UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ (UTFPR)
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁCICA, CAMPUS DE PATO BRANCO (DAMAT-PB)

Apostila da disciplina de ED23NB - Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) dos Cursos de Engenharias da UTFPR-PB

Apostila 1: Equações diferenciais de primeira ordem

Dr. João Biesdorf

PATO BRANCO - PR
2020/02

A confecção desta apostila está prevista no Projeto registrado no SEI-UTFPR, Processo número 23064.029113/2020-08, anexo 1604594.

Sumário

Capítulo 0

0.1 Introdução

Esta apostila é fruto das aulas ministradas pelo autor por vários semestres na disciplina de ED23NB - Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) dos Cursos de Engenharias da UTFPR-PB. Dividindo o conteúdo da disciplina em 3 blocos, o presente texto correspondente ao primeiro bloco, e versa sobre conteúdo de Equações diferenciais de primeira ordem. A proposta desta apostila é que a mesma seja um material um apoio para a referida disciplina. Nela contém 8 capítulos (Lições) e são baseadas nas seções 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 e 2.6 do Livro "BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares.** LTC genio: 9a Ed. 2012."Doravante, este livro simplesmente será citado como LIVRO.

Em condições normais de aula, baseado na experiência do autor, cada lição corresponde aproximadamente a 100 minutos de aula, tendo em geral uma breve revisão, motivação e desenvolvimento do tema da lição por meio de, exercícios de desenvolvimento e motivação, definições, comentários no formato de observações, teoremas, corolários, rezumos no formato de roteiros, exemplos de aplicação, e ao final dos capítulos, indicação de exercícios de fixação. Sendo assim, a proposta da presente apostila é selecionar, direcionar e adaptar conteúdos do LIVRO para primeiro bloco das aulas de EDO.

Para cada exercício de desenvolvimento do tema e para cada exemplo de aplicação do tema, não resolvidos na apostila, exite uma lacuna em branco objetivando-se que o estudante complete a mesma com a resolução do exercício ou exemplo correspondente. Este completamento pode ser feito, dentre outras maneiras, a partir da explicação do professor em aula, ou a partir do assistimento dos vídeos correspondentes de autoria do mesmo autor da apostila.

Já a indicação de exercícios de fixação no final dos capítulos remete à exercícios do LIVRO, sendo selecionada uma quantidade reduzida de exercícios, buscando, a partir da experiência do autor, um equilíbrio quantitativo e qualitativo entre a fixação do tema e o disponível que os estudantes têm em condições normais de curso da disciplina para fazer as atividadess sugeridas pelo professor. Estes exercícios devem ser resolvidos em material a parte.

Para facilitar a citação na apostila ou no seu uso, cada ítem é enumerado de acordo com o tipo, respeitando-se a numeração do capítulo pertencente. Também para facilitar o estudo complementar da Apostila no LIVRO, o autor buscou, sempre que viável, usar a mesma notação e exemplos do LIVRO, citando a numeração do mesmo no LIVRO. Isto permite ao estudante comparar a soluções ou também usar a resolução dos exemplos do LIVRO para orientar a solução de exemplos correspondentes da apostila.

0.2 Conteúdo e pré requisitos

Conteúdo: Equações diferenciais de primeira ordem:

Conteúdo detalhado: Apresentação de alguns modelos matemáticos básicos; Campos de direção. Solução de algumas equações diferenciais. Classificação de equações diferenciais. Método dos fatores integrantes. Equações exatas e fatores integrantes. Problema do valor inicial para edo de primeira ordem e teorema da existência e unicidade. Equações Separáveis. Equações Homogêneas. Equações diferenciais de primeira ordem lineares. Modelagem com equações de primeira ordem.

Pré Requisitos: Derivação e integração de funções reais de uma Variável Real e Derivação de funções reais de várias Variáveis Reais. Conceito de linearidade (tranformações lineares).

Capítulo 1

Lição 1

1.1 Conceitos de EDOs e construção de modelos matemáticos (1)

Baseado nas Seções 1.1 e 1.3 do LIVRO

Definição 1.1 *Podemos entender o conceito de* ***equação*** *como uma expressão algébrica contendo uma* ***igualdade*** *e com ao menos uma incógnita a ser definida dentro de um conjunto de elementos pré estabelecidos.*

Exemplo 1.1 *Vejamos dois exemplos de equações:*

$$
\begin{aligned}
&x^2 = 2 \ (em \ \ \mathbb{Q})\\
&x^2 = 2 \ (em \ \ \mathbb{R})\\
&T^2 = 2I(no \text{ conjunto das transformações lineares de } \mathbb{R}^2 em \ \mathbb{R}^2,\\
&onde \ \ T^2 \ \text{ é a composição } T \circ T, \ \ e \ \ I \text{ é a transformação identidade}).
\end{aligned}
$$

Exercício 1.1 *Identifique as incógnitas e algumas soluções para as equações do Exemplo 1.1:*

Definição 1.2 ***Equações Diferenciais*** *(EDs) são equações cujas incógnitas são funções deriváveis emvolvendo na equação ao menos alguma destas derivadas.*

Definição 1.3 ***Equações Diferenciais Ordinárias*** *(EDOs)são Equações Diferenciais cujas funções incógnitas dependem somente de uma variável, isto é, as derivadas são todais.*

Exemplo 1.2 *Vejamos três exemplos elementares:*

$$\frac{dy(x)}{dx} = \cos x$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = 2y(x)$$

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -y(x).$$

Em geral estamos interessados no comportamento da (das) soluções de uma EDO dada. Uma maneira clássica é obter esta(s) solução(ões).

Definição 1.4 *Dizemos que uma função ϕ é* ***solução*** *de uma EDO no intervalo $\alpha < x < \beta$ se ela satisfaz a EDO com ela no lugar da função incógnita.*

Exercício 1.2 *Determine algumas soluções para as equações do Exemplo 1.2:*

Definição 1.5 *As* ***Equações Diferenciais*** *que não são ordinárias são ditas Equações Diferenciais Parciais (EDPs) pois neste caso, elas envolvem derivadas parciais.*

Exemplo 1.3 *Vejamos dois exemplos clásicos:*

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \text{ (equação do calor, onde } \alpha \text{ é uma constante física),}$$

e

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \text{ (equação da onda, onde } a \text{ é uma constante física)}$$

Definição 1.6 *Definimos como* **ordem** *de um ED como sendo a ordem da derivada mais alta que aparece na ED.*

Exemplo 1.4 *As EDOs do Exemplo 1.2 são respectivamente de ordem 1, 1 e 2. As EDPs do Exemplo 1.3 são de ordem 2.*

Observação 1.1 *Segue imediatamente das definições 1.2, 1.3 e 1.6 que qualquer EDO de primeira ordem pode ser escrita no formato*

$$F\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right) = 0, \tag{1.1}$$

e em geral, uma EDO de ordem n pode ser escrita no formato

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), y^{(3)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \text{ onde } y^{(k)}(x) := \frac{d^k y(x)}{dx^k}. \tag{1.2}$$

No entanto, nesta disciplina estamos interessados nas EDOs onde o termo com a maior derivada puder ser determinado de maneira única dentro das Equações 1.1 e 1.2. Neste caso, simplificando a notação, estas equações são escritas respectivamente no formato

$$y' = f(x, y), \tag{1.3}$$

e

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', y^{(3)}, \ldots, y^{(n-1)}). \tag{1.4}$$

Exercício 1.3 *Mostre que se $F(x, y(x), y'(x)) = (y'(x))^2 + xy'(x) + 4y(x)$, então a Equação 1.1 não pode ser escrita de modo único no formato 1.3.*

Exercício 1.4 *Dada uma EDO no formato 1.4, mostre que a mesma pode ser ecrita no formato 1.2 determinando $F(x, y(x), y'(x), y''(x), y^{(3)}(x), \ldots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x))$ em função de*
$f(x, y, y', y'', y^{(3)}, \ldots, y^{(n-1)})$.

Muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Expressas em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas, e então, pela Definição 1.2 estas equações são EDs. Esta obtenção de EDs ocorre por exemplo na investigação problemas envolvendo o movimento de fluidos, fluxo de corrente elétrica em circuitos, a dissipação de calor em objetos sólidos, a propagação e detecção de ondas símicas, aumento ou diminuição de populações, concentração de substâncias em organismos e muitos outros.

Definição 1.7 *Uma Equação que descreve algum processo físico é dito* ***modelo matemático*** *do processo físico.*

Como mencionado no Exemplo 1.3, as equações do mesmo são modelos matemáticos para a propagação do calor e da onda respectivamente.

Observação 1.2 *Não confundir a construção de* ***modelos matemáticos*** *com* ***modelagem matemática*** *que é uma técnica de ensino da matemática usando de certa forma a construção de modelos matemáticos elementares.*

Os Exemplos 1.5 e 2.1 são exemplos de modelos matemáticos simples e são os Exemplos 1 e 2 da Seção 1.1 do Livro.

Exemplo 1.5 ***Objeto em queda.*** *Suponha que um objeto está caindo na atmosfera, perto do nível do mar. Formule uma EDO que descreva o movimento do objeto (velocidade em função do tempo).*

Capítulo 2

Lição 2

2.1 Modelos matemáticos (2), Campo de direções

Baseado nas Seções 1.1 e 1.3 do LIVRO

Veremos nas próximas aulas, que a EDO obtida modelo matemático do Exemplo 1.5 é facilmente resolvida, mas isto não acontece em geral. Por isso é interessante saber o comportamento das possíveis soluções sem determinar as mesmas. Uma das técnicas, é através do **Campo de Direções** como veremos a seguir.

Definição 2.1 *Escrevendo uma EDO de primeira ordem no formato*

$$y' = f(x, y), \tag{2.1}$$

*desenhando em uma quantidade representativa de pontos (x, y) no plano xy vetores sempre com o mesmo comprimento mas de inclinação $f(x, y)$ obtemos um **Campo de Direções** para a EDO (2.1).*

Observe que a EDO (2.1) é a a EDO (1.3).

Os vetores citados na Definição 2.1 podem ser desenhados no formato de segmentinhos ou flexinhas, sempre de mesmo comprimento. Note que pela Definição 2.1, a taxa de inclinação dos "vetorsinhos"é exatamente a mesma da reta tangente do gráfico de possíveis soluções que passa pelos pontos correspondentes. Em outras palavras, as soluções de (2.1), caso existirem, terão gráficos que seguem a direção dos vetores do respectivo campo de direções. A grande vantagem do Campo de Direções é que o mesmo fornece um comportamento das posíveis soluções sem calcular as mesmas, isto é, mesmo não sabendo as soluções, podemos analisar o comportamento das mesmas.

Definição 2.2 *A função f na EDO (2.1) é denomina de **função taxa**.*

Exercício 2.1 *Supondo que Exemplo 1.5, a massa do objeto seja* $m = 10kg$ *e a resistência do ar seja* $\gamma = 2kg/s$. *Obtenha um campo de direções para o modelo matemático do citado exemplo.*

Exemplo 2.1 ***Ratos do Campo e Corujas*** *Considere uma população de ratos do campo que habitam certa área rural. Vamos supor que, na ausência de predadores, a população de ratos cresce a uma taxa proporcional à população no instante em questão. Neste caso, supomos que esta taxa seja de um rato por mês a cada dois ratos da população. Supomos ainda que ali perto moram corujas que, se alimento de 15 ratos por dia desta população de ratos. Construa um modelo matemático que descreva a quantidade populacional dos ratos em fumção do tempo.*

Exercício 2.2 *Obtenha um campo de direções para o modelo matemático do Exemplo 2.1.*

Definição 2.3 *Quando uma solução de uma EDO de primeira ordem é constante em todo intervalo de definição da solução, então esta é dita **solução estática** ou **solução estacionária** ou **solução de equilíbrio** da EDO.*

Exercício 2.3 *Mostre que dado $c \in \mathbb{R}$, então c é solução de equilíbrio para uma EDO no formato (2.1) se e somente se, $f(t, c) = 0$ para todo t no intervalo em que as soluções devem estar definidas.*

Definição 2.4 *Dizemos que uma solução de equilíbrio $y = c \in \mathbb{R}$ é **estável** se os gráficos das soluções $y = y(t)$, cujo gráfico fica inicialmente "proximo"' do gráfico da $y = c$, se aproximam do gráfico da $y = c$ quando t aumenta.*

Definição 2.5 *Dizemos que uma solução de equilíbrio $y = c \in \mathbb{R}$ é **instável** se o gráfico das soluções $y = y(t)$, cujo gráfico fica inicialmente "proximo"' do gráfico da $y = c$, se afastam do gráfico da $y = c$ quando t aumenta.*

Observação 2.1 *Observe que uma solução de equilíbrio $y = c \in \mathbb{R}$ é estável se, e somente se, os "vetorsinhos"próximos a reta $y = c$ apontam para a mesma. De modo análogo uma solução de equilíbrio $y = c \in \mathbb{R}$ é instável se, e somente se, os "vetorsinhos"próximos a reta $y = c$ apontam para o sentido de afastamento da mesma.*

Exercício 2.4 *Obtenha as soluções de equilíbrio dos exemplos 1.5 e 2.1, diga se cada um delas é estável ou instável e compare com os campos de direções dos mesmos.*

Exercício 2.5 *Descreva o comportamento das possíveis soluções dos exemplos 1.5 e 2.1. Dê a interpretação física cabível para as soluções de equilíbrio.*

Exercício 2.6 *Ler (no final da Seção 1.1) na Pagina 5 do LIVRO o parágrafo entitulado* ***A Construção de Modelos Matemáticos.*** *Dê bastante atenção aos seis passos a serem seguidos. Compare com os exemplos 1.5 e 2.1.*

Definição 2.6 *Dizemos que uma EDO de ordem n escrita no formato*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', y^{(3)}, \dots, y^{(n-1)}). \tag{2.2}$$

é ***linear*** *se, e somente se, f for linear nas variáveis $y, y', \dots, y^{(n-1)}$.*

A EDO (2.2) é a EDO (1.4).

Definição 2.7 *Uma EDO é dita* ***não-linear*** *se ela não for linear.*

Observação 2.2 *Observe que pela Definição 2.6, uma EDO escrita no formato (2.2) é linear se, e somente se, existirem funções reais $a(x), a_0(x), a_1(x), a_2(x), a_3(x), \dots, a_{n-1}(x)$ tais que*
$f(x, y, y', y'', y^{(3)}, \dots, y^{(n-1)}) = a(x) + a_0(x)y + a_1(x)y' + a_2(x)y'' + a_3(x)y^{(3)} + \dots, a_{n-1}(x)y^{(n-1)}$

Observação 2.3 *As EDOs dos exemplos 1.2, 1.5 e 2.1 são exemplos de EDOs lineares. Em particular, pela Observação 2.2 uma EDO de primeira ordem é linear se, e somente se, existem funções* $p(t)$ *e* $g(t)$ *tal que a mesma pode ser escrita no formato*

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t). \tag{2.3}$$

Pelo mesmo motivo, uma EDO de segunda ordem é linear se, e somente se, existem funções $p(t)$*,* $q(t)$ *e* $g(t)$ *tal que a mesma pode ser escrita no formato*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t). \tag{2.4}$$

Exercício 2.7 *Mostre que as EDOs*

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y^2 = g(t),$$

$$\frac{dy}{dt} + p(t)\cos y = g(t)$$

e

$$y'' + p(t)yy' + q(t)y = g(t)$$

são não-lineares.

Exercício 2.8 *Sem o uso de computatores ou afins, resolver os exercícios 1, 5, 7, 9, 15, 16, 17, 18, 21, 23, 24, 25(a,b,c) da Seção 1.1 (pgs 5, 6, 7) do LIVRO.*

Exercício 2.9 *Sem o uso de computatores ou afins, resolver os exercícios 1, 3, 5, 7, 9, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20 da Seção 1.3 (pg 19) do LIVRO.*

Capítulo 3

Lição 3

3.1 Conceitos de PVIs, resolução de EDOs lineares com coeficientes constantes

Baseado na Seção 1.2 do LIVRO

A proposta desta aula é resolver as EDOs obtidas nos Exemplos 1.5 e 2.1 e analizar as soluções das mesmas, inclusive comparando com os respectivos campos de direções obtidos nos exercícios 2.1 e 2.2. Lembremos que as equações obtidas nestes exemplos são respectivamente:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{5} + 9,8 \text{ (obtida, fazendo } m = 10 \text{ e } \gamma = 2kg/s) \tag{3.1}$$

e

$$\frac{dp}{dt} = 0,5p - 450. \tag{3.2}$$

Observação 3.1 *Note que as EDOs 3.1 e 3.2 são um caso particular da EDO linear de coeficientes constantes*

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b. \tag{3.3}$$

Exemplo 3.1 *(Exemplo 1 do LIVRO) Resolva através de integração direta a Equação (3.2) e desenho o gráfico de um conjunto representativo de diferentes soluções, todas no mesmo plano tp. Faça uma interpretação dos gráficos com o problema fisico-ecológico que representam. Em seguida, determine a solucão que corresponde à população inicial de 850 ratos, acrescente e identifique a mesma no conjunto de gráficos acima citados. Compare com o campo de direções feito no Exercício 2.2.*

Definição 3.1 *Dada uma EDO de ordem n*

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', y^{(3)}, \ldots, y^{(n-1)}), \tag{3.4}$$

*então as n condições (restrições) $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y'_0$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$ com $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$ são ditas **condições iniciais**.*

Observação 3.2 *Observe que pela Definição 3.1, uma EDO de ordem n tem exatamente n condições iniciais em um ponto t_0. Em especial, uma EDO de primeira ordem tem **uma** condição inicial em um ponto t_0 fixado.*

Exercício 3.1 *Mostre que se uma EDO de ordem 2 puder ser escrita no formato* $\dfrac{d^2y}{dt^2} = g(t)$*, então a EDO com suas duas condições iniciais em qualquer ponto* t_0 *fixado determinam uma e exatamente uma solução que satifaz a EDO e as duas condições iniciais simultaneamente.*

Observação 3.3 *Sob certas hipóteses, o fato mostrado no Exercício 3.1 vale para EDOs de ordem* n *em geral com as* n *condições iniciais dadas pela Definicão 3.1. Para* $n = 1$ *e* $n = 2$ *este resultado será estudado com mais cuidado em aulas mais pra frente.*

Exercício 3.2 *Mostre que a EDO do Exemplo 3.1 é um caso particular da EDO (3.4).*

Definição 3.2 *Uma EDO de ordem* n *com suas* n *condições iniciais em um ponto* t_0 *fixado é dito* ***Problema de Valor Inicial*** *(PVI).*

Exemplo 3.2 *No Exemplo 3.1 a solucão procurada (e encontrada) que corresponde à população inicial de 850 ratos e a única solução do PVI*

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = 0,5p - 450; \\ p(0) = 850. \end{cases} \tag{3.5}$$

Definição 3.3 *Uma expressão geral que engloba* ***todas*** *soluções* $y(t)$ *de uma dada EDO no formato (3.4) é dita* ***solução geral*** *desta EDO.*

Exemplo 3.3 *Como vimos no Exemplo 3.1, $p(t) = 900 + ce^{t/2}$ é solução geral da Equação (3.2). Além disso, vimos que $y(x) = \sin(x) + c$, $y(x) = ce^{2x}$ e $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ são as respectivas soluções gerais da EDOs do Exemplo 1.2.*

Exercício 3.3 *Determine a solução geral da equação do Exercício 3.1.*

Observação 3.4 *Note que no Exercício 3.3, foram encontrados dois parâmetros. Dado um PVI com a mesma EDO, temos duas condições (condições iniciais), que geram duas equações para determinar de modo único os dois parâmetros. Sob certas hipóteses, este fato vale para EDOs de ordem n em geral com as n condições iniciais dadas pela Definicão 3.1. Para $n = 1$ e $n = 2$ este resultado será estudado com mais cuidado em aulas mais pra frente.*

Definição 3.4 *Variando o parâmetro na solução geral de uma EDO*

$$y' = f(t, y). \tag{3.6}$$

*temos em geral infinitas soluções. Cada um dos gráficos destas soluções no plano ty é chamado de **curva integral** da EDO (3.6).*

Exemplo 3.4 *O conjunto de gráficos no plano tp solicitados no Exemplo 3.1 são curvas integrais da EDO (3.2).*

Exemplo 3.5 *(Exemplo 2 do LIVRO) Resolva através de integração direta a Equação (3.1). Desenhe um conjunto representativo das curvas integrais desta Equação. Depois obtenha resolva o PVI asociado a esta equação que representa o objeto do Exemplo 1.5 caia de uma altura de 300 m do chão. Obtenha o instante e a velocidade que o mesmo toca o chão. Acrescente e identifique a solução do PVI conjunto das curvas integrais. Compare com o campo de direções feito no Exercício 2.1.*

Exemplo 3.6 *Resolva através de integração direta a Equação (3.3) obtendo sua solução geral.*

Exercício 3.4 *Sem o uso de computatores ou afins, resolver os exercícios 3, 4, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18(a, b), 19 da Seção 1.2 (pgs 12, 13, 14) do LIVRO.*

Capítulo 4

Lição 4

4.1 Resolução de EDOs lineares com o Método do Fator Integrante

Baseado na Seções 2.1 do LIVRO

Pela Observação 2.3, vimos que uma EDO de primeira ordem

$$y' = f(t, y) \tag{4.1}$$

é linear se, e somente se, pode ser escrita no formato

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t). \tag{4.2}$$

O caso particular quando $p(t) = a$ e $g(t) = b$ são constantes, foi resolvido Exemplo 3.6, obtendo

$$y(t) = (b/a) + ce^{-at} \text{ com } c \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

como solução geral para a EDO

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b. \tag{4.4}$$

Exercício 4.1 *Mostre que o método da integração direta usada no Exemplo 3.6 para resolver a EDO (4.4) não se adapta para resolver EDOs lineares em geral, isto é, EDOs do formato (4.2).*

A idéia de usar o Método do Fator Integrante consiste em multiplicar a EDO (4.2) por uma função $\mu = \mu(t)$ tal que o lado esquerdo da mesma multiplicada pela $\mu(t)$ se transforma em uma derivada de uma função. Daí, para resolver a EDO (4.2) já multiplicada pela $\mu(t)$, basta integrar ambos os lados da igualdade.

Definição 4.1 *Dizemos que uma função $\mu = \mu(t)$ é um **fator integrante** para a EDO (4.2) se $\mu(t)\dfrac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y$ puder ser escrito no formato de uma derivada de uma função.*

Exemplo 4.1 *(Exemplo 1 do LIVRO) Use o Método do Fator Integrante para encontrar a Solução Geral da EDO*

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}. \tag{4.5}$$

Exercício 4.2 *Mostre que se* $p(t) = a$ *na EDO (4.2) é constante, então* $\mu(t)$ *pode ser tomado* $\mu(t) = e^{at}$.

Exercício 4.3 *Suponha* $p(t) = a$ *na EDO (4.2) é constante, obtenha a solução geral para a mesma através do método do fator integrante. Na solução obtida, faça* $g(t) = b$ *constante e compare com (4.3) que é solução geral para a EDO (4.4).*

Exercício 4.4 *Mostre que se* $\mu(t)$ *é solução da EDO*

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t), \tag{4.6}$$

então $\mu(t)$ *é um fator integrante para a EDO (4.2).*

Exercício 4.5 *Usando o Exercício 4.4, obtenha um fator integrante para a EDO (4.2).*

Exercício 4.6 *(Exemplo 3 do LIVRO.) Resolva o PVI*

$$\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2 \\ y(1) = 2. \end{cases} \tag{4.7}$$

Exercício 4.7 *Obtenha a solução geral para a EDO (4.2).*

Exercício 4.8 *Sem o uso de computatores ou afins, resolver os exercícios 1(c), 3(c), 7(c), 11(c), 13, 17, 19, 20, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 37 da Seção 2.1 (pgs 29, 30, 31) do LIVRO.*

Capítulo 5

Lição 5

5.1 Resolução de EDOs Separáveis e Homogêneas

Baseado na Seções 2.2 do LIVRO

Pela Observação 2.3, vimos que uma EDO de primeira ordem

$$y' = f(x, y) \tag{5.1}$$

é linear se, e somente se, pode ser escrita no formato

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x). \tag{5.2}$$

Contudo o Método do Fator Integrante desenvolvido na na Aula (Capítulo) 4 a priori só se aplica para EDOs escritas no formato (5.2) isto é, lineares. Veremos nesta aula que para uma certa classe de EDOs que denominaremos de **separáveis** podemos através de integração direta achar uma família de soluções implícitas para as mesmas. Vejamos o Exemplo 5.1 a seguir.

Exemplo 5.1 *(Exemplo 1 do LIVRO) Dada a EDO*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2}, \tag{5.3}$$

obtenha equação para as curvas integrais da mesma.

Definição 5.1 *Dizemos que uma EDO (5.1) é* ***separável*** *se ela pode ser escrita no formato*

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{5.4}$$

Observação 5.1 *Note que a EDO (5.3) é separável.*

Definição 5.2 *Dizemos que uma equação envolvendo x e y é uma solução implícita para a EDO (5.1) se ela está escrita no formato*

$$\phi(x, y) = 0 \ \mathit{ou}\ = c. \tag{5.5}$$

Observação 5.2 *Note que toda solução (explícita) da EDO (5.1)*

$$y = y(x) \tag{5.6}$$

também é solução implícita para a mesma.

Observação 5.3 *A Equação*

$$-x^3 + 3y - y^3 = c \tag{5.7}$$

obtida no Exemplo 5.1 é uma solução implícita para a EDO (5.3) que não é escrita da forma de solução (5.6).

Observação 5.4 *Mesmo não conseguindo isolar y na solução implícita (5.5), isto é, não conseguindo escrever a mesma no formato (5.6), ela oferece muitas informações sobre a solução $y(x)$ pois para cada x, em geral (mas nem sempre), podemos determinar o valor de $y(x)$ usando a Equação (5.5). Com isso, é possível determinar boa parte das curvas integrais da EDO (5.1).*

Exemplo 5.2 *Mostre que se M e N na EDO (5.4) são integráveis, então a mesma tem solução implícita. Determine a mesma.*

Exemplo 5.3 *(Exemplo 2 do LIVRO) Resolva o PVI*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)} \\ y(0) = -1. \end{cases} \tag{5.8}$$

Determine o intervalo máximo no qual a solução existe.

Definição 5.3 *Dizemos que uma EDO (5.1) é uma* ***Equação Homogênea*** *se f na mesma pode ser escrita no formato*

$$f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5.9}$$

Exemplo 5.4 *Mostre que, fazendo a mudança de variável dependente*

$$v(x) = \frac{y(x)}{x}, \tag{5.10}$$

toda EDO homogênea pode ser transformada em separável.

Roteiro 5.1 *Para se resolver uma EDO homogênea, a idéia é transformar a mesma em uma EDO separável através de mudança de variável sugerida no Exemplo 5.4. Em seguida se resolve a EDO separável e depois a homogênea fazendo a mudança inversa na solução da EDO separável.*

Exercício 5.1 *Sem o uso de computatores ou afins, resolver os exercícios 1, 3, 5, 7, 9(a), 13(a), 17(a), 19(a), 29, 30(a,b,c,d,e), 31(a,b), 35(a,b) e 37(a,b) da Seção 2.2 (pgs 36, 37, 38) do LIVRO.*

Capítulo 6

Lição 6

6.1 Resolução de EDOs Exatas

Baseado na Seção 2.6 do LIVRO

Dando continuidade na busca de soluções de EDOs de primeira ordem do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{6.1}$$

nesta lição (capítulo) estudaremos uma classe de EDOs chamadas de **exatas**. Lembrando que já vimos a solução das EDOs lineares e as separáveis, isto é, as EDOs (6.1) que podem ser escritas respectivamente no formato

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x) \tag{6.2}$$

e

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{6.3}$$

Exemplo 6.1 *(Exemplo 1 do LIVRO) Resolva a EDO*

$$2x + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = 0. \tag{6.4}$$

Observação 6.1 *Observe que na resolução do Exemplo 6.1 foi crucial a identificação de uma função* $\psi = \psi(x, y)$ *tal que* $\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} = 2x + y^2$ *e* $\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} = 2xy$*, de modo que a EDO (6.4) pôde ser escrita no formato*

$$\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \tag{6.5}$$

e portanto, pela regra da cadeia,

$$\frac{d\psi}{dx} = 0, \tag{6.6}$$

obtendo a solução implícita a EDO (6.4) integrando ambos os lados de (6.6).

Definição 6.1 *Dizemos que uma EDO escrita no formato*

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{6.7}$$

é exata se existe uma função $\psi = \psi(x, y)$ *tal que*

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} = M(x, y) \\ e \\ \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} = N(x, y) \end{cases} \tag{6.8}$$

Observação 6.2 *Escrever uma EDO (6.1) no formato (6.7) sempre é possível, basta tomar* $M(x, y) = f(x, y)$ *e* $N(x, y) = -1$*, porém, quase sempre, neste caso* M *e* N *não satisfazem (6.8).*

Observação 6.3 *A Definição 6.1 poderia ser reescrita como* "Dizemos que uma EDO *(6.7)* é exata se existe uma função $\psi = \psi(x, y)$ tal que a mesma pode ser escrita no formato *(6.5), isto é,*

$$\psi_x(x, y) + \psi_y(x, y)y' = 0, \tag{6.9}$$

onde os subíndices denotam as derivadas parciais correspondentes".

Exercício 6.1 *Mostre que a EDO (6.4) é exata usando a Definição 6.1.*

Exercício 6.2 *Mostre que a solução implícita de uma EDO exata é dada por*

$$\psi(x,y) = c, \tag{6.10}$$

onde ψ é como na Definição 6.1 e $c \in \mathbb{R}$ um parâmetro a ser determinado com uma condição inicial.

.

Uma questão importante é saber se uma EDO escrita no formato (6.7) é exata. Pela Definição 6.1, isto quer dizer que existe uma função $\psi = \psi(x,y)$ satisfazendo (6.8). E se ela existe, como encontrá-la. O Teorema 6.1 e sua demonstração responde esta questão.

Teorema 6.1 *Dada a EDO (6.7), suponha que as funções M, N, M_y, N_x, são contínuas em uma região retangular $R : \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta$. Então a EDO (6.7) é exata se, e somente se,*

$$M_y(x,y) = N_x(x,y). \tag{6.11}$$

Observação 6.4 *Lembrando que pela Definição 6.1, a EDO (6.7) ser exata é equivalente à existência de uma função $\psi = \psi(x,y)$ que satisfaz (6.8).*

Observação 6.5 *Note que o Teorema 6.1 tráz em seu enunciado a condição* ***se, e somente se,*** *que são duas implicações, uma de ida e uma de volta. A contrapositiva da ida (que é logicamente equivalente a ida) diz que se a Equação (6.11) não for satisfeita, então a EDO (6.7) não será exata. Este aliás é um teste importante (e fácil) de se fazer antes de procurar uma solução implícita para a EDO (6.7) por algum método das exatas. Enquanto a volta garante que se a Equação (6.11) é satisfeita, então a EDO (6.7) é exata.*

Exercício 6.3 *Demostre o Teorema 6.1.*
Demonstração:

Roteiro 6.1 *O ponto crucial na resolução de uma EDO exata (6.7) é a obtenção de uma função* $\psi = \psi(x, y)$ *que satisfaz (6.8). Entre outras maneiras, isto pode ser feito usando a demonstração da implicação da volta do Teorema 6.1:*
i)*Integrando* $M(x, y)$ *em relação a* x *sendo que a constante de integração em relação a* x *será uma função de* $g(y)$ *e integrando* $N(x, y)$ *em relação a* y *sendo que a constante de integração em relação a* y *será uma função de* $h(x)$ *e depois iguala-se estas duas integrais determinando* g *e* h*.*
ii) *Ou se calcula a* $\psi = \psi(x, y)$ *somente integrando* $M(x, y)$ *em relação a* x*, depois derivando em relação a* y *e igualando a* $N(x, y)$*, determinando* $g(y)$ *onde* $g(y)$ *é como em (i).*
iii) *Ou se calcula a* $\psi = \psi(x, y)$ *somente integrando* $N(x, y)$ *em relação a* y *e derivando em relação a* x *igualando a* $M(x, y)$*, determinando* $h(x)$ *onde* $h(x)$ *é como em (i).*

Exemplo 6.2 *Resolva implicitamente a EDO*

$$(y \cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2 e^y - 1)y' = 0. \tag{6.12}$$

usando algum método descrito no Roteiro 6.1.

Exercício 6.4 *Mostre que a EDO separável (6.3) é exata, obtenha a solução implícita construíndo a função* $\psi = \psi(x, y)$ *que satisfaz (6.8) e depois aplique (6.10). Mostre que esta solução implícita é a mesma obtida no Exemplo 5.2.*

Exemplo 6.3 *Mostre de duas formas (uma usando o Teorema 6.1 e outra o Roteiro 6.1) que a EDO*

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0, \tag{6.13}$$

não é exata.

Exercício 6.5 *Sem o uso de computatores ou afins, resolver os exercícios 1, 5, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 da Seção 2.6 (pgs 76, 77) do LIVRO.*

Capítulo 7

Lição 7

7.1 Fatores Integrantes para tornar EDOs exatas. Equações de Bernoulli. Exemplos de Modelagens

Baseado na Seções 2.6, 2.4 e 2.3 do LIVRO

Vimos pelo Exemplo 6.13 que nem sempre uma EDO no formato (6.7) é exata. Neste caso, a exemplo da resolução da EDO linear (6.2), podemos tentar multiplicar a EDO (6.7) por uma função $\mu = \mu(x, y)$ adequada de modo a torná-la exata.

Definição 7.1 *Caso a EDO (6.7) for não exata, então dizemos que uma função* $\mu = \mu(x, y)$ *é um* ***fator integrante*** *para a EDO não exata (6.7) se*

$$\mu(x, y)M(x, y) + \mu(x, y)N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{7.1}$$

for exata.

Exercício 7.1 *Suponha que a EDO (6.7) não é exata. Mostre que* $\mu = \mu(x, y)$ *é um fator integrante para a EDO não exata (6.7) se, e somente se, satisfaz a EDP de primeira ordem*

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0. \tag{7.2}$$

No geral, resolver a EDP (7.2) é mais difícil do que resolver a EDO (6.7). Por isto, este caso geral não será alvo de estudos desta disciplina. No entanto, se supormos $\mu(x,y) = \mu(x)$ ou $\mu(x,y) = \mu(y)$ a a EDP (7.2) é transformada em uma EDO linear como veremos nos Exercícios 7.2, 7.3 a seguir.

Exercício 7.2 *Suponha que $\mu(x,y) = \mu(x)$ fator integrante para a EDO supostamente não exata (6.7). Mostre que μ satisfaz a EDO linear de primeira ordem*

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu. \tag{7.3}$$

Observação 7.1 *Observe que a Equação (7.3) faz sentido se, e somente se,*

$$\frac{M_y - N_x}{N}, \tag{7.4}$$

só depende de x

Exercício 7.3 *Suponha que $\mu(x,y) = \mu(y)$ fator integrante para a EDO supostamente não exata (6.7). Mostre que μ satisfaz a EDO linear de primeira ordem*

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{N_x - M_y}{M}\mu. \tag{7.5}$$

Observação 7.2 *Observe que a Equação (7.5) faz sentido se, e somente se,*

$$\frac{N_x - M_y}{M}, \tag{7.6}$$

só depende de y

Roteiro 7.1 *Levando em consideração as Observações 6.5, 7.1 e 7.2, para resolver uma EDO (6.7) pelo método das exatas, verificamos primeiro se a Equação (6.11) é satisfeita. Se sim, então a EDO (6.7) é exata e podemos resolvê-la implicitamente. Caso a Equação (6.11) não for satisfeita a EDO (6.7) não será exata e verificamos se a expressão (7.4) depende somente de x. Se sim, podemos obter um fator integrante $\mu(x, y) = \mu(x)$ para a EDO (6.7) resolvendo a EDO linear (7.3). Neste caso, a EDO (7.1) será exata e podemos resolvê-la implicitamente. Caso a expressão (7.4) depende também de y, verificamos se a expressão (7.6) depende somente de y. Se sim, podemos obter um fator integrante $\mu(x, y) = \mu(y)$ para a EDO (6.7) resolvendo a EDO linear (7.5). Neste caso, a EDO (7.1) será exata e podemos resolvê-la implicitamente. Caso nem (6.11) é satisfeita e (7.4) depende também de y e (7.6) depende também de x, então, a menos que o fator integrante $\mu = \mu(x, y)$ seja dado, o método das exatas dentro de nossa abortagem não se aplica.*

Exemplo 7.1 *Encontre a solução impílicita para a EDO (6.13).*

Exemplo 7.2 *Mostre que* $\mu(x,y) = \frac{1}{xy(2x+y)}$ *também é fator integrante para EDO (6.13).*

Outro tipo de EDO de primeira ordem que em geral não se enquadra em nenhum dos tipos vistos até agora mas que podem ser transformadas em uma EDOs lineares através de mudança da variável dependente são as EDOs no formato

$$y' + p(t)y = q(t)y^n, \ (n = 0, 1, 2, 3, \ldots). \tag{7.7}$$

Definição 7.2 *Uma EDO de primeira ordem escrita no formato (7.7) é dita* ***Equação de Bernoulli***

Observação 7.3 *Toda EDO linear é uma Equação de Bernoulli com* $n = 0$ *em (7.7).*

Observação 7.4 *A EDO (7.7) é linear se, e somente se,* $n = 0$ *ou* $n = 1$.

Exercício 7.4 *Mostre que, para* $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ *a mudança da variável dependente*

$$v(t) = y^{1-n}(t) \tag{7.8}$$

transforma a Equação de Bernoulli (7.7) na Equação Linear

$$v' + (1-n)p(t)v = (1-n)q(t). \tag{7.9}$$

Roteiro 7.2 *Para se resolver uma Equação de Bernoulli, a idéia é transformar a mesma em linear através de mudança de variável dependente (7.8) sugerida no Exercício 7.4. Em seguida resolva a EDO linear (7.9) obtida e depois a Equação de Bernoulli (7.7) fazendo a mudança inversa (7.8) na solução da EDO linear.*

Nas Lições 1 e 2, vimos um pouco sobre construção de Modelos Matemáticos. O Exemplo 7.3 próximo, é mais um caso de construção de Modelo Matemático.

Exemplo 7.3 *(Exemplo 1 da Seção 2.3 do LIVRO) No instante $t = 0$, um tanque tem $Q_0 > 0$ libras de sal disolvidos em 100 galões de água. Suponha que está entrando água no tanque a uma taxa de $r > 0$ galões por minuto, água contendo $1/4$ de libra de sal por galão e que a mistura bem mexida está saíndo do tanque à mesma taxa. Deduza o Problema de Valor Inicial em termos de Q_0 e r para a quantidade $Q(t)$ de libras de sal que se encontram no tanque no instante t minutos. Deduza a quantidade limite Q_L de sal que haverá no tanque após se passar muito tempo sem resolver ou usar a solução do PVI. Depois Resolva o PVI e compare. Suponha $r = 3$ e $Q_0 = 2Q_l$, encontre o instante T após o qual o nível de sal está a 2% de Q_l.*

Exercício 7.5 *Sem o uso de computatores ou afins, resolver os exercícios 19, 20, 21, 22, 23, 32, da Seção 2.6 (pg 77) do LIVRO. Da mesma seção, também os exercícios 25, 26, 27, 28, 29, e 30, nos quais você deve executar o Roteiro 7.1. Ainda os exercícios 27, 28, 29 30, 31 da Seção 2.4 (pg 59)do LIVRO. Também os exercícios 1, 2, 3, 4, 12, 13, 16, da Seção 2.3 (pg 46, 47, 48)do LIVRO.*

Capítulo 8

Lição 8

8.1 Existência e Unicidade de Soluções de EDOs de Primeira Ordem

Baseado na Seção 2.4 do LIVRO

Boa parte das abordagens nestas notas de aula até o momento foi focado na busca de soluções de EDOs de primeira ordem do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{8.1}$$

Basicamente estudamos as EDOs lineares, isto é, as que podem ser escritas no formato

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x) \tag{8.2}$$

englobando as Equações de Bernoulli que poden ser transformadas em lineares, e as exatas, isto é, as que podem ser escritas no formato

$$\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \tag{8.3}$$

para alguma função $\psi = \psi(x, y)$, englobando as EDOs separáveis que são um caso particular das exatas e as homogêneas que podem ser transformadas em exatas. Vimos que no caso das EDOs lineares, a solução geral é dada por

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int_{x_0}^{x} \mu(s)g(s)ds + c\right], \tag{8.4}$$

onde

$$\mu(x) = \exp\left(\int p(x)dx\right), \tag{8.5}$$

enquanto nas exatas, a solução implícita é dada por

$$\psi(x,y) = c. \tag{8.6}$$

No entanto, vimos que mesmo para estes casos relativamente simples, buscar solução para uma EDO de primeira ordem (8.1), muitas vezes envolve várias dificuldades. Saindo destes dois casos, as dificuldades tendem a aumentar. Por isso, antes de procurar uma solução para a EDO de primeira ordem (8.1), é importante termos resposta se esta solução de fato existe, pois não faz sentido procurar algo que não existe. E se existe, esta solução será única? Pois caso não for, podemos encontrar uma, sem ser aquela que de fato está sendo procurada para aquele problema físico em questão por exemplo. Para dar resposta para estas questões, temos os famosos teoremas de **Existência** e **Unicidade** de soluções, isto é, sob certas hipóteses na EDO, sabemos que a mesma tem exatamente uma solução, isto é, a solução existe e é única. Neste sentido, nesta lição estudaremos o Teorema 8.1 e o Corolário 8.2.

Teorema 8.1 *(Teorema 2.4.2 do LIVRO) Suponha que as funções f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ seja contínuas em algum retângulo $R = (\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$ contendo o ponto (t_0, y_0) (podendo ser $\alpha = -\infty$ e, ou $\beta = \infty$, e ou $\gamma = -\infty$, e ou $\delta = \infty$). Então existe um intervalo aberto $I \subset (\alpha,\beta)$ tal que $t_0 \in I$, no qual existe uma única solução para o PVI*

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{8.7}$$

Observação 8.1 *A Tomando α,β como no Teorema 8.1, o intervalo onde a única solução $y = y(t)$ garantidamente está definida é num intervalo aberto $I \subset (\alpha,\beta)$ contendo t_0 de modo que $y(I) \subset (\gamma,\delta)$, isto pois, enquanto $\gamma < y(t) < \delta$ podemos novamente aplicar o Teorema no ponto $(t, y(t))$ obtendo uma extensão do intervalo I. Em especial, se $\gamma = -\infty$ e $\delta = \infty$, então I poderá ser tomado como $I = (\alpha,\beta)$.*

Observação 8.2 *No retângulo R onde as hipóteses do Teorema 8.1 são satisfeitas, as curvas integrais da EDO do PVI (8.7)* ***não*** *podem se interceptar, pois caso contrário contradiria a unicidade de solução naquele ponto.*

Corolário 8.2 *(Teorema 2.4.1 do LIVRO) Se as funções p e g são contínuas num intervalo aberto $I = (\alpha,\beta)$ tal que $t_0 \in I$, então existe uma única função $y = y(t)$ definida em todo intervalo I que satisfaz o PVI*

$$\begin{cases} y' + p(t)y = g(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{8.8}$$

Exercício 8.1 *Demostre o Corolário 8.2 usando o Teorema 8.1.*

.

Observação 8.3 *A demonstração do Corolário 8.2 poderia ser feito de forma independente do Teorema 8.1, seguindo a construção da Solução dada pelas Equações (8.4) e (8.5) sugerida no Exercício 4.7.*

Observação 8.4 *As condições (hipóteses) do Teorema 8.1 são suficientes mas não necessárias. Isto é, eventualmente pode existir uma única solução para o PVI (8.7) mesmo sem que as hipóteses do Teorema 8.1 estejam satisfeitas. Em geral, a existência (mas não a unicidade) de solução do PVI (8.7) é garantida só pela continuidade de f.*

Exemplo 8.1 *(Exemplo 1 do Livro) Use o Corolário 8.2 para encontrar um intervalo onde o PVI*

$$\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2, \\ y(1) = 2 \end{cases} \tag{8.9}$$

tem com certeza uma única solução.

Exemplo 8.2 *(Exemplo 2 do Livro) Aplique o Teorema 8.1 para o PVI*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}, \\ y(0) = -1. \end{cases} \tag{8.10}$$

Exemplo 8.3 *(Exemplo 3 do Livro) Considere o PVI*

$$\begin{cases} y' = y^{1/3}, \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{8.11}$$

para $t \geq 0$. *Verifique a aplicapilidade do Teorema 8.1 para o PVI (8.11). Depois, se necessário, use a Observação 8.2, para analizar a existência de única solução ou várias soluções para o PVI (8.11).*

Exercício 8.2 *Sem o uso de computatores ou afins, resolver os exercícios 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 21, 22, 23, 24, 25, 26 da Seção 2.4 (pgs 58, 59) do LIVRO.*

Referências Bibliográficas

[1] BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares.** LTC genio: 9a Ed. 2012.