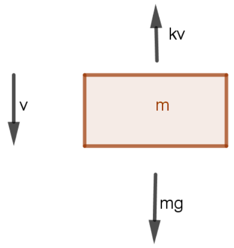


Figura 2.1: Corpo em queda

Exemplo 1: Deixa-se cair um corpo de massa de 5 kg de uma altura de 100 m, com velocidade inicial nula. Supondo que não haja resistência do ar, determine:

a) A expressão da velocidade do corpo no instante t;

b) A expressão da posição do corpo no instante t;

c) O tempo necessário para o corpo atingir o solo.

Dado: $g = 9,8m/s^2$

Solução:

a) Como não há resistência do ar, temos:

$$\frac{dv}{dt} = g.$$

Resolvendo,

$$dv = gdt \Rightarrow \int dv = \int gdt \Rightarrow v(t) = gt + C \tag{2.5}$$

Lembrando que em física você aprendeu a fórmula da velocidade para uma aceleração constante, que era dada por:

$$v = v_0 + at$$

Esta fórmula é similar a obtida, onde a aceleração constante é a gravidade ($a = g$) que atua sobre o corpo.

Agora como em $t = 0$, $v = 0$ em (2.5) temos:

$$0 = g.0 + C \Rightarrow C = 0.$$

Isto é, (2.5) se reescreve como $v = gt$. Substituindo o valor da gravidade temos:

$$v(t) = 9,8t. \tag{2.6}$$

b) Lembrando que $v = \dfrac{dx}{dt}$, temos dessa equação e de (2.6) que:

$$\frac{dx}{dt} = 9,8t \Rightarrow dx = 9,8tdt \Rightarrow \int dx = \int 9,8tdt \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{9,8}{2}t^2 + C_1} \tag{2.7}$$

Obs.: Veja que a fórmula que você decorou no curso de física da posição de um corpo que possui uma aceleração constante:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Novamente quando $t = 0$, $x = 0$, daí e de (2.7), temos:

$$x(t) = \frac{9,8}{2}t^2 \ , \ C_1 = 0. \tag{2.8}$$

c) Queremos saber o valor de t quando $x = 100$. Substituindo essa informação em (2.8) temos:

$$100 = \frac{9,8}{2}t^2 \Rightarrow \frac{200}{9,8} = t^2 \Rightarrow t^2 = 20,4 \Rightarrow \boxed{\text{t=4,5 } s}.$$

2.2 Campos de Direção

Vamos investigar agora o comportamento da solução antes mesmo de resolve-la. Procederemos fazendo um estudo geométrico. Para isto, vamos considerar a equação $\dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{k}{m}v$ (2.3) (Um corpo em queda). Nesta equação temos três constantes g, k e m. Afim de fazermos o estudo geométrico vamos atribuir valores $g = 9,8\,m/s^2$, $k = 1\,kg/s$ e $m = 5kg$. Desta forma temos a equação:

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5} \tag{2.9}$$

Vamos agora supor que v tenha um determinado valor, então calculamos a expressão a direita do sinal de igualdade na equação (2.9), encontrando o valor correspondente $\frac{dv}{dt}$. Por exemplo se $v = 40m/s$, então $\frac{dv}{dt} = 1,8\,m/s^2$. Isto significa que a inclinação de uma solução $v(t)$ tem o valor $1,8$ em qualquer ponto onde $v = 40\,m/s$. Analogamente, se $v = 50\,m/s$, então $\frac{dv}{dt} = -0,2\,m/s^2$ em diversos pontos de reta $v = 50\,m/s$. Procedemos desta maneira, obtemos um exemplo de o que é chamado de **campo de direções**:

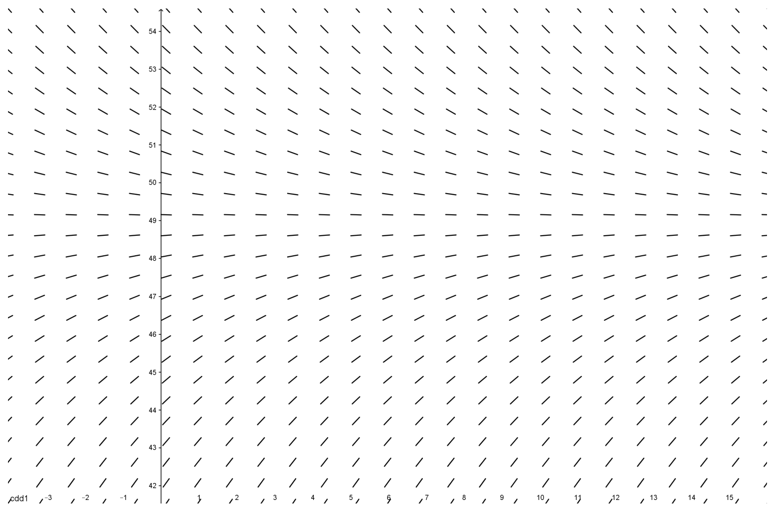


Figura 2.2: Campo de direção

O gráfico mostra que cada segmento de reta é tangente ao gráfico de uma solução da (2.9). Assim, mesmo não tendo encontrado qualquer solução e não parecendo o gráfico de nenhuma solução, podemos fazer deduções sobre o comportamento das soluções. Por exemplo, se v for menor que um valor crítico então todos os coeficientes angulares positivos e a velocidade do objeto em queda aumentam enquanto ele cai (derivada > 0 função crescente). Por outro lado se v for maior que um valor crítico, então os segmentos de retas têm coeficientes angulares negativos (derivada < 0 função decrescente), a velocidade diminui a medida que cai. A partir disso somos levados a pensar: Qual o valor crítico de v que separa os casos acima?

Temos um ponto crítico quando a derivada é igual a zero, isto é, em (2.9):

$$0 = 9,8 - \frac{v}{5} \Rightarrow v = 49$$

De fato a função $v = 49$ é solução de (2.9).

'Para verificar esta afirmação basta substituir $v(t) = 49$ em (2.9). Como esta solução não varia com o tempo ($v(t) = 49$) é chamada solução de equilíbrio. Neste caso, a solução correspondente a um equilíbrio entre a gravidade e a resistência do ar.

Da figura do campo de direções, podemos chegar a uma outra conclusão, a saber que todas as outras soluções parecem estar convergindo para a solução de equilíbrio quando t aumenta.

2.3 Classificação das Equações Diferenciais

As equações são classificadas de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade (Esta classificação é útil para estabelecer métodos para encontrar solução de ED).

2.3.1 Classificação pelo Tipo

Se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente, ela é chamada de **equação diferencial ordinária (EDO)**. (Em outras palavras, se a equação contém somente derivadas de uma variável.)

Exemplos:

1. $\dfrac{dy}{dx} - 5y = 1$;
2. $(y - x)dx + 4xdy = 0$;
3. $\dfrac{du}{dx} - \dfrac{dv}{dx} = x$;
4. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$.

Uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de **equação diferencial parcial (EDP).** (Em outras palavras, a equação possui derivadas parciais.)

Exemplos:

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial v}{\partial y}$;

2. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u$;

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

2.3.2 Classificação pela Ordem

A ordem da derivada de maior ordem em uma equação diferencial é, por definição, a **ordem da equação**.

Exemplos:

1. A equação $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5(\dfrac{dy}{dx})^3 - 4y = e^x$ é uma equação diferencial ordinária de $2^{\underline{a}}$ ordem (ou ordem 2).

2. A equação diferencial $(y-x)dx + 4xdy = 0$ pode ser escrita na forma $4x\dfrac{dy}{dx} + y = x$, dividindo pelo diferencial dx, então temos um equação de ordem 1 (EDO).

3. A equação $a^2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ é dita uma equação diferencial de $4^{\underline{a}}$ ordem.

Uma equação diferencial ordinária geral de **n-ésima ordem** é frequentemente representada pelo simbolismo:

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}, ..., \frac{d^n y}{dx^n}) = 0.$$

2.3.3 Classificação quanto a linearidade

Uma equação diferencial é chamada **linear** quando pode ser escrita na forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Observe que as equações diferenciais lineares são caracterizadas por:

- A variável dependente y e todas as suas derivadas são de primeiro grau, isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1;
- Cada coeficiente depende apenas da variável independente x

Exemplos:

1. $xdy + ydx = 0$;
2. $y'' - 2y' + y = 0$;
3. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} - x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3x\dfrac{dy}{dx} + 5y = e^x$.

São EDO's lineares de primeira, segunda e terceira ordem, respectivamente.

Uma equação que não é linear é dita **não-linear**.

Exemplos:

1. $yy'' - 2y = x$;
2. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + y^2 = 0$.

São equações diferenciais não-lineares de segunda e terceira ordem, respectivamente.

2.4 Soluções

Definição 2.4.1 *Qualquer função f definida em algum intervalo I, que quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade (verifica a igualdade), é chamada de solução para a equação no intervalo. Em outras palavras, uma solução para uma equação diferencial ordinária:*

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

é uma função f que possui n derivadas e satisfaz a equação, isto é:

$$F(x, f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)) = 0$$

para todo x no intervalo I (I é subintervalo de $\mathbb{R}$).

Exemplos:

1) $y = \dfrac{x^4}{16}$ é uma solução para a equação diferencial não linear $\dfrac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$.

De fato: Para verificarmos isto podemos escrever $\dfrac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}} = 0$. Agora se $y = \dfrac{x^4}{16}$ então $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x^3}{16} = \dfrac{x^3}{4}$ e com $y = \dfrac{x^4}{16}$, então $y^{\frac{1}{2}} = \dfrac{x^2}{4}$, e portanto,

$$\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}} = \frac{x^3}{4} - x\frac{x^2}{4} = \mathbf{0}.$$

Logo, $y = \dfrac{x^4}{16}$ é uma solução para a equação diferencial não linear $\dfrac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

2) A equação linear de primeira ordem $y' = y$ tem uma solução dada por $y = e^x$.

De fato: pois se $y = e^x$, então $y' = e^x$ e portanto $y = y'$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

3) A função $y = xe^x$ é uma solução para a equação linear $y'' - 2y' + y = 0$ no intervalo $(-\infty,+\infty)$.

De fato: Para verificarmos isto, calculamos a primeira e a segunda derivada de y:

$$y' = e^x + xe^x \quad \text{e} \quad y'' = e^x(2 + x).$$

Observe então que:

$$y'' - 2y' + y = 2e^x + xe^x - 2xe^x - 2e^x + xe^x = \mathbf{0}$$

para todo número real x.

Observação 2.4.2 *Note que nos exemplos 1, 2 e 3 a função $y = 0$ (constante nula) satisfaz a equação diferencial dada para todo x real. Uma solução para uma equação diferencial que é identicamente nula em um intervalo I é em geral chamada de* ***solução trivial*** *(Nosso objetivo é buscar a solução não trivial).*

2.4.1 Número de soluções de uma ED

Conforme o cálculo de primitivas, sabemos que se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ então $G(x) = F(x) + c$ é o conjunto das primitivas de $f(x)$, ou seja, $f(x) = (F(x) + c)'$. De posse deste resultado, temos uma ideia do número de soluções para um ED.

Para ilustrar melhor a ideia do que pode acontecer, consideremos o seguinte exemplo visto na motivação da modelagem da queda de um corpo (Início).
Neste exemplo, procedemos informalmente da seguinte maneira:
Tínhamos que $\dfrac{dx}{dt} = 9,8t$ e fizemos $dx = 9,8tdt$ e integramos: $\int dx = \int 9,8tdt$

Ou seja, $x(t) = \dfrac{9,8t^2}{2} + c$.

Vamos fazer gráficos da função $x(t)$ para valores diferentes de c.

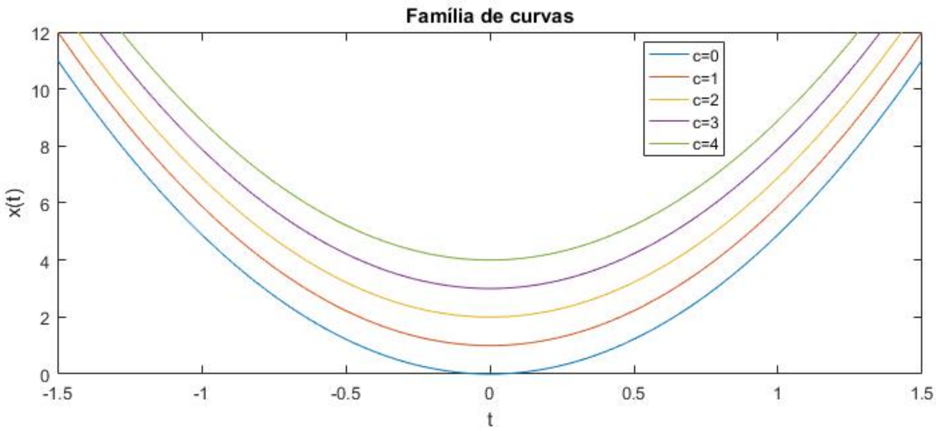


Figura 2.3: Família de curvas para diversos valores de 'c'

Para cada valor de c temos uma função (curva) que é solução da equação $\dfrac{dx}{dt} = 9,8t$. O conjunto destas curvas é chamado de **família de curvas integrais**.

Novamente retornando ao cálculo de primitivas, quando integramos (integral indefinida) uma vez, utilizamos uma única constante de integração. De maneira análoga, ocorre quando resolvemos uma equação diferencial de primeira ordem $f(x, y, y') = 0$, obtemos uma família de curvas ou funções $G(x, y, c) = 0$ contendo um parâmetro arbitrário tal que cada membro da família é uma solução da ED. Na verdade, quando resolvemos uma equação de n-ésima ordem $f(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ em que esperamos uma família a n-parâmetros de soluções $G(x, y, c_1, ..., c_n) = 0$ (solução geral ou completa).

Uma solução que não depende de parâmetros arbitrários é chamada de **solução particular**.

Por exemplo, $y = ce^x$ é uma família a um parâmetro de soluções para a equação de primeira ordem $y' = y$ e $y = 5e^x$ é uma solução particular.

As vezes uma equação diferencial possui uma solução que não pode ser obtida especificando-se os parâmetros em uma família de soluções. Tal solução é chamada de **solução singular**.

Exemplo 2.1 *Determine k para que $y = kx^2$ seja uma solução para a equação $y = xy' + (y')^2$.*

Solução: Substitua a função $y = kx^2$ e $y' = 2kx$ na equação diferencial.

$$\begin{aligned} kx^2 = x2kx + (2kx)^2 &\Leftrightarrow kx^2 = 2kx^2 + 4k^2x^2 \\ &\Leftrightarrow kx^2 = (2k + 4k^2)x^2 \\ &\Leftrightarrow k = 2k + 4k^2 \\ &\Leftrightarrow 4k^2 + k = 0 \\ &\Leftrightarrow k(4k + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow k = 0 \text{ ou } k = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Lista de Exercícios 2.1 *.*
Livro: Equações Diferenciais, volume 1
Autor: Dennis G. Zill e Michael R. Cullen
Exercícios: *1 ao 10, ímpares: 11 ao 42, 43, 47, 48, 49, 50, 51. (pág. 11 e 12).*

Capítulo 3

EDO de primeira ordem

3.1 Problema de valor inicial:

Estamos interessados em resolver uma equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3.1}$$

Dizemos que uma E.D. de 1ª ordem $y' = f(x, y)$ está na forma normal. Mas também como a função $f(x, y)$ acima, pode sempre ser escrita como o quociente de outras funções $M(x, y)$ e $-N(x, y)$ (o sinal é por conveniência), pode-se escrever da seguinte forma a ED acima:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{-N(x, y)}$$

ou ainda,

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

a qual é chamado de **forma diferencial**.

Estaremos interessados em resolver $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ sujeito à uma condição inicial $y(x_0) = y_0$, em que x_0 é um número real arbitrário.

O problema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

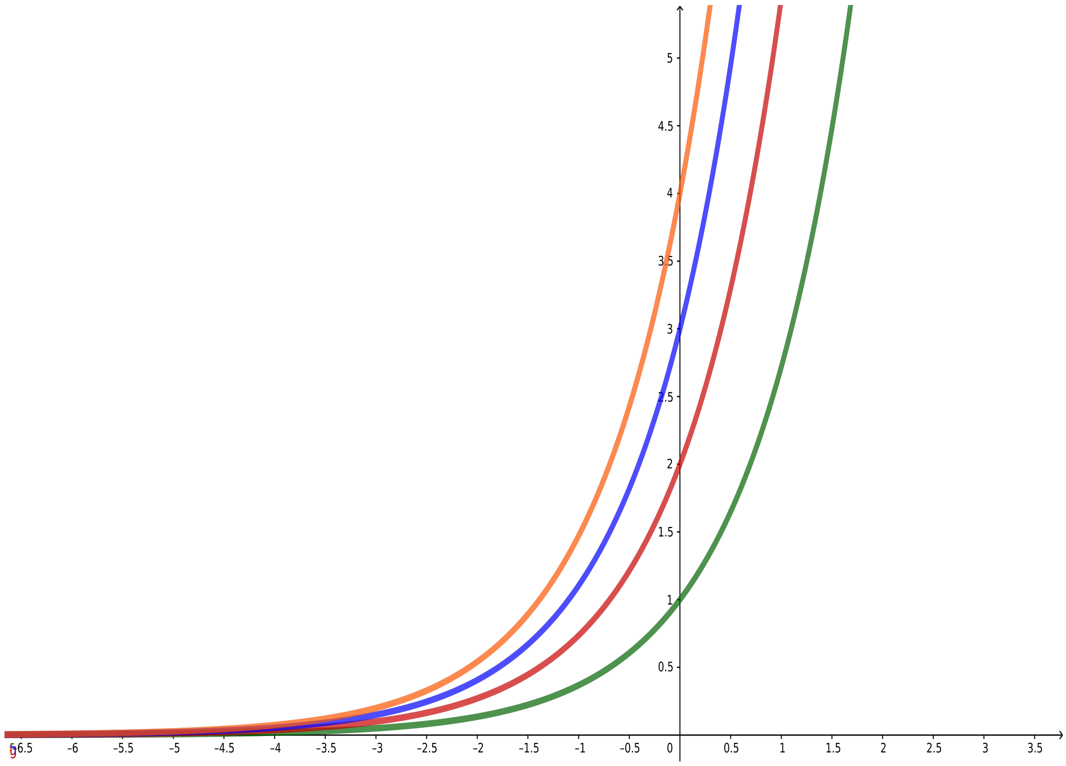
é chamado de **problema de valor inicial (PVI)**.

Em termos geométricos, estamos procurando uma função f que satisfaça a ED e cuja curva contenha o ponto (x_0, y_0).

Exemplo 3.1 *Resolva:*

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Solução:



Queremos que $y(0) = 3$, então $3 = y(0) = Ce^0$, ou seja, $3 = C$. Portanto, a solução pedida é $\boxed{y(x) = 3e^x}$ do PVI.

A questão fundamental surge ao considerar um problema de valor inicial (PVI) como em (3.2) é:
- Existe uma solução para o problema?
- Se ela existe, é única?

Observemos o seguinte exemplo:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Observe que $y = \dfrac{x^4}{16}$ é solução para $\dfrac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$ (já visto), e além disso, satisfaz $y(0) = 0$. Portanto, $y = \dfrac{x^4}{16}$ é uma solução para o PVI.
Agora, note que a função constante $y = 0$ (solução trivial) também satisfaz o PVI, sendo também solução.

Concluímos assim que nem sempre que exista uma solução para o PVI ela é única. A seguir um resultado que garante existência e unicidade para um PVI do tipo:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Teorema 3.1.1 ***(Existência e unicidade)***: *Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a \leqslant x \leqslant b$ e $c \leqslant y \leqslant d$ que contém o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se $f(x, y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em R, então existe um intervalo I centrado em x_0 e uma única função $y = y(x)$ definida em I que satisfaz o PVI (3.2).*

No exemplo anterior, vimos que o PVI tinha duas soluções. O que no exemplo anterior não satisfaz o teorema?

Obseve que f não cumpre as hipóteses para todo $x \in \mathbb{R}$, pois $f(x, y) = xy^{\frac{1}{2}}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{2y^{\frac{1}{2}}}$ são contínuas apenas no semiplano superior, isto é, $y > 0$. Então para termos uma única solução deveríamos ter que $y_0 = y(x_0)$ deve ser maior que zero ($y_0 > 0$).

Exemplo 3.2 *Determine uma região do plano xy para o qual a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$$

tenha uma única solução.

Solução: Usando a nossa notação, podemos escrever $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y) = \sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.

Note que $f(x,y)$ é contínua quando $\boxed{x > 0 \text{ e } y > 0}$ ou $\boxed{x = 0}$ ou $\boxed{y = 0}$ ou $\boxed{x < 0 \text{ e } y < 0}$, e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}(x)^{\frac{1}{2}}(y)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ contínua somente se $\boxed{x \leq 0 \text{ e } y > 0}$ ou $\boxed{x \geq 0 \text{ e } y < 0}$.

Lista de Exercícios 3.1 .
Livro: Equações Diferenciais, volume 1
Autor: Dennis G. Zill e Michael R. Cullen
Exercícios: *1 ao 10. (pág. 42 e 43).*

3.2 EDO Separáveis

Iniciamos o estudo dos métodos de resolução de EDO de primeira ordem pela mais simples das formas de equação.

Se $g(x)$ é uma função contínua então a equação de primeira ordem $\dfrac{dy}{dx} = g(x)$, pode ser resolvida por integração: $\dfrac{dy}{dx} = g(x)$, ou seja, $dy = g(x)dx$ de onde temos $y(x) = \int g(x)dx + C$.

Por exemplo:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + e^{2x} \text{ então } y(x) = x + \frac{e^{2x}}{2} + C.$$

Este exemplo acima é um caso particular de:

Definição 3.2.1 ***(Equação separável)****: Uma equação diferencial da forma* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x)}{h(y)}$ *é chamada* ***separável*** *ou* ***de variáveis separáveis****.*

Observação 3.2.2 *Na forma diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ dizemos que é separável se $M(x,y)$ depende apenas de x e $N(x,y)$ depende apenas de y.*

Agora, note que, podemos escrever uma equação separável como:

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x). \tag{3.3}$$

Agora se $y = f(x)$ denota uma solução para (3.3), temos $h(f(x))f'(x) = g(x)$, o que integrando:

$$\int h(f(x))f'(x)dx = \int g(x)dx + C. \tag{3.4}$$

Mas como $dy = f'(x)dx$, em (3.4) é o mesmo que:

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + C. \tag{3.5}$$

Em resumo: Uma família a um parâmetro de soluções é obtida integrando ambos os lados de $h(y)dy = g(x)dx$.

Exemplo 3.3 *Resolva:* $xdx - y^2dy = 0$.

Solução: $xdx = y^2dy$, o que integrando $\int xdx = \int y^2dy$, ou seja, $\dfrac{y^3}{3} = \dfrac{x^2}{2} + C$.

Exemplo 3.4 *Resolva:* $y' = y^2x^3$.

Solução: $\dfrac{dy}{dx} = y^2x^3 \Longleftrightarrow \dfrac{dy}{y^2} = x^3dx$, que integrando obtemos $\int y^{-2}dy = \int x^3dx$, ou seja, $-y^{-1} = \dfrac{x^4}{4} + C \Longleftrightarrow \dfrac{1}{y} = -\dfrac{x^4}{4} + C$, ou ainda, $y = \dfrac{1}{-\frac{x^4}{4} + C}$.

Exemplo 3.5 *Resolva o problema de valor inicial:*

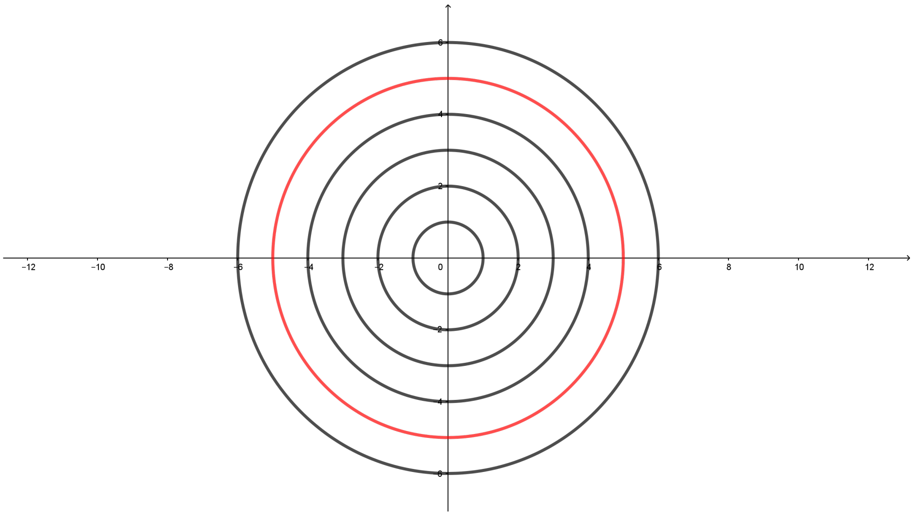
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y} \\ y(4) = 3 \end{cases}$$

Solução: É fácil ver que a equação é separável. Então $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$, ou ainda $ydy = -xdx$, que integrando obtemos $\displaystyle\int ydy = \int -xdx$, ou seja $\dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{x^2}{2} + C_1$.

Rescrevendo a última expressão com

$$y^2 + x^2 = r^2 = 2C_1.$$

Agora temos que nossa equação deve satisfazer $y(4) = 3$, de onde temos que $4^2 + 3^2 = r^2$ ou $r^2 = 25$, isto é, $r = 5$. Com isso obtemos que a solução para o PVI é a circunferência centrada na origem com raio 5.



Exemplo 3.6 *Resolva a equação diferencial* $xe^{-y} \sin x dx - y dy = 0$.

Solução: A equação é separável e escrevemos

$$x \sin x dx = ye^y dy$$

que integrando

$$\int x \sin x dx = \int ye^y dy.$$

Resolvendo as integrais acima separadamente:

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= -x \cos x - \int -\cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int ye^y dy &= ye^y - \int e^y dy \\ &= ye^y - e^y = e^y(y-1) \end{aligned}$$

Portanto,

$$e^y(y-1) = -x\cos x + \sin x$$

é a solução implícita.

Exemplo 3.7 *Resolva o problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y^2 - 4 \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

Solução: Colocamos $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 4$ na forma $\dfrac{dy}{y^2-4} = dx$. Usando frações parciais:

$$\frac{1}{y^2-4} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{y+2} = \frac{Ay+2A+By-2B}{(y-2)(y+2)} = \frac{(A+B)y+2A-2B}{(y-2)(y+2)}$$

Então:

$$\begin{cases} A+B=0 \Rightarrow A=-B \\ 2A-2B=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow -2B-2B=1 \Rightarrow B=-\dfrac{1}{4}$ e $A=\dfrac{1}{4}$. Assim

$$\frac{dy}{y^2-4} = \left[\frac{\frac{1}{4}}{y-2} - \frac{\frac{1}{4}}{y+2}\right] dy = dx,$$

integrando:

$$\frac{1}{4}\int \left[\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2}\right] dy = \int dx,$$

ou seja:

$$\frac{1}{4}\left[\ln|y-2| - \ln|y+2|\right] = x + C_1,$$

ou ainda:

$$\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = 4x + C_2,$$

que aplicando exponencial:

$$\frac{y-2}{y+2} = Ce^{4x} \ (e^{C_2} = C)$$

e isolando y:

$$y = 2\left[\frac{1+Ce^{4x}}{1-Ce^{4x}}\right].$$

Agora, substituindo os dados iniciais $y(0) = -2$ temos o seguinte dilema:
$-2 = 2\left[\dfrac{1+C}{1-C}\right] \Longleftrightarrow -1(1-C) = 1+C \Longleftrightarrow -1+C = 1+C \Longleftrightarrow -1 = 1$

O que??? $-1 = 1$?? Onde está o erro???

Observe que $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 4$ comparando com $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ temos pelo teorema de existência e unicidade que $f(x,y)$ e $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ são contínuas para todo $x \in \mathbb{R}$ e portanto o PVI tem solução única. Analisando $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 4 = (y-2)(y+2)$ ao fazermos $\dfrac{dy}{y^2-4} = dx$, automaticamente desconsideramos $y = 2$ e $y = -2$. Mas observe que $y = -2$ é solução para o PVI. Agora pelo teorema, $y = -2$ é a única solução para o PVI.

Lista de Exercícios 3.2 .
Livro: Equações Diferenciais, volume 1
Autor: Dennis G. Zill e Michael R. Cullen
Exercícios: *Ímpares: 1 ao 47. (pág. 50 e 51).*

3.3 Equações Homogêneas

Nosso objetivo é estudar um método para encontrar solução para uma equação diferencial homogênea de primeira ordem. Então, começamos por:

Definição 3.3.1 ***(Função homogênea)*** *Se uma função f satisfaz $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ para algum número real n, então dizemos que f é uma função homogênea de grau n.*

Exemplo 3.8 $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y^2}$.

Solução:

$$f(tx,ty) = \sqrt[3]{(tx)^2+(ty)^2} = \sqrt[3]{t^2x^2+t^2y^2} = \sqrt[3]{t^2(x^2+y^2)} = t^{2/3}\sqrt[3]{(x^2+y^2)} = t^{2/3}f(x,y).$$

Portanto f é homogênea.

Exemplo 3.9 $f(x,y) = \frac{x}{2y} + 4$.

Solução:

$$f(tx, ty) = \frac{tx}{2ty} + 4 = \frac{x}{2y} + 4 = t^0 f(x, y).$$

Portanto f é homogênea de grau 0.

Observação 3.3.2 *Note que se $f(x, y)$ for uma equação homogênea de grau n, então podemos escrever $f(x, y) = x^n f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ e $f(x, y) = y^n f\left(\frac{x}{y}, 1\right)$ em que $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ e $f\left(\frac{x}{y}, 1\right)$ são homogêneas de grau zero.*

De fato, como $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ então fazendo $t = \frac{1}{x}$ temos $f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^n} f(x, y)$, ou seja, $f(x, y) = x^n f\left(1, \frac{y}{x}\right)$. Analogamente para $f(x, y) = y^n f\left(\frac{x}{y}, 1\right)$.

Exemplo 3.10 *A função $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ é homogênea de grau 2.*

Solução: De fato,

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^2 + 3(tx)(ty) + (ty)^2 \\ &= t^2x^2 + 3t^2xy + t^2y^2 \\ &= t^2[x^2 + 3xy + y^2] \\ &= t^2 f(x, y). \end{aligned}$$

Ou de outra modo, podemos verificar utilizando a observação 3.3.2 e assim temos

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = 1 + 3\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

e portanto

$$x^2 f\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^2 \left[1 + 3\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] = x^2 + 3xy + y^2 = f(x, y).$$

Da mesma forma,

$$f\left(\frac{x}{y},1\right)=\left(\frac{x}{y}\right)^2+3\frac{x}{y}+1$$

e portanto

$$y^2f\left(\frac{x}{y},1\right)=y^2\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2+3\frac{x}{y}+1\right]=x^2+3xy+y^2=f(x,y).$$

Definição 3.3.3 ***(Equação Homogênea)*** *Uma equação* $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ *é dita* ***homogênea*** *se* $f(x,y)$ *é homogênea de grau zero, ou equivalentemente, na forma diferencial* $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ *é chamada* ***homogênea*** *se ambos os coeficientes* M *e* N *são funções homogêneas do mesmo grau.*

3.3.1 Método de solução:

Equações desse tipo, podem ser resolvida por uma mudança algébrica. Fazendo $y=ux$ ou $x=vy$ onde u e v são as novas variáveis dependentes. Essa substituição transformará a equação diferencial $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ em uma equação diferencial de primeira ordem separável. (Segue uma ideia da demonstração:)

De fato, se fizermos

$$y=ux$$

então

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}.x+u.1\Rightarrow dy=xdu+udx.$$

Assim

$$\begin{aligned}0&=M(x,y)dx+N(x,y)dy\\&=x^nM(1,\frac{y}{x})dx+x^nN(1,\frac{y}{x})(xdu+udx)\\&=x^nM(1,u)dx+x^nN(1,u)(xdu+udx)\\&=x^n[M(1,u)dx+N(1,u)(xdu+udx)]\end{aligned}$$

o que implica

$$x^n=0 \text{ ou } M(1,u)+N(1,u)(xdu+udx)=0.$$

Como $x^n \neq 0$ pra algum x, então

$$\begin{aligned} M(1,u)dx + N(1,u)(xdu + udx) = 0 &\Rightarrow M(1,u)dx + N(1,u)udx + N(1,u)xdu = 0 \\ &\Rightarrow dx[M(1,u) + uN(1,u)] = -xN(1,u)du \\ &\Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)}du \end{aligned}$$

a qual é uma equação separável.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 3.11 *Resolva* $y' = \dfrac{y+x}{x}$.

Solução:

Exemplo 3.12 *Resolva* $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0.$

Solução:

Lista de Exercícios 3.3 .
Livro: Equações Diferenciais, volume 1
Autor: Dennis G. Zill e Michael R. Cullen
Exercícios: *Ímpares: 11 ao 37. (pág. 59).*

3.4 Equações Exatas

Antes de falarmos de equações exatas, precisamos lembrar do conceito de diferencial total.

Definição 3.4.1 *Se $z = f(x, y)$ é uma função com derivadas parciais contínuas em uma região R do Plano xy, então sua **diferencial total** é*

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{3.6}$$

Agora se $f(x, y) = c$, podemos gerar uma equação diferencial de primeira ordem, calculando a diferencial total fazendo

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0. \tag{3.7}$$

Exemplo 3.13 *Se $x^2 - 5xy + y^3 = c$ então temos que a forma diferencial é*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \quad &\Rightarrow \quad (2x - 5y)dx + (-5x + 3y^2)dy = 0 \\ &\Rightarrow \quad (-5x + 3y^2)dy = -(2x - 5y)dx \\ &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 5y}{-5x + 3y^2} \end{aligned} \tag{3.8}$$

o que podemos identificar como sendo equivalente a

$$d(x^2 - 5xy + y^3) = 0.$$

Note que (3.8) não é nem homogênea e nem separável.

Definição 3.4.2 ***(Equação Exata)*** *Uma expressão diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ é uma **diferencial exata** em uma região R do plano xy se ela corresponde à diferencial* *totoal de alguma função $f(x,y)$. Uma equação diferencial da forma*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

*é chamada de **equação diferencial exata** se a expressão do lado esquerdo é uma diferencial exata.*

Em outra palavras, $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é uma equação diferencial exata, se existe uma função $f(x,y) = c$ tal que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Exemplo 3.14 *A equação $x^2y^3dx + x^3y^2dy = 0$ é exata pois $d(\frac{1}{3}x^3y^3) = x^2y^3dx + x^3y^2dy$.*

Porém não é sempre tão simples assim de encontrar a função que origine a equação exata.

Teorema 3.4.3 ***(Critério para um diferencial exata)*** *Sejam $M(x,y)$ e $N(x,y)$ funções contínuas com derivadas parciais contínuas em uma região R definida por $a < x < b$ e $c < y < d$. Então $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ é uma diferencial exata, se e somente se*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{3.9}$$

Demonstração: (Ideia) Se $M(x,y)$ e $N(x,y)$ tem derivadas parciais contínuas na região R e $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é exata, então existe uma função $f(x,y) = c$ tal que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

para cada $(x,y) \in R$. Logo $M(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $N(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Portanto, pela continuidade da função f temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

□

A prova de que se $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ então existe uma função $f(x, y) = c$ tal que $M = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $N = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ nos fornece um método para "resolver" uma equação diferencial exata.

3.4.1 Descrição do Método

Dada uma equação

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{3.10}$$

verifique primeiro que a equação é exata, isto é, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$. Depois suponha que $M(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$. Daí podemos encontrar f integrando $M(x, y)$ em relação a x, considerando y uma constante. Escrevemos

$$f(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) \tag{3.11}$$

em que $g(y)$ é constante em relação a x. Agora derivando parcialmente (3.11) em y e supondo que $N(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ obtemos

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x, y)dx\right] + g'(y) = N(x, y).$$

Assim

$$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x, y)dx\right]. \tag{3.12}$$

Finalmente integre (3.12) em relação a y, obtendo assim $g(y)$ que substituindo em (3.11) obterá a função $f(x, y) = c$ que é a solução para a equação.

Observação 3.4.4 *Poderíamos ter iniciado com a suposição de que $N(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, integraríamos em y e assim por diante.*

Exemplo 3.15 *Resolva a equação diferencial*

$$(3x^2y - 2y^3 + 3)dx + (x^3 - 6xy^2 + 2y)dy = 0.$$

Solução:

.

Exemplo 3.16 *Resolva a equação diferencial*

$$2x sen\, y - y sen\, x + (x^2 cos\, y + cos\, x)y' = 0$$

sujeito as condições iniciais $y = \dfrac{\pi}{6}$ *se* $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Solução:

.

Lista de Exercícios 3.4 .
Livro: Equações Diferenciais, volume 1
Autor: Dennis G. Zill e Michael R. Cullen
Exercícios: *Ímpares: 1 ao 29. (pág. 67).*

3.5 Equações Lineares

Relembrando, que definimos a forma geral para uma equação diferencial linear de ordem n como

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

onde $a_i(x)$ dependem apenas de x e y e todas as suas derivadas são elevadas a potência 1. Então para $n = 1$, teremos uma equação diferencial linear de primeira ordem que escrevemos

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

a qual dividindo pelo coeficiente $a_1(x)$ obtemos

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \tag{3.13}$$

Teorema 3.5.1 *Se as funções P e Q em (3.13) são contínuas num intervalo aberto I: $\alpha < x < \beta$, que contém o ponto $x = x_0$, então existe uma única função $y = f(x)$ que satisfaz a equação $y' + P(x)y = Q(x)$ para cada x em I e que também satisfaz a condição inicial $y(x_0) = y_0$ onde y_0 é um valor inicial arbitrário.*

3.5.1 Método de resolução

Consideremos P e Q contínuas em I. Se $Q(x) = 0$ para todo $x \in I$, a equação (3.13) é separável e podemos escrever $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -P(x)$, desde que $y \neq 0$. Integrando temos $ln\,|y| = -\int P(x)dx + C_1$ que para nos auxiliar, escrevemos $ln\,|y| = -\int P(x)dx + ln\,|C|$. Desta forma temos

$$\begin{aligned} ln\,|y| - ln\,|C| = -\int P(x)dx \quad &\Rightarrow \quad ln\,|\frac{y}{C}| = -\int P(x)dx \\ &\Rightarrow \quad \frac{y}{C} = e^{-\int P(x)dx} \\ &\Rightarrow \quad ye^{\int P(x)dx} = C. \end{aligned}$$

Agora observe que

$$\begin{aligned} D_x[ye^{\int P(x)dx}] &= y'e^{\int P(x)dx} + P(x)ye^{\int P(x)dx} \\ &= e^{\int P(x)dx}[y' + P(x)y] \\ &= e^{\int P(x)dx}Q(x) \end{aligned}$$

e portanto integrando em x temos

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + K$$

que é a solução implícita para a equação (3.13).

Definição 3.5.2 *A expressão $e^{\int P(x)dx}$ é chamada de **fator de integração** para (3.13) (**fator integrante**).*

Exemplo 3.17 *Determine a solução para $y' - 2xy = x$.*

Solução:

.

Exemplo 3.18 *Determine o intervalo onde* $xy' + 4y = x^5$ *tem única solução e encontre-a.*

Solução:

Exemplo 3.19 *Resolva o PVI*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y^2},\ y(-2) = 0.$$

Solução: Observe que a equação diferencial não é separável, homogênea, exata ou linear na variável y. Porém se invertermos as variáveis, temos:

.

Exemplo 3.20 *Encontre uma solução contínua satisfazendo* $\dfrac{dy}{dx} + y = f(x)$ *com*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

e a condição inicial $y(0) = 0$.

Solução:

.

Lista de Exercícios 3.5 .
Livro: Equações Diferenciais, volume 1
Autor: Dennis G. Zill e Michael R. Cullen
Exercícios: *Ímpares: 1 ao 31. (pág. 77).*

3.6 Equação de Bernoulli

Definição 3.6.1 *Uma equação da forma*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n \tag{3.14}$$

em que n é um número real qualquer, é chamado de ***equação de Bernoulli****.*

Para $n = 0$ e $n = 1$, a equação (3.14) é linear em y. Agora se $y \neq 0$, (3.14) pode ser reescrito como

$$\frac{dy}{dx}y^{-n} + P(x)y^{1-n} = f(x). \tag{3.15}$$

Se fizermos $w = y^{1-n}$, $n \neq 0$ e $n \neq 1$ então

$$\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \quad \text{ou seja} \quad y^{-n}\frac{dy}{dx} = (\frac{1}{1-n})\frac{dw}{dx}$$

e substituindo em (3.15) obtemos

$$(\frac{1}{1-n})\frac{dw}{dy} + P(x)w = f(x)$$

que multiplicando-se por $1 - n$ torna-se

$$\frac{dw}{dy} + (1-n)P(x)w = (1-n)f(x). \tag{3.16}$$

Note que (3.16) é uma equação linear em w. Resolvendo (3.16) e depois fazendo $w = y^{1-n}$ obtemos a solução para (3.14).

Exemplo 3.21 *Resolva* $y' + \frac{1}{x}y = xy^2$.

Solução:

.

3.7 Equação de Ricatti

Definição 3.7.1 *A equação diferencial não linear*

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \tag{3.17}$$

é chamada de ***equação de Ricatti****.*

Se y_1 é uma solução particular para (3.17), então as substituições $y = y_1 + u$ e $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx}$ em (3.17) produzem:

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} = P(x) + Q(x)(y_1 + u) + R(x)(y_1 + u)^2,$$

isto é,

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} = P(x) + Q(x)y_1 + Q(x)u + R(x)y_1^2 + 2R(x)y_1u + R(x)u^2.$$

Como y_1 é uma solução particular de (3.17) então $\frac{dy_1}{dx} = P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2$, assim

$$\frac{du}{dx} = Q(x)u + 2R(x)y_1u + R(x)u^2$$

ou ainda

$$\frac{du}{dx} - [Q(x) + 2R(x)y_1]u = R(x)u^2$$

a qual é uma equação de Bernoulli para $n = 2$. Portanto temos

$$u^{-2}\frac{du}{dx} - [Q(x) + 2R(x)y_1]u^{-1} = R(x).$$

Fazendo $w = u^{-1} \Rightarrow \frac{dw}{dx} = -u^{-2}\frac{du}{dx}$ e substituindo na equação acima, temos

$$-\frac{dw}{dx} - [Q(x) + 2R(x)y_1]w = R(x)$$

que é linear em w e assim usamos o fator integrante.

Exemplo 3.22 *Resolva a equação de Ricatti* $\dfrac{dy}{dx} = -2 - y + y^2$.

Solução:

.

3.8 Equação de Clairaut

Definição 3.8.1 *Uma equação do tipo $y = xy' + f(y')$ é chamada de* ***equação de Clairaut****.*

Chamando

$$\frac{dy}{dx} = P \tag{3.18}$$

a equação fica

$$y = xP + f(P).$$

Derivando esta equação em x, temos

$$\frac{dy}{dx} = P + x\frac{dP}{dx} + f'(P)\frac{dP}{dx}$$

Substituindo (3.18) na equação acima, temos

$$P = P + x\frac{dP}{dx} + f'(P)\frac{dP}{dx}$$

a qual pode ser escrita como

$$\frac{dP}{dx}[x + f'(P)] = 0$$

de onde temos que

$$\frac{dP}{dx} = 0 \text{ ou } x + f'(P) = 0.$$

Desta forma, se $\dfrac{dP}{dx} = 0$ temos que $P = C$ e a solução é

$$y = xC + f(C).$$

A condição $x + f'(P) = 0$ nos fornece a solução singular.

Exemplo 3.23 *Resolva* $y = xy' + \dfrac{1}{2}(y')^2$.

Solução:

.

Lista de Exercícios 3.6 .
Livro: Equações Diferenciais, volume 1
Autor: Dennis G. Zill e Michael R. Cullen
Exercícios: *Ímpares: 1 ao 23. (pág. 83).*

Capítulo 4

Introdução a teoria de equações de ordem maior ou igual a dois

4.1 EDO Linear

Uma equação diferencial linear de ordem n tem a forma

$$b_n(x)y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x) \tag{4.1}$$

onde $g(x)$ e os coeficientes $b_j(x)$, $(j = 0, 1, \cdots, n)$ dependem somente da variável x. Em outras palavras, não dependem de y e de nenhuma de suas derivadas.

4.2 Problema de Valor Inicial e Problema de Valor de Contorno

Definição 4.2.1 ***(Problema de Valor Inicial)*** *Para uma equação diferencial de n-ésima ordem conforme (4.1) sujeito a*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ y''(x_0) = y''_0,\ \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{4.2}$$

em que y_0, y'_0, y''_0, $\cdots, y_0^{(n-1)}$ *são constantes arbitrárias, é chamado de* ***problema de valor inicial****. As constantes* y_0, y'_0, y''_0, $\cdots, y_0^{(n-1)}$ *são chamadas de* ***condições iniciais****.*

Teorema 4.2.2 ***(Existência e Unicidade)*** *Sejam* $b_n(x)$, $b_{n-1}(x)$, $\cdots, b_2(x)$, $b_1(x)$, $b_0(x)$, $g(x)$ *contínuas em um intervalo* I *com* $b_n(x) \neq 0$ *para todo* x *neste intervalo. Se* $x = x_0$ *é algum ponto deste intervalo, então existe uma única solução* $y(x)$ *para o problema de valor* *inicial (4.1)-(4.2).*

Exemplo 4.1 *Verifique que a função* $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ *é uma solução para o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' - 4y = 12x \\ y(0) = 4,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Solução:

Um outro tipo de problema, consiste em resolver uma equação diferencial de ordem 2 ou mais na qual a variável dependente y e suas derivadas são especificadas em pontos diferentes.

Definição 4.2.3 ***(Problema de Valor de Contorno - PVC)***
Um problema como

$$\begin{cases} b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x) \\ y(a) = y_0,\ y(b) = y_1 \end{cases} \tag{4.3}$$

é chamado de ***problema de valor de contorno****. Os valores $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$ são chamadas de* ***condições de contorno ou de fronteira****. Uma solução para o problema em questão é uma função que satisfaça a equação diferencial em algum intervalo I, contendo a e b cujo gráfico passa por (a, y_0), (b, y_1).*

Exemplo 4.2 *Verifique que no intervalo $(0, +\infty)$ a função $y = 3x^2 - 6x + 3$ satisfaz a equação diferencial e as condições de contorno*

$$\begin{cases} x^2y'' - 2xy' + 2y = 6 \\ y(1) = 0,\ y(2) = 3. \end{cases}$$

Solução:

Para uma E.D.O. de segunda ordem, outras condições de contorno podem ser:

$y'(a) = y'_0$, $y(b) = y_1$;

$y(a) = y_0$, $y'(b) = y'_1$;

$y'(a) = y'_0$, $y'(b) = y'_1$.

Os próximos exemplos, mostram que, mesmo que as condições do teorema de existência e unicidade sejam satisfeitas, um problema de valor de contorno pode ter:

- várias soluções;
- nenhuma solução;
- única solução.

Exemplo 4.3 *Uma família de dois parâmetros de soluções para a equação diferencial* $y'' + 16y = 0$ *é*

$$y = c_1 cos\, 4x + c_2 sen\, 4x.$$

Suponha agora que queiramos determinar aquela solução para a equação que também satisfaça as condições de contorno $y(0) = 0$ *e* $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Solução:

Exemplo 4.4 *Considere*

$$\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

verifique que o PVC não possui solução na família $y = c_1 cos\, 4x + c_2 sen\, 4x$.

Solução:

4.3 Equações Lineares Homogêneas

Definição 4.3.1 *Na equação (4.1)* $b_n(x)y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x)$ *com* $b_n(x) \neq 0$, *se* $g(x) = 0$ *então (4.1) é chamada de* ***equação homogênea***. *Caso contrário é dita* ***não-homogênea***.

Em (4.1) como $b_n(x) \neq 0$ para todo x em I, então podemos reescreve-lo como

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = \phi(x) \tag{4.4}$$

onde $a_j(x) = \dfrac{b_j(x)}{b_n(x)}$, $j = 0, 1, \cdots, n-1$ e $\phi(x) = \dfrac{g(x)}{b_n(x)}$.

Se todos os coeficientes $a_j(x)$ são constantes, a equação se chama **equação diferencial de coeficientes constante**. Caso contrário é dita de **coeficientes variáveis**.

Definamos o operador diferencial $L(y)$ por

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y \tag{4.5}$$

onde $a_i(x)$ são contínuos em algum intervalo. Então (4.4) pode ser reescrito como

$$L(y) = \phi(x) \tag{4.6}$$

e em particular uma equação diferencial linear homogênea pode ser escrita como

$$L(y) = 0. \tag{4.7}$$

Teorema 4.3.2 *O operador $L(y)$ é linear, isto é,*

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2) \tag{4.8}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Teorema 4.3.3 ***(Princípio da Superposição)*** *Se y_1 e y_2 são duas soluções quaisquer de $L(y) = 0$ então $c_1y_1 + c_2y_2$ também é uma solução de $L(y) = 0$ para c_1 e c_2 constantes arbitrárias.*

Observação 4.3.4 *Como o operador L é linear, podemos estender o Teorema 4.3.2 e Teorema 4.3.3 para y_1, y_2, $\cdots$, y_n.*

Exemplo 4.5 $2xy'' + x^2y' - (\operatorname{sen} x)y = 2$ *é linear, 2ª ordem, não homogênea e coeficientes não constantes.*

Exemplo 4.6 $yy''' + xy' + y = x^2$ *é não linear, 3ª ordem, não homogênea e coeficientes não constantes.*

Exemplo 4.7 $y'' - y = 0$ *é linear, 2ª ordem, homogênea e coeficientes constantes.*

Definição 4.3.5 *Um conjunto de funções* $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\}$ *é* ***linearmente dependente*** *em* $a \leq x \leq b$ *se existem constantes* $c_1, c_2, \cdots, c_n$ *não todos nulos, tais que*

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n(x) \equiv 0 \tag{4.9}$$

em $a \leq x \leq b$.

Exemplo 4.8 *O conjunto* $\{x, 5x, 1, sen\, x\}$ *é linearmente dependente em* $[-1, 1]$ *pois, existem constantes* $c_1 = -5$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$ *e* $c_4 = 0$ *não todas nulas tais que*

$$-5.x + 1.5x + 0.1 + 0.sen\, x = 0.$$

Observação 4.3.6 *Note que o conjunto de constantes* $c_1, c_2, \cdots, c_n$ *tais que* $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ *sempre satisfaz (4.9). Assim, um conjunto é LD se existe outro conjunto de constantes, não todos nulos, tais que satisfazem (4.9).*

Definição 4.3.7 *Um conjunto de funções* $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\}$ *é* ***linearmente independente*** *em* $a \leq x \leq b$ *se não é linearmente dependente. Em outras palavras, um conjunto de funções* $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\}$ *é LI em* $a \leq x \leq b$ *se existem constantes* $c_1, c_2, \cdots, c_n$ *todos nulos que satisfazem (4.9).*

Exemplo 4.9 *Determine se o conjunto* $\{e^x, e^{-x}\}$ *é LI ou LD em* $(-\infty, +\infty)$.

Solução:

Exemplo 4.10 *O conjunto* $\{x^2, x, 1\}$ *é LI ou LD em* $(-\infty, +\infty)$*?*

Solução:

Exemplo 4.11 *Determine se o conjunto* $\{1 - x, 1 + x, 1 - 3x\}$ *é LI ou LD em* $(-\infty, +\infty)$.

Solução:

Teorema 4.3.8 *A equação diferencial linear homogênea do ordem n* $L(y) = 0$ *com* $a_j(x)$ *contínuos em* $[a, b]$ *sempre tem n soluções linearmente independentes em* $[a, b]$.
Se $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots, y_n(x)$ *representam estas soluções, então a **solução geral** de*

$$L(y) = 0$$

é

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) \tag{4.10}$$

onde c_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ *são constantes arbitrárias.*

O conjunto $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\}$ chama-se **conjunto fundamental de soluções**.

O Teorema 4.3.8, reforça a importância de podermos determinar se um conjunto é LI ou LD. Em geral o problema pode ser difícil de analisar usando apenas a definição de de LD. Existe entretanto um método útil para analisar se um conjunto de soluções de uma equação diferencial é LI ou LD.

Definição 4.3.9 *Seja* $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\}$ *um conjunto de funções em* $a \leq x \leq b$, *cada uma das quais possui n-1 derivadas. O determinante*

$$w(y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{4.11}$$

*é chamado de **Wronskiano** do conjunto de funções.*

Exemplo 4.12 *O Wronskiano de* $\{x, x^2, x^3\}$ *é:*

$$w(x, x^2, x^3) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 12x^3 + 2x^3 - 6x^3 - 6x^3 = 2x^3.$$

Observação 4.3.10 *Este exemplo nos mostra que o Wronskiano, pode ser uma função não constante.*

Teorema 4.3.11 *Seja* $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\}$ *um conjunto de* n *soluções da equação diferencial linear homogênea de ordem* n $L(y) = 0$*. Esse conjunto é LI em* $a \leq x \leq b$ *se e somente se o Wronskiano do conjunto não é identicamente nulo nesse intervalo.*

Exemplo 4.13 *Seja a equação* $y'' + 4y = 0$*. Verifique que* $y_1 = sen\, 2x$ *e* $y_2 = cos\, 2x$ *são soluções desta equação. Agora, escreva a solução geral desta equação.*

Solução:

Observação 4.3.12 *O Teorema 4.3.11 não se aplica a um conjunto arbitrário de funções. Só pode ser usado para testar a independência linear quando as funções em estudo são todas soluções de uma mesma equação diferencial L(y)=0. No caso de funções arbitrária deve-se analisar a questão de ser LI ou LD através da definição.*

Consideremos agora a equação diferencial linear geral $L(y) = \phi(x)$ não homogênea. Se y_p é uma solução particular qualquer da mesma e seja y_h a solução geral da equação homogênea associada. Então:

Teorema 4.3.13 *A solução geral $L(y) = \phi(x)$ é*

$$y = y_h + y_p. \tag{4.12}$$

Exemplo 4.14 *A equação $y'' + 4y = x$ tem solução geral?*

Lista de Exercícios 4.1 .
Livro: Equações Diferenciais, volume 1
Autor: Dennis G. Zill e Michael R. Cullen
Exercícios: *ímpares: 1 ao 9, 23 ao 27, 33 ao 39. (pág. 162 a 165).*

4.4 Redução de Ordem

Um dos fatos mais interessantes e importantes no estudo de EDO's de 2ª ordem lineares é que podemos construir uma segunda solução a partir de uma conhecida.

Suponha que $y_1(x)$ seja uma solução não trivial para a equação

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{4.13}$$

e consideremos que $a_i(x)$ sejam contínuas para todo $x \in I$ e que $a_2(x) \neq 0$.

O processo que usaremos consiste em reduzir a ordem da equação (4.13) transformando-a em uma equação de primeira ordem.

Dividindo a equação (4.13) por $a_2(x)$, esta toma a forma padrão

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{4.14}$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são contínuas em I.

Suponhamos agora que $y_1(x)$ seja uma solução não trivial conhecida para a equação (4.14) em I. Se definirmos $y = u(x)y_1(x)$ então

$$\begin{aligned} y' &= u'(x)y_1(x) + u(x)y_1'(x) \\ y'' &= u''(x)y_1(x) + u'(x)y_1'(x) + u'(x)y_1'(x) + u(x)y_1''(x) \\ &= u''(x)y_1(x) + 2u'(x)y_1'(x) + u(x)y_1''(x) \end{aligned}$$

Substituindo em (4.14) temos

$$u''(x)y_1(x) + 2u'(x)y_1'(x) + u(x)y_1''(x) + P(x)[u'(x)y_1(x) + u(x)y_1'(x)] + Q(x)[u(x)y_1(x)] = 0$$

ou ainda

$$u(x)[y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y_1(x)] + u''(x)y_1(x) + [2y_1'(x) + P(x)y_1(x)]u'(x) = 0$$

Isto implica que $y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0$ e se chamarmos $w = u'$ teremos

$$y_1w' + (2y_1' + Py_1)w = 0. \tag{4.15}$$

Observe que (4.15) é uma equação linear separável. Resolvendo-a

Ou seja,

$$w = c_1 \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} = u'$$

e assim

$$u = c_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx + c_2.$$

Portanto

$$y = u(x)y_1(x) = \left[c_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx + c_2\right] y_1(x) = c_1 \underbrace{y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx}_{y_2} + c_2 y_1(x)$$

e escolhendo $c_2 = 0$ e $c_1 = 1$ obtemos uma segunda solução para (4.14)

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx.$$

Assim temos duas soluções para a equação (4.14). Então pelo Teorema 4.3.8 podemos escrever a solução geral para (4.14) desde que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sejam LI. Para isto, calculamos o wronskiano:

$$\begin{aligned}
w(y_1(x),\, y_2(x)) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \displaystyle\int \frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2} dx \\ y_1' & y_1' \displaystyle\int \frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2} dx + y_1 \frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \displaystyle\int \frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2} dx \\ y_1' & y_1' \displaystyle\int \frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2} dx + \frac{e^{-\int Pdx}}{y_1} \end{vmatrix} \\
&= y_1 y_1' \int \frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2} dx + e^{-\int Pdx} - y_1 \int \frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2} dx y_1' \\
&= e^{-\int Pdx} \neq 0.
\end{aligned}$$

Portanto $\{y_1, y_2\}$ são LI e y é a solução geral para (4.14).

Exemplo 4.15 *A função* $y = x^2$ *é uma solução para* $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$*. Encontre a solução geral no intervalo* $(0, +\infty)$*.*

Solução:

Exemplo 4.16 *A função* $y_1 = \dfrac{sen\, x}{\sqrt{x}}$ *é uma solução para* $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ *em* $(0, \pi)$. *Encontre a solução geral.*

Solução:

Lista de Exercícios 4.2 .
Livro: Equações Diferenciais, volume 1
Autor: Dennis G. Zill e Michael R. Cullen
Exercícios: *ímpares: 1 ao 29. (pág. 172).*

4.5 Conjuntos Numéricos

Iremos fazer uma breve recordação dos conjuntos numéricos e notações que serão utilizados ao longo do texto a seguir. Estaremos supondo o conhecimento prévio dos mesmos por parte dos leitores e com isso não entraremos em detalhes sobre os mesmos.

4.6 Conjuntos Numéricos

Vamos, nesta seção enumerar os conjuntos numéricos que utilizaremos na sequência.

- *Números Naturais:* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$;
- *Números Inteiros:* $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$;
- *Números Racionais:* $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$;
- *Números Irracionais:* $\mathbb{I} = \{$números que não podem ser escritos como $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$;
- *Números Reais:* $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$;
- *Números Complexos:* $\mathbb{C} = \{a + bi, a, b \in \mathbb{R}\}$.

4.7 Números complexos

Nesta seção vamos recordar como são as operações com números complexos utilizando a forma algébrica e a forma polar dos mesmos. Vale salientar que o que será abordado aqui pode ser encontrado em livros do ensino médio.

4.7.1 Unidade Imaginária

Surgiram com o objetivo de explicar as soluções para equações do tipo $x^2 + 1 = 0$. A ideia foi justificar a existência de $\sqrt{-1}$. Para isso, foi criado a **unidade imaginária** i, cujo quadrado é igual a -1, ou seja, $i^2 = -1$.

Exemplo 4.17 *Resolva* $x^2 - 4x + 5 = 0$.

Solução: Aplicando a fórmula de Bhaskara, temos

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2}$$

Como por definição $\sqrt{-1} = i$, encontramos duas raízes $x_1 = 2 + i$ e $x_2 = 2 - i$.

4.7.2 Forma algébrica

Todo número complexo pode ser escrito na forma

$$z = a + bi$$

onde:

- $a, b \in \mathbb{R}$
- a : parte real ($Re(z) = a$)
- b : parte imaginária ($Im(z) = b$).

Denotamos por $\mathbf{C}$ o conjunto de todos os números complexos.

Observação 4.7.1 *Se $a = 0$, então z é um número imaginário puro. Se $b = 0$, então z é um número real.*

Exemplo 4.18 *Seja $z = 3 + (m^2 - 9)i$. Determine m para que z seja um número real.*

Solução:
Para que z seja um número real, sua parte imaginária deve ser 0. Assim

$$Im(z) = m^2 - 9 = 0 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3.$$

4.7.3 Álgebra dos Números complexos

Neste item, lembraremos algumas propriedade e as operações fundamentais com números complexos:

1. **Igualdade:** $a + bi = c + di$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$,
2. **Adição:** $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$
3. **Subtração:** $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + i(b - d)$
4. **Multiplicação:** $(a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + i(ad + bc)$
5. **Conjugação:** $\overline{z} = a - bi$
6. **Divisão:** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \dfrac{(c - di)}{(c - di)} = \dfrac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$, ou seja,
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{i(bc - ad)}{c^2 + d^2}.$$

Exemplo 4.19 *Determine z, tal que $z^2 = 21 + 20i$.*

Solução: Primeiramente, note que $z \neq 0$, pois do contrário $z^2 = 0$. Assim sendo, considere $z = a + bi$, então $z^2 = (a + bi) \cdot (a + bi) = a^2 - b^2 + 2abi$, assim $a^2 - b^2 + 2abi = 21 + 20i$, portanto, da igualdade de número complexos temos $\begin{cases} a^2 - b^2 = 21 \\ 2ab = 20 \end{cases}$.

Agora, como $z \neq 0$, então $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Sem perda de generalidade, consideremos que $b \neq 0$. Assim, da segunda equação, temos que $\dfrac{10}{b} = a$ e substituindo na primeira equação temos

$$\left(\frac{10}{b}\right)^2 - b^2 = 21 \Rightarrow \frac{100}{b^2} - b^2 = 21 \Rightarrow b^4 + 21b^2 - 100 = 0.$$

Vamos resolver esta equação biquadrada. Para isso, fazemos $b^2 = x$, e substituindo temos $x^2 + 21x - 100 = 0$, cujas raízes são $x_1 = 4$ e $x_2 = -25$, ou seja,

$$b_1 = \pm 2 \text{ e } b_2 = \pm\sqrt{-25}.$$

Como $b \in \mathbb{R}$, descartamos b_2. Portanto:

a) Quando $b = 2$ temos $a = 5$ e portanto $z = 5 + 2i$;

b) quando $b = -2$, então $a = -5$ e consequentemente $z = -5 - 2i$.

Exemplo 4.20 *Ache os valores de x de modo que a parte real de $z = \dfrac{x-i}{x+i}$ seja negativa.*

Solução: Primeiramente devemos determinar quem é a parte real do número z dado. Para isso efetuamos a divisão de números complexos:

$$z = \frac{x-i}{x+i} = \frac{(x-i)}{x+i} \cdot \frac{(x-i)}{x-i} = \frac{x^2-1-2xi}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{2xi}{x^2+1}.$$

Logo a parte real de z é $Re(z) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. Precisamos então que $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ seja negativo, isto é, $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} < 0$. Note que o denominador é sempre positivo, logo teremos que $Re(z) < 0$ apenas quando $x^2 - 1 < 0$ e isso acontece, para todo $x \in \mathbb{R}$, tal que $-1 < x < 1$.

4.7.4 Potências da Unidade Imaginária

Calculando-se as potências de expoentes naturais de i, observa-se que os resultados se repetem com um período de quatro, isto é

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2.i = -1.i = -i$
- $i^4 = i^2.i^2 = -1.(-1) = 1$
- $i^5 = i^4.i = 1.i = i$
- $i^6 = i^5.i = i.i = i^2 = -1$
- $i^7 = i^6.i = -1.i = -i$

Geralmente, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} &i^{4n} = 1 \\ &i^{4n+1} = i \\ &i^{4n+2} = -1 \\ &i^{4n+3} = -i \end{aligned}$$

Então, para se calcular o resultado de uma potência de i, divide-se o expoente por 4 e, observando-se o valor do resto, obtem-se o resultado através da tabela:

resto	i^{resto}	valor da potência
0	i^0	1
1	i^1	i
2	i^2	-1
3	i^3	$-i$

Exemplo 4.21 *Qual o equivalente de* i^{129}*?*

Solução: Vamos dividir o número 129 por 4 e verificar o resto, isto é, $129 = 32.4 + 1$. Portanto $i^{129} = i^{32.4}i^1 = 1.i = i$.

4.7.5 Plano de Argand-Gauss

Convencionando-se associar o complexo z ao ponto $P(a, b)$ se, e somente se, $z = a + bi$, sob a forma algébrica, estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os elementos do campo dos complexos e os pontos do palno xy.

Assim, no eixo das abscissas, representa-se a parte real de z e, no eixo das ordenadas, a parte imaginária de z.

Observe a representação do complexo $z = a + bi$ no plano xy.

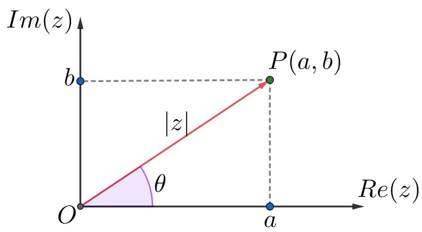


Figura 4.1: Plano de Argand-Gauss

Observação 4.7.2 *Nos números complexos* $\mathbb{C}$ *não temos uma relação de ordem, isto é, não falamos, por exemplo, que* $3 + 2i > 1 + i$*.*

4.7.6 Módulo e Argumento de um Número Complexo

Consideremos o número complexo não nulo $z = a+bi$ e o ponto P que o representa, conforme a figura 4.1.

Definição 4.7.3 *O número $|z|$ é a distância do ponto P à origem O e é denominada* ***módulo*** *de z.*

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo da figura 4.1, temos que

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Definição 4.7.4 *O* ***argumento*** *do número complexo z é o ângulo formado pelo eixo real positivo e o segmento de reta OP, no sentido anti-horário e indica-se por*

$$\theta = arg(z).$$

Este ângulo deve satisfazer a condição de $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Observe que, se $z \neq 0$, então

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = \cos\theta \cdot |z|,$$

$$\sin\theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = \sin\theta \cdot |z|.$$

4.7.7 Forma Trigonométrica ou Polar

Como $z = a + bi$, obtemos a forma *polar* ou *trigonométrica* de um número complexo:

$$z = \cos\theta \cdot |z| + i\sin\theta \cdot |z| \Rightarrow |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Note que para chegar na fórmula acima, bastou substituir o valor de a e b encontrados acima.

Exemplo 4.22 *Represente $z = \sqrt{3} + i$ no plano complexo e determine sua forma polar.*

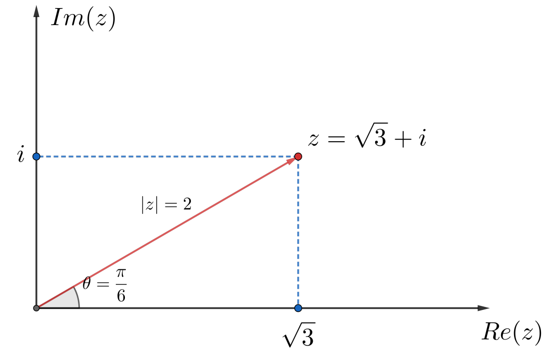
Solução: Primeiramente, vamos determinar o valor do módulo de z.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2.$$

Agora, vamos calcular o argumento:

$$\sin\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \arcsin(\frac{1}{2}) = 30^\circ = \frac{\pi}{6}.$$

Portanto
$$z = a + bi = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})).$$



4.7.8 Operações na Forma Polar

1. **Multiplicação:**

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)) \end{aligned}$$

2. **Divisão:**
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot (\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

3. **Potenciação (Fórmula de Moivre):**
$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

Exemplo 4.23 *Seja $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, calcule z^8.*

Solução: A maneira mais fácil de resolver essa potência, é colocarmos o número z na forma polar, para isso temos

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

e

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}.$$

Usando a fórmula de Moivre

$$z^8 = |z|^8[\cos(8\theta) + i\sin(8\theta)] = \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right).$$

4.7.9 O Teorema Fundamental da Álgebra

O próximo teorema, será de fundamental importância quando precisarmos discutirmos e analisarmos raízes de polinômios (quando falarmos de autovalores de uma transformação linear).

Teorema 4.7.5 *Todo polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}$, possui raízes complexas.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrado em livros de Álgebra.

Capítulo 5

Equações Diferenciais de Segunda Ordem

5.1 Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes

Consideremos a equação

$$y'' + by' + cy = 0.$$

Vamos procurar soluções do tipo $y = e^{mx}$ para esta equação. Se $y = e^{mx}$ então $y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2e^{mx}$. Substituindo na equação temos:

$$m^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \Leftrightarrow e^{mx}(m^2 + bm + c) = 0.$$

Como $e^{mx} \neq 0$ então $m^2 + bm + c = 0$ a qual é chamada de **equação característica** ou **auxiliar**.

Esta equação pode ser obtida da equação diferencial original substituindo-se y'' por m^2, y' por m e y por 1. Sabemos como resolver $m^2 + bm + c = 0$ e lembrando que ocorrerão três casos para as raízes desta equação:

- Duas raízes reais distintas: m_1 e m_2;
- Duas raízes reais iguais: $m_1 = m_2$;
- Duas raízes complexas: m_1 e m_2 onde $m_2 = \overline{m_1}$.

Diante destes casos temos:

Teorema 5.1.1 *Se as raízes m_1 e m_2 da equação característica são reais e distintas, então a solução geral de $y'' + by' + cy = 0$ é*

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Teorema 5.1.2 *Se a da equação característica possui raiz real dupla m, então a solução geral de $y'' + by' + cy = 0$ é*

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Teorema 5.1.3 *Se a da equação característica tem raízes complexas $s \pm ti$, então a solução geral de $y'' + by' + cy = 0$ é*

$$y = e^{sx}(c_1 cos\, tx + c_2 sen\, tx)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Exemplo 5.1 *Resolva as seguintes equações diferenciais:*

a) $y'' - 3y' - 10y = 0$.

b) $y'' - 6y' + 9y = 0.$

c) $6y'' - 7y' + 2y = 0.$

d) $y'' - 10y' + 41y = 0.$

Lista de Exercícios 5.1 .
Livro: Equações Diferenciais, volume 1
Autor: Dennis G. Zill e Michael R. Cullen
Exercícios: *ímpares: 1 ao 17, 37 ao 45. (pág. 180-181).*

A partir de agora, vamos buscar soluções para equações diferenciais lineares não homogêneas: Lembrando que se $L(y) = g(x)$ uma equação diferencial linear de ordem n então a solução geral (se existir) é dada por $y = y_h + y_p$ onde y_h é uma solução geral da equação homogênea associada $L(y) = 0$ e y_p é uma solução particular qualquer de $L(y) = g(x)$.

Como já sabemos calcular y_h (caso $n = 2$), vamos agora em busca de como encontrar y_p. Em geral, o cálculo de uma solução particular não é uma tarefa fácil.

Em busca desta solução particular vamos usar:

5.2 Método dos coeficientes a determinar

Para usarmos este método, precisamos considerar a equação do tipo

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

onde $g(x)$ é uma função que é combinação linear de funções do tipo:

$$k(\text{constante}),\ \ x^n,\ \ x^n e^{\alpha x},\ \ x^n e^{\alpha x} cos\,\beta x,\ \ x^n e^{\alpha x} sen\,\beta x,$$

em que n é um inteiro não negativo e α e β são número reais.

Observemos que o conjunto de funções acima tem a interessante propriedade que as derivadas destas funções continuam ainda sendo funções deste tipo, por exemplo a derivada de um polinômio ainda é um polinômio (de menor grau), a derivada das trigonométricas seno e cosseno continuam sendo trigonométricas seno e cosseno, etc.

Agora como a combinação linear das derivadas $ay_p'' + by_p' + cy_p$ tem que ser identicamente igual a $g(x)$, parece razoável supor então que y_p tem a mesma forma que $g(x)$.

Vamos ilustrar o método através de exemplos:

Exemplo 5.2 *Resolva* $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$.

Solução:

Exemplo 5.3 *Resolva* $y'' + y' + y = cos(3x)$.

Solução:

Exemplo 5.4 *Calcule uma solução particular para* $y'' + y' + 2y = xsen(x) + e^{3x}$.

Solução:

.

Lista de Exercícios 5.2 .
Livro: Equações Diferenciais, volume 1
Autor: Dennis G. Zill e Michael R. Cullen
Exercícios: *ímpares: 1 ao 19, 29 ao 37. (pág. 193-194).*

5.2.1 Modificações

Se qualquer termo da solução suposta, desconsiderando as constantes multiplicativas, também for um termo da solução da equação homogênea associada y_h, então a solução suposta procurada deve ser multiplicada por x^m, onde m é o menor inteiro positivo tal que o produto de x^m pela solução suposta não tenha termos em comum com y_h.

Exemplo 5.5 *Encontre uma solução particular para* $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

Solução:

Exemplo 5.6 *Resolva o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' + y = 4x + 10sen(x) \\ y(\pi) = 0,\ y'(\pi) = 2. \end{cases}$$

Solução:

Exemplo 5.7 *Resolva* $y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}$.

Solução:

.

Lista de Exercícios 5.3 .
Livro: Equações Diferenciais, volume 1
Autor: Dennis G. Zill e Michael R. Cullen
Exercícios: *ímpares: 1 ao 23. (pág. 208).*

5.3 Variação dos Parâmetros

O método de variação de parâmetros pode ser aplicada para todos as equações diferenciais lineares. É assim, mais poderoso que o método dos coeficientes a determinar, que se restringe a equações diferenciais lineares com coeficientes contantes e formas particulares de $g(x)$. Mas apesar disto, para casos onde os dois métodos são aplicáveis, o método dos coeficientes a determinar é mais eficiente.

Considere a forma padrão

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = g(x) \tag{5.1}$$

e supomos que $P(x)$, $Q(x)$ e $g(x)$ são contínuas em um intervalo I.

Como sabemos, quando $P(x)$ e $Q(x)$ são constantes, não temos dificuldades em escrever y_h. (Se os coeficientes não forem constantes devemos tentar o método da redução de ordem).

Suponha que y_1 e y_2 formem um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea associada a (5.1), isto é, $y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0$, $y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$ e $\{y_1, y_2\}$ é LI.

A ideia é procurar uma solução particular da forma

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \tag{5.2}$$

onde $u_1(x)$ e $u_2(x)$ são duas funções a determinar. Note que nossa suposição para y_p é a mesma que $y_p = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, mas substituímos c_1 e c_2 pelos parâmetros variáveis $u_1(x)$ e $u_2(x)$.

Para determinar $u_1(x)$ e $u_2(x)$, resolvemos primeiro o sistema de equações lineares em u_i'

$$\begin{cases} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = g(x). \end{cases}$$

Em seguida, integramos cada u_i' para obter o u_i correspondente, desprezando todas as contantes de integração. Isto é válido porque estamos procurando apenas **uma** solução particular.

Exemplo 5.8 *Resolva* $y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$.

Solução:

.

Exemplo 5.9 *Resolva* $4y'' + 36y = cossec(3x)$.

Solução:

.

Lista de Exercícios 5.4 .
Livro: Equações Diferenciais, volume 1
Autor: Dennis G. Zill e Michael R. Cullen
Exercícios: *ímpares: 1 ao 19, 25 e 27. (pág. 217).*

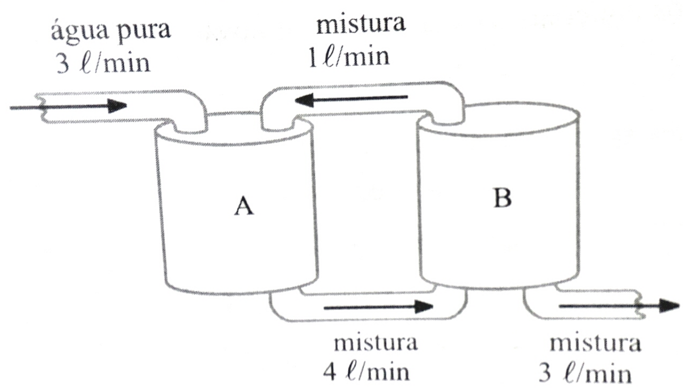
Capítulo 6

Sistemas de Equações

6.1 Sistemas de Equações Lineares de 1ª ordem

Consideremos a seguinte situação:

Um tanque A contém 50 litros de água em que foram dissolvidos 25 gramas de sal. um segundo tanque, B contém 50 litros de água pura. Bombeira-se o líquido para dentro às taxas indicadas na figura. Vamos deduzir as equações diferenciais que descrevem as quantidades de sal $x_1(t)$ e $x_2(t)$ em um instante arbitrário nos tanques A e B.



Vamos primeiro analisar o tanque A. Sendo $x_1(t)$ a quantidade de sal no tanque A temos:

$$\frac{dx_1}{dt} = \text{entrada de sal - saída de sal} = \text{taxa de variação na quantidade de sal} = g/min.$$

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= (3\ell/min)(0.g/\ell) + (1\ell/min)(\frac{x_2}{50}g/\ell) - (4\ell/min)(\frac{x_1}{50}g/\ell) \\
&= \frac{x_2}{50} - \frac{4x_1}{50}.
\end{aligned}$$

Analogamente para o tanque B

$$\begin{aligned}
\frac{dx_2}{dt} &= (4\ell/min)(\frac{x_1}{50}g/\ell) - (1\ell/min)(\frac{x_2}{50}g/\ell) - (3\ell/min)(\frac{x_2}{50}g/\ell) \\
&= \frac{4x_1}{50} - \frac{4x_2}{50}.
\end{aligned}$$

Obtemos assim o sistema de primeira ordem

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{x_2}{50} - \dfrac{2x_1}{25} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{2x_1}{25} - \dfrac{2x_2}{25}. \end{cases}$$

Note ainda que o sistema é acompanhado dos dados iniciais

$$x_1(0) = 25, \;\; x_2(0) = 0.$$

Assim temos um sistema de equações originado por uma aplicação simples. Vamos agora estudar como resolver tais sistemas.

Para isto vamos utilizar algumas ferramentas de álgebra linear.

6.2 Relembrando alguns conceitos de álgebra linear

Definição 6.2.1 ***(Derivada de uma matriz de funções)*** *Se* $A(t) = (a_{ij}(t))_{m\times n}$ *é uma matriz cujos elementos são funções diferenciáveis em um intervalo comum, então* $\dfrac{dA}{dt} = \left(\dfrac{d}{dt}a_{ij}\right)_{m\times n}$.

Definição 6.2.2 ***(Integral de uma matriz de funções)*** *Se* $A(t) = (a_{ij}(t))_{m\times n}$ *é uma matriz cujos elementos são funções contínuas em um intervalo comum, então* $\displaystyle\int_{t_0}^{t} A(s)ds = \left(\int_{t_0}^{t} a_{ij}(s)ds\right)_{m\times n}$.

Em outras palavras, para derivar ou integrar uma matriz de funções, você deriva ou integra cada entrada da matriz. A derivada da matriz também se denota por $A'(t)$.

Definição 6.2.3 ***(Autovalores e autovetores)*** *Seja A uma matriz $m \times n$. Diz-se que um número λ é um* ***autovalor*** *de A, se existe um vetor solução não nulo v do sistema linear $Av = \lambda v$. O vetor v é chamado de* ***autovetor*** *correspondente ao autovalor λ.*

Em termos de transformação linear: Seja $T : V \to V$ uma transformação linear onde V é um espaço de dimensão finita. Se existe um escalar λ e um vetor $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$, então dizemos que λ é uma autovalor associado ao autovetor v.

Na equação $Av = \lambda v$, usando a álgebra das matrizes escrevemo-a como

$$Av - \lambda I v = 0 \text{ ou } (A - \lambda I)v = 0$$

que é um sistema homogêneo. Como estamos procurando soluções v não nulos então devemos ter $det(A - \lambda I) = 0$. Esta equação nos dá um polinômio característico. Os autovalores λ's são as raízes do polinômio característico.

6.2.1 Matrizes e Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \tag{6.1}$$

que pode ser reescrito

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

ou simplesmente

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + F(t). \tag{6.2}$$

onde

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \text{ e } F = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Se o sistema é homogêneo, então

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X. \tag{6.3}$$

Observação 6.2.4 *Usa-se também a notação X' para $\frac{dX}{dt}$.*

Exemplo 6.1 *Escreva, na forma matricial, o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 5y + e^t - 2t \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y + 10t. \end{cases}$$

Solução:

Definição 6.2.5 *(**Vetor solução**): Um **vetor solução** em um intervalo I é qualquer matriz coluna* $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ *cujos elementos são funções diferenciáveis que verificam o sistema (6.2) no intervalo I.*

Exemplo 6.2 *Verifique que* $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$ *e* $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$ *são soluções de* $X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X$*, no intervalo* $(-\infty, +\infty)$.

Solução:

6.2.2 O problema de Valor Inicial

Denotaremos por t_0 um ponto em um intervalo I e $X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix}$ e $X_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ onde γ_i são constantes dadas. Então o problema

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = A(t)X + F(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{6.4}$$

é um problema de valor inicial.

Teorema 6.2.6 ***(Existência e Unicidade)*** *Suponhamos que os elementos das matrizes $A(t)$ e $F(t)$ sejam funções contínuas em um intervalo I que contenha o ponto t_0. Então existe uma única solução para o problema (6.4) de valor inicial no intervalo.*

6.3 Sistemas Homogêneos

Iniciaremos o nosso estudo com sistemas homogêneos. Até que se informe o contrário, estaremos trabalhando com sistemas homogêneos e sumpondoq que as a_{ij} e f_i são contínuas em t no intervalo I.

6.3.1 Princípio da Superposição

Teorema 6.3.1 *Seja $X_1, X_2, \cdots, X_k$ um conjunto de soluções para o sistema dado em (6.3) em um intervalo I. Então a combinação linear $c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_kX_k$ onde c_i, $i = 1, 2, \cdots, k$ são constantes arbitrárias, é também solução no intervalo.*

Exemplo 6.3 *Pode-se verificar que $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$ e $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$ são vetores soluções de $X' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X$ e também $c_1X_1 + c_2X_2$ é.*

Solução:

.

Definição 6.3.2 *Seja $X_1, X_2, \cdots, X_k$ um conjunto de vetores solução do sistema homogêneo (6.3) em um intervalo I. Dizemos que o conjunto é **LD** no intervalo se existem constantes $c_1, c_2, \cdots, c_k$ não simultaneamente nulos tais que $c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_kX_k = 0$ para todo t no intervalo. Se o conjunto não é LD, então ele é **LI**.*

Exemplo 6.4 *Sendo X_1 e X_2 do exemplo anterior. Mostre que eles são LI no intervalo $(-\infty, +\infty)$.*

Solução:

Conforme tínhamos visto anteriormente para a teoria de solução para uma equação, podemos introduzir o Wronskiano para testar a dependência linear.

Teorema 6.3.3 *Sejam* $X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$, *n vetores solução do sistema homogêneo (6.3) em um intervalo* I*. Uma condição necessária e suficiente para que o conjunto de soluções seja LI é que o Wronskiano*

$$W(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Exemplo 6.5 *Use o Wronksiano para verificar que os vetores* X_1, X_2 *dados nos dois últimos exemplos são LI.*

Solução:

6.3.2 Conjunto Fundamental de Soluções

Definição 6.3.4 *Qualquer conjunto $X_1, X_2, \cdots, X_n$ de n vetores solução linearmente independentes do sistema homogêneo (6.3) em um intervalo I é chamado de conjunto fundamental de soluções no intervalo.*

Teorema 6.3.5 *Existe um conjunto fundamental de soluções para o sistema (6.3) no intervalo I.*

Definição 6.3.6 ***(Solução Geral - Sistemas Homogêneos)*** *Seja $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ um conjunto fundamental de soluções do sistema (6.3). Então a solução geral de (6.3) é dada por*

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_kX_k,$$

onde c_i são constantes para $i = 1, 2, \cdots, n$.

Exemplo 6.6 *Já vimos que $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$ e $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$ são vetores soluções de $X' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X$ e ainda que $\{X_1, X_2\}$ são LI em $(-\infty, +\infty)$ então a solução geral do sistema é $X = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$.*

6.3.3 Uma Matriz Fundamental

Observe que se $X_1, X_2, \cdots, X_n$ é um conjunto fundamental de soluções do sistema homogêneo e temos pela definição de solução geral que

$$\begin{aligned} X &= c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_kX_k \\ &= c_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1x_{11} + c_2x_{12} \cdots + c_nx_{1n} \\ c_1x_{21} + c_2x_{22} \cdots + c_nx_{2n} \\ \vdots \\ c_1x_{n1} + c_2x_{n2} \cdots + c_nx_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.5}$$

Note que a igualdade dada em (6.5) pode ser escrita como

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Diante de (6.6) definimos:

Definição 6.3.7 ***(Matriz fundamental)*** *Em (6.6) chamamos a matriz*

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

de matriz fundamental do sistema no intervalo.

Observação 6.3.8 *Note que* $det\phi(t) = W(X_1, X_2, \cdots, X_n) \neq 0$ *pois* $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ *é um conjunto LI, isto quer dizer que* $\phi(t)$ *é uma matriz não singular e portanto admite inversa.*

Exemplo 6.7 *Os vetores* $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$ *e* $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$ *são vetores soluções de* $X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X$ *em* $(-\infty, \infty)$ *(Verifique como exercício!). Então a matriz fundamental deste sistema é*

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{pmatrix}.$$

Observação 6.3.9 *O resultado dado em (6.6) afirma que a solução geral do sistema homogêneo* $X' = A(t)X$ *pode sempre ser expresso em termos da matriz fundamental* $X = \phi(t)C$ *onde* C *é um vetor coluna* $n \times 1$ *de constantes.*

Assim $X = \phi(t)C$ *é uma solução de* $X' = A(t)X$ *significa que*

$$\phi'(t)C = A(t)\phi(t)C$$

ou seja

$$\phi'(t)C - A(t)\phi(t)C = [\phi'(t) - A(t)\phi(t)]C = 0$$

como C *é formada por constantes arbitrárias, temos que*

$$\phi'(t) - A(t)\phi(t) = 0$$

e portanto

$$\phi'(t) = A(t)\phi(t). \tag{6.7}$$

Exemplo 6.8 *A solução geral do sistema dado no exemplo anterior é*

$$X = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

6.3.4 Matriz Especial

Em alguns casos, é mais conveniente formar outra matriz ***especial*** $n \times n$ em que os vetores colunas V_i sejam soluções de $X' = AX$ e que satisfaçam as condições

$$V_1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, V_2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, V_n(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aqui t_0 é um ponto escolhido arbitrariamente no intervalo em que a solução geral do sistema é definido.

Denotaremos esta matriz por $\psi(t)$. Observe que

$$\psi(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I$$

onde I é a matriz identidade $n \times n$.

Exemplo 6.9 *a) Determine $\psi(t)$ que satisfaz $\psi(0) = I$ para o sistema $X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X$.*

b) Calcule $\phi(t)\phi^{-1}(0)$.

Solução:

.

Observação 6.3.10 *1) Como cada coluna de $\psi(t)$ é combinação linear dos elementos do conjunto fundamental de soluções, temos que cada coluna é solução para o sistema.*

2) Temos, da definição que $det\psi(t_0) \neq 0$ e assim, concluímos que as colunas de $\psi(t)$ são LI no intervalo. Portanto $\psi(t)$ é uma matriz fundamental. Agora pelo Teorema de Existência e Unicidade, temos que $\psi(t)$ é a única matriz qe satisfaz $\psi(t_0) = I$. E por fim, as matrizes fundamentais estão relacionadas por

$$\psi(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0). \tag{6.8}$$

Lista de Exercícios 6.1 .
Livro: Equações Diferenciais, volume 2
Autor: Dennis G. Zill e Michael R. Cullen
Exercícios: *ímpares: 1 ao 19, 27 ao 33. (pág. 62 a 65).*

6.4 Sistemas Homogêneos com Coeficientes Reais e Constantes

6.4.1 Autovalores Reais e Distintos

Nos exemplos vistos até agora, vimos que as soluções sempre envolviam elementos do tipo $Ke^{\lambda t}$. Somos então levados a indagar se é sempre possível achar solução da forma $X = Ke^{\lambda t}$.

Pois bem, $X = Ke^{\lambda t}$ será solução do sistema $X' = AX$ se e somente se λ for um autovalor de A e $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ um autovetor associado a λ.

Observação 6.4.1 *Quando uma matriz $n \times n$ A possui n autovalores reais e distintos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, então sempre se pode achar um conjunto de n autovetores linearmente independentes $K_1, K_2, \cdots, K_n$ e $X_1 = K_1e^{\lambda_1 t}$, $X_2 = K_2e^{\lambda_2 t}$, $\cdots$, $X_n = K_ne^{\lambda_n t}$ são os elementos do conjunto fundamental de soluções em $(-\infty, +\infty)$.*

Teorema 6.4.2 ***(Solução Geral - Sistemas Homogêneos)*** *Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, n autovalores reais e distintos da matriz A do sistema $X' = AX$ e sejam $K_1, K_2, \cdots, K_n$ os autovetores correspondentes. Então a solução geral de $X' = AX$ no intervalo $(-\infty, +\infty)$ é dado por*

$$X = c_1K_1e^{\lambda_1 t} + c_2K_2e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_nK_ne^{\lambda_n t}.$$

Exemplo 6.10 *Resolva*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

Solução:

.

6.4.2 Autovalores Complexos

Se $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ são autovalores complexos da matriz A, podemos esperar que os autovetores também tenham elementos complexos.

Observação 6.4.3 *Lembre-se que se $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ é uma raiz do polinômio característico, o seu conjugado também será, ou seja, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ é raiz também.*

Teorema 6.4.4 ***(Solução correspondente a autovalores complexos)*** *Seja A a matriz de coeficientes, com elementos reais do sistema homogêneo $X' = AX$, e seja K um autovetor correspondente ao autovalor complexo $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ com α, β reais. Então*

$$X_1 = K_1 e^{\lambda_1 t} \text{ e } X_2 = \overline{K_1} e^{\overline{\lambda_1} t}$$

são soluções do sistema onde $\overline{K_1}$ é o conjugado de K_1, isto é, $\overline{K_1}$ é obtido tomando o conjugado dos elementos de K_1.

Exemplo 6.11 *Resolva*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 4y \end{cases}$$

Solução:

.

Definindo $B_1 = \frac{1}{2}[K_1 + \overline{K_1}]$ e $B_2 = \frac{i}{2}[-K_1 + \overline{K_1}]$, ou seja, B_1 é a parte real de K_1 e B_2 é a parte imaginária e é denotado por $B_1 = Re(K_1)$ e $B_2 = Im(K_1)$, temos:

Teorema 6.4.5 ***(Solução correspondente a um autovalor complexo)*** *Seja $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ um autovalor complexo da matriz A de coeficientes constantes do sistema homogêneo $X' = AX$ e denotemos por B_1 e B_2 os vetores colunas definidos acima. Então*

$$X_1 = (B_1 cos\beta t - B_2 sen\beta t)e^{\alpha t}, X_2 = (B_2 cos\beta t + B_1 sen\beta t)e^{\alpha t}$$

são soluções LI no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Exemplo 6.12 *Escreva a solução do exemplo 2 anterior na forma real.*

Solução:

6.4.3 Autovalores repetidos

De modo geral, se m é um inteiro positivo e $(\lambda - \lambda_1)^m$ é um fator da equação característica, enquanto que $(\lambda - \lambda_1)^{m+1}$ não o é, então dizemos que λ_1 é um autovalor de multiplicidade m.

Diante disso, temos duas possibilidades:

1) Para algumas matrizes $n \times n$ é possível encontrar m autovetores linearmente independentes $K_1, K_2, \cdots, K_m$ correspondentes ao autovalor λ_1 de multiplicidade $m \leq n$. Neste caso a solução geral do sistema contém a combinação linear

$$c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_m K_m e^{\lambda_1 t}.$$

2) Se há apenas um autovetor correspondendo ao autovalor λ_1 de multiplicidade m, então sempre podemos achar m solução linearmente independentes da forma:

$$\begin{aligned}
&X_1 = K_{11} e^{\lambda_1 t} \\
&X_2 = K_{21} t e^{\lambda_1 t} + K_{22} e^{\lambda_1 t} \\
&\vdots \\
&X_m = K_{m1} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_1 t} + K_{m2} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda_1 t} + \cdots + K_{mm} e^{\lambda_1 t}
\end{aligned}$$

onde K_{ij} são vetores coluna.

Exemplo 6.13 *Resolva* $X' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} X.$

Solução:

.

6.4.4 Outra Solução

Suponhamos que λ_1 seja um **autovalor de multiplicidade 2** e que haja apenas um autovetor associado a este autovalor. Pode-se achar uma solução da forma

$$X_2 = Kte^{\lambda_1 t} + Pe^{\lambda_1 t} \tag{6.9}$$

onde $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$.

Para confirmar, levamos X_2 na fórmula $X' = AX$, obtendo

$$(AK - \lambda_1 K)te^{\lambda_1 t} + (AP - \lambda_1 P - K)te^{\lambda_1 t} = 0.$$

Como deve ser válido para todo t, então

$$(AK - \lambda_1 K) = 0 \text{ e } (AP - \lambda_1 P - K) = 0$$

ou seja

$$(A - \lambda_1 I)K = 0 \quad \text{e} \quad (A - \lambda_1 I)P = K.$$

Analogamente, faz-se para λ_1 **autovalor de multiplicidade 3** com apenas um autovetor associado a este autovetor. Pode-se achar uma segunda solução da forma (6.9) e uma terceira solução da forma

$$X_3 = K\frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} + Pte^{\lambda_1 t} + Qe^{\lambda_1 t} \tag{6.10}$$

onde $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$.

Novamente substituindo no sistema $X' = AX$ veremos que K, P e Q devem satisfazer

$$(A - \lambda_1 I)K = 0, \quad (A - \lambda_1 I)P = K \quad \text{e} \quad (A - \lambda_1 I)Q = P.$$

Exemplo 6.14 *Resolva* $X' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} X.$

Solução:

.

Exemplo 6.15 *Resolva* $X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X.$

Solução:

.

Lista de Exercícios 6.2 .
Livro: Equações Diferenciais, volume 2
Autor: Dennis G. Zill e Michael R. Cullen
Exercícios: *ímpares: 1 ao 39. (pág. 79 a 81).*

6.5 Sistemas Não Homogêmeos

Para um sistema não homogêneo, uma solução particular X_p em um intervalo I, é qualquer vetor, sem parâmetros arbitrários, cujos elementos são funções que satisfazem o sistema $X' = AX + F(t)$.

Exemplo 6.16 *Verifique que o vetor* $X_p = \begin{pmatrix} 3t-4 \\ -5t+6 \end{pmatrix}$ *é uma solução particular do sistema não homogêneo* $X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 12t-11 \\ -3 \end{pmatrix}$, *no intervalo* $(-\infty, +\infty)$.

Teorema 6.5.1 *Seja* $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ *um conjunto de vetores solução do sistema homogêneo* $X' = AX$ *em um intervalo* I *e seja* X_p *um vetor arbitrário solução do sistema não homogêneo* $X' = AX+F(t)$ *no mesmo intervalo. Então a solução geral de* $X' = AX+F(t)$ *é dada por*

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n + X_p,$$

onde c_i *são constantes para* $i = 1, 2, \cdots, n$.

Definição 6.5.2 ***(Solução Geral)*** *Seja* X_p *um vetor arbitrário solução do sistema não homogêneo* $X' = AX + F(t)$ *em um intervalo* I *e seja* $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ *um conjunto de vetores solução do sistema homogêneo* $X' = AX$ *no mesmo intervalo. Denotamos solução geral do sistema homogêneo por* $X_h = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n$ *onde* c_i *são constantes* *para* $i = 1, 2, \cdots, n$. *Define-se a solução geral do sistema não homogêneo* $X' = AX + F(t)$ *no intervalo* I *como* $X = X_h + X_p$.

Para encontrarmos as soluções particulares X_p dos sistemas não homogêneos, podemos adaptar o método dos coeficientes a determinar e da variação dos parâmetros.

Vamos ilustrar os métodos por meio de exemplos:

6.5.1 Coeficientes a Determinar

Exemplo 6.17 *Resolva o sistema* $X' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ *em* $(-\infty, +\infty)$.

Solução:

.

Exemplo 6.18 *Resolva*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + y + 6t \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y - 10t + 4 \end{cases}$$

em $(-\infty, +\infty)$.

Solução:

.

.

Observação 6.5.3 *Conforme vimos anteriormente, o método dos coeficientes a determinar não pode ser aplicado sempre. Também a hipótese relativa a* X_p *está efetivamente sujeito ao conhecimento prévio da função complementar. Por exemplo, se* $F(t)$ *é um vetor constante e* $\lambda = 0$ *um autovalor então* X_h *contém um vetor constante. Neste caso,* X_p *não é um vetor constante como no exemplo 1, e sim um vetor na forma* $X_p = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$. *Para não ficarmos estudando particularidades, vamos apresentar o método da variação de parâmetros.*

Lista de Exercícios 6.3 .
Livro: Equações Diferenciais, volume 2
Autor: Dennis G. Zill e Michael R. Cullen
Exercícios: *ímpares: 1 ao 9. (pág. 85).*

6.5.2 Variação de Parâmetros

Como vimos, a solução de um sistema homogêneo $X' = AX$ pode ser escrita como o produto

$$X = \phi(t)C$$

onde $\phi(t)$ é uma matriz fundamental do sistema e C é um vetor coluna $n \times 1$ de constantes.

Nos perguntamos (conforme fizemos na variação de parâmetros para equação de 2ª ordem), se é possível substituir C por uma matriz coluna de funções $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$ de modo que

$$X_p = \phi(t)u(t) \tag{6.11}$$

seja uma solução particular do sistema não homogêneo

$$X' = AX + F(t). \tag{6.12}$$

Então fazendo

$$X_p = \phi'(t)u(t) + \phi(t)u'(t) \tag{6.13}$$

e substituindo (6.11) e (6.13) em (6.12) temos:

$$\phi'(t)u(t) + \phi(t)u'(t) = A\phi(t)u(t) + F(t). \tag{6.14}$$

Lembrando que $\phi'(t) = A\phi(t)$ e escrevemos então

$$A\phi(t)u(t) + \phi(t)u'(t) = A\phi(t)u(t) + F(t)$$

ou seja

$$\phi(t)u'(t) = F(t) \tag{6.15}$$

Como $\phi(t)$ é não singular, multiplicamos ambos os membros de (6.15) por $\phi^{-1}(t)$ obtendo

$$u'(t) = \phi^{-1}(t)F(t) \Rightarrow u(t) = \int \phi^{-1}(t)F(t)dt$$

Então por (6.11) temos

$$X_p = \phi(t) \int \phi^{-1}(t)F(t)dt \tag{6.16}$$

é uma solução particular para (6.12) e assim a solução geral do sistema não homogêneo é

$$X = \phi(t)C + \phi(t) \int \phi^{-1}(t)F(t)dt. \tag{6.17}$$

Exemplo 6.19 *Resolva o sistema* $X' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$.

Solução:

.

A solução geral de $X' = AX + F(t)$ [(6.12)] em um intervalo pode ser escrito como

$$X = \phi(t)C + \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(t)F(t)dt \tag{6.18}$$

onde t e t_0 são pontos do intervalo. Esta última forma é útil para resolver (6.12) com condições iniciais $X(t_0) = X_0$. Fazendo $t = t_0$ em (6.18),obtemos $X_0 = \phi(t_0)C$ onde vem $C = \phi^{-1}(t_0)X_0$. Concluímos então que a solução do PVI é dada por

$$X = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)X_0 + \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)F(s)ds. \tag{6.19}$$

Lembramos que vimos uma maneira alternativa de formar uma matriz fundamental, que consistia em escolher os vetores coluna V_i de tal forma que

$$V_1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, V_2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, V_n(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

a qual nós denotamos por $\psi(t)$ e sabemos que $\psi(t_0) = I$ e consequentemente $\psi^{-1}(t_0) = I$.

Assim quando $\psi(t)$ é usada no lugar de $\phi(t)$, (6.19) pode ser reescrita como:

$$X = \psi(t)X_0 + \psi(t)\int_{t_0}^{t} \psi^{-1}(s)F(s)ds. \tag{6.20}$$

Exemplo 6.20 *Resolva* $X' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 50e^{7t} \\ 0 \end{pmatrix}$, $X(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Solução:

.

.

.

6.6 Estabilidade para Sistemas

Aprendemos a resolver um caso específico de sistemas do tipo $X' = AX + F(t)$, a saber, sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes. No entanto, quando o sistema não é linear, em geral não é possível achar soluções em termos das funções elementares. Mas é possível obter informações valiosas sobre a natureza geométricas das soluções, analisando inicialmente soluções constantes especiais chamadas de pontos críticos e procurando soluções periódicas. Essas soluções especiais são classificadas como estáveis e instáveis conforme o comportamento das soluções na vizinhança.

Para essa análise, consideramos sistemas da forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases} \tag{6.21}$$

onde $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ não dependem explicitamente da variável t. Estes sistemas são chamados de **sistemas autônomos planos**.

O vetor $V(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ define um campo vetorial em uma região do plano, e uma solução do sistema pode ser interpretada como a trajetória resultante de uma partícula que se move nessa região segundo o campo $V(x,y)$.

Se $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ e as derivadas parciais de primeira ordem $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ são contínuas em uma região plana então as soluções de (6.21) são de três tipos básicos:

i) Uma solução constante $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$, os quais são precisamente os zeros do sistema

$$\begin{cases} P(x,y) = 0 \\ Q(x,y) = 0. \end{cases}$$

Uma solução constante é chamada de **ponto crítico** ou **estacionário**.

Quando uma partícula é colocado em um ponto crítico $X(0) = X_0$, ela permanece ali indefinidamente. Note que, como $X'(t) = 0$, um ponto crítico é realmente a solução de

$$\begin{cases} P(x,y) = 0 \\ Q(x,y) = 0. \end{cases}$$

ii) Uma solução $x = x(t)$, $y = y(t)$ que define um **arco**, uma curva plana que não se intercepta.

iii) Uma solução periódica $x = x(t)$, $y = y(t)$. Uma solução periódica é chamada um **ciclo**. Se p é o período da solução, então $X(t + p) = X(t)$, é uma partícula colocada sobre a curva em X_0 circulará nela e voltará a X_0 em p unidade de tempo.

Exemplo 6.21 *Determine os pontos críticos dos seguintes sistemas autônomos planos:*

$$a)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{l} x' = x^2 + y^2 - 6 \\ y' = x^2 - y \end{array}\right.$$

Solução:

Exemplo 6.22 *Determine se o sistema linear dado possui uma solução periódica com* $X(0) = (2, 0)$.

$$a) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 8y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y \end{cases}$$

Solução:

$$b)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{2}x + y \end{cases}$$

Solução:

Nos casos anteriores analisamos o que acontece se colocarmos uma partícula em um ponto crítico X_0 ou sobre uma solução periódica ou sobre um arco. Entretanto a pergunta agora é: Se colocarmos uma partícula em X_0 próxima a um ponto crítico X_1? Aproxima-se ou afasta-se do ponto crítico?

Se acontecer que $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} X(t) = X_1$, isto é, que a partícula posta inicialmente em X_0 aproxima-se do ponto crítico X_1, então dizemos que X_1 é **localmente estável**. No entanto se a partícula se afastar do ponto crítico tal ponto é chamado **instável**.

Definição 6.6.1 ***(Pontos críticos Estáveis)*** *Seja X_1 um ponto crítico de um sistema autônomo plano e denotamos por $X = X(t)$ a solução que satisfaz a condição $X(0) = X_0$ com $X_0 \neq X_1$. Diz-se que X_1 é um **ponto crítico estável** se dado um $\rho > 0$, existe um raio correspondente $r > 0$ tal que, se a posição X_0 satisfaz $|X_0 - X_1| < r$ então a solução $X(t)$ satisfaz $|X(t) - X_1| < \rho$ para todo $t > 0$. Se além disso, $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} X(t) = X_1$ sempre que $|X_0 - X_1| < r$, X_1 é chamado de ponto crítico **assintoticamente estável**.*

Definição 6.6.2 ***(Pontos críticos instáveis)*** *Seja X_1 um ponto crítico de um sistema autônomo plano e $X(t)$ uma solução que satisfaz a condição inicial $X(0) = X_0$ com $X_0 \neq X_1$. Diz-se que X_1 é um **ponto crítico instável** quando existe um disco de raio $\rho > 0$, tal que , para qualquer $r > 0$ existe uma posição inicial X_0 que verifica $|X_0 - X_1| < r$ e a solução $X(t)$ satisfaz $|X(t) - X_1| \geq \rho$ ao menos para um $t > 0$.*

6.6.1 Análise da Estabilidade para sistemas Lineares

Vamos utilizar o sistema

$$\begin{cases} x'(t) = ax + by \\ y'(t) = cx + dy \end{cases} \tag{6.22}$$

onde faremos uma análise geométricas das soluções de (6.22) em termo dos autovalores e autovetores da matriz dos coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Suponhamos que a origem seja uma singularidade isolada do sistema (6.22), ou seja, o determinante de A, $\Delta = ad - bc \neq 0$. Desta forma os autovalores são obtidos calculando-se as raízes do polinômio obtido por

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0, \text{ ou } \lambda^2 - \tau + \Delta = 0$$

então os autovalores são obtidos por

$$\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

de onde obtemos, 3 possibilidades para os autovalores:

1º caso: Autovalores reis e distintos ($\tau^2 - 4\Delta > 0$):

A solução do sistema é dada por

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t} \tag{6.23}$$

onde λ_1 e λ_2 são os autovalores e K_1 e K_2 os autovetores associados a λ_1 e λ_2 respectivamente.

Note que podemos escrever (6.23) da seguinte forma

$$X(t) = e^{\lambda_1 t}[c_1 K_1 + c_2 K_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}] \tag{6.24}$$

a) Ambos os autovalores negativos: $(\tau^2 - 4\Delta > 0, \tau < 0, \Delta > 0)$

Nó estável: De (6.23) decorre que $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$. Se admitirmos $\lambda_2 < \lambda_1$ então $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$ e podemos concluir de (6.24) que $X(t) \approx c_1 K_1 e^{\lambda_1 t}$ para grandes valores de t. Quando $c_1 \neq 0$, $X(t)$ tende a zero segundo uma das duas direções determinadas pelo autovetor K_1 correspondente a λ_1. Se $c_1 = 0$, $X(t) = c_2 K_2 e^{\lambda_2 t}$ e $X(t)$ tende a zero ao longo da reta determinada pelo autovetor K_2. Um ponto crítico é chamado **nó estável** quando ambos os autovalores são negativos.

b) Ambos os autovalores positivos: $(\tau^2 - 4\Delta > 0, \tau > 0, \Delta > 0)$

Nó instável: Novamente por (6.23) torna-se arbitrariamente grande quando t cresce. Além disso, por (6.24), $X(t)$ torna-se arbitrariamente grande em uma das direções determinadas pelo autovetor K_1 $(c_1 \neq 0)$ ou ao longo da reta determinada pelo autovetor K_2 $(c_1 = 0)$.

c) Autovalores com sinais opostos:

Ponto de sela Quando $c_1 = 0$, $X(t) = c_2 K_2 e^{\lambda_2 t}$ e como $\lambda_2 < 0$, $X(t)$ tende a zero ao longo da reta determinada pelo autovetor K_2. Se $X(0)$ não está sobre a reta determinada pelo autovetor K_2, a reta determinada por K_1 é uma assíntota de $X(t)$. Este ponto crítico é chamado **ponto de sela**.

2º caso: Um autovalor real repetido ($\tau^2 - 4\Delta = 0$):

Nós degenerados: Lembramos que neste caso há duas formas de solução, conforme encontramos 1 ou 2 autovalores associado a λ_1 de multiplicidade 2.

a) Dois autovetores L.I.: Se K_1 e K_2 são dois autovetores L.I. correspondentes a λ_1, então a solução geral é dada por

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_1 t} = (c_1 K_1 + c_2 K_2) e^{\lambda_1 t}.$$

Se $\lambda_1 < 0$, $X(t)$ tende a zero ao longo da reta determinada por $c_1 K_1 + c_2 K_2$, o ponto crítico é chamado de **nó estável degenerado**. Quando $\lambda_1 > 0$, invertem-se as setas pois $X(t) \to \infty$ quando t cresce. Neste caso temos um **nó instável degenerado**.

b) Um único autovetor: Quando existe um único autovetor K_1, a solução é dada por

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2(K_1 t e^{\lambda_1 t} + P e^{\lambda_1 t}),$$

onde $(A - \lambda_1 I)P = K_1$ e a solução pode ainda ser escrita como

$$X(t) = t e^{\lambda_1 t}(c_2 K_1 + \frac{c_1}{t} K_1 + \frac{c_2}{t} P).$$

Se $\lambda_1 < 0$, $\lim_{t\to\infty} t e^{\lambda_1 t} = 0$ decorrendo que $X(t) \to 0$ segundo uma das direções determinada por K_1, o ponto crítico é novamente chamado de **nó estável degenerado**. Se $\lambda_1 > 0$, $\lim_{t\to\infty} t e^{\lambda_1 t} = \infty$. A reta determinada por K_1 é uma assíntota para todas as soluções. O ponto crítico é chamado de **nó instável degenerado**.

3º caso: Autovalores complexos ($\tau^2 - 4\Delta < 0$):

No caso de $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ um autovalor, então $X(t) = c_1 X_1 + c_2 X_2$ onde

$$\begin{aligned} X_1(t) &= (B_1 cos\,\beta t - B_2 sen\,\beta t)e^{\alpha t} \\ X_2(t) &= (B_2 cos\,\beta t + B_1 sen\,\beta t)e^{\alpha t} \end{aligned}$$

ou ainda escrevemos

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t}(c_{11} cos\,\beta t - c_{12} sen\,\beta t) \\ y(t) &= e^{\alpha t}(c_{21} cos\,\beta t + c_{22} sen\,\beta t) \end{aligned} \tag{6.25}$$

a) Raízes imaginárias puras: ($\tau^2 - 4\Delta < 0$, $\tau = 0$)

Centro: Quando $\alpha = 0$, os autovalores são imaginários puros e temos que todas as soluções são periódicas com período $p = \dfrac{2\pi}{\beta}$. Note que se c_{12} e c_{21} fossem simultaneamente zero, (6.25) se reduziria a

$$\begin{aligned} x(t) &= c_{11} cos\, \beta t \\ y(t) &= c_{22} sen\, \beta t \end{aligned}$$

que é a parametrização da elipse.

Resolvendo o sistema em (6.25) com $\alpha = 0$, mostra-se que as soluções são elipses com centro na origem. Logo $(0, 0)$ é chamado **centro**.

b) Parte real não nula: $(\tau^2 - 4\Delta < 0,\ \tau \neq 0)$

Pontos espirais: Quando $\alpha < 0$, $e^{\alpha t} \to 0$ e as soluções são semelhantes as espirais que circulam em torno da origem e cada vez mais próximos a ela. Neste caso dizemos que o ponto crítico é um **ponto espiral estável**. No caso de $\alpha > 0$, $e^{\alpha t} \to \infty$ o efeito é o oposto. Então o ponto crítico é um **ponto espiral instável**.

Lista de Exercícios 6.4 .
Livro: Equações Diferenciais, volume 2
Autor: Dennis G. Zill e Michael R. Cullen
Exercícios: *7, 9, 11 e 13. (pág. 157-158).*
Exercícios: *9, 11, 13 e 15. (pág. 168-169).*

6.7 Soluções por séries de potências

Vamos lembrar alguns itens sobre séries de potências:

- Uma série de potências em $x - a$ (centrada em a) é uma série infinita da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n.$$

- Intervalo de convergência: é o conjunto de valores para os quais a série converge;
- Para verificar a convergência e o intervalo de convergência, usamos o teste da razão;
- Existem funções que podem ser representadas por séries de potências.
- Série de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

- Série de Maclaurin:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)(x)^n}{n!}$$

- Dizemos que a função f é analítica no ponto a quando ela pode ser representada por uma série de potências em $(x-a)$ com um raio de convergência positivo;

Vamos tentar agora, obter uma solução em séries de potências para equações diferenciais.

Exemplo 6.23 *Seja a equação* $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 0$. *Vamos tentar achar uma solução* $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Solução:

.

.

.

Observação 6.7.1 *Dizemos que uma função f é analítica no ponto a quando ela pode ser representada por uma série de potências em $(x-a)$.*

6.8 Soluções em torno de pontos ordinários

Suponha que a equação diferencial linear de segunda ordem

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{6.26}$$

seja escrita

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \tag{6.27}$$

Definição 6.8.1 *(**Pontos singulares e ordinários**) Dizemos que um ponto x_0 é um **ponto ordinário** ou **não singular** da equação (6.26) se $P(x)$ e $Q(x)$ são analíticas em x_0. Um ponto que não é ordinário é considerado **singular** da equação.*

6.8.1 Coeficientes Polinomiais

Observamos que quando $a_2(x)$, $a_1(x)$ e $a_0(x)$ são polinômios sem fatores em comum em (6.26) um ponto $x = x_0$ é

1. um ponto ordinário se $a_2(x) \neq 0$;
2. um ponto singular se $a_2(x) = 0$.

Exemplo 6.24 *Os pontos singulares da equação* $(x^2 - 1)y'' + 2xy' + 6y = 0$ *são:*

Solução:

Exemplo 6.25 *Os pontos singulares não são necessariamente números reais. Por exemplo, a equação* $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$ *tem como pontos singulares* $(x^2 + 1) = 0$*, ou seja,* $x = \pm i$*. Todos os outros pontos, reais ou complexos, são pontos ordinários.*

Teorema 6.8.2 ***(Existência de Soluções em séries de Potências)*** *Se* $x = x_0$ *for um ponto ordinário da equação diferencial (6.27), podemos sempre encontrar duas soluções linearmente independentes na forma de séries de potências centradas em* x_0*:*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n. \tag{6.28}$$

A série converge para uma solução em $|x - x_0| < R$ *em que* R *é a distância do ponto* x_0 *ao ponto singular mais próximo, real ou complexo.*

Os procedimentos para resolver uma equação conforme (6.27) é supor a solução $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ e então determinarmos os coeficientes. A solução geral será

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Observação 6.8.3 *Por questão de simplicidade, supomos que o ponto ordinário esteja sempre localizado na origem* $x = 0$*, pois caso contrário, a substituição* $t = x - x_0$ *traduz o valor* $x = x_0$ *para* $t = 0$*.*

Exemplo 6.26 *Resolva* $y'' - 2xy = 0$*.*

Solução:

.

.

.

Exemplo 6.27 *Resolva* $(x^2+1)y''+xy'-y=0$.

Solução:

.

.

.

6.8.2 Coeficientes Não Polinomiais

Vamos utilizar um exemplo para ilustrar como encontrar uma solução de uma equação diferencial em torno de um ponto ordinário quando seus coeficientes não são polinômios.

Exemplo 6.28 *Resolva* $y'' + (cox\, x)y = 0$.

Solução:

.

Capítulo 7

Transformada de Laplace

7.1 Transformada de Laplace

Vamos lembrar alguns conceitos já aprendidos em Cálculo (desde que existam as derivadas e integrais de cada uma):

- $\dfrac{d}{dx}[\alpha f(x)+\beta g(x)] = \alpha\dfrac{d}{dx}f(x)+\beta\dfrac{d}{dx}g(x)$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$;
- $\displaystyle\int [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$;
- $\displaystyle\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$;

o que caracteriza a linearidade da derivada e das integrais.

Também, dada uma função $f(x,y)$ tal que exista a integral $\int_a^b f(x,y)dx$. Então o resultado da integral $\int_a^b f(x,y)dx$ é ainda uma função, porém na variável independente y. Por exemplo,

$$\int_0^1 2xydx = x^2y|_0^1 = 1^2y - 0^2y = y.$$

Ainda, uma integral imprópria é calculada como:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\longrightarrow+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

e se existe, dizemos que a integral imprópria converge e caso contrário, dizemos que a integral imprópria diverge.

Exemplo 7.1 *Determine se a integral imprópria* $\int_0^{+\infty} e^{-st}dt$ *converge ou diverge, para* $s \neq 0$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-st}dt &= \lim_{b \longrightarrow +\infty} \int_0^b e^{-st}dt \\
&= \lim_{b \longrightarrow +\infty} -\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^b \\
&= \lim_{b \longrightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s}\right] \\
&= \begin{cases} \infty & \text{se } s < 0; \\ \frac{1}{s} & \text{se } s > 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Portanto $\int_0^{+\infty} e^{-st}dt$ converge para $s > 0$ e diverge para $s < 0$.

Em particular, temos uma integral imprópria muito conhecida e usada que é:

Definição 7.1.1 ***(Transformada de Laplace:)*** *Seja* f *um função definida para* $t \geq 0$. *Então a integral*

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

é chamada de ***Transformada de Laplace de*** f *desde que a integral convirja.*

Notação: A Transformada de Laplace da função $f(t)$ será indicada por $\mathscr{L}(f(t))$, ou ainda, $F(s)$.

Exemplo 7.2 $\mathscr{L}(1) = \int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \frac{1}{s}$ *para* $s > 0$, *como visto anteriormente.*

Exemplo 7.3

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(e^{at}) &= \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}dt \\
&= \lim_{b\longrightarrow+\infty} \left.\frac{e^{(a-s)t}}{(a-s)}\right|_0^b \\
&= \lim_{b\longrightarrow+\infty} \left[\frac{e^{(a-s)b}}{(a-s)} - \frac{1}{(a-s)}\right] \\
&= -\frac{1}{(a-s)} = \frac{1}{s-a},\ s > 0.
\end{aligned}$$

Exemplo 7.4

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(t) &= \int_0^{+\infty} te^{-st}dt \\
&= \lim_{b\longrightarrow+\infty} \left\{ -t\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_0^b - \int_0^b -\frac{e^{-st}}{s}dt \right\} \\
&= \lim_{b\longrightarrow+\infty} \left\{ -b\frac{e^{-sb}}{s} - \left.\frac{e^{-st}}{s^2}\right|_0^b \right\} \\
&= \lim_{b\longrightarrow+\infty} \left\{ -b\frac{e^{-sb}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s^2} + \frac{1}{s^2} \right\} \\
&= \frac{1}{s^2},\ s > 0.
\end{aligned}$$

Exemplo 7.5 $f(t) = sen\,(at),\ t \geq 0.$

$$\mathscr{L}(sen\,(at)) = \int_0^{+\infty} e^{-st}sen\,(at)dt \quad = \quad \lim_{b\longrightarrow+\infty} \int_0^b e^{-st}sen\,(at)dt$$

Vamos resolver a integral separadamente:

$$\begin{aligned}
\int e^{-st} sen\,(at) dt &= -\frac{e^{-st} cos\,(at)}{a} - \int \frac{s\, e^{-st} cos\,(at)}{a} dt \\
&= -\frac{e^{-st} cos\,(at)}{a} - \frac{s}{a}\left\{\frac{e^{-st} sen\,(at)}{a} - \int -\frac{s\, e^{-st}(sen\,(at))}{a} dt\right\} \\
&= -\frac{e^{-st} cos\,(at)}{a} - \frac{s}{a^2} e^{-st} sen\,(at) - \frac{s^2}{a^2}\int e^{-st}(sen\,(at)) dt.
\end{aligned}$$

Comparando os extremos vem que:

$$\int e^{-st} sen\,(at) dt + \frac{s^2}{a^2}\int e^{-st} sen\,(at) dt = -\ \frac{e^{-st} cos\,(at)}{a} - \frac{s}{a^2} e^{-st} sen\,(at)$$

ou ainda

$$\left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right)\int e^{-st} sen\,(at) dt = -\ \frac{e^{-st} cos\,(at)}{a} - \frac{s}{a^2} e^{-st} sen\,(at)$$

ou finalmente

$$\int e^{-st} sen\,(at) dt = \frac{a^2}{s^2 + a^2}\left(-\frac{e^{-st} cos\,(at)}{a} - \frac{s}{a^2} e^{-st} sen\,(at)\right)$$

Substituindo acima:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(sen\,(at)) &= \lim_{b \longrightarrow +\infty}\left[\frac{a^2}{s^2 + a^2}\left(-\frac{e^{-st} cos\,(at)}{a} - \frac{s}{a^2} e^{-st} sen\,(at)\right)\Bigg|_0^b\right] \\
&= \lim_{b \longrightarrow +\infty}\left[\frac{a^2}{s^2 + a^2}\left(-\frac{e^{-sb} cos\,(ab)}{a} + \frac{1}{a} - \frac{s}{a^2} e^{-sb} sen\,(ab)\right)\right] \\
&= \frac{a^2}{s^2 + a^2} . \frac{1}{a}
\end{aligned}$$

Ou seja

$$\mathscr{L}(sen\,(at)) = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

Observação 7.1.2 *$\mathscr{L}$ é uma transformada linear. Isto vem do fato de escrevermos*

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\alpha f(t)+\beta g(t)) &= \int_0^{+\infty} e^{-st}(\alpha f(t)+\beta g(t))dt\\ &= \int_0^{+\infty}(\alpha f(t)e^{-st}+\beta g(t)e^{-st})dt\\ &= \alpha\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt+\beta\int_0^{+\infty} g(t)e^{-st}dt\\ &= \alpha\mathscr{L}(f(t))+\beta\mathscr{L}(g(t))\end{aligned}$$

quando ambas as integrais convergem.

7.1.1 Condições suficientes para a Transformada de Laplace existir

Definição 7.1.3 ***(Seccionalmente contínua)*** *Uma função f é dita* ***seccionalmente contínua*** *(contínua por partes) em um intervalo $\alpha \le t \le \beta$ se o intervalo puder ser particionado em um número finito de pontos*

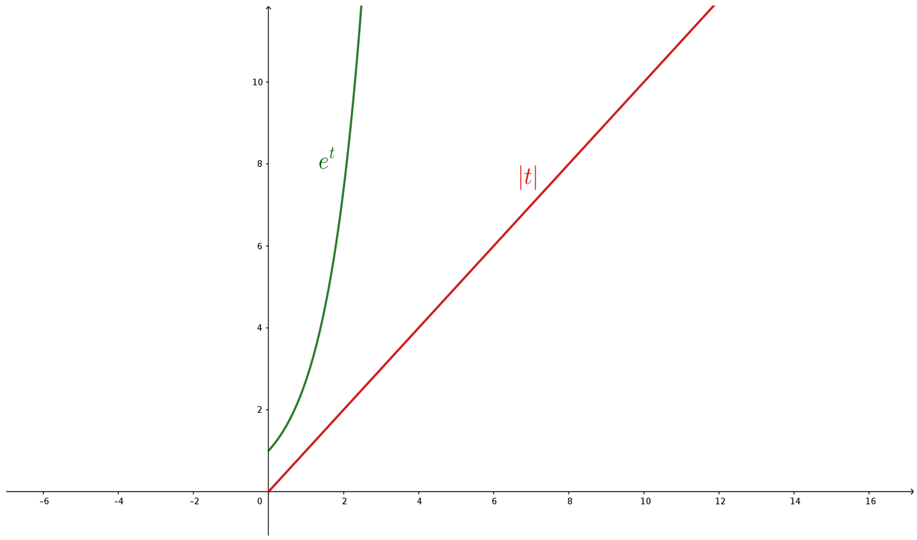
$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$$

de modo que:

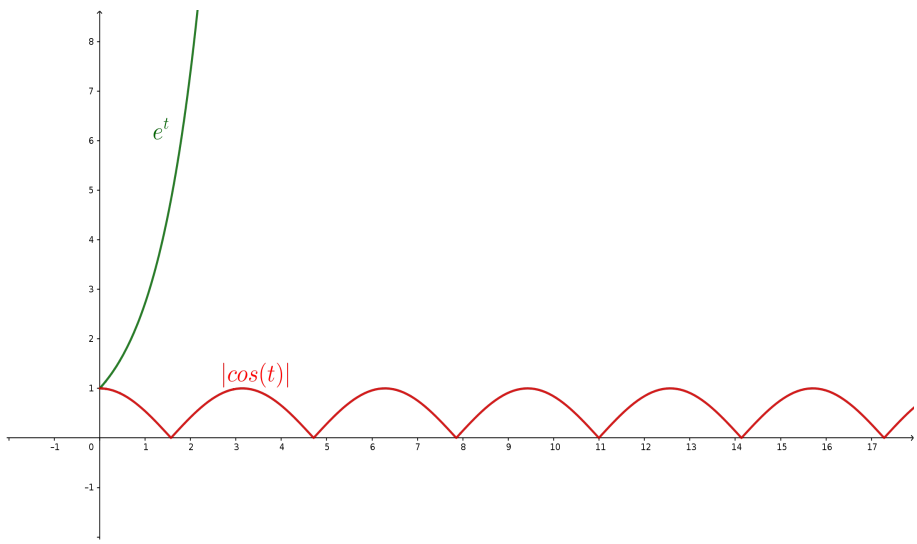
1. *f é contínua em cada subintervalo aberto $t_{i-1} < t < t_i$;*
2. *Existe os limentes laterais de f em cada ponto do intervalo (isto é, as descontinuidades são de primeira espécie).*

Definição 7.1.4 ***(Ordem exponencial)*** *Dizemos que uma função é de* ***(ordem exponencial)*** *se existem números c, $M > 0$ e $T > 0$ tais que $|f(t)| \le Me^{ct}$ para todo $t > T$.*

Exemplo 7.6 $|t| \leq e^t$



Exemplo 7.7 $|cos\, t| \leq e^t$



Teorema 7.1.5 ***(Condições suficientes de existência:)*** *Seja $f(t)$ uma função contínua por partes (seccionalmente contínua) no intervalo $[0, +\infty)$ e de ordem exponêncial $t > T$. Então sua transformada de Laplace existe para todo $s > c$.*

Note que os exemplos anteriores todas as funções eram de ordem exponencial.

Segue mais alguns exemplos de transformada de Laplace:

Exemplo 7.8 $\mathscr{L}(3t - 5sen\, 2t)$.

Solução: Lembrando que $\mathscr{L}$ é linear e usando os exemplos 7.4 e 7.5 anteriores, temos

$$\mathscr{L}(3t - 5sen\, 2t) = \mathscr{L}(3t) + \mathscr{L}(-5sen\, 2t) = 3\mathscr{L}(t) - 5\mathscr{L}(sen\, 2t) = 3\frac{1}{s^2} - 5\frac{2}{s^2+4}.$$

Ou seja,

$$\mathscr{L}(3t - 5sen\, 2t) = \frac{3}{s^2} - \frac{10}{s^2+4}.$$

Exemplo 7.9 $\mathscr{L}(f(t))$ *onde* $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3 \\ 2, & t \geq 3. \end{cases}$

Solução:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f(t)) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \\
&= \int_0^3 e^{-st}.0dt + \int_3^{+\infty} e^{-st}.2dt \\
&= \lim_{b \longrightarrow +\infty} 2 \int_3^b e^{-st}dt \\
&= \lim_{b \longrightarrow +\infty} -2\, \frac{e^{-st}}{s}\Big|_3^b \\
&= -2\frac{e^{-3s}}{s}, \ s > 0.
\end{aligned}$$

Teorema 7.1.6 *Transformada de Laplace de algumas funções básicas:*

1. $\mathscr{L}(1) = \dfrac{1}{s}$;

2. $\mathscr{L}(t^n) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$;

3. $\mathscr{L}(e^{at}) = \dfrac{1}{s-a}$;

4. $\mathscr{L}(sen\, kt) = \dfrac{k}{s^2+k^2}$;

5. $\mathscr{L}(cos\, kt) = \dfrac{s}{s^2+k^2}$;

6. $\mathscr{L}(senh\, kt) = \dfrac{k}{s^2-k^2}$;

7. $\mathscr{L}(cosh\, kt) = \dfrac{s}{s^2-k^2}$.

Exemplo 7.10 *Calcule* $\mathscr{L}(sen^2\, t)$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(sen^2\, t) &= \mathscr{L}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos\, 2t) = \mathscr{L}(\frac{1}{2}) - \mathscr{L}(\frac{1}{2}cos\, 2t) = \frac{1}{2}\mathscr{L}(1) - \frac{1}{2}\mathscr{L}(cos\, 2t)\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4} = \frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4)} = \frac{2(s^2+4)-2s^2}{4s(s^2+4)}\\
&= \frac{2s^2+8-2s^2}{4s(s^2+4)} = \frac{2}{s(s^2+4)}.
\end{aligned}$$

7.2 Transformada Inversa

Até agora, estávamos trabalhando da seguinte forma. Dada uma função $f(t)$, tínhamos como objetivo encontrar $\mathscr{L}(f(t)) = F(s)$. Estaremos interessados em, dado uma $F(s)$, queremos descobrir uma função $f(t)$ tal que $\mathscr{L}(f(t)) = F(s)$. Isto é, estaremos usando o processo inverso do anterior, que chamaremos de *obter a transformada inversa da transformada de Laplace* e denotaremos por $\mathscr{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$.

Observação 7.2.1 *Existe uma forma geral para a transformada inversa de Laplace, porém ela necessita de conhecimento sobre integração complexa. Sendo assim, não faremos aqui tal fórmula.*

Teorema 7.2.2 *Algumas transformadas inversas:*

1. $1 = \mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s})$;

2. $t^n = \mathscr{L}^{-1}(\frac{n!}{s^{n+1}})$, $n = 1, 2, 3, \cdots$;

3. $e^{at} = \mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s-a})$;

4. $sen\, kt = \mathscr{L}^{-1}(\frac{k}{s^2+k^2})$;

5. $cos\, kt = \mathscr{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+k^2})$;

6. $senh\, kt = \mathscr{L}^{-1}(\frac{k}{s^2-k^2})$;

7. $cosh\, kt = \mathscr{L}^{-1}(\frac{s}{s^2-k^2})$.

Observação 7.2.3 .
1) *$\mathscr{L}^{-1}$ é uma transformada linear;*
2) *A transformada de Laplace inversa de uma função $F(s)$ pode não ser única. Agora se f_1 e f_2 são contínuas por partes em $[0, +\infty)$ e de ordem exponencial, então se $\mathscr{L}(f_1(t)) = \mathscr{L}(f_2(t))$, pode-se mostrar que f_1 e f_2 são essencialmente iguais, isto é, f_1 e f_2 podem ser diferentes somente nos pontos de descontinuidades.*

Para cada item, use a tabela e encontre $\mathscr{L}^{-1}(F(s))$:

Exemplo 7.11 $F(s) = \frac{1}{s^5}$.

Solução:

$$\mathscr{L}^{-1}(F(s)) = \mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s^5}) = \mathscr{L}^{-1}(\frac{4!}{4!}\frac{1}{s^5}) = \frac{1}{4!}\mathscr{L}^{-1}(\frac{4!}{s^5}) = \frac{1}{4!}t^4 = \frac{t^4}{4!}.$$

Exemplo 7.12 $F(s) = \frac{1}{s^2+64}$.

Solução:

$$\mathscr{L}^{-1}(F(s)) = \mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+64}) = \mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+8^2}) = \mathscr{L}^{-1}(\frac{8}{8}\frac{1}{s^2+8^2}) = \frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}(\frac{8}{s^2+8^2}) = \frac{1}{8}sen\, 8t.$$

Exemplo 7.13 $F(s) = \dfrac{3s+5}{s^2+7}$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}(F(s)) &= \mathscr{L}^{-1}(\frac{3s+5}{s^2+7}) = \mathscr{L}^{-1}(\frac{3s}{s^2+7} + \frac{5}{s^2+7}) = \mathscr{L}^{-1}(\frac{3s}{s^2+7}) + \mathscr{L}^{-1}(\frac{5}{s^2+7}) \\
&= 3\mathscr{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+(\sqrt{7})^2}) + 5\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+(\sqrt{7})^2}) = 3cos\,\sqrt{7}\,t + 5\mathscr{L}^{-1}(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\frac{1}{s^2+(\sqrt{7})^2}) \\
&= 3cos\,\sqrt{7}\,t + \frac{5}{\sqrt{7}}\mathscr{L}^{-1}(\frac{\sqrt{7}}{s^2+(\sqrt{7})^2}) = 3cos\,\sqrt{7}\,t + \frac{5}{\sqrt{7}}sen\,\sqrt{7}\,t.
\end{aligned}$$

7.3 Recordando Frações Parciais

7.3.1 Resultados

1) Sejam α, β, m e n números reais, com $\alpha \neq \beta$. Então existem constantes A e B tais que

a) $\dfrac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \dfrac{A}{x-\alpha} + \dfrac{B}{x-\beta}$;

b) $\dfrac{mx+n}{(x-\alpha)^2} = \dfrac{A}{x-\alpha} + \dfrac{B}{(x-\alpha)^2}$.

2) Sejam α, β, γ, m, n, p números reais, com α, β e γ distintos entre si. Então existem constantes A, B e C tais que

a) $\dfrac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} = \dfrac{A}{x-\alpha} + \dfrac{B}{x-\beta} + \dfrac{C}{x-\gamma}$;

b) $\dfrac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(x-\beta)^2} = \dfrac{A}{x-\alpha} + \dfrac{B}{x-\beta} + \dfrac{B}{(x-\beta)^2}$;

*Para o caso $\dfrac{p(x)}{ax^2+bx+c}$ onde ax^2+bx+c não tem raiz real completa quadrado.

c) $\dfrac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)} = \dfrac{A}{x-\alpha} + \dfrac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Usando os resultados acima, calcule:

Exemplo 7.14 $\mathscr{L}^{-1}(\frac{2s-2}{s^3(s^2+4)})$.

Solução:

Exemplo 7.15 $\mathscr{L}^{-1}(\dfrac{2s+2}{s^2+2s+5})$.

Solução:

Teorema 7.3.1 ***(O comportamento de*** $F(s)$ ***quando*** $s \to \infty$***.)*** *Seja* $f(t)$ *contínua por partes em* $[0, \infty)$ *e de ordem exponencial para* $t > T$ *então*

$$\lim_{s \to \infty} \mathscr{L}(f(t)) = 0.$$

7.3.2 Teorema de Translação e Derivadas de uma Transformação

Teorema 7.3.2 ***(Primeiro Teroema de Translação:)***
Seja a um número real, então

$$\mathscr{L}(e^{at} f(t)) = F(s - a).$$

Reciprocamente, se $f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F(s))$, *então*

$$e^{at} f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F(s - a)).$$

O gráfico de $F(s-a)$ é o gráfico de $F(s)$ deslocado sobre o eixo s para a direita se $a > 0$ e para a esquerda se $a < 0$.

Notação: $\mathscr{L}(e^{at} f(t)) = \mathscr{L}(f(t))_{s \to s-a}$, onde $s \to s - a$ significa que substituímos $F(s)$ por $s - a$.

Exemplo 7.16 *Calcule:*
a) $\mathscr{L}(e^{5t} t^3)$.
b) $\mathscr{L}(e^{-2t} cos\, 4t)$.

Solução: a) $\mathscr{L}(e^{5t} t^3) = \mathscr{L}(t^3)_{s \to s-5} = \left. \dfrac{3!}{s^4} \right|_{s \to s-5} = \dfrac{3!}{(s-5)^4}$.
b) $\mathscr{L}(e^{-2t} cos\, 4t) = \mathscr{L}(cos\, 4t)_{s \to s+2} = \left. \dfrac{4}{s^2 + 16} \right|_{s \to s+2} = \dfrac{4}{(s+2)^2 + 16}$.

Exemplo 7.17 *Calcule* $\mathscr{L}^{-1}(F(s))$, *onde*
a) $F(s) = \dfrac{s}{s^2 + 6s + 11}$.
b) $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)^3} + \dfrac{1}{s^2 + 2s - 8}$.

Solução: a) $F(s) = \dfrac{s}{s^2+6s+11} = \dfrac{s}{s^2+6s+9+2} = \dfrac{s}{(s+3)^2+2} = \dfrac{s+3-3}{(s+3)^2+2} = \dfrac{s+3}{(s+3)^2+2} - \dfrac{3}{(s+3)^2+2}$. Portanto

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+6s+11}\right) &= \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s+3}{(s+3)^2+2}\right) - \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{(s+3)^2+2}\right)\\
&\underbrace{=}_{u=s+3} \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{u}{u^2+(\sqrt{2})^2}\right) - 3\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{u^2+(\sqrt{2})^2}\right)\\
&= e^{-3t}cos\,\sqrt{2}t - 3\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{u^2+(\sqrt{2})^2}\right)\\
&= e^{-3t}cos\,\sqrt{2}t - \frac{3}{\sqrt{2}}e^{-3t}sen\,\sqrt{2}t.
\end{aligned}$$

b) $\mathscr{L}^{-1}(F(s)) = \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s-1)^3}\right) + \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2+2s-8}\right)$.

Para calcular $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s-1)^3}\right)$, fazemos $u = s-1$, então

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^3}\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{u^3}\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{2!}\frac{2!}{u^3}\right) = \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2!}{u^3}\right) = e^t t^2.$$

Agora, para calcular $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2+2s-8}\right)$, completamos quadrado no denominador, isto é, somamos e subtraímos 1 e temos que

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s-8+1-1}\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+1-9}\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2-9}\right).$$

Fazendo $v = s+1$ obtemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{v^2-3^2}\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{v^2-3^2}\right) = \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{v^2-3^2}\right) = \frac{1}{3}e^{-t}senh\,3t.$$

Portanto

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{s^2+2s-8}\right) = e^t t^2 + \frac{1}{3}e^{-t}senh\,3t.$$

7.4 Soluções de Problemas de Valores Iniciais

Veremos agora, como usar a transformada de Laplace para resolver alguns P.V.I.s com equações de coeficientes constantes. Mas para isto, devemos ver o próximo resultado que relaciona a transformada das derivadas de uma função e a transformada da própria função.

Teorema 7.4.1 *Se $f(t), f'(t), \cdots, f^{(n-1)(t)}$ forem contínuas em $[0, +\infty)$, de ordem exponencial, e se $f^{(n)}(t)$ for contínua por partes em $[0, +\infty)$, então*

$$\mathscr{L}(f^{(n)}(t)) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

Exemplo 7.18 *Vamos usar transformada para resolver o seguinte PVI*

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Solução: Aplicando a transformada de Laplace na equação diferencial, temos que

$$\mathscr{L}(y'' - y' - 2y) = \mathscr{L}(0)$$

e da lineariedade da transformada, segue que

$$\mathscr{L}(y'') - \mathscr{L}(y') - 2\mathscr{L}(y) = 0.$$

Aplicando o teorema 7.4.1, vamos obter

$$s^2\mathscr{L}(y) - sy(0) - y'(0) - [s\mathscr{L}(y) - y(0)] - 2\mathscr{L}(y) = 0,$$

isto é,

$$(s^2 - s - 2)\mathscr{L}(y) - sy(0) - y'(0) + y(0) = 0,$$

e substituindo os valores iniciais, temos

$$(s^2 - s - 2)\mathscr{L}(y) - s.1 - 0 + 1 = 0.$$

Assim

$$(s^2 - s - 2)F(s) - s + 1 = 0 \Rightarrow F(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)}.$$

Agora, usamos frações parciais para obter a expressão de $F(s)$ para aplicarmos $\mathscr{L}^{-1}$.

$$\frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{b}{s+1} = \frac{A(s+1)+B(s-1)}{(s-2)(s+1)} = \frac{(A+B)s+A-2B}{(s-2)(s+1)},$$

comparando os extremos,

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-2B=-1 \end{cases} \Rightarrow B = \frac{2}{3},\ A = \frac{1}{3}.$$

Logo, escrevemos

$$F(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1}.$$

Agora a solução y do PVI é $\mathscr{L}^{-1}(F(s))$, isto é,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}(F(s)) &= \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1}\right) \\ &= \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) + \frac{2}{3}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) \\ &= \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}. \end{aligned}$$

Exemplo 7.19 *Vamos usar transformada para resolver o seguinte PVI*

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t} \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 6 \end{cases}.$$

Solução: Aplicando a transformada de Laplace na equação diferencial, temos que

$$\mathscr{L}(y'' - 6y' + 9y) = \mathscr{L}(t^2 e^{3t})$$

e da lineariedade da transformada e usando o Teorema 7.4.1, segue que

$$s^2F(s) - sy(0) - y'(0) - 6[sF(s) - y(0)] + 9F(s) = \frac{2}{(s-3)^3},$$

e substituindo os valores iniciais, temos

$$(s^2 - 6s + 9)F(s) - 2s - 6 + 12 = \frac{2}{(s-3)^3},$$

ou ainda,

$$(s^2 - 6s + 9)F(s) = \frac{2}{(s-3)^3} + 2s - 6$$

a qual pode ser reescrita como

$$(s-3)^2 F(s) = \frac{2}{(s-3)^3} + 2(s-3) \Rightarrow F(s) = \frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2}{(s-3)}.$$

Agora a solução $y = \mathscr{L}^{-1}(F(s))$, e portanto

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}(F(s)) &= \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2}{(s-3)}\right) \\
&= 2\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-3)^5}\right) + 2\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right) \\
&\underbrace{=}_{u=s-3} 2\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(u)^5}\right) + 2e^{3t} \\
&= 2\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{4!}\frac{4!}{(u)^5}\right) + 2e^{3t} \\
&= \frac{2}{4!}e^{3t}t^4 + 2e^{3t}.
\end{aligned}$$

Exemplo 7.20 *Resolva* $y^{(4)} - y = 0$ *com as condições* $y(0) = 0$*,* $y'(0) = 1$*,* $y''(0) = 0$ *e* $y'''(0) = 0$*.*

Solução: Aplicando a transformada de Laplace, temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(y^{(4)} - y) = \mathscr{L}(0) \ &\Rightarrow \ \mathscr{L}(y^{(4)}) - \mathscr{L}(y) = 0 \\
&\Rightarrow \ s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) - Y(s) = 0
\end{aligned}$$

e substituindo os valores iniciais, temos

$$(s^4 - 1)Y(s) = s^2 \ \Rightarrow \ Y(s) = \frac{s^2}{s^4 - 1}.$$

Lembrando que $s^4 - 1 = (s^2 - 1)(s^2 + 1) = (s - 1)(s + 1)(s^2 + 1)$ e fazendo mais uma vez uso das frações parciais, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{s^2}{s^4 - 1} &= \frac{s^2}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} \\
&= \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{Cs + D}{(s^2+1)} \\
&= \frac{A(s+1)(s^2+1) + B(s-1)(s^2+1) + (Cs+D)(s-1)(s+1)}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} \\
&= \frac{A(s^3 + s^2 + s + 1) + B(s^3 - s^2 + s - 1) + (Cs+D)(s^2-1)}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} \\
&= \frac{(A+B+C)s^3 + (A-B+D)s^2 + (A+B-C)s + (A-B-D)}{(s-1)(s+1)(s^2+1)}.
\end{aligned}$$

De onde vem que

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - B + D = 1 \\ A + B - C = 0 \\ A - B - D = 0 \end{cases}$$

Colocando na forma matricial e escalonando, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{|l} L_2 \to L_1 - L_2 \\ L_3 \to L_1 - L_3 \\ L_4 \to L_1 - L_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{|l} L_4 \to L_2 - L_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & -1 \end{bmatrix}.$$

Voltando ao sistema

$$\begin{cases} A+B+C &= 0 \\ 2B+C-D &= -1 \\ 2C &= 0 \\ -2D &= -1 \end{cases}$$

Das duas últimas equações, temos que $C = 0$ e $D = \frac{1}{2}$. Substituindo esses valores na segunda equação, temos que $2B = -1 + \frac{1}{2} \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$. Por último, levando esses valores na primeira equação, obtemos que $A = -B \Rightarrow A = \frac{1}{4}$.

Portanto

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{4}}{(s-1)} - \frac{\frac{1}{4}}{(s+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(s^2+1)}.$$

Agora como $y(t) = \mathscr{L}^{-1}(Y(s))$, temos

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4}}{(s-1)}\right) - \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4}}{(s+1)}\right) + \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{(s^2+1)}\right) \\ &= \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}sen\, t \\ &= \frac{1}{4}(e^t - e^{-t}) + \frac{1}{2}sen\, t \\ &= \frac{1}{2}(\frac{e^t - e^{-t}}{2} + sen\, t). \end{aligned}$$

Logo a solução da equação diferencial é

$$y(t) = \frac{1}{2}(senh\, t + sen\, t).$$

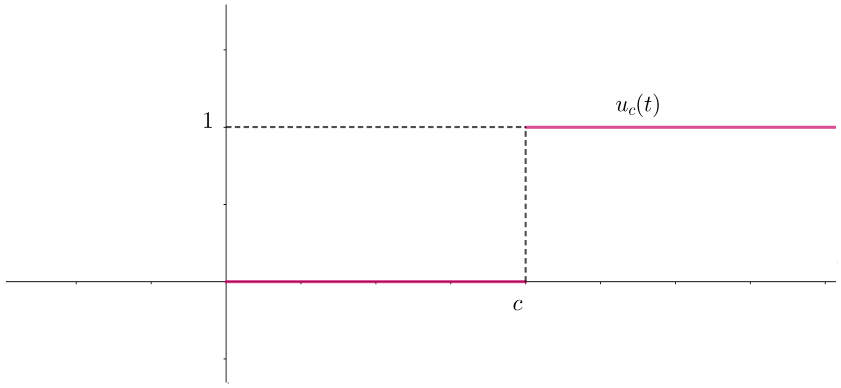
7.4.1 Função Degrau

Algumas aplicações da transformada ocorrem na solução de equações diferenciais sob a ação de funções descontínuas ou de impulso. Equações deste tipo aparecem com frequência na análise de fluxo de corrente em circuitos elétricos ou nas vibrações de sistemas mecânicos.

Definição 7.4.2 *A função*

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}, c \geq 0$$

é chamada ***degrau unitária*** *ou* ***função de Heaviside****.*

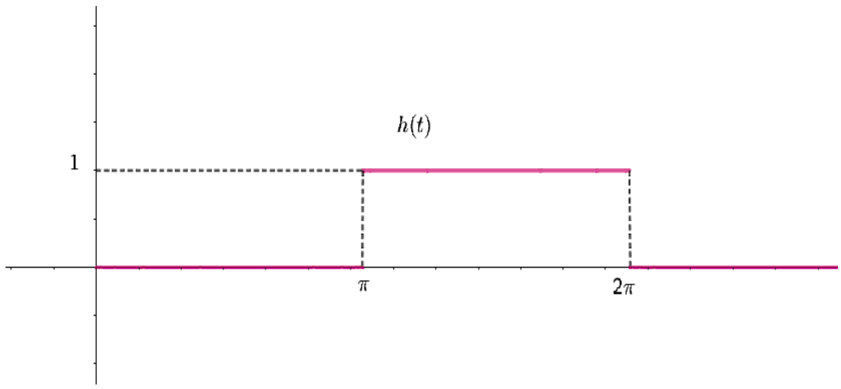


Exemplo 7.21 *Esboce o gráfico da função $h(t) = u_\pi - u_{2\pi}$.*

Solução: Temos que a função $h(t)$ pode ser reescrita da seguinte forma

$$h(t) = \begin{cases} 0 - 0 = 0, & 0 \leq t < \pi \\ 1 - 0 = 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 1 - 1 = 0, & t \geq 2\pi \end{cases}.$$

Assim o gráfico é



Agora vamos calcular a transformada de Laplace da função de Heaviside:

$$\mathscr{L}(u_c(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st}u_c(t)dt = \int_c^{+\infty} e^{-st}dt = \left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_c^{+\infty} = \frac{e^{-ct}}{s},\ s > 0.$$

Para uma função f, dada para $t \geq 0$, vamos considerar a função g definida por

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ f(t-c), & t \geq c \end{cases},$$

que representa a translação de f por uma distância c no sentido positivo de t. Assim escrevemos $g(t) = u_c(t)f(t-c)$. Com isto temos:

Teorema 7.4.3 ***(2º teorema de translação:)*** *Se $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$ existe para $s > a \geq 0$ e c uma constante positiva, então*

$$\mathscr{L}(u_c(t)f(t-c)) = e^{-cs}\mathscr{L}(f(t)) = e^{-cs}F(s),\ s > a.$$

Reciprocamente, se $f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F(s))$, então

$$u_c(t)f(t-c) = \mathscr{L}^{-1}(e^{-cs}F(s)).$$

Exemplo 7.22 *Encontre $\mathscr{L}(f(t))$ onde*

$$f(t) = \begin{cases} sen\,t, & 0 \leq t < \frac{\pi}{4} \\ sen\,t + cos\,(t - \frac{\pi}{4}), & t \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

Solução: Note que $f(t) = sen\,t + g(t)$ onde $g(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \frac{\pi}{4} \\ cos\,(t - \frac{\pi}{4}), & t \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}.$

Logo $g(t) = u_{\frac{\pi}{4}}(t)cos\,(t - \frac{\pi}{4})$ e assim

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f(t)) &= \mathscr{L}(sen\,t + u_{\frac{\pi}{4}}(t)cos\,(t - \frac{\pi}{4})) \\
&= \mathscr{L}(sen\,t) + \mathscr{L}(u_{\frac{\pi}{4}}(t)cos\,(t - \frac{\pi}{4})) \\
&= \mathscr{L}(sen\,t) + e^{-\frac{\pi}{4}s}\mathscr{L}(cos\,t) \\
&= \frac{1}{s^2+1} + e^{-\frac{\pi}{4}s}\frac{s}{s^2+1} \\
&= \frac{1 + se^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

Exemplo 7.23 *Encontre a transformada inversa de* $F(s) = \dfrac{1 - e^{-2s}}{s^2}$.

Solução: Seja $f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F(s))$, isto é,

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1 - e^{-2s}}{s^2}\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2}\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) - \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2}\right) = t - u_2(t)(t-2),$$

ou seja,

$$f(t) = \begin{cases} t - 0(t-2) = t & 0 \le t < 2 \\ t - 1(t-2) = 2, & t \ge 2 \end{cases}.$$

7.4.2 Equações Diferenciais com Forçamentos Descontínuos

O problema a seguir, representa a carga de um capacitor em um circúito elétrico simples onde a voltagem é um pulso unitário para $5 \le t < 20$.

Exemplo 7.24 *Encontre a solução da equação difencial*

$$\begin{cases} 2y'' + y' + 2y = g(t) \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

onde $g(t) = \begin{cases} 1 & 5 \le t < 20 \\ 0, & 0 \le t < 5 \ \ e\ t \ge 20 \end{cases}.$

Solução: Note que $g(t) = u_5(t) - u_{20}(t)$. Aplicando a transformada de Laplace na equação diferencial, temos:

$$\mathscr{L}(2y'' + y' + 2y) = \mathscr{L}(u_5(t) - u_{20}(t))$$

e usando a linearidade, a transformada das derivadas e da função degrau unitária, temos

$$2\mathscr{L}(y'') + \mathscr{L}(y') + 2\mathscr{L}(y) = \mathscr{L}(u_5(t)) - \mathscr{L}(u_{20}(t))$$

$$2s^2Y(s) - 2sy(0) - 2y'(0) + sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{e^{-5s}}{s} - \frac{e^{-20s}}{s}.$$

Usando as condições iniciais

$$(2s^2 + s + 2)Y(s) = \frac{e^{-5s} - e^{-20s}}{s}$$

isto é

$$Y(s) = (e^{-5s} - e^{-20s})\frac{1}{s(2s^2 + s + 2)}$$

Aplicando a transformada inversa, obtemos a solução do PVI $y(t)$, ou seja,

$$\mathscr{L}^{-1}\left((e^{-5s} - e^{-20s})\frac{1}{s(2s^2 + s + 2)}\right) = y(t).$$

Fazemos

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-5s}}{s(2s^2+s+2)} - \frac{e^{-20s}}{s(2s^2+s+2)}\right) \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-5s}}{s(2s^2+s+2)}\right) - \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-20s}}{s(2s^2+s+2)}\right) \\ &= u_5 f(t-5) - u_{20} f(t-20) \end{aligned} \tag{7.1}$$

onde $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(2s^2+s+2)}\right)$. Agora para calcular $f(t)$, usamos frações parciais

$$\frac{1}{s(2s^2+s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(2s^2+s+2)} = \frac{A(2s^2+s+2) + (Bs+c)s}{s(2s^2+s+2)} = \frac{(2A+B)s^2 + (A+c)s + 2A}{s(2s^2+s+2)},$$

assim

$$\begin{cases} 2A + B = 0 \\ A + C = 0 \\ 2A = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -1, C = -\frac{1}{2}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s(2s^2+s+2)} &= \frac{\frac{1}{2}}{s} + \left(\frac{-s-\frac{1}{2}}{s^2+s+2}\right)\\
&= \frac{\frac{1}{2}}{s} + \left(\frac{-s-\frac{1}{2}}{2(s^2+\frac{s}{2}+1)}\right)\\
&= \frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{1}{2}\left(\frac{-s-\frac{1}{2}}{s^2+\frac{s}{2}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+1}\right)\\
&= \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{1}{2}\left(\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}\right)\\
&= \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{1}{2}\left(\frac{s+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{(s+\frac{1}{4})^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}\right)\\
&= \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{1}{2}\left(\frac{s+\frac{1}{4}}{(s+\frac{1}{4})^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{(s+\frac{1}{4})^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}\right).
\end{aligned}$$

Desta forma

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(2s^2+s+2)}\right) =$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{s}\right) - \frac{1}{2}\left[\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s+\frac{1}{4}}{(s+\frac{1}{4})^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}\right) + \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4}}{(s+\frac{1}{4})^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{2}\left[\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}\right)_{s\to s+\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}\right)_{s\to s+\frac{1}{4}}\right] =$$

$$\frac{1}{2}.1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}t}\left[cos\,\frac{\sqrt{15}}{4}t + \frac{1}{4}.\frac{4}{\sqrt{15}}sen\,\frac{\sqrt{15}}{4}t\right] =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}t}\left[cos\,\frac{\sqrt{15}}{4}t + \frac{1}{2\sqrt{15}}sen\,\frac{\sqrt{15}}{4}t\right].$$

Retornando a (7.1), temos

$$\begin{aligned} y(t) &= u_5(t)\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}(t-5)}\left(cos\,\frac{\sqrt{15}}{4}(t-5) + \frac{1}{2\sqrt{15}}sen\,\frac{\sqrt{15}}{4}(t-5)\right)\right] \\ &\quad -u_{20}(t)\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}(t-20)}\left(cos\,\frac{\sqrt{15}}{4}(t-20) + \frac{1}{2\sqrt{15}}sen\,\frac{\sqrt{15}}{4}(t-20)\right)\right]. \end{aligned}$$

7.4.3 Impulsos

Em algumas aplicações, é necessário tratar fenômenos de natureza impulsiva. Por exemplo ao dar com uma raquete em uma bola de tênis, o tempo de contato é pequeno, no entanto a amplitude é grande. Funções que descrevem estes tipos de situações são chamadas de **impulsos**.

Definição 7.4.4 *Digamos $g(t)$ tal que $g(t)$ é grande em $t_0 - \tau < t < t_0 + \tau$ e zero fora deste intervalo. A integral*

$$I(\tau) = \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$$

é chamado de ***impulso****.*

Definição 7.4.5 *Define-se a* ***função impulso unitária*** *δ como um impulso de tamanho 1 em $t = 0$, mas que é zero para outros valores de t. Esta função tem as propriedades:*

- $\delta(t) = 0,\ t \neq 0$;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$

é chamado de δ ***de Dirac****.*

De maneira análoga, define-se δ para um ponto t_0 arbitrário como

- $\delta(t - t_0) = 0,\ t \neq 0;$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)dt = 1$

e sua transformada de Laplace é dada por

$$\mathscr{L}(\delta(t-t_0)) = e^{-st_0}.$$

Exemplo 7.25 *Encontre a solução do PVI*

$$\begin{cases} 2y'' + y' + 2y = \delta(t-5) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Solução: Aplicando a transformada de Laplace, conforme o exemplo anterior, temos

$$(2s^2 + s + 2)Y(s) = \mathscr{L}(\delta(t-5)) = e^{-5s}.$$

Assim

$$\begin{aligned} Y(s) &= e^{-5s}\frac{1}{(2s^2+s+2)} \\ &= \frac{e^{-5s}}{2}\left(\frac{1}{(s+\frac{1}{4})^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}\right). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} y &= \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{2}e^{-5s}\frac{1}{s^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}\right)_{s\to s+\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2}u_5(t)e^{-\frac{1}{4}(t-5)}\frac{4}{\sqrt{15}} sen\, \frac{\sqrt{15}}{4}(t-5) \\ &= \frac{2}{\sqrt{15}}u_5(t)e^{-\frac{1}{4}(t-5)} sen\, \frac{\sqrt{15}}{4}(t-5). \end{aligned}$$

Isto é,

$$y = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 5 \\ \frac{2}{\sqrt{15}}e^{-\frac{1}{4}(t-5)} sen\, \frac{\sqrt{15}}{4}(t-5), & t \geq 5 \end{cases}.$$

7.4.4 Alguns Resultados

Teorema 7.4.6 ***(Derivadas de Transformadas):***
Para $n = 1, 2, \cdots$ temos

$$\mathscr{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

onde $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$.

Definição 7.4.7 *Se as funções f e g forem contínuas por partes em $[0, +\infty)$, então a convolução de f e g, denotada por $f * g$ é dada pela integral*

$$f * g = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Teorema 7.4.8 ***Teorema da Convolução:*** *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções contínuas por partes e de ordem exponencial, então*

$$\mathscr{L}(f * g) = \mathscr{L}(f(t))\mathscr{L}(g(t)),$$

e a sua forma inversa

$$\mathscr{L}^{-1}(F(s).G(s)) = f * g$$

onde $\mathscr{L}(f(t)) = F(s)$ e $\mathscr{L}(g(t)) = G(s)$.

Seja f periódica de período T, $T > 0$, então temos

Teorema 7.4.9 ***Teorema da Transformada de Laplace da Função Periódica:*** *Seja $f(t)$ contínua por partes em $[0, +\infty)$ e de ordem exponencial. Se $f(t)$ for periódica de período T, $T > 0$, então*

$$\mathscr{L}(f(t)) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt.$$