UNIVERSIDADE FEDERAL TECNOLÓGICA DO PARANÁ
VARIÁVEIS COMPLEXAS
LISTA Nro. 3

Prof. Dr. Iván Gonzáles

25 de abril de 2022

1 Arcos e Contornos

Identifique as curvas dadas abaixo:

(1) $z = 3t + it^2,\ -\infty < t < \infty,$

(2) $z = 3t^2 + 5it,\ -\infty < t < \infty,$

(3) $z = r(\cos t + i\sin t),\ -\pi/4 < t < \pi,\ r > 0,$

(4) $z = 1/t + it,\ 1 < t < \infty,$

(5) $z = t + 2i/t,\ -\infty < t < 0,$

(6) $z = t + i\sqrt{1-t^2},\ -1 < t < 1,$

(7) $|z - 2i| = 2.$

(8) Qual é a equação da reta em $\mathbb{C}$ que liga os pontos 0 até $1+i$?

(9) Qual é a equação da reta que liga os pontos $1+i$ até 0?

(10) Qual é a equação da reta que liga os pontos $z_1 = 1+2i$ a $z_2 = 2+5i$?

(11) Qual é a equação da circunferência com centro em $z_0 = i$ e raio $r = 1$?

2 Integral de Contorno

(1) Calcule $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f(z)dz$ onde:

(a) $f(z) = y - x - 3x^2 i$, onde C é o segmento de reta de $z = 0$ a $z = 1+i$.

(b) $f(z) = y - x - 3x^2 i$, onde C é o segmento de reta de $z = 0$ a $z = i$ seguido do segmento de reta de $z = i$ a $z = 1+i$.

(c) $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$, onde C é o semicírculo $z = 2e^{i\theta}$, com $0 \le \theta \le \pi$.

(d) $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$, onde C é o semicírculo $z = 2e^{i\theta}$, com $0 \le \theta \le -\pi$.

(e) $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$, onde C é o semicírculo $z = 2e^{i\theta}$, com $-\pi \le \theta \le \pi$.

(f) $f(z) = z - 1$, onde C é o semicírculo $z - 1 = e^{i\theta}$, com $0 \le \theta \le \pi$.

(g) $f(z) = z - 1$, onde C é o segmento sobre o eixo real que liga $z = 0$ a $z = 2$.

(h) $f(z) = |z|$, $\mathcal{C} = \{z = re^{i\theta},\ \pi/2 \le \theta \le \pi\}$.

(i) $f(z) = z^2$, $\mathcal{C} = \{z = re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi\}$.

(j) $f(z) = z^2$, $\mathcal{C} = \{z = re^{i\theta},\ -\pi \le \theta \le \pi\}$.

(k) $f(z) = \sqrt{z}$, $\mathcal{C} = \{z = re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

(l) $f(z) = \sqrt{z}$, $\mathcal{C} = \{z = re^{i\theta},\ -\pi \leq \theta \leq \pi\}$.

(m) $f(z) = |z|$, ao longo do segmento de reta de zero até $-2+3i$.

(n) $f(z) = x^2 - y^2 + i(x - y^2)$, ao longo do segmento de reta de zero até $3+2i$.

(o) $f(z) = y - x^2$, ao longo dos caminhos OAC e OBC, onde $O = (0,0)$, $A = (2,0)$, $B = (0,1)$ e $C = (2,1)$.

(2) Cálcule $\int_{\mathcal{C}} e^z dz$ nos caminhos indicados:

(a) C é o segmento de reta ligando $z = \pi i$ a $z = 1$.

(b) A poligonal ao longo dos eixos coordenados ligando $z = \pi i$ a $z = 1$ (isto é, o segmento que liga $z = \pi i$ a $z = 0$ seguido do segmento que liga $z = 0$ a $z = 1$.)

(3) Se $\mathcal{C}$ é um caminho qualquer ligando os pontos z_1 a z_2 mostre que $\int_{\mathcal{C}} dz = z_2 - z_1$.

(4) Sejam F e f funções analíticas numa região simplesmente conexa contendo um contorno $\mathcal{C}$, e tais que $f = F'$. Use as equações de Cauchy–Riemann para provar que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1),$$

onde z_1 e z_2 são os pontos inicial e final do contorno $\mathcal{C}$, por onde se vê que a integral só depende dos pontos inicial e final, e não de $\mathcal{C}$.

(5) Use o resultado anterior para provar que, se n for inteiro e $\mathcal{C}$ um contorno fechado envolvendo a origem uma vez no sentido anti-horário, então

$$\oint_{\mathcal{C}} z^n dz = 0 \ \ se \ \ n \neq -1 \quad e \quad \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

(6) Mostre que $\oint_{\mathcal{C}} \log z dz = 2\pi i$, onde $\mathcal{C}$ é um contorno fechado envolvendo a origem uma vez no sentido positivo.

3 Teorema de Cauchy

Verifique se são nulas as seguintes integrais $\int_{\mathcal{C}} f(z)dz$:

(1) $f(z) = \frac{z+1}{z-3}$, onde $\mathcal{C}$ é o círculo $|z| = 2$.

(2) $f(z) = \frac{3z^2}{z+2i}$, onde $\mathcal{C}$ é o círculo $|z| = \frac{3}{2}$.

(3) $f(z) = \frac{3ze^z}{z^2+3}$, onde $\mathcal{C}$ é o círculo $|z| = \frac{5}{4}$.

(4) $f(z) = \frac{\ln(z-2i)}{z+2}$, onde $\mathcal{C}$ é o quadrado de vértices $\pm 1 \pm i$.

(5) $f(z) = \frac{\ln(z+1)}{z^2-9}$, onde $\mathcal{C}$ é o círculo $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

(6) $f(z) = \frac{\ln(z+i)}{z^2?9}$, onde $\mathcal{C}$ é o círculo $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

(7) $f(z) = \frac{\ln(z-1+i)}{z^2+9}$, onde $\mathcal{C}$ é o quadrado de vértices $\pm 1 \pm i$.

(8) $f(z) = \frac{1}{z^2}$, onde $\mathcal{C}$ é qualquer caminho que envolve a origem uma vez, no sentido positivo.

(9) Calcule a integral de $f(z) = 1/z$ sobre o caminho $\mathcal{C}$ de $-i$ até i passando pelo semiplano $Re(z) > 0$.

(10) Calcule a integral de $f(z) = 1/z$ sobre o caminho $\mathcal{C}$ de $-i$ até i passando pelo semiplano $Re(z) < 0$.

(11) Combine os resultados dos exercícios (9) e (10) para obter $\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z}$, onde $\mathcal{C}$ é qualquer

caminho que envolve a origem uma vez no sentido positivo.

(12) Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R contendo o ponto z_0. Prove que

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0),$$

onde $\mathcal{C}$ é qualque contorno fechado que envolve a origem uma vez no sentido positivo.

(13) Mostre que $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1} = 0.$

(14) Mostre que $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} = 0.$

(15) Mostre que $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-z+iz-i} = 0.$

4 Fórmula de Cauchy

(1) Use a fórmula da integral de Cauchy para calcular as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\oint_{|z-1|=2} \frac{z}{z-2} dz$

(b) $\displaystyle\oint_{|z-2i|=2} \frac{\sin z}{z-i} dz$

(c) $\displaystyle\oint_{|z-1|=2} \frac{e^{iz}}{z+i} dz$

(d) $\displaystyle\oint_{|z-1|=2} \frac{e^{iz}}{\pi-2z} dz$

(e) $\displaystyle\oint_{|z+1|=2} \frac{z}{z+2} dz$

(f) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z\cos z}{z-i} dz$

(g) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{iz}{1-2z} dz$

(h) $\displaystyle\oint_{|z-1|=2} \frac{e^z}{z^2-4} dz$

(i) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\sqrt{z+5}}{1+2z} dz$

(2) $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^2+1}$ onde $\mathcal{C}$ é o quadrado de vértices $0, 2i, \pm 1 + i$.

(3) $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^2+1}$ onde $\mathcal{C}$ é o quadrado de vértices $0, -2i, \pm 1 - i$.

(4) $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{ze^z}{z^2-2z-3} dz$ onde $\mathcal{C}$ é o losango de vértices $\pm 2, \pm i$.

(5) Ache o valor da integral de $g(z)$ sobre a circunferência $|z-i| = 2$, em sentido positivo, para

(a) $g(z) = \frac{1}{z^2+4}$ (b) $g(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$

(6) Use a fórmula da derivada para calcular a integral

$$\oint_{|z|=3} \frac{cos(z^2+3z-1)}{(2z+3)^2} dz.$$

(7) Calcule $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z^2+z+i}{(4z-i)^3} dz.$

(8) Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R, e seja $\mathcal{C}$ um contorno fechado simples contido em R. Prove que, para z interior a $\mathcal{C}$,

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f'(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta.$$

Prove, mais geralmente, que

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f^{(n)}(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = n! \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta.$$