UNIVERSIDADE FEDERAL TECNOLÓGICA DO PARANÁ
VARIÁVEIS COMPLEXAS
LISTA Nro. 7

Professor Iván Gonzales

6 de junho de 2022

1 Singularidades e Resíduos

1) Encontre os pólos, suas ordens e os resíduos das funções para cada polo:

(a) $\dfrac{z+4}{z(z^2+1)}$

(b) $\dfrac{\sin z}{z^3(z-\pi)^2}$

(c) $\dfrac{1-e^z}{z^4\sin(1+z)}$

(d) $\dfrac{\cosh z}{z(1-\cos z)}$

(e) $\dfrac{e^z}{z(1-e^{-z})}$

(f) $\dfrac{\sinh z}{z\sinh^2(z+\pi/2)}$

(g) $\dfrac{1}{z\sin^2\pi z}$

(h) $\dfrac{1}{(e^{iz}-1)^2}$

2) Mostre que $z = 0$ é singularidade removível em cada uma das funções abaixo. Determine o valor a se atribuir em $z = 0$ para que as funções sejam analíticas.

(a) $\dfrac{z}{e^z-1}$

(b) $\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$

(c) $\dfrac{\cosh z}{z(1-\cos z)}$

(d) $\dfrac{e^z-1}{\sin 2z}$

(e) $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\sin z}$

(f) $\dfrac{\sinh z}{z\sin^2(z+\pi/2)}$

(g) $\dfrac{\cosh 2z-1}{\sin^2 z}$

(h) $\dfrac{1}{(e^{iz}-1)^2}$

3) Demostre que z_0 é pólo de ordem m de uma função f se, e somente se, z_0 for zero de ordem m de $1/f$.

4) Encontre a parte principal da função $f(z) = \dfrac{1}{z(z-i)^2}$ em relação ao pólo $z = i$.

5) Determine a parte principal da função

$$f(z) = \frac{1}{(z-n\pi)^2\sin z}$$

relativa ao pólo $z = n\pi$ (n inteiro).

6) Determine os pólos, as ordens e os resíduos correspondentes de cada uma das funções:

(a) $\dfrac{z-\sin z}{z^4}$

(b) $\dfrac{z-\sin z}{z^6}$

(c) $\dfrac{e^z}{4z^2+\pi^2}$

(d) $\dfrac{e^{3z}}{z(z-1)^2}$

(e) $\dfrac{1}{z \sin z}$

(f) $\dfrac{z}{z \sin z}$

7) Calcule a integral

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{(z-i)(z^2+4)} dz,$$

tomando $\mathcal{C}$, sucessivamente, os seguintes círculos, todos orientados positivamente:

(a) de raio 3, centrado na origem;

(b) de raio 3, centrado em $z = -3i$;

(c) de raio 1/3, centrado em $z = 2i$;

(d) de raio 2, centrado no ponto $z = 1$.

8) Calcule as integrais

(a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{\sin z}$

(b) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \tan 3z dz$

(c) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\cot z}{z} dz$

9) Calcule as integrais indefinidas:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c} \qquad a, b, c \in \mathbb{R},\ b^2 < 4ac$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+9}$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-x+1}$

(e) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+4x+13)^2}$

(g) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}\ ,\ a > 0$

(h) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}$

10) Mostre que

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}$$

onde $a \geq b > 0$, considere as duas possibilidades $a \neq b$ e $a = b$.

11) Calcule

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$$

12) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{7\pi}{50}.$$

13) Mostre que

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}, \quad m > 0.$$

14) Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2++2x+5} dx.$$

15) Mostre que

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

16) Mostre que

$$\int\limits_0^\infty \sin x^2 dx = \int\limits_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

17) Mostre que

$$\int\limits_0^\infty \frac{ln(x^2+1)}{x^2+1)} dx = \pi ln2.$$

18) Mostre que

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

19) Mostre que

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos 2\pi x}{x^4+x^2+1} dx = \frac{-\pi}{2\sqrt{3}} e^{-\pi/\sqrt{3}}.$$

19) Mostre que, se $m > 0$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos mx}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi e^{-m}(1+m)}{4}.$$

2 Extra

1.)* Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}. \quad (*)$$

Para isso você deve seguir os seguintes passos:

a. Definimos uma integral imprópria (sobre todo o plano $\mathbb{R}^2$) como sendo

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dA.$$

onde D_a é o disco com raio a e centro na origem. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dA = \pi.$$

Dica: Use coordenadas polares.

b. Você pode usar quadrados para definir a integral imprópria anterior, isto é :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA = \lim_{a\to\infty} \iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)} dA,$$

onde S_a é o quadrado de vértices $(\pm a, \pm a)$. Use esta definição e o anterior para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \pi,$$

daqui deduzca que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \;\; [Integral\ de\ Poisson].$$

c. Faça a substituição $t = \sqrt{2x}$ para mostrar (*).!