UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
VARIÁVEIS COMPLEXAS
LISTA Nro. 6

Professores: Iván Gonzáles

1 de junho de 2022

1 Séries de Potências

1) Obtenha o desenvolvimento em séries de potências em torno do ponto indicado. Represente graficamente a região de convergência.

   (a) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ em potências de $z + i$.

   (b) $f(z) = \dfrac{1}{2z-9}$ em torno de $z_0 = 3$.

   (c) $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ em potências de $z - 1$.

   (d) $f(z) = \dfrac{1}{2z-3}$ em torno de $z_0 = -i$.

   (e) $f(z) = \dfrac{i}{z+i}$ em potências de $z - 1$.

   (f) $f(z) = \dfrac{1}{z^3}$ em potências de $z + 2$.

2) Lembrando que $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. Encontre o raio de convergência R das séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ln(3n^2+5)(z+i)^n$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\sinh n)z^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} z^{2n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2})^{3n} z^n$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} z^{n^2}$

3) Encontre as séries de potências(Séries de Maclaurin) em torno de $z_0 = 0$ de

(a) $\sin z$

(b) $\cos z$

(c) $\sinh z$

(d) $\cosh z$

Dica: Lembrar que $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ e $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sinh z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$ e $\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$.

4) Seja $f(z) = ln(1+z)$. Expandir $f(z)$ em uma série de Taylor em torno de $z_0 = 0$(Maclaurin) e determine a região de convergência.

5) Expandir $ln\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ em série de Taylor em torno de $z_0 = 0$.

6) Expandir $f(z) = \sin z$ em série de Taylor em torno de $z_0 = \pi/4$.

7) Desenvolva em torno de $z_0 = 1$ a função $f(z) = zlnz - z$ (Use a determinação ou ramo principal, no qual $ln1 = 0$).

8) Desenvolva em séries de potências de z e $z-2$ as funções

(a) $f(z) = \dfrac{1}{(4-z)^3}$

(b) $g(z) = \dfrac{1}{z^5}$

9) Encontre as séries de Laurent para as seguintes funções, nas regiões dadas:

(a) $f(z) = \dfrac{1+z}{z}$, $z_0 = 0$, $0 < |z| < \infty$.

(b) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$, $z_0 = 0$, $0 < |z| < \infty$.

(c) $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)(z-2)}$, $z_0 = 2$, $0 < |z-2| < \sqrt{5}$.

(d) $f(z) = \dfrac{z^5}{z-1}$, $z_0 = 0$, $|z| > 1$.

(e) $f(z) = z^5 e^{1/z}$, $z_0 = 0$, $|z| > 0$.

(f) $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z-\pi)^3}$, $z_0 = \pi$, $z \neq \pi$.

10) Expandir $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ em série de Laurent para:

(a) $1 < |z| < 3$

(b) $|z| > 3$

(c) $0 < |z+1| < 2$

(d) $|z| < 1$

11) Expandir $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(2-z)}$ em série de Laurent para:

(a) $|z| < 1$

(b) $1 < |z| < 2$

(c) $|z| > 2$

(d) $|z-1| > 1$

(e) $0 < |z-2| < 1$

12) Seja f uma função analítica no ponto z_0. Mostre que z_0 é um zero de ordem m de f se, e somente se,

$$f(z_0) = 0,\ f'(z_0) = 0,\ \ldots,\ f^{(m-1)}(z_0) = 0$$

$$e\ f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

13) Determine a ordem do zero $z = 0$ nas seguintes funções:

(a) $(\cos z - 1)^3 \sin z$

(b) $\dfrac{(1-\cos z)\sin^2 z}{1-e^z}$

(c) $(e^z - 1 - z)^3 \sin^2 z$

(d) $e^{\sin z} - e^z$

(e) $(e^{z^2} - 1)(\sin^2 z - z^2)$

(f) $e^{\sin z} - e^{\tan z}$

14) Se $z = z_0$ é zero das funções f e g, de ordens r e s, respectivamente. Prove que ele é zero de ordem $r+s$ de fg. De que ordem é esse zero para a função $f+g$?