

Comparando os Exemplos 2 e 3, vemos que em ambos os casos a solução de equilíbrio separa as soluções crescentes das decrescentes. No Exemplo 2 as outras soluções convergem para a solução de equilíbrio ou são atraídas para ela, de modo que depois de o objeto cair por um tempo suficiente um observador o verá movendo-se perto da velocidade de equilíbrio. Por outro lado, no Exemplo 3 as outras soluções divergem da solução de equilíbrio, ou são repelidas por ela. As soluções se comportam de maneiras bem diferentes dependendo se começam acima ou abaixo da solução de equilíbrio. À medida que o tempo passa um observador pode ver populações muito maiores ou muito menores do que a população de equilíbrio, mas a solução de equilíbrio propriamente dita nunca será observada na prática. Em ambos os problemas, no entanto, a solução de equilíbrio é muito importante para a compreensão do comportamento das soluções da equação diferencial dada.

Uma versão mais geral da Eq. (8) é

$$\frac{dp}{dt} = rp - k, \quad (9)$$

onde a taxa de crescimento r e a taxa predatória k não estão especificadas. As soluções dessa equação mais geral são muito semelhantes às soluções da Eq. (8). A solução de equilíbrio da Eq. (9) é $p(t) = k/r$. As soluções acima da solução de equilíbrio crescem, enquanto as que estão abaixo decrescem.

Você deve ter em mente que ambos os modelos discutidos nesta seção têm suas limitações. O modelo (5) do objeto em queda só é válido enquanto o objeto está em queda livre, sem encontrar obstáculos. O modelo populacional (8) prevê a existência, após um longo tempo, de um número negativo (se $p < 900$) ou de um número imenso (se $p > 900$) de ratos. Essas previsões não são realistas, de modo que esse modelo torna-se inaceitável após um período de tempo razoavelmente curto.

A Construção de Modelos Matemáticos. Para se usar as equações diferenciais nos diversos campos em que são úteis é preciso, primeiro, formular a equação diferencial apropriada que descreve, ou modela, o problema em questão. Consideramos, nesta seção, dois exemplos desse processo de modelagem, um vindo da física e outro da ecologia. Ao construir modelos matemáticos futuros você deve reconhecer que cada problema é diferente e que a arte de modelar não é uma habilidade que pode ser reduzida a uma lista de regras. De fato, a construção de um modelo satisfatório é algumas vezes a parte mais difícil de um problema. Apesar disso, pode ser útil listar alguns passos que fazem muitas vezes parte do processo:

1. Identifique as variáveis independente e dependente, e atribua letras para representá-las. Muitas vezes a variável independente é o tempo.
2. Escolha as unidades de medida de cada variável. Essa escolha é, de certa forma, arbitrária, mas algumas escolhas podem ser mais convenientes do que outras. Por exemplo, escolhemos medir o tempo em segundos no caso de um objeto em queda e em meses no problema populacional.
3. Use o princípio básico subjacente, ou a lei que rege o problema em investigação. Isso pode ser uma lei física amplamente reconhecida, como a lei do movimento de Newton, ou pode ser uma hipótese um tanto especulativa baseada na sua própria experiência ou em observações. De qualquer modo, é provável que essa etapa não seja uma etapa puramente matemática, mas uma em que será necessário ter familiaridade com o campo de aplicação onde o problema se originou.
4. Expresse o princípio ou lei do passo 3 em função das variáveis escolhidas no passo 1. Isso pode ser mais fácil falar do que fazer. Pode exigir constantes físicas ou parâmetros (como o coeficiente da resistência do ar no Exemplo 1) e a determinação de valores apropriados para eles. Ou pode envolver o uso de variáveis auxiliares, ou intermediárias, que têm que estar relacionadas com as variáveis primárias.
5. Certifique-se de que cada parcela em sua equação está nas mesmas medidas físicas. Se isso não acontecer sua equação está errada e você deve tentar corrigi-la. Se as unidades são as mesmas, então sua equação está pelo menos consistente do ponto de vista dimensional, embora possa conter outros erros que esse teste não revela.
6. Nos problemas considerados aqui o resultado do passo 4 é uma única equação diferencial, que constitui o modelo matemático desejado. Lembre-se, no entanto, de que em problemas mais complexos o modelo matemático resultante pode ser muito mais complicado, podendo envolver, por exemplo, um sistema com várias equações diferenciais.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6 desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \rightarrow \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y em $t = 0$, descreva essa dependência.

1. $y' = 3 - 2y$
 3. $y' = 3 + 2y$
 5. $y' = 1 + 2y$

2. $y' = 2y - 3$
 4. $y' = -1 - 2y$
 6. $y' = y + 2$

Em cada um dos Problemas de 7 a 10 escreva uma equação diferencial da forma $dy/dt = ay + b$ cujas soluções têm o comportamento descrito quando $t \rightarrow \infty$.

7. Todas as soluções tendem a $y = 3$.
8. Todas as soluções tendem a $y = 2/3$.
9. Todas as outras soluções se afastam de $y = 2$.
10. Todas as outras soluções se afastam de $y = 1/3$.

Em cada um dos Problemas de 11 a 14 desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \rightarrow \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y em $t = 0$, descreva essa dependência. Note que nesses problemas as equações não são da forma $y' = ay + b$ e o comportamento de suas soluções é um pouco mais complicado do que o das soluções das equações no texto.

11. $y' = y(4 - y)$
 13. $y' = y^2$

12. $y' = -y(5 - y)$
 14. $y' = y(y - 2)^2$

Considere a seguinte lista de equações diferenciais, algumas das quais produziram os campos de direção ilustrados nas Figuras de 1.1.5 até 1.1.10. Em cada um dos Problemas de 15 a 20 identifique a equação diferencial que corresponde ao campo de direções dado.

- | | |
|---------------------|---------------------|
| (a) $y' = 2y - 1$ | (b) $y' = 2 + y$ |
| (c) $y' = y - 2$ | (d) $y' = y(y + 3)$ |
| (e) $y' = y(y - 3)$ | (f) $y' = 1 + 2y$ |
| (g) $y' = -2 - y$ | (h) $y' = y(3 - y)$ |
| (i) $y' = 1 - 2y$ | (j) $y' = 2 - y$ |

15. O campo de direções na Figura 1.1.5.
16. O campo de direções na Figura 1.1.6.
17. O campo de direções na Figura 1.1.7.
18. O campo de direções na Figura 1.1.8.
19. O campo de direções na Figura 1.1.9.
20. O campo de direções na Figura 1.1.10.

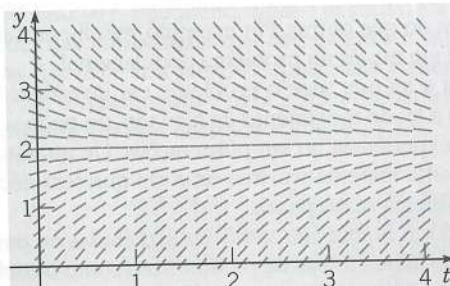


FIGURA 1.1.5 Campo de direções para o Problema 15.

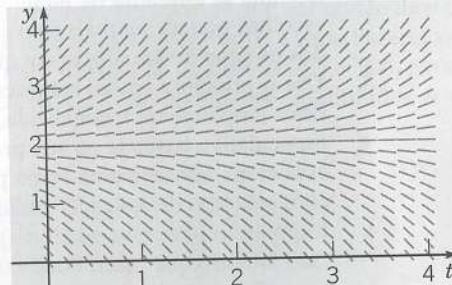


FIGURA 1.1.6 Campo de direções para o Problema 16.

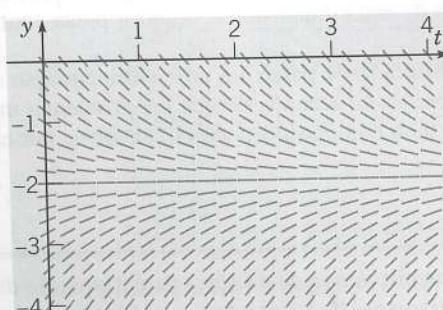


FIGURA 1.1.7 Campo de direções para o Problema 17.

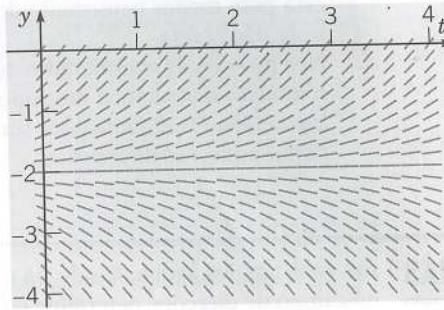


FIGURA 1.1.8 Campo de direções para o Problema 18.

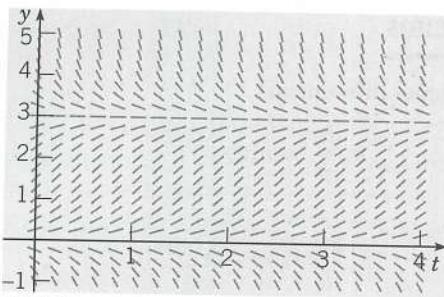


FIGURA 1.1.9 Campo de direções para o Problema 19.

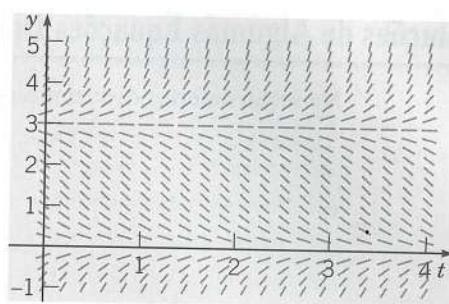


FIGURA 1.1.10 Campo de direções para o Problema 20.

21. Um pequeno lago contém, inicialmente, 1.000.000 de galões (aproximadamente 4.550.000 litros) de água e uma quantidade desconhecida de um produto químico indesejável. O lago recebe água contendo 0,01 grama dessa substância por galão a uma taxa de 300 galões por hora. A mistura sai à mesma taxa, de modo que a quantidade de água no lago permanece constante. Suponha que o produto químico está distribuído uniformemente no lago.
 - (a) Escreva uma equação diferencial cuja solução é a quantidade de produto químico no lago em um instante qualquer.
 - (b) Qual a quantidade do produto químico que estará no lago após um período muito longo de tempo? Essa quantidade-limite depende da quantidade presente inicialmente?
22. Uma gota esférica de chuva evapora a uma taxa proporcional à sua área de superfície. Escreva uma equação diferencial para o volume de uma gota de chuva em função do tempo.
23. A lei do resfriamento de Newton diz que a temperatura de um objeto varia a uma taxa proporcional à diferença entre a temperatura do objeto e a de seu meio ambiente (na maioria dos casos, a temperatura do ar ambiente). Suponha que a temperatura ambiente seja de 70°F (cerca de 21°C) e a taxa de 0,05 (min)⁻¹. Escreva uma equação diferencial para a temperatura do objeto em qualquer instante de tempo. Note que a equação diferencial é a mesma, independentemente de a temperatura do objeto estar acima ou abaixo da temperatura ambiente.
24. Um determinado remédio está sendo injetado na veia de um paciente de hospital. O líquido, contendo 5 mg/cm³ do remédio, entra na corrente sanguínea do paciente a uma taxa de 100 cm³/h. O remédio é absorvido pelos tecidos do corpo, ou deixa a corrente sanguínea de outro modo, a uma taxa proporcional à quantidade presente, com um coeficiente de proporcionalidade igual a 0,4 (h)⁻¹.
 - (a) Supondo que o remédio está sempre sendo distribuído uniformemente na corrente sanguínea, escreva uma equação diferencial para a quantidade de remédio presente na corrente sanguínea em qualquer instante de tempo.
 - (b) Quanto do remédio continua presente na corrente sanguínea após muito tempo?
25. Para objetos pequenos caindo devagar, a hipótese feita no texto sobre a resistência do ar ser proporcional à velocidade é boa. Para objetos maiores caindo mais rapidamente, uma hipótese mais precisa é de que a resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade.²
 - (a) Escreva uma equação diferencial para a velocidade de um objeto em queda de massa m supondo que a resistência do ar é proporcional à velocidade.
 - (b) Determine a velocidade limite após um longo período de tempo.
 - (c) Se $m = 10$ kg, encontre o coeficiente da resistência do ar de modo que a velocidade limite seja 49 m/s.
 - (d) Usando os dados em (c), desenhe um campo de direções e compare-o com a Figura 1.1.3.

Em cada um dos Problemas de 26 a 33, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \rightarrow \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y em $t = 0$, descreva essa dependência. Note que a expressão à direita do sinal de igualdade nessas equações depende de t , além de y ; portanto, suas soluções podem exibir um comportamento mais complicado do que as do texto.

26. $y' = -2 + t - y$

28. $y' = e^{-t} + y$

30. $y' = 3 \operatorname{sen} t + 1 + y$

32. $y' = -(2t + y)/2y$

27. $y' = te^{-2t} - 2y$

29. $y' = t + 2y$

31. $y' = 2t - 1 - y^2$

33. $y' = \frac{1}{6}y^3 - y - \frac{1}{3}t^2$

²Veja Lyle N. Long e Howard Weiss, "The Velocity Dependence of Aerodynamics Drag: A Primer for Mathematicians", Amer. Math. Monthly 106 (1999), 2, pp.127-135

ciente γ da resistência do ar através de medidas diretas apresenta dificuldades. De fato, algumas vezes o coeficiente de resistência do ar é encontrado indiretamente — por exemplo, medindo-se o tempo de queda de uma determinada altura e , depois, calculando-se o valor de γ que prevê esse tempo observado.

O modelo populacional dos ratos do campo está sujeito a diversas incertezas. A determinação da taxa de crescimento r e da taxa predatória k depende de observações sobre populações reais, que podem sofrer uma variação considerável. A hipótese de que r e k são constantes também pode ser questionada. Por exemplo, uma taxa predatória constante torna-se difícil de sustentar quando a população de ratos do campo torna-se menor. Além disso, o modelo prevê que uma população acima do valor de equilíbrio cresce exponencialmente, ficando cada vez maior. Isso não parece estar de acordo com a observação sobre populações reais; veja a discussão adicional sobre dinâmica populacional na Seção 2.5.

Se as diferenças entre observações realizadas e as previsões de um modelo matemático forem muito grandes, então você precisa refinar seu modelo, fazer observações mais cuidadosas ou ambos. Quase sempre existe uma troca entre precisão e simplicidade. Ambas são desejáveis, mas em geral um ganho em uma delas envolve uma perda na outra. No entanto, mesmo se um modelo matemático for incompleto ou não muito preciso ele ainda pode ser útil para explicar características qualitativas do problema sob investigação. Ele pode, também, dar resultados satisfatórios em algumas circunstâncias e não em outras. Portanto, você deve sempre usar seu julgamento e bom senso na construção de modelos matemáticos e ao utilizar suas previsões.

PROBLEMAS

1. Resolva cada um dos problemas de valor inicial a seguir e desenhe os gráficos das soluções para diversos valores de y_0 . Depois descreva, em poucas palavras, as semelhanças, ou diferenças, entre as soluções.

- $dy/dt = -y + 5, \quad y(0) = y_0$
- $dy/dt = -2y + 5, \quad y(0) = y_0$
- $dy/dt = -2y + 10, \quad y(0) = y_0$

2. Siga as instruções do Problema 1 para os problemas de valor inicial a seguir:

- $dy/dt = y - 5, \quad y(0) = y_0$
- $dy/dt = 2y - 5, \quad y(0) = y_0$
- $dy/dt = 2y - 10, \quad y(0) = y_0$

3. Considere a equação diferencial

$$dy/dt = -ay + b,$$

onde a e b são números positivos.

- Resolva a equação diferencial.
- Eboce a solução para diversas condições iniciais diferentes.
- Descreva como a solução muda sob cada uma das seguintes condições:
 - a aumenta;
 - b aumenta;
 - ambos, a e b , aumentam mas a razão b/a permanece constante.

4. Considere a equação diferencial $dy/dt = ay - b$.

- Encontre a solução de equilíbrio y_e .
- Seja $Y(t) = y - y_e$, de modo que $Y(t)$ é o desvio da solução de equilíbrio. Encontre a equação diferencial satisfeita por $Y(t)$.

5. **Coeficientes a Determinar.** Vamos mostrar um modo diferente de resolver a equação

$$dy/dt = ay - b. \quad (i)$$

- (a) Resolva a equação mais simples

$$dy/dt = ay. \quad (ii)$$

Chame a solução de $y_1(t)$.

- Observe que a única diferença entre as Eqs. (i) e (ii) é a constante $-b$ na Eq. (i). Parece razoável, portanto, supor que as soluções dessas duas equações diferem apenas por uma constante. Teste essa hipótese tentando encontrar uma constante k tal que $y = y_1(t) + k$ seja uma solução da Eq. (i).
- Compare sua solução em (b) com a dada no texto pela Eq. (17).

Obs.: Esse método também pode ser usado em alguns casos em que a constante b é substituída por uma função $g(t)$. Depende se você é capaz de prever a forma geral que a solução deve ter. Esse método é descrito em detalhe na Seção 3.5 em conexão com equações de segunda ordem.

6. Use o método do Problema 5 para resolver a equação

$$dy/dt = -ay + b.$$

7. A população de ratos do campo no Exemplo 1 satisfaz a equação diferencial

$$dp/dt = 0,5p - 450.$$

- (a) Encontre o instante em que a população é extinta se $p(0) = 850$.
- (b) Encontre o instante de extinção se $p(0) = p_0$, onde $0 < p_0 < 900$.
- (c) Encontre a população inicial p_0 se a população é extinta em 1 ano.

8. Considere uma população p_t de ratos do campo que crescem a uma taxa proporcional à população atual, de modo que $dp/dt = rp$.

- (a) Encontre a taxa de crescimento r se a população dobra em 30 dias.
- (b) Encontre r se a população dobra em N dias.

9. O objeto em queda no Exemplo 2 satisfaz o problema de valor inicial

$$dv/dt = 9,8 - (v/5), \quad v(0) = 0.$$

- (a) Encontre o tempo decorrido quando o objeto atinge 98% de sua velocidade limite.
- (b) Qual a distância percorrida pelo objeto até o instante encontrado no item (a)?

10. Modifique o Exemplo 2 de modo que o objeto em queda não sofra resistência do ar.

- (a) Escreva o problema de valor inicial modificado.
- (b) Determine quanto tempo leva para o objeto atingir o solo.
- (c) Determine sua velocidade no instante de impacto.

11. Considere o objeto de massa 10 kg em queda do Exemplo 2, mas suponha agora que o coeficiente de resistência do ar seja proporcional ao quadrado da velocidade.

- (a) Se a velocidade limite é de 49 m/s (a mesma do Exemplo 2), mostre que a equação de movimento pode ser escrita como

$$dv/dt = [(49)^2 - v^2]/245.$$

Veja também o Problema 25 da Seção 1.1.

- (b) Se $v(0) = 0$, encontre uma expressão para $v(t)$ em qualquer instante t .
- (c) Faça o gráfico da solução encontrada em (b) e da solução (26) do Exemplo 2 no mesmo conjunto de eixos.
- (d) Baseado nos gráficos encontrados em (c), compare o efeito de um coeficiente de resistência do ar quadrático com um linear.
- (e) Encontre a distância $x(t)$ percorrida pelo objeto até o instante t .
- (f) Encontre o tempo T que leva para o objeto cair 300 m.

12. Um material radioativo, tal como um dos isótopos de tório, o tório-234, se desintegra a uma taxa proporcional à quantidade presente. Se $Q(t)$ é a quantidade presente no instante t , então $dQ/dt = -rQ$, onde $r > 0$ é a taxa de decaimento.

- (a) Se 100 mg de tório-234 decaem a 82,04 mg em uma semana, determine a taxa de decaimento r .
- (b) Encontre uma expressão para a quantidade de tório-234 presente em qualquer instante t .
- (c) Encontre o tempo necessário para que o tório-234 decaia à metade da quantidade original.

13. A **meia-vida** de um material radioativo é o tempo necessário para que uma quantidade desse material decaia à metade de sua quantidade original. Mostre que para qualquer material radioativo que decaia de acordo com a equação $Q' = -rQ$ a meia-vida τ e a taxa de decaimento r estão relacionadas pela equação $r\tau = \ln 2$.

14. O rádio-226 tem uma meia-vida de 1620 anos. Encontre o tempo necessário para que uma determinada quantidade desse material seja reduzida da quarta parte.

15. De acordo com a lei do resfriamento de Newton (veja o Problema 23 da Seção 1.1), a temperatura $u(t)$ de um objeto satisfaz a equação diferencial

$$du/dt = -k(u - T),$$

onde T é a temperatura ambiente constante e k é uma constante positiva. Suponha que a temperatura inicial do objeto seja $u(0) = u_0$.

- (a) Encontre a temperatura do objeto em qualquer instante.
 (b) Seja τ o instante no qual a diferença inicial de temperatura $u_0 - T$ foi reduzida pela metade. Encontre a relação entre k e τ .
16. Suponha que um prédio perde calor de acordo com a lei do resfriamento de Newton (veja o Problema 15) e que a taxa k tem valor $0,15 \text{ h}^{-1}$. Suponha que a temperatura no interior era de 70°F (cerca de 21°C) quando ocorreu uma falha no sistema de aquecimento. Se a temperatura externa estava em 10°F (cerca de -12°C), quanto tempo vai levar para a temperatura no interior chegar a 32°F (0°C)?
17. Considere um circuito elétrico contendo um capacitor, um resistor e uma bateria; veja a Figura 1.2.3. A carga $Q(t)$ no capacitor satisfaz a equação⁵

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V,$$

onde R é a resistência, C a capacidade e V a voltagem constante fornecida pela bateria.

- (a) Se $Q(0) = 0$, encontre $Q(t)$ em qualquer instante t e esboce o gráfico de Q em função de t .
 (b) Encontre o valor limite Q_L para onde $Q(t)$ tende após um longo período de tempo.
 (c) Suponha que $Q(t_1) = Q_L$ e que, no instante $t = t_1$, a bateria seja removida e o circuito é fechado novamente. Encontre $Q(t)$ para $t > t_1$ e esboce seu gráfico.

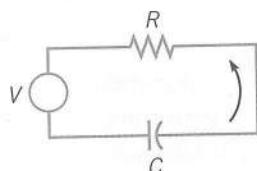


FIGURA 1.2.3 O circuito elétrico do Problema 17.

18. Um pequeno lago contendo 1.000.000 de galões (cerca de 4.550.000 litros) de água não contém, inicialmente, um produto químico indesejável (veja o Problema 21 da Seção 1.1). O lago recebe água contendo 0,01 g/galão de um produto químico a uma taxa de 300 galões por hora e a água sai do lago à mesma taxa. Suponha que o produto químico esteja distribuído uniformemente no lago.
- (a) Seja $Q(t)$ a quantidade de produto químico no lago no instante t . Escreva um problema de valor inicial para $Q(t)$.
 (b) Resolva o problema no item (a) para $Q(t)$. Quanto produto químico o lago terá ao final de 1 ano?
 (c) Ao final de 1 ano, a fonte do produto químico despejado no lago é retirada e, a partir daí, o lago recebe água pura e a mistura sai à mesma taxa de antes. Escreva o problema de valor inicial que descreve essa nova situação.
 (d) Resolva o problema de valor inicial do item (c). Qual a quantidade de produto químico que ainda permanece no lago após mais 1 ano (2 anos após o início do problema)?
 (e) Quanto tempo vai levar para que $Q(t)$ seja igual a 10 g?
 (f) Faça o gráfico de $Q(t)$ em função de t para t até 3 anos.
19. Sua piscina, contendo 60.000 galões (cerca de 273.000 litros) de água, foi contaminada por 5 kg de uma tinta não tóxica que deixa a pele de um nadador com uma cor verde nada atraente. O sistema de filtragem da piscina pode retirar a água, remover a tinta e devolver a água para a piscina a uma taxa de 200 gal/min.
- (a) Escreva o problema de valor inicial para o processo de filtragem; seja $q(t)$ a quantidade de tinta na piscina em qualquer instante t .
 (b) Resolva o problema encontrado em (a).
 (c) Você convidou dúzias de amigos para uma festa em torno da piscina que está marcada para começar em 4 horas. Você já verificou que o efeito da tinta é imperceptível se a concentração é menor do que 0,02 g/gal. Seu sistema de filtragem é capaz de reduzir a concentração de tinta a esse nível dentro de 4 horas?
 (d) Encontre o instante T em que a concentração de tinta alcança, pela primeira vez, o valor de 0,02 g/gal.
 (e) Encontre a taxa do fluxo de água que é suficiente para obter a concentração de 0,02 g/gal dentro de 4 horas.

⁵Essa equação resulta das leis de Kirchhoff, que são discutidas na Seção 3.7.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, determine a ordem da equação diferencial e diga se ela é linear ou não linear.

1. $t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + 2y = \sin t$

2. $(1+y^2) \frac{d^2y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + y = e^t$

3. $\frac{d^4y}{dt^4} + \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 1$

4. $\frac{dy}{dt} + ty^2 = 0$

5. $\frac{d^2y}{dt^2} + \sin(t+y) = \sin t$

6. $\frac{d^3y}{dt^3} + t \frac{dy}{dt} + (\cos^2 t)y = t^3$

Em cada um dos Problemas de 7 a 14, verifique que cada função dada é uma solução da equação diferencial.

7. $y'' - y = 0; \quad y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = \cosh t$

8. $y'' + 2y' - 3y = 0; \quad y_1(t) = e^{-3t}, \quad y_2(t) = e^t$

9. $ty' - y = t^2; \quad y = 3t + t^2$

10. $y''' + 4y'' + 3y = t; \quad y_1(t) = t/3, \quad y_2(t) = e^{-t} + t/3$

11. $2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^{1/2}, \quad y_2(t) = t^{-1}$

12. $t^2y'' + 5ty' + 4y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^{-2}, \quad y_2(t) = t^{-2} \ln t$

13. $y'' + y = \sec t, \quad 0 < t < \pi/2; \quad y = (\cos t) \ln \cos t + t \sin t$

14. $y' - 2ty = 1; \quad y = e^{t^2} \int_0^t e^{-s^2} ds + e^{t^2}$

Em cada um dos Problemas de 15 a 18, determine os valores de r para os quais a equação diferencial dada tem uma solução da forma $y = e^{rt}$.

15. $y' + 2y = 0$

16. $y'' - y = 0$

17. $y'' + y' - 6y = 0$

18. $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

Em cada um dos Problemas 19 e 20, determine os valores de r para os quais a equação diferencial dada tem uma solução da forma $y = t^r$ para $t > 0$.

19. $t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$

20. $t^2y'' - 4ty' + 4y = 0$

Em cada um dos Problemas de 21 a 24, determine a ordem da equação diferencial e diga se ela é linear ou não linear. Derivadas parciais são denotadas por índices.

21. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$

22. $u_{xx} + u_{yy} + uu_x + uu_y + u = 0$

23. $u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0$

24. $u_t + uu_x = 1 + u_{xx}$

Em cada um dos Problemas de 25 a 28, verifique que cada função dada é uma solução da equação diferencial.

25. $u_{xx} + u_{yy} = 0; \quad u_1(x, y) = \cos x \cosh y, \quad u_2(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

26. $\alpha^2 u_{xx} = u_t; \quad u_1(x, t) = e^{-\alpha^2 t} \sin x, \quad u_2(x, t) = e^{-\alpha^2 \lambda^2 t} \sin \lambda x, \quad \lambda \text{ uma constante real}$

27. $\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}; \quad u_1(x, t) = \sin \lambda x \sin \lambda at, \quad u_2(x, t) = \sin(x - at), \quad \lambda \text{ uma constante real}$

28. $\alpha^2 u_{xx} = u_t; \quad u = (\pi/t)^{1/2} e^{-x^2/4\alpha^2 t}, \quad t > 0$

29. Siga os passos indicados aqui para deduzir a equação de movimento de um pêndulo, Eq. (12) no texto. Suponha que a barra do pêndulo seja rígida e sem peso, que a massa seja pontual e que não exista atrito ou resistência em nenhum ponto do sistema.

- Suponha que a massa esteja em uma posição deslocada arbitrária, indicada pelo ângulo θ . Desenhe um diagrama mostrando as forças que agem sobre a massa.
 - Aplique a lei do movimento de Newton na direção tangencial ao arco circular sobre o qual a massa se move. Então, a força de tensão sobre a barra não aparece na equação. Note que é necessário encontrar a componente da força gravitacional na direção tangencial. Note, também, que a aceleração linear (para diferenciá-la da aceleração angular) é $Ld\theta/dt^2$, onde L é o comprimento da barra.
 - Simplifique o resultado obtido no item (b) para obter a Eq. (12) do texto.
30. Outra maneira de deduzir a equação do pêndulo (12) baseia-se no princípio de conservação de energia.
- Mostre que a energia cinética do pêndulo em movimento é

$$T = \frac{1}{2}mL^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2.$$

- (b) Mostre que a energia potencial V do pêndulo relativa à sua posição de repouso é

$$V = mgL(1 - \cos \theta).$$

A expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (44) é a derivada de $e^{t^2/4}y$, portanto, integrando a Eq. (44) obtemos

$$e^{t^2/4}y = \int e^{t^2/4} dt + c. \quad (45)$$

A integral na Eq. (45) não pode ser calculada em termos das funções elementares usuais, de modo que a deixamos em forma integral. No entanto, escolhendo o limite inferior de integração como o ponto inicial $t = 0$ podemos substituir a Eq. (45) por

$$e^{t^2/4}y = \int_0^t e^{s^2/4} ds + c, \quad (46)$$

onde c é uma constante arbitrária. Segue, então, que a solução geral y da Eq. (41) é dada por

$$y = e^{-t^2/4} \int_0^t e^{s^2/4} ds + ce^{-t^2/4}. \quad (47)$$

A condição inicial (42) requer que $c = 1$.

O principal objetivo deste exemplo é ilustrar que algumas vezes a solução tem que ser deixada em função de uma integral. Em geral, isso é no máximo ligeiramente inconveniente, e não um obstáculo sério. Para um dado valor de t , a integral na Eq. (47) é uma integral definida, e pode ser aproximada com qualquer precisão desejada usando-se integradores numéricos facilmente disponíveis. Repetindo esse processo para muitos valores de t e colocando os resultados em um gráfico, você pode obter um gráfico da solução. De maneira alternativa, você pode usar um método numérico de aproximação, como os discutidos no Capítulo 8, que partem diretamente da equação diferencial e não precisam de uma expressão para a solução. Pacotes de programas como Maple e Mathematica executam rapidamente tais procedimentos e produzem gráficos de soluções de equações diferenciais.

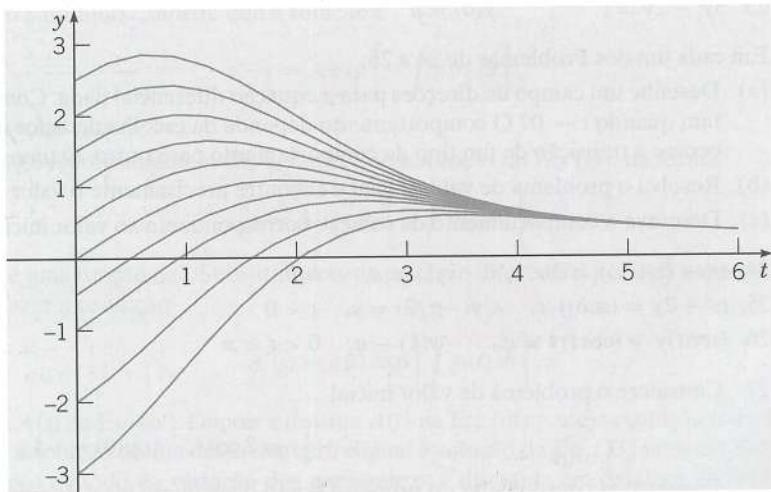


FIGURA 2.1.4 Curvas integrais para $2y' + ty = 2$.

A Figura 2.1.4 mostra gráficos das soluções (47) para diversos valores de c . Da figura, parece plausível conjecturar que todas as soluções tendem a um limite quando $t \rightarrow \infty$. O limite pode ser encontrado analiticamente (veja o Problema 32).

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 12:

- (a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada.
- (b) Baseado em uma análise do campo de direções, descreva o comportamento das soluções para valores grandes de t .
- (c) Encontre a solução geral da equação diferencial dada e use-a para determinar o comportamento das soluções quando $t \rightarrow \infty$.

1. $y' + 3y = t + e^{-2t}$
 2. $y' - 2y = t^2 e^{2t}$
 3. $y' + y = te^{-t} + 1$
 4. $y' + (1/t)y = 3 \cos 2t, \quad t > 0$
 5. $y' - 2y = 3e^t$
 6. $ty' + 2y = \sin t, \quad t > 0$

7. $y' + 2ty + 2te^{-t^2}$

9. $2y' + y = 3t$

11. $y' + y = 5 \sin 2t$

8. $(1+t^2)y' + 4ty = (1+t^2)^{-2}$

10. $ty' - y = t^2 e^{-t}, \quad t > 0$

12. $2y' + y = 3t^2$

Em cada um dos Problemas de 13 a 20, encontre a solução do problema de valor inicial dado.

13. $y' - y = 2te^{2t}, \quad y(0) = 1$

14. $y' + 2y = te^{-2t}, \quad y(1) = 0$

15. $ty' + 2y = t^2 - t + 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad t > 0$

16. $y' + (2/t)y = (\cos t)/t^2, \quad y(\pi) = 0, \quad t > 0$

17. $y' - 2y = e^{2t}, \quad y(0) = 2$

18. $ty' + 2y = \operatorname{sent}, \quad y(\pi/2) = 1, \quad t > 0$

19. $t^3 y' + 4t^2 y = e^{-t}, \quad y(-1) = 0, \quad t < 0$

20. $ty' + (t+1)y = t, \quad y(\ln 2) = 1, \quad t > 0$

Em cada um dos Problemas de 21 a 23:

- Desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Como parece que as soluções se comportam quando t assume valores grandes? O comportamento depende da escolha do valor inicial a ? Seja a_0 o valor de a no qual ocorre a transição de um tipo de comportamento para outro. Estime o valor de a_0 .
- Resolva o problema de valor inicial e encontre precisamente o valor crítico a_0 .
- Descreva o comportamento da solução correspondente ao valor inicial a_0 .

21. $y' - \frac{1}{2}y = 2 \cos t, \quad y(0) = a$

22. $2y' - y = e^{t/3}, \quad y(0) = a$

23. $3y' - 2y = e^{-\pi t/2}, \quad y(0) = a$

Em cada um dos Problemas de 24 a 26:

- Desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Como parece que as soluções se comportam quando $t \rightarrow 0$? O comportamento depende da escolha do valor inicial a ? Seja a_0 o valor de a no qual ocorre a transição de um tipo de comportamento para outro. Estime o valor de a_0 .
- Resolva o problema de valor inicial e encontre precisamente o valor crítico a_0 .
- Descreva o comportamento da solução correspondente ao valor inicial a_0 .

24. $ty' + (t+1)y = 2te^{-t}, \quad y(1) = a, \quad t > 0$

25. $ty' + 2y = (\operatorname{sent})/t, \quad y(-\pi/2) = a, \quad t < 0$

26. $(\operatorname{sent})y' + (\cos t)y = e^t, \quad y(1) = a, \quad 0 < t < \pi$

27. Considere o problema de valor inicial

$$y' + \frac{1}{2}y = 2 \cos t, \quad y(0) = -1.$$

Encontre as coordenadas do primeiro ponto de máximo local da solução para $t > 0$.

28. Considere o problema de valor inicial

$$y' + \frac{2}{3}y = 1 - \frac{1}{2}t, \quad y(0) = y_0.$$

Encontre o valor de y_0 para o qual a solução toca, mas não cruza, o eixo dos t .

29. Considere o problema de valor inicial

$$y' + \frac{1}{4}y = 3 + 2 \cos 2t, \quad y(0) = 0.$$

- (a) Encontre a solução deste problema de valor inicial e descreva seu comportamento para valores grandes de t .

- (b) Determine o valor de t para o qual a solução intersecta pela primeira vez a reta $y = 12$.

30. Encontre o valor de y_0 para o qual a solução do problema de valor inicial

$$y' - y = 1 + 3 \operatorname{sent}, \quad y(0) = y_0$$

permanece finita quando $t \rightarrow \infty$.

31. Considere o problema de valor inicial

$$y' - \frac{3}{2}y = 3t + 2e^t, \quad y(0) = y_0.$$

Encontre o valor de y_0 que separa as soluções que crescem positivamente quando $t \rightarrow \infty$ das que crescem em módulo, mas permanecem negativas. Como a solução que corresponde a esse valor crítico de y_0 se comporta quando $t \rightarrow \infty$?

32. Mostre que todas as soluções de $2y' + ty = 2$ [veja a Eq. (41) do texto] tendem a um limite quando $t \rightarrow \infty$ e encontre esse limite.

Sugestão: considere a solução geral, Eq. (47), e use a regra de L'Hospital no primeiro termo.

33. Mostre que, se a e λ são constantes positivas e se b é um número real arbitrário, então toda solução da equação

$$y' + ay = be^{-\lambda t}$$

tem a propriedade de que $y \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Sugestão: Considere os casos $a = \lambda$ e $a \neq \lambda$ separadamente.

Em cada um dos Problemas de 34 a 37, construa uma equação diferencial linear de primeira ordem cujas soluções têm o comportamento descrito quando $t \rightarrow \infty$. Depois resolva sua equação e confirme que todas as soluções têm, de fato, a propriedade especificada.

34. Todas as soluções têm limite 3 quando $t \rightarrow \infty$.
 35. Todas as soluções são assintóticas à reta $y = 3 - t$ quando $t \rightarrow \infty$.
 36. Todas as soluções são assintóticas à reta $y = 2t - 5$ quando $t \rightarrow \infty$.
 37. Todas as soluções se aproximam da curva $y = 4 - t^2$ quando $t \rightarrow \infty$.
 38. **Variação dos Parâmetros.** Considere o seguinte método de resolução da equação linear de primeira ordem geral:

$$y' + p(t)y = g(t). \quad (\text{i})$$

- (a) Se $g(t) = 0$ para todo t , mostre que a solução é

$$y = A \exp \left[- \int p(t) dt \right], \quad (\text{ii})$$

onde A é uma constante.

- (b) Se $g(t)$ não é identicamente nula, suponha que a solução da Eq. (i) é da forma

$$y = A(t) \exp \left[- \int p(t) dt \right], \quad (\text{iii})$$

onde A agora é uma função de t . Substituindo y na equação diferencial por essa expressão, mostre que $A(t)$ tem que satisfazer a condição

$$A'(t) = g(t) \exp \left[\int p(t) dt \right]. \quad (\text{iv})$$

- (c) Encontre $A(t)$ da Eq. (iv). Depois substitua $A(t)$ na Eq. (iii) por essa solução para determinar y . Verifique que a solução obtida dessa maneira é igual à solução da Eq. (33) no texto. Essa técnica é conhecida como o método de **variação dos parâmetros**; é discutida em detalhes na Seção 3.6 em conexão com equações lineares de segunda ordem.

Em cada um dos Problemas de 39 a 42, use o método do Problema 38 para resolver a equação diferencial dada.

39. $y' - 2y = t^2 e^{2t}$

40. $y' + (1/t)y = 3 \cos 2t, \quad t > 0$

41. $ty' + 2y = \text{sent}, \quad t > 0$

42. $2y' + y = 3t^2$

2.2 Equações Separáveis

Nas Seções 1.2 e 2.1 usamos um processo de integração direta para resolver equações lineares de primeira ordem da forma

$$\frac{dy}{dt} = ay + b, \quad (1)$$

onde a e b são constantes. Vamos mostrar agora que esse processo pode ser aplicado, de fato, a uma classe muito maior de equações.

Nota 2: A investigação de uma equação não linear de primeira ordem pode ser facilitada, algumas vezes, considerando-se tanto x quanto y como funções de uma terceira variável t . Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}. \quad (26)$$

Se a equação diferencial é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F(x, y)}{G(x, y)}, \quad (27)$$

então, comparando os numeradores e denominadores nas Eqs. (26) e (27) obtemos o sistema

$$dx/dt = G(x, y), \quad dy/dt = F(x, y). \quad (28)$$

À primeira vista pode parecer estranho que um problema possa ser simplificado substituindo-se uma única equação por duas, mas de fato o sistema (28) pode ser mais simples de analisar do que a Eq. (27). O Capítulo 9 trata de sistemas não lineares da forma (28).

Nota 3: Não foi difícil, no Exemplo 2, resolver explicitamente para y em função de x . No entanto, essa situação é excepcional e, muitas vezes, é melhor deixar a solução em forma implícita, como nos Exemplos 1 e 3. Assim, nos problemas a seguir e em outras seções onde aparecem equações não lineares as palavras “resolva a equação diferencial a seguir” significam encontrar a solução explicitamente se for conveniente, mas, caso contrário, encontrar uma equação que defina a solução implicitamente.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 8, resolva a equação diferencial dada.

1. $y' = x^2/y$

2. $y' = x^2/y(1+x^3)$

3. $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$

4. $y' = (3x^2 - 1)(3 + 2y)$

5. $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$

6. $xy' = (1 - y^2)^{1/2}$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}$

8. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2}$

Em cada um dos Problemas de 9 a 20:

(a) Encontre a solução do problema de valor inicial dado em forma explícita.

(b) Desenhe o gráfico da solução.

(c) Determine (pelo menos aproximadamente) o intervalo no qual a solução está definida.

9. $y' = (1 - 2x)y^2, \quad y(0) = -1/6 \quad 10. y' = (1 - 2x)/y, \quad y(1) = -2$

11. $x dx + ye^{-x} dy = 0, \quad y(0) = 1 \quad 12. dr/d\theta = r^2/\theta, \quad r(1) = 2$

13. $y' = 2x/(y + x^2 y), \quad y(0) = -2 \quad 14. y' = xy^3(1 + x^2)^{-1/2}, \quad y(0) = 1$

15. $y' = 2x/(1 + 2y), \quad y(2) = 0 \quad 16. y' = x(x^2 + 1)/4y^3, \quad y(0) = -1/\sqrt{2}$

17. $y' = (3x^2 - e^x)/(2y - 5), \quad y(0) = 1$

18. $y' = (e^{-x} - e^x)/(3 + 4y), \quad y(0) = 1$

19. $\operatorname{sen} 2x dx + \cos 3y dy = 0, \quad y(\pi/2) = \pi/3$

20. $y^2(1 - x^2)^{1/2} dy = \operatorname{arcsen} x dx, \quad y(0) = 1$

Alguns dos resultados pedidos nos Problemas de 21 a 28 podem ser obtidos resolvendo-se a equação dada analiticamente ou gerando-se gráficos de aproximações numéricas das soluções. Tente formar uma opinião sobre as vantagens e desvantagens de cada abordagem.

21. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = (1 + 3x^2)/(3y^2 - 6y), \quad y(0) = 1$$

e determine o intervalo de validade da solução.

Sugestão: Para encontrar o intervalo de validade, procure pontos onde a curva integral tem uma tangente vertical.

22. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 3x^2/(3y^2 - 4), \quad y(1) = 0$$

e determine o intervalo de validade da solução.

Sugestão: Para encontrar o intervalo de validade, procure pontos onde a curva integral tem uma tangente vertical.

23. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 2y^2 + xy^2, \quad y(0) = 1$$

e determine onde a solução atinge seu valor mínimo.

24. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = (2 - e^x)/(3 + 2y), \quad y(0) = 0$$

e determine onde a solução atinge seu valor máximo.

25. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 2 \cos 2x/(3 + 2y), \quad y(0) = -1$$

e determine onde a solução atinge seu valor máximo.

26. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 2(1+x)(1+y^2), \quad y(0) = 0$$

e determine onde a solução atinge seu valor mínimo.

27. Considere o problema de valor inicial

$$y' = ty(4-y)/3, \quad y(0) = y_0.$$

(a) Determine o comportamento da solução em função do valor inicial y_0 quando t aumenta.

(b) Suponha que $y_0 = 0,5$. Encontre o instante T no qual a solução atinge, pela primeira vez, o valor 3,98.

28. Considere o problema de valor inicial

$$y' = ty(4-y)/(1+t), \quad y(0) = y_0 > 0.$$

(a) Determine o comportamento da solução quando $t \rightarrow \infty$.

(b) Se $y_0 = 2$, encontre o instante T no qual a solução atinge, pela primeira vez, o valor 3,99.

(c) Encontre o intervalo de valores iniciais para os quais a solução fica no intervalo $3,99 < y < 4,01$ no instante $t = 2$.

29. Resolva a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay+b}{cy+d},$$

onde a, b, c e d são constantes.

Equações Homogêneas. Se a função f na equação $dy/dx = f(x, y)$ puder ser expressa como uma função só de y/x , então a equação é dita homogênea¹. Tais equações sempre podem ser transformadas em equações separáveis por uma mudança da variável dependente. O Problema 30 ilustra como resolver equações homogêneas de primeira ordem.

30. Considere a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-4x}{x-y}. \tag{i}$$

(a) Mostre que a Eq. (i) pode ser colocada na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y/x)-4}{1-(y/x)}; \tag{ii}$$

logo, a Eq. (i) é homogênea.

(b) Introduza uma nova variável dependente v de modo que $v = y/x$, ou $y = xv(x)$. Expresse dy/dx em função de x, v e dv/dx .

¹A palavra “homogênea” tem significados diferentes em contextos matemáticos distintos. As equações homogêneas consideradas aqui não têm nada a ver com as equações homogêneas que aparecerão no Capítulo 3 e em outros lugares.

- (c) Substitua y e dy/dx na Eq. (ii) pelas expressões no item (b) envolvendo v e dv/dx . Mostre que a equação diferencial resultante é

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{v - 4}{1 - v},$$

ou

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 4}{1 - v}. \quad (\text{iii})$$

Note que a Eq. (iii) é separável.

- (d) Resolva a Eq. (iii) obtendo v implicitamente como função de x .
 (e) Encontre a solução da Eq. (i) substituindo v por y/x na solução encontrada no item (d).
 (f) Desenhe um campo de direções e algumas curvas integrais para a Eq. (i). Lembre-se de que a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (i) depende, de fato, apenas da razão y/x . Isso significa que as curvas integrais têm a mesma inclinação em todos os pontos pertencentes a uma mesma reta contendo a origem, embora essa inclinação varie de uma reta para outra. Portanto, o campo de direções e as curvas integrais são simétricos em relação à origem. Essa propriedade de simetria é evidente em seus gráficos?

O método esboçado no Problema 30 pode ser usado em qualquer equação homogênea. Isto é, a substituição $y = xv(x)$ transforma uma equação homogênea em uma equação separável. Essa última equação pode ser resolvida por integração direta e depois a substituição de v por y/x fornece a solução da equação original. Em cada um dos Problemas de 31 a 38:

- (a) Mostre que a equação dada é homogênea.
 (b) Resolva a equação diferencial.
 (c) Desenhe um campo de direções e algumas curvas integrais. Elas são simétricas em relação à origem?

31. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$

32. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$

33. $\frac{dy}{dx} = \frac{4y - 3x}{2x - y}$

34. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x + 3y}{2x + y}$

35. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{x - y}$

36. $(x^2 + 3xy + y^2) dx - x^2 dy = 0$

37. $\frac{dy}{dx} + \frac{x^2 - 3y^2}{2xy}$

38. $\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$

2.3 Modelagem com Equações de Primeira Ordem

Equações diferenciais são de interesse para não matemáticos, principalmente por causa da possibilidade de serem usadas para investigar uma variedade de problemas nas ciências físicas, biológicas e sociais. Uma razão para isso é que modelos matemáticos e suas soluções levam a equações que relacionam as variáveis e os parâmetros no problema. Essas equações permitem, muitas vezes, fazer previsões sobre como os processos naturais se comportarão em diversas circunstâncias. Muitas vezes é fácil permitir a variação dos parâmetros no modelo matemático em um amplo intervalo, enquanto isso poderia levar muito tempo ou ser muito caro, se não impossível, em um ambiente experimental. De qualquer modo, a modelagem matemática e a experimentação ou observação são criticamente importantes e têm papéis um tanto complementares nas investigações científicas. Modelos matemáticos são validados comparando-se suas previsões com resultados experimentais. Por outro lado, análises matemáticas podem sugerir as direções mais promissoras para exploração experimental e podem indicar, com boa precisão, que dados experimentais serão mais úteis.

Nas Seções 1.1 e 1.2 formulamos e investigamos alguns modelos matemáticos simples. Vamos começar recordando e expandindo algumas das conclusões a que chegamos naquelas seções. Independente do campo específico de aplicação, existem três passos identificáveis que estão sempre presentes na modelagem matemática.

PROBLEMAS

1. Considere um tanque usado em determinados experimentos em hidrodinâmica. Depois de um experimento, o tanque contém 200 litros de uma solução de tinta com uma concentração de 1 grama por litro. Para preparar o tanque para o próximo experimento, ele é lavado com água fresca fluindo a uma taxa de 2 litros por minuto, e a solução bem misturada flui para fora à mesma taxa. Encontre o tempo gasto até a concentração de tinta no tanque atingir 1% de seu valor original.
2. Um tanque contém inicialmente 120 litros de água pura. Uma mistura contendo uma concentração de γ gramas por litro de sal entra no tanque a uma taxa de 2 litros por minuto, e a mistura bem mexida sai do tanque à mesma taxa. Encontre uma expressão para a quantidade de sal no tanque em qualquer instante t em termos de γ . Encontre, também, a quantidade limite de sal no tanque quando $t \rightarrow \infty$.
3. Um tanque contém inicialmente 100 galões de água fresca. Joga-se, então, água contendo $\frac{1}{2}$ libra de sal por galão a uma taxa de 2 galões por minuto e permite-se que a mistura saia do tanque à mesma taxa. Após 10 minutos, para-se o processo e joga-se água fresca no tanque a uma taxa de 2 galões por minuto, com a mistura deixando o tanque, novamente, à mesma taxa. Encontre a quantidade de sal no tanque ao final de 10 minutos adicionais.
4. Um tanque, com capacidade de 500 galões, contém originalmente 200 galões de água com uma solução de 100 libras de sal. Está entrando no tanque, a uma taxa de 3 galões por minuto, água contendo 1 libra de sal por galão, e permite-se que a mistura saia do tanque a uma taxa de 2 galões por minuto. Encontre a quantidade de sal no tanque em qualquer instante antes do momento em que a solução começa a transbordar. Encontre a concentração de sal (em libras por galão) no tanque no instante em que vai começar a transbordar. Compare essa concentração com a concentração-limite teórica se o tanque tivesse capacidade infinita.
5. Um tanque contém 100 galões de água e 50 onças¹ de sal. Água contendo uma concentração de sal de $(\frac{1}{4})[1 + (\frac{1}{2})\text{sent}]$ onças por galão entra no tanque a uma taxa de 2 galões por minuto, e a mistura sai do tanque à mesma taxa.
 - Encontre a quantidade de sal no tanque em qualquer instante.
 - Desenhe o gráfico da solução por um período de tempo longo o suficiente para que você veja o comportamento final do gráfico.
 - O comportamento da solução para períodos longos de tempo é uma oscilação em torno de um nível constante. Qual é esse nível? E qual é a amplitude da oscilação?
6. Suponha que um tanque contendo um determinado líquido tem uma saída perto do fundo. Seja $h(t)$ a altura da superfície do líquido acima da saída no instante t . O princípio de Torricelli² diz que a velocidade v do fluxo na saída é igual à velocidade de uma partícula em queda livre (sem atrito) caindo da altura h .
 - Mostre que $v = \sqrt{2gh}$, onde g é a aceleração da gravidade.
 - Igualando a taxa de saída à taxa de variação de líquido no tanque, mostre que $h(t)$ satisfaz a equação

$$A(h) \frac{dh}{dt} = -\alpha a \sqrt{2gh}, \quad (i)$$

onde $A(h)$ é a área da seção reta do tanque na altura h e a é a área da saída. A constante α é um coeficiente de contração responsável pelo fato observado de que a seção reta do fluxo (suave) de saída é menor do que a . O valor de α para a água é cerca de 0,6.

 - Considere um tanque de água em forma de um cilindro circular reto 3 m (metros) acima da saída. O raio do tanque é 1 m e o raio da saída circular é 0,1 m. Se o tanque está inicialmente cheio de água, determine quanto tempo vai levar para esvaziar o tanque até o nível da saída.
7. Suponha que determinada quantia S_0 está investida a uma taxa anual de retorno r capitalizada continuamente.
 - Encontre o tempo T necessário para a soma original dobrar de valor em função de r .
 - Determine T se $r = 7\%$.
 - Encontre a taxa de retorno que precisa ser alcançada se o investimento inicial deve dobrar em 8 anos.
8. Uma pessoa jovem, sem capital inicial, investe k reais por ano a uma taxa anual de retorno r . Suponha que os investimentos são feitos continuamente e que o retorno é capitalizado continuamente.
 - Determine a quantia $S(t)$ acumulada em qualquer instante t .

¹Uma onça tem aproximadamente 28 gramas, de modo que 50 onças têm aproximadamente 1417g. (N.T.)²Evangelista Torricelli (1608-1647), sucessor de Galileu como matemático da corte em Florença, publicou esse resultado em 1644. Ele também é conhecido por ter construído o primeiro barômetro de mercúrio e por contribuições importantes em geometria.

- (b) Se $r = 7,5\%$, determine k de modo que 1 milhão de reais esteja disponível para a aposentadoria em 40 anos.
- (c) Se $k = R\$ 2.000,00$ por ano, determine qual deve ser a taxa de retorno r para se ter 1 milhão de reais em 40 anos.
9. Um determinado universitário pede um empréstimo de R\$8.000,00 para comprar um carro. A financeira cobra juros de 10% ao ano. Supondo que os juros são capitalizados continuamente e que os pagamentos são feitos continuamente a uma taxa anual constante k , determine a taxa de pagamento necessária para quitar o empréstimo em 3 anos. Determine, também, quanto é pago de juros durante esses 3 anos.
10. O comprador de uma casa não pode gastar mais de R\$ 800,00 por mês pelo seu financiamento. Suponha que a taxa de juros é de 9% ao ano e que o financiamento é em 20 anos. Suponha que os juros são capitalizados continuamente e que os pagamentos também são feitos continuamente.
- Determine a quantia máxima que esse comprador pode financiar.
 - Determine os juros totais pagos durante o financiamento.
11. Um recém-formado pegou emprestados R\$ 100.000,00 a uma taxa de juros de 9% ao ano para comprar um apartamento. Prevendo constantes aumentos de salário, ele espera pagar a uma taxa mensal de $800(1 + t/120)$, onde t é o número de meses desde o início do empréstimo.
- Supondo que o programa de pagamento pode ser mantido, quando o empréstimo estará quitado?
 - Supondo o mesmo programa de pagamento, qual deve ser a quantia emprestada para que seja paga em exatamente 20 anos?
12. Uma ferramenta importante em pesquisa arqueológica é a datação por carbono radioativo, desenvolvida pelo químico americano Willard F. Libby³. Esse é um meio para determinar a idade de determinados resíduos de madeira e plantas, portanto de ossos de animais ou homens, ou artefatos encontrados enterrados nos mesmos níveis. A datação por carbono radioativo baseia-se no fato de que alguns restos de madeira ou plantas contêm quantidades residuais de carbono-14, um isótopo radioativo do carbono. Esse isótopo se acumula durante a vida da planta e começa a decair na sua morte. Como a meia-vida do carbono-14 é longa (aproximadamente 5730 anos⁴), quantidades mensuráveis de carbono-14 permanecem depois de muitos milhares de anos. Se mesmo uma fração mínima da quantidade original de carbono-14 ainda está presente, então, através de medidas apropriadas em laboratório pode-se determinar com precisão a proporção da quantidade original de carbono-14 que permanece. Em outras palavras, se $Q(t)$ é a quantidade de carbono-14 no instante t e Q_0 é a quantidade original, então a razão $Q(t)/Q_0$ pode ser determinada, pelo menos se essa quantidade não for pequena demais. Técnicas atuais de medida permitem o uso desse método por períodos de tempo de 50.000 anos ou mais.
- Supondo que Q satisfaz a equação diferencial $Q' = -rQ$, determine a constante de decaimento r para o carbono-14.
 - Encontre uma expressão para $Q(t)$ em qualquer instante t se $Q(0) = Q_0$.
 - Suponha que determinados restos foram descobertos nos quais a quantidade residual atual de carbono-14 é de 20% da quantidade original. Determine a idade desses restos.
13. A população de mosquitos em determinada área aumenta a uma taxa proporcional à população atual e, na ausência de outros fatores, a população dobra a cada semana. Inicialmente há 200.000 mosquitos na área e predadores (pássaros, morcegos, etc.) comem 20.000 mosquitos por dia. Determine a população de mosquitos na área em qualquer instante t .
14. Suponha que determinada população tem uma taxa de crescimento que varia com o tempo e que essa população satisfaz a equação diferencial

$$dy/dt = (0,5 + \text{sen}t)y/5.$$

- Se $y(0) = 1$, encontre (ou estime) o instante τ no qual a população dobrou. Escolha outras condições iniciais e determine se o tempo de duplicação τ depende da população inicial.
- Suponha que a taxa de crescimento é substituída pelo seu valor médio 1/10. Determine o tempo de duplicação τ neste caso.
- Suponha que o termo $\text{sen }t$ na equação diferencial é substituído por $\text{sen}(2\pi t)$; ou seja, a variação na taxa de crescimento tem uma frequência substancialmente mais alta. Que efeito isso tem no tempo de duplicação τ ?
- Faça o gráfico das soluções obtidas nos itens (a), (b) e (c) em um único conjunto de eixos.

³Willard F. Libby (1908-1980) nasceu na zona rural do estado de Colorado, nos Estados Unidos, e recebeu sua educação na Universidade da Califórnia em Berkeley. Desenvolveu o método de datação por carbono radioativo a partir de 1947, quando estava na Universidade de Chicago. Recebeu o Prêmio Nobel de química em 1960 por esse trabalho.

⁴McGraw-Hill Encyclopedia of Science and Technology (8th ed.) (New York: McGraw-Hill, 1997), Vol. 5, p. 48.

15. Suponha que uma determinada população satisfaz o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = r(t)y - k, \quad y(0) = y_0,$$

onde a taxa de crescimento $r(t)$ é dada por $r(t) = (1 + \text{sent})/5$ e k representa a taxa predatória.

- (a) Suponha que $k = 1/5$. Faça gráficos de y em função de t para diversos valores de y_0 entre $1/2$ e 1 .
- (b) Estime a população inicial crítica y_c abaixo da qual a população será extinta.
- (c) Escolha outros valores de k e encontre a população crítica correspondente y_c para cada um deles.
- (d) Use os dados encontrados nos itens (b) e (c) para fazer o gráfico de y_c em função de k .

16. A lei do resfriamento de Newton diz que a temperatura de um objeto varia a uma razão proporcional à diferença entre sua temperatura e a temperatura ambiente. Suponha que a temperatura de uma xícara de café obedece à lei do resfriamento de Newton. Se o café está a uma temperatura de 200°F [†] quando colocado na xícara e 1 minuto depois esfriou e está a 190°F em uma sala à temperatura de 70°F , determine quando o café alcança a temperatura de 150°F .

17. O calor transferido de um corpo para seu ambiente por radiação, baseado na lei de Stefan-Boltzman[§], é descrito pela equação diferencial

$$\frac{du}{dt} = -\alpha(u^4 - T^4), \quad (\text{i})$$

onde $u(t)$ é a temperatura absoluta do corpo no instante t , T é a temperatura absoluta do ambiente e α é uma constante que depende dos parâmetros físicos do corpo. No entanto, se u for muito maior do que T , as soluções da Eq. (i) podem ser bem aproximadas por soluções da equação mais simples

$$\frac{du}{dt} = -\alpha u^4. \quad (\text{ii})$$

Suponha que um corpo, a uma temperatura inicial de 2000 K , está em um meio à temperatura de 300 K e que $\alpha = 2,0 \times 10^{-12}\text{ K}^{-3}/\text{s}$.

- (a) Determine a temperatura do corpo em um instante qualquer resolvendo a Eq. (ii).
- (b) Faça o gráfico de u em função de t .
- (c) Encontre o instante τ no qual $u(\tau) = 600$, ou seja, o dobro da temperatura ambiente. Até esse instante, o erro ao se usar a Eq. (ii) para aproximar as soluções da Eq. (i) não é maior do que 1%.

18. Considere uma caixa isolada termicamente (um prédio, talvez) com temperatura interna $u(t)$. De acordo com a lei do resfriamento de Newton, u satisfaz a equação diferencial

$$\frac{du}{dt} = -k[u - T(t)], \quad (\text{i})$$

onde $T(t)$ é a temperatura do ambiente (externo). Suponha que $T(t)$ varia como uma senoide; por exemplo, suponha que $T(t) = T_0 + T_1 \cos(\omega t)$.

- (a) Resolva a Eq. (i) e expresse $u(t)$ em termos de t, k, T_0, T_1 e ω . Observe que parte de sua solução tende a zero quando t fica muito grande; essa é chamada de parte transitória. O restante da solução é chamado de estado estacionário; denote-o por $S(t)$.
- (b) Suponha que t está medido em horas e que $\omega = \pi/12$, correspondendo a um período de 24 horas para $T(t)$. Além disso, sejam $T_0 = 60^\circ\text{F}$, $T_1 = 15^\circ\text{F}$ e $k = 0,2/\text{h}$. Desenhe gráficos de $S(t)$ e de $T(t)$ em função de t nos mesmos eixos. A partir de seu gráfico, estime a amplitude R da parte oscilatória de $S(t)$. Estime, também, a diferença de tempo τ entre os máximos correspondentes de $T(t)$ e de $S(t)$.
- (c) Sejam k, T_0, T_1 e ω não especificados. Escreva a parte oscilatória de $S(t)$ na forma $R \cos[\omega(t - \tau)]$. Use identidades trigonométricas para encontrar expressões para R e τ . Suponha que T_1 e ω têm os valores dados no item (b) e desenhe gráficos de R e τ em função de k .

19. Considere um lago de volume constante V contendo, no instante t , uma quantidade $Q(t)$ de poluentes distribuídos uniformemente em todo o lago com uma concentração $c(t)$, onde $c(t) = Q(t)/V$. Suponha que está entrando no lago água contendo uma concentração k de poluentes a uma taxa r e que está saindo água do lago à mesma taxa. Suponha também que são adicionados poluentes diretamente no lago a uma taxa constante P . Note que as hipóteses feitas não consideram uma série de fatores que podem ser importantes em alguns casos—por exemplo, a água que é adicionada ou perdida devido à precipitação, à absorção ou à evaporação; a estratificação em consequência das diferenças de temperatura em um lago profundo; a produção de baías protegidas, por causa de irregularidades na borda; e o fato de que os poluentes não

[†]A fórmula para conversão de Fahrenheit para Celsius é $(F - 32)/9 = C/5$. Então 200°F é, aproximadamente, 93°C . (N.T.)

[§]Jozef Stefan (1835-1893), professor de física em Viena, enunciou a lei de radiação empiricamente em 1879. Seu aluno Ludwig Boltzmann (1844-1906) deduziu-a teoricamente dos princípios da termodinâmica em 1884. Boltzmann é mais conhecido por seu trabalho pioneiro em mecânica estatística.

soluções. Não existe fórmula geral para soluções de equações não lineares. Se você for capaz de integrar uma equação não linear, provavelmente vai obter uma equação definindo soluções implicitamente, em vez de explicitamente. Finalmente, as singularidades das soluções de equações não lineares só podem ser encontradas, em geral, resolvendo-se a equação e examinando-se a solução. É provável que as singularidades dependam tanto da condição inicial quanto da equação diferencial.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, determine (sem resolver o problema) um intervalo no qual a solução do problema de valor inicial dado certamente existe.

1. $(t-3)y' + (\ln t)y = 2t, \quad y(1) = 2$
2. $t(t-4)y' + y = 0, \quad y(2) = 1$
3. $y' + (\tan t)y = \sec t, \quad y(\pi) = 0$
4. $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2, \quad y(-3) = 1$
5. $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2, \quad y(1) = -3$
6. $(\ln t)y' + y = \cot t, \quad y(2) = 3$

Em cada um dos Problemas de 7 a 12, diga onde, no plano ty , as hipóteses do Teorema 2.4.2 são satisfeitas.

$$\begin{array}{ll} 7. y' = \frac{t-y}{2t+5y} & 8. y' = (1-t^2-y^2)^{1/2} \\ 9. y' = \frac{\ln|ty|}{1-t^2+y^2} & 10. y' = (t^2+y^2)^{3/2} \\ 11. \frac{dy}{dt} = \frac{1+t^2}{3y-y^2} & 12. \frac{dy}{dt} = \frac{(\cot t)y}{1+y} \end{array}$$

Em cada um dos Problemas de 13 a 16, resolva o problema de valor inicial dado e determine como o intervalo no qual a solução existe depende do valor inicial y_0 .

- $$\begin{array}{ll} 13. y' = -4t/y, \quad y(0) = y_0 & 14. y' = 2ty^2, \quad y(0) = y_0 \\ 15. y' + y^3 = 0, \quad y(0) = y_0 & 16. y' = t^2/y(1+t^3), \quad y(0) = y_0 \end{array}$$

Em cada um dos Problemas de 17 a 20, desenhe um campo de direções e desenhe (ou esboce) o gráfico de diversas soluções da equação diferencial dada. Descreva como as soluções parecem se comportar quando t aumenta e como seus comportamentos dependem do valor inicial y_0 quando $t = 0$.

17. $y' = ty(3-y)$
18. $y' = y(3-ty)$
19. $y' = -y(3-ty)$
20. $y' = t-1-y^2$
21. Considere o problema de valor inicial $y' = y^{1/3}, y(0) = 0$, do Exemplo 3 no texto.
 - (a) Existe uma solução que contém o ponto $(1,1)$? Se existe, encontre-a.
 - (b) Existe uma solução que contém o ponto $(2,1)$? Se existe, encontre-a.
 - (c) Considere todas as soluções possíveis do problema de valor inicial dado. Determine o conjunto de valores que essas soluções têm em $t = 2$.
22. (a) Verifique que ambas as funções $y_1(t) = 1-t$ e $y_2(t) = -t^2/4$ são soluções do problema de valor inicial

$$y' = \frac{-t + (t^2 + 4y)^{1/2}}{2}, \quad y(2) = -1.$$

Onde essas soluções são válidas?

- (b) Explique por que a existência de duas soluções para o problema dado não contradiz a unicidade no Teorema 2.4.2.
- (c) Mostre que $y = ct + c^2$, onde c é uma constante arbitrária, satisfaz a equação diferencial no item (a) para $t \geq -2c$. Se $c = -1$, a condição inicial também é satisfeita e obtemos a solução $y = y_1(t)$. Mostre que não existe escolha de c que fornece a segunda solução $y = y_2(t)$.
23. (a) Mostre que $\phi(t) = e^{2t}$ é uma solução de $y' - 2y = 0$ e que $y = c\phi(t)$ também é solução dessa equação para qualquer valor da constante c .
 - (b) Mostre que $\phi(t) = 1/t$ é uma solução de $y' + y^2 = 0$ para $t > 0$, mas que $y = c\phi(t)$ não é solução dessa equação, a menos que $c = 0$ ou $c = 1$. Note que a equação no item (b) é não linear, enquanto a no item (a) é linear.
24. Mostre que se $y = \phi(t)$ é uma solução de $y' + p(t)y = 0$, então $y = c\phi(t)$ também é solução para qualquer valor da constante c .
25. Seja $y = y_1(t)$ uma solução de

$$y' + p(t)y = 0, \quad (i)$$

e seja $y = y_2(t)$ uma solução de

$$y' + p(t)y = g(t). \quad (\text{ii})$$

Mostre que $y = y_1(t) + y_2(t)$ também é solução da Eq. (ii).

26. (a) Mostre que a solução (7) da equação linear geral (1) pode ser colocada na forma

$$y = cy_1(t) + y_2(t), \quad (\text{i})$$

onde c é uma constante arbitrária. Identifique as funções y_1 e y_2 .

- (b) Mostre que y_1 é uma solução da equação diferencial

$$y' + p(t)y = 0, \quad (\text{ii})$$

correspondente a $g(t) = 0$.

- (c) Mostre que y_2 é solução da equação linear geral (1). Veremos mais tarde (por exemplo, na Seção 3.5) que soluções de equações lineares de ordem mais alta têm um padrão semelhante ao da Eq. (i).

Equações de Bernoulli. Algumas vezes é possível resolver uma equação não linear fazendo uma mudança da variável dependente que a transforma em uma equação linear. O exemplo mais importante de tal equação é da forma

$$y' + p(t)y = q(t)y^n,$$

e é chamada de equação de Bernoulli em honra a Jakob Bernoulli. Os Problemas de 27 a 31 tratam de equações desse tipo.

27. (a) Resolva a equação de Bernoulli quando $n = 0$ e $n = 1$.

- (b) Mostre que, se $n \neq 0$ e $n \neq 1$, então a substituição $v = y^{1-n}$ reduz a equação de Bernoulli a uma equação linear. Esse método de solução foi encontrado por Leibniz em 1696.

Em cada um dos Problemas de 28 a 31 é dada uma equação de Bernoulli. Em cada caso, resolva-a usando a substituição mencionada no Problema 27(b).

28. $t^2y' + 2ty - y^3 = 0, \quad t > 0$

29. $y' = ry - ky^2, r > 0$ e $k > 0$. Esta equação é importante em dinâmica populacional, e é discutida em detalhes na Seção 2.5.

30. $y' = \varepsilon y - \sigma y^3, \varepsilon > 0$ e $\sigma > 0$. Esta equação aparece no estudo da estabilidade do fluxo de fluidos.

31. $dy/dt = (\Gamma \cos t + T)y - y^3$, onde Γ e T são constantes. Esta equação também aparece no estudo da estabilidade do fluxo de fluidos.

Coefficientes Descontínuos. Algumas vezes ocorrem equações diferenciais lineares com uma ou ambas as funções p e g tendo descontinuidades do tipo salto. Se t_0 é tal ponto de descontinuidade, é necessário resolver a equação separadamente para $t < t_0$ e para $t > t_0$. Depois, junta-se as duas soluções de modo que y seja contínua em t_0 . Isso é feito por uma escolha apropriada das constantes arbitrárias. Os dois problemas a seguir ilustram essa situação. Note em cada caso que é impossível fazer y' contínua em t_0 .

32. Resolva o problema de valor inicial

$$y' + 2y = g(t), \quad y(0) = 0,$$

onde

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

33. Resolva o problema de valor inicial

$$y' + p(t)y = 0, \quad y(0) = 1,$$

onde

$$p(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$

Se $(M_y - N_x)/N$ é uma função só de x , então existe um fator integrante μ que também só depende de x . Além disso, μ pode ser encontrado resolvendo-se a Eq. (27), que é linear e separável.

Um procedimento semelhante pode ser usado para se determinar uma condição sob a qual a Eq. (23) tenha um fator integrante que depende só de y ; veja o Problema 23.

EXEMPLO

4

Encontre um fator integrante para a equação

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \quad (19)$$

e depois resolva a equação.

Mostramos, no Exemplo 3, que esta equação não é exata. Vamos determinar se ela tem um fator integrante que só depende de x . Calculando $(M_y - N_x)/N$, vemos que

$$\frac{M_y(x, y) - N_x(x, y)}{N(x, y)} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}. \quad (28)$$

Logo, existe um fator integrante μ que só depende de x e satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}. \quad (29)$$

Então

$$\mu(x) = x. \quad (30)$$

Multiplicando a Eq. (19) por esse fator integrante, obtemos

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0. \quad (31)$$

Essa última equação é exata, e é fácil mostrar que suas soluções são dadas implicitamente por

$$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = c. \quad (32)$$

Soluções explícitas também podem ser encontradas prontamente, já que a Eq. (32) é quadrática em y .

Você pode verificar, também, que um segundo fator integrante para a Eq. (19) é

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xy(2x + y)},$$

e que a mesma solução é obtida, embora com mais dificuldade, se este fator integrante for usado (veja o Problema 32).

PROBLEMAS

Para cada equação nos Problemas de 1 a 12, determine se é ela exata. Se for, encontre a solução.

1. $(2x + 3) + (2y - 2)y' = 0$
2. $(2x + 4y) + (2x - 2y)y' = 0$
3. $(3x^2 - 2xy + 2)dx + (6y^2 - x^2 + 3)dy = 0$
4. $(2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x)y' = 0$
5. $\frac{dy}{dx} = -\frac{ax + by}{bx + cy}$
6. $\frac{dy}{dx} = -\frac{ax - by}{bx - cy}$
7. $(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x)dx + (e^x \cos y + 2 \cos x)dy = 0$
8. $(e^x \operatorname{sen} y + 3y)dx - (3x - e^x \operatorname{sen} y)dy = 0$
9. $(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \operatorname{sen} 2x + 2x)dx + (xe^{xy} \cos 2x - 3)dy = 0$
10. $(y/x + 6x)dx + (\ln x - 2)dy = 0, \quad x > 0$
11. $(x \ln y + xy)dx + (y \ln x + xy)dy = 0; \quad x > 0, \quad y > 0$
12. $\frac{x dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$

Em cada um dos Problemas 13 e 14, resolva o problema de valor inicial dado e determine, pelo menos aproximadamente, onde a solução é válida.

13. $(2x - y)dx + (2y - x)dy = 0, \quad y(1) = 3$
14. $(9x^2 + y - 1)dx - (4y - x)dy = 0, \quad y(1) = 0$

Em cada um dos Problemas 15 e 16, encontre o valor de b para o qual a equação dada é exata e depois a resolva usando este valor de b .

15. $(xy^2 + bx^2y)dx + (x+y)x^2dy = 0$
 16. $(ye^{2xy} + x)dx + bxe^{2xy}dy = 0$
 17. Suponha que a Eq. (6) satisfaz as condições do Teorema 2.6.1 em um retângulo R e é, portanto, exata. Mostre que uma função $\psi(x,y)$ possível é

$$\psi(x,y) = \int_{x_0}^x M(s,y_0)ds + \int_{y_0}^y N(x,t)dt,$$

onde (x_0, y_0) é um ponto em R .

18. Mostre que qualquer equação separável

$$M(x) + N(y)y' = 0$$

também é exata.

Em cada um dos Problemas de 19 até 22, mostre que a equação dada não é exata, mas torna-se exata quando multiplicada por um fator integrante. Depois resolva a equação.

19. $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0, \quad \mu(x,y) = 1/xy^3$
 20. $\left(\frac{\operatorname{sen} y}{y} - 2e^{-x} \operatorname{sen} x\right)dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right)dy = 0, \quad \mu(x,y) = ye^x$
 21. $ydx + (2x - ye^y)dy = 0, \quad \mu(x,y) = y$
 22. $(x+2)\operatorname{sen} y dx + x \cos y dy = 0, \quad \mu(x,y) = xe^x$
 23. Mostre que, se $(N_x - M_y)/M = Q$, onde Q é uma função só de y , então a equação diferencial

$$M + Ny' = 0$$

tem um fator integrante da forma

$$\mu(y) = \exp \int Q(y)dy.$$

24. Mostre que, se $(N_x - M_y)/(xM - yN) = R$, onde R só depende do produto xy , então a equação diferencial

$$M + Ny' = 0$$

tem um fator integrante da forma $\mu(xy)$. Encontre uma fórmula geral para este fator integrante.

Em cada um dos Problemas de 25 a 31, encontre um fator integrante e resolva a equação.

25. $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0 \quad 26. y' = e^{2x} + y - 1$
 27. $dx + (x/y - \operatorname{sen} y)dy = 0 \quad 28. ydx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$
 29. $e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)dy = 0$
 30. $[4(x^3/y^2) + (3/y)]dx + [3(x/y^2) + 4y]dy = 0$
 31. $\left(3x + \frac{6}{y}\right) + \left(\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = 0$

Sugestão: veja o Problema 24.

32. Resolva a equação diferencial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$

usando o fator integrante $\mu(x,y) = [xy(2x+y)]^{-1}$. Verifique que a solução é a mesma obtida no Exemplo 4 com um fator integrante diferente.

2.7 Aproximações Numéricicas: o Método de Euler

Lembre dois fatos importantes sobre o problema de valor inicial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

Primeiro, se f e $\partial f / \partial y$ são contínuas, então o problema de valor inicial (1) tem uma única solução $y = \phi(t)$ em algum intervalo contendo o ponto inicial $t = t_0$. Segundo, não é possível, em geral, encontrar a solução