ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS
ENSINO MÉDIO

MANUAL DO PROFESSOR

Matemática Interligada

Estatística, análise combinatória e Probabilidade

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO – VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO

CÓDIGO DA COLEÇÃO: 0182P21202

CÓDIGO DA COLEÇÃO: 0182P21202137

Editora responsável
Thais Marcelle de Andrade

editora scipione

ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS
ENSINO MÉDIO

Matemática Interligada

Estatística, análise combinatória e Probabilidade

MANUAL DO PROFESSOR

Editora responsável
Thais Marcelle de Andrade

Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR)

Especialista em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR)

Editora de materiais didáticos da área de Matemática, possui experiência como professora de Matemática em escolas públicas e particulares

1ª edição, São Paulo, 2020

editora scipione

editora scipione

Presidência: Paulo Serino
Direção editorial: Lauri Cericato
Gestão de projeto editorial: Heloisa Pimentel
Coordenação de área: Juliana Grassmann dos Santos, Marcela Maris
Projeto e produção editorial: Scriba Soluções Editoriais
Edição: Sheila C. Molina, Thais Marcelle de Andrade
Assistência editorial: Guilherme Francisco de Almeida, Henrique Gonçalves Menck, Tatiana Aleixo Bologna
Planejamento e controle de produção editorial: Camila Rumiko Minaki Hoshi (ger.), Priscilla de Freitas Cornelsen Rosa (superv.), Daiana Fernanda Leme de Melo (coord.)
Preparação e revisão: Equipe Scriba
Projeto gráfico e *design*: Marcela Pialarissi
Arte: André Leandro Silva (ger.), Tamires Rose Azevedo (coord.), Ingridhi Borges (edição de arte), Leandro Júnior Pimenta e Leda Teodorico (diagramação)
Iconografia e tratamento de imagens: Erick Lopes de Almeida (coord.), André Silva Rodrigues (pesquisa iconográfica), Johannes de Paulo (tratamento de imagens)
Licenciamento de conteúdos de terceiros: Erick Lopes de Almeida (coord.), Marissol Martins Maia
Capa: Luis Vassallo
Foto de capa: Photodisc/Getty Images

Avenida Paulista, 901, 4º andar
Jardins – São Paulo – SP – CEP 01310-200
Tel.: 4003-3061
www.edocente.com.br
atendimento@aticascipione.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Matemática interligada : estatística, análise combinatória e probabilidade / obra coletiva ; editora responsável Thais Marcelle de Andrade. -- 1. ed. -- São Paulo : Scipione, 2020.

Suplementado pelo manual do professor
Bibliografia
ISBN 978-65-5763-032-7 (aluno)
ISBN 978-65-5763-033-4 (professor)

1. Matemática e suas tecnologias (Ensino Médio) 2. Matemática (Ensino Médio) 3. Estatística 4. Análise combinatória 5. Probabilidades I. Andrade, Thais Marcelle de.

20-2803 CDD 510.7

Angélica Ilacqua CRB-8/7057

2020
Código da obra CL 719990
CAE 729682 (AL) / 729683 (PR)
1ª edição
1ª impressão
De acordo com a BNCC.

Impressão e acabamento

Elaboração de conteúdos

Thais Marcelle de Andrade
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).
Especialista em Educação Matemática pela UEL-PR.
Editora de materiais didáticos da área de Matemática, possui experiência como professora de Matemática em escolas públicas e particulares.

Victor Hugo dos Santos Gois
Licenciado em Matemática pela UEL-PR.
Especialista em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Editor de materiais didáticos da área de Matemática.

Elias Borges da Silva
Licenciado em Matemática pela UEL-PR.
Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela UEL-PR.
Possui experiência como professor de Matemática em escolas públicas.

Eduardo Henrique Gomes Tavares
Bacharel em Matemática pela UEL-PR.
Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela UEL-PR.
Editor e produtor de conteúdo de materiais didáticos da área de Matemática.

Keila Tatiana Boni
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP-PR).
Licenciada em Física pela Universidade Estadual de Maringá (UEM-PR).
Especialista em Educação Inclusiva pela Universidade Castelo Branco (UCB-RJ).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL-PR.
Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL-PR.
Possui experiência como professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental e do Ensino Superior.

Danielly Kaspary
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS).
Mestre em Educação Matemática pela UFMS.
Colabora em pesquisas do Grupo de Estudo em Didática da Matemática da UFMS e na produção de materiais didáticos da área de Matemática.

Apresentação

As situações cotidianas que demandam de nós alguma decisão, interpretação e análise crítica das informações, aliadas ao rápido avanço da tecnologia presente em diferentes setores, evidenciam a necessidade de dominarmos alguns conhecimentos específicos, sobretudo na área de Matemática e suas Tecnologias.

O estudo da Matemática contribui para o desenvolvimento de estratégias e do raciocínio lógico e incentiva a criatividade, entre outros aspectos. Por isso, oferecemos a você um livro que o leve a perceber as várias relações da Matemática com outras áreas do conhecimento e suas implicações na realidade.

Neste livro, há uma diversidade de assuntos relacionados a situações cotidianas envolvendo conteúdos matemáticos básicos e necessários para o Ensino Médio. Além disso, você encontrará tarefas em que terá a oportunidade de explorar, de maneira aprofundada, os conceitos estudados.

Por fim, é importante ressaltar que esta obra foi elaborada com o objetivo de contribuir para um melhor ensino da Matemática. Por isso, esperamos que você, ao utilizá-la, tenha um papel ativo na construção de seu conhecimento matemático e que ela contribua para sua formação cidadã.

Bons estudos.

Conheça seu livro

Os conteúdos de seu livro são apresentados em capítulos e, nesses capítulos, você vai encontrar várias seções, algumas envolvendo tarefas, outras contendo textos, gráficos e infográficos com informações sobre diversos temas.

A seguir, é apresentada a descrição de cada uma dessas seções.

Abertura do capítulo

No início de cada capítulo, são apresentadas duas páginas que têm o papel de introduzir o conteúdo a ser estudado. Com base em um texto relacionado a diferentes assuntos e situações, você é convidado a responder a algumas questões que visam motivá-lo a refletir sobre os conteúdos a serem trabalhados no decorrer do capítulo, além de explorar seus conhecimentos prévios.

Você cidadão

Em alguns casos, você será convidado a responder questões que contribuem para sua formação cidadã, refletindo sobre questões de seu cotidiano e de toda a sociedade. Por isso, essas tarefas recebem o destaque Você cidadão.

Conversando

Nessa seção, você é convidado, por meio de algumas questões, a um diálogo inicial com seus colegas e seu professor sobre os conteúdos abordados e alguns temas e situações relacionados a eles.

Problemas e exercícios resolvidos

Você encontrará nessa seção resoluções de tarefas, cujo objetivo é contribuir para o desenvolvimento do repertório individual de estratégias pessoais de resolução, tanto de tarefas propostas no decorrer do capítulo quanto de questões da sociedade ou outras com as quais se depare no cotidiano particular.

Você produtor

Há tarefas em que você precisará elaborar um problema com base em imagens ou informações ou então realizar algumas construções. Essas tarefas receberão o destaque Você produtor.

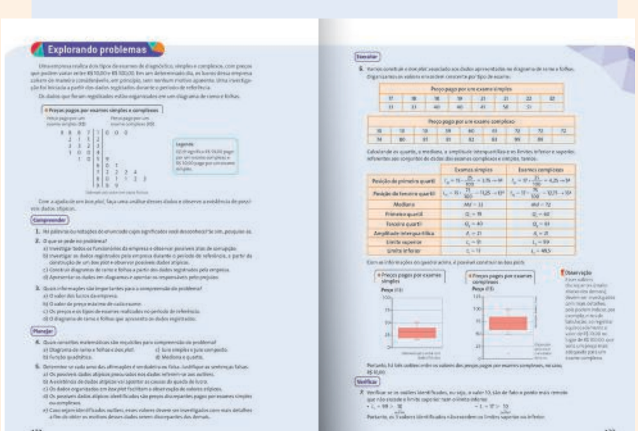
Em grupo

Em alguns momentos, você será convidado a resolver, com dois ou mais colegas, algumas tarefas propostas. Essas tarefas terão o destaque Em grupo.

Explorando problemas

Nessa seção, são apresentadas maneiras de organizar o pensamento para resolver um problema por meio de raciocínio, representação, comunicação e argumentação.

Nela, serão apresentadas resoluções etapa por etapa de tarefas em que se faz necessário mobilizar conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução.



Problemas e exercícios propostos

Nessa seção, são apresentadas tarefas referentes ao conteúdo em estudo. Essas tarefas vão ajudá-lo a pôr em prática o que está aprendendo e a desenvolver novos conhecimentos mediante situações desafiadoras e, também, diferentes estratégias de resolução.

Desafio

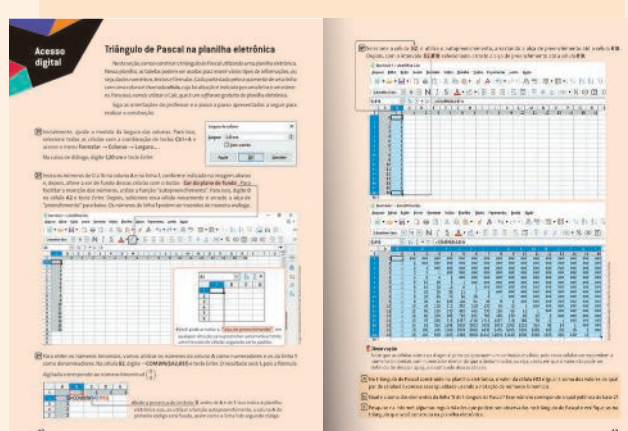
Algumas tarefas propostas envolvem resoluções que vão além da simples aplicação do conteúdo estudado. Por isso, elas recebem o destaque Desafio. Para resolver essas tarefas, você precisará desenvolver suas próprias estratégias.

Finalizando a conversa

Nessa seção, são apresentadas questões que o levarão a fazer uma análise sobre o que foi estudado no capítulo. Ao respondê-las, você poderá expor suas ideias acerca do assunto.

Acesso digital

Apresentada em alguns capítulos, essa seção traz recursos, como *softwares* e *sites*, que possibilitam o desenvolvimento de atividades relacionadas aos conteúdos trabalhados. Ao final da seção, são propostas algumas questões com base nas informações apresentadas.

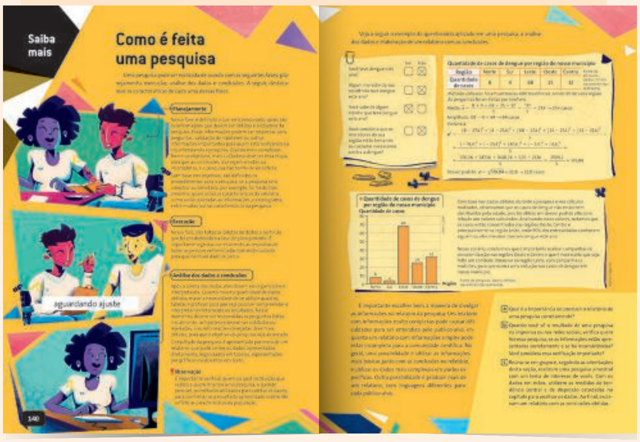


Saiba mais

Nessa seção, são apresentados textos e imagens envolvendo o conteúdo em estudo, relacionados a outras áreas do conhecimento, além de curiosidades referentes ao conteúdo. No final, há algumas questões que você vai responder com base nas informações apresentadas.

Conectando ideias

Nessa seção, você é convidado a ler e interpretar infográficos envolvendo diferentes temas e situações e, com base nisso, a responder a algumas questões, sendo motivado a refletir sobre o que estudou no decorrer do capítulo.



Objetivos e competências

Objetivos gerais

Este volume tem o compromisso de lhe proporcionar o desenvolvimento da autonomia, do pensamento crítico e da capacidade de tomar decisões, com o intuito de que você seja o protagonista da construção de sua aprendizagem.

Sendo assim, os objetivos gerais deste volume são:

- Compreender os métodos de contagem que constituem a análise combinatória e binômio de Newton.
- Reconhecer o triângulo de Pascal como uma disposição dos números binomiais de forma ordenada.
- Relacionar o conhecimento sobre análise combinatória a outras áreas do conhecimento.
- Identificar as diferenças entre os conceitos de arranjo, permutação e combinação.
- Compreender o conceito de probabilidade.
- Identificar eventos probabilísticos e organizar e calcular a probabilidade desses eventos.
- Familiarizar-se com os termos utilizados na estatística.
- Esboçar, ler e interpretar representações gráficas de dados estatísticos de ocorrências na vida cotidiana.
- Analisar dados estatísticos por meio de medidas de tendência central e de dispersão.
- Relacionar os conceitos de estatística e probabilidade.
- Reconhecer situações do dia a dia cujas informações estejam relacionadas à estatística.
- Resolver situações-problema que envolvam os conhecimentos matemáticos apresentados relacionados a situações do cotidiano e a outras áreas do conhecimento.

Justificativa

Os conceitos e procedimentos matemáticos estão presentes em diversos momentos de nossas vidas: de possíveis combinações de um conjunto de peças de roupas que você vai escolher a decisões mais sérias, como a probabilidade de uma gravidez indesejada, ao adotar determinado método contraceptivo.

Neste volume, iniciamos com os procedimentos que constituem a análise combinatória, trazendo diversos exemplos que lhe serão úteis para determinar possibilidades de combinações em situações de contagem.

O conteúdo de probabilidade é tratado de modo que você compreenda suas aplicabilidades e características, estudando os cálculos que nos possibilitam determinar qual é a chance de ocorrência de certos acontecimentos.

Por meio do estudo da Estatística, você vai aprofundar seus conhecimentos sobre gráficos, interpretando corretamente os dados neles apresentados, e também compreender como é realizada uma pesquisa. Além disso, você conhecerá como um gráfico pode ser manipulado para distorcer a informação, a fim de que torne-se mais apto a identificar tais distorções em notícias apresentadas pela mídia.

Competências

Para contemplar as necessidades de formação dos alunos, toda esta coleção está centrada no desenvolvimento de Competências gerais da Educação Básica e específicas da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, assim como orienta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A seguir, apresentamos as competências gerais e as competências específicas das áreas de Matemática e suas Tecnologias e da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, cujo desenvolvimento é favorecido neste volume.

Competências gerais da Educação Básica

CG 3 Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

CG 4 Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

CG 5 Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

CG 6 Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

CG 7 Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

CG 8 Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

CG 9 Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

CG 10 Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio e Habilidades relacionadas

A seguir, foram organizadas as ocorrências das Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias discriminadas por cores. Para cada Competência específica, estão listadas as habilidades relacionadas a elas e que foram favorecidas neste volume.

CEMT 1 Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

CEMT 2 Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

CEMT 3 Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

CEMT 4 Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

CEMT 5 Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

CEMT 1	**EM13MAT102** • Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.	Capítulo 3
	EM13MAT106 • Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).	Capítulo 2
CEMT 2	**EM13MAT202** • Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.	Capítulo 3
CEMT 3	**EM13MAT310** • Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.	Capítulo 1
	EM13MAT311 • Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.	Capítulo 2
	EM13MAT312 • Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.	Capítulo 2
	EM13MAT316 • Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).	Capítulo 3
CEMT 4	**EM13MAT406** • Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.	Capítulo 3
	EM13MAT407 • Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.	Capítulo 3
CEMT 5	**EM13MAT511** • Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.	Capítulo 2 Capítulo 3

Competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias para o Ensino Médio

Além do compromisso com a área de Matemática, o trabalho com alguns conceitos ou tarefas desta coleção contribui para o desenvolvimento de aspectos de outras áreas do conhecimento, sobretudo de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Sendo assim, listamos a seguir as Competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias cujo trabalho é favorecido neste volume.

CECNT 1 Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.

CECNT 2 Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

Sumário

1 Análise combinatória e binômio de Newton ... 10

1. Introdução ... 12
2. Princípio fundamental da contagem ... 13
   Problemas e exercícios propostos ... 16
3. Fatorial ... 17
   Fatorial com a calculadora científica ... 17
   Problemas e exercícios resolvidos ... 18
   Problemas e exercícios propostos ... 18
4. Arranjo simples ... 19
   Quantidade de arranjos simples ... 19
   Arranjo simples com a calculadora científica ... 20
   Problemas e exercícios resolvidos ... 21
   Problemas e exercícios propostos ... 22
5. Permutação simples ... 23
   Problemas e exercícios resolvidos ... 23
   Problemas e exercícios propostos ... 24
6. Combinação simples ... 25
   Quantidade de combinações simples ... 25
   Combinação simples com a calculadora científica ... 27
   Problemas e exercícios resolvidos ... 27
   Problemas e exercícios propostos ... 29
7. Permutação com elementos repetidos ... 31
   Problemas e exercícios resolvidos ... 32
   Problemas e exercícios propostos ... 32
8. Triângulo de Pascal ... 33
   Problemas e exercícios resolvidos ... 35
   Problemas e exercícios propostos ... 36
9. Binômio de Newton ... 37
   Problemas e exercícios resolvidos ... 38
   Problemas e exercícios propostos ... 38
   Termo geral do binômio de Newton ... 39
   Problemas e exercícios resolvidos ... 39
   Problemas e exercícios propostos ... 41

Acesso digital ... 42
Saiba mais ... 44
Conectando ideias ... 46

2 Probabilidade ... 48

1. Introdução ... 50
   Problemas e exercícios propostos ... 52
2. Experimento aleatório, espaço amostral e eventos ... 53
   Experimento aleatório ... 53
   Espaço amostral ... 53
   Evento ... 54
   Problemas e exercícios resolvidos ... 55
   Problemas e exercícios propostos ... 57
3. Probabilidade em espaço amostral equiprovável ... 59
   Probabilidade de um evento não ocorrer ... 60
   Problemas e exercícios resolvidos ... 61
   Problemas e exercícios propostos ... 64
4. Probabilidade da união de eventos ... 66
   Problemas e exercícios resolvidos ... 67
   Problemas e exercícios propostos ... 68
5. Probabilidade condicional ... 69
   Eventos simultâneos ... 70
   Problemas e exercícios resolvidos ... 72
   Problemas e exercícios propostos ... 75
6. Lei binomial das probabilidades ... 78
   Problemas e exercícios resolvidos ... 80
   Problemas e exercícios propostos ... 81

Saiba mais ... 82
Conectando ideias ... 84

3 Estatística 86

1. Introdução 88

2. Termos da Estatística 91

População e amostra 91

Variável 92

Problemas e exercícios propostos 93

3. Distribuição de frequência 95

Frequência absoluta e frequência relativa 95

Frequência acumulada e frequência acumulada relativa 96

Problemas e exercícios resolvidos 97

Acesso digital 98

Problemas e exercícios propostos 100

Intervalo de classes 101

Problemas e exercícios propostos 104

4. Medidas de tendência central 105

Média aritmética $(\bar{x})$ 105

Problemas e exercícios resolvidos 107

Problemas e exercícios propostos 108

Moda (*Mo*) 110

Mediana (*Md*) 110

Problemas e exercícios resolvidos 111

Problemas e exercícios propostos 112

Separatrizes 113

Problemas e exercícios resolvidos 114

Problemas e exercícios propostos 115

5. Representação gráfica de dados estatísticos 116

Gráfico de barras 117

Problemas e exercícios propostos 118

Gráfico de linhas 119

Problemas e exercícios propostos 120

Gráficos de setores 121

Acesso digital 123

Problemas e exercícios propostos 124

Histograma 125

Problemas e exercícios propostos 126

Pictograma 127

Problemas e exercícios propostos 128

Box plot 129

Ramo e folhas 130

Problemas e exercícios propostos 131

Explorando problemas 132

6. Medidas de dispersão 134

Desvio médio (D_m) 134

Variância (σ^2) 135

Desvio padrão (σ) 136

Problemas e exercícios resolvidos 136

Problemas e exercícios propostos 138

Acesso digital 139

Saiba mais 140

7. Medidas de tendência central e de dispersão para dados agrupados 142

Problemas e exercícios propostos 144

8. Estatística e probabilidade 145

Problemas e exercícios resolvidos 146

Problemas e exercícios propostos 147

Saiba mais 148

Conectando ideias 150

Respostas 152

Sugestões de leitura para o aluno 157

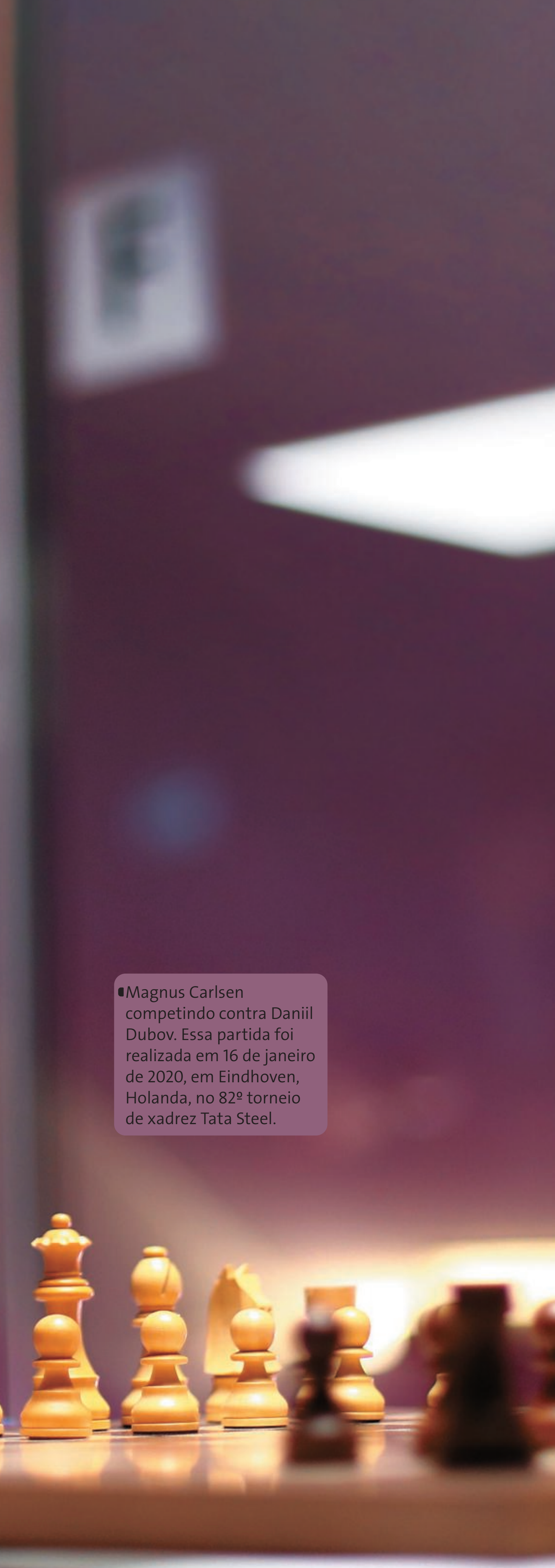
Bibliografia 159

Siglas 160

CAPÍTULO 1

Análise combinatória e binômio de Newton

Dean Mouhtaropoulos/Getty Images



Magnus Carlsen competindo contra Daniil Dubov. Essa partida foi realizada em 16 de janeiro de 2020, em Eindhoven, Holanda, no 82º torneio de xadrez Tata Steel.

a) Porque em uma partida de xadrez existem milhões de possibilidades e combinações de jogadas, exigindo que o jogador raciocine e calcule qual é o melhor movimento a ser feito, prevendo também as próximas jogadas.

b) Sua capacidade de avaliar inúmeras combinações e memorizar milhares de jogadas, imaginando a organização do tabuleiro até 20 lances à frente.

c) Resposta pessoal. Possível resposta: desenvolvimento do raciocínio matemático, da criatividade, da concentração, da capacidade de avaliação, da autoconfiança na tomada de decisões, disciplina, responsabilidade, entre outros.

Xadrez

Um jogo de tabuleiro com 32 peças (16 para cada participante), que simula um conflito entre dois exércitos, exige estratégia e tática, e tem por objetivo capturar o rei do adversário: esse é o xadrez. Praticado em todo o mundo, esse jogo conta com seis formatos característicos para as peças, tendo cada uma um movimento específico. Com isso, o jogador tem milhões de possibilidades e combinações de jogadas em uma partida, exigindo dele concentração, raciocínio e capacidade de cálculo.

O número um do *ranking* da Federação Internacional de Xadrez e um dos maiores jogadores da atualidade é o norueguês Magnus Carlsen, cujo "grande ídolo" nesse esporte é o computador, devido à capacidade de realizar cálculos precisos e com rapidez. Nascido em 30 de novembro de 1990, Magnus Carlsen viu seu gosto pelo xadrez surgir como um *hobby* precoce, aprendeu a jogar com 5 anos de idade. Com o tempo, desenvolveu uma incrível capacidade de avaliar inúmeras combinações e memorizar milhares de jogadas, imaginando a organização do tabuleiro até 20 lances à frente.

a Por que uma partida de xadrez exige raciocínio e capacidade de cálculo dos jogadores?

b Que características fazem de Magnus Carlsen um grande jogador de xadrez?

c Em sua opinião, que tipo de benefícios a prática do xadrez pode proporcionar à pessoa que o pratica?

1 Introdução 12
2 Princípio fundamental da contagem 13
3 Fatorial.. 17
4 Arranjo simples.............................. 19
5 Permutação simples 23
6 Combinação simples 25
7 Permutação com elementos repetidos 31
8 Triângulo de Pascal 33
9 Binômio de Newton 37

1 Introdução

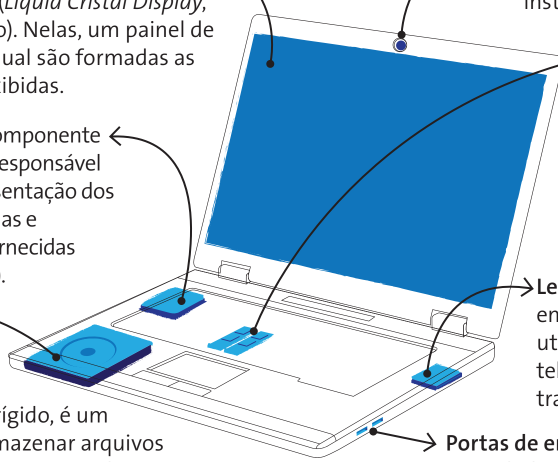
Na página anterior, vimos que existem milhões de possibilidades e combinações de jogadas em uma partida de xadrez. De maneira semelhante, também podemos comparar essa situação com o caso em que é necessário montar um computador, no qual é possível obter várias possibilidades de configuração. De acordo com as necessidades do usuário, algumas de suas partes físicas, chamadas *hardwares*, precisam ser mais ou menos potentes, visto que a escolha inadequada de uma delas pode aumentar de maneira significativa o custo do computador sem a real necessidade.

BNCC
- **CG 5**
- **CECNT 1**
- **CECNT 2**
- **CEMT 3**
- **EM13MAT310**

Veja no infográfico alguns dos *hardwares* que compõem um computador.

Tela de LED: As telas de LED (*Light-Emitting Diode*, ou diodo emissor de luz) são uma evolução das telas de LCD (*Liquid Cristal Display*, ou display de cristal líquido). Nelas, um painel de LED ilumina uma tela, na qual são formadas as imagens que devem ser exibidas.

Processador: É o principal componente de um computador, sendo responsável pelo processamento e apresentação dos dados. Nele, são interpretadas e executadas as instruções fornecidas pelos aplicativos (*softwares*).



HD: O *Hard Disk*, ou disco rígido, é um sistema que possibilita armazenar arquivos permanentemente, de maneira que eles não sejam perdidos quando o computador é desligado.

Webcam: É uma câmera de vídeo que capta imagens, transferindo-as de modo instantâneo para o computador.

Memória RAM: A *Random Access Memory*, ou memória de acesso aleatório, é uma memória temporária (volátil). Permite tanto a leitura como a gravação e a regravação de dados. Quando o computador é desligado, as informações armazenadas nessa memória são apagadas.

Leitor de cartões: Dispositivo que lê e grava dados em cartões de memória, os quais, em geral, são utilizados em *videogames*, câmeras digitais, telefones celulares, além de servir para transportar dados de um computador para outro.

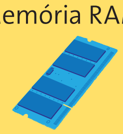
Portas de entrada e saída: Permitem a conexão de outros tipos de *hardwares* ao computador, como dispositivos de armazenamento externo, de áudio, de vídeo, entre outros.

Para montar um computador, Carolina pretende escolher algumas peças. Uma das lojas que ela visitou ofereceu algumas opções, conforme indicado a seguir, além do *mouse* e do teclado que já estão inclusos na compra.

Processador

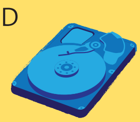
- 3.5 GHz
- 3.6 GHz
- 3.7 GHz
- 3.8 GHz
- 3.9 GHz

Memória RAM



- 4 GB
- 8 GB
- 16 GB

HD



- 1 TB
- 2 TB
- 3 TB
- 4 TB

Acessórios

- Monitor 14''
- Monitor 14'', *webcam* e *bluetooth*
- Monitor 15'', *webcam* e *bluetooth*
- Monitor 15'', *webcam*, leitor de cartões e *bluetooth*

Ilustrações: Emiliano Cavalcante

- De quantas maneiras distintas Carolina pode montar um computador nessa loja, sabendo que ela pode escolher um processador, uma memória RAM, um HD e uma das opções de acessórios? Deixe que os alunos tentem resolver essa situação. Depois, considerando as estratégias de resoluções propostas por eles, diga-lhes que podemos responder a essa pergunta por meio do seguinte cálculo: $5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 240$, ou seja, 240 maneiras.

Para responder a essa questão, utilizamos o princípio fundamental da contagem, assunto que será estudado a seguir.

Neste capítulo, vamos estudar uma parte da Matemática que envolve os métodos de contagem, chamada **Análise combinatória**, um recurso operacional chamado **fatorial** e o **binômio de Newton**.

Conversando

c) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que para cada tipo de processador há três opções de memória, com quatro opções de HD e quatro opções de acessórios. Ao combinar as opções entre si, obtém-se o total de maneiras distintas para montar o computador. Para isso, multiplica-se o número de processadores pelo de opções de memória, opções de HD e opções de acessórios, isto é, $5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 240$.

a) Cite outras situações, parecidas com a apresentada na página anterior, em que é necessário realizar escolhas entre várias opções. Resposta pessoal. Possíveis respostas: escolha de saladas com sucos; escolha de modelo de bicicleta, cores e acessórios.

b) O que você entende por Análise combinatória? Resposta pessoal.

c) Explique para um colega sua estratégia para responder à questão da página anterior.

d) Em sua opinião, qual é a importância de calcular a quantidade de possibilidades diferentes acerca de uma situação? Resposta pessoal.

e) Vamos supor que Carolina optasse pelo processador de 3.8 GHz. De quantas maneiras distintas ela ainda poderia montar um computador nessa loja, sabendo que ela também pode escolher uma memória RAM, um HD e uma das opções de acessórios? 48 maneiras

2 Princípio fundamental da contagem

Dois dos principais conceitos estudados em Análise combinatória são o **princípio aditivo** e o **princípio multiplicativo** da contagem.

Analise a seguinte situação.

- Saulo pretende comprar um único par de calçados em uma loja que disponibiliza 6 modelos de pares de tênis, 4 modelos de pares de sapato e 3 modelos de pares de chinelo. Quantas possibilidades Saulo tem se escolher apenas um par de calçados nessa loja?

Proponha aos alunos a situação apresentada antes de abordá-la no livro, a fim de que, em duplas, tentem resolvê-la. Depois, considerando as estratégias e resoluções propostas e desenvolvidas por eles, apresente as explicações encontradas nesta página.

Para determinar quantos são os calçados disponíveis para a escolha de Saulo, podemos analisar o esquema representado a seguir.

Ilustrações: Emiliano Cavalcante

6 tênis + 4 sapatos = 10 calçados

Portanto, Saulo tem 10 possibilidades para escolher um par de calçados nessa loja.

> Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, ou seja, não possuem elementos comuns. Se o conjunto A tem m elementos e o conjunto B tem n elementos, então $A \cup B$ possui $m + n$ elementos.
>
> Esse princípio é conhecido como **princípio aditivo da contagem**.

Agora, para resolver problemas como o apresentado no tópico anterior, utilizamos o chamado **princípio fundamental da contagem** ou **princípio multiplicativo**. Com esse princípio, é possível obter a solução de certos problemas sem a necessidade de listar todas as possibilidades e contar os elementos envolvidos.

Observação

Chamamos **conjunto** uma coleção formada por objetos classificados de acordo com determinado critério.

O conjunto **união** de A e B, que indicamos por $A \cup B$, é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B. Já o conjunto **interseção** de A e B, que indicamos por $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos comuns a A e a B. Considerando os conjuntos $A = \{-1,0,3,5,6\}$ e $B = \{-1,1,3,5,7\}$, temos:

$$A \cup B = \{-1,0,1,3,5,6,7\}$$

$$A \cap B = \{-1,3,5\}$$

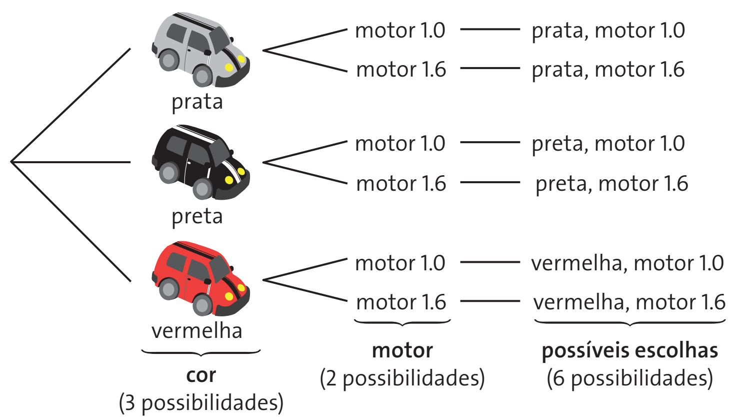
Veja, por exemplo, a resolução da seguinte situação.

- Simone foi a uma concessionária comprar um carro. Para determinado modelo, ela poderia escolher entre as cores prata, preta e vermelha, além de dois tipos de motor, 1.0 e 1.6. Quantas possibilidades diferentes Simone teria para escolher esse modelo de carro nessa concessionária, sabendo que ela pode optar por uma cor e um tipo de motor?

Proponha a situação apresentada aos alunos sem que eles olhem no livro, a fim de que, em duplas, tentem resolvê-la. Depois, considerando as estratégias e as resoluções propostas e desenvolvidas por eles, apresente as explicações encontradas no livro.

Para determinar todas as opções de Simone, podemos utilizar o seguinte esquema, conhecido como **diagrama de árvore** ou **árvore de possibilidades**.

Ilustrações: Emiliano Cavalcante



Outra maneira de representar essas possibilidades é por meio de um **quadro de dupla entrada**.

De acordo com a árvore de possibilidades e o quadro de dupla entrada, podemos obter o total de opções da seguinte maneira.

Cor \ Motor	1.0	1.6
Prata	prata, 1.0	prata, 1.6
Preta	preta, 1.0	preta, 1.6
Vermelha	vermelha, 1.0	vermelha, 1.6

$$\underbrace{3}_{\text{total de cores}} \cdot \underbrace{2}_{\text{total de motores}} = \underbrace{6}_{\text{total de possibilidades}}$$

Observação
Note que a escolha do carro pode ser realizada em duas etapas, isto é, a escolha da cor, com 3 possibilidades, e a escolha do motor, com 2 possibilidades.

Assim, Simone teria 6 possibilidades diferentes para escolher o carro nessa concessionária.

De modo geral:

> Se uma decisão *A* pode ser tomada de *m* maneiras distintas e, para cada uma dessas maneiras, uma outra decisão *B* pode ser tomada de *n* maneiras distintas, então o número de maneiras distintas de serem tomadas as decisões *A* e *B* é $m \cdot n$. Esse princípio é conhecido como **princípio multiplicativo** ou **princípio fundamental da contagem** (PFC).

O PFC também pode ser estendido para ações com mais de duas etapas sucessivas e independentes. Veja os exemplos a seguir.

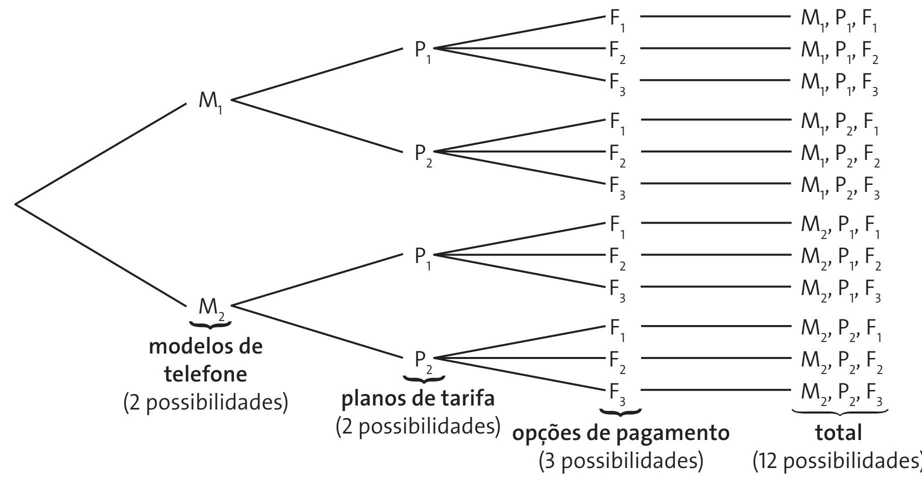
Verifique a possibilidade de propor aos alunos as situações apresentadas nos exemplos **1** e **2**, antes de abordá-las no livro, a fim de que, em duplas, eles tentem resolvê-las. Depois, considerando as estratégias de resoluções propostas e desenvolvidas por eles, apresente as explicações encontradas na página **15**.

Exemplos

1. Uma loja oferece 2 modelos de telefone celular, 2 planos de tarifa e 3 condições de pagamento. Quantas possibilidades diferentes uma pessoa tem para comprar um telefone celular nessa loja?

Representando os modelos dos telefones celulares por M_1 e M_2, os planos de tarifa por

P_1 e P_2 e as opções de pagamento por F_1, F_2 e F_3, temos o seguinte diagrama de árvore:



Ou ainda, pelo PFC, temos: $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Portanto, uma pessoa tem 12 possibilidades diferentes para comprar um telefone celular nessa loja, considerando os modelos de telefone, os planos de tarifa e as opções de pagamento.

2. Utilizando os algarismos 1, 2, 4, 5, 7 e 8, é possível formar quantos números:

a) maiores do que 20 com dois algarismos?

O número formado terá duas ordens, ou seja, dezena (D) e unidade (U). Na ordem das dezenas, temos 5 possibilidades de algarismos, isto é, 2, 4, 5, 7 e 8. O algarismo 1 não pode ocupar essa ordem, pois, do contrário, o número ficaria menor do que 20. Na ordem das unidades, temos 6 possibilidades, pois pode haver repetição.

Dessa maneira, o total de números possíveis de serem formados com dois algarismos é: $\underbrace{5}_{D} \cdot \underbrace{6}_{U} = 30$.

b) maiores do que 200 com três algarismos distintos?

O número formado terá três ordens, ou seja, centena (C), dezena (D) e unidade (U). Como a ordem das centenas não pode ser ocupada pelo algarismo 1, temos:

- 5 possibilidades de algarismos para a ordem das centenas;
- 5 possibilidades de algarismos para a ordem das dezenas, visto que esse algarismo deve ser diferente daquele escolhido para a ordem das centenas, mas o algarismo das dezenas pode ser 1;
- 4 possibilidades de algarismos para a ordem das unidades, visto que esse algarismo deve ser diferente daqueles já escolhidos para a ordem das centenas e das dezenas.

Dessa maneira, o total de números possíveis de serem formados com três algarismos distintos é: $\underbrace{5}_{C} \cdot \underbrace{5}_{D} \cdot \underbrace{4}_{U} = 100$.

c) maiores do que 2 000 com quatro algarismos?

O número formado terá quatro ordens, ou seja, unidade de milhar (UM), centena (C), dezena (D) e unidade (U). Note que não foi dito que os algarismos devem ser distintos. Como a ordem das unidades de milhar não pode ser ocupada pelo 1, temos:

- 5 possibilidades de algarismos para a ordem das unidades de milhar;
- 6 possibilidades de algarismos para a ordem das centenas, dezenas e unidades, visto que esses algarismos podem ser iguais àqueles já escolhidos anteriormente.

Dessa maneira, o total de números possíveis de serem formados com quatro algarismos é: $\underbrace{5}_{UM} \cdot \underbrace{6}_{C} \cdot \underbrace{6}_{D} \cdot \underbrace{6}_{U} = 1\,080$.

1. Éder decidiu adquirir uma peça de roupa em certa loja que dispunha de 10 opções de modelos de calça, 19 opções de modelos de camisa, 15 opções de modelos de *shorts* e 8 opções de modelos de camiseta. Quantas possibilidades Éder tem de comprar uma única peça de roupa nessa loja?
52 possibilidades

2. Em sua festa de 15 anos, Larissa pretende distribuir aos convidados sacolas com presentes. Para a montagem dessas sacolas, Larissa dispõe de 22 sabonetes, 25 enfeites caseiros, 30 doces *gourmet* e 18 aromatizadores de ambientes. Cada sacola deve ter apenas um item. De quantas sacolas Larissa vai precisar? 95 sacolas

3. Uma professora aplicou um teste contendo 6 afirmações, as quais os alunos deveriam julgar em verdadeiras ou falsas. De quantas maneiras distintas esse teste pode ser respondido?
64 maneiras

4. Uma sorveteria oferece em seu cardápio 14 sabores de sorvete e 6 tipos de cobertura. De quantas maneiras distintas pode-se preparar um sorvete composto por 1 sabor e 1 tipo de cobertura?
84 maneiras

7. a) Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Você produtor

5. Elabore e escreva um problema envolvendo o princípio fundamental da contagem. Depois, troque o problema com um colega e resolva-o. Em seguida, verifique se a resposta apresentada está correta.

6. Uma loja de jogos de *videogame* tem em seu acervo 90 jogos de ação, 120 de estratégia e 60 de aventura. De quantas maneiras diferentes um cliente pode comprar 3 jogos, sendo um de cada gênero?
648 000 maneiras

7. Uma indústria automobilística contratou três pessoas para ocupar três vagas disponíveis. Cada um dos contratados pode ocupar qualquer uma das vagas.

a) Represente, por meio de um diagrama de árvore, todas as possíveis maneiras que as vagas podem ser ocupadas pelos contratados.

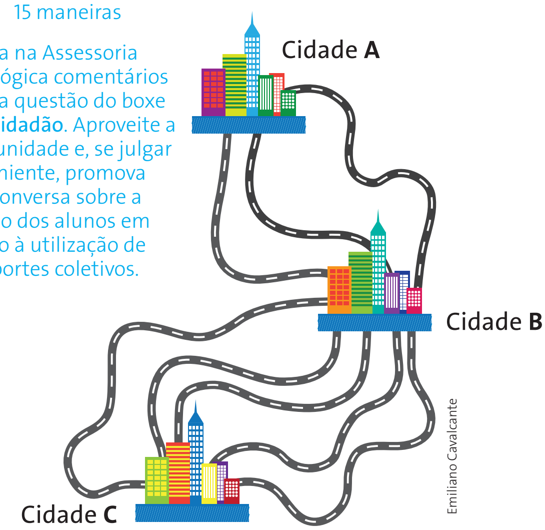
Observação
Fique atento, pois um contratado não pode ocupar duas ou mais vagas ao mesmo tempo.

b) De quantas maneiras diferentes as vagas podem ser ocupadas pelos contratados?
6 maneiras

8. Um estádio de futebol possui 8 portões de entrada/saída. De quantas maneiras distintas uma pessoa pode entrar no estádio e sair por um portão diferente do que foi usado na entrada? 56 maneiras

9. Para ir da cidade **A** à cidade **B** há 3 rodovias, e da cidade **B** à cidade **C**, 5 rodovias. De quantas maneiras diferentes pode-se ir de **A** à **C**, passando por **B**?
15 maneiras

10. Veja na Assessoria pedagógica comentários sobre a questão do boxe **Você cidadão**. Aproveite a oportunidade e, se julgar conveniente, promova uma conversa sobre a opinião dos alunos em relação à utilização de transportes coletivos.



Emiliano Cavalcante

10. (Mack-SP) Em uma cidade, há duas linhas de ônibus, uma na direção Norte-Sul e outra na direção Leste-Oeste. Cada ônibus tem um código formado por 3 números, escolhidos entre 1, 2, 3, 4 e 5 para a linha Norte-Sul e entre 6, 7, 8 e 9 para a Leste-Oeste. Não são permitidos códigos com 3 números iguais. Se A é o total de códigos disponíveis para a linha Norte-Sul e B é o total de códigos disponíveis para a linha Leste-Oeste, então $\frac{A}{B}$ é igual a b

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Você cidadão

- Você considera importante a utilização de transportes coletivos? Por quê? Resposta pessoal.

11. Em certo **provedor**, a senha de acesso ao *e-mail* é composta por 2 letras (dentre 26) e 4 algarismos (de 0 a 9), respectivamente. Quantas senhas de *e-mail* podem ser cadastradas nesse provedor, sabendo que é permitido cadastrar senhas repetidas?
6 760 000 senhas

provedor: empresa que tem uma conexão de alta capacidade ligada a uma rede de computadores e que disponibiliza aos usuários o acesso a essa rede

Desafio

12. Determine quantos são os números de 4 algarismos distintos divisíveis por 5. 952 números

Observação
Lembre-se de que um número é divisível por 5 quando o algarismo da unidade é 0 ou 5.

5. Resposta pessoal. Possível resposta: Luísa tem 4 opções de recheio para montar um sanduíche, 3 opções de pão e 2 opções de patê. Quantas maneiras diferentes Luísa tem para montar um sanduíche composto de uma opção de recheio, uma opção de pão e uma opção de patê? 24 maneiras

3 Fatorial

Para resolver algumas situações envolvendo Análise combinatória, precisamos recorrer a cálculos em que é necessário determinar o produto entre números naturais.

Veja a pergunta a seguir.

- Quantos números distintos com cinco algarismos podem ser formados usando as fichas abaixo?

3   7   9   1   8

Como vimos anteriormente, podemos responder a essa pergunta da seguinte maneira:

$$\underbrace{5}_{\text{DM}} \cdot \underbrace{4}_{\text{UM}} \cdot \underbrace{3}_{\text{C}} \cdot \underbrace{2}_{\text{D}} \cdot \underbrace{1}_{\text{U}} = 120 \rightarrow 120 \text{ números}$$

Esse tipo de cálculo surge com frequência em problemas envolvendo Análise combinatória. Para representá-lo, utilizamos **fatorial**, cuja notação é $n!$ (lê-se: fatorial de n, ou então, n fatorial).

No caso acima, $\underbrace{5!}_{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$.

Dado um número natural n, com $n \geqslant 2$, definimos seu **fatorial**, indicado por $n!$, como o produto de n por seus antecessores naturais até o 1. Utilizando símbolos, temos:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Definimos, ainda, $1! = 1$ e $0! = 1$.

Exemplos

1. $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

2. $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

3. $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$

De acordo com os exemplos, podemos notar que:

- $3! = 3 \cdot 2!$
- $6! = 6 \cdot 5!$
- $10! = 10 \cdot 9! = 10 \cdot 9 \cdot 8!$

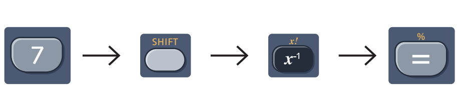
Portanto, de modo geral, temos: $\boxed{n! = n \cdot (n - 1)!}$.

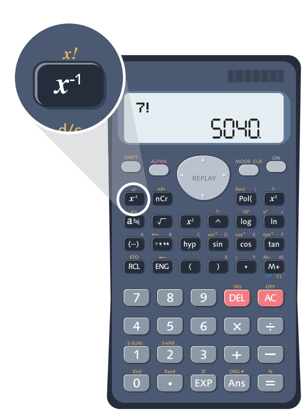
Proponha aos alunos a situação apresentada antes de abordá-la no livro, a fim de que, em duplas, eles tentem resolvê-la. Depois, considerando as estratégias e resoluções propostas e desenvolvidas por eles, apresente as explicações encontradas nesta página.

Fatorial com a calculadora científica

As calculadoras científicas, em geral, apresentam uma função que permite calcular o fatorial de um número natural.

Podemos calcular 7!, por exemplo, utilizando uma calculadora científica. Em algumas delas o comando $x!$ corresponde à segunda função de certa tecla. Nesse caso, para que esse comando seja ativado, primeiro é necessário digitar a tecla (SHIFT).





Ilustrações: Sergio L. Filho

Problemas e exercícios resolvidos

R1. Calcule as expressões indicadas em cada item.

a) $\frac{13!}{10!}$ b) $\frac{8!}{6!+5!}$

Resolução

a) $\frac{13!}{10!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{\cancel{10!}} = 13 \cdot 12 \cdot 11 = 1716$

b) $\frac{8!}{6!+5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{6 \cdot 5! + 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}(6+1)} = \frac{336}{7} = 48$

R2. Simplifique a expressão $\frac{(n-1)! + n!}{(n+1)!}$.

Resolução

$$\frac{(n-1)! + n!}{(n+1)!} = \frac{(n-1)! + n \cdot (n-1)!}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}$$

Colocando $(n-1)!$ em evidência no numerador, temos:

$$\frac{\cancel{(n-1)!} \cdot \cancel{(1+n)}}{\cancel{(n+1)} \cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}} = \frac{1}{n}$$

R3. Resolva a equação $\frac{n!}{(n-2)!} = 20$.

Resolução

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 20 \Rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 20 \Rightarrow n^2 - n = 20 \Rightarrow n^2 - n - 20 = 0 \begin{cases} n_1 = 5 \\ n_2 = -4 \end{cases}$$

Para $n_2 = -4$ não é conveniente, pois, substituindo $n_2 = -4$ na equação, teríamos $\frac{(-4)!}{(-6)!} = 20$ e, conforme definição, não existe fatorial de número negativo.

Portanto, $S = \{5\}$.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

13. Calcule o valor das expressões a seguir.

a) $4!$ 24

b) $3 \cdot 0!$ 3

c) $5! - 4!$ 96

d) $\frac{10!}{7!}$ 720

e) $\frac{8!5!}{7!6!}$ $\frac{4}{3}$

f) $\frac{8!+5!}{5!}$ 337

g) $\frac{9!}{7!-6!}$ 84

14. Com o auxílio de uma calculadora científica, determine: Caso não haja calculadoras para todos os alunos, reúna-os em grupos para que realizem esta tarefa.

a) $13!$ 6 227 020 800

b) $2 \cdot 10!$ 7 257 600

c) $8! + 9!$ 403 200

d) $\frac{25!}{18!}$ 2 422 728 000

15. Simplifique as expressões.

a) $\frac{(n-1)!}{(n+1)!}$ $\frac{1}{n^2+n}$

b) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}$, para $n \geq 3$ $n^2 - 3n + 2$

c) $\frac{(n+2)!}{(n+1)!}$ $n + 2$

d) $\frac{(n+2)!}{n! + (n+1)!}$ $n + 1$

e) $\frac{(n+1)!}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+3)!}{n(n+1)!}$ $\frac{n+3}{n}$

f) $\frac{(n+1)! + (n+2)!}{n!}$ $n^2 + 4n + 3$

Em grupo

16. Observe a igualdade a seguir e determine para quais valores de n ela é verdadeira.

$$\frac{(n+2)! + (n+1)(n-1)!}{(n+1)(n-1)!} = 9$$

$n = 2$ e $n = -4$

17. Observe a expressão a seguir.

$$\frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+1)n!} = 2 + 3n - n^2$$

Determine para quais valores de n a igualdade é verdadeira. $n = 1$

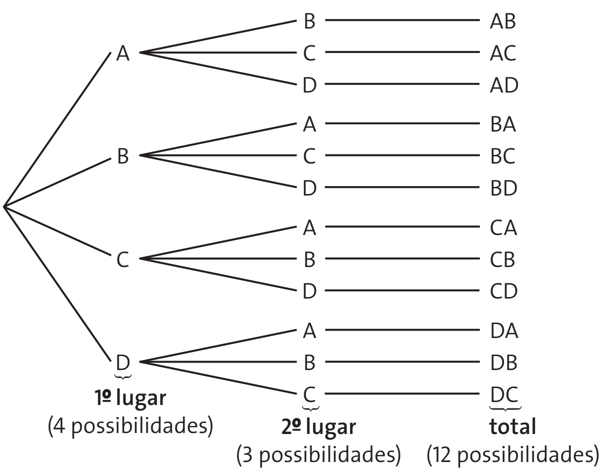
Desafio

18. Qual é a soma das raízes da equação $(3x^2 - 7)! = 1$? 0

4 Arranjo simples

No colégio Beta, quatro equipes, **A, B, C** e **D**, estão participando de uma gincana. Somente o 1º e o 2º colocados serão premiados. Quantas são as possibilidades de duas dessas equipes receberem o prêmio?

Construindo um diagrama de árvore para representar todas as possibilidades, temos:



De acordo com o diagrama, há 12 possibilidades diferentes para o 1º e o 2º colocado. Essa quantidade também pode ser obtida pelo PFC, ou seja, $4 \cdot 3 = 12$.

Nessa situação, os agrupamentos diferem entre si pela ordem das colocações. Por exemplo, **AB** e **BA** são diferentes, pois, no primeiro caso (**AB**), a equipe **A** ficou em 1º lugar, enquanto a equipe **B** ficou em 2º; já no segundo caso (**BA**), a ordem de classificação das duas equipes se inverteu.

Apresente aos alunos a situação antes de abordá-la no livro, a fim de que, em duplas, eles tentem resolvê-la. Depois, considerando as estratégias e resoluções propostas e desenvolvidas por eles, apresente as explicações encontradas nestas páginas.

Cada agrupamento obtido com essas características recebe o nome de **arranjo simples**. Nessa situação, temos um arranjo de 4 elementos tomados 2 a 2. Indicamos a quantidade total de arranjos por $A_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$.

De modo geral:

> Sejam n, p números naturais, com $p \leq n$, chama-se **arranjo simples** de n elementos distintos tomados p a p, todo agrupamento ordenado formado por p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados.
>
> Indica-se a quantidade total de arranjos simples por $A_{n,p}$ ou A_n^p.

Quantidade de arranjos simples

Agora, vamos estudar como calcular a quantidade total de agrupamentos em que n elementos são arranjados p a p, com $p \leq n$, isto é, $A_{n,p}$.

Por isso, vamos observar os agrupamentos a seguir.

Escolha	Quantidade de possibilidades
Do 1º elemento (qualquer elemento)	n
Do 2º elemento (qualquer elemento, exceto 1º elemento escolhido)	$n - 1$
Do 3º elemento (qualquer elemento, exceto 1º e 2º elementos já escolhidos)	$n - 2$
⋮	⋮
Do *p-ésimo* elemento (qualquer elemento, exceto os escolhidos anteriormente)	$n - (p - 1)$ ou $n - p + 1$

Observação

Dizemos que um arranjo é simples quando não há repetição dos elementos em cada agrupamento.

Nesse caso, os agrupamentos de n elementos distintos diferem entre si somente pela **ordem** dos elementos.

Se julgar necessário, apresente outro exemplo envolvendo arranjo simples antes de formalizar a teoria. Uma sugestão é: Quantos números de três algarismos distintos é possível formar com os algarismos 1, 2, 3 e 4? Nesse caso, 24 números.

Portanto, de acordo com o PFC, temos:

$$A_{n,1} = n$$
$$A_{n,2} = n \cdot (n-1)$$
$$A_{n,3} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$$
$$\vdots$$
$$A_{n,p} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)}_{p \text{ fatores}}$$

Observação
Podemos observar que $A_{n,p}$ corresponde a um produto de p fatores que, a partir de n, decrescem em 1 unidade.

Exemplos

1. $A_{5,2} = 5 \cdot (5-1) = 5 \cdot 4 = 20$

2. $A_{6,3} = 6 \cdot (6-1) \cdot (6-2) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

O cálculo de $A_{n,p}$ também pode ser expresso por meio de fatoriais. Inicialmente, tomemos como exemplo $A_{6,2}$.

$$A_{6,2} = 6 \cdot 5$$

Multiplicando o 2º membro dessa igualdade por $\frac{4!}{4!}$ (igual a 1), temos:

$$A_{6,2} = 6 \cdot 5 \cdot \frac{4!}{4!} = 6 \cdot 5 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6!}{(6-2)!}$$

No caso de $A_{n,p}$:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

Multiplicando o 2º membro dessa igualdade por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot \frac{\overbrace{(n-p)!}^{(n-p) \cdot (n-p-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Portanto, $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$, com $p \leqslant n$.

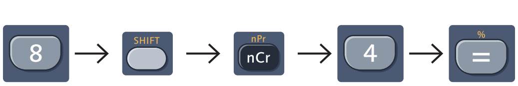
Exemplo

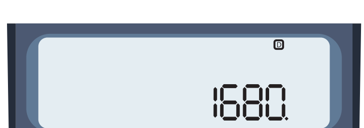
$A_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ ou $A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210$

Arranjo simples com a calculadora científica

Veja como obter a quantidade total de arranjos simples utilizando uma calculadora científica.

Vamos calcular $A_{8,4}$. Antes, porém, cabe destacar que em algumas calculadoras o comando utilizado para o cálculo da quantidade de arranjos corresponde à segunda função de alguma tecla. Daí a necessidade do uso da tecla ().





Ilustrações: Sergio L. Filho

Problemas e exercícios resolvidos

R4. Em uma competição de atletismo, 8 velocistas disputam a prova final dos 100 m rasos, na qual os 3 primeiros colocados vão ao pódio. De quantas maneiras distintas o pódio poderá ser formado?

Resolução

O pódio formado pelos atletas **A**, **B** e **C** nos 1º, 2º e 3º lugares, respectivamente, é diferente do formado pelos mesmos atletas, porém com a ordem de chegada diferente.

Sendo assim, cada resultado da prova corresponde a um arranjo dos 8 competidores tomados 3 a 3.

$$A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 336$$

Portanto, o pódio poderá ser formado de 336 maneiras distintas.

R5. Quantos números de quatro algarismos distintos é possível formar com os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9?

Resolução

Duas possibilidades são os números 1 357 e 1 573 que, apesar de possuírem os mesmos algarismos, não são iguais. Dessa maneira, cada número de quatro algarismos corresponde a um arranjo de 5 algarismos tomados 4 a 4.

$$A_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 120$$

Portanto, é possível formar 120 números.

R6. Uma senha para acessar os arquivos de um computador é composta de 10 caracteres distintos. Sabendo que esses caracteres podem ser algarismos de 0 a 9 e letras de A a Z, quantas tentativas, no máximo, uma pessoa que não conhece a senha deverá fazer para conseguir acessar os arquivos?

Resolução

- quantidade de algarismos: 10
- quantidade de letras: 26
- total de símbolos que podem ser utilizados na senha: 36

Observação
Em uma senha, o 1º algarismo pode ser 0.

Como os caracteres da senha devem ser distintos, temos:

$$A_{36,10} = \frac{36!}{(36-10)!} = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot \cancel{26!}}{\cancel{26!}} = 922\,393\,263\,052\,800$$

Portanto, a quantidade máxima de tentativas que uma pessoa deverá fazer é 922 393 263 052 800.

R7. Para acessar certa conta corrente de um banco pela internet, é necessária uma senha composta por três letras distintas, de um total de 26, seguidas por quatro algarismos distintos, de um total de 10. Quantas senhas distintas é possível formar para acessar a conta corrente?

Resolução

As senhas ABC1234 e CBA2341, por exemplo, apresentam as mesmas letras e algarismos, no entanto, são diferentes. Dessa maneira, cada senha corresponde ao produto entre o arranjo de 26 letras tomadas 3 a 3 e o arranjo de 10 algarismos tomados 4 a 4.

$$A_{26,3} \cdot A_{10,4} = \frac{26!}{(26-3)!} \cdot \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \cancel{23!}}{\cancel{23!}} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 78\,624\,000$$

Portanto, é possível formar 78 624 000 senhas distintas.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

19. Calcule os arranjos a seguir.

a) $A_{5,3}$ 60
c) $A_{7,4}$ 840
e) $A_{8,6}$ 20 160

b) $A_{6,5}$ 720
d) $A_{7,3}$ 210
f) $\frac{A_{10,7}}{A_{6,4}}$ 1 680

20. Caso não haja calculadoras para todos os alunos, reúna-os em grupos para que realizem esta tarefa.

20. Com o auxílio de uma calculadora científica, calcule:

a) $A_{18,4}$ 73 440
c) $A_{14,8}$ 121 080 960

b) $A_{25,5}$ 6 375 600
d) $A_{32,5}$ 24 165 120

21. Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 3, 4, 5, 6 e 8?
120 números

22. Simplifique as expressões.

a) $\frac{A_{n-1,n-2}}{A_{n,n-2}}$, para $n \geq 2$ $\frac{2}{n}$

b) $\frac{A_{n+1,2}+2n+1}{A_{n+1,1}}$ $\frac{n^2+3n+1}{n+1}$

23. Em uma corrida automobilística da qual participam 20 pilotos, o pódio é formado pelos três primeiros colocados. De quantas maneiras diferentes pode ser formado o pódio dessa corrida?
6 840 maneiras

Rodolfo Buhrer/La Imagem/Fotoarena

Vista aérea do Autódromo de Interlagos, na cidade de São Paulo, em 2017.

24. Considerando os algarismos 1, 3, 5, 6, 7, 8 e 9, determine quantos números:

a) de três algarismos distintos podem ser formados. 210 números

b) pares de quatro algarismos distintos podem ser formados. 240 números

c) ímpares de sete algarismos distintos podem ser formados. 3 600 números

25. Durante a aula de Geografia, um aluno pretende pintar as cinco grandes regiões (Centro-Oeste, Nordeste, Norte, Sudeste e Sul) em um mapa do Brasil. Sabendo que o aluno tem disponíveis 10 lápis de cores diferentes e que não será utilizada a mesma cor para pintar regiões diferentes, determine de quantas maneiras distintas o mapa poderá ser pintado. 30 240 maneiras

27. Resposta pessoal. Possível resposta: De quantas maneiras distintas Leonardo pode dispor as fotografias nos espaços disponíveis no painel?

Em grupo

26. Na biblioteca de uma escola, cada um dos livros é registrado com um código formado por duas letras distintas e dois algarismos distintos. Para compor esse código, são utilizadas 26 letras e algarismos de 0 a 9. Veja a disposição das letras e dos algarismos desse código.

Emiliano Cavalcante

Nessa biblioteca, o livro *Dom Casmurro*, de Machado de Assis, por exemplo, é identificado pelo código BL29.

a) Com as 26 letras e os 10 algarismos, quantos livros é possível cadastrar nessa biblioteca?
58 500 livros

b) Quantos livros poderiam ser cadastrados nesse código caso fossem utilizadas apenas vogais, com exceção da letra A, para ocupar o campo destinado às letras?
1 080 livros

Você produtor

27. Leonardo está prestes a preencher um painel de fotografias instalado na parede de seu quarto. Ele dispõe de 8 fotografias para ocupar os 3 espaços restantes.

Com base nas informações apresentadas, elabore um problema que envolva arranjo simples e entregue-o para um colega resolver. Em seguida, verifique se a resposta dele está correta.

Emiliano Cavalcante

Desafio

28. Em certa cidade, está sendo realizado um torneio de voleibol entre 19 escolas. Sabendo que o pódio é formado apenas pelos três primeiros colocados e que um deles é da Escola **A**, de quantas maneiras diferentes pode ser formado o pódio desse campeonato?
918 maneiras

5 Permutação simples

A permutação simples é um caso particular de arranjo simples em que $n = p$, ou seja, trata-se de um arranjo de n elementos tomados n a n.

A quantidade total de permutações simples de n elementos é indicada por P_n e pode ser obtida por:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Portanto, $P_n = n!$ ou $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

De maneira formal:

Chama-se **permutação simples** todo arranjo de n elementos distintos tomados n a n.

Problemas e exercícios resolvidos

R8. Quantos números de cinco algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

Resolução

Cada número formado é um arranjo dos seis algarismos, tomados seis a seis, ou seja, uma permutação.

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \rightarrow 720 \text{ números}$$

R9. Em uma sala há 13 pessoas. De quantas maneiras podemos organizar essas pessoas em uma fila?

Diga aos alunos que o cálculo P_{13} pode ser realizado com uma calculadora científica.

Resolução

A quantidade total de maneiras possíveis é dada por:

$$P_{13} = 13! = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6\,227\,020\,800$$

R10. Anagrama é a palavra obtida pela troca da ordem das letras de uma palavra. AMOR e OARM, por exemplo, são dois anagramas da palavra ROMA.

Considerando os anagramas obtidos da palavra JARDIM, determine quantos anagramas:

a) são possíveis de serem formados.

b) terminam em **M**.

c) têm as letras, **J**, **R** e **I** juntas.

Resolução

a) Cada anagrama é uma permutação das 6 letras; dessa maneira, o total de anagramas é dado por P_6.

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \rightarrow 720 \text{ anagramas}$$

b) Ao estabelecermos que o anagrama termina com a letra **M**, permutamos apenas as outras 5 letras, que ocuparão as 5 primeiras posições.

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \rightarrow 120 \text{ anagramas}$$

c) Como as letras **J**, **R** e **I** devem estar juntas no anagrama, podemos considerar que as 3 ocupam apenas uma posição e, assim, calculamos P_4. Porém, se mudarmos a ordem das letras **J**, **R** e **I** então os anagramas formados são diferentes (**JRI**ADM é diferente de **RIJ**ADM).

Portanto, a solução é dada pelo produto da quantidade de permutações das letras J, R e I (P_3) e P_4.

$$P_3 \cdot P_4 = 3! \cdot 4! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 144 \rightarrow 144 \text{ anagramas}$$

29. Determine.

a) P_7 5 040

b) $\frac{P_{10}}{P_8}$ 90

c) $P_2 \cdot P_5$ 240

d) $\frac{A_{7,3}}{P_3}$ 35

30. Considere os anagramas obtidos da palavra VESTIBULAR.

a) Qual é a quantidade total de anagramas? 3 628 800 anagramas

b) Quantos anagramas apresentam as letras V, T e R juntas? 241 920 anagramas

c) Quantos anagramas começam e terminam por vogais? 483 840 anagramas

31. Considere os algarismos representados nas fichas ao lado.

1	2	4	5	8

Quantos números maiores do que 42 815 podem ser formados ao permutarmos esses algarismos? 61 números

Desafio

32. Se acrescentarmos 1 livro a certa pilha de livros, aumentamos em 35 280 possibilidades as maneiras diferentes de empilhá-los. Retirando 1 livro dessa pilha, diminuímos as possibilidades em 4 320. Quantos livros há nessa pilha? 7 livros

33. Resposta pessoal. Possível resposta: De quantas maneiras diferentes esse grupo poderá se acomodar nessa fileira de modo que o casal fique sempre junto?

Você produtor

33. Elabore um problema que envolva a seguinte situação: um casal vai ao teatro com quatro amigos, e todos eles vão se acomodar em uma mesma fileira em que há seis poltronas disponíveis. Depois, entregue para um colega resolver e, por fim, verifique se a resolução está correta.

34. Considere os números de seis algarismos distintos, formados pelos algarismos 3, 4, 5, 7, 8 e 9.

a) Quantos números é possível formar? 720 números

b) Desses números:

- quantos têm os algarismos 3 e 4 juntos? 240 números
- quantos são pares? 240 números

35. (UFRN) Arranjam-se os algarismos 1, 2, 3 e 4 de todos os modos possíveis, formando-se 24 números de 4 algarismos distintos. Listam-se, em ordem crescente, os 24 números formados. Nessa lista, o número 3 241 ocupa a: c

a) 14ª posição

b) 13ª posição

c) 16ª posição

d) 15ª posição

36. Determine a quantidade de anagramas de cada palavra a seguir.

a) MONTE 120 anagramas

b) ORELHA 720 anagramas

c) PROBLEMA 40 320 anagramas

37. Listando os anagramas da palavra LIVRO em ordem alfabética, qual a posição correspondente ao anagrama LROIV? 39ª posição

Observação

Verifique quantos anagramas podem ser formados iniciando-se com cada uma das letras da palavra LIVRO, bem como a ordem em que devem aparecer.

Em grupo

38. (Uespi) Considere um motor a explosão com cilindros C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 e C_6. Escolhida uma ordem de explosão os cilindros são acionados sempre na mesma ordem. Duas sequências de explosão que correspondam à mesma permutação circular geram a mesma ordem de explosão; deste modo, por exemplo, as sequências $C_2C_4C_6C_1C_3C_5$ e $C_1C_3C_5C_2C_4C_6$ geram a mesma ordem de explosão. Quantas são as ordens de explosão possíveis para um motor com seis cilindros? b

a) 720

b) 120

c) 100

d) 80

e) 24

39. Os alunos de uma turma de Ensino Médio estão estudando permutação e, a pedido do professor, criaram um vídeo com todos os anagramas da palavra FELIZ. Sabendo que o tempo de exibição de cada anagrama na tela é 0,8 s, então a animação completa terá duração de: b

a) menos de 1 minuto.

b) mais de 1 minuto e menos de 2 minutos.

c) mais de 2 minutos.

d) mais de 10 minutos.

e) mais de 1 hora.

Desafio

40. (Unifesp) As permutações das letras da palavra PROVA foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de cinco letras em um dicionário. A 73ª palavra nessa lista é:

a) PROVA

b) VAPOR

c) RAPOV

d) ROVAP

e) RAOPV

e

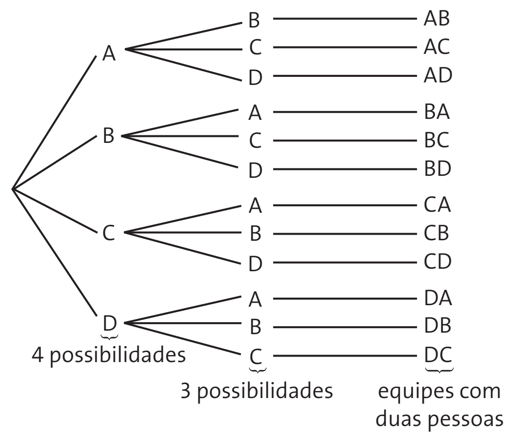
Verifique a possibilidade de propor aos alunos esta situação antes de abordá-la no livro, a fim de que, em duplas, eles tentem resolvê-la. Depois, considerando as estratégias de resoluções propostas e desenvolvidas por eles, apresente as explicações encontradas nestas páginas.

6 Combinação simples

O gerente de uma empresa decidiu formar uma equipe com 2 pessoas para executar certo trabalho. Para formar a equipe, ele deveria escolher entre 4 pessoas: Ana, Bia, Carlos e Daniela.

- Quantas são as possibilidades de formar essa equipe?

Representando Ana, Bia, Carlos e Daniela por A, B, C e D, respectivamente, temos o diagrama de árvore ao lado.



Observando o diagrama, notamos que há 12 possibilidades de formar essa equipe.

No entanto, se considerarmos todas as possibilidades da maneira como foram apresentadas, estaremos contando duas vezes a mesma equipe, ou seja:

AB e BA, AC e CA, AD e DA, BC e CB, BD e DB, CD e DC

Nesses casos, a ordem das pessoas que formam o mesmo grupo não importa, pois AB e BA, por exemplo, correspondem à mesma equipe.

Assim, as equipes correspondem a subconjuntos de 2 elementos de um conjunto de 4 elementos.

Cada agrupamento obtido dessa maneira recebe o nome de **combinação simples**. Nessa situação, temos uma combinação de 4 elementos tomados 2 a 2.

Observação
Quando todos os elementos de um conjunto A também forem elementos de um conjunto B, dizemos que A é subconjunto de B.

Representando por subconjuntos as combinações formadas com 2 elementos do conjunto $\{A, B, C, D\}$, temos:

$$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}$$

A quantidade total de combinações é 6 e indicamos por $C_{4,2} = 6$.

Portanto, o gerente tem 6 possibilidades de formar essa equipe.

Sejam n, p números naturais, com $p \leqslant n$, chama-se **combinação simples** de n elementos distintos tomados p a p todo subconjunto ou agrupamento não ordenado formado por p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados.

Indica-se a quantidade total de combinações simples por $C_{n,p}$, C_n^p ou $\binom{n}{p}$.

Observação
No caso de combinações simples, os agrupamentos de n elementos distintos diferem entre si apenas pela **natureza** dos elementos e não pela ordem dos mesmos.

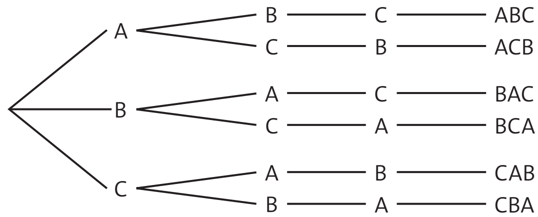
Quantidade de combinações simples

Agora, vamos verificar como calcular a quantidade total de agrupamentos em que n elementos são combinados p a p, com $p \leqslant n$ isto é, $C_{n,p}$.

Considerando o conjunto $\{A, B, C, D\}$ com 4 elementos, vamos determinar a quantidade de combinações simples possíveis de serem formadas com esses elementos tomados 3 a 3, ou seja, a quantidade de subconjuntos com 3 elementos. Esses subconjuntos são: $\{A, B, C\}$, $\{A, B, D\}$, $\{A, C, D\}$ e $\{B, C, D\}$.

Portanto, a quantidade total de combinações é 4, isto é, $C_{4,3} = 4$.

Cada uma dessas combinações gera certa quantidade de arranjos. Como exemplo, vamos obter os arranjos gerados pela combinação ABC.



Temos, nesse caso, um total de 6 arranjos ou 3!.

Multiplicando $C_{4,3}$ por 3! obtemos $A_{4,3}$, isto é, a quantidade total de arranjos simples de 4 elementos tomados 3 a 3.

$$A_{4,3} = 3! \cdot C_{4,3}$$

Como 3! corresponde às permutações de cada subconjunto de 3 elementos, de $\{A, B, C\}$, temos $P_3 = 3!$. Segue que:

$$A_{4,3} = P_3 \cdot C_{4,3} \Rightarrow C_{4,3} = \frac{A_{4,3}}{P_3} = \frac{\frac{4!}{(4-3)!}}{3!} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 4$$

Portanto, $C_{4,3} = 4$, conforme vimos anteriormente.

E como calcular a quantidade total de combinações simples de n elementos tomados p a p?

Como cada combinação de n elementos tomados p a p corresponde a $p!$ arranjos, temos:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Portanto, $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$ ou $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, com $n \geqslant p$.

Observação
O arranjo simples é um agrupamento ordenado, e a combinação simples é um agrupamento não ordenado.

Exemplo

$$C_{7,4} = \frac{A_{7,4}}{4!} = \frac{\frac{7!}{(7-4)!}}{4!} = \frac{840}{24} = 35 \text{ ou } C_{7,4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}3!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{6}} = 35$$

Propriedades das combinações simples (combinações complementares)

Veja a seguir o cálculo das combinações $C_{6,4}$ e $C_{6,2}$.

- $C_{6,4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2} = 15$
- $C_{6,2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{2 \cdot \cancel{4!}} = 15$

Note que os resultados obtidos são iguais. Nesse caso, $\underbrace{C_{6,4} = C_{6,2}}_{4+2=6}$.

Essa igualdade ocorre em razão da propriedade $\boxed{C_{n,p} = C_{n,n-p}}$.

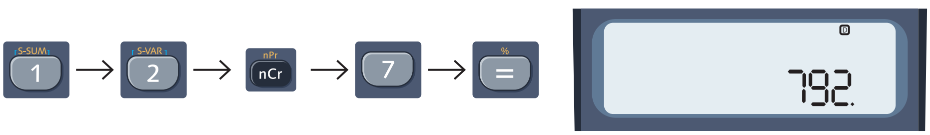
Podemos verificar essa propriedade da seguinte maneira:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{(n-p)!\left[n-(n-p)\right]!} = C_{n,n-p}$$

Combinação simples com a calculadora científica

As calculadoras científicas, em geral, trazem comandos que permitem calcular a quantidade de combinações simples.

Podemos determinar $C_{12,\,7}$, por exemplo, utilizando uma calculadora científica. Observe a sequência de teclas a seguir.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Problemas e exercícios resolvidos

R11. Em uma empresa, uma comissão de 5 pessoas deverá ser formada por 3 funcionários do setor de produção e 2 do setor administrativo. Se há 15 funcionários no setor de produção e 6 no administrativo, de quantas maneiras distintas essa comissão poderá ser formada?

Resolução

As 3 vagas para os funcionários da produção podem ser formadas de $C_{15,\,3}$ maneiras, enquanto as 2 vagas para os funcionários do administrativo, de $C_{6,\,2}$ maneiras.

- $C_{15,\,3} = \dfrac{15!}{3!(15-3)!} = \dfrac{15!}{3!12!} = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \cancel{12!}}{6 \cdot \cancel{12!}} = 455 \rightarrow$ 455 funcionários da produção
- $C_{6,\,2} = \dfrac{6!}{2!(6-2)!} = \dfrac{6!}{2!4!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{2 \cdot \cancel{4!}} = 15 \rightarrow$ 15 funcionários do administrativo

Pelo PFC, a quantidade de comissões distintas é dada por:

$$C_{15,\,3} \cdot C_{6,\,2} = 455 \cdot 15 = 6\,825$$

R12. Escreva um algoritmo que possibilite calcular a quantidade de combinações de n elementos tomados p a p.

Resolução

Antes de resolver esta tarefa, vamos entender o significado de algoritmo. Um **algoritmo** é uma sequência finita de passos ou instruções para resolver um determinado problema. Para elaborar um algoritmo, devemos inicialmente ler o enunciado do problema, compreendendo e destacando as principais informações. Depois, devemos responder às seguintes questões:

1ª De acordo com o problema, quais são os dados de entrada?

R.: A quantidade de n elementos que serão tomados p a p.

2ª Quais serão os dados de saída, ou seja, os dados que serão fornecidos após a execução das etapas do algoritmo?

R.: A quantidade de combinações de n de elementos tomados p a p.

3ª Tendo em mente os dados de entrada e de saída, quais procedimentos devem ser executados?

R.: Substituímos os valores de n e p na fórmula $C_{n,\,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ e efetuamos os cálculos.

Escrevendo o algoritmo, obtemos:

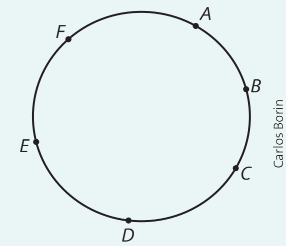
Início
1. Leia os números n e p.
2. Calcule: $C_{n,\,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Fim

R13. Na circunferência ao lado, estão indicados 6 pontos.

a) Quantos segmentos de reta podem ser obtidos ligando esses pontos 2 a 2?

b) Quantos triângulos, cujos vértices são 3 desses pontos, podem ser formados?



Resolução

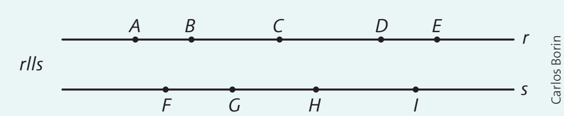
a) Os segmentos cujas extremidades são os mesmos pontos, diferindo-se apenas pela ordem, representam o mesmo segmento: por exemplo, $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$. Dessa maneira, a quantidade de segmentos de reta é dada pela combinação dos 6 pontos tomados 2 a 2.

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{2 \cdot \cancel{4!}} = 15 \rightarrow 15 \text{ segmentos de reta}$$

b) Como, nesse caso, três pontos nunca estão alinhados, qualquer combinação de 3 pontos (vértices) resulta em um triângulo, não importando a ordem que sejam considerados. Assim, a quantidade de triângulos é dada pela combinação dos 6 pontos tomados 3 a 3.

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{6 \cdot \cancel{3!}} = 20 \rightarrow 20 \text{ triângulos}$$

R14. Na figura, as retas *r* e *s* são paralelas. Sobre a reta *r* estão indicados 5 pontos e sobre a reta *s*, 4 pontos. Quantos triângulos podem ser formados sendo seus vértices 3 desses pontos não colineares?



Observação

Dois ou mais pontos são **colineares** quando estão alinhados, ou seja, quando existe uma reta que passa por todos eles.

Resolução

A formação de qualquer um dos triângulos independe da ordem em que são escolhidos seus vértices. Por exemplo, o triângulo *ABF* é o mesmo que o *FAB*. Nesse caso, há duas maneiras de calcular o total de triângulos.

1ª maneira

Para que 3 pontos sejam vértices de um mesmo triângulo, eles não podem ser colineares. Dessa maneira, há duas possibilidades de formação de triângulos.

- 2 pontos de *r* e 1 ponto de *s*.

$$\underbrace{C_{5,2}}_{\text{2 pontos de } r} \cdot \underbrace{C_{4,1}}_{\text{1 ponto de } s} = 10 \cdot 4 = 40$$

- 1 ponto de *r* e 2 pontos de *s*.

$$\underbrace{C_{5,1}}_{\text{1 ponto de } r} \cdot \underbrace{C_{4,2}}_{\text{2 pontos de } s} = 5 \cdot 6 = 30$$

Portanto, a quantidade total de triângulos que podem ser formados é dada por $40 + 30 = 70$.

2ª maneira

Calculamos o total de combinações dos 9 pontos tomados 3 a 3.

$$C_{9,3} = 84$$

Agora, retiramos desse resultado $C_{5,3}$ e $C_{4,3}$, que correspondem à quantidade de combinações de 3 pontos colineares das retas *r* e *s*, respectivamente.

$$C_{9,3} - C_{5,3} - C_{4,3} = 84 - 10 - 4 = 70$$

Portanto, a quantidade total de triângulos que podem ser formados é 70.

41. Calcule:

a) $C_{8,3}$ 56
b) $C_{9,4}$ 126
c) $C_{13,5}$ 1 287
d) $C_{23,21}$ 253
e) $C_{7,3} \cdot C_{10,2}$ 1 575
f) $\frac{C_{12,4}}{C_{9,2}}$ 13,75

42. Com o auxílio da calculadora científica, calcule:

a) $C_{28,3}$ 3 276
b) $C_{20,5}$ 15 504
c) $C_{32,7}$ 3 365 856
d) $C_{45,38}$ 45 379 620

Caso não haja calculadoras para todos os alunos, reúna-os em grupos para que realizem esta tarefa.

43. Simplifique as expressões.

a) $\frac{C_{5,k} \cdot (5-k) \cdot k!(4-k)!}{30}$ 4

b) $\frac{C_{n+1,n} + n + 1}{C_{n+1,1}}$ 2

44. Determine o valor de p, a fim de que a igualdade $A_{n,p} = 2 \cdot C_{n,p}$ seja verdadeira para todo n natural e $n > 1$. $p = 2$

45. Para preparar uma prova, um professor tem à sua disposição 20 questões. Se a prova deve ser composta de 17 dessas questões, determine a quantidade de provas distintas que podem ser preparadas. 1 140 provas

46. O Tribunal do Júri Popular é composto de um juiz de Direito, que é quem preside o julgamento, e de um corpo de jurados, do qual se constituirá o conselho de sentença na sessão de julgamento. Sabendo que o corpo de jurados é composto por 21 pessoas, das quais apenas 7 farão parte do conselho de sentença, determine de quantas maneiras diferentes esse conselho pode ser composto. 116 280 maneiras

47. Escreva um algoritmo que possibilite resolver a seguinte situação:

De quantas maneiras distintas é possível sortear um grupo de 5 pessoas de um total de 30 indivíduos? Veja uma possível resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Desafio

Se julgar necessário, lembre os alunos de que dodecágono é um polígono que possui 12 lados.

48. Determine a quantidade de diagonais de um dodecágono. 54 diagonais

Observação

A partir de dois vértices consecutivos, obtém-se um lado do dodecágono e não uma diagonal.

49. Em um festival de cinema, serão indicados 5 filmes ao prêmio de melhor trilha sonora. Sabendo que eles serão selecionados de uma lista com 12 filmes, de quantas maneiras distintas os indicados poderão ser escolhidos? 792 maneiras

Você produtor

50. De acordo com as informações vistas até agora, elabore e escreva um problema envolvendo combinação simples. Depois, troque o problema com um colega e resolva. Em seguida, verifique se a resolução apresentada está correta.

Resposta pessoal. Possível resposta: Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas em uma turma de 32 alunos?

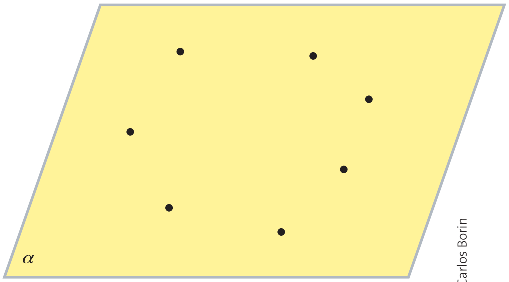
51. Uma loja de pesca dispõe a seus clientes 24 tipos de anzol, 7 tipos de linha e 9 tipos de vara de pesca. De quantas maneiras distintas é possível montar um *kit* de pesca composto por 5 tipos de anzol, 4 tipos de linha e 2 tipos de vara? 53 555 040 maneiras

Em grupo

52. O presidente de uma companhia deve organizar uma equipe para representar a empresa em um congresso internacional. Esse grupo deve ser formado por um vice-presidente, dois diretores administrativos e dois gerentes de *marketing*. A companhia tem disponível 4 pessoas para vice-presidente, 5 para diretores administrativos e 8 para gerentes de *marketing*. De quantas maneiras distintas o presidente dessa empresa pode escalar essa equipe?

1 120 maneiras

53. No plano representado a seguir estão marcados 7 pontos, de modo que não há 3 pontos que pertençam à mesma reta.



Carlos Borin

a) Quantos segmentos de reta podem ser formados, de modo que suas extremidades sejam 2 desses pontos? 21 segmentos

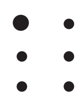
b) Quantos triângulos podem ser formados, de modo que seus vértices sejam 3 desses pontos? 35 triângulos

54. (UEL-PR) Antônio e Bruno são membros atuantes do Grêmio Estudantil e estão se formando em uma turma de 28 alunos. Uma comissão de formatura, com 5 membros, deve ser formada para a organização dos festejos. Quantas comissões podem ser formadas de modo que Antônio e Bruno sejam membros? a

a) 2 600
b) 9 828
c) 9 288
d) 3 276
e) 28

55. (Enem) A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra **A** é representada por

Reprodução/Enem



A quantidade total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é: d

a) 12
b) 31
c) 36
d) 63
e) 720

56. Arthur e sua esposa desejam fazer uma viagem a três estados da região Nordeste do Brasil. Sabendo que essa região tem 9 estados, quantas possibilidades eles têm para escolher os estados que vão visitar? 84 possibilidades

Estados da região Nordeste do Brasil

Carlos Borin

Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro, 2018.

57. Em uma urna há 7 bolas idênticas numeradas de 1 a 7. Ao retirar 4 bolas simultaneamente dessa urna, determine a quantidade de possibilidades de obter:

a) 2 bolas com números pares e 2 com números ímpares. 18 possibilidades

b) pelo menos 2 bolas com números pares. 22 possibilidades

c) pelo menos 3 bolas com números ímpares. 13 possibilidades

58. (UFAC) Emanuel investigou os seguintes números: a quantidade máxima de maneiras de preencher, ao acaso, a folha de respostas de uma prova de Matemática que contém 7 questões do tipo múltipla escolha, tendo cada questão 5 alternativas e a quantidade máxima de triângulos que podem ser construídos com vértices tomados sobre 30 pontos distintos de uma circunferência de raio $r > 0$.

Se seus cálculos foram feitos corretamente, neles podemos ver que: e

a) o maior número de triângulos que podem ser construídos é maior do que o maior número possível de folhas de respostas preenchidas ao acaso.

b) os números investigados são iguais.

c) os números investigados são maiores do que 4 070.

d) os números investigados são menores do que 70 000.

e) o maior número de triângulos que podem ser construídos é menor do que o maior número possível de folhas de respostas preenchidas ao acaso.

Em grupo

59. (Enem) Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo **A**. Em seguida, entre os times do Grupo **A**, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.

A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo **A** e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de a

a) uma combinação e um arranjo, respectivamente.

b) um arranjo e uma combinação, respectivamente.

c) um arranjo e uma permutação, respectivamente.

d) duas combinações.

e) dois arranjos.

7 Permutação com elementos repetidos

Vimos que a quantidade total de permutações de n elementos distintos é dada por $n!$, ou seja, $P_n = n!$.

A quantidade de anagramas que podemos formar com as letras da palavra LIVRO, por exemplo, é igual a $5! = 120$. Nesse caso, note que todas as letras são distintas entre si.

Agora, veja outro exemplo.

- Com a palavra CORPO, quantos anagramas podemos formar?

Proponha aos alunos a situação apresentada antes de abordá-la no livro, a fim de que, em duplas, eles busquem resolvê-la. Depois, considerando as estratégias e resoluções propostas e desenvolvidas por eles, apresente as explicações encontradas nesta página.

Caso todas as letras dessa palavra fossem distintas, teríamos 5! anagramas. No entanto, ao permutarmos letras iguais, não obtemos um novo anagrama. Por exemplo, se tomarmos o anagrama PORCO e trocarmos de posição as duas letras **O**, obteremos o mesmo anagrama:

$$PO_1RCO_2 \leftrightarrow PO_2RCO_1$$

Dessa maneira, como a letra **O** se repete 2 vezes, há outro anagrama igual em cada um dos 5! anagramas com a letra **O** nas mesmas posições.

Assim, para obtermos o total de anagramas, calculamos $\frac{5!}{2!}$.

$$\frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60$$

Com a palavra CORPO é possível formar 60 anagramas.

Agora, vamos obter a quantidade de anagramas da palavra PANTANAL. Nesse caso, temos duas letras que se repetem, **A** e **N**.

Se todas as letras dessa palavra fossem distintas, teríamos 8! anagramas. No entanto, como a letra **A** se repete 3 vezes, há outros anagramas iguais em cada um dos 8! anagramas com a letra **A** nas mesmas posições.

Assim, temos uma quantidade de anagramas igual $\frac{8!}{3!}$.

Para cada um desses anagramas, a letra **N** se repete 2 vezes nas mesmas posições, num total de 2!. Com isso, o total de anagramas da palavra PANTANAL será:

$$\frac{8!}{3!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2!} = 3\,360$$

Portanto, é possível formar 3 360 anagramas com a palavra PANTANAL.

De modo geral:

> A quantidade de permutações de n elementos com repetições dos quais $n_1, n_2, \ldots, n_r$ são as quantidades dos r elementos diferentes entre si com $r < n$ é dada por:
>
> $$P_n^{(n_1, n_2, \ldots, n_r)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}, \text{ com } n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$$

No caso da palavra PANTANAL há oito letras, sendo 3 letras iguais a **A** e 2 letras iguais a **N**.

Logo:

$$P_8^{(3,2)} = \frac{8!}{3!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2} = 3\,360$$

Observação

No exemplo ao lado, foi considerada apenas a quantidade dos r elementos que se repetem na palavra PANTANAL, ou seja, a letra **A**, que se repete 3 vezes (3!), e a letra **N**, que se repete 2 vezes (2!). Para todas as outras letras que não apresentam repetição, no caso, **P**, **T** e **L**, o produto por $1! = 1$ não altera o resultado dos cálculos.

Problemas e exercícios resolvidos

R15. Determine a quantidade de anagramas da palavra BANANA.

Resolução

Na palavra BANANA há 6 letras, sendo 3 letras iguais a **A** e 2 letras iguais a **N**.

$$P_6^{(3,2)} = \frac{6!}{3!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2} = 60$$

Portanto, a palavra BANANA possui 60 anagramas.

R16. Quantos números pares podem ser obtidos ao permutarmos os algarismos que formam o número 2 423 327?

Resolução

Para que uma permutação do número 2 423 327 seja par, o algarismo da unidade simples deverá ser 2 ou 4.

- Com o algarismo 2 na unidade simples.

  Fixando um dos algarismos 2 na unidade simples, a quantidade de números pares é obtida pelas permutações dos algarismos 2, 2, 3, 3, 4 e 7.

$$P_6^{(2,2)} = \frac{6!}{2!2!} = 180$$

- Com o algarismo 4 na unidade simples.

  Fixando o algarismo 4 na unidade simples, a quantidade de números pares é obtida pelas permutações dos algarismos 2, 2, 2, 3, 3 e 7.

$$P_6^{(3,2)} = \frac{6!}{3!2!} = 60$$

Portanto, a quantidade de números pares que podem ser obtidos é dada por 180 + 60 = 240.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

60. Calcule a quantidade de anagramas formados a partir das palavras a seguir.

- PORTO 60 anagramas
- CACAU 30 anagramas
- PRATELEIRA 453 600 anagramas

a) Escreva duas palavras com letras repetidas, diferentes das que estão acima, e peça a um colega que calcule a quantidade de anagramas formados a partir delas. Em seguida, verifique se as resoluções estão corretas. Resposta pessoal. Possível resposta: PRAIA e TINTA.

b) Escreva um algoritmo que possibilite calcular a quantidade de anagramas de palavras com letras repetidas. Veja uma possível resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

61. Considerando as permutações dos algarismos do número 326 312, determine quantos:

a) são os números pares. 90

b) são os números ímpares. 90

c) números têm os algarismos 6 e 1 juntos. 60

Desafio

62. Considere uma lista com todas as permutações da palavra MACACO, dispostas em ordem alfabética, assim como em um dicionário. Determine o 151º anagrama dessa lista. OAACCM

Em grupo

63. Em um jogo, cada participante deve lançar dois dados simultaneamente. A soma dos números que correspondem às faces voltadas para cima será a quantidade de fichas que o jogador deve retirar de um monte no centro da mesa: cada ficha corresponde a uma letra e ganha o jogo quem conseguir formar a maior quantidade de anagramas com as fichas. Certo participante retirou do monte fichas com três letras diferentes, sendo duas fichas com a letra **A**, uma com a letra **B** e n fichas com a letra **J**, conseguindo formar $26 + \frac{n^3}{2}$ anagramas. Quantas fichas com a letra **J** ele retirou? duas fichas

8 Triângulo de Pascal

Neste capítulo, estudamos um tipo de agrupamento chamado combinação simples, em que a ordem dos elementos não importa, e a quantidade total de combinações simples pode ser indicada por, C_n^p, $C_{n,p}$ ou $\binom{n}{p}$, tal que:

$$C_n^p = C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ com } n, p \text{ naturais e } p \leqslant n.$$

O número $\binom{n}{p}$ (lê-se: binomial de n sobre p) é chamado **coeficiente binomial** ou **número binomial**. Nessa notação, n é o **numerador** e p, o **denominador**.

Veja a seguir alguns casos específicos de número binomial.

- Quando $p = 0$.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{\underbrace{0!}_{1}(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

- Quando $p = 1$.

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{1 \cdot (n-1)!} = n, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

- Quando $p = n$.

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot \underbrace{0!}_{1}} = 1, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

- Quando $p = 0$ e $n = 0$.

$$\binom{0}{0} = \frac{\overbrace{0!}^{1}}{\underbrace{0!}_{1}\underbrace{(0-0)!}_{1}} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$$

Se julgar necessário, apresente alguns exemplos numéricos de números binominais quando $p = 0$, $p = 1$ e $p = n$. Veja na Assessoria pedagógica algumas sugestões de exemplos.

Blaise Pascal.

O chamado triângulo de Pascal já tinha sido estudado em séculos anteriores por escritores chineses, mas como Pascal foi o primeiro a estudar as propriedades e desenvolver aplicações, este ficou conhecido como triângulo de Pascal.

Fonte de pesquisa: PICKOVER, Clifford A. *O livro da Matemática*: De Pitágoras à 57ª dimensão, 250 marcos da história da matemática. Librero: Madrid, 2011.

No número binomial $\binom{n}{p}$, quando:

- $p = 0$ ou $p = n$, então $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
- $p = 1$, então $\binom{n}{1} = n$.

Existe uma maneira de dispor os números binomiais de modo ordenado, denominado **triângulo de Pascal**. Esse nome é atribuído em homenagem ao matemático e filósofo francês Blaise Pascal (1623-1662). Veja ao lado uma representação desse triângulo.

$$\begin{array}{lllllll}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
\vdots
\end{array}$$

Observação

Note que:

- os números binomiais de mesmo numerador são colocados na mesma linha;
- os números binomiais de mesmo denominador são colocados na mesma coluna.

Substituindo os números binomiais por seus respectivos valores, podemos representar o triângulo de Pascal conforme indicado ao lado.

Observando a disposição dos elementos no triângulo de Pascal, podemos verificar algumas propriedades, descritas a seguir.

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
	⋮					

1ª propriedade

Números binomiais complementares.

Em uma linha qualquer do triângulo, dois números binomiais equidistantes dos extremos são iguais.

$$\underbrace{\binom{5}{0}}_{1} \quad \underbrace{\binom{5}{1}}_{5} \quad \underbrace{\binom{5}{2}}_{10} \quad \underbrace{\binom{5}{3}}_{10} \quad \underbrace{\binom{5}{4}}_{5} \quad \underbrace{\binom{5}{5}}_{1}$$

Conforme apresentado no estudo das combinações simples, essa propriedade pode ser indicada por:

> Se n, p são números naturais, com $0 < p \leqslant n$, então $C_{n,\,p} = C_{n,\,n-p} \Rightarrow \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, sendo $p + (n - p) = n$.

Observação
De acordo com essa propriedade, esses dois números binominais são complementares, pois a soma dos denominadores é igual ao numerador.

2ª propriedade

Relação de Stifel (Michael Stifel, matemático alemão).

De acordo com a relação de Stifel, a soma de dois números do triângulo localizados lado a lado é igual ao número localizado imediatamente abaixo do da direita.

1							
1	1						
1	2	1					
1	$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	1				
1	4	$\boxed{6}$	4	1			
1	5	10	$\boxed{10}$	$\boxed{5}$	1		
1	6	15	20	$\boxed{15}$	6	1	
…	…	…	…	…	…	…	⋱

$$\underbrace{\binom{3}{1}}_{3} + \underbrace{\binom{3}{2}}_{3} = \underbrace{\binom{4}{2}}_{6}$$

$$\underbrace{\binom{5}{3}}_{10} + \underbrace{\binom{5}{4}}_{5} = \underbrace{\binom{6}{4}}_{15}$$

Veja na Assessoria pedagógica uma sugestão de trabalho com a relação de Stifel.

Podemos representar essa propriedade da seguinte maneira:

> Se n, p são números naturais, com $1 \leqslant p < n$ e $n \geqslant 2$, então $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$.


FLHC24/Alamy/Fotoarena

Michael Stifel.

O matemático alemão Michael Stifel (1487-1567) foi pioneiro no emprego dos sinais de menos (−) e de mais (+) nas expressões algébricas. Sua obra matemática mais conhecida é *Arithmetica Íntegra*, publicada em 1544. Nessa obra, o alemão chamava a atenção para um conceito, até então novo, o logaritmo.

Fonte de pesquisa: MONTEIRO, Edson. *Trajetória histórico-social da engenharia brasileira*. Rio de Janeiro: Letra Capital, 2017.

Observação
A partir da relação de Stifel, é possível construir o triângulo de Pascal mais rapidamente.

3ª propriedade

Em uma mesma linha n, a soma dos elementos é igual a 2^n.

Linha 0 $\rightarrow \binom{0}{0} = 1 = 2^0$

Linha 1 $\rightarrow \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 = 2^1$

Linha 2 $\rightarrow \binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$

Linha 3 $\rightarrow \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$

Linha 4 $\rightarrow \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

$\vdots$

Linha $n \rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$

Podemos escrever a soma dos números binomiais da linha n como:

$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$ (lê-se: somatório do binomial n sobre i, com i assumindo valores inteiros de 0 a n é igual a 2^n).

Exemplo

$$\sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 8 = 2^3$$

Observação

O símbolo de **somatório** é indicado pela letra grega Σ (lê-se: "sigma") e é utilizado para representar a adição de uma grande quantidade de parcelas com alguma característica comum.

Problemas e exercícios resolvidos

R17. Determine o valor de x em:

a) $\binom{5}{3} = 2x \cdot \binom{8}{5}$

b) $\binom{6}{2} \cdot x = \binom{6}{4}$

Resolução

a) $\binom{5}{3} = 2x \cdot \binom{8}{5} \Rightarrow \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = 2x \cdot \dfrac{8!}{5!(8-5)!} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2} = 2x \cdot \dfrac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot \cancel{6}} \Rightarrow 10 = 112x \Rightarrow x = \dfrac{5}{56}$

b) De acordo com a 1ª propriedade, $\binom{6}{2} = \binom{6}{4}$, pois $2 + 4 = 6$. Portanto:

$$\binom{6}{2} \cdot x = \binom{6}{4} \Rightarrow x = \frac{\cancel{\binom{6}{4}}}{\cancel{\binom{6}{2}}} = 1$$

R18. Na equação $\binom{10}{y} + \binom{10}{5} = \binom{11}{5}$, um possível valor para y é 6. Determine o outro valor de y.

Resolução

Note que essa equação equivale à relação de Stifel com $p = 5$ e $n = 11$, ou seja, $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$.

Como $y = p - 1$, temos:

$$y = p - 1 = 5 - 1 = 4$$

64. Calcule.

a) $\binom{20}{20} + \binom{2}{0} + \binom{8}{5}$ 58

b) $\binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{3}{3}$ 71

c) $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$ 64

d) $\binom{12}{5} + \binom{12}{6} + \binom{13}{6} + \binom{13}{7}$ 5 148

e) $\binom{20}{0} + \binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \binom{20}{3} + \ldots + \binom{20}{19} + \binom{20}{20}$ 1 048 576

*Resposta pessoal. Possível resposta: $\binom{7}{2} + \binom{6}{1} + \binom{4}{0} + \binom{5}{5}$ e $\binom{6}{2} + \binom{5}{1} + \binom{3}{0}$.

Você produtor

Agora, escreva duas expressões utilizando números binomiais e peça a um colega que as resolva. Depois, verifique se a resolução apresentada está correta. *

Observação
Utilize as propriedades do triângulo de Pascal.

65. Determine o valor de x em cada uma das equações.

a) $\binom{7}{2} = \binom{x}{5}$ 7

b) $\binom{29}{27} + \binom{29}{x} = \binom{30}{x}$ 28

c) $\binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3} + \ldots + \binom{x}{x} = 2^{10}$ 10

d) $\binom{8}{x} \cdot x = \binom{15}{3} - \binom{15}{12}$ 0

66. Calcule o valor de k em cada item a seguir.

a) $k = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \ldots + \binom{9}{8} + \binom{9}{9}$ 512

b) $k = \binom{15}{11} + \binom{15}{12} + \binom{16}{12} + \binom{16}{2}$ 3 760

c) $\binom{31}{0} = \binom{k}{17}$ 17

d) $\binom{23}{15} = \binom{k}{15} + \binom{k}{14}$ 22

e) $\binom{k}{10} = \binom{17}{7}$ 17

67. Resolva a equação $\binom{n-1}{6} - \binom{n+1}{8} = 0$. $n = 7$

68. A expressão $\binom{8}{5} : \binom{8}{3} - \binom{7}{7} \cdot \binom{7}{1}$ corresponde a: b

a) $\binom{8}{1}$.

b) $-\binom{6}{1}$.

c) $\binom{7}{0}$.

d) $\binom{7}{2}$.

Observação
Nesta tarefa, utilize a propriedade dos números binomiais complementares.

69. Determine o valor de x em:

a) $\binom{20}{4} \cdot x - \binom{19}{3} = \binom{19}{4}$ $x = 1$

b) $\binom{15}{15} + \binom{5}{3} \cdot x = \binom{12}{0} \cdot x$ $x = -\frac{1}{9}$

70. (Uece) O número 30 aparece n vezes no triângulo de Pascal abaixo em que os pontinhos indicam que as linhas horizontais seguintes do triângulo seguem a lógica construtiva das linhas superiores. O número n é: b

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

a) 1   b) 2   c) 3   d) 4

Em grupo

71. Construam um triângulo de Pascal com 10 linhas. b) $(2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n)$

a) Qual é a soma dos elementos das 5 primeiras linhas? 31

b) Escrevam uma sequência formada pela soma dos elementos de cada linha.

Observação
Quando determinados elementos de um conjunto são dispostos em certa ordem seguindo um padrão, dizemos que esses elementos formam uma sequência.

c) Qual é a razão entre a soma dos elementos de uma linha e a soma dos elementos da linha seguinte? $\frac{1}{2}$

9 Binômio de Newton

Provavelmente, você já estudou em anos anteriores os produtos notáveis, entre eles $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. A partir dele, podemos desenvolver outras potências do tipo $(a+b)^n$, com a e b reais e n natural com $n \neq 0$ se $a = 0$ e $b = 0$, chamadas **binômio de Newton**. Veja o exemplo.

- $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

A partir desse último, podemos calcular, utilizando o mesmo procedimento, $(a+b)^4$.

- $(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) =$
  $= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

E assim, utilizando os mesmos procedimentos, podemos calcular $(a+b)^n$ a partir do resultado obtido em $(a+b)^{n-1}$. No entanto, esse processo vai ficando muito trabalhoso à medida que aumentamos o valor de n.

Neste tópico, vamos obter a fórmula do **binômio de Newton**, que permite desenvolver $(a+b)^n$ de maneira menos trabalhosa, bem como obter qualquer termo dessa expressão sem desenvolvê-la.

Para isso, vamos utilizar o número binomial e o triângulo de Pascal.

No desenvolvimento do binômio de Newton, podemos utilizar o triângulo de Pascal na representação dos coeficientes. Veja o exemplo.

$$
\begin{array}{llll}
n=0 \rightarrow (a+b)^0 = 1 & 1 & & \binom{0}{0} \\
n=1 \rightarrow (a+b)^1 = 1a + 1b & 1\quad 1 & & \binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
n=2 \rightarrow (a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2 & 1\quad 2\quad 1 & \rightarrow & \binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
n=3 \rightarrow (a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 & 1\quad 3\quad 3\quad 1 & & \binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
n=4 \rightarrow (a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 & 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 & & \binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}
\end{array}
$$

Desse modo, podemos escrever:

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0b^0$$

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3$$

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4$$

Observação

No binômio $(a+b)^4$, note que os expoentes de a começam em 4 e decrescem de 1 em 1 até 0, e que os expoentes de b começam em 0 e crescem de 1 em 1 até 4.

Sejam a, b números reais e n, p números naturais como $p \leqslant n$. Logo:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{p}a^{n-p}b^p + \ldots + \binom{n}{n-1}a^{\overbrace{n-(n-1)}^{1}}b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Essa igualdade é conhecida como **fórmula do binômio de Newton**.

Utilizando a notação de somatório, podemos representá-la da seguinte maneira:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot b^p$$

De acordo com essa fórmula, podemos fazer as seguintes observações:

- Os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$ encontram-se na linha n do triângulo de Pascal.
- Há $n+1$ termos no desenvolvimento de $(a+b)^n$.
- Os expoentes de a decrescem de n até 0 de 1 em 1, e os de b crescem de 0 até n de 1 em 1.
- A soma dos expoentes de a e b em qualquer termo do desenvolvimento é igual a n.

Problemas e exercícios resolvidos

R19. Desenvolva os binômios.

a) $(x+\sqrt{2})^4$

b) $(x-y)^5$

Observação

No item **b**, note que o binômio a ser desenvolvido é do tipo $(a-b)^n$, ou seja, $[a+(-b)]^n$. Nesse caso, os sinais dos coeficientes do desenvolvimento se alternam.

Resolução

Utilizando a fórmula do binômio de Newton, temos:

a) $(x+\sqrt{2})^4 = \underbrace{\binom{4}{0}}_{1}x^4(\sqrt{2})^0 + \underbrace{\binom{4}{1}}_{4}x^3(\sqrt{2})^1 + \underbrace{\binom{4}{2}}_{6}x^2(\sqrt{2})^2 + \underbrace{\binom{4}{3}}_{4}x^1(\sqrt{2})^3 + \underbrace{\binom{4}{4}}_{1}x^0(\sqrt{2})^4 =$

$= x^4 + 4x^3\sqrt{2} + 6x^2 \cdot 2 + 4x^1 \cdot 2\sqrt{2} + 4 = x^4 + 4\sqrt{2}x^3 + 12x^2 + 8\sqrt{2}x + 4$

b) $(x-y)^5 = \underbrace{\binom{5}{0}}_{1}x^5(-y)^0 + \underbrace{\binom{5}{1}}_{5}x^4(-y)^1 + \underbrace{\binom{5}{2}}_{10}x^3(-y)^2 + \underbrace{\binom{5}{3}}_{10}x^2(-y)^3 + \underbrace{\binom{5}{4}}_{5}x^1(-y)^4 + \underbrace{\binom{5}{5}}_{1}x^0(-y)^5 =$

$= x^5 + 5x^4(-y) + 10x^3y^2 + 10x^2(-y^3) + 5xy^4 + (-y^5) = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

72. Desenvolva os binômios. Veja as respostas na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

a) $(y+2)^4$ b) $(2a+b)^6$ c) $(x-5)^7$ d) $\left(3+\frac{x}{3}\right)^5$ e) $\left(-2ab+\frac{1}{2}\right)^4$ f) $\left(a^2+\frac{1}{b}\right)^4$

Você produtor

73. Escreva dois binômios e peça a um colega que os desenvolva. Em seguida, verifique se as resoluções apresentadas estão corretas. Resposta pessoal. Possível resposta: $(b+3)^3$ e $(-2xy+5)^4$.

74. Desenvolva cada um dos binômios utilizando a fórmula do binômio de Newton.

a) $(\sqrt{2}+3)^3$ $29\sqrt{2}+45$

b) $(-\sqrt{3}+2\sqrt{5})^3$ $58\sqrt{5}-63\sqrt{3}$

c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^4$ $\frac{625}{144}$

d) $(-\sqrt{11}-\sqrt{16})^5$ $-3\,161\sqrt{11}-10\,484$

Termo geral do binômio de Newton

De acordo com o desenvolvimento do binômio de Newton:

$$(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0}a^n b^0}_{T_1} + \underbrace{\binom{n}{1}a^{n-1}b^1}_{T_2} + \underbrace{\binom{n}{2}a^{n-2}b^2}_{T_3} + \dots + \underbrace{\binom{n}{p}a^{n-p}b^p}_{T_{p+1}} + \dots + \underbrace{\binom{n}{n-1}a^{\overbrace{n-(n-1)}^{1}}b^{n-1}}_{T_n} + \underbrace{\binom{n}{n}a^0 b^n}_{T_{n+1}}$$

Analisando a expressão obtida, é possível perceber que:

- para $p = 0$, temos $T_1 = T_{0+1} = \binom{n}{0}a^n b^0$.
- para $p = 1$, temos $T_2 = T_{1+1} = \binom{n}{1}a^{n-1}b^1$.
- para $p = 2$, temos $T_3 = T_{2+1} = \binom{n}{2}a^{n-2}b^2$.
- para $p = 3$, temos $T_4 = T_{3+1} = \binom{n}{3}a^{n-3}b^3$.

$\vdots$

Portanto, no desenvolvimento de $(a+b)^n$, para cada valor de p, com $0 \leqslant p \leqslant n$, o termo $\binom{n}{p}a^{n-p} \cdot b^p$ ocupa a posição $(p+1)$. Indicamos esse termo por T_{p+1}.

Assim, o termo geral do binômio de Newton é dado por:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p}a^{n-p} \cdot b^p$$

Observação

Note que $(a+b)^n$ também pode ser interpretado como $(b+a)^n$, o que inverteria a e b na fórmula do termo geral. Cabe, portanto, destacar que nas tarefas sempre será informado qual termo deve ter expoentes decrescentes (ou crescentes) na ordenação do desenvolvimento.

Problemas e exercícios resolvidos

R20. Ao desenvolver o binômio $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^{15}$, verifique se ele possui termo independente de x. Justifique sua resposta.

Resolução

Nesse caso, $n = 15$, $a = 2x$ e $b = \frac{1}{x}$. Assim, o termo geral é: $T_{p+1} = \binom{15}{p}(2x)^{15-p} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^p$.

Do termo geral, segue que:

$$T_{p+1} = \binom{15}{p}(2x)^{15-p} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^p = \binom{15}{p}2^{15-p} \cdot x^{15-p} \cdot x^{-p} = \binom{15}{p}2^{15-p} \cdot x^{15-2p}$$

Observação

Em $(2x)^{15-p}$ foi utilizada a propriedade $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ das potências.

O termo independente de x, caso exista, é o termo em que $x^{15-2p} = 1$, ou seja, $x^{15-2p} = x^0$.

$$x^{15-2p} = 1 \Rightarrow x^{15-2p} = x^0 \Rightarrow 15 - 2p = 0 \Rightarrow p = 7{,}5$$

Note que não existe p natural, tal que $15 - 2p = 0$.

Portanto, no desenvolvimento de $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^{15}$, não existe termo independente de x.

Observação

Em $x^{15-2p} = x^0$ foi utilizada a definição de equação exponencial, ou seja, $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

R21. No desenvolvimento de $(x-2)^8$, segundo a ordem das potências decrescentes de x, determine:

a) o 6º termo.

b) o termo independente de x.

c) o termo médio.

d) o termo em x^6.

Resolução

Neste caso, $n = 8$, $a = x$ e $b = -2$. Assim, o termo geral é: $T_{p+1} = \binom{8}{p} x^{8-p} \cdot (-2)^p$.

a) Para o 6º termo (T_6), temos $p + 1 = 6 \Rightarrow p = 5$.

$$T_{5+1} = \underbrace{\binom{8}{5}}_{56} x^{8-5} \cdot (-2)^5 \Rightarrow T_6 = 56x^3 \cdot (-32) = -1792x^3$$

b) O termo independente de x é aquele em que $x^{8-p} = 1$, ou seja, $x^{8-p} = x^0$.

$$x^{8-p} = 1 \Rightarrow x^{8-p} = x^0 \Rightarrow 8 - p = 0 \Rightarrow p = 8$$

Substituindo $p = 8$ no termo geral, temos:

$$T_{8+1} = \underbrace{\binom{8}{8}}_{1} x^{8-8} \cdot (-2)^8 \Rightarrow T_9 = x^0 \cdot 256 = 256$$

c) Como o binômio está elevado à 8ª potência, seu desenvolvimento possui 9 termos, conforme uma das observações vistas anteriormente. Assim, o termo médio (também chamado termo central) é o 5º termo (T_5), ou seja, $p + 1 = 5 \Rightarrow p = 4$. Calculando T_5, temos:

$$T_{4+1} = \underbrace{\binom{8}{4}}_{70} x^{8-4} \cdot (-2)^4 \Rightarrow T_5 = 70 \cdot x^4 \cdot 16 = 1120x^4$$

Observação

Quando um binômio é elevado a um expoente ímpar, a quantidade de elementos de seu desenvolvimento é par. Nesse caso, o binômio não tem um único termo médio, mas sim, dois termos centrais.

d) O termo em x^6 ocorre quando $x^{8-p} = x^6$.

$$x^{8-p} = x^6 \Rightarrow 8 - p = 6 \Rightarrow p = 2$$

Se necessário, resolva na lousa com os alunos a equação exponencial $x^{8-p} = x^6$.

Substituindo $p = 2$, no termo geral, temos:

$$T_{2+1} = \underbrace{\binom{8}{2}}_{28} x^{8-2} \cdot (-2)^2 \Rightarrow T_3 = 28x^6 \cdot 4 = 112x^6$$

Antes de ler o quadro **Observação**, faça a seguinte pergunta aos alunos:
- Qual é a quantidade de elementos no desenvolvimento do binômio quando o expoente é par? E quando é ímpar?

Depois, considerando as respostas apresentadas, diga que quando o expoente do binômio for par, a quantidade de elementos é ímpar, e, dessa maneira há um termo médio. O mesmo não ocorre quando o expoente do binômio for ímpar, pois a quantidade de termos é par, e, dessa maneira, há dois termos centrais.

R22. Calcule a soma dos coeficientes numéricos de:

a) $(a+b)^{15}$.

b) $(a+3b)^{10}$.

Resolução

a) os coeficientes de $(a+b)^{15}$ podem ser representados pelos elementos da 15ª linha do triângulo de Pascal. Para não alterar os valores dos coeficientes, tomamos $a = b = 1$.
Assim, a soma dos coeficientes de $(a+b)^{15}$ é dada por:

$$(1+1)^{15} = 2^{15} = 32\,768$$

b) Fazendo $a = b = 1$, a soma dos coeficientes de $(a+3b)^{10}$ é dada por:

$$(1 + 3 \cdot 1)^{10} = 4^{10} = 1\,048\,576$$

75. Escreva a fórmula do termo geral dos binômios.

a) $(x + 2)^6$

b) $(3bx + y)^9$

c) $\left(-x + \dfrac{2}{x}\right)^5$

d) $(2x - y)^8$

Agora, determine o 5º termo de cada um desses binômios, na ordem dos expoentes decrescentes e x.

Veja as respostas na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

76. Sejam os binômios.

I) $(2x + 1)^{10}$

II) $(a - b^2)^6$

III) $(3 + xy)^5$

IV) $\left(3 + \dfrac{3}{2x}\right)^4$

a) I, II e IV; Espera-se que os alunos respondam que, devido ao fato de esses binômios apresentarem expoente par, a quantidade de elementos de seus respectivos desenvolvimentos é ímpar, admitindo, portanto, termo médio.

a) Quais possuem termo médio? Justifique sua resposta.

b) Determine o termo médio ou os termos centrais de cada um deles.

Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Você produtor

77. De acordo com os binômios apresentados a seguir, escreva o enunciado de uma tarefa e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se a resposta está correta.

a) $(a - b)^5$

b) $(2x + y^2)^4$

c) $\left(3 + \dfrac{a}{2}\right)^6$

d) $\left(ab + \dfrac{xy^2}{2}\right)^5$

Resposta pessoal. Possível resposta: Escreva a fórmula do termo geral dos binômios a seguir.

78. Qual é a razão entre o coeficiente do 3º e do 9º termos no desenvolvimento de $(m + n)^{10}$, segundo expoente decrescente de m? 1

79. Determine, caso exista, o termo independente de x no desenvolvimento dos binômios.

a) $(-8 + x)^5$ $-32\,768$

b) $\left(\dfrac{3}{x} + x\right)^4$ 54

c) $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^7$ não existe

80. No desenvolvimento do binômio $(2b - 1)^6$, escreva o termo em b^2. $60b^2$

81. Determine o coeficiente de a^4b^4 no desenvolvimento do binômio $\left(2a + \dfrac{b}{2}\right)^8$. 70

82. No desenvolvimento do binômio $(ab + 2b)^{14}$, determine:

a) o 5º e o 10º termos na ordenação segundo expoente decrescente de a. $T_5 = 16\,016a^{10}b^{14}$; $T_{10} = 1\,025\,024a^5b^{14}$

b) o termo médio. $439\,296a^7b^{14}$

c) os termos independentes de a e de b, quando existirem. $16\,384b^{14}$; não há termo independente de b

83. Determine a soma dos coeficientes dos binômios.

a) $(x + y)^{10}$ 1 024

b) $(2x + 3y)^4$ 625

c) $(2x - 4y)^7$ -128

d) $(-x - 3y)^5$ $-1\,024$

84. Sejam os binômios.

I) $(6x + 2)^6$

II) $\left(x + \dfrac{2}{x}\right)^4$

III) $(-5 + 3x)^5$

IV) $(2x^2 + x)^8$

V) $\left(\dfrac{2}{3}x + 2x^2\right)^7$

Para cada um desses binômios, escreva:

a) o termo geral do desenvolvimento.

b) o 4º termo do desenvolvimento.

c) o termo médio ou os termos centrais.

d) o termo independente de x, caso exista.

e) o termo em x^4, caso exista.

Veja as respostas na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Finalizando a conversa

a O que você entendeu acerca do princípio fundamental da contagem?
Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que se um evento A pode ocorrer de m maneiras distintas e para cada uma dessas maneiras um evento B pode ocorrer de n maneiras distintas, então a quantidade de possibilidades de ocorrer os eventos A e B é dada por $m \cdot n$.

b Quais agrupamentos de elementos foram estudados neste capítulo?
Arranjos, combinações e permutações.

c Qual é a relação entre os números binomiais e o triângulo de Pascal?
Os números binomiais organizados de certa maneira constituem o triângulo de Pascal.

d Em que situações do dia a dia é possível utilizar a Análise combinatória?
Resposta pessoal. Espera-se que os alunos identifiquem situações em que seja necessário fazer agrupamentos.

e Você considerou importante o estudo deste capítulo? Por quê? Resposta pessoal.

Acesso digital

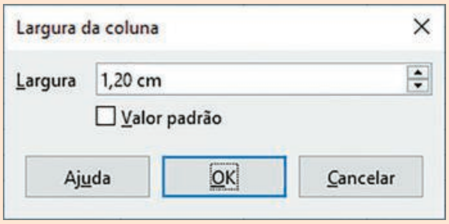
Triângulo de Pascal na planilha eletrônica

Nesta seção, vamos construir o triângulo de Pascal utilizando uma planilha eletrônica. Nessa planilha, as tabelas podem ser usadas para inserir vários tipos de informações, ou seja, dados numéricos, textos e fórmulas. Cada parte dada pelo cruzamento de uma linha com uma coluna é chamada **célula**, cuja localização é indicada por uma letra e um número. Para isso, vamos utilizar o Calc, que é um *software* gratuito de planilha eletrônica.

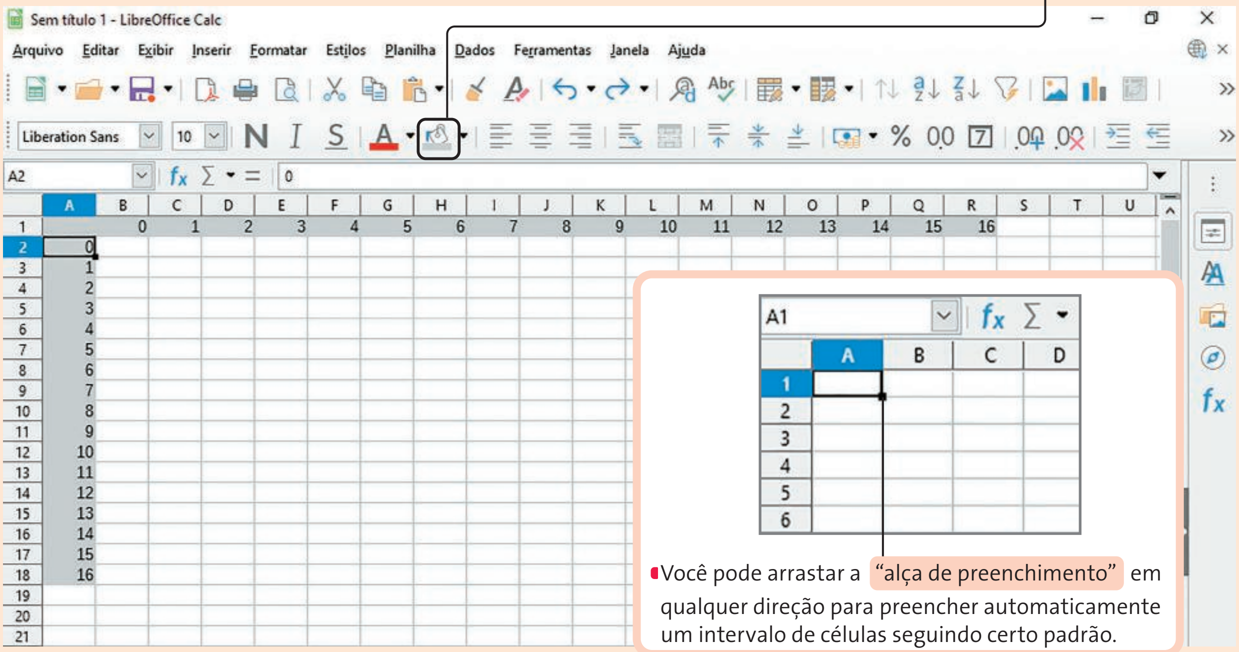
Siga as orientações do professor e o passo a passo apresentados a seguir para realizar a construção. Caso não tenha instalada a planilha Calc no computador que os alunos vão utilizar, acesse o *site* e clique no botão **Baixar o LibreOffice**. Disponível em: <http://pt-br.libreoffice.org>. Acesso em: 21 jul. 2020.

1º Inicialmente, ajuste a medida da largura das colunas. Para isso, selecione todas as células com a combinação de teclas **Ctrl**+**A** e acesse o menu **Formatar** → **Colunas** → **Largura...** .

Na caixa de diálogo, digite **1,20 cm** e tecle *Enter*.



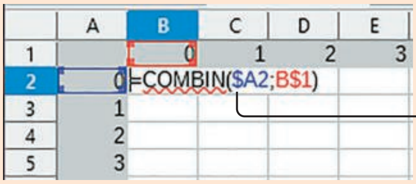
2º Insira os números de 0 a 16 na coluna **A** e na linha **1**, conforme indicado na imagem abaixo e, depois, altere a cor de fundo dessas células com o botão **Cor do plano de fundo**. Para facilitar a inserção dos números, utilize a função "autopreenchimento". Para isso, digite **0** na célula **A2** e tecle *Enter*. Depois, selecione essa célula novamente e arraste a alça de "preenchimento" para baixo. Os números da linha **1** podem ser inseridos de maneira análoga.



Você pode arrastar a "alça de preenchimento" em qualquer direção para preencher automaticamente um intervalo de células seguindo certo padrão.

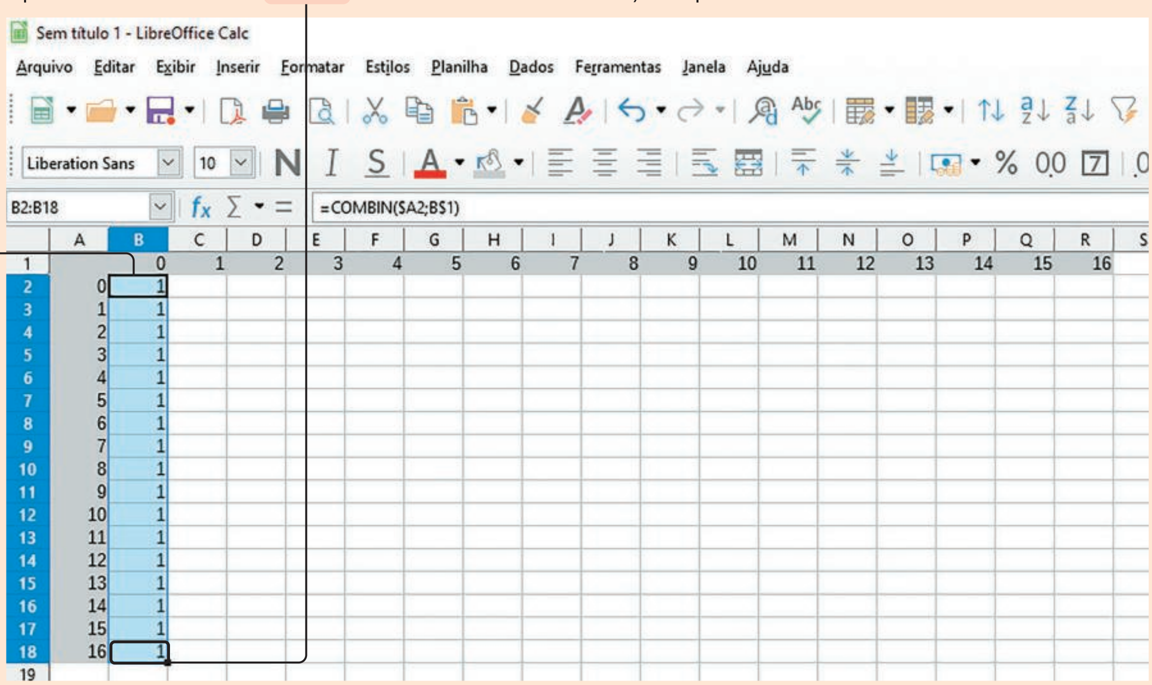
Imagens: Reprodução/Libre Office Calc/The Document Foundation

3º Para obter os números binomiais, vamos utilizar os números da coluna **A** como numeradores e os da linha **1** como denominadores. Na célula **B2**, digite =**COMBIN($A2;B$1)** e tecle *Enter*. O resultado será 1, pois a fórmula digitada corresponde ao número binominal $\binom{0}{0}$.

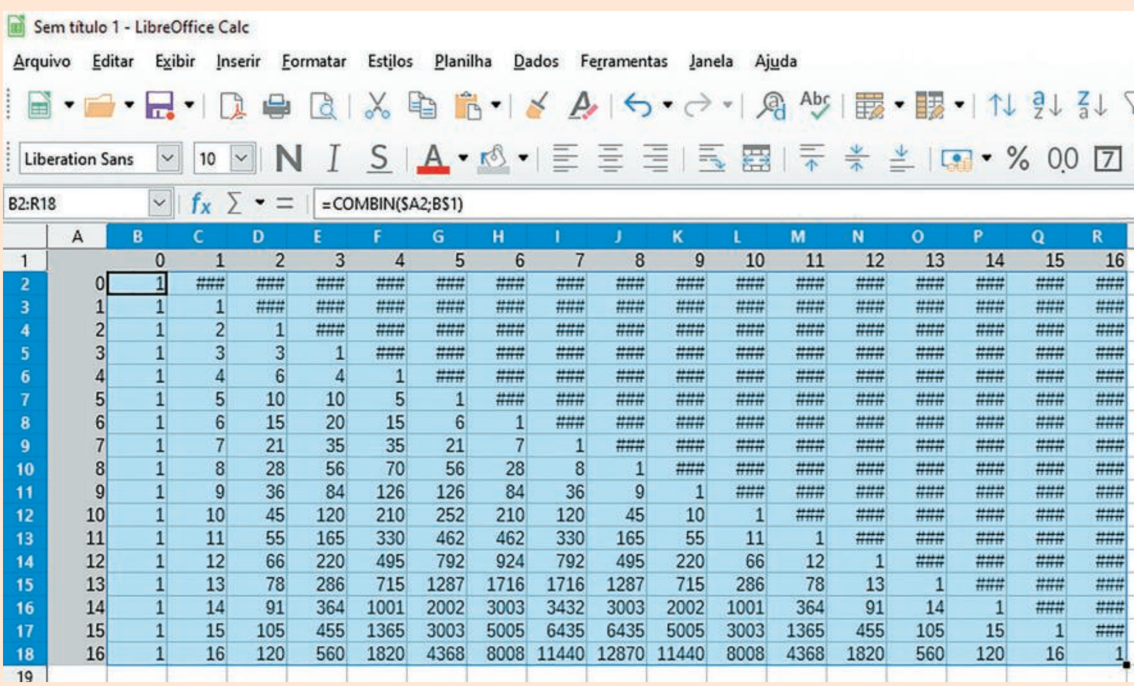


Note a presença do símbolo **$** antes de **A** e de **1**. Isso indica à planilha eletrônica que, ao utilizar a função autopreenchimento, a coluna **A** do primeiro código será fixada, assim como a linha **1** do segundo código.

4º Selecione a célula **B2** e utilize o autopreenchimento, arrastando a alça de preenchimento até a célula **B18**. Depois, com o intervalo **B2:B18** selecionado, arraste a alça de preenchimento até a célula **R18**.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
2	0	1																	
3	1	1																	
4	2	1																	
5	3	1																	
6	4	1																	
7	5	1																	
8	6	1																	
9	7	1																	
10	8	1																	
11	9	1																	
12	10	1																	
13	11	1																	
14	12	1																	
15	13	1																	
16	14	1																	
17	15	1																	
18	16	1																	
19																			



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	0	1	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###
3	1	1	1	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###
4	2	1	2	1	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###
5	3	1	3	3	1	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###
6	4	1	4	6	4	1	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###
7	5	1	5	10	10	5	1	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###
8	6	1	6	15	20	15	6	1	###	###	###	###	###	###	###	###	###	###
9	7	1	7	21	35	35	21	7	1	###	###	###	###	###	###	###	###	###
10	8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	###	###	###	###	###	###	###	###
11	9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	###	###	###	###	###	###	###
12	10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	###	###	###	###	###	###
13	11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	###	###	###	###	###
14	12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	###	###	###	###
15	13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1	###	###	###
16	14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	###	###
17	15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1	###
18	16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1
19																		

Observação Diga aos alunos que o programa Calc exibe, na **barra de *status***, localizada na parte inferior da janela, a soma dos valores das células que se encontram selecionadas. Esse recurso será útil na realização das tarefas.

Note que as células acima da diagonal principal possuem um conteúdo inválido, pois essas células correspondem a números binomiais com numerador menor do que o denominador, ou seja, casos em que o valor não pode ser definido. Se desejar, apague o conteúdo dessas células.

a) No triângulo de Pascal construído na planilha eletrônica, o valor da célula **H12** é igual à soma dos valores de qual par de células? Expresse essa igualdade usando a notação de números binomiais. G11 e H11; $\binom{9}{5} + \binom{9}{6} = \binom{10}{6}$

b) Qual é a soma dos elementos da linha **15** do triângulo de Pascal? Esse número corresponde a qual potência de base 2? 32 768; 2^{15}

c) Pesquise na internet algumas regularidades que podem ser observadas no triângulo de Pascal e verifique-as no triângulo que você construiu na planilha eletrônica. Resposta pessoal.

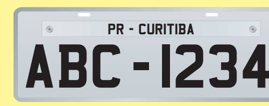
Saiba mais

Placas de veículos

Assim como um dos objetivos do Cadastro de Pessoas Físicas (CPF) é identificar as pessoas, as placas dos automóveis surgiram da necessidade de identificar os veículos, a fim de melhor organizar e controlar a frota.

Para sua identificação externa, alguns veículos possuem duas placas: uma dianteira e uma traseira. A codificação dessas placas é alfanumérica, ou seja, parte do código é composta por letras do alfabeto e parte é composta por algarismos de 0 a 9.

Até 2019, as placas dos veículos brasileiros eram compostas por três letras e quatro algarismos, nessa ordem. Pelo princípio fundamental da contagem, é possível calcular a quantidade de placas distintas possíveis de ser obtidas seguindo essas condições. Nesse caso, temos:



$$\underbrace{\underline{26} \cdot \underline{26} \cdot \underline{26}}_{\text{letras}} \cdot \underbrace{\underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10}}_{\text{algarismos}} = 175\,760\,000$$

A partir de 2019 e com referência nos mesmos moldes do sistema adotado pelos países pertencentes à União Europeia, as novas placas dos veículos no Brasil, conhecidas como placas Mercosul, foram elaboradas para padronizar a identificação dos veículos do Brasil, Argentina, Paraguai, Uruguai e Venezuela. Nessas placas, um dos caracteres numéricos foi substituído por uma letra do alfabeto. Desse modo, os códigos alfanuméricos descritos nas placas atuais são compostos por quatro letras e três algarismos.

Com a criação do novo modelo de placas, é possível criar um banco de dados integrado, o que promete facilitar a fiscalização, principalmente no que diz respeito a veículos roubados que cruzam as fronteiras.

decalque: reprodução de um desenho ou escrita por meio de sua compressão de encontro a uma superfície.

O emplacamento de um veículo pode ser realizado como mostra o esquema a seguir.

Ao realizar a compra de um veículo em uma concessionária, o proprietário dispõe de um prazo de 15 dias consecutivos para fazer o registro desse veículo junto ao Detran e efetuar seu emplacamento.

No Detran, obtém o decalque do chassi e retira a autorização de confecção do primeiro emplacamento. Para isso, o proprietário do veículo deve portar os documentos necessários, incluindo a nota fiscal do veículo adquirido, uma ficha de cadastro e o comprovante de pagamento da taxa.

emblema do Mercosul

nome do país

marca d'água

bandeira do país

código bidimensional

signo/distintivo do Brasil

selo fiscal federal (*chip*)

A estampagem dessa placa é composta de 7 caracteres alfanuméricos em alto-relevo, sendo 4 letras e 3 números. Denominando **L** o caractere referente à letra e **N** o caractere referente ao número, eles são dispostos na seguinte sequência: **LLLNLNN**.

De acordo com o tipo de atribuição que um veículo recebe, a cor de sua placa pode se diferenciar com relação às placas dos veículos comuns.

Veículos particulares.

Veículos especiais.

Veículos comerciais.

Veículos oficiais.

Veículos diplomáticos.

Veículos de colecionador.

a) Utilize seus conhecimentos acerca de Análise combinatória e verifique quantos códigos distintos podem ser formados no emplacamento de veículos de acordo com o novo sistema de codificação.

456 976 000 códigos

b) Qual foi o motivo para implantar um novo sistema de codificação?

b) Espera-se que os alunos respondam que o motivo foi o aumento da frota brasileira de veículos, que, devido à taxa de crescimento, podia ultrapassar a qualquer momento a quantidade de códigos disponíveis para a elaboração de placas distintas.

c) Em sua opinião, quais são os possíveis transtornos causados por um emplacamento com o mesmo código em mais de um veículo?

Resposta pessoal. Espera-se que os alunos citem motivos relacionados a multas e perda de pontos na carteira, impostos cobrados indevidamente, entre outros.

Ilustrações: Daniel Carvalho

Após isso, é gerado um código alfanumérico, que será utilizado para identificar o veículo recém-cadastrado. No caso dos veículos 0 km, o proprietário pode optar, seguindo algumas regras, por escolher a sequência de caracteres que vai identificar seu veículo, mediante o pagamento de uma taxa.

Depois de obter toda a documentação oficial, o código alfanumérico e pagar o seguro obrigatório, o proprietário deverá ir a uma loja credenciada para solicitar a confecção de suas placas.

Com as placas em mãos, o proprietário retorna ao Detran, onde um funcionário qualificado vai fixar o conjunto de placas no veículo. Assim, o veículo estará pronto para entrar em circulação. Vale lembrar que todo o processo descrito pode ser realizado por um despachante credenciado do Detran, mediante o pagamento de uma taxa de serviço.

Conectando ideias

Veja na Assessoria pedagógica comentários e sugestões sobre a seção CONECTANDO IDEIAS.

A “receita” dos seres vivos

Graças à complexidade de nossa constituição genética, que é uma combinação de cromossomos vindos de nosso pai e de nossa mãe, é possível identificar uma pessoa biologicamente pela análise de seu DNA. Essa combinação de cromossomos fornece uma variedade de possíveis combinações que contribuem para a identificação de um indivíduo.

Todo ser humano é único, ou seja, não há duas pessoas idênticas. O que caracteriza essa individualidade é nosso genoma, já que cada um possui o seu, exceto os gêmeos univitelinos, que possuem genomas iguais.

O genoma, presente nos genes que compõem o DNA, é o conjunto das informações genéticas de um organismo e ingrediente principal dessa “receita”, a qual carrega todas as nossas características, como as cores dos olhos, da pele e do fio de cabelo.

Nos seres humanos, a sequência de nucleotídeos na estrutura do DNA é extremamente parecida, diferenciando-se apenas em pequenos trechos. Isso também ocorre com o chimpanzé. De acordo com as primeiras pesquisas feitas por Mary-Claire King e Alan Wilson na década de 1980, o DNA de um chimpanzé é 99% igual ao do ser humano. Já os genomas do chimpanzé diferem em cerca de 3% dos genomas de um gorila.

As imagens não estão representadas em proporção e as cores utilizadas não correspondem às reais.

Cromossomo: estrutura compactada no interior da célula, formada por DNA associado a proteínas.

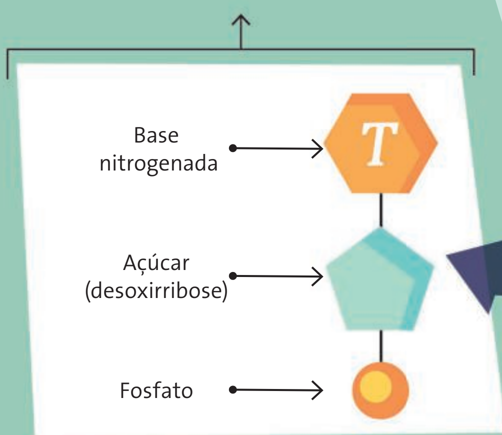
Espera-se que os alunos respondam que podemos associar a organização da sequência de nucleotídeos que formam a estrutura do DNA com os conteúdos de arranjo e combinação estudados neste capítulo.

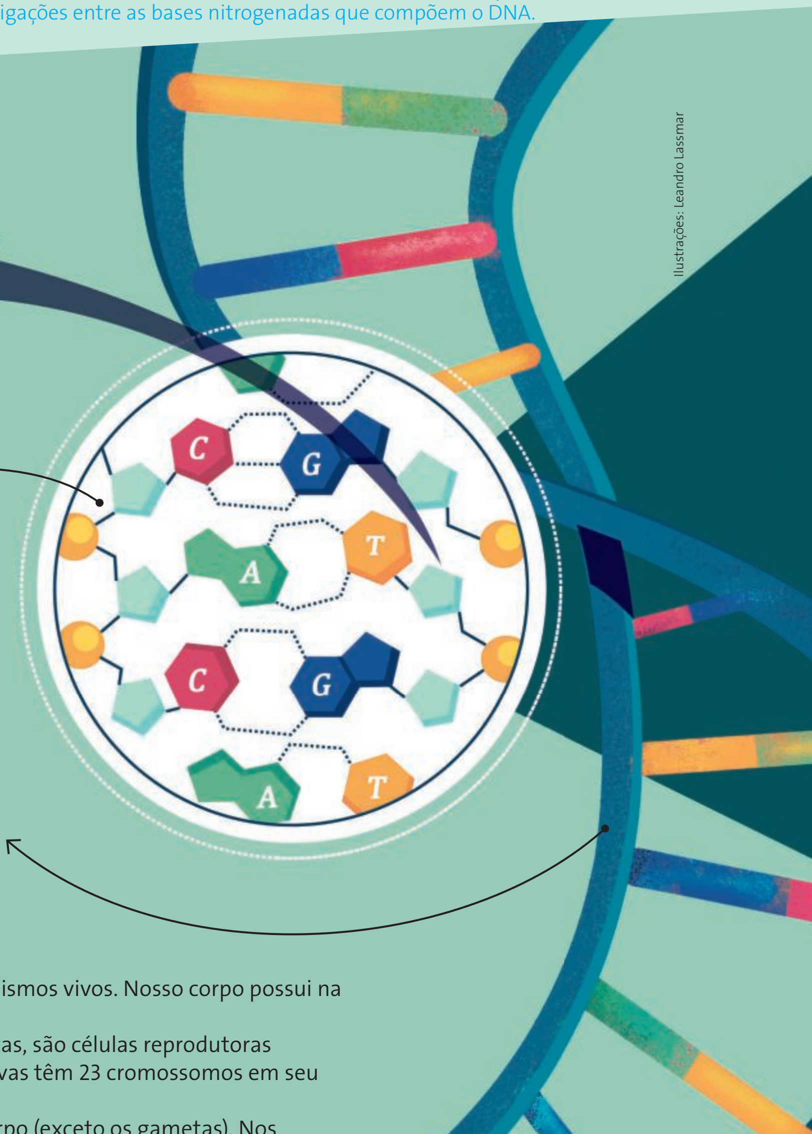
a De que maneira os conteúdos abordados neste capítulo estão relacionados à estrutura do DNA?

b Os conhecimentos que você possui sobre Análise combinatória o ajudaram a compreender as informações apresentadas? Justifique sua resposta.

Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que o estudo dos conteúdos de Análise combinatória os auxiliou na compreensão das ligações entre as bases nitrogenadas que compõem o DNA.

Representação esquemática de um nucleotídeo
O DNA é comparado a uma escada em espiral, sendo o fosfato e o açúcar o corrimão e as bases nitrogenadas os degraus. Na composição do DNA, existem quatro bases nitrogenadas: adenina (A), guanina (G), timina (T) e citosina (C). A adenina sempre se liga à timina por meio de duas pontes de hidrogênio e a citosina à guanina por meio de três pontes de hidrogênio.





Ilustrações: Leandro Lassmar

Gene: sequência de **nucleotídeos** que determinam as características do ser vivo. Um gene tem a dimensão da metade de um fio de cabelo (0,4 micrômetro).

DNA: abreviação de ácido desoxirribonucleico. Trata-se de uma molécula comprida no formato de espiral, formada pela junção de uma grande quantidade de nucleotídeos. Esticado, atinge aproximadamente 2 m de comprimento e todo o DNA do corpo atinge aproximadamente 6 bilhões de quilômetros, 40 vezes a medida da distância entre a Terra e o Sol.

Célula: unidade básica na constituição dos organismos vivos. Nosso corpo possui na ordem de trilhões de células.
Células germinativas: também chamadas gametas, são células reprodutoras (espermatozoides e óvulos). As células germinativas têm 23 cromossomos em seu núcleo.
Células somáticas: maior parte das células do corpo (exceto os gametas). Nos humanos, a célula somática é constituída por 46 cromossomos (23 pares) em seu núcleo.

nucleotídeo: subunidades do DNA (ácido desoxirribonucleico) e do RNA (ácido ribonucleico). No genoma humano, a sequência de nucleotídeos mostra como os genes estão organizados

Fontes de pesquisa: Qual a diferença entre DNA, gene e cromossomo? *Superinteressante*, 2 set. 2019. Disponível em: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/qual-a-diferenca-entre-dna-gene-e-cromossomo>. Acesso em: 28 fev. 2020.

ALBERTS, Bruce et al. *Fundamentos da biologia celular*. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2011.

WATSON, James D; BERRY, Andrew. *DNA*: O segredo da vida. Trad. Carlos Afonso Malferrari. São Paulo: Companhia das Letras, 2005. p. 256.

CAPÍTULO 2

Probabilidade

Belish/Shutterstock.com

Os repasses sociais da loteria

Entre as loterias para apostas no Brasil, algumas oferecem prêmios com valores bem altos que podem fazer do ganhador um milionário. Contudo, não é tão fácil assim ganhar esse prêmio. Em uma loteria, o apostador deve escolher de 6 a 15 números de um total de 60, podendo ganhar prêmios acertando 4, 5 ou 6 números. Porém, o que pouca gente sabe é que o valor bruto que o ganhador recebe é 43,35% do total arrecadado. Isso acontece porque parte do valor arrecadado é repassado ao governo federal para investimentos em diversas áreas, como Saúde, Educação, Segurança e Esportes, a fim de beneficiar toda a população.

Veja, no quadro abaixo, alguns dos programas beneficiados e o percentual repassado.

Programas	Percentual
Fundo Nacional da Cultura - FNC	2,92%
Fundo Nacional de Segurança Pública - FNSP	9,26%
Confederação Brasileira do Desporto Escolar - CBDE	0,22%
Comitê Olímpico Brasileiro - COB	1,73%
Comitê Paralímpico Brasileiro - CPB	0,96%

Fonte de pesquisa: CAIXA ECONÔMICA FEDERAL (CEF). *Mega-Sena*. Disponível em: <http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/megasena/>. Acesso em: 9 abr. 2020.

a Quais são as chances de uma pessoa que apostou 6 números nessa loteria acertar os 6 números apostados?
As chances de uma pessoa acertar os 6 números são de 1 em 50 063 860.

b Se você ganhasse na loteria, o que você faria com o prêmio?
Resposta pessoal.

Você cidadão

c Você é participante ou conhece alguém que participa de algum projeto social? Converse com seus colegas.
Resposta pessoal. Espera-se que os alunos reflitam sobre a importância de ajudar organizações que auxiliam pessoas em situação de vulnerabilidade.

Muitas pessoas no Brasil sonham em ganhar na loteria. Como as chances de acerto dos 6 números são pequenas, o apostador conta também com sua sorte.

1 Introdução 50
2 Experimento aleatório, espaço amostral e eventos 53
3 Probabilidade em espaço amostral equiprovável 59
4 Probabilidade da união de eventos 66
5 Probabilidade condicional 69
6 Lei binomial das probabilidades 78

1 Introdução

BNCC
- CG 3
- CG 4
- CG 8
- CG 9
- CECNT 2
- CEMT 1
- CEMT 3
- CEMT 5
- EM13MAT106
- EM13MAT311
- EM13MAT312
- EM13MAT511

No Brasil, há várias loterias cujas apostas são realizadas em casas lotéricas.

Em certa loteria são sorteados 6 números de um total de 60, e os acertadores recebem o prêmio principal. Existe também a possibilidade de se ganhar uma parte do prêmio acertando apenas 5 ou 4 números. Nesses dois últimos casos, o valor do prêmio é menor.

Nessa loteria, o apostador deve escolher de 6 a 15 números, dentre os 60 disponíveis em cada cartela. Para apostar 6 números (aposta mínima), o custo é, atualmente, R$ 4,50. Porém, pode-se apostar até 15 números, aumentando consideravelmente suas chances de ganhar. A cada número extra apostado, o preço da aposta aumenta.

Observação
Apenas pessoas com mais de 18 anos de idade podem participar de apostas.

Probabilidade de acerto nessa loteria

Quantidade de números escolhidos	Valor da aposta (*)	Probabilidade de acerto (uma em ...)		
		Seis	Cinco	Quatro
6	R$ 4,50	50 063 860	154 518	2 332
7	R$ 31,50	7 151 980	44 981	1 038
8	R$ 126,00	1 787 995	17 192	539
9	R$ 378,00	595 998	7 791	312
10	R$ 945,00	238 399	3 973	195
11	R$ 2 079,00	108 363	2 211	129
12	R$ 4 158,00	54 182	1 317	90
13	R$ 7 722,00	29 175	828	65
14	R$ 13 513,50	16 671	544	48
15	R$ 22 522,50	10 003	370	37

* Valores referentes a julho de 2020.


Emiliano Cavalcante

Fonte de pesquisa: CAIXA ECONÔMICA FEDERAL (CEF). *Mega-Sena*. Disponível em: <http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/megasena/>. Acesso em: 9 abr. 2020.

No momento do sorteio, são usados dois globos com bolas numeradas, sendo um deles com bolas numeradas de 0 a 5 (referentes à casa das dezenas) e o outro com bolas numeradas de 0 a 9 (referentes à casa das unidades). Se é sorteado o número 00, este, para efeito de premiação, corresponde ao 60.

Os números sorteados são publicados no *site* das casas lotéricas e nos principais veículos de comunicação, como rádio, televisão, jornais, entre outros.

A chance de um apostador ganhar o prêmio máximo, usando apenas uma cartela com 6 números, é aproximadamente 0,00000002%.

O prêmio recebido pelo ganhador dessa loteria corresponde a 43,35% de todo o dinheiro arrecadado, os outros 56,65% vão para programas sociais e despesas de custeio e manutenção. Segundo a Receita Federal, todos os prêmios estão sujeitos à incidência de imposto de renda, e a **alíquota** pode chegar a 30%. Caso não haja ganhador no sorteio, o prêmio acumula para o sorteio seguinte. Vale lembrar que os prêmios **prescrevem** 90 dias após a data do sorteio.

Os sorteios dessa loteria são realizados todas as quartas-feiras e sábados, ou seja, duas vezes por semana.

alíquota: percentual que serve de base para cálculo de um imposto

prescrever: ficar sem efeito por ter passado determinado prazo legal

Para conhecer as chances de se ganhar nessa loteria, por exemplo, são utilizadas técnicas de cálculo probabilístico, que vamos estudar nos tópicos a seguir.

As questões envolvendo a teoria elementar das probabilidades já eram objeto de estudo desde a Antiguidade, mas foi no início do século XV que as discussões em relação aos **jogos de azar** passaram a ter um tratamento matemático mais sistematizado. Um dos primeiros impressos acerca desse assunto está na *Summa de arithmetica, geometria, Proportioni et proportionalita* (1494) do frade franciscano italiano Luca Pacioli (1445-1509).

Obra do artista italiano Jacopo de Barbari (1440-1516), retratando Luca Pacioli e supostamente Leonardo da Vinci.

A partir daí, vários estudiosos contribuíram para a sistematização acerca da probabilidade, entre eles os franceses Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), aos quais geralmente é creditada a origem da **teoria das probabilidades**.

Nos séculos XVIII e XIX, essa teoria continuou a se desenvolver com contribuições de Leonhard Euler (1707-1783), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Jakob Bernoulli (1654-1705), cujo livro *Ars conjectandi*, dedicado exclusivamente às probabilidades, foi publicado postumamente, em 1713.

Fonte de pesquisa: CALABRIA, Angélica R.; CAVALARI, Mariana F. Um passeio histórico pelo início da Teoria das Probabilidades. *SBHMat*, Campinas, 2013. Disponível em: <https://fortunato.mat.ufg.br/up/335/o/Um_passeio_hist%C3%B3rico_pelo_in%C3%ADcio_da_teoria_das_probabilidades-Mariana_Feiteiro_Cavalari_e_Ang%C3%A9lica_R._Cal%C3%A1bria.pdf?1409001312>. Acesso em: 30 mar. 2020.

jogo de azar: aquele em que a perda ou o ganho depende exclusivamente do acaso (sorte)

Conversando

a Em nosso dia a dia, ouvimos frases como: "a probabilidade de um bebê nascer menino é 50%", "a probabilidade de ocorrer acidentes no trânsito aumenta significativamente quando o condutor consome bebidas alcoólicas", "é muito remota a probabilidade de cair mais de um raio em um mesmo lugar". Cite outros exemplos de situações envolvendo as chances de ocorrer certo acontecimento.

b Em sua opinião, é importante saber, em algumas situações, a probabilidade de ocorrer um evento? Por quê? Resposta pessoal.

c O jogo de xadrez é um jogo de azar? Justifique sua resposta. Não. O jogo de xadrez é um jogo de estratégia e de tática, e a perda ou ganho depende exclusivamente da habilidade do jogador.

d Para aumentar as chances de acertar na loteria citada na página anterior, apostadores realizam várias apostas, alguns chegam a participar de "bolões" – apostas organizadas por grupos de amigos, empresas e lotéricas. Por que as chances aumentam para quem realiza mais de uma aposta?

e É possível calcular a chance de se ganhar nessa loteria em uma aposta mínima utilizando combinação simples? Justifique sua resposta.
Sim. Basta estabelecer a razão entre a aposta feita e o total de apostas possíveis, dada pela quantidade de possibilidades de compor uma aposta simples de 6 números, que é uma combinação simples dos 60 números, tomados 6 a 6.

a) Resposta pessoal. Possíveis respostas: a probabilidade de sair o número 6 em um lançamento de dados; a probabilidade de chover hoje; a probabilidade de um candidato passar em um vestibular; a probabilidade de um político ser eleito.

d) Normalmente os bolões realizam várias apostas combinadas, em que as cartelas recebem registros com mais números por cartela, logo, há mais possibilidade de acerto por aposta.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

1. No Brasil, a taxa de gestações não planejadas é superior a 50%, ou seja, mais da metade das mulheres ou casais que engravidam não estão preparados para esse acontecimento. Existem diversas maneiras de se evitar uma gravidez não planejada, e uma delas é a utilização de métodos contraceptivos, que são considerados eficazes, porém não são 100% seguros. Os métodos contraceptivos ou anticoncepcionais, como são conhecidos, incluem medicamentos, procedimentos, dispositivos e comportamentos que visam evitar a gravidez.

Esses métodos contraceptivos têm probabilidade de falhar, e o índice de falha é calculado considerando a quantidade de gestações não planejadas entre os usuários de um determinado método contraceptivo nos primeiros 12 meses de uso. Observe o índice de falha dos métodos mais comuns.

Sergiy Kuzmin/Shutterstock.com

Preservativo masculino.

SPL/Fotoarena

Preservativo feminino.

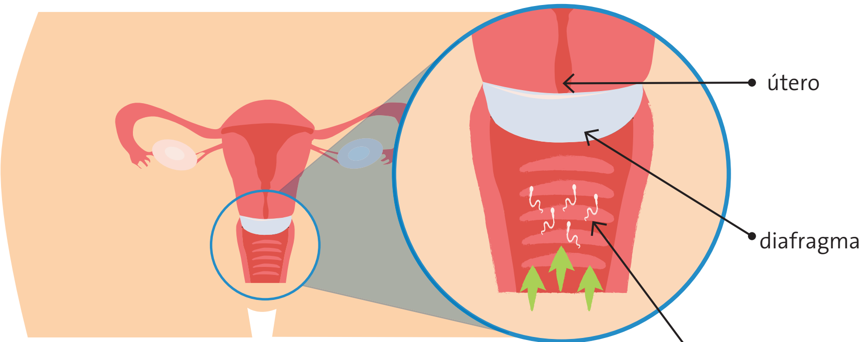
Os preservativos têm um índice de falha entre 3% a 21%. Os preservativos são os únicos métodos que previnem as infecções sexualmente transmissíveis.

Image Point Fr/ Shutterstock.com

O dispositivo intrauterino (DIU) é uma estrutura introduzida no interior do útero. Existem dois modelos, um que age liberando hormônios e outro que libera íons de cobre. Ambos dificultam a fecundação do ovócito e a implantação do embrião no útero. Esse método tem índice de falha entre 0,1% a 0,8%.

areeya_ann/ Shutterstock.com

O anticoncepcional hormonal contém hormônios sintéticos similares aos produzidos pelo corpo da mulher. Esse método, quando administrado corretamente, tem índice de falha entre 0,1% a 5%.



Emiliano Cavalcante

O diafragma é uma estrutura de borracha ou silicone, introduzido no colo do útero. O índice de falha desse método é 6% a 18%.

As imagens não estão representadas em proporção e as cores utilizadas não correspondem às reais.

Fontes de pesquisa: BRASIL. Ministério da Saúde. *Assistência em planejamento familiar*: manual técnico. Disponível em: <http://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/0102assistencia1.pdf>. Acesso em: 21 jul. 2020.

BRASIL. Ministério da Saúde. *Direitos sexuais, direitos reprodutivos e métodos anticoncepcionais*. Disponível em: <http://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/direitos_sexuais_reprodutivos_metodos_anticoncepcionais.pdf>. Acesso em: 21 jul. 2020.

a) De acordo com o índice de falha, qual método contraceptivo pode ser considerado mais eficaz na prevenção de uma gravidez não planejada? DIU

b) Além dos métodos contraceptivos citados, realize uma pesquisa e cite outras maneiras de se evitar uma gravidez não planejada. Espera-se que os alunos citem os métodos contraceptivos definitivos, como a laqueadura e a vasectomia.

c) Dentre os métodos apresentados, por que os preservativos são os únicos que oferecem proteção contra as infecções sexualmente transmissíveis (ISF)? Porque eles impedem o contato entre os órgãos genitais e suas secreções, que podem conter os agentes patogênicos causadores desse tipo de doença.

2 Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

Neste tópico, vamos abordar alguns conceitos importantes no estudo das probabilidades: experimento aleatório, espaço amostral e eventos. Diga aos alunos que existem jogos que utilizam dados viciados, isto é, aqueles fabricados com alguma modificação a fim de que se possa manipular o resultado. Cabe destacar, no entanto, que nos exemplos apresentados no livro, estamos considerando dados honestos ou não viciados. O mesmo vale para as moedas, as fichas, as bolas numeradas etc.

Experimento aleatório

Ao lançarmos um dado honesto, não é possível prever qual será o número de pontos da face que ficará voltada para cima. Essa situação, assim como o sorteio de bolas numeradas em um globo das loterias apresentadas no início do capítulo, em que não é possível prever o resultado, apenas determinar todas as possibilidades, recebe o nome de **experimento aleatório**.

No caso do dado, mesmo lançando-o várias vezes sob condições idênticas, não podemos garantir que o resultado será sempre igual.

Resumindo:

Todo experimento (ou fenômeno) que, repetido várias vezes sob condições idênticas, apresentar resultados imprevisíveis, isto é, depender exclusivamente do acaso, é denominado **experimento aleatório**.

Se julgar conveniente, diga aos alunos que, em contraponto com os experimentos aleatórios, há também os **experimentos determinísticos**, que são aqueles em que os resultados são sempre os mesmos, qualquer que seja a quantidade de repetições.

Exemplos

1. Lançamento de um dado ou de uma moeda.
2. Sorteio de um número em uma urna.
3. Resultado de um jogo de loteria.
4. Retirada, sem ver, de uma carta de um baralho comum.

Gordon Wheaton/Shutterstock.com

O dado de 6 faces se tornou o formato mais clássica desse objeto, mas existem outros com 4, 8, 10, 12, 20, 30 e até 100 faces, utilizados em jogos de dados propriamente ditos, jogos de corrida, *wargames*, RPG etc. Segundo a tradição grega, os dados foram inventados por Palamedes, companheiro do herói Agamenon, na mitológica guerra de Troia. No entanto, existem indícios de que eles eram conhecidos por todos os povos da Antiguidade: egípcios, persas, assírios e babilônios.

Fonte de pesquisa: SUPER INTERESSANTE. *Qual a origem do jogo de dados?* Disponível em: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/qual-e-a-origem-do-jogo-de-dados/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

Espaço amostral

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é denominado **espaço amostral**, indicado, em geral, pela letra grega Ω (lê-se: ômega).

Podemos classificar o espaço amostral em:

- Discreto: quando o conjunto é finito ou infinito enumerável, ou seja, quando é possível estabelecer uma ordem e realizar a enumeração dos elementos desse conjunto.

Exemplos

1. Ao lançarmos um dado de 6 faces, o espaço amostral é o conjunto finito:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. Ao lançarmos uma moeda até que a primeira ocorrência seja coroa, o espaço amostral é o conjunto infinito enumerável (cara: C; coroa: K):

$$\Omega = \{(K), (C, K), (C, C, K), (C, C, C, K), ...\}$$

- Contínuo: quando o conjunto é infinito não enumerável, ou seja, quando não é possível estabelecer enumeração. É o que acontece com intervalos dos números reais.

Exemplo

Ao sortearmos um número real entre 1 e 2, o espaço amostral é o conjunto infinito não enumerável: $\Omega =]1,2[$.

Observações

Quando o espaço amostral é muito grande, utilizamos as reticências (…) para simplificar sua escrita.

Evento

Todo subconjunto de um espaço amostral Ω de um experimento aleatório é denominado **evento** ou **acontecimento**. Em geral, indicamos um evento (ou acontecimento) por uma letra maiúscula.

Exemplo

Ao lançarmos um dado de 6 faces, o espaço amostral é dado pelo número de pontos da face voltada para cima, ou seja, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Alguns eventos que podemos citar em relação a esse espaço amostral são:

- ocorrência de números de pontos menores do que 4: $A = \{1, 2, 3\}$.
- ocorrência de números de pontos ímpares: $B = \{1, 3, 5\}$.
- ocorrência de números de pontos maiores do que 1: $C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

  A ocorrência desse evento é muito provável, o que não quer dizer que ele vai acontecer sempre, mas sim com maior frequência.
- ocorrência de um número de pontos maior do que 5: $D = \{6\}$.

  É pouco provável a ocorrência desse evento. Quando o evento é um conjunto unitário, dizemos que é **simples** ou **elementar**.
- ocorrência de um número de pontos menor do que 7: $E = \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

  A ocorrência desse evento é certa, pois qualquer número de pontos do espaço amostral é menor do que 7. Dizemos que um evento é **certo** quando o espaço amostral é igual a ele. Nesse caso, $\Omega = E$.
- ocorrência de um número de pontos maior do que 6: $F = \varnothing$.

  A ocorrência desse evento é impossível, pois qualquer número de pontos do espaço amostral é menor ou igual a 6. Nesse caso, F é vazio e o evento é **impossível**.

Se julgar necessário, ao abordar o exemplo, leve para a sala de aula alguns dados ou peça aos alunos que construam um.

Observação

Um conjunto que não tem elementos é chamado **conjunto vazio**. Podemos indicar um conjunto vazio de duas maneiras: $Q = \{\ \}$ ou $Q = \varnothing$. Quando um conjunto A é vazio, o número de elementos de A é zero, que indicamos por $n(A) = 0$.

Após os alunos lerem a tirinha, peça a eles que citem outros exemplos de eventos certos.

Fernando Gonsales/Acervo do Cartunista

GONSALES, Fernando. Níquel Náusea. *Folha de S. Paulo*, São Paulo, 27 set. 2002. Ilustrada, p. E11.

Ao ler a tirinha, podemos notar que os dois cavalos escolheram "par". Nesse caso, a única possibilidade de resultado com a soma dos dedos – que na verdade é um casco rígido – de duas patas será dois. Essa situação caracteriza um evento certo, ou seja, o único resultado possível é um número par.

Problemas e exercícios resolvidos

R1. Um casal pretende ter três filhos. Determine:

a) o espaço amostral que representa as possibilidades de filhos em relação ao sexo masculino (*M*) ou feminino (*F*).

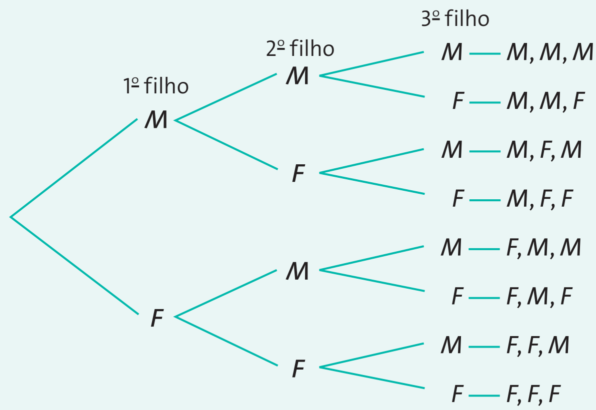
b) o evento *A*, da ocorrência de três filhos do sexo masculino.

c) o evento *B*, da ocorrência de dois filhos do sexo feminino e um do masculino.

Observação
Nesse caso, suponha que as três gestações ocorram e, em cada uma delas, ocorra o nascimento de apenas um filho.

Resolução

a) Podemos determinar todas as opções por meio do diagrama de árvore.



O espaço amostral é dado por:

$$\Omega = \{(M, M, M), (M, M, F), (M, F, M), (M, F, F), (F, M, M), (F, M, F), (F, F, M), (F, F, F)\}$$

b) Ocorrência de três filhos do sexo masculino: $A = \{(M, M, M)\}$.

c) Ocorrência de dois filhos do sexo feminino e um do masculino: $B = \{(M, F, F), (F, M, F), (F, F, M)\}$.

R2. Alberto, Berenice e Célio vão fazer o teste prático para a obtenção da carteira de habilitação. Para fazer o teste, a autoescola reservou um único dia, sendo dois horários no período da manhã e dois no período da tarde. Determine o espaço amostral Ω que representa todas as possibilidades de cada um deles escolher os horários para realizar o teste.

Resolução

Podemos representar todas as opções de escolha utilizando o seguinte quadro:

	Manhã (M_1)	Manhã (M_2)	Tarde (T_1)	Tarde (T_2)
Alberto (A)	(A, M_1)	(A, M_2)	(A, T_1)	(A, T_2)
Berenice (B)	(B, M_1)	(B, M_2)	(B, T_1)	(B, T_2)
Célio (C)	(C, M_1)	(C, M_2)	(C, T_1)	(C, T_2)

Assim, o espaço amostral é dado por:

$$\Omega = \{(A, M_1), (A, M_2), (A, T_1), (A, T_2), (B, M_1), (B, M_2), (B, T_1), (B, T_2), (C, M_1), (C, M_2), (C, T_1), (C, T_2)\}$$

Verifique se os alunos perceberam que o espaço amostral possui 12 elementos, isto é, $3 \cdot 4 = 12$.

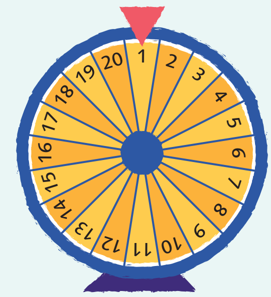
R3. Uma roleta contém números de 1 a 20. Considerando que ela será girada apenas uma vez:

a) Determine o espaço amostral Ω dos resultados possíveis.

b) Determine:

- o evento A, da ocorrência do número 13.
- o evento B, da ocorrência de um número ímpar.
- o evento C, da ocorrência de um número múltiplo de 5.

c) Represente por um diagrama de Venn o espaço amostral Ω e os eventos A, B e C.



Esquema representando uma roleta com números de 1 a 20.

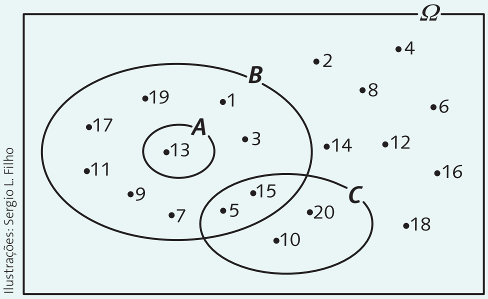
Resolução

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots, 17, 18, 19, 20\}$

b) • ocorrência do número 13: $A = \{13\}$.

- ocorrência de um número ímpar: $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$.
- ocorrência de um número múltiplo de 5: $C = \{5, 10, 15, 20\}$.

c)



Ilustrações: Sergio L. Filho

Observação

Além da representação com as chaves, podemos representar um conjunto por meio de **diagramas**, conhecidos por diagramas de Venn, em homenagem ao lógico e filósofo inglês John Venn (1834-1923). A imagem ao lado apresenta a relação entre os diagramas de Venn que representam os conjuntos A, B, C e Ω.

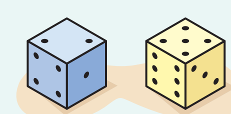
R4. Dois dados de 6 faces cada, um azul e outro amarelo, foram lançados simultaneamente. Determine:

a) o espaço amostral Ω dos resultados possíveis.

b) o evento A, da ocorrência da mesma quantidade de pontos em ambos.

c) o evento B, de a soma dos pontos ser igual a 6.

d) o evento C, de a soma dos pontos ser maior do que 12.



Resolução

a) Podemos representar o espaço amostral do experimento por meio do quadro ao lado:

Note que o espaço amostral possui 36 elementos, isto é, $6 \cdot 6 = 36$.

Portanto, o espaço amostral é:

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$$

		Dado amarelo					
		⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
Dado azul	⚀	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	⚁	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	⚂	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	⚃	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	⚄	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	⚅	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Ilustrações: Sergio L. Filho

b) Ocorrência da mesma quantidade de pontos em ambos:

$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

c) A soma dos pontos ser igual a 6:

$B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$

d) A soma dos pontos ser maior do que 12.

A ocorrência desse evento é impossível, pois a maior soma de pontos possível é 12. Portanto, o evento C não tem elementos.

8. Resposta pessoal. Possível resposta:
a) Determine o evento A, em que os números são menores do que 9. b) Determine o evento B, em que os números são pares.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

2. Um dado e uma moeda são lançados, e os resultados obtidos são registrados. Determine o espaço amostral do experimento. $\Omega = \{(1, K), (1, C), (2, K), (2, C), (3, K), (3, C), (4, K), (4, C), (5, K), (5, C), (6, K), (6, C)\}$

Observação
Sempre que necessário, utilize C e K, respectivamente, para indicar a cara e a coroa de uma moeda.

3. Um experimento é realizado lançando-se duas moedas distintas simultaneamente. Determine:

a) o espaço amostral Ω. $\Omega = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$

b) o evento A, da ocorrência de exatamente duas caras. $A = \{(C, C)\}$

c) o evento B, da ocorrência de pelo menos uma cara. $B = \{(C, C), (K, C), (C, K)\}$

d) o evento D, da não ocorrência de cara. $D = \{(K, K)\}$

4. Dois dados distintos, cada um com 6 faces, são lançados simultaneamente. Determine:

a) o espaço amostral Ω. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

b) o evento A, em que a soma dos números de pontos é maior ou igual a 10.

c) o evento B, em que a soma dos pontos é menor do que 2.

d) o evento C, em que a soma dos pontos é menor do que 13.

Observação
Construa um quadro indicando todas as possibilidades de soma dos pontos dos dados.

Você cidadão

5. Um time de basquete em cadeira de rodas vai disputar um campeonato regional. Para isso, foram chamados, dentre outros, 5 jogadores que jogam na defesa. Nomeando esses jogadores de A, B, C, D e E, determine o espaço amostral Ω das duplas de defesa que podem ser formadas com esses jogadores.

FocusDzign/Shutterstock.com

Jogo de basquete em cadeira de rodas.

5. $\Omega = \{(A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E), (C, D), (C, E), (D, E)\}$

6. Indique se os espaços amostrais referentes aos experimentos a seguir são discretos ou contínuos.

a) Sorteio de um estado da região Sudeste do Brasil: discreto
Ω = {Espírito Santo, Minas Gerais, Rio de Janeiro, São Paulo}

b) Lançamento de uma moeda 2 vezes seguidas (cara: C; coroa: K): discreto
$\Omega = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$

c) Sorteio de um número real entre 5 e 7: contínuo
$\Omega =]5, 7[$

d) Sorteio de um número natural par maior do que 3: discreto
$\Omega = \{4, 6, 8, 10, 12, ...\}$

7. Atualmente, a principal função dos óculos escuros é a proteção dos olhos. Por isso, a escolha da lente deve ser apropriada para filtrar os raios ultravioleta, infravermelho e outras radiações tão nocivas para os olhos, e ao mesmo tempo permitir à pessoa enxergar sem alterações de cores. A proteção deve ser de 100%, abaixo disso pode causar dores de cabeça, desconforto ao olhar para o chão, queimaduras de retina e córnea, e em longo prazo a pessoa poderá sofrer de catarata ou outra doença degenerativa da visão.

Veja nas imagens três modelos de óculos escuros oferecidos por uma loja:

R\$ 80,00 — R\$ 90,00 — R\$ 110,00

Emiliano Cavalcante

a) Dentre os modelos apresentados, de quantas maneiras distintas uma pessoa pode escolher dois óculos diferentes? 3 maneiras

b) Determine o espaço amostral Ω em relação ao valor a ser pago na compra de dois óculos.
Ω = {R\$ 170,00; R\$ 190,00; R\$ 200,00}

Você produtor

8. De acordo com o espaço amostral Ω, elabore algumas questões e entregue para um colega resolver. Em seguida, verifique se as respostas estão corretas.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

9. a) A = {(Ana; Bruno), (Ana; Carlos), (Ana; Douglas)}

9. Um trabalho de Matemática foi preparado pelos alunos Ana, Bruno, Carlos e Douglas. Para realizar a apresentação do trabalho, o professor sorteará dois desses alunos. Determine o evento:

a) A, em que Ana é uma das sorteadas.

b) B, em que Bruno não é um dos sorteados.

c) C, em que os dois sorteados não são do sexo masculino. $C = \varnothing$

b) B = {(Ana; Carlos), (Ana; Douglas), (Carlos; Douglas)}

10. Em uma urna são colocadas 3 bolas idênticas numeradas de 1 a 3. São sorteadas duas dessas bolas com reposição, ou seja, sorteia-se uma bola, que é reposta na urna e, em seguida, sorteia-se novamente uma bola.

Sergio L. Filho

a) Escreva o espaço amostral Ω desse experimento.
$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

b) Determine o evento A, da ocorrência de dois números pares. $A = \{(2, 2)\}$

c) Determine o evento B, da ocorrência do 1º número sorteado ser maior do que o 2º.
$B = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$

d) Determine o evento C, da ocorrência do produto dos números sorteados ser menor do que 5.
$C = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$

11. Uma urna contém 3 bolas azuis, 4 bolas pretas e 2 bolas brancas, todas elas com o mesmo tamanho, diferenciadas apenas pela cor. Dessa urna são sorteadas 3 bolas com reposição. Determine:

a) o espaço amostral Ω. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

b) o evento A, da ocorrência de uma bola de cada cor.

c) o evento B, da ocorrência de três bolas da mesma cor.

12. No lançamento de 2 dados com 6 faces cada, é observado o produto dos números de pontos sorteados. Determine o espaço amostral desse experimento.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$

13. Um baralho comum possui 52 cartas divididas em 4 naipes diferentes (copas, espadas, ouros e paus), sendo 13 cartas de cada naipe. Um experimento consiste em retirar, aleatoriamente, duas cartas desse baralho e anotar os naipes. Em relação a esse experimento, defina: Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

a) o espaço amostral Ω.

Observação
Para definir o espaço amostral, utilize a 1ª letra referente ao naipe da carta.

b) o evento A, em que o naipe de exatamente uma das cartas é de copas.

c) o evento B, em que o naipe de pelo menos uma das cartas é de espadas.

Desafio

14. Uma urna contém 10 bolas idênticas numeradas de 1 a 10. São sorteados dessa urna, sucessivamente, 2 bolas sem reposição. Sendo A o evento em que a soma dos números sorteados é par e B o evento em que o produto dos números sorteados é menor do que 20, determine o evento C, da ocorrência dos eventos A e B simultaneamente.

$C = \{(1, 3), (1, 5), (1, 7), (1, 9), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 1), (3, 5), (4, 2), (5, 1), (5, 3), (6, 2), (7, 1), (8, 2), (9, 1)\}$

Em grupo

15. Em um experimento são lançados dois dados, um verde e outro azul.
Veja no quadro o espaço amostral desse experimento.

		Dado azul					
		⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
Dado verde	⚀	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	⚁	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	⚂	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	⚃	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	⚄	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	⚅	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Ilustrações: Sergio L. Filho

Considere os eventos a seguir:

- A: ocorrência de uma quantidade par de números de pontos no dado verde e de uma quantidade ímpar de pontos no dado azul.
- B: ocorrência de uma quantidade qualquer de números de pontos no dado verde e de uma quantidade de pontos que represente um número primo no dado azul.
- C: ocorrência de uma quantidade de números de pontos menor ou igual a 3 no dado verde e de uma quantidade de pontos maior do que 3 no dado azul. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Sendo Ω o espaço amostral, determine:

a) o evento D, da ocorrência do evento A ou do evento B.

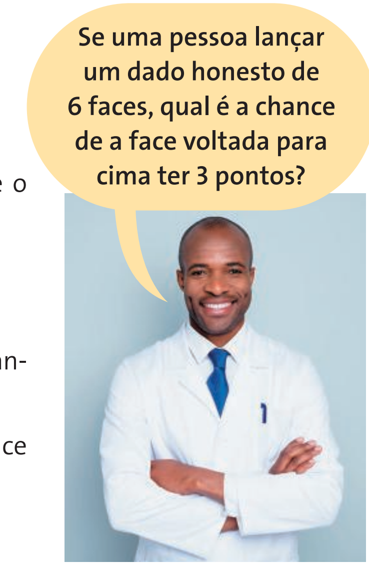
b) o evento E, da ocorrência dos eventos A e B simultaneamente.

c) o evento F, da ocorrência dos eventos B e C simultaneamente.

16. No lançamento simultâneo de 2 dados honestos, calcula-se a diferença entre a quantidade de pontos sorteados. Determine o espaço amostral desse experimento. $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

17. Três moedas diferentes são lançadas simultaneamente. Sendo A o evento em que é obtida pelo menos uma cara, determine o número de elementos de A, indicado por $n(A)$. $n(A) = 7$

3 Probabilidade em espaço amostral equiprovável



Roman Samborskyi/Shutterstock.com

Veja a pergunta que o professor está fazendo.

Para responder a essa pergunta, vamos considerar o espaço amostral Ω e o evento A (a face voltada para cima ter) 3 pontos.

- espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- evento: $A = \{3\}$ (evento simples)

A face com 3 pontos aparece uma vez no dado. Como ele tem 6 faces, há 1 chance em 6 de a face com 3 pontos estar voltada para cima.

Dizemos que a chance ou a probabilidade de no lançamento de um dado, a face voltada para cima ter 3 pontos é:

$$1 \text{ em } 6 \text{ ou } \frac{1}{6} \text{ ou } 16{,}\overline{6}\,\%$$

E qual é a probabilidade de, ao se lançar um dado, obter uma quantidade par de pontos?

Nesse caso, o espaço amostral é o mesmo, mas o evento é outro:

- espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- evento: $B = \{2, 4, 6\}$

Assim, há 3 chances em 6 de se obter uma quantidade par de pontos, ou seja:

$$3 \text{ em } 6 \text{ ou } \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ ou } 50\,\%$$

De modo geral:

Observação

Para escrever $\frac{1}{6}$ na forma percentual, podemos realizar o seguinte cálculo:

$\frac{1}{6} = \frac{x}{100} \Rightarrow$
$\Rightarrow 6x = 100 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 16{,}\overline{6}\%$

Seja um evento A de um espaço amostral Ω finito. A probabilidade $P(A)$ de o evento A ocorrer é a razão entre o número de elementos de A, indicado por $n(A)$, pelo número de elementos de Ω, indicado por $n(\Omega)$, isto é:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \text{ ou } P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

No caso de um evento A ser simples, $n(A) = 1$, temos: $P(A) = \dfrac{1}{n(\Omega)}$

A razão $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$ só é válida se todos os eventos elementares associados ao espaço amostral Ω tiverem a mesma chance de ocorrer. Nesse caso, chamamos esses eventos de equiprováveis e o espaço amostral Ω de **espaço amostral equiprovável**. No caso do lançamento de um dado honesto, a possibilidade de uma face qualquer ocorrer é igual para cada uma das outras faces.

Como A é um evento qualquer no espaço amostral Ω, o conjunto vazio está contido em A, que por sua vez está contido em Ω, ou simbolicamente, $\varnothing \subset A \subset \Omega$. Desse modo, $n(\varnothing) \leqslant n(A) \leqslant n(\Omega)$.

Dividindo cada membro dessa desigualdade por $n(\Omega)$, com $n(\Omega) > 0$, temos:

$$\frac{\overbrace{n(\varnothing)}^{0}}{n(\Omega)} \leqslant \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leqslant \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \Rightarrow 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

Portanto, a probabilidade de ocorrer um evento A varia de 0 a 1, isto é, de 0% a 100%.

Antes de estudar o conteúdo da próxima página, pergunte aos alunos o que significa a desigualdade $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Observação

Quando todos os elementos de um conjunto A também forem elementos de um conjunto B, dizemos que A **está contido** em B e podemos indicar por $A \subset B$. O símbolo $\subset$ é chamado **sinal de inclusão** e $A \subset B$, **relação de inclusão**.

De modo geral:

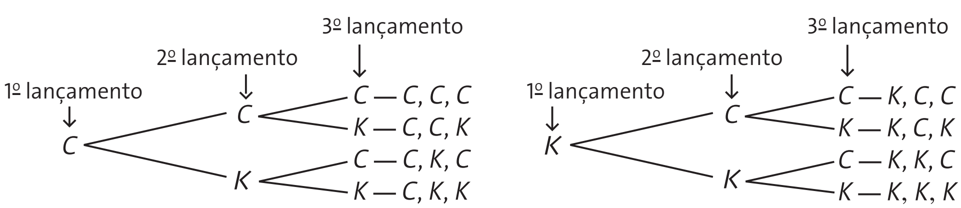
Para todo evento A, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ ou $0\% \leqslant P(A) \leqslant 100\%$.

Cabe destacar os dois casos extremos, ou seja, quando $P(A)$ é igual a 0 ou 1:

- se um evento A é **certo**, ou seja, $A = \Omega$, então $P(A) = \dfrac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$.
- se um evento A é **impossível**, ou seja, $A = \varnothing$, então $P(A) = \dfrac{\overbrace{n(\varnothing)}^{0}}{n(\Omega)} = 0$.

Probabilidade de um evento não ocorrer

Veja a seguir o espaço amostral correspondente a 3 lançamentos de uma moeda.



$$\Omega = \{(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (C, K, K), (K, C, C), (K, C, K), (K, K, C), (K, K, K)\}$$

Agora, veja o evento A, da ocorrência de uma única cara:

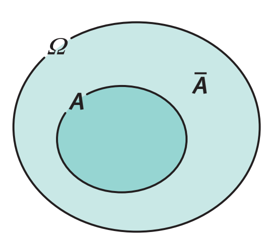
$$A = \{(C, K, K), (K, C, K), (K, K, C)\}$$

Se considerarmos o evento $\overline{A}$, tal que $\overline{A} = \Omega - A$, denominado **complementar de A em relação a Ω**, o conjunto $\overline{A}$ é aquele formado pelos elementos de Ω que não pertencem a A.

Assim:

$$\overline{A} = \Omega - A = \{(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (K, C, C), (K, K, K)\}$$

Representando a situação acima no diagrama de Venn ao lado, temos:



Sergio L. Filho

Dessa maneira, podemos dizer que $P(\overline{A})$ é a probabilidade de **o evento A não ocorrer**.

Temos $n(A) + n(\overline{A}) = n(\Omega)$. Dividindo os dois membros dessa igualdade por $n(\Omega)$, com $n(\Omega) > 0$, segue que:

$$\frac{n(A) + n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \Rightarrow \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = 1 \Rightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

A probabilidade de um evento A não ocorrer, indicado por $P(\overline{A})$, é igual a 1 menos a probabilidade de ele ocorrer, isto é, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Assim, a probabilidade de não ocorrer um evento com uma única cara é:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} \Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{5}{8} \text{ ou } 62{,}5\%$$

Observação

Cara (C)

Coroa (K)

Reprodução/Casa da Moeda do Brasil/Ministério da Fazenda

Observação

De modo geral, a diferença entre dois conjuntos A e B é um conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B. Podemos indicar essa relação por $A - B$.

Após os alunos lerem a definição ao lado, peça a eles que a relacionem com a igualdade $\overline{A} = \Omega - A$ e o diagrama de Venn vistos anteriormente.

Problemas e exercícios resolvidos

R5. Rafaela tem 6 cupons de uma promoção cujo prêmio é um almoço em uma churrascaria. Qual é a probabilidade de Rafaela ganhar o prêmio, sabendo que foram distribuídos 320 cupons no total?

Emiliano Cavalcante

Resolução

Chamando de A o evento "Rafaela ganhar o prêmio", o total de casos favoráveis a ela é dado pela quantidade de cupons que ela possui, ou seja, $n(A) = 6$. Além disso, o total de casos possíveis é a quantidade total de cupons distribuídos, isto é, $n(\Omega) = 320$.

Logo, a probabilidade de Rafaela ganhar é dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{320} = \frac{3}{160} = 0{,}01875 \rightarrow 1{,}875\%$$

R6. No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de se obter uma quantidade de pontos que representa um número primo?

Resolução

Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

O evento A, da ocorrência de uma quantidade de pontos que represente um número primo, é $A = \{2, 3, 5\}$.

Assim: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5 \rightarrow 50\%$

R7. Em uma urna estão os nomes de 63 pessoas, com as quais serão formados, por meio de sorteio, grupos de 3 pessoas. Sabendo que os nomes sorteados não voltam para a urna, determine a probabilidade de uma pessoa ainda não sorteada fazer parte do:

a) 1º grupo sorteado

b) 3º grupo sorteado

c) 21º grupo sorteado

Resolução

Como a quantidade de pessoas sorteadas é a mesma em qualquer sorteio, o total de casos favoráveis para o 1º (evento A), 3º (evento B) ou 21º grupo (evento C) é $n(A) = n(B) = n(C) = 3$.

a) 1º grupo sorteado

No 1º grupo, as 63 pessoas participam do sorteio, ou seja, $n(\Omega) = 63$. Calculando a probabilidade:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{63} = \frac{1}{21} \simeq 0{,}048 \rightarrow 4{,}8\%$$

b) 3º grupo sorteado

Como 6 pessoas foram sorteadas para os dois primeiros grupos, apenas 57 pessoas participam do sorteio do 3º grupo, ou seja, $n(\Omega) = 57$. Calculando a probabilidade, temos:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{57} = \frac{1}{19} \simeq 0{,}053 \rightarrow 5{,}3\%$$

c) 21º grupo sorteado

Como 60 pessoas foram sorteadas para os vinte primeiros grupos, apenas 3 pessoas participam do sorteio no 21º grupo, ou seja, $n(\Omega) = 3$. Calculando a probabilidade, temos:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{3}{3} = 1 \rightarrow 100\%$$

Portanto, o evento C é certo.

R8. Uma moeda é lançada três vezes. Qual é a probabilidade de se obter:

a) duas caras e uma coroa (evento A)?

b) pelo menos duas coroas (evento B)?

Resolução

Representando cara por C e coroa por K, temos o seguinte espaço amostral para esse experimento:

$$\Omega = \{(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (C, K, K), (K, C, C), (K, C, K), (K, K, C), (K, K, K)\} \text{ e } n(\Omega) = 8$$

a) Temos $A = \{(C, C, K), (C, K, C), (K, C, C)\}$ e $n(A) = 3$.

Assim, a probabilidade de ocorrência do evento A é: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375 \rightarrow 37{,}5\%$.

b) O evento B é composto por lançamentos em que há uma cara e duas coroas ou três coroas.

$$B = \{(C, K, K), (K, C, K), (K, K, C), (K, K, K)\} \text{ e } n(B) = 4$$

Assim, a probabilidade de ocorrência de B é: $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5 \rightarrow 50\%$.

R9. Considere os números de três algarismos obtidos ao permutar os algarismos 4, 5 e 6. Ao sortearmos uma dessas permutações, calcule a probabilidade de que ocorra o evento:

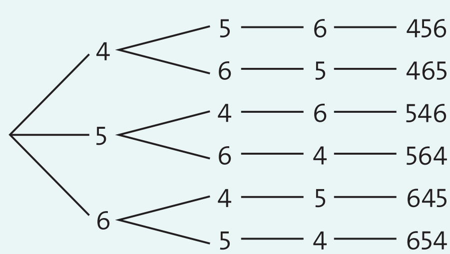
a) A: o número obtido é par.

b) B: o número obtido é múltiplo de 3.

c) C: o número obtido é primo.

Resolução

Representamos as permutações em um diagrama de árvore:



Assim, $\Omega = \{456, 465, 546, 564, 645, 654\}$ e $n(\Omega) = 6$.

a) As permutações que formam números pares são as terminadas em 4 ou 6.

$$A = \{456, 546, 564, 654\} \text{ e } n(A) = 4$$

Assim, a probabilidade de ocorrência de A é: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \simeq 0{,}666 \rightarrow 66{,}6\%$.

b) Se a soma dos valores absolutos dos algarismos de um número é múltiplo de 3, o número também é múltiplo de 3. Como a soma dos algarismos 4, 5 e 6 é igual a 15 $(4 + 5 + 6 = 15)$, independentemente da ordem, toda permutação desses algarismos forma números múltiplos de 3. Dessa maneira, $B = \Omega$.

Assim, a probabilidade de ocorrência de B é: $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{6}{6} = 1 \rightarrow 100\%$.

Portanto, o evento B é certo.

c) Conforme o item **b**, cada número obtido é divisível por 3, além de ser divisível por 1 e por ele mesmo. Desse modo, não há nenhum número primo obtido com a permutação. Logo, $C = \varnothing$ e $n(C) = 0$.

Assim, a probabilidade de ocorrência de C é dada por: $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{0}{6} = 0 \rightarrow 0\%$.

Portanto, o evento C é impossível.

R10. Em uma empresa foi realizada uma pesquisa para verificar a preferência de 35 funcionários em relação ao prato principal que será servido em um almoço de confraternização. Veja no quadro ao lado o resultado da pesquisa.

Ao sortear um dos funcionários dessa empresa, qual é a probabilidade de ele:

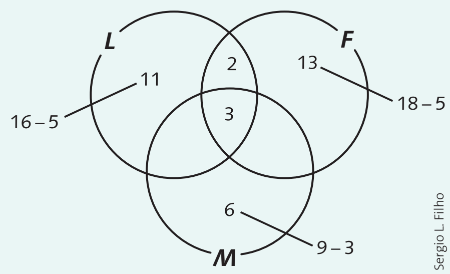
a) gostar somente de feijoada?

b) não gostar de lasanha?

Prato principal	Quantidade de funcionários
Lasanha	16
Feijoada	18
Macarronada	9
Lasanha e feijoada	5
Lasanha, feijoada e macarronada	3

Resolução

Antes de resolvermos cada item, construímos um diagrama de Venn.



L: lasanha
F: feijoada
M: macarronada

Verifique se os alunos perceberam que o diagrama foi preenchido na seguinte ordem:
1) Primeiramente, registramos no diagrama a quantidade de funcionários que gostam dos três pratos.
2) Em seguida, registramos no diagrama a quantidade de funcionários que gostam simultaneamente de dois pratos. Contudo, não podemos esquecer de subtrair a quantidade de funcionários que gostam dos três pratos.
3) Por último, completamos o diagrama com a quantidade de funcionários que gostam somente de um prato. Para isso, subtraímos a quantidade de funcionários já registrados no passo anterior.

a) Vamos chamar A o evento "gostar somente de feijoada".

Assim, $n(A) = 13$ e a probabilidade de o funcionário gostar somente de feijoada é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{13}{35} \simeq 0{,}3714 \to 37{,}14\%$$

b) Vamos chamar de B o evento "gostar de lasanha". Assim, $n(B) = 16$ e a probabilidade de o funcionário não gostar de lasanha é:

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{n(B)}{n(\Omega)} = 1 - \frac{16}{35} = \frac{19}{35} \simeq 0{,}5429 \to 54{,}28\%$$

R11. Em uma fábrica foi retirada uma amostra de 18 peças de certo produto. Após análise, verificou-se que 2 peças eram defeituosas. Determine a probabilidade de, ao retirar ao acaso 3 peças da amostra, nenhuma ser defeituosa.

Resolução

A quantidade de maneiras distintas de retirar 3 peças da amostra é dada pela combinação das 18 peças tomadas 3 a 3, ou seja, $C_{18,3}$.

$$n(\Omega) = C_{18,3} = \frac{18!}{3!(18-3)!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot \cancel{15!}}{6 \cdot \cancel{15!}} = \frac{4\,896}{6} = 816$$

A quantidade de maneiras distintas de retirar 3 peças não defeituosas da amostra é dada pela combinação das 16 não defeituosas tomadas 3 a 3. Chamando A esse evento, temos:

$$n(A) = C_{16,3} = \frac{16!}{3!(16-3)!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot \cancel{13!}}{6 \cdot \cancel{13!}} = \frac{3\,360}{6} = 560$$

Dessa maneira, a probabilidade de, ao retirar 3 peças, nenhuma ser defeituosa é dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{560}{816} = \frac{35}{51} \simeq 0{,}6863 \to 68{,}63\%$$

18. Em uma urna são colocadas 9 bolas idênticas numeradas de 1 a 9. Ao sortear uma bola, os resultados possíveis formam um espaço amostral equiprovável? Ao sortear uma dessas bolas, calcule a probabilidade de ela conter: Sim, pois cada elemento desse espaço amostral tem a mesma chance de ser sorteado.

a) o número 10. 0 ou 0%

b) um número par. $\frac{4}{9}$ ou $44,\overline{4}\%$

c) um número ímpar. $\frac{5}{9}$ ou $55,\overline{5}\%$

d) um número múltiplo de 5. $\frac{1}{9}$ ou $11,\overline{1}\%$

e) um número maior do que 7. $\frac{2}{9}$ ou $22,\overline{2}\%$

19. Duas moedas são lançadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de se obter uma cara e uma coroa? $\frac{1}{2}$ ou 50%

20. Em uma urna há fichas numeradas de 0 a 27, diferenciadas apenas pela numeração. Ao sortear uma dessas fichas, qual é a probabilidade de ela ter um número:

a) ímpar? $\frac{14}{28}$ ou 50%

b) múltiplo de 5 e não nulo? $\frac{6}{28}$ ou aproximadamente 21,4%

c) menor do que 10? $\frac{10}{28}$ ou aproximadamente 35,7%

d) o número 0? $\frac{1}{28}$ ou aproximadamente 3,6%

e) um número de 11 a 19? $\frac{9}{28}$ ou aproximadamente 32,1%

Em grupo

21. (UEL-PR) Um dado não viciado foi lançado duas vezes e em cada uma delas o resultado foi anotado. Qual é a probabilidade de a soma dos números anotados ser maior ou igual a 7? e

a) $\frac{7}{6}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{7}{16}$ e) $\frac{7}{12}$

Junte-se a um colega e respondam à pergunta a seguir.

O espaço amostral formado pelos possíveis resultados do lançamento desse dado é equiprovável? Justifiquem a resposta.

22. No lançamento de dois dados de 6 faces, um verde e outro vermelho, determine a probabilidade de:

a) a soma dos pontos não ser 7. $\frac{5}{6}$ ou $83,\overline{3}\%$

b) não obter a face com 1 ponto. $\frac{25}{36}$ ou $69,\overline{4}\%$

c) não obter faces com quantidade de pontos iguais.

d) não obter a face com o número 3 no dado verde e a face com o número 2 no dado vermelho.

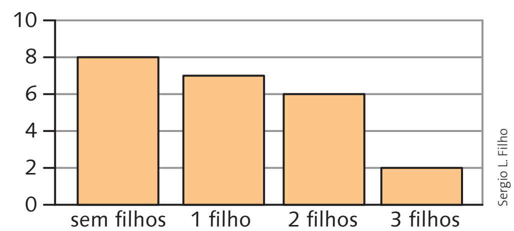
22. c) $\frac{5}{6}$ ou $83,\overline{3}\%$

22. d) $\frac{35}{36}$ ou $97,\overline{2}\%$

23. Uma urna contém 2 bolas brancas e 2 bolas pretas, todas com o mesmo tamanho, diferenciadas apenas pela cor. Quantas bolas verdes idênticas às anteriores devem ser colocadas na urna de modo que, ao retirar uma bola ao acaso, a probabilidade de ela ser verde seja 50%? 4 bolas verdes

21. Sim, pois cada possível resultado do lançamento, apresenta a mesma chance de ser sorteado.

24. (Enem) As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico abaixo.



Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é: e

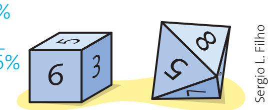
a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{7}{15}$ d) $\frac{7}{23}$ e) $\frac{7}{25}$

25. Foram lançados simultaneamente dois dados: um no formato de cubo com as faces numeradas de 1 a 6; outro no formato de octaedro regular com as faces numeradas de 1 a 8.

25. b) $\frac{5}{24}$ ou $20,8\overline{3}\%$

e) $\frac{47}{48}$ ou $97,91\overline{6}\%$

f) $\frac{1}{2}$ ou 50%



Qual é a probabilidade de: 25. a) $\frac{1}{8}$ ou 12, 5%

a) o mesmo número ser sorteado nos dois dados?

b) a soma dos números ser maior do que 10?

c) o produto dos números ser 6? $\frac{1}{12}$ ou $8,\overline{3}\%$

d) os dois números serem ímpares? $\frac{1}{4}$ ou 25%

e) a soma dos números ser maior do que 2?

f) os números 4 e 6 não serem sorteados?

26. No lançamento simultâneo de 5 moedas, qual é a probabilidade de:

a) obter cara em todas as moedas? $\frac{1}{32}$ ou 3,125%

b) obter somente uma coroa? $\frac{5}{32}$ ou 15,625%

c) obter pelo menos uma coroa? $\frac{31}{32}$ ou 96,875%

d) não obter cara? $\frac{1}{32}$ ou 3,125%

27. Considere os números de três algarismos obtidos das permutações dos algarismos 5, 6 e 7. Ao ser sorteada uma dessas permutações, calcule a probabilidade de que o número obtido seja: $\frac{1}{3}$ ou $33,\overline{3}\%$

a) par. $\frac{1}{3}$ ou $33,\overline{3}\%$

b) ímpar. $\frac{2}{3}$ ou $66,\overline{6}\%$

c) maior do que 700.

d) menor do que 650. $\frac{1}{3}$ ou $33,\overline{3}\%$

28. (UFJF-MG) Respondendo a um chamado de um centro de hemodiálise, 140 pessoas se apresentaram imediatamente. Um levantamento do tipo sanguíneo dessas pessoas indicou que 27 tinham o tipo sanguíneo **O**, 56 o tipo **A**, 29 o tipo **AB**, e o restante, o tipo **B**. Veja comentários nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.
A probabilidade de que uma pessoa deste grupo, selecionada ao acaso, tenha o tipo sanguíneo **B** é: e

a) 32% b) 28% c) 16% d) 25% e) 20%

29. Em uma caixa com 20 peças de uma fábrica, existem 4 defeituosas. Retirando-se, ao acaso, 3 peças sem reposição, qual é a probabilidade de essas peças não serem defeituosas? $\frac{28}{57}$ ou aproximadamente 49,1%

30. Em um congresso, estão participando arquitetos, decoradores e engenheiros, conforme o quadro a seguir.

	Homem	Mulher	Total
Arquiteto	8	12	20
Decorador	14	3	17
Engenheiro	21	4	25
Total	43	19	62

Aggapom Poomitud/Shutterstock.com

Pessoas em um congresso.

Ao final do congresso, um participante será sorteado e receberá um prêmio. Calcule a probabilidade de o participante premiado:

a) ser mulher.
b) ser engenheiro.
c) ser homem e arquiteto.
d) não ser decorador.

Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Desafio

31. (ESPM-SP) Uma mãe, brincando com seus filhos, pediu a eles que escrevessem todos os anagramas da palavra ESCOLA. Cada anagrama foi escrito em um pedacinho de papel e este, colocado em uma caixa vazia. Retirando-se ao acaso um desses papéis, a probabilidade de que a palavra nele escrita tenha todas as consoantes juntas é: d

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{5}$
e) $\frac{1}{6}$

32. (UFPA) As últimas eleições têm surpreendido os institutos de pesquisa, principalmente quando dois candidatos se encontram empatados tecnicamente. Tentando entender essa questão, um estudante investigou a opção de votos de seus colegas de classe e verificou que, dos 30 investigados, 15 votaram no candidato **A** e 15 votaram no candidato **B**. Fez-se, então, a seguinte consideração: se um instituto de pesquisa fizesse uma sondagem, consultando apenas 4 alunos aleatoriamente, a probabilidade de o instituto acertar o resultado da eleição na sala, por meio dessa amostra, seria de, aproximadamente: b

a) 27% b) 40% c) 50% d) 78% e) 92%

33. Em uma urna há 10 bolas azuis e algumas bolas amarelas, todas idênticas e se diferenciando apenas pela cor. Se a probabilidade de, ao se sortear duas bolas aleatoriamente, ambas serem azuis é $\frac{3}{7}$, determine a quantidade de bolas amarelas na urna.
5 bolas amarelas

Você produtor

Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

34. De acordo com o quadro, elabore e escreva uma tarefa envolvendo o conteúdo de probabilidade. Depois, entregue para um colega resolver. Em seguida, verifique se a resolução está correta.

Museu	Quantidade de alunos
Museu Histórico Nacional – Rio de Janeiro	20
Museu Oscar Niemeyer – Curitiba	8
MASP – Museu de Arte de São Paulo	25
MASP e Museu Histórico Nacional	5
MASP e Museu Oscar Niemeyer	3

35. (FGV-SP) Uma urna contém bolas numeradas de 1 até 10 000. Sorteando-se ao acaso uma delas, a probabilidade de que o algarismo mais à esquerda do número marcado na bola seja 1, é igual a: c

a) 11,02%
b) 11,11%
c) 11,12%
d) 12,21%
e) 21,02%

Desafio

Veja comentários e sugestões nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.

36. Uma urna contém 12 bolas idênticas, sendo x azuis, y amarelas e z verdes. Determine x, y e z, sabendo que a probabilidade de sortear uma bola azul é metade da probabilidade de sortear uma amarela e um terço da probabilidade de sortear uma verde. $x = 2$; $y = 4$; $z = 6$

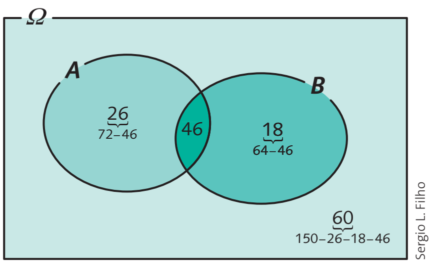
35. Diga aos alunos para considerar que as bolas colocadas na urna são todas idênticas, diferenciando-se apenas pela numeração.

4 Probabilidade da união de eventos

Uma empresa fez uma pesquisa para saber a preferência dos usuários em relação a duas operadoras de telefone celular. Dos entrevistados, 72 utilizam a operadora **A**, 64 usam a **B**, e 46 usam as duas operadoras. Sabendo que foram entrevistadas 150 pessoas, qual é a probabilidade de, ao se sortear uma, ela ser cliente da operadora **A**, ou da **B**, ou de ambas?

Verifique a possibilidade de propor aos alunos esta situação, antes de abordá-la no livro, a fim de que, em duplas, eles tentem resolvê-la. Depois, considerando as estratégias e resoluções propostas e desenvolvidas por eles, apresente as explicações encontradas no livro.

Inicialmente, vamos organizar as informações em um diagrama de Venn.



Para calcular a probabilidade, é preciso saber qual é a quantidade de elementos do evento; nesse caso, quantas pessoas são clientes da operadora **A**, ou da **B**, ou de ambas, ou seja, $n(A \cup B)$.

De acordo com os dados do problema, temos:

- $n(\Omega) = 150$; $n(A) = 72$; $n(B) = 64$
- $n(A \cap B) = 46$
- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 72 + 64 - 46 = 90$

Agora, vamos calcular $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ e $P(A \cup B)$:

- $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{72}{150}$
- $P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \dfrac{46}{150}$
- $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{64}{150}$
- $P(A \cup B) = \dfrac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \dfrac{90}{150}$

Portanto, a probabilidade de uma pessoa ser cliente da operadora **A**, ou da **B** ou de ambas é $\dfrac{90}{150} = \dfrac{3}{5} = 60\%$.

Podemos notar que: $\underbrace{\dfrac{72}{150}}_{P(A)} + \underbrace{\dfrac{64}{150}}_{P(B)} - \underbrace{\dfrac{46}{150}}_{P(A \cap B)} = \underbrace{\dfrac{90}{150}}_{P(A \cup B)}$, ou seja, $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$.

Essa relação é válida para quaisquer eventos A e B em um mesmo espaço amostral Ω finito e não vazio.

Veja a seguir a demonstração dessa relação.

Da teoria de conjuntos, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dividindo cada membro dessa igualdade por $n(\Omega)$, com $n(\Omega) > 0$, temos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

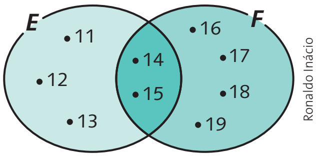
Portanto:

A probabilidade da união de dois eventos A e B é igual à soma das probabilidades de A e de B menos a probabilidade da interseção de A com B.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Observação

Note que, ao reunir dois conjuntos A e B, não podemos simplesmente adicionar as quantidades de elementos correspondentes para calcular $n(A \cup B)$, pois eles podem possuir elementos em comum que seriam contabilizados duas vezes. É por isso que subtraímos a quantidade de elementos comuns no cálculo $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. Veja outro exemplo no diagrama de Venn.



$n(E) = 5$

$n(F) = 6$

$n(E \cap F) = 2$

$n(E \cup F) = 5 + 6 - 2 = 9$

Observação

Quando $A \cap B$ é um conjunto vazio, ou seja, aquele que não possui elementos, os eventos A e B são **mutuamente exclusivos** e $n(A \cap B) = 0$. Como $P(A \cap B) = 0$, segue que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Problemas e exercícios resolvidos

R12. Um experimento consiste em dois lançamentos de um dado. Calcule a probabilidade da soma dos números de pontos obtidos ser maior do que 8 ou o produto ser ímpar.

Resolução

Como o dado lançado possui 6 faces, temos: $n(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$.

Representando por A o evento em que a soma dos números de pontos é maior do que 8 e por B o evento em que o produto dos números de pontos obtidos é ímpar, temos:

- $A = \{(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$ e $n(A) = 10$
- $B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$ e $n(B) = 9$
- $A \cap B = \{(5, 5)\}$ e $n(A \cap B) = 1$

Assim, a probabilidade de obter a soma dos números de pontos maior do que 8 ou o produto ser ímpar é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{10}{36} + \frac{9}{36} - \frac{1}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \rightarrow 50\%$$

R13. Entre 20 alunos que realizaram uma prova de Matemática, 12 acertaram a questão **A**, 9 acertaram a **B** e 16 acertaram pelo menos uma das duas. Calcule a probabilidade de, ao se sortear um aluno, este ter acertado ambas as questões.

Resolução

Temos:

- $P(A) = \frac{12}{20}$
- $P(B) = \frac{9}{20}$
- $P(A \cup B) = \frac{16}{20}$

A probabilidade de sortear um aluno que tenha acertado ambas as questões é dada por $P(A \cap B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{16}{20} = \frac{12}{20} + \frac{9}{20} - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{21}{20} - \frac{16}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \rightarrow 25\%$$

R14. Em uma escola de línguas, de um total de 120 alunos, 70 estudam inglês e 42 estudam espanhol e, desses alunos, 12 estudam ambas as línguas. Qual é a probabilidade de se sortear nessa escola um aluno que esteja estudando inglês ou espanhol?

Resolução

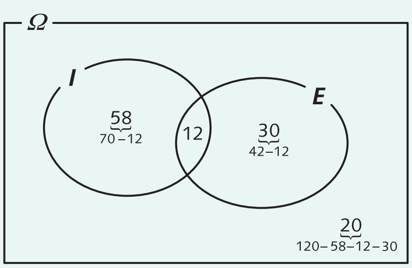
Representando por I o evento em que os alunos estudam inglês e por E o evento em que os alunos estudam espanhol, temos:

- $P(I) = \frac{70}{120} = \frac{35}{60}$
- $P(E) = \frac{42}{120} = \frac{21}{60}$
- $P(I \cap E) = \frac{12}{120} = \frac{6}{60}$

A probabilidade de um aluno sorteado ser estudante de inglês ou espanhol é dada por:

$$P(I \cup E) = P(I) + P(E) - P(I \cap E) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(I \cup E) = \frac{35}{60} + \frac{21}{60} - \frac{6}{60} = \frac{50}{60} \simeq 0{,}83 \rightarrow 83\%$$



Sergio L. Filho

Também podemos resolver este exercício de outra maneira. Representando as informações em um diagrama de Venn e realizando os cálculos, temos:

$$P(I \cup E) = \frac{n(I \cup E)}{n(\Omega)} = \frac{58 + 12 + 30}{120} = \frac{100}{120} = \frac{5}{6} \simeq 0{,}83 \rightarrow 83\%$$

37. Considerando o lançamento de um dado honesto de 6 faces, determine a probabilidade de obter um número de pontos ímpar ou um número de pontos maior do que 2. $\frac{5}{6}$

38. Em uma urna são colocadas 7 bolas idênticas numeradas de 1 a 7. Um experimento consiste em retirar 2 bolas da urna, sem reposição. Calcule a probabilidade de: Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

a) a soma dos números obtidos ser igual a 8.

b) o produto dos números obtidos ser igual a 12.

c) a soma dos números obtidos ser igual a 8 ou o produto dos números obtidos ser igual a 12.

Você produtor

39. Determine as probabilidades $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cup B)$ de dois eventos A e B de um experimento aleatório. Depois, peça a um colega que calcule $P(\overline{A})$ e $P(\overline{B})$. Em seguida, verifique se a resolução está correta.
Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

40. Em um experimento aleatório são lançados um dado e uma moeda. Calcule a probabilidade de se obter:

a) uma cara e um número 3. $\frac{1}{12}$ ou $8,\overline{3}\%$

b) uma cara e um número par. $\frac{1}{4}$ ou 25%

c) uma coroa ou um número ímpar. $\frac{3}{4}$ ou 75%

41. Um baralho comum tem 52 cartas divididas em 4 naipes diferentes: copas, espadas, ouros e paus. Cada naipe possui 13 cartas, sendo elas um ás, todos os números naturais de 2 a 10 e três figuras: o valete, a dama e o rei. Desse baralho é retirada uma carta aleatoriamente. Qual é a probabilidade de a carta sorteada:

a) ser um rei de paus? $\frac{1}{52}$ ou aproximadamente 1,9%

b) ser uma dama? $\frac{1}{13}$ ou aproximadamente 7,7%

c) ser uma dama ou uma carta de copas? $\frac{4}{13}$ ou aproximadamente 30,8%

d) não ser uma carta de ouros nem ser um rei? $\frac{9}{13}$ ou aproximadamente 69,2%

42. Em uma turma de 40 alunos do curso de Comércio Exterior, 26 estudam inglês, 12 estudam espanhol e 8 não estudam nenhum dos dois idiomas. Ao se sortear um aluno, qual é a probabilidade de ele:

a) estudar inglês? $\frac{13}{20}$ ou 65%

b) estudar espanhol? $\frac{3}{10}$ ou 30%

c) não estudar inglês nem espanhol? $\frac{1}{5}$ ou 20%

d) estudar inglês e espanhol? $\frac{3}{20}$ ou 15%

e) estudar inglês ou espanhol? $\frac{4}{5}$ ou 80%

Observação

Construa um diagrama de Venn.

43. Em certo concurso público participaram 1 896 candidatos. Para ser aprovado, cada candidato deveria acertar, no mínimo, metade das questões de Matemática e metade das de Língua Portuguesa. Nesse concurso, 680 candidatos atingiram a pontuação mínima em Língua Portuguesa, 792 atingiram a pontuação mínima em Matemática e 860 não atingiram a pontuação mínima em nenhuma das disciplinas.

Sorteando um candidato desse concurso, calcule a probabilidade de ele:

a) ter atingido a pontuação mínima em Língua Portuguesa. $\frac{85}{237}$ ou aproximadamente 35,9%

b) ter atingido a pontuação mínima em Matemática. $\frac{33}{79}$ ou aproximadamente 41,8%

c) não ter sido aprovado. $\frac{365}{474}$ ou aproximadamente 77%

d) ter sido aprovado. $\frac{109}{474}$ ou aproximadamente 23%

44. Determinada cidade vai promover os jogos de verão, com diferentes tipos de provas e contando com a participação de toda a comunidade. As provas ocorrerão em algumas escolas, 16 delas se candidataram para sediar o evento, das quais 5 são da região central da cidade. Serão escolhidas 10 escolas, 4 delas que não são da região central já foram escolhidas por apresentar melhor estrutura para o evento. Considerando que as outras 12 escolas tenham as mesmas condições de serem escolhidas, a probabilidade de que das 6 vagas restantes, exatamente 3 sejam da região central, é aproximadamente: c

a) 41% b) 58% c) 38% d) 75% e) 81%

- Você já participou de um algum evento como esse? Resposta pessoal.

Você cidadão

- Em sua opinião, qual é a importância desse tipo de evento? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos compreendam a importância de eventos que promovam a participação de toda a comunidade.

45. Em uma coleção de 500 adesivos, 90 são relacionados a carros, 160 a motos e 20 a carros e motos. Se um adesivo é escolhido ao acaso, indique quais das afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.
verdadeiras: b, c, d; falsa: a

a) A probabilidade do adesivo ser relacionado somente a carro é 0,16.

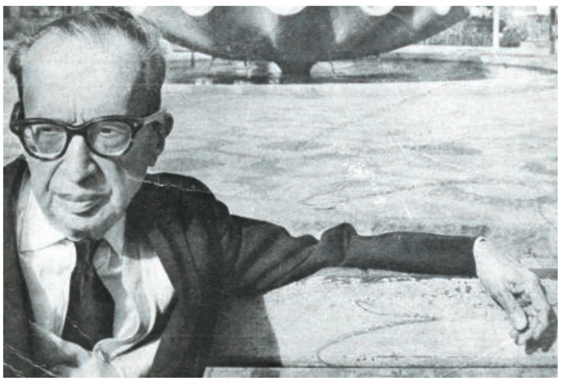
b) A probabilidade do adesivo ser relacionado a carro ou moto é 0,46.

c) A probabilidade do adesivo ser relacionado a carro e moto é 0,04.

d) A probabilidade do adesivo não ser relacionado nem a carros e nem a motos é 0,54.

5 Probabilidade condicional

Para levantar informações em relação ao hábito de leitura de uma turma, um professor de Literatura perguntou aos 36 alunos se já haviam lido algum livro de Manuel Bandeira ou de Clarice Lispector. Desses alunos, 18 leram algum livro de Manuel Bandeira, 10 leram algum livro de Clarice Lispector, 8 leram livros dos dois autores e 16 não leram livros desses autores.



Arquivo/CB/D.A Press/Coleção Particular

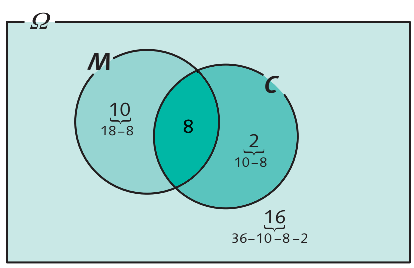
Manuel Bandeira (1886-1968).

Arquivo/Estadão Conteúdo/Coleção Particular

Clarice Lispector (1920-1977).

Vamos organizar as informações apresentadas em um diagrama de Venn.

Sergio L. Filho



M: leram Manuel Bandeira
C: leram Clarice Lispector

a) Sorteando um desses alunos, qual é a probabilidade de ele ter lido algum livro dos dois autores?

Nesse caso, devemos considerar os alunos que leram livros dos dois autores (8 alunos), sendo o espaço amostral todos os alunos da turma (36 alunos). Assim, a probabilidade é dada por:

$$\frac{n(M \cap C)}{n(\Omega)} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \simeq 0{,}22 \rightarrow 22\%$$

b) Realizando um sorteio entre os alunos que leram algum livro de Manuel Bandeira (M), qual é a probabilidade de ele ter lido também algum livro de Clarice Lispector (C)?

Nesse caso, o espaço amostral é *M* (18 alunos), pois consideramos todos os alunos que leram um livro de Manuel Bandeira. Dentre esses alunos, consideramos aqueles que leram algum livro de Clarice Lispector (8 alunos). Assim, a probabilidade é dada por:

$$\frac{n(M \cap C)}{n(M)} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \simeq 0{,}44 \rightarrow 44\%$$

A razão $\frac{n(M \cap C)}{n(M)}$ é chamada **probabilidade condicional de *C* em relação a *M***, a qual indicamos por $P\left(C \middle| M\right)$.

Verifique a possibilidade de propor aos alunos as questões dos itens **a** e **b** antes de abordá-las no livro, a fim de que, em duplas, eles tentem resolvê-las. Depois, considerando as estratégias e resoluções propostas e desenvolvidas por eles, apresente as explicações encontradas no livro.

c) Realizando um sorteio entre os alunos que leram algum livro de Clarice Lispector (C), qual é a probabilidade de ele ter lido também algum livro de Manuel Bandeira (M)?

Nesse caso, o espaço amostral é C (10 alunos), pois consideramos todos os alunos que leram um livro de Clarice Lispector. Dentre esses alunos, consideramos aqueles que leram algum livro de Manuel Bandeira (8 alunos). Assim, a probabilidade é dada por:

$$\frac{n(M \cap C)}{n(C)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \rightarrow 80\%$$

A razão $\frac{n(M \cap C)}{n(C)}$ é chamada **probabilidade condicional de** M **em relação a** C, a qual indicamos por $P\left(M \middle| C\right)$.

Verifique a possibilidade de propor aos alunos a questão do item **c** antes de abordá-la no livro, a fim de que, em duplas, eles tentem resolvê-la. Depois, considerando as estratégias e resoluções propostas e desenvolvidas por eles, apresente as explicações encontradas no livro.

De modo geral:

Dados os eventos A e B não vazios no mesmo espaço amostral Ω finito, a probabilidade da ocorrência de A, tendo B já ocorrido, é a **probabilidade condicional** de A em relação a B, indicada por $P\left(A \middle| B\right)$ e calculada como:

$$P\left(A \middle| B\right) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Essa relação também pode ser expressa de outro modo. Dividindo o numerador e o denominador do segundo membro da igualdade por $n(\Omega)$, com $n(\Omega) \neq 0$, temos:

$$P\left(A \middle| B\right) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \boxed{P\left(A \middle| B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Podemos utilizar essa relação na situação apresentada e verificar que obtemos os mesmos resultados, ou seja:

- $P\left(C \middle| M\right) = \frac{P(M \cap C)}{P(M)} = \frac{\frac{n(M \cap C)}{n(\Omega)}}{\frac{n(M)}{n(\Omega)}} = \frac{\frac{8}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \simeq 0{,}44 \rightarrow 44\%$

- $P\left(M \middle| C\right) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{n(M \cap C)}{n(\Omega)}}{\frac{n(C)}{n(\Omega)}} = \frac{\frac{8}{36}}{\frac{10}{36}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \simeq = 0{,}8 \rightarrow 80\%$

Eventos simultâneos

Vimos anteriormente que $P\left(A \middle| B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ é a probabilidade de ocorrer o evento A já tendo ocorrido o evento B. Dessa razão, segue que $P(A \cap B) = P\left(A \middle| B\right) \cdot P(B)$.

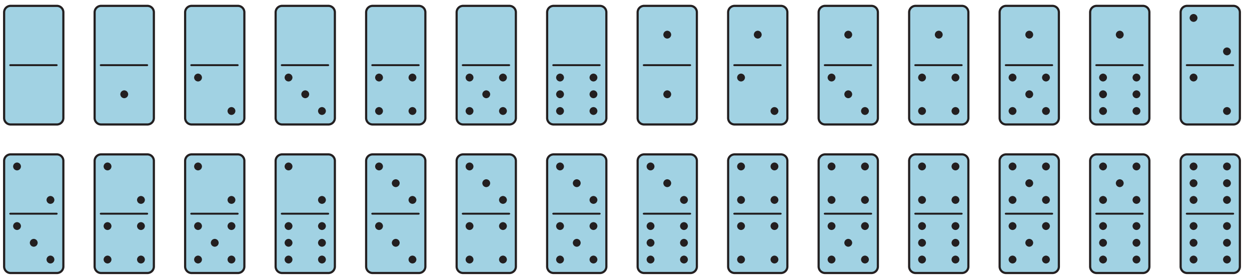
Isso quer dizer que a probabilidade de ocorrerem dois eventos A e B **simultâneos** (ou **sucessivos**) é dada pela multiplicação da probabilidade de ocorrer um deles pela probabilidade de ocorrer o outro, sabendo que o primeiro já ocorreu.

Observação

Quando os eventos A e B são independentes, ou seja, a ocorrência de um não tem influência na ocorrência do outro, $P\left(A \middle| B\right) = P(A)$ e $P\left(B \middle| A\right) = P(B)$. Então, podemos escrever $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Exemplo

Veja as peças de um jogo de dominó.



Sergio L. Filho

Retira-se ao acaso desse dominó uma peça e, sem reposição, retira-se outra. Qual é a probabilidade da soma dos pontos obtida em cada uma das peças retiradas ser igual a 7?

Nesse caso, vamos considerar os seguintes eventos:

A: ocorrência, na 1ª retirada, de uma peça cuja soma dos pontos é igual a 7.

B: ocorrência, na 2ª retirada, de uma peça cuja soma dos pontos é igual a 7.

Estamos interessados em calcular $P(A \cap B)$, ou seja, a probabilidade de as peças da 1ª e 2ª retiradas terem pontos cuja soma é 7.

Como $P(A \cap B) = P\left(B \middle| A\right) \cdot P(A)$, precisamos calcular $P(A)$ e $P\left(B \middle| A\right)$.

- $P(A)$

Na 1ª retirada, há 3 peças cuja soma dos pontos é 7 em um total de 28 peças. Assim, a probabilidade de se retirar uma dessas 3 peças é: $P(A) = \frac{3}{28}$.

- $P\left(B \middle| A\right)$

Na 2ª retirada, há 2 peças cuja soma dos pontos é 7 em um total de 27 peças. Assim, a probabilidade de se retirar uma dessas 2 peças é: $P\left(B \middle| A\right) = \frac{2}{27}$.

Portanto:

$$P(A \cap B) = P\left(B \middle| A\right) \cdot P(A) = \frac{2}{27} \cdot \frac{3}{28} = \frac{6}{756} = \frac{1}{126} = 0{,}008 \rightarrow 0{,}8\%$$

pzAxe/Shutterstock

Peças do jogo de dominó.

Não se sabe ao certo as origens do jogo de dominó, mas acredita-se que tenha surgido na China entre 243 e 181 a.C., com os primeiros indícios na Europa por volta do século XVIII. O nome dominó provavelmente deriva da expressão latina *domino gratias*, que significa “graças a Deus”, dita pelos padres europeus enquanto jogavam. O antigo dominó chinês traz todas as 21 combinações que podem ser obtidas ao lançar dois dados. Já na Europa, há sete peças a mais, combinando esses números também com o zero.

Problemas e exercícios resolvidos

R15. Em uma urna são colocadas 9 bolas idênticas e numeradas de 1 a 9. Ao se retirar aleatoriamente uma bola dessa urna, verifica-se que seu número é par. Calcule a probabilidade de a bola sorteada ter um número menor do que 5.

Resolução

Representando por A o evento em que é obtido um número par e por B o evento em que é obtido um número menor do que 5, temos:

- $A = \{2, 4, 6, 8\}$
- $B = \{1, 2, 3, 4\}$
- $A \cap B = \{2, 4\}$

O problema consiste em calcular $P\left(B \middle| A\right)$. Assim:

$$P\left(B \middle| A\right) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \rightarrow 50\%$$

R16. Uma máquina desregulada produz peças perfeitas e defeituosas. Certo lote de 12 peças apresentou 4 peças defeituosas e 8 perfeitas. Foram retiradas aleatoriamente 2 peças desse lote. Qual é a probabilidade de a 1ª peça retirada ser perfeita e a 2ª peça ser:

a) defeituosa?

b) perfeita?

Verifique se os alunos perceberam que a chance de a 1ª peça ser perfeita interfere na chance de a 2ª peça ser defeituosa, por isso usamos probabilidade condicional.

Resolução

A probabilidade de a 1ª peça retirada ser perfeita (evento F) é dada por:

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(\Omega)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Após retirada a 1ª peça perfeita, restaram no lote 11 peças, sendo 4 defeituosas e 7 perfeitas.

a) A probabilidade de a 2ª peça retirada ser defeituosa (evento D) é dada por:

$$P\left(D \middle| F\right) = \frac{4}{11}$$

Desse modo, a probabilidade de a 1ª peça retirada ser perfeita e a 2ª ser defeituosa é:

$$P(F \cap D) = P\left(D \middle| F\right) \cdot P(F) = \frac{4}{11} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{33} \simeq 0{,}2424 \rightarrow 24{,}24\%$$

b) A probabilidade de a 2ª peça retirada ser perfeita (evento E) é dada por:

$$P\left(E \middle| F\right) = \frac{7}{11}$$

Assim, a probabilidade de a 1ª peça retirada ser perfeita e a 2ª também ser perfeita é:

$$P(F \cap E) = P\left(E \middle| F\right) \cdot P(F) = \frac{7}{11} \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{33} \simeq 0{,}4242 \rightarrow 42{,}42\%$$

R17. São colocadas em uma urna 5 bolas brancas e 4 bolas verdes, todas idênticas diferenciando-se apenas pela cor. Ao retirar 2 bolas dessa urna, sem reposição, qual é a probabilidade de ambas serem da mesma cor?

Resolução

Inicialmente, calculamos a probabilidade de ambas as bolas retiradas serem brancas (B) ou ambas serem verdes (V).

- Bolas brancas: $P(B_1 \cap B_2) = P\left(B_2 \middle| B_1\right) \cdot P(B_1) = \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{9} = \frac{20}{72}$
- Bolas verdes: $P(V_1 \cap V_2) = P\left(V_2 \middle| V_1\right) \cdot P(V_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{12}{72}$

Verifique se os alunos perceberam que as duas frações não foram simplificadas para facilitar o cálculo da adição.

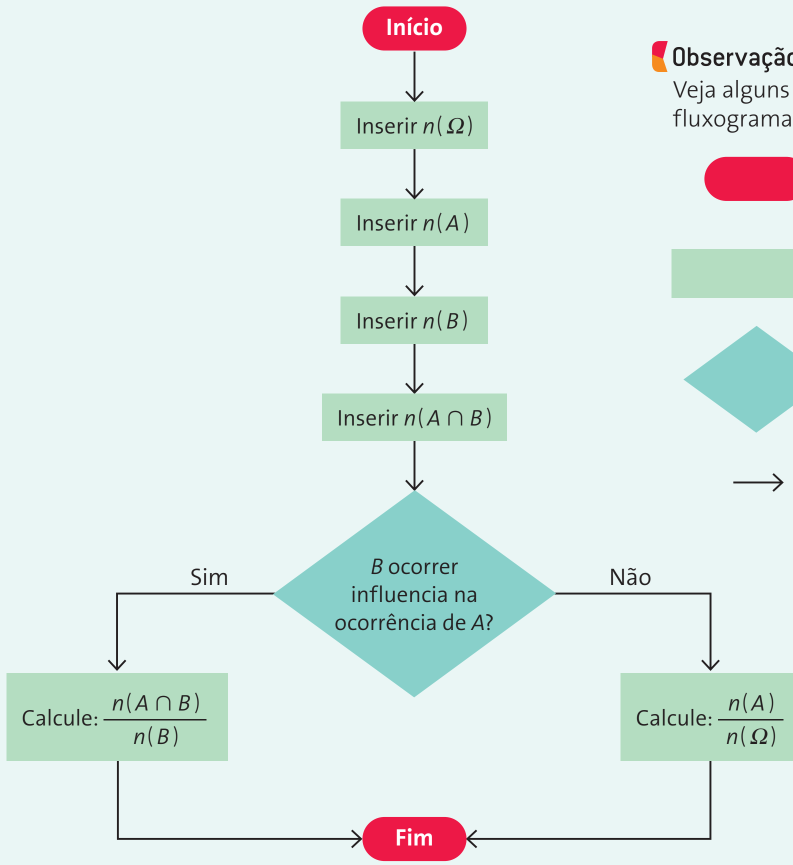
Ao adicionar esses resultados, obtemos a probabilidade desejada:

$$P(B_1 \cap B_2) + P(V_1 \cap V_2) = \frac{20}{72} + \frac{12}{72} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9} \simeq 0{,}44 \rightarrow 44\%$$

R18. Considere os eventos A e B não vazios de um espaço amostral Ω. Construa um fluxograma que possibilite calcular a probabilidade do evento A ocorrer sabendo que B ocorreu.

Resolução

De acordo com as informações, construímos o seguinte fluxograma.



Observação

Veja alguns tipos de figuras de um fluxograma e seus significados:

- Indica o início e o fim do fluxograma.
- Indica uma ação a ser executada.
- Indica uma condição a ser verificada.
- Indica o sentido do fluxo, conectando as figuras existentes.

R19. Considere o baralho de 52 cartas, divididas em 4 naipes (copas, espadas, ouros e paus). Cada naipe possui 13 cartas, cujos valores numéricos vão de 2 a 10, além do ás, que vale 1, do valete, que vale 11, da dama, que vale 12 e do rei, que vale 13. Foram retiradas aleatoriamente 2 cartas desse baralho. Qual é a probabilidade de a primeira carta sorteada ser menor do que 7 e a segunda ser um valete de espadas?

Resolução

Há 24 cartas que são menores do que 7 em um total de 52 cartas, então a probabilidade de a 1ª carta sorteada ser menor do que 7 (evento A) é dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{24}{52} = \frac{6}{13}$$

Há um único valete de espadas em um total de 51 cartas restantes, então a probabilidade de a 2ª carta ser um valete de espadas (evento B) é dada por:

$$P\left(B \middle| A\right) = \frac{1}{51}$$

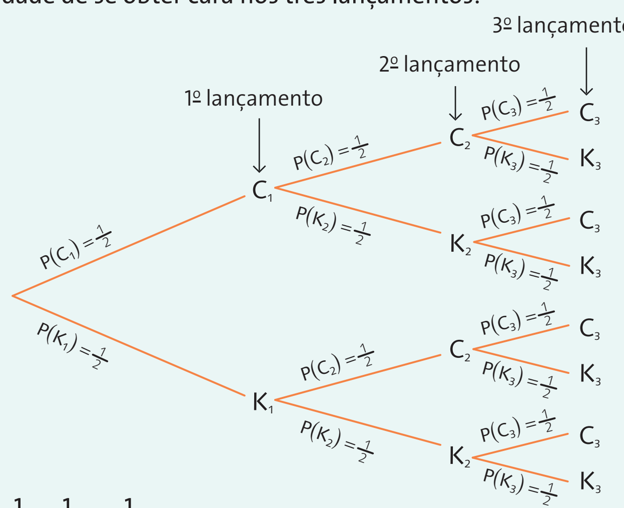
Assim, a probabilidade de a primeira carta sorteada ser menor do que 7 e a segunda ser um valete de espadas é:

$$P(A \cap B) = P\left(B \middle| A\right) \cdot P(A) = \frac{1}{51} \cdot \frac{6}{13} = \frac{6}{663} \simeq 0{,}009 \to 0{,}9\%$$

R20. Uma moeda é lançada três vezes. Qual é a probabilidade de se obter cara nos três lançamentos?

Resolução

Representando por C_1, C_2 e C_3 o evento em que se obtém cara no 1º, 2º e 3º lançamentos, respectivamente, e por K_1, K_2 e K_3 o evento em que se obtém coroa, podemos construir o diagrama de árvore ao lado.



Note que a probabilidade de se obter uma face cara ou coroa em um dos lançamentos independe da face obtida em qualquer um dos outros lançamentos. Nesse caso, dizemos que os eventos C_1, C_2 e C_3 são independentes.

A probabilidade de se obter cara nos três lançamentos é dada por:

$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(C_1) \cdot P(C_2) \cdot P(C_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125 \rightarrow 12{,}5\%$$

R21. Em uma urna há fichas numeradas de 1 a 50, diferenciadas apenas pela numeração. Qual é a probabilidade de, ao retirar uma ficha com um número em que o algarismo da unidade é um e, sem reposição, retirar mais uma ficha com um número formado por um algarismo?

Resolução

Representando por A o evento em que a 1ª ficha retirada tem um número em que o algarismo da unidade é um e por B o evento em que a 2ª ficha retirada tem um número formado por um algarismo, precisamos calcular $P(A \cap B)$.

Como $P(A \cap B) = P\left(B \middle| A\right) \cdot P(A)$, calculamos $P(A)$ e $P\left(B \middle| A\right)$.

- Na 1ª retirada, há 4 fichas com números em que o algarismo da unidade é um em um total de 50 fichas: $P(A) = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$.
- Na 2ª retirada, há 9 fichas com números formados por um algarismo em um total de 45 fichas: $P\left(B \middle| A\right) = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$.

Portanto, $P(A \cap B) = P\left(B \middle| A\right) \cdot P(A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{25} = \frac{2}{125} = 0{,}016 \rightarrow 1{,}6\%$.

R22. Para saber a opinião dos eleitores em relação à administração do prefeito e do governador de certo estado, foi realizada uma pesquisa com 1 000 pessoas cujos resultados estão indicados no quadro.

Calcule a probabilidade de, ao sortearmos uma das pessoas entrevistadas, ela ter aprovado a administração do prefeito e não opinado em relação à do governador.

	Prefeito	Governador
Aprovam a administração	570	300
Desaprovam a administração	250	390
Não opinaram	180	310

Resolução

Representando por A o evento "aprovar a administração do prefeito" e por B o evento "não opinar quanto à administração do governador", segue que A e B são independentes, ou seja, a opinião de uma pessoa sobre o prefeito não interfere na opinião dela sobre o governador. Calculando a probabilidade:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{570}{1\,000} \cdot \frac{310}{1\,000} = \frac{1\,767}{10\,000} = 0{,}1767 \rightarrow 17{,}67\%$$

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

48. Resposta pessoal. Possível resposta: Sabendo que foi sorteada uma carta e, em seguida, sem reposição, foi sorteada outra, qual é a probabilidade de a 1ª carta sorteada ser da cor verde e a 2ª, da cor preta?

46. Em cada item, determine se os eventos *A* e *B* são dependentes ou independentes.

a) Lançar uma moeda duas vezes e: independentes
- *A*: obter cara no 1º lançamento.
- *B*: obter coroa no 2º lançamento.

b) Jogar dois dados e: independentes
- *A*: obter um número de pontos par no dado 1.
- *B*: obter um número de pontos ímpar no dado 2.

c) Retirar duas cartas de um baralho, sem reposição, e: dependentes
- *A*: obter uma dama.
- *B*: obter um 5 ou um 6.

d) Retirar três bolas, sem reposição, de uma urna com 3 bolas azuis e 2 vermelhas, e: dependentes
- *A*: retirar uma bola vermelha.
- *B*: retirar duas bolas azuis.

47. Nos momentos de lazer, algumas pessoas se dedicam a atividades relaxantes, como passeios e assistir a filmes. Esses afazeres quebram a rotina do dia, aliviam as tensões e aumentam a disposição para encarar algumas tarefas. Veja no quadro os resultados de uma pesquisa acerca das atividades dos moradores de um condomínio em momentos de lazer.

Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

	Atividade		
	Música (*A*)	Cinema (*B*)	Esportes (*C*)
Homens (*H*)	20	30	60
Mulheres (*M*)	40	30	10

Descreva o significado de cada probabilidade.

a) $P\left(H \mid C\right)$

b) $P\left(M \mid C\right)$

c) $P\left(\overline{H} \mid A\right)$

d) $P\left(\overline{M} \mid \overline{B}\right)$

e) $P\left(A \mid M\right)$

f) $P\left(\overline{A} \mid H\right)$

Veja na Assessoria pedagógica comentários a respeito da importância de dedicar um momento para seu lazer.

Você cidadão

- O que você costuma fazer nos horários de lazer? Resposta pessoal.
- Você acha importante se dedicar a alguma atividade relaxante? Por quê? Resposta pessoal.

Você produtor

48. Elabore e escreva uma tarefa envolvendo probabilidade condicional utilizando um jogo de cartas, sendo 15 verdes, 15 vermelhas, 10 pretas e 5 brancas, em que ocorram dois eventos *A* e *B*. Depois, entregue a tarefa que você elaborou a um colega para que ele calcule a probabilidade da ocorrência do evento *A*, tendo *B* já ocorrido. Por fim, verifique se a resolução está correta.

49. Em uma urna são colocadas 15 bolas, sendo 6 brancas, 5 azuis e 4 amarelas, todas idênticas e diferenciando-se apenas pela cor. São retiradas, sucessivamente sem reposição, 2 bolas dessa urna. Se a 1ª bola retirada é branca, calcule a probabilidade de a 2ª bola:

a) ser azul. $\frac{5}{14}$ ou aproximadamente 35,7%

b) ser amarela. $\frac{4}{14}$ ou aproximadamente 28,6%

c) ser branca. $\frac{5}{14}$ ou aproximadamente 35,7%

d) não ser branca. $\frac{9}{14}$ ou aproximadamente 64,3%

50. Em uma feira de artes, cada visitante preenche um formulário identificando sua idade e sexo.

Chico Ferreira/Pulsar Imagens

Feira de artesanato na Praça da República, em Belém (PA), em 2017.

Em certo dia, 361 pessoas visitaram a feira, das quais 196 eram do sexo feminino. Nesse dia, a porcentagem de homens e de mulheres acima de 30 anos era 40% e 50%, respectivamente. Ao sortear um dos formulários, determine a probabilidade de ele pertencer a:

a) uma mulher, dado que o visitante sorteado tem mais do que 30 anos. $\frac{49}{82}$ ou aproximadamente 59,8%

b) um homem, dado que o visitante sorteado tem 30 anos ou menos. $\frac{99}{197}$ ou aproximadamente 50,3%

c) uma pessoa com 30 anos ou menos, dado que o visitante sorteado é mulher. $\frac{1}{2}$ ou 50%

51. (Fuvest-SP) Uma urna contém 5 bolas brancas e 3 bolas pretas. Três bolas são retiradas ao acaso, sucessivamente, sem reposição. Determine:

a) a probabilidade de que tenham sido retiradas 2 bolas pretas e 1 bola branca. $\frac{15}{56}$ ou aproximadamente 26,8%

b) a probabilidade de que tenham sido retiradas 2 bolas pretas e 1 bola branca, sabendo-se que as três bolas retiradas não são da mesma cor. $\frac{1}{3}$ ou 33,3%

51. Diga aos alunos para considerar que as bolas colocadas na urna são todas idênticas, diferenciando-se apenas pela cor.

52. (UFRJ) Um novo exame para detectar certa doença foi testado em 300 pessoas, sendo 200 sadias e 100 portadoras da doença.

Após o teste verificou-se que, dos laudos referentes a pessoas sadias, 170 resultaram negativos e, dos laudos referentes a pessoas portadoras da doença, 90 resultaram positivos.

a) Sorteando um desses 300 laudos, calcule a probabilidade de que esse tenha sido positivo.

$\frac{2}{5}$ ou 40%

b) Sorteado um dos 300 laudos, verificou-se que ele era positivo.

Determine a probabilidade de que a pessoa correspondente ao laudo sorteado tivesse realmente a doença. $\frac{3}{4}$ ou 75%

53. Em uma estante há 12 DVDs, sendo 4 de *rock*, 5 de MPB e 3 de samba. Retirando-se, aleatoriamente e sem reposição, 2 DVDs dessa estante, qual é a probabilidade de ambos serem do mesmo gênero musical? Em seguida construa um fluxograma que permita obter essa probabilidade. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

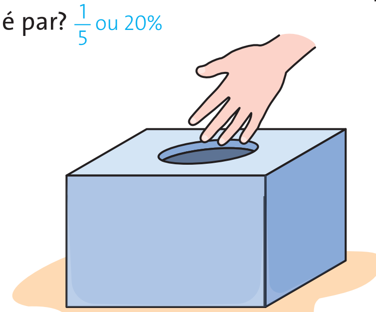
Desafio

54. (FGV-SP) Um jogador aposta sempre o mesmo valor de R$ 1,00 numa jogada cuja chance de ganhar ou perder é a mesma. Se perder, perderá o valor apostado, se ganhar, receberá R$ 1,00 além do valor apostado. Se ele começa o jogo com R$ 3 no bolso, joga três vezes e sai, com que valor é mais provável que ele saia?

R$ 2,00 ou R$ 4,00

Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

55. Em certa urna foram colocadas fichas numeradas de 1 a 20, diferenciadas apenas pela numeração. Qual é a probabilidade de retirar uma ficha dessa urna com um número divisível por 5, dado que é par? $\frac{1}{5}$ ou 20%



Sergio L. Filho

56. b) $\frac{1}{4}$ ou 25%

56. Um casal pretende ter 3 filhos. Se o 1º filho do casal é uma menina, qual é a probabilidade:

a) de os outros 2 serem meninas? $\frac{1}{4}$ ou 25%

b) de o 2º filho ser menina e o 3º ser menino?

c) de o casal ter 2 meninas e 1 menino? $\frac{1}{2}$ ou 50%

Observação

Para resolver a tarefa a seguir, considere gestações únicas, ou seja, apenas um embrião por vez.

Em grupo

57. Ao realizar o planejamento familiar, o casal pode ter um menino ou uma menina, sendo a probabilidade de ocorrer qualquer um dos sexos a mesma. Apesar dessa probabilidade, a formação de algumas famílias é inusitada e até mesmo curiosa, como as famílias americanas do estado de Tennessee, que tiveram 13 meninos e do estado de Illinois, que tiveram 11 filhos, sendo os cinco primeiros meninas e os outros seis, meninos.

a) Considerando que um casal terá 13 filhos, qual é a probabilidade de ocorrer a configuração da família de Tennessee? E outro casal que terá 11 filhos, qual é a probabilidade de ter a mesma configuração da família de Illinois? $\frac{1}{8\,192}$; $\frac{1}{2\,048}$

b) Se na família de Illinois ocorresse o nascimento de mais um filho, qual seria a probabilidade de ser menino? E de ser menina? $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$

c) Suponha que um casal terá 13 filhos, qual é a probabilidade de ocorrer uma formação familiar em que os cinco primeiros filhos sejam meninos e os outros oito meninas? $\frac{1}{8\,192}$

d) O que vocês perceberam em relação às respostas dos itens anteriores? Por que vocês acham que ocorreu isso?

e) Vocês conhecem ou já ouviram falar de uma formação familiar inusitada, semelhante às apresentadas? Em caso afirmativo, como era a formação dessa família? Resposta pessoal.

58. (Enem) Numa escola com 1 200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo que ele não fala inglês, qual é a probabilidade de que esse aluno fale espanhol? a

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{5}{8}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{5}{6}$

e) $\frac{5}{14}$

57. d) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos compreendam que a probabilidade de um filho nascer menino ou menina é a mesma, ou seja, 50%. Além disso, a sequência de nascimento dos filhos é muito particular, assim, a probabilidade de ocorrer igual em mais de uma família é muito pequena.

Desafio

59. No início deste capítulo, vimos uma tabela com as probabilidades de um apostador de certa loteria ganhar acertando quatro, cinco ou seis números, como mostrado na tabela ao lado.

De acordo com as informações apresentadas, calcule a probabilidade de um apostador em dois sorteios consecutivos acertar:

Probabilidade de acerto da loteria			
Quantidade de números escolhidos	Probabilidade de acerto (uma em ...)		
	Seis	Cinco	Quatro
6	50 063 860	154 518	2 332
7	7 151 980	44 981	1 038
8	1 787 995	17 192	539
9	595 998	7 791	312
10	238 399	3 973	195
11	108 363	2 211	129
12	54 182	1 317	90
13	29 175	828	65
14	16 671	544	48
15	10 003	370	37

Fonte de pesquisa: CAIXA ECONÔMICA FEDERAL (CEF). *Mega-Sena*. Disponível em: <http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/megasena/>. Acesso em: 9 abr. 2020.

a) quatro e cinco números em uma quantidade mínima de aposta. $\frac{1}{360\,335\,976}$

b) quatro números se na 1ª aposta escolher sete números e cinco números se na 2ª aposta escolher 15 números. $\frac{1}{384\,060}$

c) cinco e seis números se em ambas as apostas escolher 15 números. $\frac{1}{3\,701\,110}$

d) seis e quatro números escolhendo sete números em cada jogo. $\frac{1}{7\,423\,755\,240}$

- Em relação aos resultados obtidos, você acha pouco ou muito provável ocorrer esses eventos? Justifique sua resposta.

Possível resposta: pouco provável, pois as probabilidades estão mais próximas de 0 do que de 1.

60. (UFPR) Um grupo de pessoas foi classificado quanto ao peso e pressão arterial, conforme mostrado no quadro abaixo. Diga aos alunos que popularmente é comum nos referimos às medidas de massa como "peso".

Pressão	Peso			
	Excesso	Normal	Deficiente	Total
Alta	0,10	0,08	0,02	0,20
Normal	0,15	0,45	0,20	0,80
Total	0,25	0,53	0,22	1,00

Com base nesses dados, considere as seguintes afirmativas: b

1. A probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso nesse grupo ter pressão alta é 0,20.
2. Que uma pessoa escolhida ao acaso, nesse grupo, tem excesso de peso, a probabilidade de ela ter também pressão alta é 0,40.
3. Que uma pessoa escolhida ao acaso, nesse grupo, tem pressão alta, a probabilidade de ela ter também peso normal é 0,08.
4. A probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso nesse grupo ter pressão normal e peso deficiente é 0,20.

É correto afirmar que:

a) somente as afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

b) somente as afirmativas 1, 2 e 4 são verdadeiras.

c) somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.

d) somente as afirmativas 2, 3 e 4 são verdadeiras.

e) somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.

6 Lei binomial das probabilidades

Considere um experimento realizado diversas vezes de maneira idêntica, sendo cada um deles independente. Calculamos a probabilidade de que ocorra um evento A uma vez, duas vezes, ..., n vezes ou todas as vezes, nesse experimento, por meio do que denominamos **lei binomial das probabilidades**.

A seguir, vamos estudar alguns exemplos de experimentos binomiais e verificar como calcular sua probabilidade.

Exemplos

1. No planejamento familiar, um casal decide ter 5 filhos. Qual é a probabilidade de nascerem 3 meninas e 2 meninos?

Para respondermos a essa pergunta, vamos indicar por M os filhos de sexo masculino e por F, os de sexo feminino.

Uma das possibilidades para a ordem do nascimento dos filhos do casal seria *FFFMM*. Nesse caso, como os eventos são independentes, ou seja, a ocorrência de um não tem influência na ocorrência do outro, podemos calcular a probabilidade da seguinte maneira:

$$P(F) \cdot P(F) \cdot P(F) \cdot P(M) \cdot P(M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

No entanto, esse casal pode ter 3 meninas em outras sequências diferentes da apresentada acima, por exemplo *FFMFM*, *FMFFM*, *MMFFF*. O total de sequências desse tipo pode ser calculado pela permutação de 5 elementos com 3 repetições de F e 2 de M, isto é:

$$P_5^{(3,2)} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2} = 10$$

Podemos ainda calcular o total de sequências, distribuindo o nascimento de dois meninos dentre os 5 nascimentos, ou seja, $\binom{5}{2}$.

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot \cancel{3!}} = 10$$

Há 10 sequências diferentes, e a probabilidade de cada sequência é $\frac{1}{32}$. Então, a probabilidade de nascerem 3 meninas e 2 meninos é dada por:

$$10 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{16} = 0{,}3125 \rightarrow 31{,}25\%$$

Bettmann/Getty Images

A probabilidade de uma mulher grávida ter um filho, sendo um menino ou menina é sempre 1 em 2, ou seja, 50%. No entanto, existem casos curiosos, como o do casal que teve treze meninos, de outro que teve oito meninas e de um que teve cinco meninas em sequência e, depois, seis meninos.

Este casal, dos Estados Unidos, teve 11 meninos.

Foi calculada a probabilidade do nascimento dos 5 filhos do casal em certa ordem, isto é, *FFFMM*. Nesse momento, pergunte aos alunos qual seria a probabilidade do nascimento dos 5 filhos caso a ordem dos sexos fosse diferente da apresentada. Depois, considerando as respostas dadas por eles, apresente as explicações encontradas no livro e verifique com eles que, independentemente da ordem, a probabilidade dos nascimentos é a mesma.

2. Ao lançar 6 vezes um dado, qual é a probabilidade de a face com 3 pontos ocorrer exatamente 4 vezes?

Pelo enunciado, em cada lançamento, temos:

- espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ocorrência da face com 3 pontos: $A = \{3\}$
- ocorrência de uma face diferente de 3 pontos: $\overline{A} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

Calculando $P(A)$ e $P(\overline{A})$, temos: $P(A) = \dfrac{1}{6}$, $P(\overline{A}) = \dfrac{5}{6}$.

Nesses seis lançamentos, os eventos A e $\overline{A}$ podem ocorrer em diferentes ordens. Uma delas é $AAAA\overline{A}\,\overline{A}$, isto é, os quatro primeiros lançamentos apresentarem a face com 3 pontos e os dois últimos não. A partir dessa ordem e sabendo que os sorteios são independentes, calculamos a probabilidade da seguinte maneira:

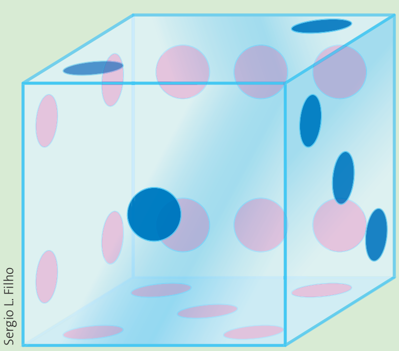
$$\underbrace{P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) \cdot P(A)}_{[P(A)]^4} \cdot \underbrace{P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A})}_{[P(\overline{A})]^2} = \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

Há outras sequências de resultados diferentes de $AAAA\overline{A}\,\overline{A}$, por exemplo $\overline{A}AAAA\overline{A}$, $\overline{A}\,\overline{A}AAAA$ etc. O número de sequências desse tipo pode ser calculado pela permutação de 6 elementos com 4 repetições de A e 2 de $\overline{A}$:

$$P_6^{(4,2)} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2} = 15 \text{ ou } \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2} = 15$$

Há 15 sequências diferentes, e a probabilidade de cada uma é $\left(\dfrac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^2$. Então, a probabilidade de o evento A ocorrer 4 vezes em 6 lançamentos é:

$$\binom{6}{4} \cdot [P(A)]^4 \cdot [P(\overline{A})]^2 = 15 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{15\,552} \simeq 0{,}008 \to 0{,}8\%$$


Sergio L. Filho

Nos dados comuns de seis faces, os pontos de um a seis não são colocados de modo aleatório, e sim respeitando a regra de que as faces opostas sempre somam sete pontos. Assim, a face com um ponto é sempre oposta a face com seis pontos, a face com dois pontos é sempre oposta a face com cinco pontos etc.

Esquema representando os pontos de cada uma das faces de um dado.

De modo geral:

A probabilidade de um evento A ocorrer p vezes em n tentativas independentes, em que cada tentativa é $P(A)$, é dada por:

$\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [P(\overline{A})]^{n-p}$, em que $p \leq n$ e $\overline{A}$ é o evento complementar de A.

Como $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, podemos escrever $\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [1 - P(A)]^{n-p}$.

Problemas e exercícios resolvidos

R23. Uma moeda é lançada 7 vezes. Qual é a probabilidade de se obter exatamente 5 caras nesses lançamentos?

Resolução

A obtenção de uma cara (C) ou de uma face que não seja cara $(\overline{C})$ em certo lançamento da moeda independe dos demais lançamentos. Além disso, temos: $P(C) = P(\overline{C}) = \frac{1}{2}$. Tomando $n = 7$ (quantidade de lançamentos) e $p = 5$ (quantidade de caras que se deseja obter), calculamos a probabilidade da seguinte maneira:

$$\binom{n}{p} \cdot [P(C)]^p \cdot [P(\overline{C})]^{n-p} =$$

$$= \binom{7}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-5} =$$

$$= \binom{7}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 =$$

$$= 21 \cdot \frac{1}{128} = \frac{21}{128} \simeq 0{,}164 \rightarrow 16{,}4\%$$

R24. Certo jogador de basquete tem nos arremessos livres uma de suas principais qualidades. A probabilidade de esse jogador acertar um arremesso livre é 80%. Calcule a probabilidade de o jogador acertar exatamente 6 arremessos livres em 10 tentativas, admitindo que cada um dos arremessos é independente.

Resolução

A probabilidade de o jogador acertar um arremesso livre (evento A) em uma tentativa é dada por:

$$P(A) = 80\% = 0{,}8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Como o acerto de um arremesso é independente dos demais, calculamos a probabilidade de o jogador acertar 6 arremessos livres (p) em 10 tentativas (n) pela lei binomial das probabilidades.

$$\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [1 - P(A)]^{n-p} =$$

$$= \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right)^{10-6} =$$

$$= \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 \simeq 0{,}088 \rightarrow 8{,}8\%$$

R25. Em certo concurso, uma prova é composta por 50 questões. O candidato deve marcar a única resposta correta entre quatro alternativas. Se uma pessoa marcar as alternativas arbitrariamente, calcule a probabilidade de ela:

a) acertar 50% da prova.

b) errar todas as questões da prova.

Resolução

Chamamos A o evento "marcar a alternativa correta". A probabilidade de acertar a única resposta correta entre quatro alternativas é: $P(A) = \frac{1}{4}$.

a) Como o acerto de uma questão é independente das demais, para calcular a probabilidade de acertar 50% da prova, isto é, 25 questões (p) em 50 tentativas (n), utilizamos a lei binomial das probabilidades:

$$\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [1 - P(A)]^{n-p} =$$

$$= \binom{50}{25} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{25} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{50-25} =$$

$$= \binom{50}{25}\left(\frac{1}{4}\right)^{25} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{25} \simeq 0{,}000084 \rightarrow 0{,}0084\%$$

b) Se a probabilidade de acertar uma questão na prova é $P(A) = \frac{1}{4}$, então a probabilidade de não acertar a questão é $P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Pela lei binomial das probabilidades, a probabilidade de não acertar 50 questões (p) em 50 tentativas (n) é dada por:

$$\binom{n}{p} \cdot [P(\overline{A})]^p \cdot [1 - P(\overline{A})]^{n-p} =$$

$$= \underbrace{\binom{50}{50}}_{1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{50} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{3}{4}\right)^{50-50}}_{\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1} =$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{50} \cdot 1 =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{50} \simeq 0{,}00000057 \rightarrow 0{,}000057\%$$

61. Um dado é lançado 6 vezes consecutivas. Calcule a probabilidade: Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

a) de a face com 5 pontos ocorrer exatamente 4 vezes.

b) de a face com 6 pontos ocorrer exatamente 3 vezes.

c) de uma face com número de pontos par ocorrer exatamente 5 vezes.

62. Ao se lançar uma moeda 8 vezes, qual é a probabilidade de se obter 6 caras e 2 coroas? $\frac{7}{64}$ ou aproximadamente 10,94%

63. Em uma urna são colocadas 10 bolas, sendo 4 azuis, 3 vermelhas e 3 amarelas, todas idênticas e diferenciando-se apenas pela cor. Retiram-se aleatoriamente 5 dessas bolas, com reposição. Qual é a probabilidade: Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

a) de se retirar exatamente 4 bolas azuis?

b) de se retirar exatamente 5 bolas vermelhas?

c) de não se retirar nenhuma bola azul?

64. No lançamento de uma moeda tendenciosa, há 60% de probabilidade de se obter cara. Qual é a probabilidade de se obter exatamente 4 caras em 5 lançamentos dessa moeda? $\frac{162}{625}$ ou 25,92%

65. Uma sorveteria fez uma promoção em que, a cada 20 picolés, 1 está premiado com um brinde. Qual é a probabilidade de ganhar 8 brindes comprando 50 picolés? aproximadamente 0,2%

66. Um casal de ratos de laboratório, utilizados em uma pesquisa, reproduz-se de tal modo que a probabilidade de o filhote ser macho é 4 vezes a de ser fêmea. Supondo que os ratos tenham 8 filhotes, qual é a probabilidade de exatamente 3 deles serem fêmeas? $\frac{57\,344}{390\,625}$ ou aproximadamente 14,7%

67. Estudos realizados com certo jogador de futebol verificaram que a probabilidade de ele marcar gol em cobrança de penalidade máxima é 3 gols em 4 cobranças. Calcule a probabilidade de o jogador marcar exatamente 5 gols em 7 cobranças. $\frac{5\,103}{16\,384}$ ou aproximadamente 31,1%

68. Em um programa de televisão, o apresentador faz 10 perguntas ao participante que está em uma cabine à prova de som. Mesmo sem ouvir a pergunta, o participante deve responder aleatoriamente "sim" ou "não" ao sinal de uma luz dentro da cabine. Qual é a probabilidade de o participante acertar 7 respostas? $\frac{15}{128}$ ou aproximadamente 11,72%

69. Uma prova tem 10 questões de Matemática, 20 de Português e 5 de Língua Estrangeira. Cada uma dessas questões contém 5 alternativas das quais somente uma é correta. Se uma pessoa marcar arbitrariamente uma alternativa em cada questão, calcule a probabilidade de ela:

a) acertar 40% da prova. aproximadamente 0,3506%

b) acertar apenas 5 questões. aproximadamente 12,9%

70. Em uma loja de roupas, sabe-se que a probabilidade de um cliente homem comprar uma calça *jeans* com numeração entre 40 e 44 é 70%. Supondo que 8 homens tenham comprado calça *jeans* nessa loja, Qual é a probabilidade de exatamente 5 deles não terem adquirido uma calça com as características citadas? $\frac{583\,443}{12\,500\,000}$ ou aproximadamente 4,67%

71. O fabricante de uma vacina para prevenir certa doença garante que a probabilidade de uma pessoa vacinada adquirir a doença é 20%. Escolhendo-se ao acaso 8 pessoas vacinadas, qual é a probabilidade de 4 delas adquirirem a doença? $\frac{3\,584}{78\,125}$ ou aproximadamente 4,6%

Finalizando a conversa

a) O que você entendeu acerca de experimento aleatório, espaço amostral e eventos? Resposta pessoal. Possível resposta: experimento aleatório é todo experimento (ou fenômeno) que, repetido várias vezes sob condições idênticas, apresenta resultados imprevisíveis; espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório; evento é todo subconjunto de um espaço amostral de um experimento aleatório.

b) Qual foi o entendimento acerca da probabilidade em espaço amostral equiprovável, probabilidade da união de eventos e da probabilidade condicional? b) Resposta pessoal. Possível resposta: espaço amostral equiprovável: todos os elementos de um experimento aleatório têm a mesma chance de ocorrer; a probabilidade da união de dois eventos *A* e *B* é igual à soma das probabilidades de *A* e de *B* menos a probabilidade da interseção de *A* com *B*; probabilidade condicional: sejam os eventos *A* e *B* não vazios no mesmo espaço amostral, a probabilidade da ocorrência de *A*, em relação a *B*, tendo *B* já ocorrido.

c) Em que situações do dia a dia é possível utilizar probabilidades? Possível resposta: no cálculo da chance de uma pessoa acertar no jogo da loteria; na probabilidade de sair uma quantidade par de pontos ao se lançar um dado comum; a probabilidade de chover na próxima semana, entre outros.

d) Você considerou importante o estudo deste capítulo? Por quê? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos identifiquem a importância do estudo de probabilidade, pois em situações nas quais usamos o cálculo de probabilidade, é possível quantificar a ocorrência de um determinado evento, além de possuir várias aplicações em situações diversas e em várias áreas do conhecimento.

Saiba mais

Paradoxo do aniversário

O estudo das probabilidades muitas vezes apresenta resultados inesperados. Um exemplo é a probabilidade do evento de, em um grupo de 23 pessoas, pelo menos 2 fazerem aniversário em um mesmo dia, que pode parecer pequena visto que um ano possui 365 ou 366 dias. No entanto, ao realizarmos os cálculos, temos uma surpresa! Veja a seguir.

Para efetuar o cálculo, vamos considerar um ano de 365 dias, sem levar em conta os anos bissextos, e representar por A o evento de pelo menos 2 pessoas de um grupo de 23 pessoas fazerem aniversário em um mesmo dia.

A probabilidade de ocorrência de A é dada pela soma das probabilidades de 2 pessoas, 3 pessoas, 4 pessoas,..., 23 pessoas fazerem aniversário em um mesmo dia. Desse modo, torna-se mais simples calcularmos a probabilidade de $\overline{A}$ (complementar de A), ou seja, de nenhuma pessoa do grupo fazer aniversário em um mesmo dia.

Para que $\overline{A}$ ocorra, a primeira pessoa do grupo pode fazer aniversário em qualquer um dos 365 dias do ano, a segunda pode fazer aniversário em um dos outros 364 dias do ano $(365-1)$, a terceira , em um dos outros 363 dias do ano $(365-2)$, até a 23ª pessoa, que pode fazer aniversário em um dos outros 343 dias do ano $(365-22)$. Sendo assim, $n(\overline{A}) = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 343$.

Por outro lado, no universo das possibilidades, cada pessoa pode fazer aniversário em qualquer um dos 365 dias do ano. Assim, o total de elementos do espaço amostral Ω é dado por $365^{23} = \underbrace{365 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 365}_{23\text{ fatores}}$.

Portanto, temos:

$$P(\overline{A}) = \frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \frac{365 \cdot \overbrace{364}^{365-1} \cdot \overbrace{363}^{365-2} \cdot \ldots \cdot \overbrace{343}^{365-22}}{365^{23}} \simeq 0{,}493 \rightarrow 49{,}3\%$$

Como $P(A) = 1 - P(\overline{A})$, segue que:

$$P(A) \simeq 1 - 0{,}493 \simeq 0{,}507 \rightarrow 50{,}7\%$$

Assim, a probabilidade de que pelo menos 2 pessoas de um grupo de 23 façam aniversário em um mesmo dia é maior do que 50%. Logo, é mais provável a ocorrência de coincidências de aniversário do que a não ocorrência.

Para exemplificar essa situação, vamos utilizar alguns jogadores da seleção brasileira de futebol convocados para a Copa do Mundo de 2018.

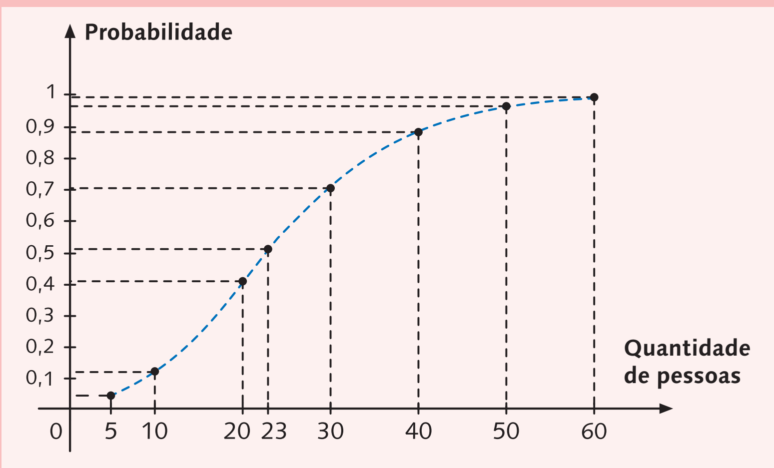
Dos 23 jogadores da seleção brasileira convocados para a Copa do Mundo de Futebol de 2018, os jogadores Alisson e Firmino fazem aniversário em um mesmo dia, 2 de outubro.

Podemos estender o estudo da probabilidade da ocorrência de pelo menos dois aniversariantes em um mesmo dia para um grupo de n pessoas com $1 \leqslant n \leqslant 366$.

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot [365 - (n-1)]}{365^n}$$

A partir dessa expressão, construímos o quadro e o gráfico a seguir.

n	5	10	20	23	30	40	50	60	366
$P(A)$	0,027	0,117	0,411	0,507	0,706	0,891	0,970	0,994	1



Sergio L. Filho

Note que, em um grupo de 60 pessoas, a probabilidade de que pelo menos 2 façam aniversário no mesmo dia é quase 100%.

Como você observou, o estudo das probabilidades pode apresentar surpresas. Assim, sempre que nos depararmos com uma questão envolvendo cálculos probabilísticos, antes de tirar conclusões, é aconselhável que façamos os cálculos e resolvamos o problema.

Peter Cziborra/Reuters/Fotoarena

Alizada Studios/Shutterstock.com

Além de Alisson e Firmino, os jogadores Filipe Luís e Willian também fazem aniversário em um mesmo dia, porém, em 9 de agosto.


Emiliano Cavalcante

a) De acordo com o texto, podemos concluir que em um grupo de 80 pessoas, a probabilidade de que pelo menos 2 façam aniversário no mesmo dia é quase 100%? Justifique sua resposta.

b) Qual é a probabilidade de que pelo menos 2 pessoas, da sua sala de aula, façam aniversário em um mesmo dia? Resposta pessoal.

c) Qual é a probabilidade de que pelo menos 2 pessoas, da sua sala de aula, façam aniversário em um mesmo mês? A que conclusão você chegou? Resposta pessoal.

a) Espera-se que os alunos respondam que sim, pois de acordo com o texto, para um grupo de 60 pessoas, a probabilidade de que pelo menos 2 façam aniversário no mesmo dia é 99,4%, que é quase 100%. Logo, se a quantidade de integrantes do grupo for 80 pessoas, a probabilidade de que pelo menos 2 façam aniversário no mesmo dia ficará ainda mais perto de 100%.

Conectando ideias

Veja comentários e sugestões de trabalho com esta seção na Assessoria pedagógica.

Sorteio de sonhos

A fim de realizar seu sonho de adquirir um bem ou serviço, como um carro ou uma casa, as pessoas recorrem a sistemas de crédito. Entre esses sistemas temos o consórcio, que consiste em uma modalidade de aquisição programada com pagamento por meio de parcelas, as quais constituirão uma poupança comum ao grupo de pessoas aderidas ao plano. Por meio de sorteios e lances realizados mensalmente, alguns indivíduos poderão usufruir do valor desejado antes do final do consórcio.

Vantagens	Desvantagens
Sem taxa de juros, somente taxa administrativa e possíveis reajustes de acordo com ajuste de preço de tabela do bem.	O consorciado pode pagar o consórcio inteiro sem ter sido sorteado.
O consorciado escolhe o prazo de pagamento e o valor das parcelas.	A antecipação da quitação não garante a entrega imediata da carta de crédito, que precisa ser validada em assembleia conforme normas do Banco Central.
Existem chances reais de ser sorteado no primeiro mês de participação.	Não é a melhor opção de parcelamento para quem precisa ou espera usufruir imediatamente do bem.
Em caso de desistência, é possível resgatar o dinheiro pago.	O dinheiro resgatado em caso de desistência não inclui as taxas administrativas embutidas nas parcelas pagas.
Há opção de antecipar a quitação das parcelas restantes, o que livra o consorciado de futuros reajustes por correção de tabela e da **alienação** do bem contemplado.	Em caso de desistência, o resgate do dinheiro pago pode ocorrer apenas no encerramento do grupo.

alienação: situação de retenção do domínio de posse por parte do credor como garantia de pagamento, normalmente documentada no registro do bem

Fonte de pesquisa: ARAUJO, Fernanda. Consórcio de veículo: entenda como funciona. *SERASA ensina*. Disponível em: <https://www.serasaconsumidor.com.br/ensina/dicas/consorcio-de-veiculo-entenda-como-funciona/>. Acesso em: 14 fev. 2020.

O conceito de probabilidade ajuda na compreensão do funcionamento do consórcio, ou seja, entender o motivo de aumentarem as chances do consorciado ser contemplado com o passar do tempo.

5 Compromisso: o consorciado deve pagar as prestações todo mês.

6 Sorteio: todo mês é sorteada uma cota que terá o direito de usufruir da carta de crédito para comprar um bem.

Leandro Lassmar

a) De que maneira os conceitos abordados neste capítulo estão relacionados ao sistema de consórcios?

b) Os conhecimentos que você possui sobre probabilidade o ajudaram a compreender as informações apresentadas? Justifique sua resposta.

Resposta pessoal.

9 Quitação: ocorre quando todas as parcelas são pagas, pelo último vencimento com encerramento do grupo ou de maneira antecipada eliminando todas as pendências restantes.

8 Assembleia: reunião mensal na qual a administradora do consórcio divulga os contemplados por maior lance e por sorteio.

CAPÍTULO 3

Estatística

Kamol Kamtorncharoen/ Shutterstock.com

Na fotografia, vemos as Cataratas do Iguaçu, no estado do Paraná, em janeiro de 2015, uma maravilha natural muito visitada por turistas de todo o mundo.

Água

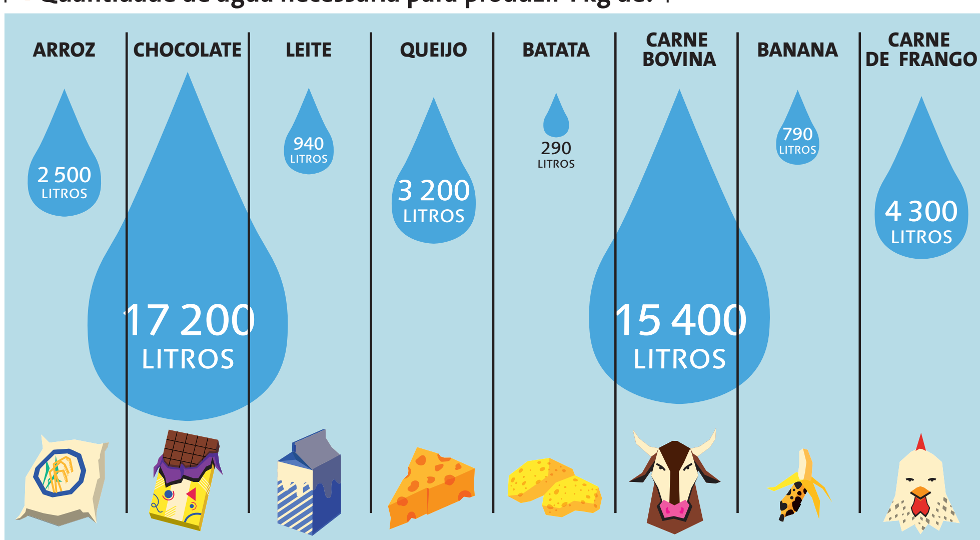
Quando se fala em gastos exagerados e desperdício de água, vêm logo à nossa mente imagens de pessoas em banhos demorados, lavando calçadas e veículos com mangueira, escovando os dentes com a torneira aberta, tubulações com vazamentos, entre outras situações. Sem sombra de dúvida, essas atitudes devem ser evitadas, porém, gastos exagerados e desperdício de água ocorrem em vários outros lugares e situações das quais nem fazemos ideia.

Muitos litros de água são consumidos diariamente na produção de itens considerados, atualmente, indispensáveis pela população, como em roupas, veículos e eletrônicos. Para produzir uma calça *jeans*, por exemplo, são gastos, em média, 8 000 L de água, e para uma camiseta com 250 g de algodão, 2 500 L.

Por isso, além das necessidades diárias, para ingestão e higiene, ao pensarmos em consumo de água, devemos considerar as quantidades utilizadas de maneira direta ou indireta, na produção de itens presentes em nosso dia a dia. Veja, a seguir, quantos litros de água potável são necessários para produzir 1 kg de alguns produtos.

a) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que a água é uma substância vital ao ser humano e pode vir a faltar futuramente.

Quantidade de água necessária para produzir 1 kg de:



Carmen Martinez

Esses valores podem variar de acordo com a região e o tipo de produto fabricado.

Fonte de pesquisa: WATER FOOTPRINT. *Product Water Footprints*. Disponível em: <https://waterfootprint.org/en/resources/interactive-tools/product-gallery/>. Acesso em: 4 fev. 2020.

b) Além das necessidades diárias, para ingestão e higiene, ao pensarmos em consumo de água, devemos considerar as quantidades utilizadas de maneira direta ou indireta, na produção de itens presentes em nosso dia a dia.

a Em sua opinião, por que devemos evitar o desperdício de água?

b Ao pensarmos em consumo de água, quais utilizações devemos considerar?

c Quantos litros de água são necessários para produzir uma calça *jeans*? E 1 kg de carne bovina?
8 000 L; 15 400 L

1 Introdução 88
2 Termos da Estatística 91
3 Distribuição de frequência 95
4 Medidas de tendência central 105
5 Representação gráfica de dados estatísticos 116
6 Medidas de dispersão 134
7 Medidas de tendência central e de dispersão para dados agrupados 142
8 Estatística e probabilidade 145

1 Introdução

Na página anterior, vimos várias informações interessantes relacionadas ao consumo de água. Informações semelhantes a essa, bem como outras relacionadas a diversos assuntos, passaram a ser transmitidas muito mais rapidamente graças ao desenvolvimento tecnológico e aos meios de comunicação.

Atualmente, tudo que se relaciona com a informação tem cada vez mais importância e, dessa maneira, é necessário que saibamos compreender, estabelecer relações e interpretá-las para podermos chegar às nossas próprias conclusões.

Essas informações, encontradas, por exemplo, em jornais, revistas, telejornais e internet são apresentadas das mais diversas maneiras, como em tabelas, gráficos, infográficos e esquemas.

Veja alguns exemplos a seguir.

BNCC

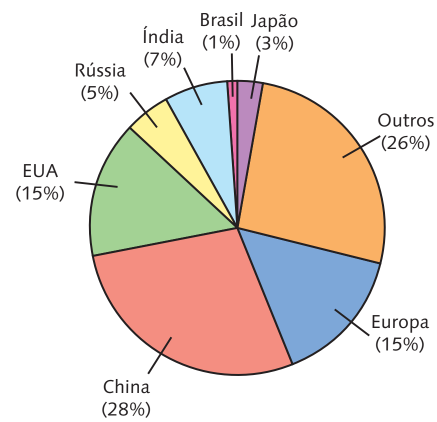
- CG 6
- CG 7
- CG 10
- CEMT 1
- CEMT 2
- CEMT 3
- CEMT 4
- CEMT 5
- EM13MAT102
- EM13MAT202
- EM13MAT316
- EM13MAT406
- EM13MAT407
- EM13MAT511

Países que mais enviam turistas para o Brasil – 2018

País	Quantidade de turistas
Argentina	2 498 483
Estados Unidos	538 532
Chile	387 470
Paraguai	356 897
Uruguai	348 336
França	238 345
Alemanha	209 039
Itália	175 763
Inglaterra	154 586
Portugal	147 159

Fonte de pesquisa: MINISTÉRIO DO TURISMO. *Dados e Fatos*. Disponível em: <http://www.dadosefatos.turismo.gov.br/estat%C3%ADsticas-e-indicadores/principais-emissores.html>. Acesso em: 27 jan. 2020.

Contribuição mundial dos maiores emissores de dióxido de carbono – 2018

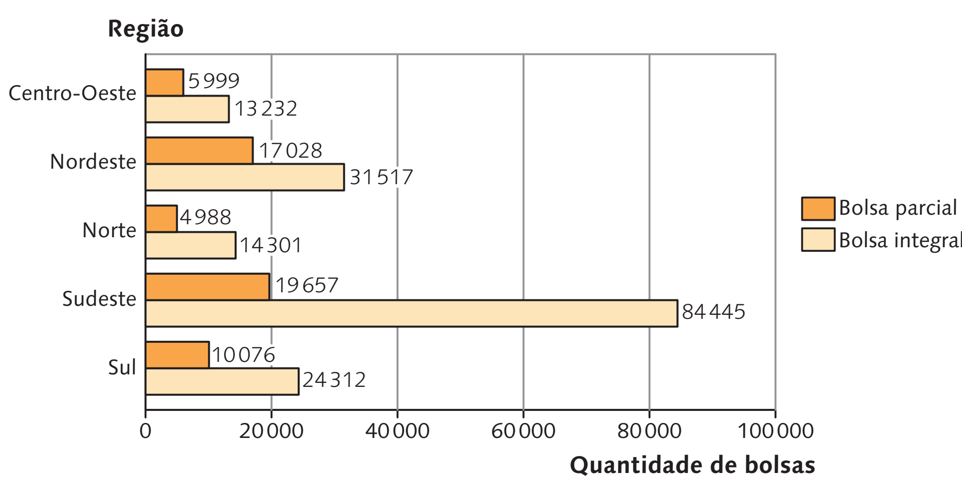


Fonte de pesquisa: GLOBAL CARBON ATLAS. *Emissão de CO2*. Disponível em: <http://www.globalcarbonatlas.org/en/CO2-emissions>. Acesso em: 27 jan. 2020.

Observação

Apesar de o gráfico apresentar as informações de maneira organizada e de facilitar a leitura, a análise mais apurada dos dados representados necessita de conhecimentos estatísticos. Esses conhecimentos permitem verificar, por exemplo, a coerência dos dados apresentados.

Distribuição de bolsas do Programa Universidade para Todos (Prouni) no Brasil nas grandes regiões – 2019

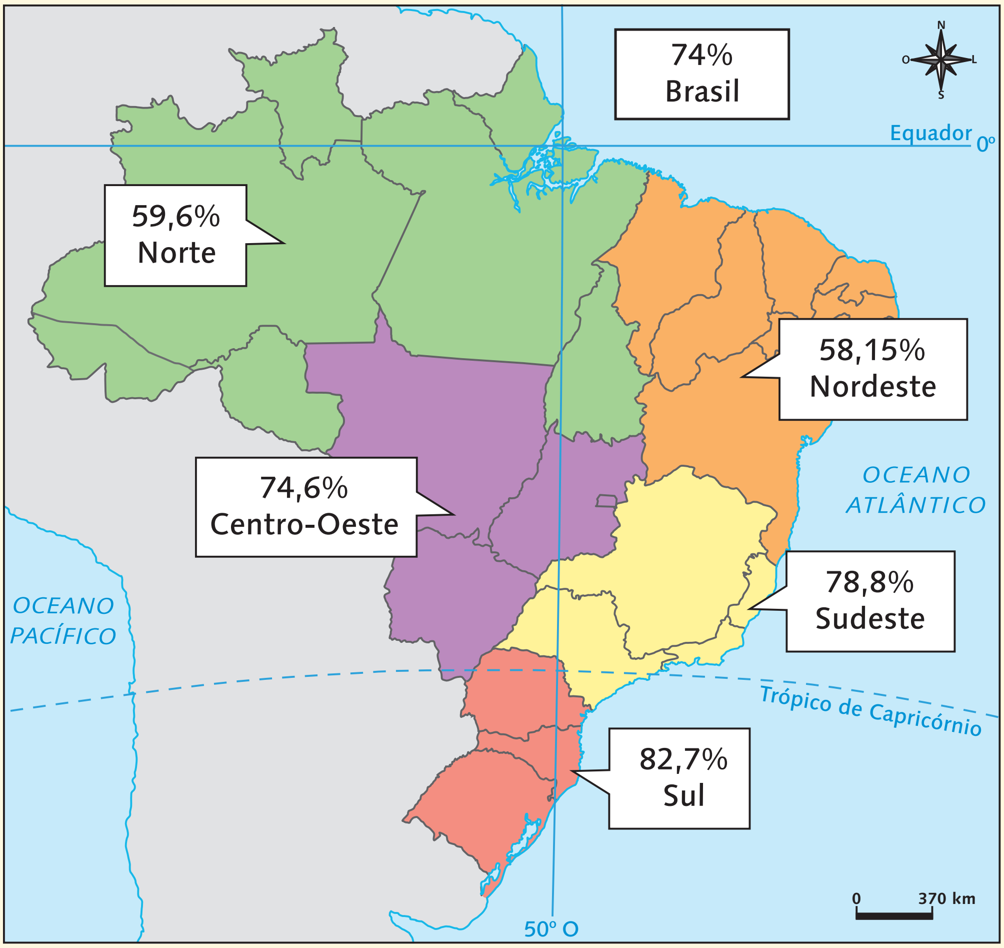


Fonte de pesquisa: MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Programa Universidade para Todos – Prouni*. Disponível em: <http://www.dados.gov.br/dataset/mec-prouni>. Acesso em: 4 mar. 2020.

Ilustrações: Rafael L. Gaion

A Carteira de Trabalho e Previdência Social (CTPS) assinada traz uma série de benefícios para o trabalhador, assegurados pela Consolidação das Leis do Trabalho (CLT), como seguro-desemprego, auxílio-doença, salário-família, salário-maternidade e aposentadoria. Segundo o IBGE, no quarto trimestre de 2019, 74% dos empregados no setor privado tinham carteira assinada. As regiões Norte e Nordeste apresentaram-se em patamares inferiores aos das demais regiões, em contrapartida, as demais regiões atingiram patamares superiores, como exemplo a região Sul.

Quantidade de empregados no setor privado com carteira assinada no Brasil no 4º trimestre de 2019



Keithy Mostachi

Fontes de pesquisa: IBGE. *Atlas Geográfico Escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro, 2018. IBGE. *Resultados do Censo 2010*. Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 27 mar. 2020.

Informações como as apresentadas anteriormente têm como base dados obtidos por meio de pesquisas, nas quais são utilizados métodos estatísticos, abrangendo as seguintes fases:

- **Definição do problema**: formulação do problema e pesquisa de outros levantamentos realizados no mesmo campo; conhecimento do que se pretende pesquisar e definição correta do problema corretamente.
- **Planejamento**: definição de procedimentos para resolver o problema, como levantamento das informações, determinação do tipo de levantamento, cronograma e custos; escolha do instrumento de coleta de dados a ser usado; definição da amostra.
- **Coleta dos dados**: obtenção dos dados referentes à pesquisa que se deseja fazer.
- **Apuração dos dados**: resumo dos dados por meio de contagem e agrupamento (coordenação e tabulação).
- **Apresentação dos dados**: apresentação dos resultados obtidos na coleta e na organização.
- **Análise e interpretação dos dados**: fase importante e delicada, em que ocorre a obtenção de conclusões para que se possa tomar decisões e resolver o problema.

Um exemplo de pesquisa que envolve a coleta de informações é o Censo Demográfico, que é o conjunto de dados estatísticos sobre a população de um país. No Brasil, geralmente, os censos demográficos são realizados de dez em dez anos, e o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) é, por lei, o órgão responsável pela sua realização. Veja no infográfico a seguir como é o processo dessa pesquisa.

Etapas do Censo Demográfico no Brasil

Carmen Martinez

Fonte de pesquisa: IBGE. *Censo Demográfico 2020*. Disponível em: <https://censo2020.ibge.gov.br/apps/treinamentoCenso2020/media/apostila.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2020.

A **Estatística** é uma área da Matemática que trabalha com a coleta de informações, bem como sua organização e análise. Com a análise dos dados coletados, pode-se tomar decisões, além de fazer previsões e planejamentos com mais segurança.

Nos dias atuais, ela é utilizada em diversas áreas do conhecimento, sendo usada não somente com o objetivo de levantar dados e informações, mas também de perceber tendências.

A seguir, estudaremos alguns conteúdos que fazem parte da Estatística. Nesse estudo, faremos uso de alguns conceitos, como a regra de três, assunto que provavelmente você já estudou.

Conversando

b) Resposta pessoal. Possíveis respostas: para ter conhecimento sobre os direitos e deveres e para tirar as próprias conclusões a partir das informações que receber.

a) De que maneira as informações costumam chegar até você?
Resposta pessoal. Possíveis respostas: programas de televisão e *sites* da internet.

b) Qual a importância de se manter bem informado sobre o que acontece à sua volta?

c) Cite outras maneiras em que as autoridades podem utilizar as informações do Censo, além das já citadas no texto.

d) Em sua opinião, em quais áreas do conhecimento a Estatística pode ser utilizada?

c) Possíveis respostas: utilizar para adoção de medidas de prevenção contra a mortalidade infantil, planejamento de construção de moradias populares para regiões necessitadas, investimentos públicos na educação, saúde, lazer, entre outras.

d) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam áreas, como a Biologia, a Saúde e a Agronomia.

2 Termos da Estatística

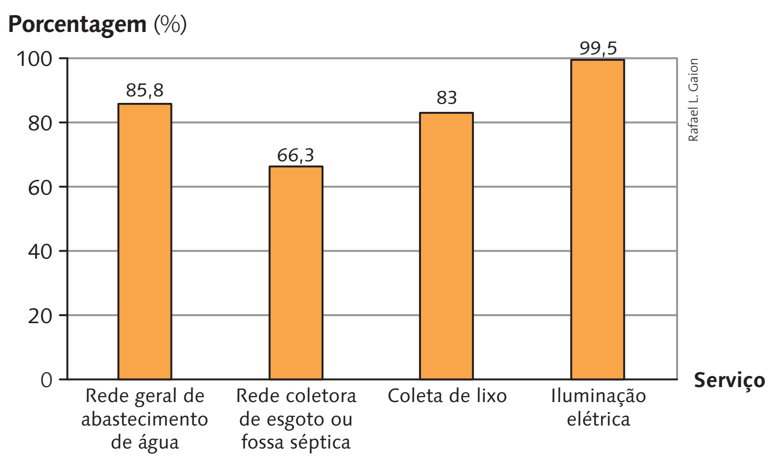
População e amostra

Em Estatística, o grupo todo, alvo da pesquisa, é chamado **população**. Já a parte desse grupo, tomada para a obtenção dos dados, é denominada **amostra**.

Os dados de uma pesquisa são obtidos, em geral, com base em apenas uma parte do grupo a ser estudado. Isso ocorre quando não é possível ter acesso a todo o grupo em razão de limitações que envolvem, por exemplo, tempo e dinheiro.

Com o objetivo de oferecer informações gerais sobre a situação socioeconômica da população do Brasil, o IBGE tem realizado anualmente, desde 1967, a **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua** (PNAD Contínua), em que são investigadas várias características da população, como educação, trabalho, rendimento, domicílios, entre outros. Veja no gráfico um dos indicadores dessa pesquisa.

Domicílios brasileiros atendidos por alguns serviços – 2018



Fonte de pesquisa: IBGE. *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua*. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101654_informativo.pdf>. Acesso em: 4 fev. 2020.

Elena Elisseeva/Shutterstock.com

A água encanada é um exemplo de serviço público.

O sistema de serviços públicos de uma cidade, por exemplo, rede de esgotos, abastecimento de água, energia elétrica, coleta de águas pluviais e rede telefônica, correspondem à infraestrutura. Esses itens garantem qualidade de vida e conforto para a sociedade.

Na PNAD Contínua 2018, para obter informações referentes à população brasileira, que na época tinha em torno de 71 milhões de domicílios, foi aplicado um questionário a uma amostra de 168 000 unidades domiciliares distribuídas por todo o país.

Em algumas situações, é possível avaliar as informações a respeito de todos os elementos da população, como em uma pesquisa realizada entre os funcionários de determinada empresa. Nesse caso, a pesquisa é realizada sobre toda a população. Em outros casos, é necessário escolher uma amostra que deve ser representativa de uma população de modo que as informações sobre ela possam ser usadas para inferir sobre aquela população.

Para a escolha dos elementos que vão compor uma amostra, existem algumas técnicas.

- **Amostragem aleatória** (casual simples)

  A amostra é composta de elementos retirados ao acaso da população. Nesse caso, todo elemento da população tem a mesma probabilidade de constituir a amostra.

Exemplo

Para verificar quais deveriam ser as melhorias a serem feitas em certo bairro, a prefeitura de um município sorteou 50 moradores desse bairro, aos quais seria aplicado um questionário.

- **Amostragem sistemática**

  Os elementos da amostra são escolhidos com base em um sistema preestabelecido.

  No exemplo da página anterior, os moradores poderiam ser escolhidos não ao acaso, mas por meio de uma amostra sistemática. A prefeitura aplicaria o questionário, por exemplo, apenas aos moradores que residissem a menos de 100 m de determinada escola.

- **Amostragem estratificada**

  A amostra é composta de elementos provenientes de todos os grupos ou estratos da população.

  Ainda utilizando o mesmo exemplo, um critério para obter a amostra estratificada poderia ser a seleção de 30 casas: 10 acima de 100 m^2, 10 entre 70 m^2 e 100 m^2 e 10 abaixo de 70 m^2.

Variável

Imagine que um empresário deseja abrir um restaurante em determinada região da cidade. Para isso, foi realizada uma pesquisa a fim de verificar a preferência sobre o tipo de alimento a ser servido, os serviços oferecidos, as formas de pagamento, o horário de funcionamento, as instalações etc.

Cada um desses tópicos corresponde a uma **variável** da pesquisa, também chamada **variável estatística**.

Na variável "tipo de alimento", as opções poderiam ser carnes, massas, sobremesas, entre outras. Essas opções seriam **valores** ou **realizações** da variável.

As variáveis estatísticas podem ser classificadas em **qualitativas** ou **quantitativas**.

- **Variável qualitativa**: apresenta como possíveis realizações qualidades ou atributos daquilo que está sendo pesquisado. Exemplos: sexo, estado civil, nível de escolaridade, cor dos cabelos.

  As variáveis qualitativas podem ser classificadas em **ordinais** ou **nominais**.

  Na variável ordinal há uma ordenação para os possíveis resultados; na variável nominal, não.

  "Nível de escolaridade" é um exemplo de variável qualitativa ordinal, pois suas realizações podem ser ordenadas: Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio, entre outros.

  "Região de origem" é um exemplo de variável qualitativa nominal, pois suas realizações não podem ser ordenadas.

- **Variável quantitativa**: apresenta como possíveis realizações dados numéricos resultantes de uma contagem ou mensuração. Exemplos: idade, número de filhos, estatura, preço de produtos.

  As variáveis quantitativas podem ser classificadas em **discretas** ou **contínuas**.

  A variável discreta é aquela cujos possíveis valores são números inteiros que resultam, em geral, de uma contagem. Por exemplo, número de filhos, número de funcionários.

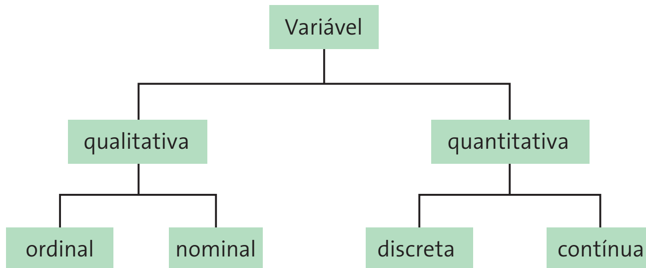
  A variável contínua assume valores que formam intervalos de números reais, os quais resultam, em geral, de uma mensuração. Por exemplo, altura das pessoas, massa de um indivíduo.

IBGE
Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

Logotipo do IBGE.

O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) é um órgão federal subordinado ao Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão. Sua missão é retratar o Brasil com informações necessárias ao conhecimento da sua realidade e ao exercício da cidadania. É o principal provedor de dados sobre as mais diversas variáveis, como idade, sexo, grau de instrução e tipo de moradia.

De modo geral, podemos representar os tipos de variável estatística por meio do seguinte esquema:

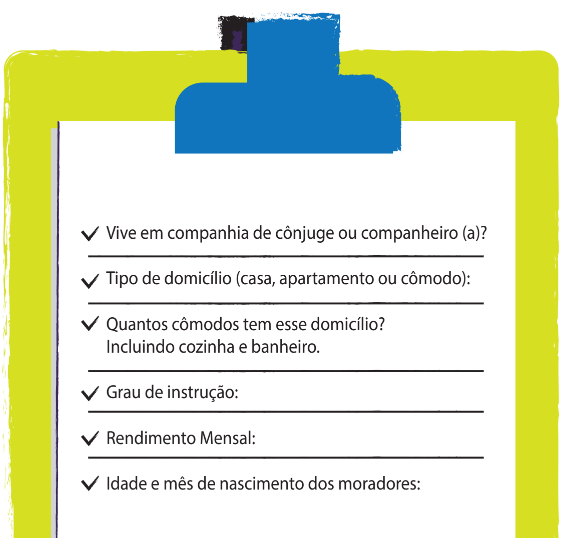


Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

1. Em média, a cada década, o IBGE realiza o Censo demográfico Brasileiro. Acompanhar o crescimento populacional, a distribuição geográfica da população e identificar áreas de investimentos prioritários, como saúde e educação, são alguns dos principais objetivos do Censo.

Entre as perguntas do questionário aplicado no Censo 2010, estão:



Emiliano Cavalcante

Fonte de pesquisa: IBGE. *Censo 2020*. Disponível em: <https://censo2020.ibge.gov.br/media/com_mediaibge/arquivos/bd918f26b77d18d86c251e7b1f7c1a70.pdf>. Acesso em: 11 fev. 2020.

Classifique cada variável relacionada acima em qualitativa (nominal ou ordinal) ou quantitativa (discreta ou contínua).

Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

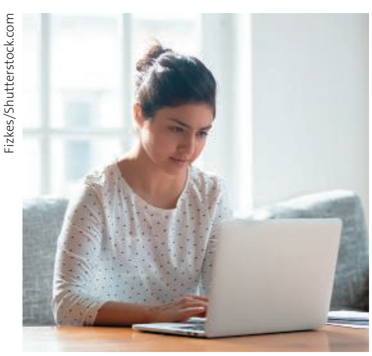
Em grupo

2. Elaborem um questionário a ser aplicado em sala de aula, utilizando variáveis quantitativas e qualitativas. Depois, estabeleçam um critério para formar uma amostra, como: escolhendo uma fileira, fazendo sorteio, escolhendo alunos do sexo feminino, entre outros. Resposta pessoal.

3. Cresce a cada ano o número de brasileiros que passam a ter acesso à internet. Entre os usos mais comuns, estão as pesquisas acadêmicas, as compras e o entretenimento.

Com o objetivo de abrir uma loja virtual para venda de livros, uma empresa aplicou um questionário a 10 500 internautas brasileiros, com variáveis definidas por questões do tipo: idade; sexo; escolaridade; profissão; preferência literária; quantidade de dias por semana que acessa a internet; se costuma realizar compras pela internet.

Fizkes/Shutterstock.com



Nos últimos anos, as compras pela internet têm sido cada vez mais comuns. Contudo, é importante sempre antes de efetuar uma compra verificar se o *site* é confiável.

a) Que grupo define a população nessa pesquisa? internautas brasileiros

b) Qual é a quantidade de elementos da amostra realizada? 10 500

c) Quais questões definem variáveis quantitativas? E quais definem as qualitativas?
Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Você produtor

4. Escolha um tema de pesquisa estatística, uma amostra, uma quantidade de elementos para essa amostra e algumas variáveis. Elabore algumas questões para um colega responder em que ele tenha de classificar a amostra, identificar a quantidade de elementos dessa amostra e classificar cada tipo de variável. Depois, verifique se as respostas estão corretas.
Resposta pessoal.

4. Oriente os alunos e supervisione-os na elaboração dessas questões a fim de que elas possam ser respondidas com as informações apresentadas.

5. As pesquisas de intenção de voto são de grande importância durante os períodos eleitorais em todo mundo. São realizadas por institutos de pesquisas de opinião pública a pedido de veículos de comunicação ou por entidades do governo. No Brasil, esse tipo de pesquisa precisa ser registrada na Justiça Eleitoral para ser divulgada.

Como é feita uma pesquisa de intenção de voto a nível nacional?

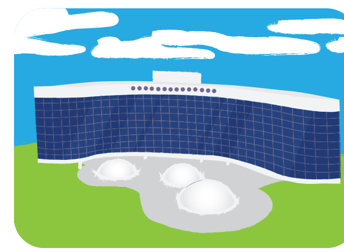
Primeiro, define-se uma amostra cujas características, como idade, sexo e escolaridade, representem o conjunto dos eleitores. Depois, são sorteados os municípios que farão parte do levantamento. A amostra pode variar entre 2 000 a 10 000 eleitores, que podem ser entrevistados pessoalmente ou por telefone.

O mais importante da amostra não é a quantidade, mas sua representatividade, com características socioeconômicas equilibradas e proporcionais à população a ser representada. Por exemplo, os últimos dados do Tribunal Superior Eleitoral (TSE), mostram que 52,53% dos 147,5 milhões de eleitores brasileiros são mulheres. Portanto, uma amostra de 2 000 eleitores deverá ter 52,53% de mulheres (1 048) eleitoras.

Veja as principais etapas de uma pesquisa de intenção de voto, para ser considerada uma amostra equilibrada.

Os dados são coletados, analisados por estatísticos e, em seguida, os resultados são divulgados nos diversos meios de comunicação.

Um instituto de pesquisa de opinião pública é contratado a pedido de veículos de comunicação ou entidades representativas governamentais.



A pesquisa é registrada nos Tribunais Eleitorais.

As entrevistas são realizadas pessoalmente ou por telefone, de acordo com a amostra estabelecida.

São sorteados os municípios por região do país em que as entrevistas serão realizadas.

Com base nos dados fornecidos pelo IBGE e pela Justiça Eleitoral, considera-se uma quantidade de pessoas que se encaixem em determinadas categorias, com características que representam toda a população.

Ilustrações: Emiliano Cavalcante

a) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que não, pois a pesquisa pode ser feita com uma amostra não equilibrada de eleitores, não representando de fato a intenção de voto da população, ou seja, a amostra só iria considerar os eleitores que acessam à página específica da rede social utilizada.

Fonte de pesquisa: BBC BRASIL. *Como funcionam as pesquisas eleitorais?* Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/brasil-43845326>. Acesso em: 28 fev. 2020.

Veja comentários e sugestões na Assessoria pedagógica.

a) Foi realizada pela internet, fora do período eleitoral, uma **enquete** em uma rede social para saber a preferência da população a respeito de certo candidato a prefeito. Em sua opinião, essa enquete é confiável? Justifique sua resposta.

b) Se uma pesquisa de intenção de voto para presidente for realizada em apenas 3 municípios de um mesmo estado, essa pesquisa é confiável para representar a opinião de todos os eleitores do país? Justifique sua resposta. Espera-se que os alunos respondam que a pesquisa pode não ser confiável, pois a opinião dos eleitores da região em que a pesquisa foi realizada pode ser diferente da opinião dos eleitores de outras regiões do país.

c) Se você tivesse que decidir quais critérios adotar para definir uma amostra para a intenção de voto do presidente de turma, quais seriam? Resposta pessoal.

Enquete: pesquisa de opinião sobre determinado assunto

3 Distribuição de frequência

Frequência absoluta e frequência relativa

Na tabela estão representados os dados obtidos em uma pesquisa realizada entre os funcionários de determinada empresa.

Dados dos funcionários de uma empresa – 2021

Sexo	Estado civil	Transporte	Nível de escolaridade
F	C	Carro	EM
F	S	Ônibus	EF
M	S	Ônibus	EM
F	C	Ônibus	EF
M	S	Motocicleta	EF
M	S	Ônibus	EM
F	S	Ônibus	EM
M	C	Carro	EM
F	C	Carro	ES
F	S	Motocicleta	EF
M	C	Carro	ES
F	S	Ônibus	EM
F	C	Carro	EM
M	S	Motocicleta	EF
F	S	Ônibus	EM
F	S	Motocicleta	EF

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

F: Feminino
M: Masculino
S: Solteiro
C: Casado
EF: Ensino Fundamental
EM: Ensino Médio
ES: Ensino Superior

A quantidade de vezes que o valor de uma variável é citado corresponde à **frequência absoluta** desse valor ou simplesmente **frequência** (f).

Na tabela, uma variável é "sexo" e a frequência absoluta de cada um de seus valores é: masculino, 6; feminino, 10.

A frequência absoluta de cada valor da variável "transporte" é: carro, 5; ônibus, 7; motocicleta, 4.

É possível, também, obter a razão que a frequência absoluta representa em relação ao total de observações. Essa razão é denominada **frequência relativa** (f_r) e seus valores são expressos, em geral, na forma de porcentagem. A frequência relativa é calculada por meio da razão entre a frequência absoluta (f) e o total de observações (n), isto é: $f_r = \frac{f}{n}$.

Nesse momento, pergunte aos alunos em quais situações é necessário utilizar a frequência relativa.

Veja a seguir como podemos obter, por exemplo, a frequência relativa de cada valor da variável "nível de escolaridade":

- Ensino Fundamental: $f_r = \dfrac{f}{n} = \dfrac{6}{16} = 0{,}375 = 37{,}5\%$
- Ensino Médio: $f_r = \dfrac{f}{n} = \dfrac{8}{16} = 0{,}5 = 50\%$
- Ensino Superior: $f_r = \dfrac{f}{n} = \dfrac{2}{16} = 0{,}125 = 12{,}5\%$

Esses dados fazem parte da distribuição de frequência da variável "nível de escolaridade" e podem ser organizados em uma tabela denominada **tabela de frequências**.

Nível de escolaridade dos funcionários de uma empresa – 2021

Nível de escolaridade	Frequência (f)	Frequência relativa (f_r)
EF	6	37,5%
EM	8	50%
ES	2	12,5%
Total	16	100%

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Frequência acumulada e frequência acumulada relativa

Podemos complementar os dados da variável "nível de escolaridade" apresentados anteriormente acrescentando à tabela as colunas **frequência acumulada** (f_a) e a **frequência acumulada relativa** (f_{ar}), que correspondem, respectivamente, às somas das frequências absolutas e às somas das frequências relativas até determinado dado.

Organizando todas essas frequências em uma tabela, temos:

Nível de escolaridade dos funcionários de uma empresa – 2021

Nível de escolaridade	Frequência (f)	Frequência acumulada (f_a)	Frequência relativa (f_r)	Frequência acumulada relativa (f_{ar})
EF	6	6	37,5%	37,5%
EM	8	$\underbrace{14}_{6+8}$	50%	$\underbrace{87{,}5\%}_{37{,}5\% + 50\%}$
ES	2	$\underbrace{16}_{14+2}$	12,5%	$\underbrace{100\%}_{37{,}5\% + 50\% + 12{,}5\%}$
Total	16		100%	

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Com base na tabela, realize algumas perguntas aos alunos em relação às frequências relativa e acumulada relativa, tais como:
- na coluna f_r, o que representa 50%?
- na coluna f_{ar}, o que representa 37,5%?
- quantos funcionários têm escolaridade até o ES? Qual é a porcentagem de funcionários que essa quantidade representa?

Observação

Nessa tabela, na coluna f_a, podemos notar que 14 funcionários têm nível de escolaridade até o EM (EF e EM), que corresponde a 87,5% do total dos funcionários, informação que pode ser observada na coluna f_{ar}.

Problemas e exercícios resolvidos

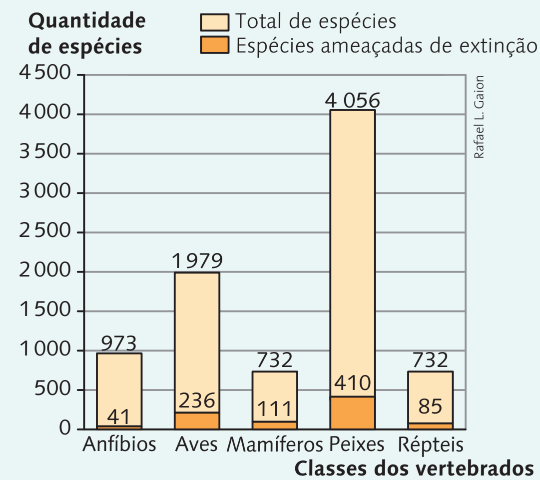
R1. Atualmente, são reconhecidas no Brasil quase 9 000 espécies de vertebrados entre peixes, anfíbios, répteis, aves e mamíferos, sendo o país com a maior quantidade de espécies de anfíbios e primatas em todo o mundo, o segundo em mamíferos e o terceiro em aves e répteis. Em 2018, foram analisadas 12 254 espécies em conservação e contabilizado um total de 1 173 espécies da fauna sob risco de extinção. Esses dados estão registrados no Livro Vermelho da Fauna Brasileira Ameaçada de Extinção, divulgado pelo Instituto Chico Mendes de Conservação da Biodiversidade (ICMBio).

De acordo com as informações do gráfico:

a) construa a tabela de frequências, obtendo f, f_a, f_r e f_{ar}, para a variável "espécies de vertebrados ameaçadas de extinção".

b) determine a quantidade total de espécies de vertebrados ameaçados de extinção no Brasil em 2018.

Espécies de vertebrados ameaçados de extinção no Brasil – 2018



Fonte de pesquisa: ICMBIO. *Livro Vermelho da Fauna Brasileira Ameaçada de Extinção*. Disponível em: <http://www.icmbio.gov.br/portal/component/content/article/10187>. Acesso em: 7 fev. 2020.

Resolução

a)

Espécies de vertebrados ameaçados de extinção no Brasil – 2018				
Espécies de vertebrados	f	f_a	f_r	f_{ar}
Anfíbios	41	41	4,64%	4,64%
Aves	236	277	26,73%	31,37%
Mamíferos	111	388	12,57%	43,94%
Peixes	410	798	46,43%	90,37%
Répteis	85	883	9,63%	100%
Total	883		100%	

Fonte de pesquisa: ICMBIO. *Livro Vermelho da Fauna Brasileira Ameaçada de Extinção*. Disponível em: <http://www.icmbio.gov.br/portal/component/content/article/10187>. Acesso em: 7 fev. 2020.

Ararajuba, uma das aves ameaçadas de extinção.

b) De acordo com a tabela de frequência, a quantidade total de espécies de vertebrados ameaçadas de extinção no Brasil em 2018 é 883.

Observação

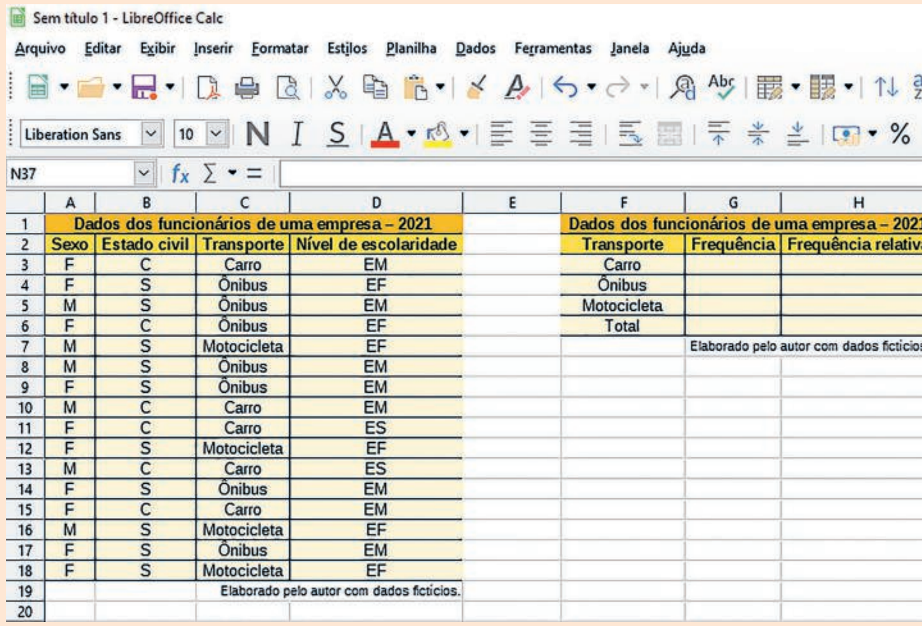
No exemplo do nível de escolaridade dos funcionários de uma empresa, apresentada na página anterior, existe uma relação gradual entre as variáveis EF, EM e ES, nessa ordem: o início do Ensino Superior só ocorre após a conclusão do Ensino Médio que, por sua vez, só pode ser iniciado após a conclusão do EF. De modo geral, quando há uma relação gradual (ascendente ou descendente) entre as linhas da tabela de frequência – ou quando as linhas são intervalos de classe, assunto do próximo tópico – a interpretação dos valores das colunas frequências acumulada (f_a) e frequência acumulada relativa (f_{ar}) é mais objetiva. Por exemplo, conforme observado na página anterior, ao dizer que 14 funcionários têm nível de escolaridade até o Ensino Médio, que corresponde a 87,5% do total dos funcionários, subentende-se também que eles já concluíram o Ensino Fundamental. Já em R1, observando as colunas f_a e f_{ar}, precisamos utilizar o conectivo "ou" na interpretação. Por exemplo, o valor 388 representa a quantidade de espécies de vertebrados ameaçados de extinção no Brasil, em 2018, que são anfíbios ou aves ou mamíferos, valor que corresponde a 43,94% do total.

Acesso digital

Utilizando planilha eletrônica para construir tabela de frequências

Veja como podemos construir uma tabela de frequências na planilha eletrônica Calc.

1º Copie na planilha os dados apresentados na página **95**, referentes à pesquisa realizada com os funcionários de determinada empresa e, ao lado dela, insira a tabela de frequências da variável "transporte", mas sem preencher os valores das frequências, que vamos obter por meio de fórmulas.



Dados dos funcionários de uma empresa – 2021			
Sexo	Estado civil	Transporte	Nível de escolaridade
F	C	Carro	EM
F	S	Ônibus	EF
M	S	Ônibus	EM
F	C	Ônibus	EF
M	S	Motocicleta	EF
M	S	Ônibus	EM
F	S	Ônibus	EM
M	C	Carro	EM
F	C	Carro	ES
F	S	Motocicleta	EF
M	C	Carro	ES
F	S	Ônibus	EM
F	C	Carro	EM
M	S	Motocicleta	EF
F	S	Ônibus	EM
F	S	Motocicleta	EF

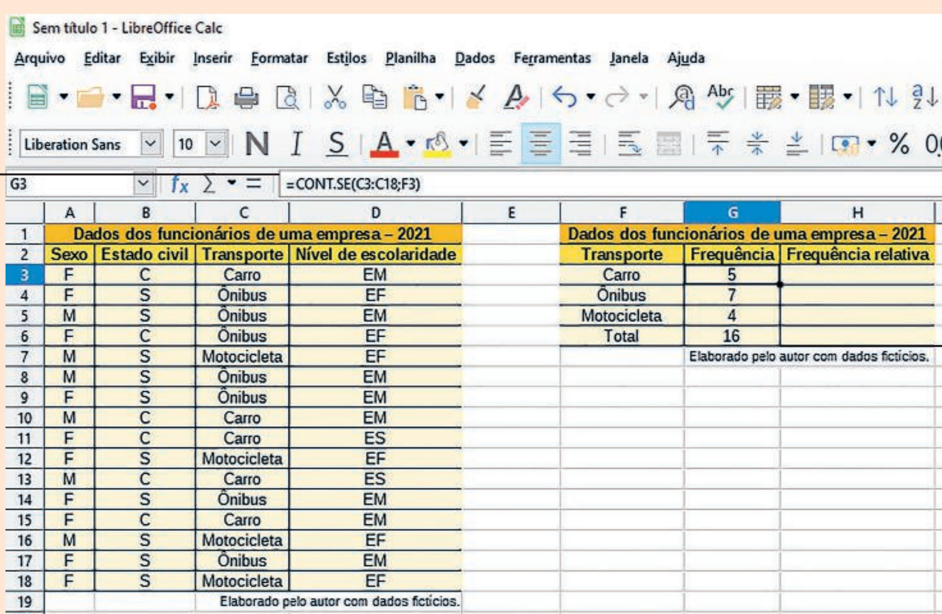
Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Dados dos funcionários de uma empresa – 2021		
Transporte	Frequência	Frequência relativa
Carro		
Ônibus		
Motocicleta		
Total		

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Utilize algumas opções de formatação do programa para deixar o quadro e a tabela parecidos com os da figura apresentada, com texto centralizado, cores de preenchimento, bordas etc.

2º Na célula **G3**, digite a fórmula **=cont.se(C3:C18;F3)** para obter a frequência do valor "Carro". De maneira análoga, obtenha as frequências dos valores "Ônibus" e "Motocicleta" utilizando as fórmulas **=cont.se(C3:C18;F4)** em **G4** e **=cont.se(C3:C18;F5)** em **G5**, respectivamente. Para calcular o total, digite a fórmula **=soma(G3:G5)** na célula **G6**.



Dados dos funcionários de uma empresa – 2021			
Sexo	Estado civil	Transporte	Nível de escolaridade
F	C	Carro	EM
F	S	Ônibus	EF
M	S	Ônibus	EM
F	C	Ônibus	EF
M	S	Motocicleta	EF
M	S	Ônibus	EM
F	S	Ônibus	EM
M	C	Carro	EM
F	C	Carro	ES
F	S	Motocicleta	EF
M	C	Carro	ES
F	S	Ônibus	EM
F	C	Carro	EM
M	S	Motocicleta	EF
F	S	Ônibus	EM
F	S	Motocicleta	EF

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Dados dos funcionários de uma empresa – 2021		
Transporte	Frequência	Frequência relativa
Carro	5	
Ônibus	7	
Motocicleta	4	
Total	16	

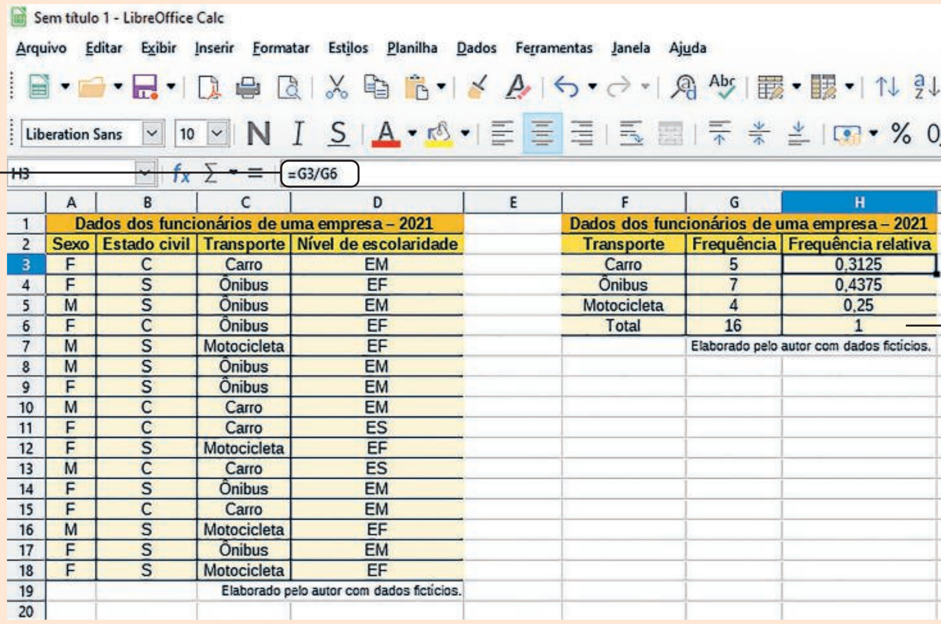
Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Ao calcular a soma das frequências, verifique se o valor obtido é igual à quantidade de dados inseridos. Isso pode ser feito observando a quantidade de linhas no conjunto de dados.

Observação

Na planilha, a fórmula =**cont.se(<Intervalo>;<Critérios>)** retorna a quantidade de células do intervalo indicado cujo valor coincide com o do critério, ou seja, nesse caso, o resultado é igual à frequência absoluta do meio de transporte indicado.

3º Para calcular a frequência relativa, digite as fórmulas =G3/G6 , =G4/G6 e =G5/G6, respectivamente, nas células H3, H4 e H5. Em seguida, obtenha o total digitando =soma(H3:H5) na célula H6.



Sexo	Estado civil	Transporte	Nível de escolaridade
F	C	Carro	EM
F	S	Ônibus	EF
M	S	Ônibus	EM
F	C	Ônibus	EF
M	S	Motocicleta	EF
M	S	Ônibus	EM
F	S	Ônibus	EM
M	C	Carro	EM
F	C	Carro	ES
F	S	Motocicleta	EF
M	C	Carro	ES
F	S	Ônibus	EM
F	C	Carro	EM
M	S	Motocicleta	EF
F	S	Ônibus	EM
F	S	Motocicleta	EF

Dados dos funcionários de uma empresa – 2021

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Transporte	Frequência	Frequência relativa
Carro	5	0,3125
Ônibus	7	0,4375
Motocicleta	4	0,25
Total	16	1

Dados dos funcionários de uma empresa – 2021

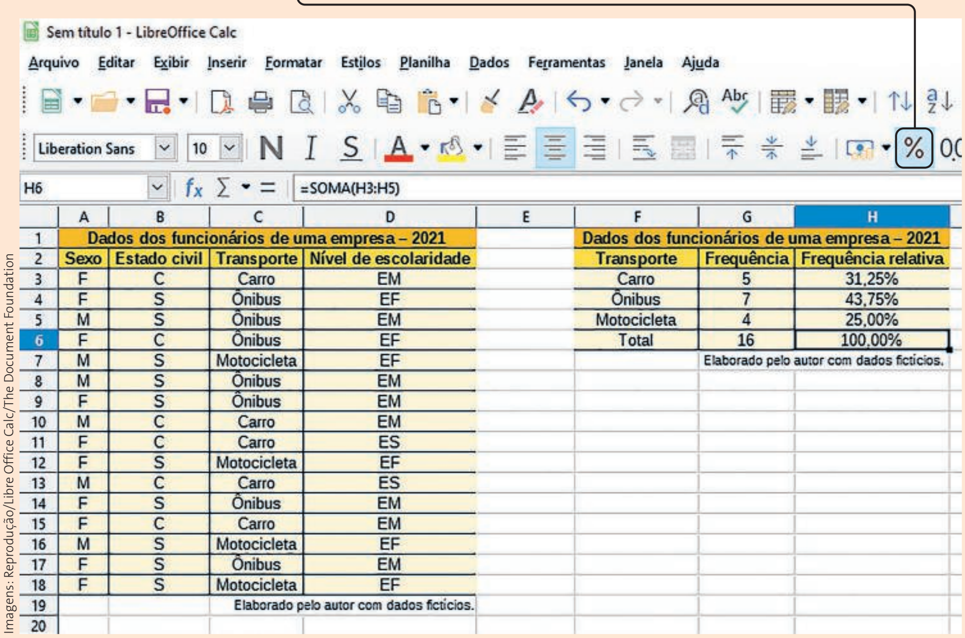
Elaborado pelo autor com dados fictícios.

- Note que a soma de todas as frequências relativas deve ser igual a 1, ou seja, 100%. Caso o valor seja diferente, é necessário verificar os passos anteriores e corrigir eventuais erros nos dados e nas fórmulas.

Observação

Ao inserir fórmulas na planilha eletrônica, em vez de digitar os códigos de células ou intervalos de células, você também pode selecioná-las utilizando o teclado ou o *mouse*.

4º Para exibir as frequências relativas em porcentagem, selecione o intervalo de células **H3:H6** e clique no botão com o símbolo de porcentagem (Formato numérico: Porcentagem).



Sexo	Estado civil	Transporte	Nível de escolaridade
F	C	Carro	EM
F	S	Ônibus	EF
M	S	Ônibus	EM
F	C	Ônibus	EF
M	S	Motocicleta	EF
M	S	Ônibus	EM
F	S	Ônibus	EM
M	C	Carro	EM
F	C	Carro	ES
F	S	Motocicleta	EF
M	C	Carro	ES
F	S	Ônibus	EM
F	C	Carro	EM
M	S	Motocicleta	EF
F	S	Ônibus	EM
F	S	Motocicleta	EF

Dados dos funcionários de uma empresa – 2021

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Transporte	Frequência	Frequência relativa
Carro	5	31,25%
Ônibus	7	43,75%
Motocicleta	4	25,00%
Total	16	100,00%

Dados dos funcionários de uma empresa – 2021

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Converse com os alunos sobre as vantagens do uso de fórmulas na planilha eletrônica. Após eles expressarem suas opiniões, comente que a vantagem fica mais evidente conforme aumenta a quantidade de dados que se precisa trabalhar. Além disso, o uso de fórmulas permite que sejam feitas alterações nos dados sem que seja preciso refazer todos os cálculos.

- Outra opção é clicar com o botão direito do *mouse* no intervalo selecionado e clicar em **Formatar células...** Em **Números**, é possível escolher entre diversos tipos e formatos de conteúdo para as células, como porcentagem ou moeda.

Veja as respostas dos itens **a** e **b** nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.

a) Construa, na mesma planilha apresentada nessas páginas, a tabela de frequências da variável “sexo”.

b) Acrescente às tabelas de frequências construídas as colunas **frequência acumulada** e **frequência acumulada relativa**.

Para realizar o item **b**, organize os alunos em grupos de até três alunos a fim de que troquem ideias entre si sobre como calcular as frequências acumuladas por meio de fórmulas.

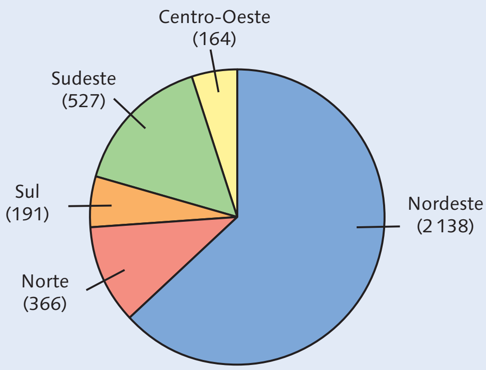
 Não escreva no livro.

6. Construa uma tabela de frequências, obtendo f, f_a, f_r e f_{ar} para a variável "estado civil", apresentada na página **95**. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Você produtor Veja comentários e sugestões na Assessoria pedagógica.

7. De acordo com o gráfico, elabore algumas questões envolvendo as frequências f, f_a, f_r e f_{ar} e dê para um colega responder. Depois, verifique se as resoluções estão corretas. Resposta pessoal.

Quantidade de comunidades quilombolas no Brasil - 2019



Fonte de pesquisa: FUNDAÇÃO CULTURAL PALMARES. *Quilombolas*. Disponível em: <http://www.palmares.gov.br/wp-content/uploads/2015/07/quadro-geral-02-08-2019.pdf>. Acesso em: 7 fev. 2020.

8. No quadro, está representada a quantidade de carros vendidos em uma concessionária em cada dia do mês de novembro de 2021. De acordo com as informações do quadro, construa uma tabela de frequência obtendo f, f_a, f_r e f_{ar}.
Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Novembro de 2021						
D	S	T	Q	Q	S	S
	4	3	2	3	1	0
0	3	2	1	5	2	1
1	1	0	0	0	1	5
1	1	0	0	1	2	0
5	2	0				

Observação
Os números que aparecem no calendário correspondem à quantidade de carros vendidos em cada um dos dias de novembro de 2021.

Veja comentários e sugestões na Assessoria pedagógica.

9. Cultivar hábitos saudáveis é essencial para uma boa qualidade de vida. Não fumar, praticar esportes com acompanhamento médico e manter uma alimentação equilibrada são alguns hábitos que devem ser incorporados às nossas vidas.

Diminuir a quantidade de alimentos ingeridos em cada refeição e aumentar a quantidade de refeições diárias (5 ou 6 por dia) auxilia o sistema digestório, a absorção de nutrientes pelo organismo e a manutenção da massa corporal.

Nitr/Shutterstock.com

Ter uma alimentação equilibrada é uma das atitudes que devemos tomar para ter uma vida saudável.

Uma pesquisa foi elaborada para verificar a quantidade de refeições realizadas diariamente por um grupo de pessoas, conforme tabela abaixo.

Refeições diárias por pessoa – 2021	
Quantidade de refeições diárias	Quantidade de entrevistados
1	3
2	190
3	420
4	377
5	96
6	72
7 ou mais	42

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

a) Com base nos resultados obtidos na pesquisa, construa outra tabela com a distribuição de frequências, obtendo f, f_a, f_r e f_{ar}.

b) Quantas pessoas foram entrevistadas? 1 200 pessoas

c) Quantas pessoas realizam 4 refeições ou menos por dia? 990 pessoas

d) Que porcentagem dos entrevistados realizam a quantidade de refeições recomendada (5 ou 6 por dia) para o melhor funcionamento do organismo? 14%

9. a) Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Intervalo de classe

Certo grupo de biólogos está realizando uma pesquisa sobre o desenvolvimento de determinada espécie de peixe em um rio local. Nessa pesquisa, foi medido o comprimento, em milímetros, de 60 peixes. No quadro, estão os dados obtidos por esses biólogos.

60	131	110	101	178	167	75	114	141	84
158	80	133	120	76	126	134	137	117	156
118	142	63	130	118	87	109	76	163	99
118	81	123	72	105	90	128	150	98	158
136	111	68	150	124	133	113	92	127	102
97	103	113	92	103	76	113	127	150	139

Good Luz/Shutterstock.com

Biólogo testando a qualidade da água de um rio.

Biólogo é o profissional que estuda os seres vivos, suas características gerais e relações com o meio ambiente. Para isso, ele visita diversos ambientes e utiliza as mais diversas habilidades para obter dados para suas pesquisas. Em alguns casos, essas pesquisas podem levar anos para obter resultados.

Organizando esses dados em ordem crescente a fim de facilitar a comparação entre eles, temos:

60	76	90	101	110	117	124	131	139	156
63	76	92	102	111	118	126	133	141	158
68	80	92	103	113	118	127	133	142	158
72	81	97	103	113	118	127	134	150	163
75	84	98	105	113	120	128	136	150	167
76	87	99	109	114	123	130	137	150	178

Observação

O conjunto de dados organizados em ordem crescente ou decrescente é chamado **rol**.

Agora, vamos construir uma tabela de frequências para a variável "comprimento dos peixes".

No exemplo, dentre as 60 observações, a maioria das medidas não se repete e, dessa maneira, seria necessária, praticamente, uma linha para cada uma delas. A solução é agrupar os dados em **intervalos de classes** ou simplesmente **classes**.

Cabe ao pesquisador indicar quantos e quais intervalos devem ser utilizados. No entanto, é importante lembrar que, se a quantidade de classes é pequena, pode-se comprometer a qualidade das informações, e, se a quantidade de classes é grande, prejudica-se o objetivo de resumir os dados.

Veja a seguir uma maneira de agrupar os valores em intervalos de classes.

- Inicialmente, calculamos a diferença entre a maior e a menor medida de comprimento, obtendo o que chamamos de **amplitude total**:

$$178 - 60 = 118 \rightarrow 118 \text{ mm}$$

- Depois, escolhemos um número conveniente maior do que ou igual à amplitude total (120 mm, por exemplo) e o dividimos pela quantidade de intervalos que desejamos (por exemplo, 6), obtendo a amplitude de cada intervalo.

$$120 : 6 = 20 \rightarrow 20 \text{ mm}$$

- A partir de 60 mm (menor valor), obtemos os extremos das classes fazendo a adição de 20 mm:

$$60 + 20 = 80; 80 + 20 = 100$$

E assim por diante, até o último intervalo.

Antes de organizar os dados em uma tabela de frequências, questione os alunos:
• Como é possível construir uma tabela de frequência com os dados do rol?
• Para construir a tabela de frequências seria necessária uma linha para cada observação apresentada no rol?
• Poderíamos organizar os dados na tabela de frequências em intervalos? Como isso seria possível?
Depois, considerando as estratégias e respostas dadas por eles, apresente as explicações do livro.

Verifique a possibilidade de propor aos alunos que, em duplas, construam a tabela de frequências antes de abordá-la no livro. Depois, considerando as estratégias de resoluções propostas e desenvolvidas por eles, apresente as explicações do livro.

Na tabela, estão representados os intervalos de classes, a frequência e a frequência relativa.

Desenvolvimento dos peixes – 2021		
Comprimento dos peixes (mm)	Frequência (f)	Frequência relativa (f_r)
60 ⊢ 80	8	13,3%
80 ⊢ 100	10	16,7%
100 ⊢ 120	16	26,7%
120 ⊢ 140	15	25%
140 ⊢ 160	8	13,3%
160 ⊢ 180	3	5%
Total	60	100%

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Observação
Nessa tabela, a notação 60 ⊢ 80 refere-se ao intervalo que inclui todos os comprimentos de 60 mm a 80 mm, exceto 80 mm. Se tivesse sido utilizada a notação 60 ⊢⊣ 80, estariam sendo considerados os comprimentos de 60 mm a 80 mm, incluindo ambos. Caso tivesse sido utilizada a notação 60 ⊣ 80, estaria desconsiderando a medida 60 mm.

Veja a seguir outro exemplo.

Uma empresa de recursos humanos fez uma entrevista para a seleção de candidatos a algumas vagas de emprego. Ao todo, foram entrevistados 280 candidatos, dos quais 20 foram separados aleatoriamente e indicados na tabela a seguir.

Informações de alguns candidatos a vaga de emprego – 2021							
Nome	Idade	Sexo	Estado civil	Altura (cm)	Nível de escolaridade	Domínio do inglês	Área da atuação
Ana	19	F	S	163	EM	Intermediário	Finanças
Augusto	23	M	C	172	ES	Avançado	Informática
Aurélio	21	M	S	159	ES	Avançado	Técnica
Beatriz	24	F	C	164	EM	Nenhum	Vendas
Bernardo	18	M	S	176	EM	Intermediário	Técnica
César	20	M	S	167	EM	Básico	Vendas
Cláudio	20	M	S	182	EM	Básico	Informática
Daniela	21	F	S	164	ES	Intermediário	Almoxarifado
Elisabete	32	F	S	170	ES	Fluente	Informática
Fabiana	18	F	S	171	EM	Básico	Vendas
Flávio	27	M	C	179	P	Fluente	Informática
Gilberto	31	M	C	163	EM	Nenhum	Finanças
Guilherme	24	M	D	165	ES	Intermediário	Vendas
Heitor	19	M	S	174	EM	Básico	Almoxarifado
Igor	23	M	S	171	ES	Intermediário	Finanças
Jonas	25	M	C	165	ES	Intermediário	Vendas
Júlia	30	F	C	158	ES	Básico	Informática
Sandra	31	F	S	153	EM	Nenhum	Vendas
Tadeu	26	M	C	176	EM	Nenhum	Finanças
Verônica	34	F	D	172	P	Avançado	Vendas

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

F: Feminino	S: Solteiro	D: Divorciado	ES: Ensino Superior
M: Masculino	C: Casado	EM: Ensino Médio	P: Pós-graduação

Reflita sobre as seguintes questões a respeito da pesquisa da página anterior:

- a população é composta por quantos candidatos? 280 candidatos
- a amostra é composta por quantas pessoas? 20 pessoas
- a variável "idade" é quantitativa discreta ou contínua? discreta
- a variável "altura" é quantitativa discreta ou contínua? contínua
- a variável "estado civil" é qualitativa nominal ou ordinal? nominal
- a variável "nível de escolaridade" é qualitativa nominal ou ordinal? ordinal

Escolhendo a variável qualitativa ordinal "domínio do inglês", vamos elaborar a seguinte tabela de frequências:

Candidatos com domínio do inglês – 2021		
Domínio do inglês	**Frequência (f)**	**Frequência relativa (f_r)**
Nenhum	4	$\frac{4}{20}$ = 0,2 ou 20%
Básico	5	$\frac{5}{20}$ = 0,25 ou 25%
Intermediário	6	$\frac{6}{20}$ = 0,3 ou 30%
Avançado	3	$\frac{3}{20}$ = 0,15 ou 15%
Fluente	2	$\frac{2}{20}$ = 0,1 ou 10%
Total	20	1 ou 100%

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Escolhendo a variável quantitativa discreta "idade", podemos elaborar a seguinte tabela da frequência:

- Amplitude total: $34 - 18 = 16$
- Quantidade de intervalos: 4
- Amplitude do intervalo: $16 : 4 = 4$

Idade dos candidatos – 2021				
Idade	f	f_a	f_r	f_{ar}
18 ⊢ 22	8	8	40%	40%
22 ⊢ 26	5	13	25%	65%
26 ⊢ 30	2	15	10%	75%
30 ⊢⊣ 34	5	20	25%	100%
Total	20		100%	

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

10. As notas obtidas por 40 alunos de uma turma em certa avaliação de Matemática estão registradas a seguir:

72	43	91	65	67	70	83	87
39	52	58	53	88	73	50	86
55	76	73	83	85	53	63	78
50	61	58	78	81	86	73	81
85	73	98	61	84	70	68	81

Em relação aos dados, resolva o que se pede.

a) Organize as informações apresentadas em rol.

b) Construa uma tabela de frequências com f, f_a, f_r e f_{ar}, agrupando a variável "nota" em 6 classes, sendo $39 \vdash\!\dashv 49$ a primeira classe.

c) Observando a tabela construída no item **b**, determine: Veja as respostas dos itens **a** e **b** na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

- a quantidade de alunos que obtiveram nota inferior a 79. 26 alunos
- a porcentagem dos alunos que obtiveram nota superior ou igual a 59. 75%

11. A tabela a seguir apresenta os salários dos funcionários de uma empresa.

Salário dos funcionários de uma empresa – 2021

Salário (R$)	f	f_a	f_r	f_{ar}
$600 \vdash 1000$	27	27	45%	45%
$1000 \vdash 1400$	15	42	25%	70%
$1400 \vdash 1800$	9	51	15%	85%
$1800 \vdash 2200$	3	54	5%	90%
$2200 \vdash 2600$	3	57	5%	95%
$2600 \vdash 3000$	3	60	5%	100%
Total	60		100%	

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Em relação à tabela, responda.

a) Quantos funcionários recebem R$ 1 400,00 ou mais? 18 funcionários

b) Que porcentagem dos funcionários recebe menos de R$ 2 600,00? 95%

c) Quantos funcionários recebem salário igual ou superior a R$ 1 000,00 e menor do que R$ 2 600,00? 30 funcionários

Em grupo

12. (Enem) Um estudo caracterizou 5 ambientes aquáticos, nomeados de **A** a **E**, em uma região, medindo parâmetros físico-químicos de cada um deles, incluindo o pH nos ambientes. O gráfico **I** representa os valores de pH dos 5 ambientes. Utilizando o gráfico **II**, que representa a distribuição estatística de espécies em diferentes faixas de pH, pode-se esperar um maior número de espécies no ambiente: d

Gráfico I

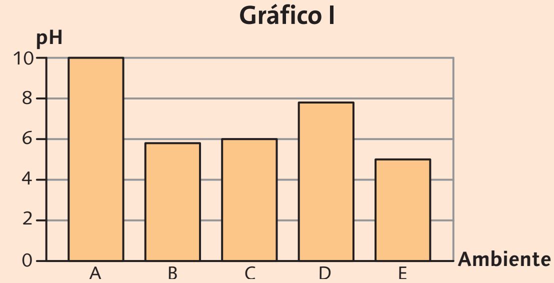


Gráfico II

Ilustrações: Sergio L. Filho

a) A b) B c) C d) D e) E

Desafio Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

13. A tabela a seguir apresenta a distribuição de frequências das massas de 50 atletas de um clube de futebol.

Massa dos atletas de um clube de futebol – 2021

Massa (kg)	f	f_a	f_r	f_{ar}
$60 \vdash 64$	A	E	8%	O
$64 \vdash 68$	B	17	I	P
$68 \vdash 72$	19	F	J	Q
$72 \vdash 76$	C	G	L	96%
$76 \vdash 80$	D	H	M	R
Total	50		N	

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Determine os valores representados pelas letras de A a R que aparecem na tabela.

4 Medidas de tendência central

A fim de complementar a introdução do tópico **4**, peça aos alunos que realizem pesquisas em jornais, revistas, internet etc., nos quais apareça a palavra "média". Depois, peça a eles que apresentem os materiais pesquisados aos colegas e, em cada caso, que expliquem o que representa a palavra "média".

Em Estatística, as medidas de tendência central são utilizadas a fim de obter um valor que tende a caracterizar ou representar um conjunto de dados. Entre as medidas de tendência central, vamos estudar a **média aritmética**, a **média aritmética ponderada**, a **moda**, a **mediana** e as **separatrizes**.

Observe a seguir a informação extraída de um *site*.

> **Após chuva causar caos em São Paulo, cidade tem apenas um ponto de alagamento e trânsito abaixo da média**
>
> Um dia depois do caos vivido em São Paulo, decorrente das fortes chuvas que atingiram a cidade, a capital paulista tem na manhã desta terça-feira (11) trânsito abaixo da média, mesmo com o rodízio de veículos ainda suspenso, e já não há pontos de alagamento intransitáveis, de acordo com a CET (Companhia de Engenharia de Tráfego).
>
> [...]
>
> APÓS chuva causar caos em São Paulo, cidade tem trânsito abaixo da média nesta terça-feira. *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 11 fev. 2020. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/cotidiano/2020/02/apos-chuva-causar-caos-em-sao-paulo-cidade-tem-apenas-um-ponto-de-alagamento-e-transito-abaixo-da-media.shtml>. Acesso em: 23 jun. 2020.

Nessa informação, o "trânsito abaixo da média" representa o conjunto formado por todos os veículos que estavam nas vias monitoradas pelo CET na capital paulista.

Essa informação representa uma medida de tendência central, assunto que vamos abordar a seguir.

Antes de apresentar o exemplo, verifique se os alunos já conhecem o assunto relacionado à média aritmética. Deixe que eles deem suas explicações e conversem entre si. Dessa maneira, os alunos têm a oportunidade de resgatar o conhecimento prévio acerca do assunto e tornar o estudo mais significativo.

Média aritmética ($\overline{x}$)

Durante uma semana foi realizada uma pesquisa em um *site* da internet. Na tabela está indicada a quantidade de acessos em cada um dos dias dessa semana.

Quantidade diária de acessos a um *site* da internet - 2021

Dia da semana	domingo	segunda-feira	terça-feira	quarta-feira	quinta-feira	sexta-feira	sábado
f	162	144	155	139	147	169	211

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Qual foi, em média, a quantidade de acessos em cada dia dessa semana?

Para responder a essa pergunta, adicionamos a frequência de acessos indicados na tabela e dividimos o resultado pela quantidade de dias da semana:

$$\frac{\text{soma das frequências}}{\text{quantidade de dias}} = \frac{162 + 144 + 155 + 139 + 147 + 169 + 211}{7} = \frac{1\,127}{7} = 161$$

Verifique a possibilidade de propor aos alunos essa situação antes de abordá-la no livro, a fim de que, em duplas, eles tentem resolvê-la. Depois, considerando as estratégias e resoluções propostas e desenvolvidas por eles, apresente as explicações do livro.

Portanto, a quantidade de acessos foi, em média, 161 por dia.

Esse resultado é chamado **média aritmética**, a qual é utilizada, em geral, para resumir informações e apresentar um valor que representa um conjunto de dados. Indicaremos a média aritmética por $\overline{x}$.

Média aritmética $(\overline{x})$ é o quociente obtido ao se dividir a soma das frequências da variável pela quantidade de valores.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

O símbolo $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ significa o somatório dos números x_i, com i assumindo valores inteiros de 1 a n. Indica que todos os valores de x_i devem ser somados, do primeiro (x_1) ao n-ésimo (x_n).

Observação
A quantidade de vezes que o valor de uma variável é citado corresponde à frequência desse valor.

Média aritmética ponderada $(\overline{x}_p)$

Em um bimestre, um professor aplicou quatro provas para seus alunos, cada uma delas com diferentes graus de importância, isto é, com pesos diferentes. No quadro ao lado, estão representadas as notas que um aluno obteve em cada uma das provas e os respectivos pesos.

Prova	Nota	Peso
A	7	1
B	6,5	2
C	8	3
D	6	2

Qual é a nota média desse aluno nesse bimestre?

Para responder a essa pergunta, adicionamos os produtos das notas pelos seus respectivos pesos e dividimos o resultado pela soma dos pesos:

$$\frac{\text{soma dos produtos das notas pelos respectivos pesos}}{\text{soma dos pesos}} = \frac{7 \cdot 1 + 6{,}5 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 6 \cdot 2}{1 + 2 + 3 + 2} =$$

$$= \frac{56}{8} = 7$$

Portanto, a nota média do aluno nesse bimestre é 7.

Esse resultado é chamado **média aritmética ponderada**, a qual indicaremos por $\overline{x}_p$.

Antes de apresentar o exemplo, verifique se os alunos já conhecem o assunto relacionado à média aritmética ponderada. Deixe que deem suas explicações e conversem entre si. Dessa maneira, os alunos têm a oportunidade de resgatar o conhecimento prévio acerca do assunto e tornar o estudo mais significativo.

Verifique a possibilidade de propor aos alunos essa situação antes de abordá-la no livro, a fim de que, em duplas, eles tentem resolvê-la. Depois, considerando as estratégias e resoluções propostas e desenvolvidas por eles, apresente as explicações do livro.

Média aritmética ponderada $(\overline{x}_p)$ é o quociente obtido ao se dividir a soma dos produtos das frequências da variável por seus respectivos pesos pela soma dos pesos.

$$\overline{x}_p = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + ... + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i},$$

sendo $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ os respectivos pesos, de $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$.

É importante lembrar que tanto a média aritmética quanto a média aritmética ponderada são utilizadas para caracterizar um grupo. Porém, em alguns casos, essas médias não exploram adequadamente outros aspectos das características do grupo. Isso ocorre quando alguns dos valores do grupo são muito grandes ou muito pequenos, como mostra o exemplo da página seguinte.

O Enem é uma prova realizada pelo Ministério da Educação do Brasil e é utilizada, entre outros objetivos, para avaliar a qualidade do Ensino Médio.

Reprodução/ENEM

A média aritmética ponderada é utilizada em muitos concursos e testes seletivos com mais de uma fase. O Enem (Exame Nacional do Ensino Médio), por exemplo, é um exame de larga escala que é utilizado no teste seletivo de algumas universidades, como fase única, primeira fase ou combinado com o vestibular. Nesse último caso, é atribuído um peso à nota do Enem e à do vestibular. Em algumas universidades, o Enem tem peso 1 e o vestibular, peso 4.

Exemplo

Em uma concessionária de automóveis há três vendedores: Ana, Paulo e Roberta. Em certo mês, Ana vendeu 15 carros, Paulo, 4 e Roberta, 5.

Qual foi, em média, a quantidade de carros vendidos por eles?

$$\frac{15 + 4 + 5}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

Note que a média, nesse caso 8, não representa as características do grupo em termos de vendas de carro por vendedor, visto que corresponde, por exemplo, ao dobro de carros vendidos por Paulo.

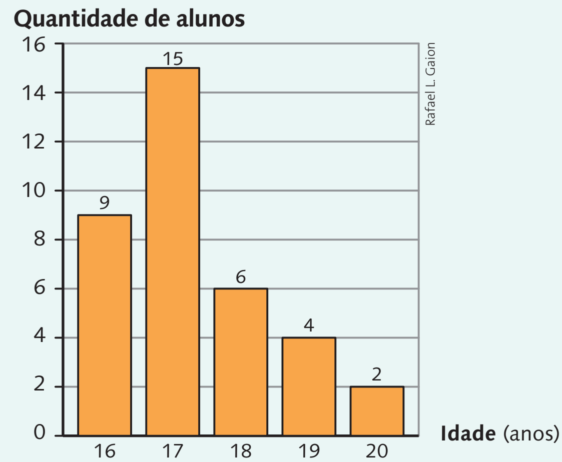
Em casos como esse, utilizamos outras medidas de tendência central, como as que vamos estudar nos próximos tópicos.

Problemas e exercícios resolvidos

R2. Observe o gráfico ao lado.

Qual é a média de idade dos alunos dessa turma?

Idade dos alunos do 3º ano do Ensino Médio – 2021



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Resolução

Interpretando o gráfico e tomando como variável a idade dos alunos, verificamos que 9 alunos têm 16 anos, 15 têm 17, 6 têm 18, 4 têm 19 e 2 têm 20 anos.

Dessa maneira, a idade média dos alunos é dada por:

$$\overline{x}_p = \frac{\overbrace{9 \cdot 16}^{\text{9 alunos de 16 anos}} + \overbrace{15 \cdot 17}^{\text{15 alunos de 17 anos}} + \overbrace{6 \cdot 18}^{\text{6 alunos de 18 anos}} + \overbrace{4 \cdot 19}^{\text{4 alunos de 19 anos}} + \overbrace{2 \cdot 20}^{\text{2 alunos de 20 anos}}}{\underbrace{9 + 15 + 6 + 4 + 2}_{\text{total de alunos}}} = \frac{623}{36} \simeq 17{,}3$$

Portanto, a idade média dos alunos é, aproximadamente, 17,3 anos.

R3. Em um grupo de atletas, foi constatado que 45% têm 24 anos, 34% têm 25 anos, 1% tem 26 anos e 20% têm 27 anos. Calcule a idade média desse grupo de atletas.

Resolução

Como não conhecemos a quantidade de atletas desse grupo, podemos calcular a idade média deles utilizando a média aritmética ponderada. Nesse caso, os pesos correspondem às respectivas porcentagens de frequência das idades.

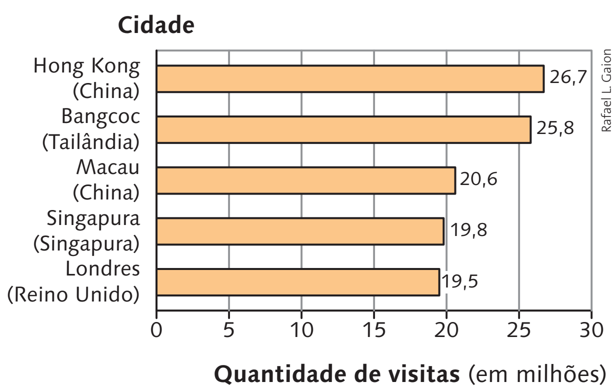
$$\overline{x}_p = \frac{24 \cdot 0{,}45 + 25 \cdot 0{,}34 + 26 \cdot 0{,}01 + 27 \cdot 0{,}20}{0{,}45 + 0{,}34 + 0{,}01 + 0{,}20} = \frac{24{,}96}{1} \simeq 25$$

Portanto, a idade média desse grupo de atletas é aproximadamente 25 anos.

Veja comentários e sugestões na Assessoria pedagógica.

14. Observe o gráfico e responda às questões.

Cidades mais visitadas do mundo – 2019



Fonte de pesquisa: UOL. *Hong Kong foi a cidade mais visitada em 2019*: Rio sai das 100 primeiras. Disponível em: <https://www.uol.com.br/viagem/noticias/2019/12/03/hong-kong-foi-a-cidade-mais-visitada-em-2019-rio-sai-das-100-primeiras.htm>. Acesso em: 11 fev. 2020.

a) Quantas pessoas visitaram, em média, as cinco cidades mais visitadas do mundo em 2019?
22,48 milhões de pessoas

b) Em quais cidades a quantidade de turistas foi superior à média obtida no item **a**?
Hong Kong e Bangcoc.

c) Rio de Janeiro é a cidade mais visitada do Brasil, porém, em 2019 não esteve entre as 100 cidades mais visitadas do mundo. Que ações podem ser desenvolvidas em nosso país para aumentar a quantidade de turistas estrangeiros?
Resposta pessoal.

15. A intensa industrialização e a urbanização provocaram diversas transformações no comportamento social, como na procriação. A introdução em massa das mulheres no mercado de trabalho durante o século XX e também os altos custos com alimentação, vestuário e educação são alguns dos motivos que levaram muitas famílias a optar por uma quantidade menor de filhos.

O quadro apresenta a quantidade de filhos que compunha todas as famílias residentes em um conjunto habitacional. Veja comentários e sugestões na Assessoria pedagógica.

Quantidade de filhos	0	1	2	3	4	5
Quantidade de famílias	13	28	32	10	4	1

a) Quantas famílias foram pesquisadas? 88 famílias

b) Nesse conjunto habitacional, qual é a quantidade média de filhos por família? 1,625

16. Escreva um algoritmo que possibilite calcular a média ponderada da nota de quatro provas de um aluno, dadas as notas e os respectivos pesos de cada prova. Depois, escreva um fluxograma que represente esse algoritmo.
Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Em grupo

17. (Enem) Um país decide investir recursos na educação em suas cidades que tenham um alto nível de analfabetismo. Os recursos serão divididos de acordo com a idade média da população que é analfabeta, conforme apresentado no quadro.

Recurso	Idade média da população analfabeta (M)
I	$M \leq 22$
II	$22 < M \leq 27$
III	$27 < M \leq 32$
IV	$32 < M \leq 37$
V	$M > 37$

Uma cidade desse país possui $\frac{60}{100}$ do total de analfabetos de sua população composto por mulheres. A média de idade das mulheres analfabetas é 30 anos, e a média de idade dos homens analfabetos é 35 anos. Considerando a média de idade da população analfabeta dessa cidade, ela receberá o recurso c

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

18. Em certo curso técnico, são aplicadas anualmente três provas: uma ao término do 1º semestre com peso de 30%; outra ao término do 2º semestre também com peso de 30% e uma prova final com peso de 40%. Um aluno desse curso obteve notas 65, 72 e 84, respectivamente.

a) Determine a média final obtida por esse aluno.
74,7

b) Se você pudesse escolher o tipo de média a ser calculada nessa situação, qual das médias você escolheria: a aritmética ou a ponderada? Justifique sua resposta. Resposta pessoal.

Você produtor

19. A quantidade diária de decolagens de certo aeroporto em determinada quinzena foi:

13	9	10	11	13	12	14	13	10	12	11	12	12	15	13

A partir desses dados, elabore um problema envolvendo pelo menos uma das medidas de tendência central estudadas até o momento e entregue para um colega resolver. Depois, verifique se a solução está correta. Resposta pessoal. Possível resposta: calcule a média diária de decolagens desse aeroporto durante a quinzena.

20. Em um concurso público, a nota final do candidato é obtida a partir da média aritmética ponderada das notas das provas. A tabela apresenta as notas obtidas pelos candidatos **A** e **B**. Calcule a nota final obtida no concurso pelos candidatos **A** e **B**. candidato A: 13,8 candidato B: 13,6

Notas dos candidatos A e B em um concurso público – 2021

Prova	Peso	Nota do candidato A	Nota do candidato B
Matemática	2	19	21
Língua Portuguesa	2	16	19
Língua Inglesa	3	9	11
Conhecimentos gerais	3	20	22
Conhecimentos específicos	5	10	5

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Wavebreakmedia/Shutterstock.com

Empregos ou cargos públicos normalmente exigem o processo seletivo de candidatos por meio de concursos.

Em grupo

21. Vanessa e Omar trabalham como vendedores em uma loja de eletrodomésticos. Nessa loja, eles recebem, além do salário e comissões, certa bonificação mensalmente, de acordo com uma nota que é obtida a partir dos critérios **A** e **B** estipulados pela loja. De acordo com certas regras, cada funcionário alcança uma nota de 0 a 10 em cada critério e a partir daí, é calculada a média ponderada dessas notas com pesos P_1 e P_2, respectivamente, sendo $P_1 + P_2 = 5$. A bonificação é calculada ao multiplicar a média obtida por R$ 50,00. No mês de setembro, Vanessa teve notas 8,5 e 9,5 para os critérios **A** e **B**, respectivamente, e recebeu uma bonificação de R$ 455,00. Já Omar teve notas 8,5 e 7,5 para os critérios **A** e **B**, respectivamente, e recebeu uma bonificação de R$ 395,00.

a) De acordo com o enunciado, quais são os valores dos pesos P_1 e P_2? $P_1 = 2$ e $P_2 = 3$

b) Qual é a bonificação que um funcionário dessa loja irá receber se obtiver notas 6,5 e 8 para os critérios **A** e **B**, respectivamente? R$ 370,00

c) Sabendo que a nota para o critério **A** que um dos funcionários dessa loja obteve foi 7, e que ele recebeu R$ 410,00 de bonificação, qual foi a outra nota obtida? 9

Moda (Mo)

No dia 14 de outubro de 2019, a seleção brasileira masculina de vôlei foi a vencedora do Campeonato Mundial, realizado na cidade de Hiroshima, no Japão. Veja no quadro ao lado a idade de todos os jogadores convocados para o campeonato.

33	29	31	24
31	24	31	33
30	27	22	25
22	26		

Note que a idade de 31 anos, em destaque, é a que ocorre com maior frequência no conjunto dos valores observados. Em Estatística, essa é uma medida de tendência central denominada moda, a qual indicaremos por *Mo*.

Fonte de pesquisa: FIVB. *Copa do Mundo 2019*. Disponível em: <https://www.volleyball.world/en/volleyball/worldcup/2019/men/teams/bra%20brazil/players>. Acesso em: 28 ago. 2020.

Veja comentários e sugestões nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.

Nesse caso, $Mo = 31$ anos.

A **moda** (Mo) é o valor que ocorre com maior frequência em uma série de valores.

Nesse momento, peça aos alunos que citem outros exemplos de situações envolvendo moda, além do apresentado.

Veja outros exemplos de moda.

- Massa, em quilogramas, dos funcionários de certa empresa:

58	62	65	76
59	62	65	76
60	62	65	81
61	65	70	81
61	65	73	82

Nesse caso, a moda é 65 kg, isto é, $Mo = 65$ kg.

- Horário no qual um ônibus passou em certa parada durante 12 dias:

8 h 14	8 h 16	8 h 19
8 h 14	8 h 16	8 h 20
8 h 15	8 h 16	8 h 20
8 h 15	8 h 18	8 h 20

Nesse caso, há mais de uma moda, ou seja, 8 h 16 e 8 h 20. Dizemos que essa distribuição é **bimodal**.

Observação
A distribuição também pode ser **trimodal**, **quadrimodal** etc.

Caso uma distribuição não apresente moda, ou seja, não contenha valor algum que se repete, dizemos que essa distribuição é **amodal**.

Exemplo

Observe ao lado a medida da altura, em centímetros, de 10 alunos de uma classe.

Note que não há repetição de números, o que caracteriza uma distribuição amodal.

159	163	166	173	176
161	165	172	174	177

Mediana (Md)

No quadro estão indicadas, em ordem crescente, as notas de uma prova de Matemática dos 35 alunos de uma classe de Ensino Médio.

4,1	5,1	5,7	7,0	7,5	7,9	8,6
4,7	5,1	6,3	7,2	7,5	8,1	8,7
4,7	5,4	6,4	7,2	7,6	8,2	9,0
4,9	5,5	6,4	7,3	7,6	8,2	9,1
5,0	5,6	6,8	7,5	7,7	8,3	9,3

A nota 7,2, em destaque, corresponde à **mediana** (Md) dessa distribuição, ou seja, $Md = 7{,}2$.

A mediana é o valor que divide um conjunto de dados ordenados em dois grupos com a mesma quantidade de valores: um grupo terá valores menores ou iguais à mediana e o outro terá valores maiores ou iguais a ela.

Nesse caso, a mediana dividiu o conjunto em dois grupos com 17 valores cada um.

Quando o conjunto de dados tem uma quantidade ímpar de valores (como o apresentado), a mediana ocupa a posição central (neste caso, 18ª posição).

E quando o conjunto de dados tem uma quantidade par de valores?

Nesse caso, a mediana é definida como a média aritmética dos dois valores que estiverem no centro.

Nesse momento, peça aos alunos que citem outros exemplos de situações envolvendo mediana, além do apresentado.

A **mediana** (Md) é o valor que ocupa a posição central em uma sequência de valores quando estes estão organizados em ordem crescente ou decrescente.

Exemplo

Veja ao lado a quantidade de pessoas que assistiram a certo filme em 24 sessões. Calculamos a média aritmética entre os dois elementos centrais, ou seja, o 12º e o 13º:

$$Md = \frac{197 + 199}{2} = \frac{396}{2} = 198$$

Portanto, a mediana dessa distribuição é 198 pessoas.

48	50	50	50	54
54	60	101	120	135
180	197	199	201	210
248	249	251	254	254
255	255	256	258	

Problemas e exercícios resolvidos

R4. Para fazer o levantamento da altura dos alunos do 3º ano de uma turma de Ensino Médio, o professor de Educação Física realizou as medições e obteve os resultados abaixo:

Medida da altura (m)	1,55	1,60	1,65	1,68	1,70	1,72	1,73	1,75	1,79	1,80	1,90
Quantidade de alunos	1	2	3	2	1	1	2	4	1	2	3

De acordo com as informações do quadro, calcule a:

a) média b) moda c) mediana

Resolução

a) média

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 1{,}55 + 2 \cdot 1{,}60 + 3 \cdot 1{,}65 + 2 \cdot 1{,}68 + 1 \cdot 1{,}70 + 1 \cdot 1{,}72 + 2 \cdot 1{,}73 + 4 \cdot 1{,}75 + 1 \cdot 1{,}79 + 2 \cdot 1{,}80 + 3 \cdot 1{,}90}{22}$$

$$\bar{x} = \frac{38{,}03}{22} \simeq 1{,}73$$

Portanto, a altura média dos alunos é aproximadamente 1,73 m.

b) moda

A altura com maior frequência entre os alunos é 1,75 m. Assim, $Mo = 1{,}75$.

c) mediana

Para $n = 22$ alunos, calculamos a média aritmética entre os dois termos centrais, que nesse caso ocupam a 11ª e 12ª posições: $Md = \frac{1{,}73 + 1{,}73}{2} = 1{,}73$.

Portanto, a mediana das alturas dos alunos é 1,73 m.

Observação

Em alguns casos, podemos obter o mesmo valor para a média, a moda e a mediana de um conjunto de dados.

R5. (FGV-SP) Quatro amigos calcularam a média e a mediana de suas alturas, tendo encontrado como resultado 1,72 m e 1,70 m, respectivamente. A média entre as alturas do mais alto e do mais baixo, em metros, é igual a:

a) 1,70 b) 1,71 c) 1,72 d) 1,73 e) 1,74

Resolução

Denominamos as alturas dos quatro amigos, do mais baixo para o mais alto, por x_1, x_2, x_3 e x_4. Nesse caso:

- média

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = 1{,}72 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6{,}88 \qquad \text{(I)}$$

- mediana

Como a quantidade de alturas é par, isto é, 4, calculamos a mediana como a média aritmética dos valores centrais, ou seja:

$$\frac{x_2 + x_3}{2} = 1{,}70 \Rightarrow x_2 + x_3 = 3{,}40 \qquad \text{(II)}$$

Substituindo II em I:

$$x_1 + \overbrace{x_2 + x_3}^{3{,}40} + x_4 = 6{,}88 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + 3{,}40 + x_4 = 6{,}88 \Rightarrow x_1 + x_4 = 3{,}48$$

Sendo x_1 e x_4 as alturas do mais baixo e do mais alto, respectivamente, calculamos a média por:

$$x_1 + x_4 = 3{,}48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 + x_4}{2} = \frac{3{,}48}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 + x_4}{2} = 1{,}74$$

Portanto, alternativa **e**.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

22. Para auxiliar os alunos na resolução de cada item, peça-lhes que organizem o conjunto de valores em ordem crescente.

22. Para cada item, determine a média aritmética, a moda e a mediana do conjunto de valores.

a)

3	4	9	3	2	1	6	1	3

$\overline{x} \simeq 3{,}6$; $Mo = 3$; $Md = 3$

b)

7	2	1	–4	3	7
–2	9	2	3	8	10

$\overline{x} \simeq 3{,}8$; trimodal: $Mo = 2$; $Mo = 3$; $Mo = 7$; $Md = 3$

c)

3	–2	4	5	2	–3	9
7	6	0	10	8	–1	1

$\overline{x} = 3{,}5$; amodal; $Md = 3{,}5$

d)

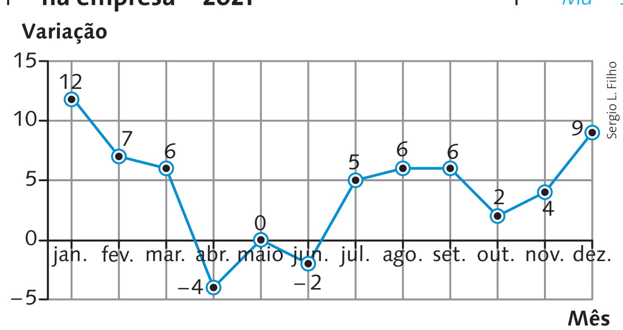
6	8	4	8	8	7	1
–6	4	–6	5	1	–6	8

$\overline{x} = 3$; $Mo = 8$; $Md = 4{,}5$

23. O gráfico apresenta a variação da quantidade de funcionários de uma empresa em relação ao mês anterior. Em relação ao gráfico, determine para o período a média mensal, a moda e a mediana da variação da quantidade de funcionários.

23. $\overline{x} = 4{,}25$ funcionários; $Mo = 6$ funcionários; $Md = 5{,}5$ funcionários

Variação da quantidade de funcionários na empresa – 2021



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

24. (UFRGS-RS) Após a aplicação de uma prova de Matemática, em uma turma de Ensino Médio com 30 estudantes, o professor organizou os resultados, conforme o quadro ao lado.

A nota mediana dessa prova de Matemática é: b

a) 6,0. c) 8,0. e) 9,5.

b) 7,0. d) 9,0.

Quantidade de estudantes	Nota
5	3,0
10	6,0
7	8,0
8	9,5

Em grupo

25. (Enem) Suponha que a etapa final de uma gincana escolar consista em um desafio de conhecimentos. Cada equipe escolheria 10 alunos para realizar uma prova objetiva, e a pontuação da equipe seria dada pela mediana das notas obtidas pelos alunos. As provas valiam, no máximo, 10 pontos cada. Ao final, a vencedora foi a equipe Ômega, com 7,8 pontos, seguida pela equipe Delta, com 7,6 pontos. Um dos alunos da equipe Gama, a qual ficou na terceira e última colocação, não pôde comparecer, tendo recebido nota zero na prova. As notas obtidas pelos 10 alunos da equipe Gama foram 10; 6,5; 8; 10; 7; 6,5; 7; 8; 6; 0.
Se o aluno da equipe Gama que faltou tivesse comparecido, essa equipe: d

a) teria a pontuação igual a 6,5 se ele obtivesse nota 0.

b) seria a vencedora se ele obtivesse nota 10.

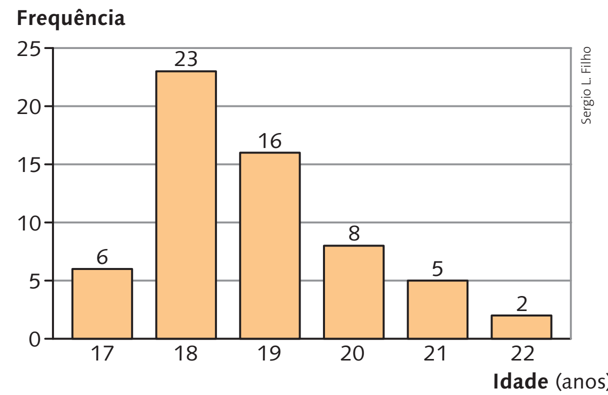
c) seria a segunda colocada se ele obtivesse nota 8.

d) permaneceria na terceira posição, independentemente da nota obtida pelo aluno.

e) empataria com a equipe Ômega na primeira colocação se o aluno obtivesse nota 9.

26. Observe o gráfico.

Idade dos alunos do primeiro ano do curso de Direito – 2021



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

a) Com base no gráfico, calcule a média aritmética, a moda e a mediana das idades dos alunos. $\bar{x} = 18{,}82$; $Mo = 18$; $Md = 19$

b) Quantos alunos desse curso têm até 20 anos? 53 alunos

c) Qual é a porcentagem de alunos que têm mais de 19 anos? 25%

Separatrizes

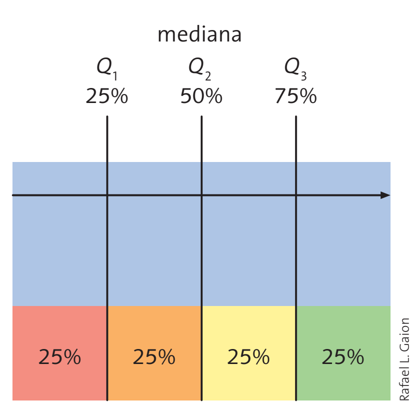
Para descrever como os valores são dispersos, podemos utilizar as separatrizes.

As **separatrizes** dividem uma sequência de valores, organizados em **ordem crescente**, em certa quantidade de partes iguais. Alguns exemplos de separatrizes são:

- **mediana**: divide os valores em duas partes iguais, cada uma contendo 50% dos valores;
- **quartis**: divide os valores em quatro partes iguais, cada uma contendo 25% dos valores;
- **decis**: divide os valores em 10 partes iguais, cada uma contendo 10% dos valores;
- **percentis**: divide os valores em 100 partes iguais, cada uma contendo 1% dos valores.

Para essas separatrizes, temos algumas correspondências:

- A mediana corresponde ao 50º percentil (P_{50});
- O 1º quartil (Q_1) corresponde ao 25º percentil (P_{25}), o 2º quartil (Q_2) corresponde ao 50º percentil (P_{50}) e o 3º quartil (Q_3) corresponde ao 75º percentil (P_{75});
- O 1º decil (D_1) corresponde ao 10º percentil (P_{10}), o 2º decil (D_2) corresponde ao 20º percentil (P_{20}), e assim por diante.



Uma maneira de calcular os quartis e os decis é calcular os percentis correspondentes.

Para calcular o k-ésimo percentil (P_k) em uma sequência de n valores organizados em ordem crescente, primeiramente calculamos a posição desse percentil (I_k), por meio da relação: $I_k = n \cdot \frac{k}{100}$.

Para essa posição, temos duas possibilidades:

- se I_k for um número inteiro, o k-ésimo percentil P_k está na posição referente à média aritmética entre os valores da sequência de índice I_k e I_{k+1}.
- se I_k não for um número inteiro, o k-ésimo percentil P_k está na posição referente ao valor da sequência cujo índice é igual ao arredondamento de I_k para o **inteiro maior mais próximo**.

Observação

"Inteiro MAIOR mais próximo" e "inteiro mais próximo" podem representar números diferentes. Para o número 1,3, temos:

- inteiro maior mais próximo: 2;
- inteiro mais próximo: 1.

Exemplo

Observe a sequência de 20 valores, dispostos em ordem crescente.

200	201	285	307	323	332	398	407	441	443
449	466	468	487	503	523	530	567	584	595

A posição do 60º percentil, denotado por P_{60}, é dada por: $I_{60} = 20 \cdot \frac{60}{100} = 12$.

Como $I_{60} = 12$ é um número inteiro, P_{60} corresponde à média aritmética entre o 12º e o 13º valor da sequência, ou seja: $P_{60} = \frac{466 + 468}{2} = 467$.

A posição do 88º percentil, denotado por P_{88}, é dada por: $I_{88} = 20 \cdot \frac{88}{100} = 17{,}6$.

Como $I_{88} = 17{,}6$ não é um número inteiro, arredondamos I_{88} para o inteiro maior mais próximo, e P_{88} corresponde ao 18º valor da sequência, ou seja: $P_{88} = 567$.

Problemas e exercícios resolvidos

R6. Ao lado estão indicadas, em rol, a pontuação de um time de basquete em 16 jogos.

32	33	39	40	41	43	44	46
47	48	50	52	53	56	58	59

a) Determine Q_1, Q_2 e Q_3.

b) Determine D_4 e D_7.

Resolução

a) • Como Q_1 corresponde ao P_{25}, temos: $I_{25} = 16 \cdot \frac{25}{100} = 4$.

Assim, P_{25} é a média aritmética entre o 4º e o 5º valores da sequência, ou seja: $Q_1 = \frac{40 + 41}{2} = 40{,}5$.

• Para Q_2, que corresponde ao P_{50}, temos: $I_{50} = 16 \cdot \frac{50}{100} = 8$.

Assim, P_{50} é a média aritmética entre o 8º e o 9º valores da sequência, ou seja: $Q_2 = \frac{46 + 47}{2} = 46{,}5$.

• Para Q_3, que corresponde ao P_{75}, temos: $I_{75} = 16 \cdot \frac{75}{100} = 12$.

Assim, P_{75} é a média aritmética entre o 12º e o 13º valores da sequência, ou seja: $Q_3 = \frac{52 + 53}{2} = 52{,}5$.

Observação

Após calcular os quartis, podemos concluir, por exemplo, que, em 25% dos jogos, o time fez 40,5 pontos ou menos, em metade dos jogos fez 46,6 pontos ou menos e em 75% dos jogos fez 52,5 pontos ou menos.

b) • Como D_4 corresponde ao P_{40}, temos:

$$I_{40} = 16 \cdot \frac{40}{100} = 6{,}4$$

Arredondando para o inteiro maior mais próximo, concluímos que P_{40} é o 7º valor da sequência, ou seja: $D_4 = 44$.

• Para D_7, que corresponde ao P_{70}, temos:

$$I_{70} = 16 \cdot \frac{70}{100} = 11{,}2$$

Arredondando para o inteiro maior mais próximo, concluímos que P_{70} é o 12º valor da sequência, ou seja: $Q_3 = 52$.

Observação

Após calcular esses decis, podemos concluir, por exemplo, que em aproximadamente 40% dos jogos o time fez 44 pontos ou menos, e em aproximadamente 70% dos jogos o time fez 52 pontos ou menos.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

27. De acordo com o conjunto de valores abaixo, determine o que se pede em cada item.

5	4	7	1	1	5	2	1	10
3	1	1	8	7	10	6	9	0

Observação

Inicialmente, organize o conjunto de valores em ordem crescente.

a) Q_1 1 b) Q_2 4,5 c) Q_3 7 d) D_5 4,5 e) D_3 1 f) D_8 8

28. Observe a massa de alguns pães franceses, em gramas, de diferentes padarias em 2021. Note que os dados estão organizados em rol.

45	45	46	46	46	47	47	48
49	49	50	50	50	51	51	52

a) De acordo com esse conjunto de valores, qual é o terceiro quartil e o quinto decil? 50; 48,5

b) Faça a interpretação dos resultados obtidos no item **a**.
Resposta pessoal. Possível resposta: 75% dos pães tem 50 g ou menos e 50% dos pães tem 48,5 g ou menos.

29. Uma empresa faz a revisão de suas máquinas após certa quantidade de horas em funcionamento. No quadro ao lado, estão os registros que o setor de manutenção realizou durante certo mês.

Tempo de funcionamento (em horas)	Quantidade de máquinas revisadas
130	3
140	4
150	7
160	6
170	2
Total	22

Observação

Para realizar esta tarefa, organize os dados do quadro em rol.

a) Qual é o tempo de funcionamento médio das máquinas para ser realizada manutenção? 150 horas

b) Calcule os quartis Q_1 e Q_3. Q_1: 140; Q_3: 160

c) O que é possível concluir com os resultados obtidos no item **b**? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que é possível concluir que a revisão de 25% das máquinas é feita com até 140 horas de funcionamento e a revisão de 75% das máquinas é feita com até 160 horas de funcionamento.

Você produtor

30. Elabore um problema que envolva a determinação de separatrizes associadas a um conjunto de valores baseado em um assunto de sua preferência. Depois, dê o problema que você elaborou para um colega resolver e, ao final, verifiquem se as respostas estão corretas.
Resposta pessoal. Espera-se que os alunos desenvolvam uma situação envolvendo valores que possam ser organizados em rol e que elaborem questionamentos relacionados à interpretação dos resultados.

5 Representação gráfica de dados estatísticos

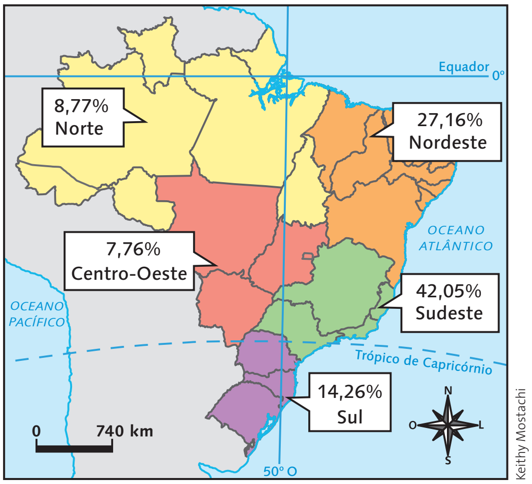
Os dados de uma pesquisa podem ser apresentados de várias maneiras. Os meios de comunicação utilizam, em geral, gráficos e tabelas para apresentar esses dados. Isso ocorre porque esses recursos possibilitam uma apresentação dos resultados de uma pesquisa. As tabelas, por exemplo, são utilizadas para organizar os dados e apresentá-los de maneira mais simples ao leitor. Já os gráficos permitem uma melhor visualização e também uma análise mais detalhada dos dados apresentados.

Veja, por exemplo, informações sobre o mesmo assunto apresentadas na forma de texto e na forma de gráficos.

Segundo as estimativas do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), a população brasileira em 2019 era de 210 147 125 pessoas. Nessa estimativa, a região mais populosa era a Sudeste, com aproximadamente 42,05% da população, seguida por Nordeste e Sul, com aproximadamente 27,16% e 14,26% da população, respectivamente. Norte e Centro-Oeste foram as regiões menos populosas, com aproximadamente 8,77% e 7,76% da população, respectivamente.

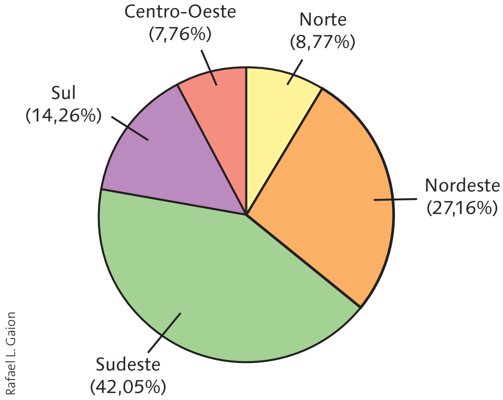
Fonte de pesquisa: IMPRENSA NACIONAL. População residente segundo as unidades da federação e municípios. *Diário Oficial da União*. 28 ago. 2019. Disponível em: <http://www.in.gov.br/en/web/dou/-/resolucao-n-3-de-26-de-agosto-de-2019-212912380>. Acesso em: 13 jun. 2020.

Distribuição da população estimada do Brasil nas grandes regiões – 2019



Fontes de pesquisa: IBGE. *Atlas Geográfico Escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro, 2018.
IMPRENSA NACIONAL. População residente segundo as unidades da federação e municípios. *Diário Oficial da União*. 28 ago. 2019. Disponível em: <http://www.in.gov.br/en/web/dou/-/resolucao-n-3-de-26-de-agosto-de-2019-212912380>. Acesso em: 13 jun. 2020.

Distribuição da população estimada do Brasil nas grandes regiões – 2019



Diga aos alunos que esse tipo de gráfico é chamado gráfico de setores. Diga-lhes que esse assunto será retomado posteriormente neste mesmo capítulo, na página 121.

Fonte de pesquisa: IMPRENSA NACIONAL. População residente segundo as unidades da federação e municípios. *Diário Oficial da União.* 28 ago. 2019. Disponível em: <http://www.in.gov.br/en/web/dou/-/resolucao-n-3-de-26-de-agosto-de-2019-212912380>. Acesso em: 13 jun. 2020.

Existem diversos tipos de gráficos. Porém, a escolha do mais apropriado para cada situação depende de vários fatores, como o objetivo da pesquisa ou até mesmo as particularidades das informações a serem apresentadas.

Neste tópico, iremos estudar os gráficos de barras, linhas, setores, além dos pictogramas, histogramas, *box plot* e diagrama de ramo e folhas.

Gráfico de barras

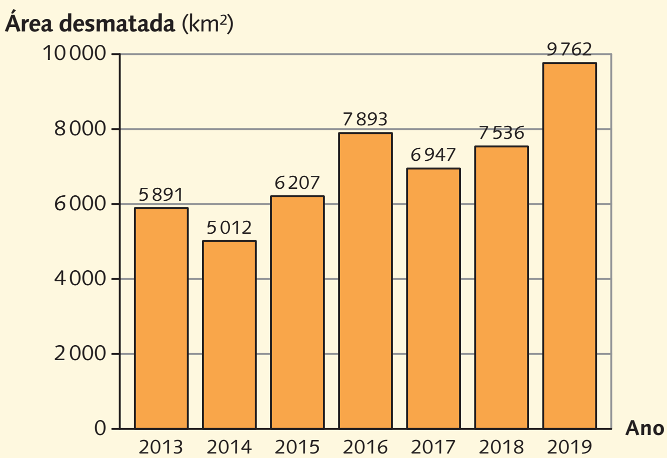
O **gráfico de barras** (ou de colunas) é utilizado, em geral, para representar dados de uma tabela de frequências associados a uma variável qualitativa. Nesse tipo de gráfico, cada barra retangular representa a frequência ou a frequência relativa da respectiva opção da variável.

Veja a seguir o gráfico de barras verticais correspondente aos dados da tabela.

Desmatamento na Amazônia aumentou 30% em 2019

O Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (Inpe) informou que o desmatamento na Amazônia, medido no ano de 2019, foi 9 672 km^2, de acordo com resultado do Projeto de Monitoramento do Desflorestamento na Amazônia Legal (Prodes). O aumento em relação ao ano anterior foi 30%, sendo o mais significativo dos últimos anos.

O desmatamento da Amazônia a cada ano (de agosto a julho), nos anos 2013 a 2019



Fonte de pesquisa: INPE. *Amazônia*. Disponível em: <www.obt.inpe.br/OBT/assuntos/programas/amazonia/prodes>. Acesso em: 7 fev. 2020.

O desmatamento da Amazônia a cada ano (de agosto a julho), nos anos 2013 a 2019

Ano	Área desmatada (km^2)
2013	5 891
2014	5 012
2015	6 207
2016	7 893
2017	6 947
2018	7 536
2019	9 762

Fonte de pesquisa: INPE.*Amazônia*. Disponível em: <www.obt.inpe.br/OBT/assuntos/programas/amazonia/prodes>. Acesso em: 7 fev. 2020.

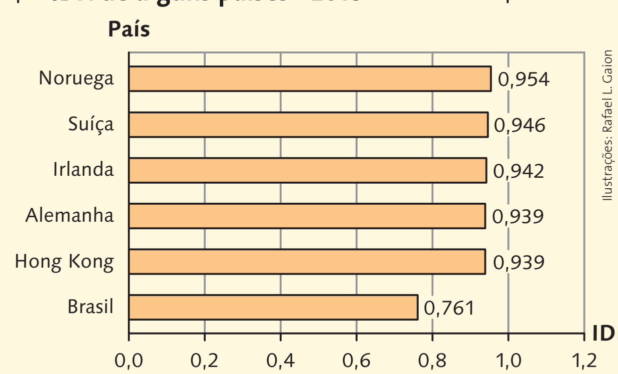
Veja a seguir um exemplo de gráfico de barras horizontais.

Se julgar necessário, diga aos alunos que o valor do IDH pode variar entre 0 e 1. O valor 1 indica qualidade de vida máxima e o valor 0 (zero) indica o oposto.

O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é um índice para medir a qualidade de vida das nações do mundo, e o cálculo de seu valor não leva em conta apenas a dimensão econômica, mas também a expectativa de vida e a educação da população. Esse índice foi publicado pela primeira vez em 1990 e a Organização das Nações Unidas (ONU) utiliza o resultado do IDH para avaliar a qualidade de vida nos países.

Fonte de pesquisa: PROGRAMA DAS NAÇÕES UNIDAS PARA O DESENVOLVIMENTO (Pnud). *Relatório do Desenvolvimento Humano de 2019*. Disponível em: <http://hdr.undp.org/sites/default/files/hdr_2019_pt.pdf>. Acesso em: 28 ago. 2020.

IDH de alguns países - 2018



Ilustrações: Rafael L. Gaion

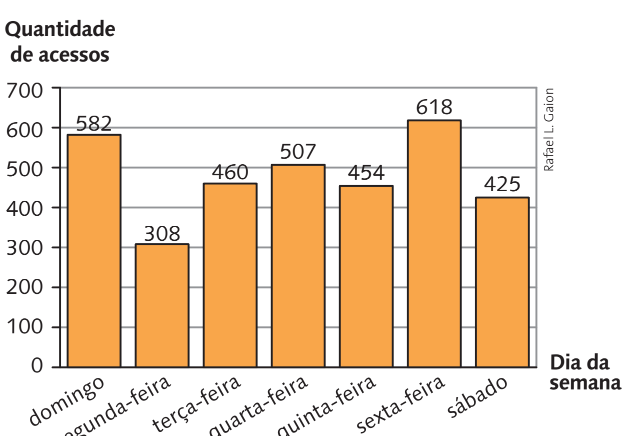
- Junte-se a um colega e pesquisem duas reportagens de diferentes fontes, que contenham gráficos de barras sobre um assunto de interesse de vocês. Comparem as reportagens obtidas, analisando-as criticamente e verificando se há inconsistência na apresentação dos dados estatísticos.

31. Renata produz artesanatos e divulga suas produções em uma rede social. Com o objetivo de aumentar as vendas, ela decidiu sortear alguns de seus produtos por meio da rede social, da seguinte maneira:

- as inscrições para o sorteio podem ser feitas durante dois dias;
- as inscrições podem ser feitas a partir do início do primeiro dia;
- as inscrições serão encerradas ao final do segundo dia;
- o sorteio será feito no dia seguinte ao encerramento das inscrições.

Para decidir o melhor dia para realizar o sorteio, ela observou a média de acessos de sua rede social por dia da semana, durante o último mês. Os dados obtidos foram organizados no seguinte gráfico.

Média de acessos à rede social de Renata por dia da semana, durante o último mês de 2021



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Com base no gráfico, em que dia da semana ela deve realizar o sorteio, considerando a maior quantidade de acessos nos três dias consecutivos? domingo

Oriente os alunos e supervisione-os na elaboração dessa tarefa a fim de que ela possa ser respondida com as informações apresentadas.

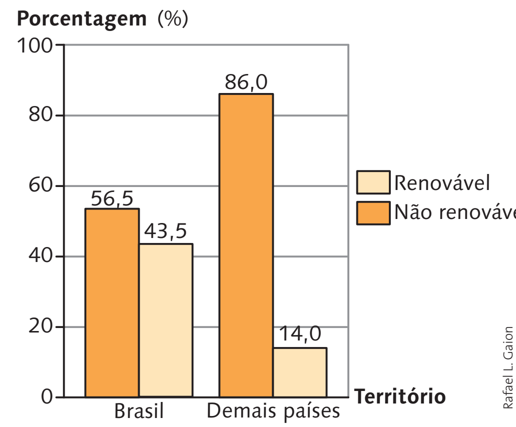
Você produtor

32. Elabore um problema envolvendo um gráfico de barras feito por você. Elabore algumas questões relacionadas a ele e peça a um colega para respondê-las. Depois, verifique se as respostas estão corretas. Resposta pessoal.

33. b) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que não é possível fazer afirmações sobre a quantidade de energia produzida com os dados apresentados, pois o gráfico refere-se à relação entre os tipos de energia produzida.

33. Veja o gráfico e responda às questões.

Produção de energia por fonte – 2016



Fonte de pesquisa: EMPRESA DE PESQUISA ENERGÉTICA. *Matriz Energética e Elétrica*. Disponível em: <https://www.epe.gov.br/pt/abcdenergia/matriz-energetica-e-eletrica>. Acesso em: 13 jun. 2020.

a) Em 2016, qual era o tipo de energia mais utilizada no Brasil? E nos demais países? não renovável; não renovável

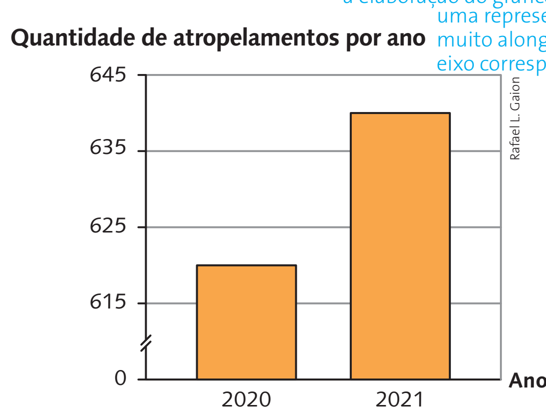
b) Em relação à quantidade de energia produzida, é possível afirmar que o Brasil produz mais energia renovável do que os demais países? Justifique sua resposta.

34. Em um telejornal, o apresentador mostrou o gráfico abaixo e comentou:

"No gráfico, podemos notar que de 2020 para 2021 a quantidade de vítimas por atropelamento em nossa cidade mais que dobrou."

No gráfico desta tarefa, diga aos alunos que a indicação no eixo vertical entre 0 e 615 (⫽) corresponde a uma supressão de valores. Ela é normalmente utilizada para facilitar a elaboração do gráfico, evitando uma representação muito alongada no eixo correspondente.

Vítimas por atropelamento em uma certa cidade – 2021



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

A afirmação feita pelo apresentador em relação aos dados do gráfico lhe parece razoável? Justifique sua resposta. Resposta pessoal.

Veja comentários e sugestões nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.

Gráfico de linhas

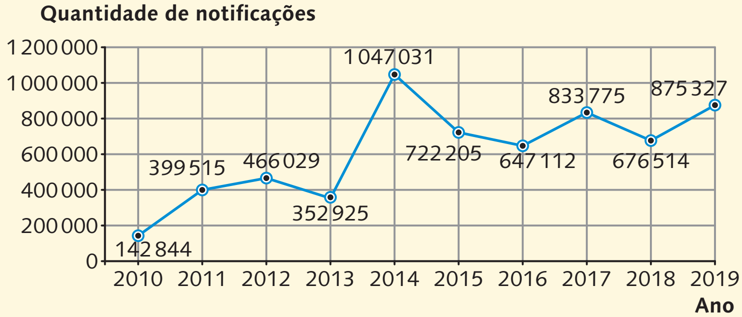
O **gráfico de linhas** (ou de segmentos) é utilizado, em geral, para representar a evolução dos valores de uma variável no decorrer do tempo. Veja o gráfico de linhas a seguir.

Explique aos alunos que, no gráfico de linhas, os pontos são ligados para facilitar a sua leitura, e dessa maneira, mostrar de modo mais evidente a variação de uma grandeza ano a ano. No entanto, diga-lhes que, na prática, isso nem sempre ocorre. No exemplo ao lado, entre um ponto e outro não há infinitos valores, por tratar-se da variação da quantidade de notificações, ou seja, uma grandeza discreta. O mesmo ocorre no gráfico de linhas abaixo.

A internet faz parte do cotidiano de muitas pessoas, seja para realizar serviços bancários, pesquisar, enviar *e-mails*, encontrar amigos, acessar *sites* em busca de informação, entre outros. Ao utilizá-la, o usuário deve manter-se atento às ameaças que pode sofrer, pois poderá se deparar com pessoas mal-intencionadas que queiram aplicar algum tipo de golpe, ter seus dados e senhas roubados ou ainda entrar em contato com conteúdos maldosos.

Por isso, ao utilizar a internet, devemos ser cuidadosos com quem nos relacionamos, evitar entrar em *sites* suspeitos e sempre utilizar *softwares* de segurança.

Quantidade de notificações sobre fraudes, furtos, invasões e ataques de vírus no Brasil – 2010 a 2019



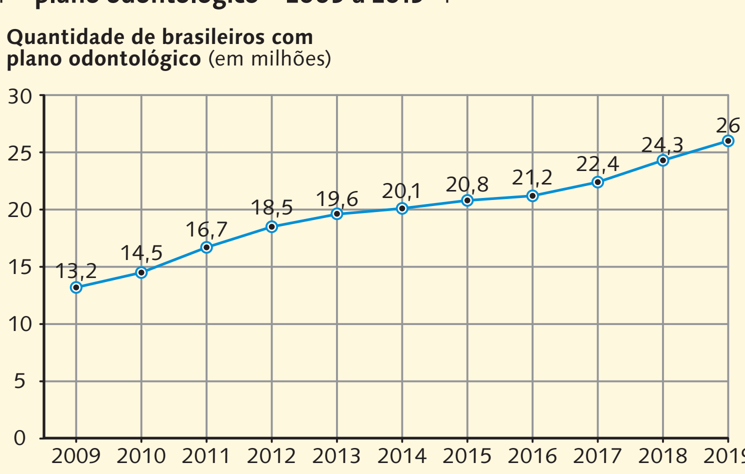
Fonte de pesquisa: CENTRO DE ESTUDOS, RESPOSTA E TRATAMENTO DE INCIDENTES DE SEGURANÇA NO BRASIL. *Estatísticas.* Disponível em: <https://www.cert.br/stats/incidentes/>. Acesso em: 10 fev. 2020.

Em um gráfico de linhas, cada segmento indica o crescimento, o decrescimento ou a estabilidade dos valores. De acordo com o gráfico acima, responda às questões a seguir. Em relação à quantidade de notificações:

- de 2010 a 2011, houve um aumento ou diminuição? aumento
- de 2014 a 2015, houve um aumento ou diminuição? diminuição
- o crescimento de 2011 a 2012 foi maior ou menor do que o de 2018 a 2019? menor
- qual foi o ano com a maior quantidade de notificações? 2014

Observe outro exemplo de gráfico de linhas:

Quantidade de brasileiros com plano odontológico – 2009 a 2019



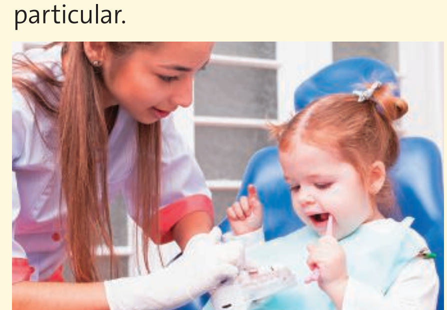
Fonte de pesquisa: AGÊNCIA NACIONAL DE SAÚDE SUPLEMENTAR. *Dados gerais.* Disponível em: <https://www.ans.gov.br/perfil-do-setor/dados-gerais>. Acesso em: 10 fev. 2020.

Ilustrações: Rafael L. Gaion

O aumento dos planos

Na última década, a quantidade de clientes dos planos odontológicos cresceu em ritmo acelerado.

Atualmente, quase 30 milhões de pessoas têm algum tipo de cobertura particular.

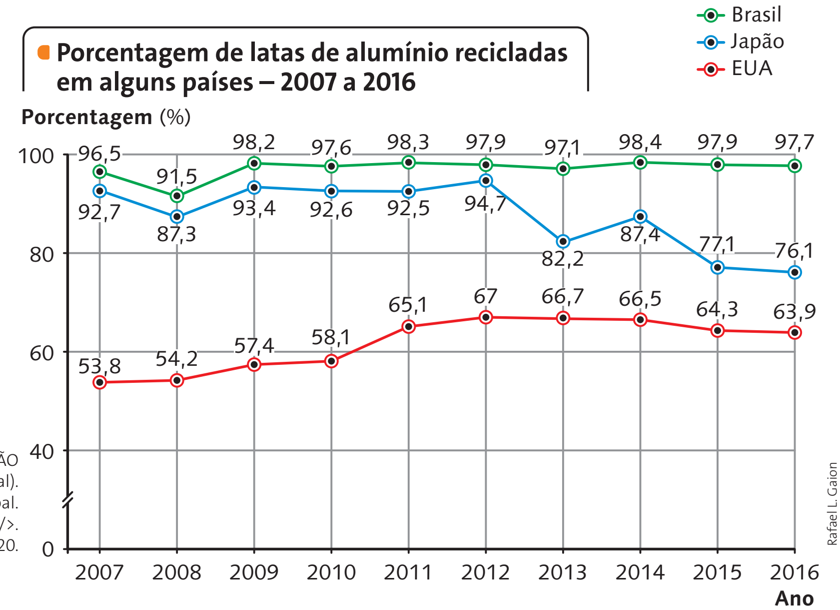


Oksana Shufrych/Shutterstock.com

Os cuidados odontológicos devem ser realizados desde os primeiros anos de vida.

35. Seja por razões ambientais, seja por razões sociais ou econômicas, reciclar latas de alumínio tornou-se um hábito brasileiro, dando a nosso país a liderança mundial nesse tipo de reciclagem. Em 2017, das latas de alumínio comercializadas, 295,8 mil toneladas foram recicladas, colocando o Brasil na marca de 97,3% de reciclagem de latas de alumínio.

Porcentagem de latas de alumínio recicladas em alguns países – 2007 a 2016



Fonte de pesquisa: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DO ALUMÍNIO (Abal). *Reciclagem.* Disponível em: <http://abal.org.br/sustentabilidade/reciclagem/>. Acesso em: 13 fev. 2020.

Analisando o texto e o gráfico, responda às perguntas e faça o que se pede.

a) Todos os países apresentados tiveram aumento no índice de reciclagem em 2016 em relação a 2007? Justifique sua resposta. Não, pois o Japão teve uma diminuição no índice de reciclagem.

b) Quantas toneladas de latas de alumínio foram produzidas no Brasil em 2017? aproximadamente 304 mil toneladas

c) Qual foi o país em que ocorreu a maior variação da porcentagem de latas recicladas? Japão

Você cidadão

d) Em sua opinião, por que é importante reciclar o alumínio? Resposta pessoal.

e) Que objetos de uso cotidiano você conhece que são feitos de alumínio? O que aconteceria se esses objetos não fossem reciclados? Possíveis respostas: panelas, utensílios de cozinha, embalagens. Espera-se que os alunos respondam que caso não fossem reciclados, esses objetos ocupariam espaços nos lixões, exigiriam mais mineração para a produção de objetos novos, entre outros.

36. a) jan-fev-mar de 2017; Possível resposta: nesse trimestre móvel, a quantidade de pessoas desocupadas que estavam à procura de emprego, atingiu seu maior valor no período de referência.

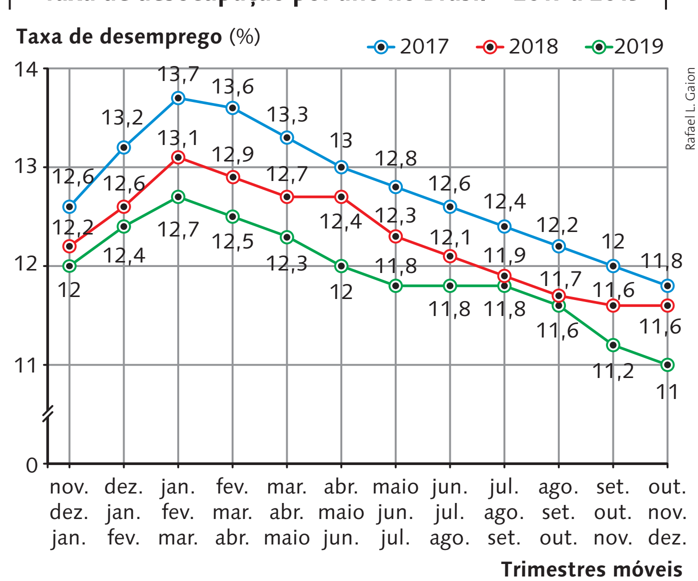
36. Um dos maiores problemas sociais do Brasil é o desemprego. A fim de combatê-lo rapidamente são realizados monitoramentos constantes de sua variação, pelo IBGE, por meio da Pnad Contínua. Ao lado estão apresentadas as taxas de desocupação no Brasil nos anos de 2017 a 2019. São consideradas desocupadas todas as pessoas que não têm trabalho, mas que estão à procura, considerando os últimos 30 dias.

a) De acordo com o gráfico, em que trimestre móvel a taxa de desocupação foi maior? O que isso significa?

b) Qual foi a maior variação, em porcentagem, da taxa de desocupação considerando todo o período do gráfico? 2,7 %

c) Considerando o primeiro e o último trimestres móveis de todo o período do gráfico, a taxa de desocupação aumentou ou diminuiu? Qual foi essa diferença? diminuiu; 1,6 %

Taxa de desocupação por ano no Brasil – 2017 a 2019



Fonte de pesquisa: IBGE. *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua – 2018.* Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/3086/pnacm_2019_dez.pdf>. Acesso em: 13 fev. 2020.

Observação

Para dados apresentados em trimestres móveis são considerados o resultado do mês mais recente, juntamente com os dois imediatamente anteriores.

Gráfico de setores

O **gráfico de setores**, também conhecido como "**gráfico de *pizza***", é utilizado, em geral, para representar partes de um todo.

Veja os mesmos dados em uma tabela e um gráfico de setores indicando os setores que produzem gases que intensificam o efeito estufa.

Veja comentários e sugestões na Assessoria pedagógica.

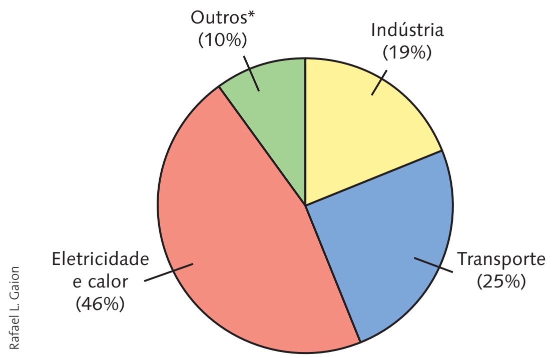
Setores que produzem os gases que intensificam o efeito estufa – 1990 a 2017	
Setores	**Porcentagem (%)**
Indústria	19
Transporte	25
Eletricidade e calor	46
Outros*	10

* inclui residencial, comercial, serviço público e agricultura

Fonte de pesquisa: INTERNATIONAL ENERGY AGENCY. *Dados e Estatísticas – emissões CO2.* Disponível em: <https://www.iea.org/data-and-statistics?country=WORLD&fuel=CO2%20emissions&indicator=CO2%20emissions%20by%20sector>. Acesso em: 14 fev. 2020.

O setor industrial é o 3º que mais contribui para a intensificação do efeito estufa.

Setores que produzem os gases que intensificam o efeito estufa – 1990 a 2017



* inclui residencial, comercial, serviço público e agricultura

Fonte de pesquisa: INTERNATIONAL ENERGY AGENCY. *Dados e Estatísticas – emissões CO2.* Disponível em: <https://www.iea.org/data-and-statistics?country=WORLD&fuel=CO2%20emissions&indicator=CO2%20emissions%20by%20sector>. Acesso em: 14 fev. 2020.

Em um gráfico de setores, o círculo todo indica o total (100%) e cada um dos setores, cujos ângulos são proporcionais às frequências correspondentes, representam uma porcentagem do todo.

Na construção de um gráfico de setores, o ângulo de cada setor pode ser determinado por meio de uma regra de três simples. No caso do exemplo, podemos determinar o ângulo de cada setor da seguinte maneira:

- Indústria

porcentagem	ângulo
100	360°
19	x

$$\frac{100}{19} = \frac{360°}{x} \Rightarrow x \simeq 68°$$

- Transporte

porcentagem	ângulo
100	360°
25	x

$$\frac{100}{25} = \frac{360°}{x} \Rightarrow x = 90°$$

- Eletricidade e calor

porcentagem	ângulo
100	360°
46	x

$$\frac{100}{46} = \frac{360°}{x} \Rightarrow x \simeq 166°$$

- Outros

porcentagem	ângulo
100	360°
10	x

$$\frac{100}{10} = \frac{360°}{x} \Rightarrow x = 36°$$

Por fim, com o auxílio de um compasso e um transferidor, constrói-se o gráfico.

Veja outros exemplos de gráfico de setores:

Bolsas do Prouni

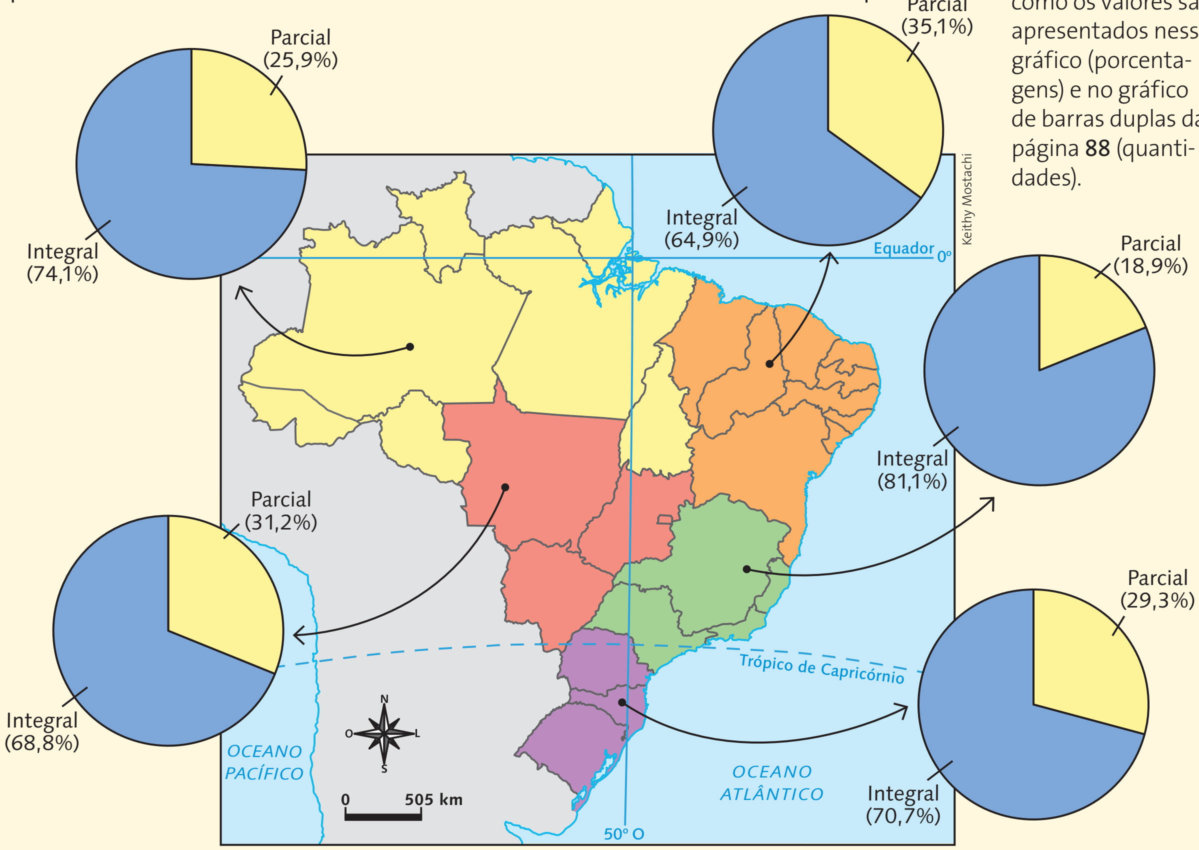
O Programa Universidade para Todos (Prouni) concede bolsas para graduação a alunos de baixa renda e que estudaram em escola pública.

De acordo com o Prouni, as bolsas concedidas aos alunos podem ser parciais ou integrais, dependendo da renda familiar.

Observação

Compare a maneira como os valores são apresentados nesse gráfico (porcentagens) e no gráfico de barras duplas da página **88** (quantidades).

Distribuição de bolsas do Prouni no Brasil nas grandes regiões – 2019



Fontes de pesquisa: IBGE. *Atlas Geográfico Escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro, 2018.
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Programa Universidade para Todos – Prouni*.
Disponível em: <http://www.dados.gov.br/dataset/mec-prouni>. Acesso em: 4 mar. 2020.

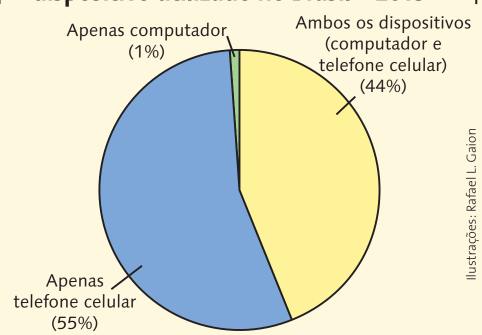
Dispositivos que são utilizados para acessar a internet

O Brasil tem se aproximado dos países desenvolvidos na quantidade de pessoas que utilizam a internet. Nesses países, segundo a Pesquisa sobre o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação nos domicílios brasileiros (TIC Domicílios), realizada em 2018, aproximadamente 81% da população era usuária de internet.

O telefone celular tem se consolidado como o principal dispositivo utilizado pelos brasileiros para acessar a internet.

A pesquisa também mostrou que 126,9 milhões de brasileiros eram usuários de internet, o que equivalia a 70% das pessoas com dez anos ou mais de idade e cerca de 97% desses usuários utilizaram a rede pelo telefone celular. Por outro lado, apenas 43% dos usuários acessou a rede utilizando o computador.

Usuários de internet de 16 a 24 anos por dispositivo utilizado no Brasil – 2018



Fonte de pesquisa: CETIC.BR. *Pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação nos domicílios brasileiros – TIC 2018*. Disponível em: <https://cetic.br/media/docs/publicacoes/2/12225320191028-tic_dom_2018_livro_eletronico.pdf>. Acesso em: 18 fev. 2020.

Acesso digital

Utilizando planilhas eletrônicas para construir diferentes tipos de representações gráficas

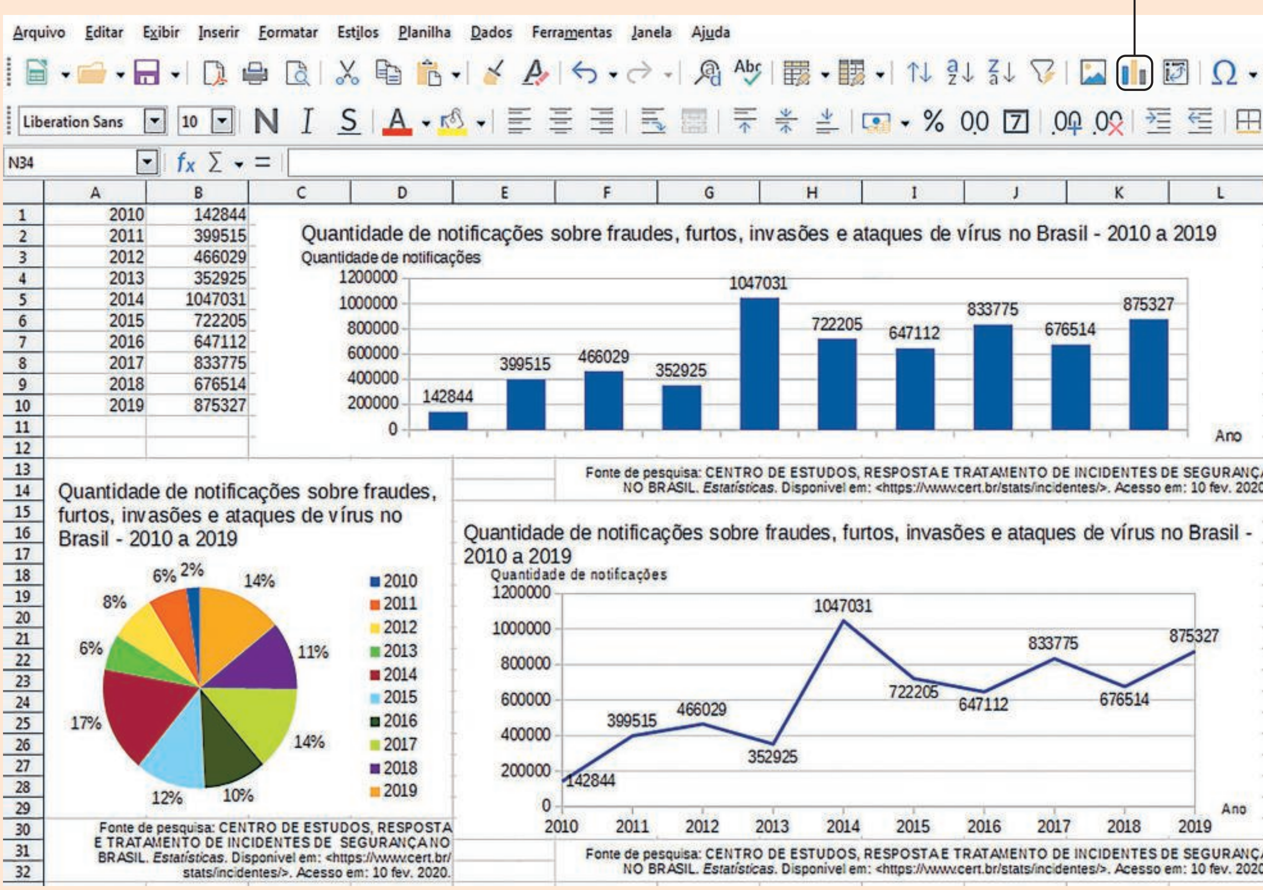
Anteriormente, construímos tabelas de frequência utilizando o *software* Calc. Agora, utilizando esse mesmo *software*, vamos construir diferentes tipos de representações gráficas para um conjunto de dados estatísticos na planilha eletrônica.

1º Na planilha eletrônica, organize no intervalo **A1:B10** os dados apresentados no gráfico **Quantidade de notificações sobre fraudes, furtos, invasões e ataques de vírus no Brasil - 2010 a 2019** da página **119**, como indicado abaixo.

2º Selecione o intervalo **A1:B10** e clique no botão **Inserir gráfico**. Em **Tipo de gráfico**, escolha o tipo entre as categorias e em **Intervalo de dados**, deixe marcada a opção **Primeira coluna como rótulo**.

3º Em **Elementos do gráfico**, digite o título e os eixos do gráfico e clique em **Concluir**. A fonte do gráfico pode ser inserida em uma célula próxima.

4º Clique com o botão direito do *mouse* no gráfico e clique em **Inserir rótulos de dados**. Nas opções também é possível alterar o tamanho e a posição dos elementos do gráfico, para facilitar a visualização dos dados.



a) Em sua opinião, entre os gráficos construídos, qual deles é o mais apropriado para representar os dados? E o menos apropriado? Justifique suas respostas.

b) Entre os gráficos disponíveis no *software*, cite alguns que também podem ser utilizados para representar os dados. Possíveis respostas: gráfico de área e de pontos.

c) Escolha um quadro ou tabela deste capítulo e represente-o com o gráfico que julgar mais adequado para representar os dados. Para isso, construa-o utilizando o Calc. Resposta pessoal.

Observação

A partir das instruções indicadas no 1º passo, repita os passos seguintes para cada um dos gráficos que se deseja construir. No exemplo, foram construídos gráficos de linhas, de setores (*pizza*) e de barras (colunas).

a) Possível resposta: o gráfico de linhas, pois os dados representam a evolução dos valores através do tempo; o gráfico de setores, pois os dados não representam partes do todo, mas sim observações durante um período.

38. a) Não, pois diferentes tipos de pessoas moram em diferentes municípios, cuja realidade local é diferente dos outros municípios do estado. A amostra daria unicamente indicações sobre a população constituída pelos moradores desse município.

Problemas e exercícios propostos

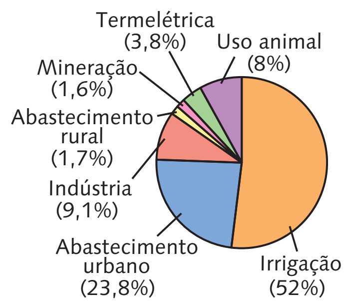
Não escreva no livro.

37. A água é um bem finito e dotado de valor econômico, por esse motivo, é importante mensurar sua demanda e seu uso. Essas medições podem revelar as regiões com *déficits* de acesso à água e os riscos aos setores produtivos do país. O histórico da evolução dos usos da água está diretamente relacionado ao desenvolvimento econômico e ao processo de urbanização do país. O gráfico abaixo apresenta a demanda de água no Brasil, em 2017.

Veja comentários e sugestões na Assessoria pedagógica.

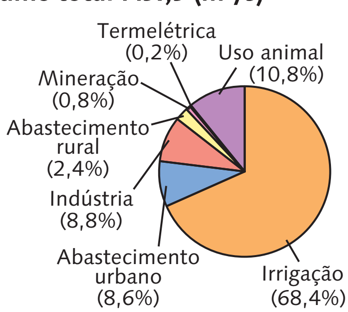
Demanda do uso de água no Brasil – 2017

Retirada total 2 082,7 (m^3/s)



Retirada: refere-se à água total captada para um uso. Exemplo: água retirada para abastecimento urbano.

Consumo total 1 157,9 (m^3/s)



Ilustrações: Rafael L. Gaion

37. a) Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Consumo: refere-se à água retirada que não retorna diretamente aos corpos hídricos.

Fonte de pesquisa: AGÊNCIA NACIONAL DE ÁGUAS. *Manual de usos consuntivos de águas no Brasil*. Disponível em: <http://www.snirh.gov.br/portal/snirh/centrais-de-conteudos/central-de-publicacoes/ana_manual_de_usos_consuntivos_da_agua_no_brasil.pdf>. Acesso em: 18 fev. 2020.

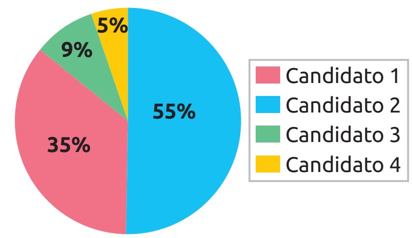
a) Com base nas informações, construa um gráfico de barras horizontais para representar as informações dos gráficos de setores.

b) Segundo a Organização das Nações Unidas (ONU), cada pessoa necessita de cerca de 110 L de água por dia para atender suas necessidades de consumo e higiene. Faça uma estimativa e determine quantos litros de água, em média, você utiliza por dia. Depois, verifique se essa quantidade é próxima da recomendação da ONU.

37. b) Resposta pessoal. Possível resposta: em uma residência com quatro pessoas que consomem 38 m^3 de água por mês, cada pessoa consome em média 316,67 L de água por dia, sendo superior aos 110 L indicados para o consumo diário.

38. O gráfico a seguir apresenta o resultado de uma pesquisa sobre a intenção de voto para governador de certo estado, realizada com os moradores de certo município.

Eleições estaduais para governo: intenção de voto da população de certo município – 2021



Rafael L. Gaion

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

a) De acordo com as informações, a amostra dessa pesquisa é representativa? Justifique sua resposta.

b) É possível notar inadequações no gráfico apresentado nessa pesquisa? Se sim, quais?

c) Pesquise sobre alguma campanha eleitoral do seu município ou estado. Observe como as informações são apresentadas, se o texto possui alguma incoerência, se os dados publicados são referenciados e se são suficientes para a compreensão da informação. Depois, apresente sua pesquisa aos colegas e justifique sua análise.

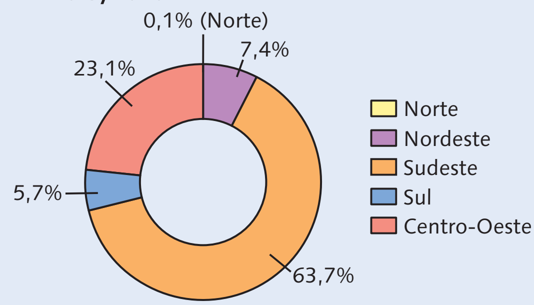
Resposta pessoal.

38. b) Sim, pois as porcentagens indicadas somam mais do que 100% e a área do setor correspondente a 55% está visivelmente menor do que deveria ser.

Você produtor

39. Outro tipo de gráfico bastante utilizado é o de **rosca**. Assim como o de setores, esse tipo de gráfico é usado para representar partes de um todo. De acordo com o gráfico a seguir, escreva algumas questões e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se as respostas estão corretas. Resposta pessoal.

Porcentagem estimada de produção de cana-de-açúcar no Brasil por grandes regiões – 2019/2020



Rafael L. Gaion

Fonte de pesquisa: CONAB. *Acompanhamento da safra brasileira*. Disponível em: <https://www.conab.gov.br/info-agro/safras/cana/boletim-da-safra-de-cana-de-acucar/>. Acesso em: 12 fev. 2020.

Histograma

As frequências absolutas e as relativas de dados agrupados em intervalos de classes podem ser representadas por meio de um tipo de gráfico denominado **histograma**, o qual é composto de retângulos justapostos cujas bases são apoiadas em um eixo horizontal e cujas alturas são proporcionais às frequências.

Observe a seguinte situação:

Em um concurso público realizado pela prefeitura de certo município, 200 candidatos foram submetidos a uma prova escrita. A distribuição de frequências segundo as notas obtidas pelos candidatos está representada na tabela ao lado.

Notas dos candidatos que realizaram a prova do concurso público – 2021

Notas	f	f_r
2,5 ⊢ 3,5	8	4%
3,5 ⊢ 4,5	22	11%
4,5 ⊢ 5,5	35	17,5%
5,5 ⊢ 6,5	41	20,5%
6,5 ⊢ 7,5	40	20%
7,5 ⊢ 8,5	34	17%
8,5 ⊢ 9,5	20	10%
Total	200	100%

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

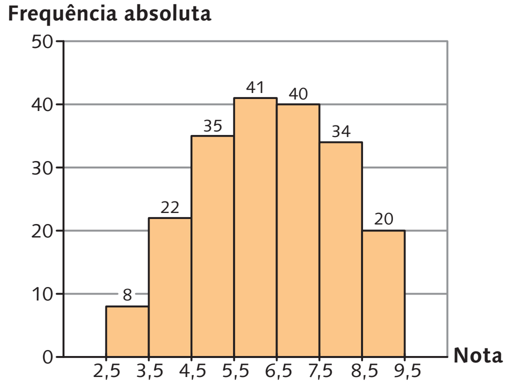
Concurso público é um processo seletivo que tem o objetivo de avaliar as competências de indivíduos que se candidatam a cargos públicos efetivos. As seleções podem ser somente por provas, normalmente objetivas, ou por provas e títulos. No Brasil, a quantidade de vagas de trabalho que exigem concurso público tem aumentado muito devido à grande demanda de mão de obra.


Pessoas realizando uma prova.

lightpoet/Shutterstock.com

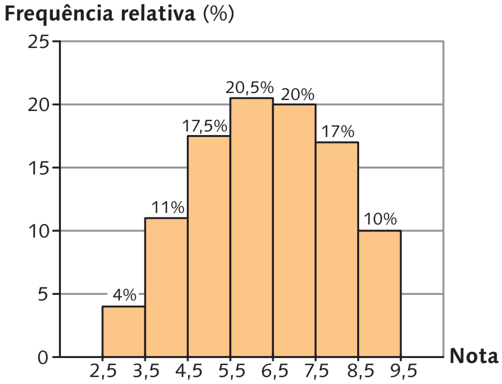
Veja um histograma referente à frequência absoluta e outro referente à frequência relativa.

Notas dos candidatos que realizaram a prova do concurso público – 2021



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Notas dos candidatos que realizaram a prova do concurso público – 2021

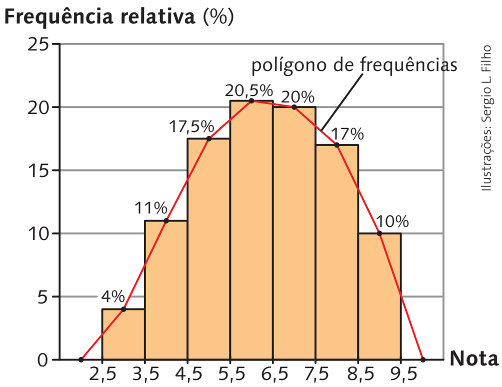


Elaborado pelo autor com dados fictícios.

No gráfico ao lado, está representado o **polígono de frequências** obtido do histograma de frequência relativa visto anteriormente.

Note que o polígono de frequências foi obtido ligando-se, por meio de segmentos de reta, os pontos médios das bases superiores das barras do histograma. A abscissa de cada um desses pontos representa a média do intervalo de classe correspondente. Além disso, note também que foram utilizados pontos equidistantes correspondentes à média de uma classe imediatamente inferior e de uma classe imediatamente superior.

Notas dos candidatos que realizaram a prova do concurso público – 2021



Ilustrações: Sergio L. Filho

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

40. O total de anos de estudo de cada um dos 25 candidatos a um emprego está representado ao lado:

13	7	9	5	5	3	0	2	9	6	3	3	10
2	5	11	3	1	6	10	2	14	10	3	6	

Veja as respostas dos itens **a** e **b** na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

a) Construa uma tabela de frequências agrupando a variável "anos de estudo" em intervalos de classe, de amplitude igual a 4, a partir do menor número de anos de estudo.

b) Construa um histograma para a frequência absoluta e um para a frequência relativa, referentes à tabela construída no item **a**.

c) Quantos candidatos têm oito anos ou mais de estudo? 8 candidatos

d) Que porcentagem dos candidatos tem menos de 12 anos de estudo? 92%

41. A tabela apresenta os dados obtidos em uma pesquisa sobre o ano de publicação dos livros do acervo de certa biblioteca.

a) Construa uma tabela de frequências para os dados da pesquisa contendo f, f_a, f_r e f_{ar}.

b) Construa um histograma e o polígono de frequências referentes à frequência relativa dos dados apresentados na tabela.

Veja a resposta desta tarefa na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Ano de publicação dos livros da biblioteca – 2021

Ano de publicação	Quantidade de livros
1908 ⊢ 1924	978
1924 ⊢ 1940	1 630
1940 ⊢ 1956	2 608
1956 ⊢ 1972	6 194
1972 ⊢ 1988	6 846
1988 ⊢ 2004	14 344
2004 ⊢ 2020	7 561
Total	40 161

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Em grupo

42. Na área de saúde, é utilizada uma medida internacional que permite calcular o Índice de Massa Corporal (IMC) de uma pessoa. Com o índice I, pode-se indicar o grau de obesidade de uma pessoa, que é calculado por meio da expressão $I = \frac{P}{a^2}$, em que P é a massa do indivíduo (kg) e a é a altura (m). Com o resultado obtido, podemos interpretar o IMC de acordo com a tabela ao lado.

A partir do IMC obtido, o profissional pode avaliar cada paciente de acordo com a altura e a massa dele, e tomar decisões, como a realização de outros testes e exames.

Para verificar o IMC dos funcionários, uma empresa realizou uma pesquisa, obtendo os seguintes resultados.

Interpretação do Índice de Massa Corporal (IMC)

Categoria	IMC
Abaixo do peso	Abaixo de 18,5
Peso normal	18,5 a 24,9
Sobrepeso	25,0 a 29,9
Obesidade de grau I	30,0 a 34,9
Obesidade de grau II	35,0 a 39,9
Obesidade de grau III	40,0 e acima

Fonte de pesquisa: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA PARA O ESTUDO DA OBESIDADE E DA SÍNDROME METABÓLICA (Abeso). *Calculadora de IMC*. Disponível em: <https://abeso.org.br/obesidade-e-sindrome-metabolica/calculadora-imc/>. Acesso em: 28 ago. 2020.

b) Sim. Espera-se que os alunos analisem os dados apresentados na tabela do IMC que indica sobrepeso entre 25,0 a 29,9 e, observando os resultados da pesquisa da empresa, concluam que pelo menos 14 pessoas se enquadram nessa classificação.

IMC	Quantidade de pessoas
15 ⊢ 18,5	3
18,5 ⊢ 22	7
22 ⊢ 25,5	10
25,5 ⊢ 29	14
29 ⊢ 32,5	7
32,5 ⊢ 36	6
36 ⊢ 39,5	2

a) Quantas pessoas estão com peso normal? Representem por meio de um intervalo. 7 a 17 pessoas

b) É possível dizer que há pelo menos 14 pessoas com sobrepeso nessa empresa? Justifiquem suas respostas.

c) Com base na pesquisa, podemos afirmar que a categoria em que se enquadra a maior quantidade de pessoas é a com peso normal? Por quê? Não é possível afirmar com certeza.

d) Qual é o IMC de uma pessoa com 1,72 m de altura e 73 kg de massa? Em qual das categorias indicadas na tabela essa pessoa se enquadra? aproximadamente 24,68; peso normal

e) Construam um histograma referente à frequência relativa da variável "IMC". Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Explique aos alunos a diferença entre massa e peso, pois é comum, no dia a dia, o emprego dessas palavras com o mesmo sentido. Diga-lhes que massa é a quantidade de matéria de um corpo, e que peso é a força que depende da gravidade que atrai o corpo para o centro da Terra. Se necessário, peça-lhes que conversem sobre esse assunto com o professor de Física.

Pictograma

A fim de tornar os gráficos mais atraentes, os meios de comunicação, como revistas, jornais, entre outros, costumam ilustrá-los com imagens relacionadas ao contexto do qual as informações fazem parte. Essa forma de representação é denominada **pictograma** ou **gráfico pictórico**.

Nesse tipo de representação, assim como nos gráficos tradicionais, as quantidades ou dimensões das imagens devem ser diretamente proporcionais aos dados apresentados.

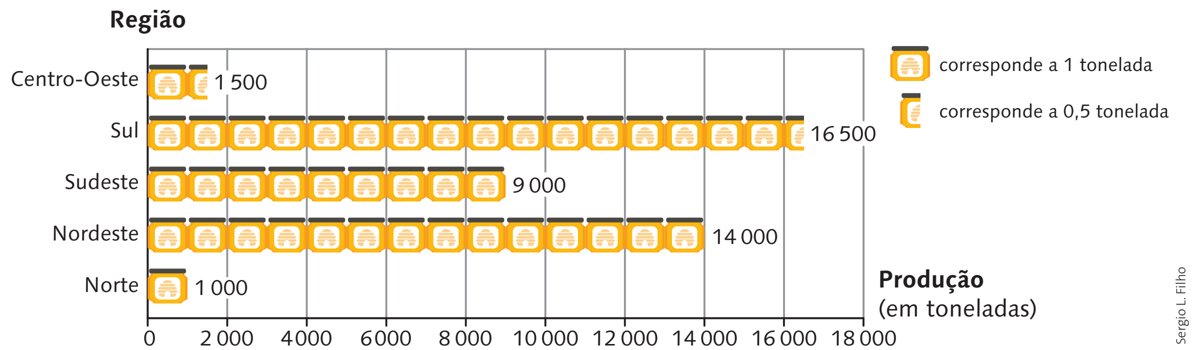
Veja a seguir alguns exemplos de pictograma.

Ao apresentar os pictogramas desta página, realize algumas perguntas a fim de interpretar cada um deles. Verifique também a possibilidade de propor aos alunos que elaborem perguntas, a fim de que, em duplas, eles tentem respondê-las. Depois, considerando as respostas dadas por eles, apresente as explicações e esclarecimentos necessários.

1. Trabalho das abelhas

Em 2018, o Brasil atingiu a produção aproximada de 42 mil toneladas de mel, sendo a região Sul a maior produtora com 16,5 mil toneladas.

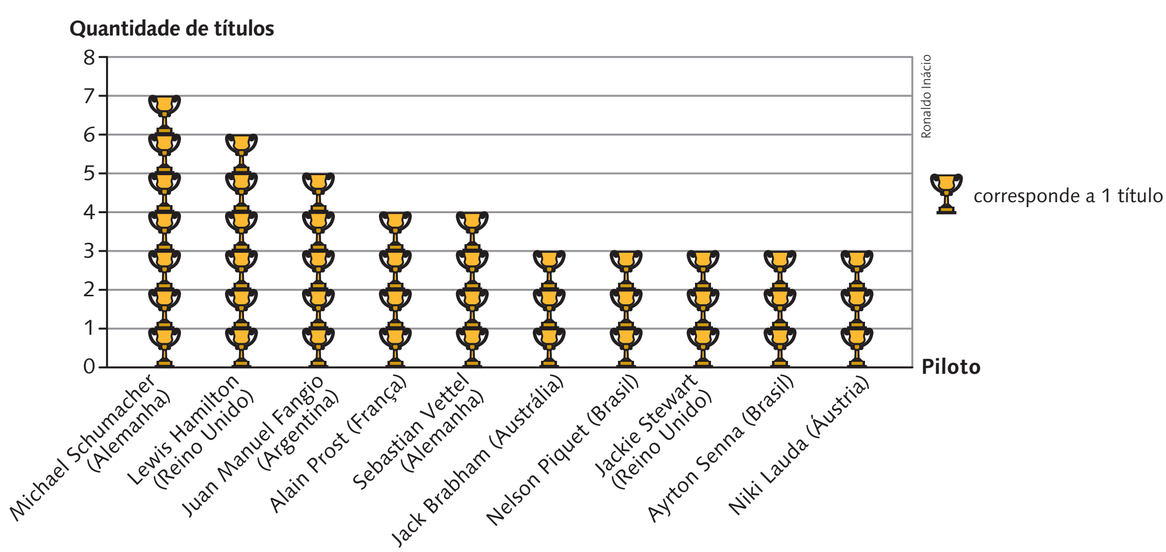
Produção aproximada de mel, em toneladas, no Brasil por grandes regiões – 2018



Fonte de pesquisa: IBGE. *Sidra*. Disponível em: <https://sidra.ibge.gov.br/Tabela/>. Acesso em: 29 jul. 2020.

2. A Fórmula 1 é a principal categoria do automobilismo mundial, iniciada em 1950. O campeonato conta com a elite dos pilotos de todo o planeta com diferentes nacionalidades, e as disputas das corridas ocorrem em circuitos de diversos países.

Os grandes campeões da Fórmula 1 - 1950 a 2019



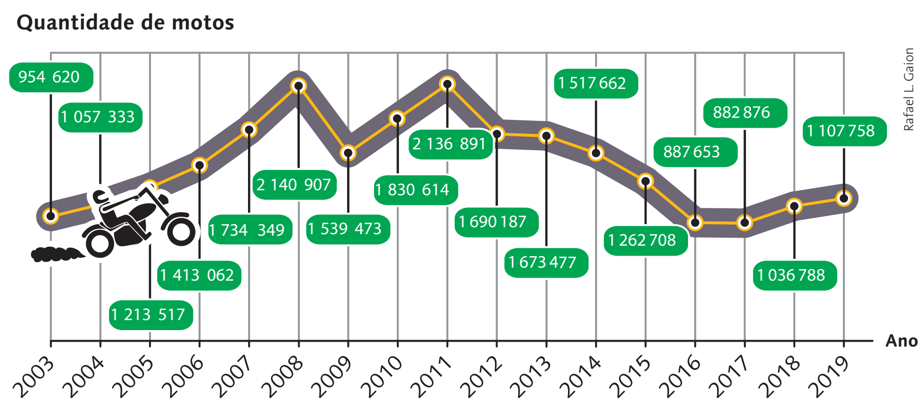
Fonte de pesquisa: *The official home of Formula 1*. Disponível em: <https://www.formula1.com/en/drivers/hall-of-fame.html>. Acesso em: 3 set. 2020.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

43. O brasileiro está comprando menos motos. Reflexo disso é a diminuição na produção de motos no Brasil nos últimos anos.

Produção anual de motos no Brasil – 2003 a 2019



Fonte de pesquisa: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DOS FABRICANTES DE MOTOCICLETAS, CICLOMOTORES, MOTONETAS, BICICLETAS E SIMILARES. *Dados do setor.* Disponível em: <https://www.abraciclo.com.br/site/producao/>. Acesso em: 17 fev. 2020.

Com base no gráfico, responda às perguntas a seguir.

a) Quantas motos foram produzidas no Brasil em 2012? 1 690 187

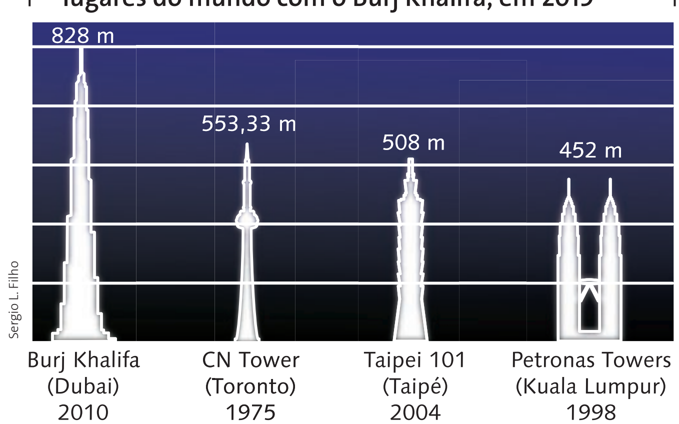
b) De quantas motos foi o aumento da produção brasileira de 2004 a 2014? Que porcentagem esse aumento representa? 460 329 motos; aproximadamente 43,54%

c) Entre os anos apresentados no gráfico, quando o Brasil ultrapassou pela primeira vez a produção de 1,5 milhão de unidades? Entre os anos 2006 e 2007.

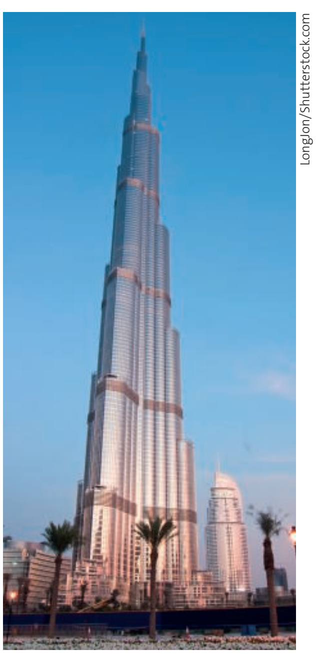
d) Em quais anos a produção de motos no Brasil diminuiu em relação ao ano anterior? 2009, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016 e 2017

44. O Burj Khalifa, inaugurado no dia 4 de janeiro de 2010 e localizado em Dubai (Emirados Árabes Unidos), é, até 2019, a construção mais alta do mundo, com seus 828 m de altura. Essa construção é cercada de engenharia e tecnologia de ponta, ostentando números impressionantes.

Comparação de algumas construções de diferentes lugares do mundo com o Burj Khalifa, em 2019



Fonte de pesquisa: THE SKYSCRAPER CENTER. *Building lists.* Disponível em: <http://www.skyscrapercentre.com/buildings>. Acesso em: 10 jul. 2020.



Burj Khalifa em janeiro de 2010, ano de sua inauguração.

a) Qual é a diferença de altura, em metros, entre o Burj Khalifa e o edifício CN Tower? 274,67 m

b) No edifício Burj Khalifa são gastos cerca de 946 mil litros de água por dia, o que equivale a 157 mil descargas na privada. Qual é a sua opinião em relação ao impacto ambiental causado? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos reflitam que o consumo excessivo de água contribui para o esgotamento dos recursos hídricos.

c) Você considera a construção do Burj Khalifa um grande feito do homem? Em sua opinião, há possibilidades de construir um edifício mais alto do que ele? Justifique sua resposta. sim; Resposta pessoal. Espera-se que os alunos reflitam sobre a existência de recursos tecnológicos para esse tipo de construção.

Box plot

O *box plot* ou diagrama de caixa é um gráfico útil para comparação de distribuições. Ele é formado por um retângulo e uma haste. Esse retângulo é demarcado com os valores do quartil inferior (Q_1), do quartil superior (Q_3) e da mediana $(Md$ ou $Q_2)$.

O comprimento da haste aumenta proporcionalmente com os limites superior e inferior, ou seja, por meio da haste podemos ter ideia da distorção dos dados. Se o gráfico for simétrico, significa que os dados provavelmente também serão relativamente simétricos.

Além disso, devemos considerar os *outliers* ou valores atípicos, que são os pontos com valores discrepantes do conjunto de valores. Para determinar esse valor ou até mesmo para determinar se existe esse valor, deve-se traçar a haste, a partir do retângulo, até o ponto mais remoto que não exceda o limite superior (L_s) ou limite inferior (L_i).

- L_s será o **menor** valor entre $\begin{cases} \bullet \text{ maior valor dos dados} \\ \bullet\ Q_3 + 1{,}5 \cdot A_i \end{cases}$
- L_i será o **maior** valor entre $\begin{cases} \bullet \text{ menor valor dos dados} \\ \bullet\ Q_1 - 1{,}5 \cdot A_i \end{cases}$

Observação
Chamamos amplitude interquartílica (A_i) os 50% dos dados que estão no centro da distribuição, ou seja, $A_i = Q_3 - Q_1$.

Se achar conveniente, realize na lousa os cálculos para obter os quartis Q_1, Q_2 (ou *Md*) e Q_3, assunto estudado nas páginas 113 a 115.

Exemplo

Ao lado estão os pontos que 30 jogadores de basquetebol fizeram nos jogos de um campeonato escolar. Veja a seguir a representação dessa pontuação em um *box plot*.

1	1	2	2	2
3	3	5	5	5
7	9	10	10	10
10	11	11	15	15
16	16	18	18	18
18	20	21	26	40

Para esse conjunto de valores, temos:

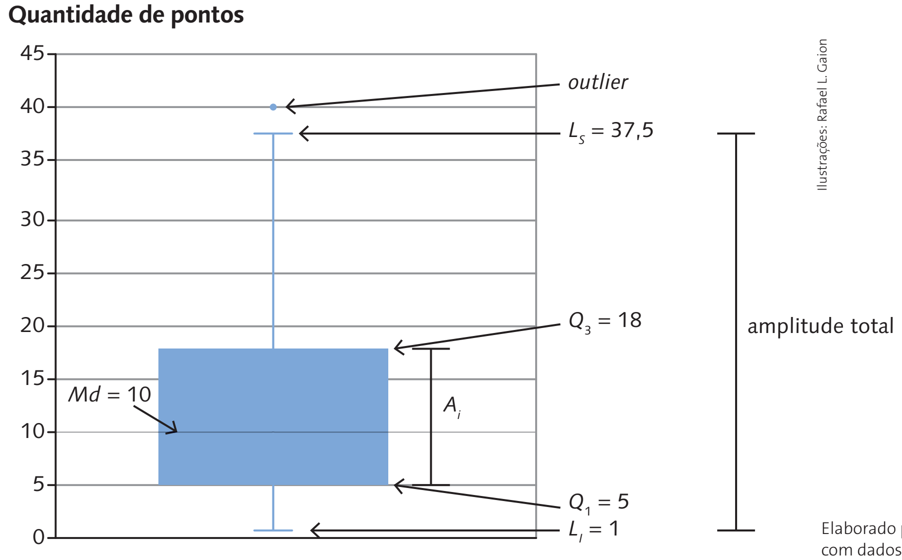
$$Md = 10,\ Q_1 = 5,\ Q_3 = 18$$

Com esses valores, é possível esboçar o retângulo. E em seguida, devem ser determinados os limites superior e inferior. Para isso, calcula-se A_i, ou seja, $A_i = 18 - 5 = 13$.

L_s: $\begin{cases} \bullet \text{ maior valor dos dados: } 40 \\ \bullet\ Q_3 + 1{,}5 \cdot A_i = 18 + 1{,}5 \cdot 13 = 37{,}5 \end{cases}$, logo $L_s = 37{,}5$, pois é o menor valor entre 40 e 37,5.

L_i: $\begin{cases} \bullet \text{ menor valor dos dados: } 1 \\ \bullet\ Q_1 - 1{,}5 \cdot A_i = 5 - 1{,}5 \cdot 13 = -14{,}5 \end{cases}$, logo $L_i = 1$, pois é o maior valor entre 1 e −14,5.

Pontos dos jogadores de basquetebol no campeonato escolar – 2021



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Observação
Observando esse gráfico, podemos concluir, por exemplo, que 25% dos jogadores fizeram 5 pontos ou menos; 25% fizeram 18 pontos ou mais; metade deles fez entre 5 e 18 pontos.

Ramo e folhas

O diagrama de ramo e folhas é útil para representar a distribuição de frequências de uma variável quantitativa. Uma das vantagens dele é a que todos os dados originais são apresentados.

Geralmente, no diagrama de ramo e folhas, a ordem escolhida fica em evidência, separada por um traço. O lado da ordem em evidência é chamado **ramo** e o outro, **folhas**. Para não haver confusão, o diagrama é acompanhado de uma legenda, indicando o que significa o ramo e as folhas.

Exemplo

Um zoológico está disponibilizando alguns dados estatísticos sobre os animais que ali vivem. Os valores abaixo são as idades dos cágados que vivem nesse zoológico.

4 8 9 10 11 11 17 18 19 20 21 27 33 35 41 44 56 72

Observe o diagrama de ramo e folhas composto com os dados citados acima.

Idade dos cágados de um zoológico em 2021

Ramo	Folhas
0	4 8 9
1	0 1 1 7 8 9
2	0 1 7
3	3 5
4	1 4
5	6
6	
7	2

Legenda: 4|1 significa 41 anos

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Observação
Nesse exemplo, colocamos as dezenas em "evidência", separando-as das unidades por um traço vertical. Analisando esse diagrama, podemos concluir, por exemplo, que três cágados têm menos do que 10 anos; nenhum cágado tem entre 60 e 69 anos; 50% dos cágados têm menos do que 20 anos.

Um ramo com muitas folhas significa maior incidência daquele ramo.

Além do diagrama de ramo e folhas apresentado no exemplo anterior, podemos utilizá-lo para comparar dois conjuntos de valores. Nessa representação, as folhas para o primeiro conjunto de valores fica de um lado e as folhas para o segundo conjunto de valores fica do outro lado.

No exemplo abaixo está representado um diagrama de ramo e folhas com a produção de tomates, em toneladas, vendida pelos produtores de verdura de certo município.

Tomate vendido pelos produtores de certo município em 2019 e 2020

2019		2020
2 1	0	2 3
	1	0 0 1
	2	1 2
	3	
3 1 1 0	4	
	5	5 6 8
	6	0 1 2 2 2 2 3
5 5 5 5 2 0	7	
	8	
4 4 3 3 2 1 1 0 8 0	9	
7 7 7 7	10	
	11	3 3 3 3 8
3 2	12	0 3 5

Legenda: 2|12|0 significa 122 toneladas em 2019 e 120 toneladas em 2020.

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Observação
Analisando esse diagrama de ramo e folhas, podemos concluir, por exemplo, que a menor produção em 2019 foi 10 toneladas e em 2020, 20 toneladas.

Diga aos alunos que, ao comparar dois conjuntos de valores com quantidades muito diferentes de elementos, não é adequado o uso desse diagrama.

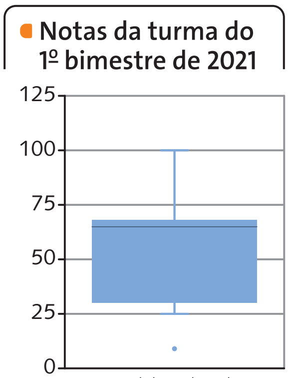
45. Os valores apresentados no quadro indicam as notas obtidas em Matemática por uma turma do Ensino Médio no 1º bimestre de 2021.

55	79	48	98	85	80	75	48	62	60
100	72	91	09	60	59	78	64	60	85

Qual dos *box plots* representa os dados apresentados? c

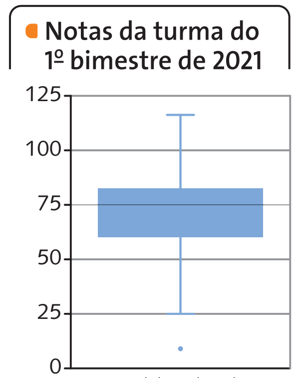
Verifique se os alunos perceberam que os itens **b** e **c** diferem-se na representação do valor de *Md* ou Q_2.

a)



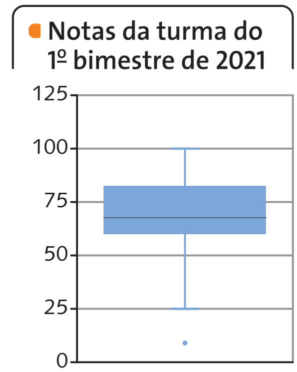
Elaborado pelo autor com dados fictícios.

b)



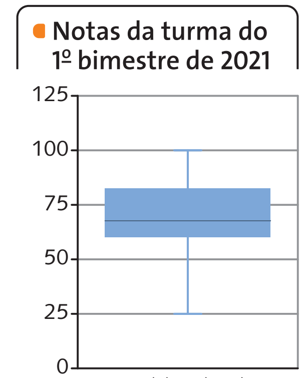
Elaborado pelo autor com dados fictícios.

c)



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

d)



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Ilustrações: Rafael L. Gaion

46. Observe o diagrama de ramo e folhas ao lado.

a) Qual foi a maior pontuação desse campeonato? 90 pontos

b) Quantas equipes tiveram mais do que 50 pontos? 10 equipes

Pontuações das 20 equipes que participaram da Série A do Campeonato Brasileiro de 2019

2	0				
3	2	2	6	9	
4	3	6	8	9	9
5	2	3	6	7	
6	3	4	5		
7	4	4			
8					
9	0				

Legenda:
2|0 significa 20 pontos

Fonte de pesquisa: CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE FUTEBOL. *Futebol brasileiro*. Disponível em: <https://www.cbf.com.br/futebol-brasileiro/competicoes/campeonato-brasileiro-serie-a/2019>. Acesso em: 26 fev. 2020.

47. b) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que sim, pois os dados são dispostos lado a lado, sendo possível comparar visualmente as quantidades e os valores.

47. a) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos compreendam que, conforme a legenda, os valores à direita representam o algarismo da unidade para a quantidade de peças defeituosas em um lote produzido na fábrica **A**, e os valores à esquerda representam o algarismo da unidade para a quantidade de peças defeituosas em um lote produzido na fábrica **B**.

47. Uma empresa produz certo tipo de peça para automóveis. As peças são produzidas em lotes de 10 000 unidades e cada lote é produzido inteiramente em uma das fábricas da empresa, a fábrica **A** ou a fábrica **B**. Após a produção, todas as peças do lote são testadas e as defeituosas são descartadas.

Com o objetivo de compreender as causas dos defeitos e reduzir a quantidade de peças descartadas, foram registradas as quantidades de peças defeituosas dos últimos 15 lotes produzidos em cada uma das fábricas, e os resultados obtidos foram representados no diagrama de ramo e folhas ao lado.

a) Com suas palavras, faça uma interpretação do diagrama com base na legenda inserida.

b) Em sua opinião, é possível observar se as fábricas obtiveram um desempenho parecido entre elas com relação às peças defeituosas? Justifique sua resposta.

c) Os dados do diagrama de ramo e folhas poderiam ser representados por meio de um *box plot* para cada fábrica. Em sua opinião, qual das duas representações (ramo e folhas ou *box plot*) possui uma leitura mais clara e objetiva?

Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que é o *box plot*, pois representa os dados visualmente, sem a necessidade de apresentar os números diretamente, facilitando a comparação dos dados.

Legenda:
2|34|1 significa 342 peças defeituosas na fábrica **A** e 341 peças defeituosas na fábrica **B**.

Quantidades de peças defeituosas dos últimos 15 lotes produzidos em 2021

Fábrica A						Fábrica B				
					28	0				
			4	2	29	5				
				5	30	2				
		7	4	2	31					
				6	32	3	4			
	7	6	5	1	33	0	2	7	8	
9	5	3	3	2	34	1	1	1	2	3
					35	0	3			
				2	36	1	7			

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Explorando problemas

Uma empresa realiza dois tipos de exames de diagnóstico, simples e complexos, com preços que podem variar entre R$ 10,00 e R$ 100,00. Em um determinado dia, os lucros dessa empresa caíram de maneira considerável e, em princípio, sem nenhum motivo aparente. Uma investigação foi iniciada a partir dos dados registrados durante o período de referência.

Os dados que foram registrados estão organizados em um diagrama de ramo e folhas.

Preços pagos por exames simples e complexos

Preço pago por um exame simples (R$) | Preço pago por um exame complexo (R$)

9	8	8	7	1	0	0	0		
	2	1	1	2					
	3	3	2	3					
	1	0	0	4					
		1	0	5	9				
				6	0	1			
				7	2	2	2	4	
				8	0	1	1	2	3
				9	9	9			

Legenda:
0|5|9 significa R$ 59,00 pago por um exame complexo e R$ 50,00 pago por um exame simples.

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Com a ajuda de um *box plot*, faça uma análise desses dados e observe a existência de possíveis dados atípicos.

Compreender

1. Há palavras ou notações do enunciado cujos significados você desconhece? Se sim, pesquise-as. Resposta pessoal.

2. O que se pede no problema? b

a) Investigar todos os funcionários da empresa e observar possíveis atos de corrupção.
b) Investigar os dados registrados pela empresa durante o período de referência, a partir da construção de um *box plot* e observar possíveis dados atípicos.
c) Construir diagramas de ramo e folhas a partir dos dados registrados pela empresa.
d) Apresentar os dados em diagramas e apontar os responsáveis pelo prejuízo.

3. Quais informações são importantes para a compreensão do problema? c; d

a) O valor dos lucros da empresa.
b) O valor do preço máximo de cada exame.
c) Os preços e os tipos de exames realizados no período de referência.
d) O diagrama de ramo e folhas que apresenta os dados registrados.

Planejar

4. Quais conceitos matemáticos são requisitos para compreensão do problema? a; d

a) Diagrama de ramo e folhas e *box plot*.
b) Função quadrática.
c) Juro simples e juro composto.
d) Mediana e quartis.

5. Determine se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Justifique as sentenças falsas.

a) Os possíveis dados atípicos procurados nos dados referem-se aos *outliers*. verdadeira
b) A existência de dados atípicos vai apontar as causas da queda do lucro. Falsa, pois a existência de dados atípicos pode indicar que há valores discrepantes, que inclusive podem ser provenientes de erros de tabulação.
c) Os dados organizados em *box plot* facilitam a observação de valores atípicos. verdadeira
d) Os possíveis dados atípicos identificados são preços discrepantes pagos por exames simples ou complexos. verdadeira
e) Caso sejam identificados *outliers*, esses valores devem ser investigados com mais detalhes a fim de obter os motivos desses dados serem discrepantes dos demais. verdadeira

Executar

6. Vamos construir *o box plot* associado aos dados apresentados no diagrama de ramo e folhas. Organizamos os valores em ordem crescente por tipo de exame:

Preço pago por um exame simples							
17	18	18	19	21	21	22	32
33	33	40	40	41	50	51	

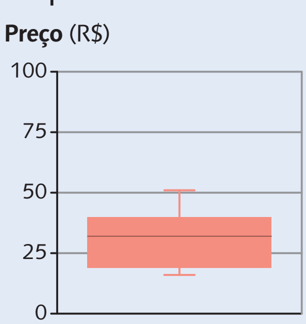
Preço pago por um exame complexo								
10	10	10	59	60	61	72	72	72
74	80	81	81	82	83	99	99	

Calculando os quartis, a mediana, a amplitude interquartílica e os limites inferior e superior, referentes aos conjuntos de dados dos exames complexos e simples, temos:

	Exames simples	Exames complexos
Posição do primeiro quartil	$I_{25} = 15 \cdot \dfrac{25}{100} = 3{,}75 \rightarrow 4^{a}$	$I_{25} = 17 \cdot \dfrac{25}{100} = 4{,}25 \rightarrow 5^{a}$
Posição do terceiro quartil	$I_{75} = 15 \cdot \dfrac{75}{100} = 11{,}25 \rightarrow 12^{a}$	$I_{75} = 17 \cdot \dfrac{75}{100} = 12{,}75 \rightarrow 13^{a}$
Mediana	$Md = 32$	$Md = 72$
Primeiro quartil	$Q_1 = 19$	$Q_1 = 60$
Terceiro quartil	$Q_3 = 40$	$Q_3 = 81$
Amplitude interquartílica	$A_i = 21$	$A_i = 21$
Limite superior	$L_S = 51$	$L_S = 99$
Limite inferior	$L_I = 17$	$L_I = 49{,}5$

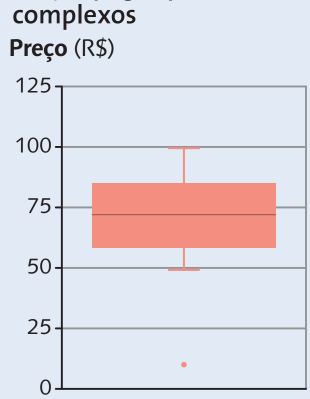
Com as informações do quadro acima, é possível construir os *box plots*.

Preços pagos por exames simples



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Preços pagos por exames complexos



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Observação
Esses valores discrepantes (muito abaixo dos demais), devem ser investigados com mais detalhes, pois podem indicar, por exemplo, erros de tabulação, ao registrar equivocadamente o valor de R$ 10,00 no lugar de R$ 100,00, que seria um preço mais adequado para um exame complexo.

Portanto, há três *outliers* entre os valores dos preços pagos por exames complexos, no caso, R$ 10,00.

Verificar

7. Verificar se os *outliers* identificados, ou seja, o valor 10, são de fato o ponto mais remoto que não excede o limite superior nem o limite inferior.

- $L_S = 99 > \underbrace{10}_{outlier}$
- $L_I = 17 > \underbrace{10}_{outlier}$

Portanto, os 3 valores identificados não excedem os limites superior ou inferior.

6 Medidas de dispersão

Estudamos anteriormente as medidas de tendência central. No entanto, há situações em que elas são insuficientes para caracterizar adequadamente um conjunto de dados. Quando isso ocorre, utilizam-se outros parâmetros, chamados **medidas de dispersão**.

As medidas de dispersão indicam o quão próximos ou afastados os valores de um conjunto de valores estão em relação à média.

Veja como podemos utilizar a média da massa de quatro passageiros de dois carros.

Carro 1

65 kg	63 kg
70 kg	72 kg

$$\overline{x} = \frac{65 + 70 + 63 + 72}{4} = 67{,}5 \text{ kg}$$

Carro 2

34 kg	110 kg
85 kg	41 kg

$$\overline{x} = \frac{34 + 85 + 110 + 41}{4} = 67{,}5 \text{ kg}$$

Nos dois exemplos as médias são iguais. No entanto, os valores estão mais próximos da média no carro **1**, enquanto no carro **2** estão mais distantes. Assim, verificamos que no carro **1** os valores estão menos dispersos em relação à média do que no carro **2**.

Neste tópico, vamos estudar as medidas de dispersão que têm como ponto de referência a média aritmética do conjunto de dados. Essas medidas são: **amplitude**, **desvio médio**, **variância** e **desvio padrão**.

Observação
Vale lembrar que a amplitude já foi mencionada anteriormente nesse capítulo, que é a medida de dispersão mais simples. A amplitude A de um conjunto de valores é a diferença entre o maior (x_{maior}) e o menor valor (x_{menor}), ou seja:
$A = x_{\text{maior}} - x_{\text{menor}}$

Desvio médio (D_m)

No quadro, está indicado os pontos feitos por um time feminino de basquete em cada jogo da fase final do campeonato.

84	81	76
73	65	59

Calculando a média aritmética desses pontos, temos:

$$\overline{x} = \frac{84 + 73 + 81 + 65 + 76 + 59}{6} = \frac{438}{6} = 73$$

Agora, vamos verificar o quanto cada pontuação está afastada da média aritmética. Para isso, calculamos a diferença entre a pontuação e a média:

- $x_1 - \overline{x} = 84 - 73 = 11$
- $x_2 - \overline{x} = 73 - 73 = 0$
- $x_3 - \overline{x} = 81 - 73 = 8$
- $x_4 - \overline{x} = 65 - 73 = -8$
- $x_5 - \overline{x} = 76 - 73 = 3$
- $x_6 - \overline{x} = 59 - 73 = -14$

Os valores obtidos são chamados **desvios para a média** ou **desvios**.

Calculando a média aritmética dos valores absolutos dos desvios, temos:

$$\frac{|11| + |0| + |8| + |-8| + |3| + |-14|}{6} = \frac{44}{6} \simeq 7{,}3 \to 7{,}3 \text{ pontos}$$

Esse resultado é chamado **desvio médio absoluto**, ou simplesmente **desvio médio**, o qual indicaremos por D_m. Portanto, o desvio médio de cada partida foi 7,3 pontos.

Observação
A indicação $|x|$ representa o **módulo** ou **valor absoluto** de x, que pode ser definido da seguinte maneira:
$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

O **desvio médio** (D_m) de um conjunto de valores é a média aritmética dos valores absolutos dos desvios para a média:

$$D_m = \frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + |x_3 - \overline{x}| + \ldots + |x_n - \overline{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n}$$

Variância (σ^2)

Dado um conjunto de dados qualquer, a soma dos desvios para a média sempre será zero, pois os valores positivos e negativos se anulam. Tomando como exemplo a pontuação do time de basquete citado anteriormente, temos:

$$11 + 0 + 8 + (-8) + 3 + (-14) = 0$$

Para algumas medidas de dispersão em torno da média, utiliza-se a soma dos quadrados dos desvios, pois, como o quadrado de um número negativo é sempre positivo, a soma dos quadrados é positiva ou nula. Uma das medidas de dispersão que utilizam a soma dos quadrados dos desvios é a **variância**, a qual indicaremos por σ^2.

A **variância** (σ^2) de um conjunto de valores é a média aritmética dos quadrados dos desvios para a média, isto é:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Exemplo

No quadro, está representado o consumo diário de gasolina, em litros, dos carros de três taxistas em um período de cinco dias:

	segunda-feira	terça-feira	quarta-feira	quinta-feira	sexta-feira
Taxista A	12	8	24	11	19
Taxista B	15	17	9	10	41
Taxista C	27	14	30	14	6

Vamos calcular a variância para os carros dos três taxistas:

- Inicialmente, calculamos a média aritmética de consumo por dia para os três carros.
  - › $\overline{x}_A = \frac{12 + 8 + 24 + 11 + 19}{5} = \frac{74}{5} = 14,8$
  - › $\overline{x}_B = \frac{15 + 17 + 9 + 10 + 41}{5} = \frac{92}{5} = 18,4$
  - › $\overline{x}_C = \frac{27 + 14 + 30 + 14 + 6}{5} = \frac{91}{5} = 18,2$
- Agora, calculamos a variância para verificar qual carro teve maior regularidade nos cinco dias.
  - › $\sigma_A^2 = \frac{(12 - 14,8)^2 + (8 - 14,8)^2 + (24 - 14,8)^2 + (11 - 14,8)^2 + (19 - 14,8)^2}{5} = 34,16$
  - › $\sigma_B^2 = \frac{(15 - 18,4)^2 + (17 - 18,4)^2 + (9 - 18,4)^2 + (10 - 18,4)^2 + (41 - 18,4)^2}{5} = 136,64$
  - › $\sigma_C^2 = \frac{(27 - 18,2)^2 + (14 - 18,2)^2 + (30 - 18,2)^2 + (14 - 18,2)^2 + (6 - 18,2)^2}{5} = 80,16$

Observando as variâncias, notamos que o carro **B** tem maior dispersão em relação aos demais, e o carro **A** tem menor. Note também que, apesar de as médias aritméticas dos carros **B** e **C** serem próximas, a dispersão referente ao carro **B** é muito maior do que a referente ao carro **C**.

A variância não tem a mesma unidade de medida dos valores da variável, pois os desvios são elevados ao quadrado. Para manter a unidade de medida dos valores, utilizamos outra medida, chamada desvio padrão, a qual estudaremos a seguir.

Desvio padrão (σ)

O **desvio padrão** (σ) de um conjunto de valores é a raiz quadrada da variância: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}$

Essa medida permite interpretar os dados na mesma unidade dos valores da variável.

Utilizando o exemplo dos carros dos taxistas apresentado anteriormente, temos:

- carro **A**: $\sigma_A = \sqrt{34{,}16} \simeq 5{,}84 \rightarrow 5{,}84$ L
- carro **B**: $\sigma_B = \sqrt{136{,}64} \simeq 11{,}69 \rightarrow 11{,}69$ L
- carro **C**: $\sigma_C = \sqrt{80{,}16} \simeq 8{,}95 \rightarrow 8{,}95$ L

O carro **A** teve o consumo mais regular em torno da média, pois seu desvio padrão é o menor.

Observação
Quanto mais próximo de zero é o desvio padrão, mais regular é a distribuição dos valores da variável em torno da média.

Problemas e exercícios resolvidos

R7. A tabela apresenta a quantidade de questões acertadas por 36 candidatos na prova de legislação do exame do Departamento de Trânsito (Detran) para a obtenção da Carteira Nacional de Habilitação (CNH).

Em relação à quantidade de questões certas, calcule:

a) o desvio médio (D_m)

b) a variância (σ^2)

c) o desvio padrão (σ)

Questões acertadas em uma prova de legislação – 2021

Quantidade de questões (x_i)	Frequência (f)
14	9
15	8
16	5
17	7
18	4
19	1
20	2

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Resolução

Inicialmente, calculamos $\overline{x}$ e, em seguida, a diferença $x_i - \overline{x}$ (desvio), para todo x_i.

$$\overline{x} = \frac{9 \cdot 14 + 8 \cdot 15 + 5 \cdot 16 + 7 \cdot 17 + 4 \cdot 18 + 1 \cdot 19 + 2 \cdot 20}{36} = \frac{576}{36} = 16 \rightarrow 16 \text{ questões}$$

Assim, temos:

f	9	8	5	7	4	1	2
x_i	14	15	16	17	18	19	20
$x_i - \overline{x}$	−2	−1	0	1	2	3	4

Como os dados estão agrupados por frequências, consideramos para o cálculo das medidas de dispersão a frequência absoluta referente a cada valor atribuído à variável.

a) $D_m = \dfrac{9 \cdot |-2| + 8 \cdot |-1| + 5 \cdot |0| + 7 \cdot |1| + 4 \cdot |2| + 1 \cdot |3| + 2 \cdot |4|}{36} =$

$= \dfrac{18 + 8 + 0 + 7 + 8 + 3 + 8}{36} = \dfrac{52}{36} \simeq 1{,}44 \rightarrow 1{,}44$ questão

b) $\sigma^2 = \dfrac{9 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot 0^2 + 7 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4^2}{36} =$

$= \dfrac{36 + 8 + 0 + 7 + 16 + 9 + 32}{36} = \dfrac{108}{36} = 3$

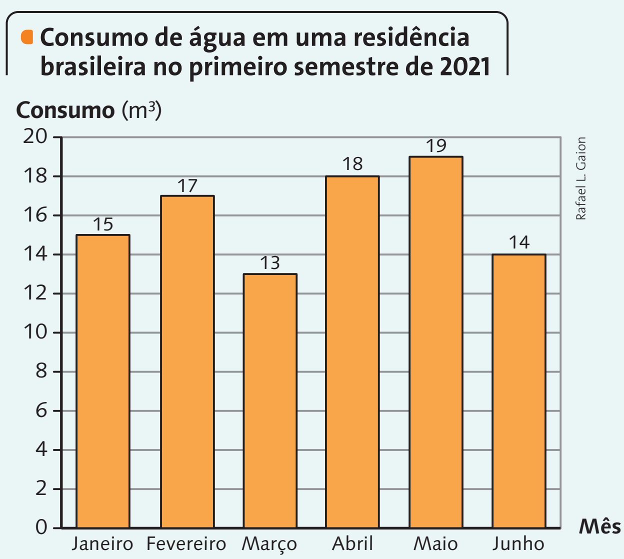
c) $\sigma = \sqrt{3} \simeq 1{,}73 \rightarrow 1{,}73$ questão

Observação
$D_m = 1{,}44$ significa que o número de questões acertadas é, em média, 1,44 questão acima ou abaixo da média aritmética.

R8. O consumo de água tem sido alvo de muitos debates, e seu uso de maneira racional é um desafio para os pesquisadores dessa área. O consumo pode variar de um local para outro por vários motivos, seja em virtude do clima, das regiões, dos hábitos de higiene e também da evolução tecnológica dos aparelhos **hidrossanitários**. Veja no gráfico o consumo de água em certa residência brasileira no primeiro semestre de 2021.

Hidrossanitário: relativo ao fornecimento de água e à coleta de esgoto de um imóvel

Uma das atitudes para consumo consciente de água é abrir a torneira somente após ensaboar as mãos.



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Se considerarmos o 1º e o 2º trimestres, determine em qual deles o consumo de água foi mais regular.

Resolução

1º trimestre

Média aritmética: $\overline{x} = \dfrac{15 + 17 + 13}{3} = \dfrac{45}{3} = 15 \rightarrow 15\ m^3$

Variância: $\sigma^2 = \dfrac{(15 - 15)^2 + (17 - 15)^2 + (13 - 15)^2}{3} = \dfrac{8}{3} \simeq 2{,}67$

Desvio padrão: $\sigma = \sqrt{2{,}67} \simeq 1{,}63 \rightarrow 1{,}63\ m^3$

2º trimestre

Média aritmética: $\overline{x} = \dfrac{18 + 19 + 14}{3} = \dfrac{51}{3} = 17 \rightarrow 17\ m^3$

Variância: $\sigma^2 = \dfrac{(18 - 17)^2 + (19 - 17)^2 + (14 - 17)^2}{3} = \dfrac{14}{3} \simeq 4{,}67$

Desvio padrão: $\sigma = \sqrt{4{,}67} \simeq 2{,}16 \rightarrow 2{,}16\ m^3$

Portanto, no 1º trimestre, o consumo de água foi mais regular do que no 2º trimestre, pois o desvio padrão calculado para o 1º trimestre é menor $(1{,}63 < 2{,}16)$.

48. Em um campeonato escolar de dardo, vence o competidor que obtiver a maior soma de pontos em cinco arremessos. Em caso de empate na pontuação final, vence o competidor mais regular, ou seja, o que obtiver o menor desvio padrão.

No quadro, está apresentada a pontuação obtida em cada arremesso pelos competidores mais bem pontuados.

	Arremesso	1º	2º	3º	4º	5º
Pontuação	Competidor A	10	70	30	30	60
	Competidor B	80	20	60	10	30

Com base nas informações, responda.

a) Qual é o pontuação final obtida pelos competidores **A** e **B**? competidor **A**: 200 pontos competidor **B**: 200 pontos

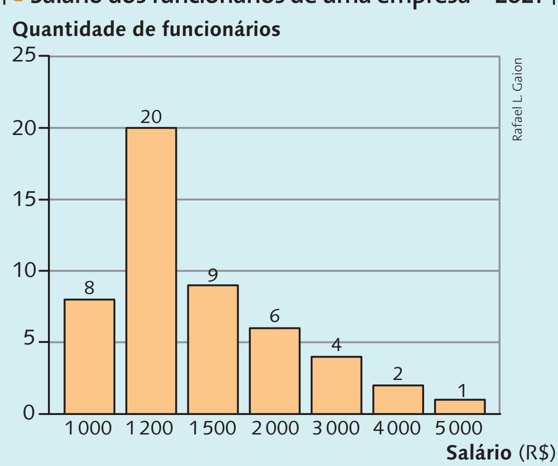
b) Qual é o desvio padrão de cada um desses competidores? competidor **A**: $\sigma_A = 22$ pontos competidor **B**: $\sigma_B = 26$ pontos

c) Qual dos competidores venceu o campeonato? Justifique sua resposta. Competidor **A**, pois ainda que ele tenha empatado com o competidor **B** na quantidade de pontos, o desvio padrão de sua pontuação foi menor do que o do competidor **B**.

Desafio

49. Observe o gráfico.

Salário dos funcionários de uma empresa – 2021



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

a) Quantos funcionários têm o salário acima da média? Que porcentagem esse número representa do total de funcionários? 13 funcionários; aproximadamente 26%

b) Quantos funcionários têm o valor de seu salário pertencente ao intervalo $\left[\bar{x} - \frac{\sigma}{2}, \bar{x} + \frac{\sigma}{2}\right]$? 15 funcionários

Você produtor

50. Um técnico de segurança do trabalho, para avaliar a temperatura ambiente do setor de produção de uma fábrica, realizou oito medições, obtendo os valores, em graus Celsius (°C), conforme segue:

28	33	32	29	32	34	32	28

Com essas informações, elabore sentenças verdadeiras e falsas envolvendo o conteúdo estudado até o momento e entregue para um colega resolver. Em seguida, verifiquem se as respostas estão corretas.

Resposta pessoal. Possível resposta: a temperatura média desse setor é 31 °C (verdadeira); A mediana desse setor é 31 °C (falsa); O desvio padrão desse setor é aproximadamente 2,2 °C (verdadeira).

Em grupo

51. (UFPR) Considere as seguintes medidas descritivas das notas finais dos alunos de três turmas:

Turma	Número de alunos	Média	Desvio padrão
A	15	6, 0	1, 31
B	15	6, 0	3, 51
C	14	6, 0	2, 61

Com base nesses dados, considere as afirmativas: d

1. Apesar de as médias serem iguais nas três turmas, as notas dos alunos da turma **B** foram as que se apresentaram mais heterogêneas.
2. As três turmas tiveram a mesma média, mas com variação diferente.
3. As notas da turma **A** se apresentaram mais dispersas em torno da média.

a) Somente a afirmativa 3 é verdadeira.
b) Somente a afirmativa 2 é verdadeira.
c) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
e) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.

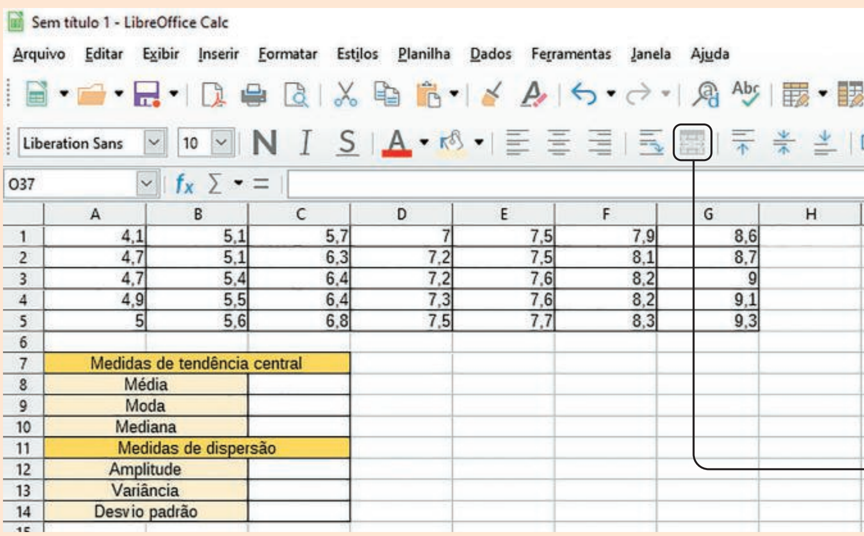
49. Caso os alunos tenham dificuldade na realização da tarefa, oriente-os, primeiramente, a resolver os itens a seguir: a) Calcule a média, a mediana e a moda dos salários. b) Calcule o desvio médio, a variância e o desvio padrão dos salários.

Acesso digital

Utilizando planilhas eletrônicas para calcular medidas de tendência central e de dispersão

Anteriormente, utilizamos o Calc para construir tabelas de frequência e alguns tipos de gráficos. Agora, vamos trabalhar com um conjunto de valores e obter as medidas de tendência central e de dispersão. Esses cálculos podem ser feitos com conjuntos de valores de diferentes tamanhos, variando as células utilizadas nas fórmulas.

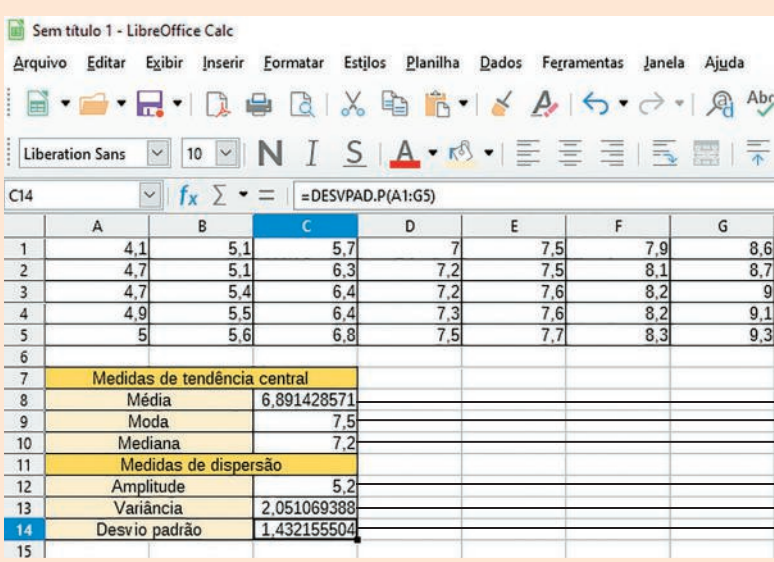
Veja a seguir uma maneira de obter esses valores utilizando o Calc.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	4,1	5,1	5,7	7	7,5	7,9	8,6	
2	4,7	5,1	6,3	7,2	7,5	8,1	8,7	
3	4,7	5,4	6,4	7,2	7,6	8,2	9	
4	4,9	5,5	6,4	7,3	7,6	8,2	9,1	
5	5	5,6	6,8	7,5	7,7	8,3	9,3	
6								
7	Medidas de tendência central							
8	Média							
9	Moda							
10	Mediana							
11	Medidas de dispersão							
12	Amplitude							
13	Variância							
14	Desvio padrão							

1º Copie na planilha o conjunto de valores apresentado na página **110**, referente às notas de 35 alunos em uma prova. Em seguida, organize em um quadro as células referentes às medidas de tendência central e de dispersão, como indicado na imagem.

Podemos unir duas células clicando no botão **Mesclar e centralizar células**. Assim, é possível facilitar a visualização e compreensão dos dados.



	A	B	C	D	E	F	G
1	4,1	5,1	5,7	7	7,5	7,9	8,6
2	4,7	5,1	6,3	7,2	7,5	8,1	8,7
3	4,7	5,4	6,4	7,2	7,6	8,2	9
4	4,9	5,5	6,4	7,3	7,6	8,2	9,1
5	5	5,6	6,8	7,5	7,7	8,3	9,3
6							
7	Medidas de tendência central						
8	Média		6,891428571				
9	Moda		7,5				
10	Mediana		7,2				
11	Medidas de dispersão						
12	Amplitude		5,2				
13	Variância		2,051069388				
14	Desvio padrão		1,432155504				
15							

O *software* não diferencia letras maiúsculas das minúsculas. No entanto, os caracteres com e sem acento são considerados diferentes.

2º Digite **=média(A1:G5)** na célula **C8** para obter a média dos valores. De maneira análoga, digite **=modo(A1:G5)** na célula **C9** para obter a moda e **=med(A1:G5)** na célula **C10** para obter a mediana dos valores.

3º Digite em **C12** a fórmula **=máximo(A1:G5)-mínimo(A1:G5)** para obter a amplitude dos dados. De maneira análoga, digite **=var.p(A1:G5)** na célula **C13** para obter a variância e **=desvpad.p(A1:G5)** na célula **C14** para determinar o desvio padrão.

a) Supondo que fossem adicionadas mais 5 notas nas células do intervalo **H1:H5**, que alterações deveriam ser feitas para que fossem calculadas as medidas de tendência central e de dispersão do novo conjunto de valores?
O intervalo a ser considerado nas fórmulas seria **A1:H5**.

b) Como você faria para calcular o desvio padrão sem utilizar a fórmula **=desvpad.p(A1:G5)**? Se precisar usar outras fórmulas, faça uma pesquisa na internet para determinar suas escritas.

Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que calculariam a raiz quadrada da variância, determinada acima, por meio da fórmula **=raiz(C13)**.

Saiba mais

Como é feita uma pesquisa

Uma pesquisa pode ser realizada de acordo com as seguintes fases: planejamento, execução, análise dos dados e conclusões. A seguir, destacamos as características de cada uma dessas fases.

Planejamento

Nessa fase, é definido o que será pesquisado, quais são as informações que devem ser obtidas e o objetivo da pesquisa. Essas informações podem ser respostas para perguntas, validação de hipóteses ou outras informações importantes para quem está realizando ou encomendando a pesquisa. Quanto mais complexos forem os objetivos, mais cuidadosa deve ser essa etapa, para que as conclusões não sejam erradas ou incompletas, e a pesquisa não tenha de ser refeita.

Com base nos objetivos, são definidos os procedimentos para a pesquisa, se a pesquisa será amostral ou censitária, por exemplo. Se for do tipo amostral, quais serão as características da amostra, como serão coletadas as informações, o cronograma, entre muitas outras características da pesquisa.

Execução

Nessa fase, são feitas as coletas de dados a partir do que foi estabelecido na fase de planejamento. É importante registrar corretamente as respostas de todas as pessoas entrevistadas tomando cuidado para que nenhum dado se perca.

Análise dos dados e conclusões

Após a coleta dos dados, eles devem ser organizados e interpretados. Quanto maior a quantidade de dados obtidos, maior a necessidade de se utilizar quadros, tabelas e gráficos para que seja possível compreender e interpretar corretamente os resultados. Nesse momento, devem ser respondidas as perguntas feitas inicialmente, as hipóteses devem ser validadas ou rejeitadas, e as informações desejadas devem ser obtidas, para que o objetivo da pesquisa seja alcançado.

O resultado da pesquisa é apresentado por meio de um relatório, que pode conter os dados apresentados diretamente, organizados em tabelas, representados por gráficos ou descritos em texto.

Observação

É importante verificar quem ou qual instituição que realiza e quem financia uma pesquisa, e quando possível, os métodos utilizados para coletar os dados, para confirmar se o resultado apresentado realmente reflete as características da população.

Veja a seguir o exemplo do questionário aplicado em uma pesquisa, a análise dos dados e elaboração de um relatório com as conclusões.

	Sim	Não
Você teve dengue este ano?	☐	☒
Algum morador da sua residência teve dengue este ano?	☐	☒
Você sabe de algum vizinho que teve dengue este ano?	☒	☐
Você considera que os moradores da sua região estão tomando os cuidados necessários contra a dengue?	☐	☒

Quantidade de casos de dengue por região do nosso município

Região	Norte	Sul	Leste	Oeste	Centro
Quantidade de casos	8	4	68	25	32

Fonte de pesquisa: dados obtidos nas entrevistas realizadas.

Método utilizado: foram sorteadas 400 residências, sendo 80 de cada região. As perguntas foram feitas por telefone.

Média: $\overline{x} = \dfrac{8 + 4 + 68 + 25 + 32}{5} = \dfrac{137}{5} = 27{,}4 \rightarrow 27{,}4$ casos

Amplitude: $68 - 4 = 64 \rightarrow 64$ casos

Variância:

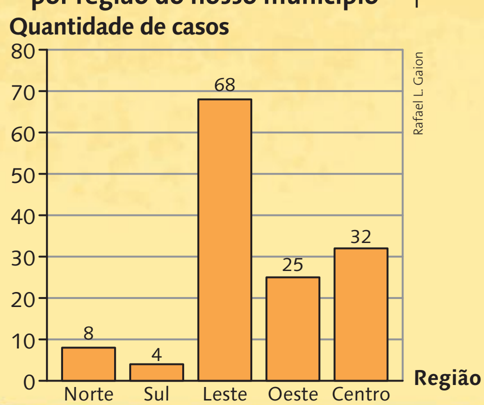
$$\sigma^2 = \frac{(8 - 27{,}4)^2 + (4 - 27{,}4)^2 + (68 - 27{,}4)^2 + (25 - 27{,}4)^2 + (32 - 27{,}4)^2}{5} =$$

$$= \frac{(-19{,}4)^2 + (-23{,}4)^2 + (40{,}6)^2 + (-2{,}4)^2 + (4{,}6)^2}{5} =$$

$$= \frac{376{,}36 + 547{,}56 + 1648{,}36 + 5{,}76 + 21{,}16}{5} = \frac{2599{,}2}{5} = 519{,}84$$

Desvio padrão: $\sigma = \sqrt{519{,}84} = 22{,}8 \rightarrow 22{,}8$ casos

Quantidade de casos de dengue por região do nosso município



Fonte de pesquisa: dados obtidos nas entrevistas realizadas.

Com base nos dados obtidos durante a pesquisa e nos cálculos realizados, observamos que os casos de dengue não estão bem distribuídos pela cidade, pois foi obtido um desvio padrão alto com relação aos valores calculados. Analisando esses valores, notamos que os casos estão concentrados nas regiões Oeste, Centro e principalmente na região Leste, onde 85% dos entrevistados conhecem alguém ou eles mesmos tiveram dengue este ano.

Nesse cenário, concluímos que é importante realizar campanhas de conscientização nas regiões Oeste e Centro e que é necessário que seja feito um combate intensivo na região Leste, com campanhas e mutirões, para que ocorra uma redução nos casos de dengue em nosso município.

Rogério Casagrande

É importante escolher bem a maneira de divulgar as informações no relatório da pesquisa. Um relatório com informações muito complexas pode causar dificuldades para ser entendido pelo público-alvo, enquanto um relatório com informações simples pode estar incompleto para a comunidade científica. No geral, uma possibilidade é utilizar as informações mais básicas junto com as conclusões no relatório, e utilizar os dados mais complexos em partes específicas. Outra possibilidade é produzir mais de um relatório, com linguagens diferentes para cada público-alvo.

a) Espera-se que os alunos respondam que produzir o relatório de uma pesquisa corretamente é importante para que os resultados da pesquisa possam ser divulgados sem erros e interpretações inadequadas.

a Qual é a importância de produzir o relatório de uma pesquisa corretamente?

b Quando você vê o resultado de uma pesquisa na imprensa ou nas redes sociais, verifica quem fez essa pesquisa, se as informações estão apresentadas corretamente e se há inconsistências? Você considera essa verificação importante?

b) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que é importante sempre verificar uma pesquisa ou as informações divulgadas.

c Reúna-se em grupo e, seguindo as orientações desta seção, realizem uma pesquisa amostral com um tema de interesse de vocês. Com os dados em mãos, utilizem as medidas de tendência central e de dispersão estudadas no capítulo para analisar os dados. Ao final, escrevam um relatório com as conclusões obtidas.

Resposta pessoal. Veja comentários e sugestões na Assessoria pedagógica.

7 Medidas de tendência central e de dispersão para dados agrupados

Até o momento, estudamos as medidas de tendência central e as medidas de dispersão para conjuntos de dados não agrupados. Neste tópico, vamos estudá-las aplicadas a dados agrupados em classes. Essas medidas serão aproximações, uma vez que não conhecemos todos os dados, apenas a frequência em cada intervalo de classe.

Observe ao lado uma tabela de frequências na qual está representado o consumo de energia por apartamento, em quilowatt-hora (kWh), em um prédio residencial com 40 apartamentos.

Consumo de energia em prédio residencial – 2021				
Consumo (kWh)	f	f_a	f_r	f_{ar}
165 ⊢— 179	8	8	20%	20%
179 ⊢— 193	10	18	25%	45%
193 ⊢— 207	8	26	20%	65%
207 ⊢— 221	5	31	12,5%	77,5%
221 ⊢— 235	5	36	12,5%	90%
235 ⊢— 249	4	40	10%	100%
Total	40		100%	

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

- **Média aritmética**

  Para calcular a média aritmética, podemos considerar os pontos médios das classes (m). Assim, devemos adicionar os produtos de todos os pontos médios das classes por suas respectivas frequências e dividir o resultado pela soma das frequências, isto é:

$$\overline{x} = \frac{f_1 \cdot m_1 + f_2 \cdot m_2 + f_3 \cdot m_3 + \ldots + f_n \cdot m_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

$m_1 = 172$ $\quad m_2 = 186$ $\quad m_3 = 200$ $\quad m_4 = 214$ $\quad m_5 = 228$ $\quad m_6 = 242$

$$\overline{x} = \frac{8 \cdot 172 + 10 \cdot 186 + 8 \cdot 200 + 5 \cdot 214 + 5 \cdot 228 + 4 \cdot 242}{40} = 200{,}35 \rightarrow 200{,}35 \text{ kWh}$$

Observação

Para obter m_1, m_2, m_3, ..., m_6, calculamos a média dos extremos do intervalo correspondente. No caso de m_1, por exemplo, o valor médio do intervalo 165 ⊢— 179 é 172, pois:

$$\frac{165 + 179}{2} = 172$$

- **Moda**

  Observando a tabela, notamos que a classe 179 ⊢— 193 tem a maior frequência. Nesse caso, ela é chamada **classe modal**. Podemos aproximar o valor da moda ao ponto médio dessa classe, isto é: $Mo = 186$ kWh.

- **Desvio médio**

  Uma maneira de determinar o desvio médio para dados agrupados é adicionar os produtos dos módulos de todos os desvios por suas respectivas frequências e dividir o resultado pela soma das frequências, isto é:

$$D_m = \frac{f_1 \cdot |m_1 - \overline{x}| + f_2 \cdot |m_2 - \overline{x}| + f_3 \cdot |m_3 - \overline{x}| + \ldots + f_n \cdot |m_n - \overline{x}|}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot |m_i - \overline{x}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Observação

No caso de dados agrupados, o desvio é a diferença entre o ponto médio da classe e a média aritmética.

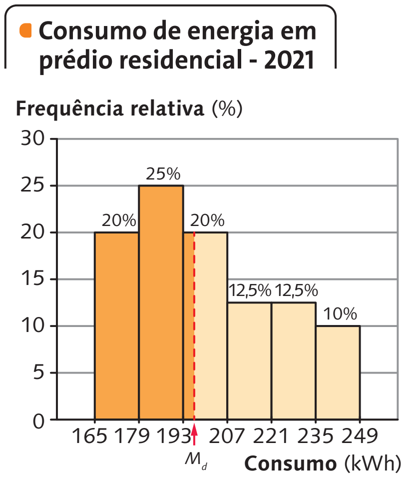
Para obter o desvio médio do exemplo, calculamos, inicialmente, o desvio de cada intervalo.

- $m_1 - \overline{x} = 172 - 200{,}35 = -28{,}35$
- $m_2 - \overline{x} = 186 - 200{,}35 = -14{,}35$
- $m_3 - \overline{x} = 200 - 200{,}35 = -0{,}35$
- $m_4 - \overline{x} = 214 - 200{,}35 = 13{,}65$
- $m_5 - \overline{x} = 228 - 200{,}35 = 27{,}65$
- $m_6 - \overline{x} = 242 - 200{,}35 = 41{,}65$

$$D_m = \frac{8 \cdot |-28{,}35| + 10 \cdot |-14{,}35| + 8 \cdot |-0{,}35| + 5 \cdot |13{,}65| + 5 \cdot |27{,}65| + 4 \cdot |41{,}65|}{40} \simeq 18{,}66 \rightarrow 18{,}66 \text{ kWh}$$

- **Mediana**

Por definição, a mediana é o valor que deixa 50% dos valores acima e abaixo dela. Porém, quando os dados estão agrupados, um método para obter uma aproximação da mediana é, num primeiro momento, analisar a frequência relativa para identificar em que classe ela se encontra. No exemplo, a mediana desses dados é um valor pertencente ao intervalo 193 ⊢ 207, pois, até 193, temos 45% do consumo de energia e até 207, temos 65%. Sendo assim, o valor que supera 50% dos dados ordenados deve estar entre 193 e 207. Em seguida, admitimos que a variável se distribua uniformemente nesse intervalo, o que significa considerar a proporcionalidade entre as medidas das bases e das áreas dos retângulos do histograma de frequências relativas (expressas como porcentagem da área total sobre o histograma), conforme destacado no retângulo à direita na imagem ao lado.

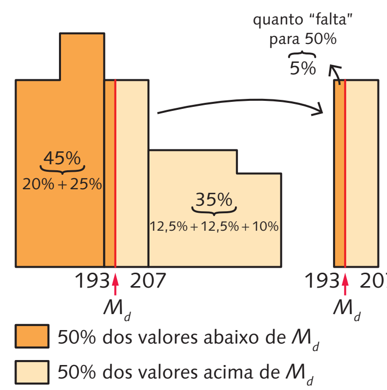


Elaborado pelo autor com dados fictícios

Entre o retângulo "inteiro" (definido pela classe) e o retângulo menor $\left(\text{definido por } M_d\right)$ destacados mais à direita, de mesma altura, temos a seguinte proporção:

$$\frac{\overbrace{207-193}^{\substack{\text{medida da base do}\\ \text{retângulo "inteiro"}}}}{\underbrace{M_d-193}_{\substack{\text{medida da base do}\\ \text{retângulo menor}}}}=\frac{\overbrace{20}^{\substack{\text{área do}\\ \text{retângulo}\\ \text{"inteiro"}}}}{\underbrace{5}_{\substack{\text{área do}\\ \text{retângulo}\\ \text{menor}}}}\Rightarrow\frac{14}{M_d-193}=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_d-193=\frac{14}{4}\Rightarrow M_d=\frac{393}{2}=196{,}5\rightarrow 196{,}5\text{ kWh}$$



Ilustrações: Sergio L. Filho

De modo geral, para obter o valor aproximado da mediana $\left(M_d\right)$ de dados agrupados, usamos a seguinte proporção:

$$\frac{L_s-L_i}{M_d-L_i}=\frac{f_{m_d}}{50-f_{ant}}$$

Em que:
- L_i: extremo inferior da classe que contém a mediana;
- L_s: extremo superior da classe que contém a mediana;
- f_{m_d}: frequência relativa da classe que contém a mediana;
- f_{ant}: frequência relativa acumulada até a classe anterior à da mediana.

- **Variância**

No caso de dados agrupados, a variância é obtida calculando-se o quociente da soma dos produtos obtidos das frequências de cada classe com o quadrado dos desvios dessas classes pela soma das frequências, isto é:

$$\sigma^2=\frac{f_1\cdot\left(m_1-\bar{x}\right)^2+f_2\cdot\left(m_2-\bar{x}\right)^2+f_3\cdot\left(m_3-\bar{x}\right)^2+\ldots+f_n\cdot\left(m_n-\bar{x}\right)^2}{f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i\cdot\left(m_i-\bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}$$

Assim, o cálculo da variância para o exemplo é dado por:

$$\sigma^2=\frac{8\cdot(-28{,}35)^2+10\cdot(-14{,}35)^2+8\cdot(-0{,}35)^2+5\cdot(13{,}65)^2+5\cdot(27{,}65)^2+4\cdot(41{,}65)^2}{40}\simeq 504{,}58$$

- **Desvio padrão**

No caso de dados agrupados, assim como em dados não agrupados, o desvio padrão é a raiz quadrada da variância: $\sigma = \sqrt{504{,}58} \simeq 22{,}46 \rightarrow 22{,}46$ kWh.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

52. O quadro apresenta os dados referentes a uma pesquisa sobre a faixa salarial dos leitores de uma biblioteca e a quantidade de livros emprestados por mês.

Faixa salarial (R$)	Quantidade de leitores
1045 ⊢— 1145	58
1145 ⊢— 1245	77
1245 ⊢— 1345	120
1345 ⊢— 1445	128
1445 ⊢— 1545	195
1545 ⊢— 1645	258

O salário médio desses leitores é aproximadamente: a

a) R$ 1426,46
b) R$ 1435,73
c) R$ 1428,19
d) R$ 1434,85
e) R$ 1440,15

Em grupo

53. Para **aferir** uma máquina empacotadora de arroz, foram amostrados alguns pacotes e suas massas registradas, conforme exposto no quadro a seguir.

Massa (kg)	Quantidade de pacotes
4,970 ⊢— 4,980	4
4,980 ⊢— 4,990	10
4,990 ⊢— 5,000	38
5,000 ⊢— 5,010	44
5,010 ⊢— 5,020	18
5,020 ⊢— 5,030	6

aferir: examinar a exatidão dos instrumentos que servem para pesar, medir etc

a) Quantos pacotes de arroz foram amostrados? 120 pacotes

b) Calculem a média aritmética, a moda e a mediana da massa dos pacotes amostrados.
$\bar{x} = 5{,}002$ kg; $Mo = 5{,}005$ kg; $Md = 5{,}002$ kg

c) Determinem o desvio médio, a variância e o desvio padrão dos pacotes amostrados.
$D_m \simeq 0{,}009$ kg; $\sigma^2 \simeq 0{,}000119$; $\sigma \simeq 0{,}011$ kg

Você produtor

54. Construa um histograma representando os dados agrupados da temperatura de uma cidade e suas frequências. Depois, peça a um colega que calcule, em relação aos seguintes dados: Resposta pessoal.

a) as medidas de tendência central: $\bar{x}$, Mo e M_d.

b) as medidas de dispersão: D_m, σ^2 e σ.

Em seguida, verifiquem se as resoluções estão corretas.

55. (UFPR) Os dados, a seguir, representam o tempo (em segundos) para carga de um determinado aplicativo, num sistema compartilhado.

Tempo (s)	nº de observações
4,5 ⊢— 5,5	3
5,5 ⊢— 6,5	6
6,5 ⊢— 7,5	13
7,5 ⊢— 8,5	5
8,5 ⊢— 9,5	2
9,5 ⊢— 10,5	1
Total	30

Com base nesses dados, considere as afirmativas a seguir:

1. O tempo médio para carga do aplicativo é 7,0 segundos.
2. A variância da distribuição é aproximadamente 1,33 segundo ao quadrado.
3. O desvio padrão é a raiz quadrada da variância.
4. Cinquenta por cento dos dados observados estão abaixo de 6,5 segundos.

A alternativa correta é: d

a) somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras
b) somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras
c) somente as afirmativas 2 e 4 são verdadeiras
d) somente as afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras
e) somente as afirmativas 1, 3 e 4 são verdadeiras

8 Estatística e probabilidade

Estudos envolvendo probabilidade também fazem parte da Estatística.

A probabilidade de um evento ocorrer é obtida por meio da razão entre a quantidade de elementos do evento e do espaço amostral, isto é:

$$P = \frac{\text{quantidade de casos favoráveis}}{\text{quantidade de casos possíveis}}$$

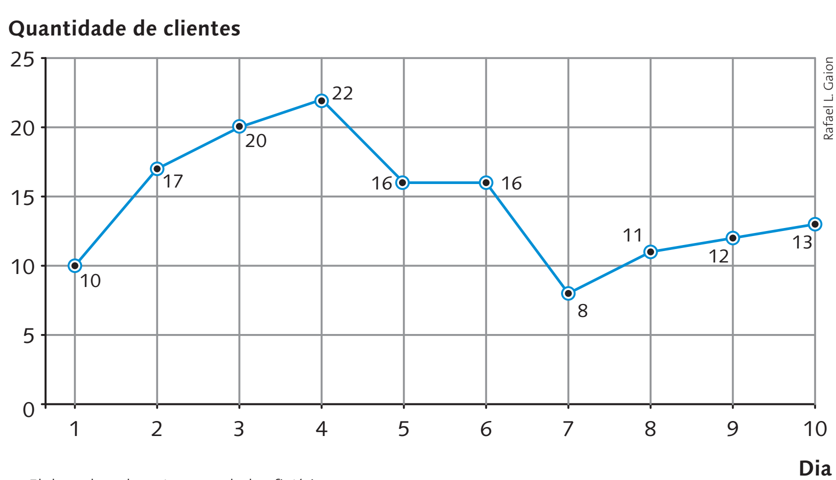
Esse modo de determinar probabilidades se restringe a situações em que os dados são igualmente prováveis, como a obtenção de um determinado número no lançamento de um dado não viciado. Essas situações que possuem a mesma chance de acontecer são chamadas eventos equiprováveis.

No entanto, há situações em que a probabilidade é calculada com base na frequência relativa da ocorrência de determinado evento. Por exemplo, no caso do lançamento de um dado viciado, os resultados obtidos não são igualmente prováveis.

Assim, é preciso considerar uma grande quantidade de lançamentos para se estimar a probabilidade da ocorrência de cada número. E quanto maior quantidade de experimentos, melhor será a estimativa da probabilidade. Mas nem sempre é preciso realizar um experimento para obter os dados amostrais. Em alguns casos, dispomos de informações históricas provenientes de dados publicados nos meios de comunicação, de arquivos de empresas etc.

O gráfico a seguir apresenta a quantidade de clientes que esperaram mais de 15 minutos para serem atendidos em certa agência bancária. Foram analisados os 100 primeiros atendimentos em cada dia durante dez dias em que o movimento era normal.

Taxa de clientes que esperaram mais do que 15 minutos para atendimento



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

A Federação Brasileira de Bancos (Febraban) estabelece normas de atendimento ao consumidor na rede de agências bancárias e define que o tempo máximo de esperas nas filas de bancos deve ser de até 20 minutos em dias de movimento normal, e de até 30 minutos em dias com movimentos de pico. A regra é voluntária, mas todos os grandes bancos seguem essa regra.

Fonte de pesquisa: FEDERAÇÃO BRASILEIRA DE BANCOS (Febraban). Normativo *SARB 004/2009*. Disponível em: <https://www.febraban.org.br/7Rof7SWg6qmyvwJcFwF7I0aSDf9jyV/sitefebraban/Normativo%20SARB%20004-09%20-%20Atendimento%20em%20Ag%C3%AAncias.pdf>. Acesso em: 28 ago. 2020.

De acordo com o gráfico, se algum cliente procurar atendimento nessa agência no dia 5 de certo mês, a probabilidade de ele ficar esperando por mais de 15 minutos é 16 em 100, ou seja, 16%.

Problemas e exercícios resolvidos

R9. Causada por uma anomalia no cromossomo 21, a síndrome de Down é um dos distúrbios genéticos mais frequentes. Esse distúrbio ocorre em cerca de 1 a cada 800 nascimentos.

Com o aumento da idade fértil da mulher, cresce a chance de ser gerado um bebê com essa síndrome. Aos 35 anos, 1 em cada 400 mulheres tem chance de gerar bebês com síndrome de Down; aos 40 anos, 10 em 1 000 têm chance e, aos 45 anos, 1 em 30 mulheres tem chance.

a) Qual é a probabilidade de que, em um nascimento, o bebê tenha síndrome de Down?

b) Separada, ao acaso, uma mulher de 45 anos de uma população de mulheres, qual é a chance de ela gerar um filho com síndrome de Down?

Resolução

a) Como 1 em cada 800 nascidos tem síndrome de Down, a probabilidade é:

$$P = \frac{1}{800} = 0{,}00125 \text{ ou } 0{,}125\%$$

b) Como 1 em cada 30 mulheres de 45 anos podem gerar bebês com síndrome de Down, a probabilidade é:

$$P = \frac{1}{30} = 0{,}0\overline{3} \text{ ou } 3{,}\overline{3}\%$$

R10. Em um experimento, uma moeda é lançada 800 vezes, obtendo-se 520 caras e 280 coroas.

a) Construa uma tabela de frequências para representar os resultados obtidos no experimento.

b) O que é possível suspeitar acerca da honestidade da moeda?

c) Supondo que a distribuição das faces obtidas nos lançamentos da moeda se mantenha, qual é a probabilidade de, em 2 lançamentos, obterem-se 2 caras?

Resolução

a)

Experimento do lançamento de uma moeda

Face	f	f_a	f_r	f_{ar}
Cara (C)	520	520	65%	65%
Coroa (K)	280	800	35%	100%
Total	800		100%	

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

b) É possível suspeitar que a moeda não seja honesta. Isso decorre da aparente tendência de se obterem nos lançamentos mais caras, pois, conforme a tabela apresentada no item **a**, 65% dos lançamentos resultaram em cara e apenas 35%, em coroa. Em razão do grande número de lançamentos, para uma moeda honesta, é de se esperar que as frequências relativas de cada face sejam próximo a 50%.

c) Mantendo a distribuição nos lançamentos, a probabilidade de se obter uma cara em um lançamento é 65%. Assim, segue que a probabilidade é:

$$\underbrace{P(C)}_{1^{\text{º}} \text{ lançamento}} \cdot \underbrace{P(C)}_{2^{\text{º}} \text{ lançamento}} = 0{,}65 \cdot 0{,}65 = 0{,}4225 \text{ ou } 42{,}25\%$$

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

58. c) Menor, pois a probabilidade de morrer em um acidente de bicicleta é 0,0000071% e de morrer em uma luta de boxe é aproximadamente 0,00045%.

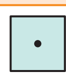
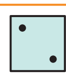
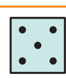
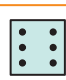
56. Um dos destaques da agricultura do município de Jales (SP) é o cultivo da uva. A unidade da Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (Embrapa), instalada nesse município para auxiliar no desenvolvimento desse setor produtivo, tem realizado diversos estudos com esse objetivo, entre eles a coleta de dados climáticos, como o número de dias com chuva.

Segundo a Embrapa, no 1º semestre de 2019 foram registrados 48 dias com chuva. Já no 2º semestre desse mesmo ano, foram registrados 36 dias com chuva.

a) Sorteando-se um dia no 1º semestre de 2019, qual é a probabilidade de ter chovido nesse dia no município de Jales? aproximadamente 27%

b) Dentre todos os dias do ano de 2019, ao se retirar uma amostra aleatória de 2 dias, qual é a probabilidade de que em nenhum desses dias tenha chovido em Jales? aproximadamente 59,29%

57. Em um experimento, um dado é lançado 600 vezes, e os resultados obtidos são anotados, conforme quadro.

Face	Quantidade de lançamentos
	18
	36
	168
	150
	174
	54

Ilustrações: Sergio L. Filho

a) Construa uma tabela de frequências, obtendo f, f_a, f_r e f_{ar}, para representar os resultados obtidos no experimento.

b) O que é possível suspeitar acerca da honestidade do dado? Veja a resposta dos itens **a** e **b** na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

58. A partir de vários estudos e pesquisas, os cientistas já compreendem como ocorrem as grandes catástrofes. Porém, apesar de algumas catástrofes serem dadas como certas, não sabem dizer quando vão ocorrer e também como podem ser evitadas. O Japão, por exemplo, se prepara há três décadas para o terremoto de Tokai (150 km de Tókio), região onde ocorrem terremotos devastadores a cada 110 anos, em média.

Então podem ocorrer perguntas como:

- É mais provável uma pessoa morrer em uma luta de boxe ou ser vítima de um acidente de carro?
- O que é mais perigoso: saltar de asa-delta ou mergulhar?

Veja, na tabela, as probabilidades de uma pessoa morrer praticando algumas atividades.

Quais são as chances de alguém morrer	
Atividade	**1 em cada ...**
Salto de asa-delta	560
Luta de boxe	2 200
Acidente de carro	6 700
Mergulho	34 400
Acidente de bicicleta	140 845

Fonte de pesquisa: BEST HEALTH DEGREES. *Suas chances de morrer.* Disponível em: <https://www.besthealthdegrees.com/health-risks>. Acesso em: 20 fev. 2020.

a) Entre as atividades indicadas, em qual há maior probabilidade de se morrer? Qual é essa probabilidade? salto de asa-delta; aproximadamente 0,2%

b) A probabilidade de uma pessoa morrer em um salto de asa-delta é aproximadamente quantas vezes a de morrer em um acidente de carro? aproximadamente 12 vezes

c) A probabilidade de uma pessoa morrer em um acidente de bicicleta é maior, menor ou igual à de morrer em uma luta de boxe? Justifique sua resposta.

d) Podemos dizer que as atividades apresentadas na tabela são eventos equiprováveis? Justifique sua resposta. Não, pois esses eventos não apresentam a mesma chance de ocorrer.

Finalizando a conversa

a) Espera-se que os alunos compreendam as diferenças entre os tipos apresentados e indiquem que são maneiras de representar um conjunto de valores sem representar diretamente todos os dados.

a O que você entendeu acerca das frequências absoluta, relativa, acumulada e acumulada relativa?

b Quais representações gráficas foram estudadas neste capítulo? Gráfico de barras, de linhas, de setores, histograma, pictograma, *box plot* e diagrama de ramo e folhas.

c O que diferencia as amostragens aleatória, sistemática e estratificada? A maneira com que são definidos os elementos da amostra. Na amostragem aleatória são escolhidos elementos ao acaso, na sistemática são escolhidos elementos com características definidas e na estratificada são escolhidos elementos ao acaso, mas segundo critérios preestabelecidos.

d Em que situações do dia a dia é possível utilizar Estatística?

e Você considerou o estudo deste capítulo importante? Por quê? Resposta pessoal.

d) Resposta pessoal. Possíveis respostas: interpretar notícias e informações em diferentes meios de comunicação, definir preços de compra e venda, pesquisas de intenção de voto.

Saiba mais

De acordo com a média...

Veja comentários e sugestões na Assessoria pedagógica.

Diariamente, nos deparamos com notícias apresentadas na forma de dados estatísticos, cujo objetivo é expor informações de forma simples, clara e de fácil compreensão. Profissionais da área de comunicação buscam maneiras convenientes para fazer essas exposições, recorrendo às medidas de tendência central, às representações gráficas etc.

Para se divulgar uma notícia, é necessário que ela passe por um tratamento a fim de que possa chegar de forma compreensível ao espectador. Essa notícia se torna um objeto comercial para o veículo de informação e precisa ser vendida. Por isso, o grande objetivo desses veículos é a divulgação de notícias que sejam interessantes e importantes para o público.

As medidas de tendência central são ferramentas valiosas para atingir esses objetivos, sendo a média a mais utilizada, pois proporciona uma apresentação simplificada de um conjunto de valores. No entanto, isso pode provocar, em muitos casos, uma interpretação errônea da realidade, pois não são todas as situações que apresentam dados próximos uns dos outros. Se eles forem muito distintos, a média não representará o conjunto de dados.

Um exemplo para isso é o do PIB do Brasil (Produto Interno Bruto, que é o valor de toda a riqueza gerada no país) que em 2018 atingiu R$ 6,9 trilhões, gerando um PIB *per capita* (PIB dividido pela quantidade de habitantes) de R$ 31 833,50. Esse valor seria o rendimento médio da população brasileira. Em 2019, o salário mínimo era R$ 954,00, e de acordo com o PIB *per capita*, o brasileiro teria uma renda média mensal de 2,7 salários mínimos, o que não é verdade, já que cerca de 65% da população tem uma renda mensal inferior a 3 salários mínimos, enquanto cerca de 1% da população possui rendimento médio mensal de 21 salários mínimos. Isto é, a distribuição desse ganho ou perda se dá de forma desigual, e esse efeito não pode ser registrado pelo indicador PIB *per capita* média.

A1	B1	B2	C1	C2	D-E
R$ 25 554,33	R$ 11 279,14	R$ 5 648,64	R$ 3 085,48	R$ 1 748,59	R$ 719,00
2,5%	4,4%	16,5%	21,5%	26,8%	28,3%

Sergio L. Filho

Classe · Renda média mensal domiciliar (2018) · Distribuição da população brasileira por classe

Fonte de pesquisa: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS EMPRESAS DE PESQUISA. *Critério de classificação econômica Brasil.* Disponível em: <http://www.abep.org/criterioBr/01_cceb_2019.pdf>. Acesso em: 20 fev. 2020.

Nesse caso, é necessário uma análise mais detalhada dos dados para se ter uma conclusão real. Pode-se, por exemplo, analisar a moda dos dados para perceber qual a renda mais comum no Brasil.

Em outros casos, as informações são apresentadas de forma que o indivíduo que as recebe tenha uma compreensão já preestabelecida, com o objetivo, por exemplo, de que causem certo impacto.

Também é comum a divulgação da média de gols em uma rodada de um campeonato para se dar certa qualificação a ele, podendo ser positiva ou negativa, de acordo com o interesse em apresentar as notícias. Quando a média é alta, o espectador pode achar que todos os jogos tiveram muitos gols em várias partidas, o que pode não ter ocorrido. O interessante seria analisar os jogos e verificar a quantidade de gols marcados e buscar o valor da moda na quantidade de gols. Veja ao lado a tabela com a quantidade de gols marcados nos jogos realizados em 10 rodadas do Campeonato Brasileiro de 2019.

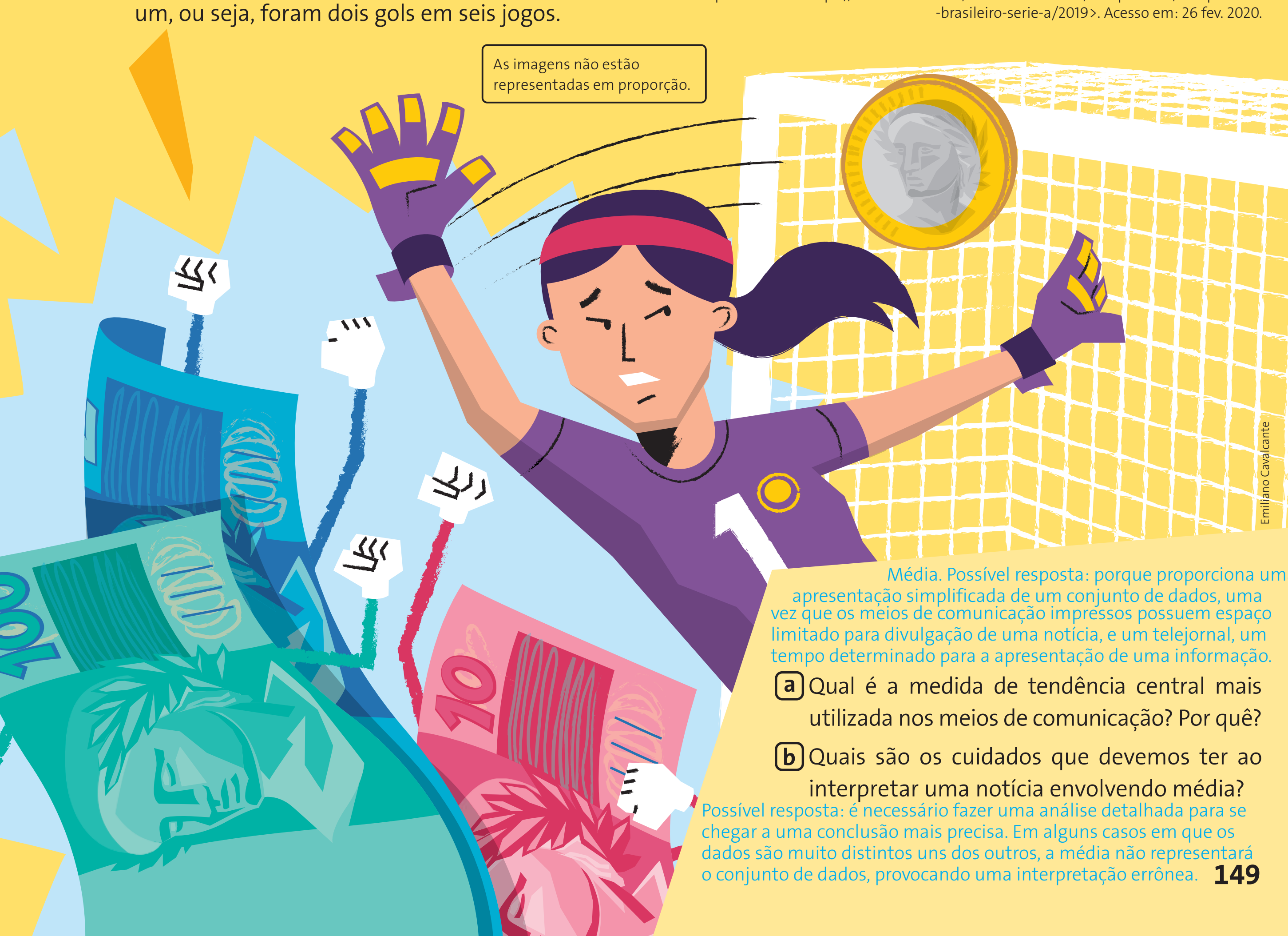
Na 8ª rodada, a média foi 1,5 gols por partida. No entanto, em quatro dos dez jogos não foi marcado um gol sequer, e em dois deles foi marcado apenas um, ou seja, foram dois gols em seis jogos.

Gols marcados nas dez primeiras rodadas do Campeonato Brasileiro de Futebol - Série A - 2019

Jogo / Rodada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	2	3	3	4	5	5	4	1
2	1	2	3	1	2	3	3	3	3	5
3	2	1	3	2	2	3	1	0	1	9
4	1	0	3	3	3	2	4	1	0	1
5	4	3	4	0	2	4	1	2	2	3
6	1	1	0	5	3	2	1	5	3	1
7	2	1	1	3	1	2	2	3	4	2
8	3	1	1	0	0	0	3	0	3	4
9	1	3	1	4	2	1	2	2	3	2
10	3	2	1	2	7	0	1	1	3	2

Fonte de pesquisa: CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE FUTEBOL. *Futebol brasileiro*. Disponível em: <https://www.cbf.com.br/futebol-brasileiro/competicoes/campeonato-brasileiro-serie-a/2019>. Acesso em: 26 fev. 2020.

As imagens não estão representadas em proporção.



Média. Possível resposta: porque proporciona uma apresentação simplificada de um conjunto de dados, uma vez que os meios de comunicação impressos possuem espaço limitado para divulgação de uma notícia, e um telejornal, um tempo determinado para a apresentação de uma informação.

a Qual é a medida de tendência central mais utilizada nos meios de comunicação? Por quê?

b Quais são os cuidados que devemos ter ao interpretar uma notícia envolvendo média?

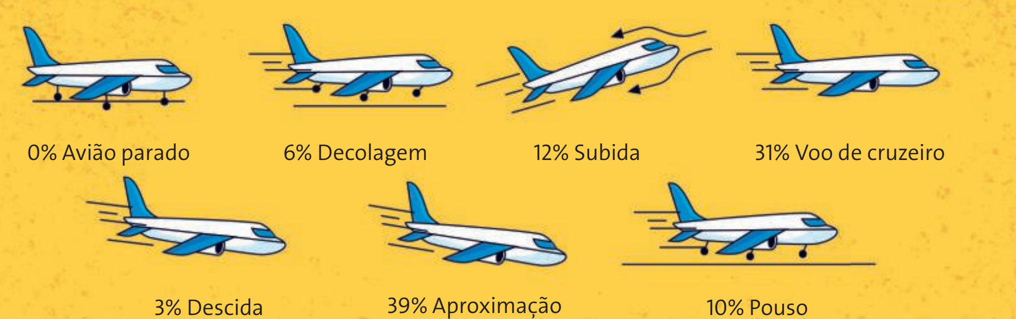
Possível resposta: é necessário fazer uma análise detalhada para se chegar a uma conclusão mais precisa. Em alguns casos em que os dados são muito distintos uns dos outros, a média não representará o conjunto de dados, provocando uma interpretação errônea.

Conectando ideias

Viagem segura

As viagens de avião tiveram significativas mudanças na tentativa de aumentar a segurança e o conforto dos passageiros. Apesar disso, desastres aéreos sempre chocam a população, já que os estragos, na maioria das vezes, são em grande proporção, assim como a quantidade de vítimas fatais. Mesmo assim, viajar sentado em uma poltrona a 9 000 m de altitude a uma velocidade média de cruzeiro de 850 km/h continua sendo um meio de transporte seguro.

EM QUE MOMENTOS OCORRERAM OS ACIDENTES, DE 2009 ATÉ 2018



Fonte de pesquisa: THE BOEING COMPANY. *Resumo estatístico dos acidentes de avião a jato comercial*. Disponível em: <http://www.boeing.com/news/techissues/pdf/statsum.pdf>. Acesso em: 7 fev. 2020.

PRINCIPAIS CAUSAS DE ACIDENTE, ENTRE 2014 E 2018

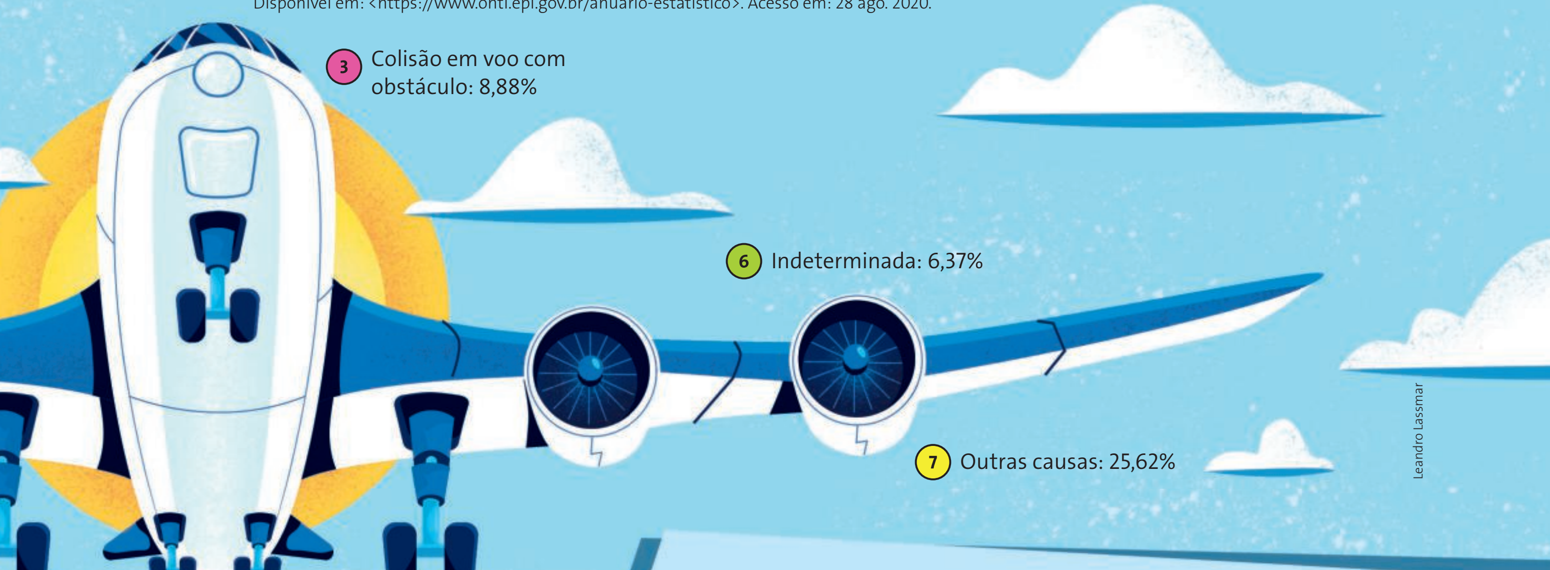
Fonte de pesquisa: ANAC. *Relatório Anual de Segurança Operacional 2018*. Disponível em: <https://www.anac.gov.br/assuntos/paginas-tematicas/gerenciamento-da-seguranca-operacional/arquivos/RASO_2018_v4.pdf>. Acesso em: 14 fev. 2020.

Fonte de pesquisa: MINISTÉRIO DA INFRAESTRUTURA. *Anuário Estatístico de Transportes*. Disponível em: <https://www.ontl.epl.gov.br/anuario-estatistico>. Acesso em: 28 ago. 2020.

Quantidade de acidentes de tráfego aéreo e rodoviário com vítimas fatais no Brasil - 2014 a 2018

Ano	Tráfego aéreo		Tráfego rodoviário	
	Acidentes	Vítimas fatais	Acidentes	Vítimas fatais
2014	176	80	169 200	8 200
2015	172	78	122 200	6 900
2016	163	103	96 400	6 400
2017	144	56	89 400	6 200
2018	166	80	69 200	5 300

Fonte de pesquisa: MINISTÉRIO DA INFRAESTRUTURA. *Anuário Estatístico de Transportes*. Disponível em: <https://www.ontl.epl.gov.br/anuario-estatistico>. Acesso em: 28 ago. 2020.



a) Possível resposta: no uso de variáveis quantitativas e qualitativas, na apresentação dos dados por meio de gráfico de setores, gráfico de colunas e tabela.

a De que maneira os conteúdos abordados neste capítulo estão relacionados com as informações apresentadas?

b Os conhecimentos que você possui sobre Estatística ajudam a compreender essas informações? Justifique sua resposta.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que sim, pois o estudo de porcentagem, gráfico de colunas e gráfico de setores, por exemplo, favoreceu a interpretação dos dados apresentados nesta seção.

Respostas

Capítulo 1 Análise combinatória e binômio de Newton

1. 52 possibilidades

2. 95 possibilidades

3. 64 maneiras

4. 84 maneiras

5. Resposta pessoal.

6. 648 000 maneiras

7. b) 6 maneiras

8. 56 maneiras

9. 15 maneiras

10. alternativa **b**
- Resposta pessoal.

11. 6 760 000 senhas

12. 952 números

13. a) 24 b) 3 c) 96 d) 720 e) $\frac{4}{3}$ f) 337 g) 84

14. a) 6 227 020 800 b) 7 257 600 c) 403 200 d) 2 422 728 000

15. a) $\frac{1}{n^2+n}$ b) n^2-3n+2 c) $n+2$ d) $n+1$ e) $\frac{n+3}{n}$ f) n^2+4n+3

16. $n = 2$ e $n = -4$

17. $n = 1$

18. 0

19. a) 60 b) 720 c) 840 d) 210 e) 20 160 f) 1 680

20. a) 73 440 b) 6 375 600 c) 121 080 960 d) 24 165 120

21. 120 números

22. a) $\frac{2}{n}$ b) $\frac{n^2+3n+1}{n+1}$

23. 6 840 maneiras

24. a) 210 números b) 240 números c) 3 600 números

25. 30 240 maneiras

26. a) 58 500 livros b) 1 080 livros

27. Resposta pessoal.

28. 918 maneiras

29. a) 5 040 b) 90 c) 240 d) 35

30. a) 3 628 800 anagramas b) 241 920 anagramas c) 483 840 anagramas

31. 61 números

32. 7 livros

33. Resposta pessoal.

34. a) 720 números b) • 240 números • 240 números

35. alternativa **c**

36. a) 120 anagramas b) 720 anagramas c) 40 320 anagramas

37. 39ª posição

38. alternativa **b**

39. alternativa **b**

40. alternativa **e**

41. a) 56 b) 126 c) 1 287 d) 253 e) 1 575 f) 13,75

42. a) 3 276 b) 15 504 c) 3 365 856 d) 45 379 620

43. a) 4 b) 2

44. $p = 2$

45. 1 140 provas

46. 116 280 maneiras

47.

Início
1. Leia os números n e p, sendo n a quantidade total de indivíduos e p a quantidade de pessoas que formam um grupo.
2. Calcule $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Fim

48. 54 diagonais

49. 792 maneiras

50. Resposta pessoal.

51. 53 555 040 maneiras

52. 1 120 maneiras

53. a) 21 segmentos b) 35 triângulos

54. alternativa **a**

55. alternativa **d**

56. 84 possibilidades

57. a) 18 possibilidades b) 22 possiblidades c) 13 possibilidades

58. alternativa **e**

59. alternativa **a**

60.
- 60 anagramas
- 30 anagramas
- 453 600 anagramas

a) Resposta pessoal.
b)

Início
1. Leia o número n sendo a quantidade de letras da palavra. E leia $n_1, n_2, ..., n_r$ sendo as quantidades de letras, respectivamente, que se repetem uma vez, duas vezes, e assim por diante.
2. Calcule $P^{(n_1, n_2, ..., n_r)} = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_r!}$.

Fim

61. a) 90 b) 90 c) 60

62. OAACCM

63. duas fichas

64. a) 58 b) 71 c) 64 d) 5 148 e) 1 048 576
- Resposta pessoal.

65. a) 7 b) 28 c) 10 d) 0

66. a) 512 b) 3 760 c) 17 d) 22 e) 17

67. $n = 7$

68. alternativa **b**

69. a) $x = 1$ b) $x = -\frac{1}{9}$

70. alternativa **b**

71. a) 31

b) $\left(2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n\right)$

c) $\frac{1}{2}$

72. a) $y^4 + 8y^3 + 24y^2 + 32y + 16$

b) $64a^6 + 192a^5b + 240a^4b^2 + 160a^3b^3 + 60a^2b^4 + 12ab^5 + b^6$

c) $x^7 - 35x^6 + 525x^5 - 4\,375x^4 + 21\,875x^3 - 65\,625x^2 + 109\,375x - 78\,125$

d) $243 + 135x + 30x^2 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{5}{27}x^4 + \frac{1}{243}x^5$

e) $16a^4b^4 - 16a^3b^3 + 6a^2b^2 - ab + \frac{1}{16}$

f) $a^8 + 4 \cdot \frac{a^6}{b} + 6 \cdot \frac{a^4}{b^2} + 4 \cdot \frac{a^2}{b^3} + \frac{1}{b^4}$

73. Resposta pessoal.

74. a) $29\sqrt{2} + 45$

b) $58\sqrt{5} - 63\sqrt{3}$

c) $\frac{625}{144}$

d) $-3\,161\sqrt{11} - 10\,484$

75. a) $\binom{6}{p}x^{6-p} \cdot 2^p$; 1º termo: $240x^2$

b) $\binom{9}{p}(3bx)^{9-p} \cdot y^p$; 1º termo: $30\,618b^5x^5y^4$

c) $\binom{5}{p}(-x)^{5-p} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^p$; 1º termo: $-80 \cdot \frac{1}{x^3}$

d) $\binom{8}{p}(2x)^{8-p} \cdot (-y)^p$; 1º termo: $1120x^4y^4$

76. a) I, II e IV

77. Resposta pessoal.

78. 1

79. a) $-32\,768$

b) 54

c) não existe

80. $60b^2$

81. 70

82. a) $T_5 = 16\,016a^{10}b^{14}$; $T_{10} = 1\,025\,024a^5b^{14}$

b) $439\,296a^7b^{14}$

c) $16\,384b^{14}$; não há termo independente de b

83. a) 1 024

b) 625

c) -128

d) $-1\,024$

84. I) a) $\binom{6}{p}(6x)^{6-p} \cdot 2^p$

b) $34\,560x^3$

c) $34\,560x^3$

d) 64

e) $77\,760x^4$

II) a) $\binom{4}{p}x^{4-p} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^p$

b) $32 \cdot \frac{1}{x^2}$

c) 24

d) 24

e) x^4

III) a) $\binom{5}{p}(-5)^{5-p} \cdot (3x)^p$

b) $6\,750x^3$

c) $6\,750x^3$

d) $-3\,125$

e) $-2\,025x^4$

IV) a) $\binom{8}{p}\left(2x^2\right)^{8-p} \cdot x^p$

b) $1\,792x^{13}$

c) $1\,120x^{12}$

d) Não existe termo independente de x.

e) Não existe termo em x^4.

V) a) $\binom{7}{p}\left(\frac{2}{3}x\right)^{7-p} \cdot \left(2x^2\right)^p$

b) $\frac{4\,480}{81}x^{10}$

c) $\frac{4\,480}{27}x^{11}$

d) Não existe termo independente de x.

e) Não existe termo em x^4.

Capítulo 2 Probabilidade

1. a) DIU

b) Resposta pessoal.

c) Porque eles impedem o contato entre os órgãos genitais e suas secreções, que podem conter os agentes patogênicos causadores desse tipo de doença.

2. $\Omega = \{(1, K), (1, C), (2, K), (2, C), (3, K), (3, C), (4, K), (4, C), (5, K), (5, C), (6, K), (6, C)\}$

3. cara: C; coroa: K

a) $\Omega = \{(K,K), (K,C), (C,K), (C,C)\}$

b) $A = \{(C,C)\}$

c) $B = \{(C, C), (K, C), (C, K)\}$

d) $D = \{(K, K)\}$

4. a) $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

b) $A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$

c) $B = \varnothing$

d) $C = \Omega$

5. $\Omega = \{(A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E), (C, D), (C, E), (D, E)\}$

6. a) discreto

b) discreto

c) contínuo

d) discreto

7. a) 3 maneiras distintas

b) Ω = {R\$ 170,00; R\$ 190,00; R\$ 200,00}

8. Resposta pessoal.

9. a) A = {(Ana, Bruno), (Ana, Carlos), (Ana, Douglas)}

b) B = {(Ana, Carlos), (Ana, Douglas), (Carlos, Douglas)}

c) $C = \varnothing$

10. a) $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

b) $A = \{(2, 2)\}$

c) $B = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$

d) $C = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$

11. X: bola azul; Y: bola preta; Z: bola branca

a) $\Omega = \{(X, X, X), (X, X, Y), (X, X, Z), (X, Y, X), (X, Y, Y), (X, Y, Z), (X, Z, X), (X, Z, Y), (X, Z, Z), (Y, X, X), (Y, X, Y), (Y, X, Z), (Y, Y, X), (Y, Y, Y), (Y, Y, Z), (Y, Z, X), (Y, Z, Y), (Y, Z, Z), (Z, X, X), (Z, X, Y), (Z, X, Z), (Z, Y, X), (Z, Y, Y), (Z, Y, Z), (Z, Z, X), (Z, Z, Y), (Z, Z, Z)\}$

b) $B = \{(X, Y, Z), (X, Z, Y), (Y, X, Z), (Y, Z, X), (Z, X, Y), (Z, Y, X)\}$

c) $B = \{(X, X, X), (Y, Y, Y), (Z, Z, Z)\}$

12. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$

13. C: copas; E: espadas; O: ouros; P: paus

a) $\Omega = \{(C, C), (C, E), (C, O), (C, P), (E, E), (E, O), (E, P), (O, O), (O, P), (P, P)\}$

b) $A = \{(C, E), (C, O), (C, P)\}$

c) $B = \{(C, E), (E, E), (E, O), (E, P)\}$

14. $C = \{(1, 3), (1, 5), (1, 7), (1, 9), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 1), (3, 5), (4, 2), (5, 1), (5, 3), (6, 2), (7, 1), (8, 2), (9, 1)\}$

15. a) $D = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 5), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 5)\}$

b) $E = \{(2, 3), (2, 5), (4, 3), (4, 5), (6, 3), (6, 5)\}$

c) $F = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$

16. $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

17. $n(A) = 7$

18. a) 0 ou 0%

b) $\frac{9}{4}$ ou $44{,}\overline{4}\%$

c) $\frac{5}{9}$ ou $55{,}\overline{5}\%$

d) $\frac{1}{9}$ ou $11{,}\overline{1}\%$

e) $\frac{2}{9}$ ou $22{,}\overline{2}\%$

19. $\frac{1}{2}$ ou 50%

20. a) $\frac{14}{28}$ ou 50%

b) $\frac{6}{28}$ ou aproximadamente 21,4%

c) $\frac{10}{28}$ ou aproximadamente 35,7%

d) $\frac{1}{28}$ ou aproximadamente 3,6%

e) $\frac{9}{28}$ ou aproximadamente 32,1%

21. alternativa **e**

- sim

22. a) $\frac{5}{6}$ ou $83{,}\overline{3}\%$

b) $\frac{25}{36}$ ou $69{,}\overline{4}\%$

c) $\frac{5}{6}$ ou $83{,}\overline{3}\%$

d) $\frac{35}{36}$ ou $97{,}\overline{2}\%$

23. 4 bolas verdes

24. alternativa **e**

25. a) $\frac{1}{8}$ ou 12,5%

b) $\frac{5}{24}$ ou $20{,}8\overline{3}\%$

c) $\frac{1}{12}$ ou $8{,}\overline{3}\%$

d) $\frac{1}{4}$ ou 25%

e) $\frac{47}{48}$ ou $97{,}91\overline{6}\%$

f) $\frac{1}{2}$ ou 50%

26. a) $\frac{1}{32}$ ou 3,125%

b) $\frac{5}{32}$ ou 15,625%

c) $\frac{31}{32}$ ou 96,875%

d) $\frac{1}{32}$ ou 3,125%

27. a) $\frac{1}{3}$ ou $33{,}\overline{3}\%$

b) $\frac{2}{3}$ ou $66{,}\overline{6}\%$

c) $\frac{1}{3}$ ou $33{,}\overline{3}\%$

d) $\frac{1}{3}$ ou $33{,}\overline{3}\%$

28. alternativa **e**

29. $\frac{28}{57}$ ou aproximadamente 49,1%

30. a) $\frac{19}{62}$ ou aproximadamente 30,6%

b) $\frac{25}{62}$ ou aproximadamente 40,3%

c) $\frac{4}{31}$ ou aproximadamente 12,9%

d) $\frac{45}{62}$ ou aproximadamente 72,6%

31. alternativa **d**

32. alternativa **b**

33. 5 bolas amarelas

34. Resposta pessoal.

35. alternativa **c**

36. $x = 2; y = 4; z = 6$

37. $\frac{5}{6}$

38. a) $\frac{1}{7}$ ou aproximadamente 14,3%

b) $\frac{2}{21}$ ou aproximadamente 9,52%

c) $\frac{4}{21}$ ou aproximadamente 19%

39. Resposta pessoal.

40. a) $\frac{1}{12}$ ou $8{,}\overline{3}\%$

b) $\frac{1}{4}$ ou 25%

c) $\frac{3}{4}$ ou 75%

41. a) $\frac{1}{52}$ ou aproximadamente 1,9%

b) $\frac{1}{13}$ ou aproximadamente 7,7%

c) $\frac{4}{13}$ ou aproximadamente 30,8%

d) $\frac{9}{13}$ ou aproximadamente 69,2%

42. a) $\frac{13}{20}$ ou 65%

b) $\frac{3}{10}$ ou 30%

c) $\frac{1}{5}$ ou 20%

d) $\frac{3}{20}$ ou 15%

e) $\frac{4}{5}$ ou 80%

43. a) $\frac{85}{237}$ ou aproximadamente 35,9%

b) $\frac{33}{79}$ ou aproximadamente 41,8%

c) $\frac{365}{474}$ ou aproximadamente 77,0%

d) $\frac{109}{474}$ ou aproximadamente 23,0%

44. alternativa **c**

- Resposta pessoal.
- Resposta pessoal.

45. verdadeiros: **b**, **c**, **d**; falso: **a**

46. independentes: **a**, **b**; dependentes: **c**, **d**

47. a) Probabilidade de uma pessoa que gosta de esportes ser homem.

b) Probabilidade de uma pessoa que gosta de esportes ser mulher.

c) Probabilidade de uma pessoa que gosta de música não ser homem.

d) Probabilidade de uma pessoa que não gosta de cinema não ser mulher.

e) Probabilidade de uma mulher gostar de música.

f) Probabilidade de um homem não gostar de música.

- Resposta pessoal.
- Resposta pessoal.

48. Resposta pessoal.

49. a) aproximadamente 35,7%

b) aproximadamente 28,6%

c) aproximadamente 35,7%

d) aproximadamente 64,3%

50. a) $\frac{49}{82}$ ou aproximadamente 59,8%

b) $\frac{99}{197}$ ou aproximadamente 50,3%

c) $\frac{1}{2}$ ou 50%

51. a) $\frac{15}{56}$ ou aproximadamente 26,8%

b) $\frac{1}{3}$ ou $33{,}\overline{3}\%$

52. a) $\frac{2}{5}$ ou 40%

b) $\frac{3}{4}$ ou 75%

53. $\frac{19}{66}$ ou $28{,}\overline{78}\%$

54. R$ 2,00 ou R$ 4,00

55. 20%

56. a) $\frac{1}{4}$ ou 25%

b) $\frac{1}{4}$ ou 25%

c) $\frac{1}{2}$ ou 50%

57. a) $\frac{1}{8\,192}$; $\frac{1}{2\,048}$

b) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{8\,192}$

d) Resposta pessoal.

e) Resposta pessoal.

58. alternativa **a**

59. a) $\frac{1}{360\,335\,976}$

b) $\frac{1}{384\,060}$

c) $\frac{1}{3\,701\,110}$

d) $\frac{1}{7\,423\,755\,240}$

- Resposta pessoal.

60. alternativa **b**

61. a) $\frac{125}{15\,552}$ ou aproximadamente 0,8%

b) $\frac{625}{11\,664}$ ou aproximadamente 5,4%

c) $\frac{3}{32}$ ou 9,375%

62. $\frac{7}{64}$ ou aproximadamente 10,94%

63. a) $\frac{48}{625}$ ou 7,68%

b) $\frac{243}{100\,000}$ ou 0,243%

c) $\frac{243}{3\,125}$ ou 7,776%

64. $\frac{162}{625}$ ou 25,92%

65. aproximadamente 0,2%

66. $\frac{57\,344}{390\,625}$ ou aproximadamente 14,7%

67. $\frac{5\,103}{16\,384}$ ou aproximadamente 31,1%

68. $\frac{15}{128}$ ou aproximadamente 11,72%

69. a) aproximadamente 0,3506%

b) aproximadamente 12,9%

70. $\frac{583\,443}{12\,500\,000}$ ou aproximadamente 4,67%

71. $\frac{3\,584}{78\,125}$ ou aproximadamente 4,6%

Capítulo 3 Estatística

1. Qualitativa:

- nominal: tipo de domicílio
- ordinal: grau de instrução dos moradores e mês de nascimento dos moradores

Quantitativa:

- discreta: total de homens e mulheres no domicílio, quantidade de banheiros no domicílio e idade dos moradores
- contínua: rendimento mensal dos moradores

2. Resposta pessoal.

3. a) internautas brasileiros

b) 10 500

c) Quantitativas: idade e quantidade de dias por semana que acessa a internet; Qualitativas: sexo, escolaridade, profissão, se costuma realizar compras pela internet, gênero musical preferido, gênero cinematográfico preferido e gênero literário preferido.

4. Resposta pessoal.

5. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

6.

Dados dos funcionários de uma empresa – 2021

Estado civil	f	f_a	f_r	f_{ar}
Casado	6	6	37,5%	37,5%
Solteiro	10	16	62,5%	100%
Total	16		100%	

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

7. Resposta pessoal.

8.

Quantidade de carros vendidos em uma concessionária em cada dia da semana no mês de novembro de 2021

Dias da semana	f	f_a	f_r	f_{ar}
Domingo	7	7	14,89%	14,89%
Segunda-feira	11	18	23,40%	38,29%
Terça-feira	5	23	10,64%	48,93%
Quarta-feira	3	26	6,38%	55,31%
Quinta-feira	9	35	19,15%	74,46%
Sexta-feira	6	41	12,77%	87,23%
Sábado	6	47	12,77%	100%
Total	47		100%	

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

9. a)

Refeições diárias por pessoa – 2021

Quantidade de refeições diárias	f	f_a	f_r	f_{ar}
1	3	3	0,25%	0,25%
2	190	193	15,83%	16,08%
3	420	613	35%	51,08%
4	377	990	31,42%	82,5%
5	96	1 086	8%	90,5%
6	72	1 158	6%	96,5%
7 ou mais	42	1 200	3,5%	100%
Total	1 200		100%	

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

b) 1 200 pessoas

c) 990 pessoas

d) 14%

10. a)

39	53	61	68	73	78	83	86
43	53	61	70	73	81	84	87
50	55	63	70	73	81	85	88
50	58	65	72	76	81	85	91
52	58	67	73	78	83	86	98

b)

Notas obtidas por 40 alunos de uma turma em certa avaliação de Matemática - 2021

Nota	f	f_a	f_r	f_{ar}
39 ⊢⊣ 49	2	2	5%	5%
50 ⊢ 60	8	10	20%	25%
60 ⊢ 70	6	16	15%	40%
70 ⊢ 80	10	26	25%	65%
80 ⊢ 90	12	38	30%	95%
90 ⊢ 100	2	40	5%	100%
Total	40		100%	

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

c) • 26 alunos • 75%

11. a) 18 funcionários

b) 95%

c) 30 funcionários

12. alternativa **d**

13. $A = 4$; $B = 13$; $C = 12$; $D = 2$; $E = 4$

$F = 36$; $G = 48$; $H = 50$; $I = 26\%$

$J = 38\%$; $L = 24\%$; $M = 4\%$; $N = 100\%$

$O = 8\%$; $P = 34\%$; $Q = 72\%$; $R = 100\%$

14. a) 22,48 milhões de pessoas
b) Hong Kong e Bangcoc.
c) Resposta pessoal.

15. a) 88 famílias
b) 1,625

17. alternativa **c**

18. a) 74,7
b) Resposta pessoal.

19. Resposta pessoal.

20. candidato A: 13,8
candidato B: 13,6

21. a) $P_1 = 2$ e $P_2 = 3$
b) R$ 370,00
c) 9

22. a) $\overline{x} \simeq 3{,}6$; $Mo = 3$; $Md = 3$
b) $\overline{x} \simeq 3{,}8$; trimodal; $Mo = 2$; $Mo = 3$; $Mo = 7$; $Md = 3$
c) $\overline{x} = 3{,}5$; amodal; $Md = 3{,}5$
d) $\overline{x} = 3$; $Mo = 8$; $Md = 4{,}5$

23. $\overline{x} = 4{,}25$ funcionários;
$Mo = 6$ funcionários;
$Md = 5{,}5$ funcionários

24. alternativa **b**

25. alternativa **d**

26. a) $\overline{x} = 18{,}82$; $Mo = 18$; $Md = 19$
b) 53 alunos
c) 25%

27. a) 1
b) 4,5
c) 7
d) 4,5
e) 1
f) 8

28. a) 50; 48,5
b) Resposta pessoal.

29. a) falsa
b) verdadeira
c) falsa

30. Resposta pessoal.

31. domingo

32. Resposta pessoal.

33. a) não renovável; não renovável
b) Resposta pessoal.

34. Resposta pessoal.

35. a) não
b) aproximadamente 304 mil toneladas
c) Japão
d) Resposta pessoal.
e) Resposta pessoal.

36. a) jan.-fev.-mar. de 2017;
Resposta pessoal.
b) 2,7%
c) diminuiu; 1,6%

37. a) Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.

38. a) Não.
b) Sim.

39. Resposta pessoal.

40. a)

Ano de publicação dos livros da biblioteca - 2021

Ano de publicação	f	f_a	f_r	f_{ar}
1908 ⊢ 1924	978	978	2,44%	2,44%
1924 ⊢ 1940	1 630	2 608	4,06%	6,5%
1940 ⊢ 1956	2 608	5 216	6,49%	12,99%
1956 ⊢ 1972	6 194	11 410	15,42%	28,41%
1972 ⊢ 1988	6 846	18 256	17,05%	45,46%
1988 ⊢ 2004	14 344	32 600	35,72%	81,18%
2004 ⊢ 2020	7 561	40 161	18,82%	100%
Total	40 161		100%	

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

41. a)

Número de anos de estudo de cada um dos 25 candidatos a um emprego - 2021

Anos de estudo	f	f_a	f_r	f_{ar}
0 ⊢ 4	10	10	40%	40%
4 ⊢ 8	7	17	28%	68%
8 ⊢ 12	6	23	24%	92%
12 ⊢ 16	2	25	8%	100%
Total	25		100%	

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

c) 8 candidatos
d) 92%

42. a) 7 a 17 pessoas
b) sim
c) Não é possível dizer com certeza.
d) aproximadamente 24,68;
peso normal

43. a) 1 690 187
b) 460 329 motos; aproximadamente 43,54%
c) Entre os anos 2006 e 2007.
d) 2009, 2013, 2014, 2015, 2016 e 2017

44. a) 274,67 m
b) Resposta pessoal.
c) sim; Resposta pessoal.

45. alternativa **c**

46. a) 90 pontos
b) 10 equipes

47. a) Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.
c) Resposta pessoal.

48. a) competidor **A**: 200 pontos
competidor **B**: 200 pontos
b) competidor **A**: $\sigma_A = 22$ pontos
competidor **B**: $\sigma_A = 26$ pontos
c) competidor **A**

49. a) 13 funcionários;
aproximadamente 26%
b) 15 funcionários

50. Resposta pessoal.

51. alternativa **d**

52. alternativa **a**

53. a) 120 pacotes
b) $\overline{x} = 5{,}002$ kg; $Mo = 5{,}005$ kg; $Md = 5{,}002$ kg
c) $D_m \simeq 0{,}009$ kg; $\sigma^2 \simeq 0{,}000119$;
$\sigma \simeq 0{,}011$ kg

54. Resposta pessoal.

55. alternativa **d**

56. a) aproximadamente 27%
b) aproximadamente 59,29%

57. a)

Registros do experimento de lançamento de um dado - 2021

Face	f	f_a	f_r	f_{ar}
1	18	18	3%	3%
2	36	54	6%	9%
3	168	222	28%	37%
4	150	372	25%	62%
5	174	546	29%	91%
6	54	600	9%	100%
Total	600		100%	

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

b) É possível suspeitar que o dado não seja honesto.

58. a) salto de asa-delta; aproximadamente 0,2%
b) 12 vezes
c) menor
d) não

Sugestões de leitura para o aluno

- ***A ciência da sorte: a matemática e o mundo das apostas: de loterias e cassinos ao mercado financeiro***

  KUCHARSKI, Adam. Rio de Janeiro: Zahar, 2017.

  Neste livro, o autor apresenta um relato entre o mundo das apostas e a Ciência, abordando a Matemática, a Psicologia, a Economia e a Física. Ele nos conta histórias que foram bem-sucedidas no mundo das apostas e como isso mudou as ideias fundamentais sobre chance, aleatoriedade e sorte.

- ***As leis do acaso: como a probabilidade pode nos ajudar a compreender a incerteza***

  MATTHEWS, Robert. Rio de Janeiro: Zahar, 2017.

  Neste livro, Robert Matthews explica as leis da probabilidade por meio de diversos casos matemáticos. O autor busca mostrar ao leitor como usar essas leis para tomar boas decisões e entender melhor o acaso.

- ***Como mentir com estatística***

  HUFF, Darrell. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.

  Nesta obra, o autor alerta o leitor sobre como a Estatística pode ser usada para maquiar dados e questiona o grau de confiança das análises estatísticas. Além disso, mostra como interpretar corretamente os dados e diferenciar informações confiáveis de falácias.

- ***Estatística: o que é, para que serve, como funciona***

  WHEELAN, Charles. Rio de Janeiro: Zahar, 2016.

  Neste livro, o autor explica conceitos importantes de Estatística de maneira acessível e sem entrar em detalhes técnicos, mostrando a utilidade dessa ciência e como ela está presente em nossas vidas, tanto em dados usados em relatórios médicos como em canais de streaming, *que sabem de quais filmes você gosta.*

- ***Estatística para leigos***

  RUMSEY, Deborah J. 2. ed. Rio de Janeiro: Alta Books, 2019.

  Este livro aborda o estudo da Estatística por meio de diversos problemas, desde distribuição normal e testes de hipóteses até histogramas, com resoluções comentadas explicando o passo a passo.

- ***Estatística sem matemática: a ligação entre as questões e a análise***

  MAGNUSSON, William E.; MOURÃO, Guilherme; COSTA, Flávia R. C. 2. ed. Londrina: Planta, 2015.

  O livro trata de conceitos estatísticos de forma acessível e simples. De uma maneira quase oral, dispensa a simbologia matemática que intimida iniciantes e leigos no assunto para apresentar a Estatística como uma útil ferramenta de análise.

- **Factfulness: *o hábito libertador de só ter opiniões baseadas em fatos***

  ROSLING, Hans; ROSLING, Ola; RÖNNLUND, Anna Rosling. Rio de Janeiro: Record, 2019.

  Usando fatos e estatísticas, o livro mostra a importância de ter opiniões baseadas em dados sólidos e como a má interpretação dos dados pode gerar estresse e nos levar a crer que as situações são piores do que realmente são.

- ***O guia contra mentiras: como pensar criticamente na era da pós-verdade***

  LEVITIN, Daniel J. São Paulo: Objetiva, 2019.

  O livro instiga o pensamento crítico do leitor ao questionar estatísticas aparentemente verossímeis, com as quais somos bombardeados frequentemente, como índices de desemprego, taxas de divórcio e pesquisas de intenção de votos. O autor apresenta exemplos e dicas de como compreender e interpretar corretamente esses dados.

- ***O poder do pensamento matemático: a ciência de como não estar errado***

  ELLENBERG, Jordan. Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

  O intuito do livro é mostrar como a Matemática vai além das fórmulas e contas aprendidas nas escolas, mostrando sua presença no cotidiano e sua relação com o próprio pensamento. O autor usa eventos e histórias para bordar conceitos matemáticos complexos de forma lúdica e simples.

- ***Uma senhora toma chá...: como a estatística revolucionou a ciência no século XX***

  SALSBURG, David. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

  O livro expõe, por meio de quadros biográficos, como a Estatística mudou a forma de se fazer pesquisa, tornando-a mais precisa. Um dos casos relatados é o de um grupo de professores ingleses que indagaram se a ordem em que os ingredientes são colocados interfere no gosto do chá.

Sites

- ***Guia do Estudante***

  Disponível em: <https://guiadoestudante.abril.com.br/>. Acesso em: 5 jul. 2020.

  Este site *apresenta informações sobre vestibulares, Enem e Fies, além de textos sobre orientação profissional e informações sobre várias profissões, incluindo vídeo explicativo gravado por um profissional de cada área.*

- ***O estatístico***

  Disponível em: <https://oestatistico.com.br/>. Acesso em: 22 ago. 2020.

  O site *apresenta diversos estudos de diferentes assuntos teóricos e práticos relacionados à Estatística, além de abordar temas sobre mercado de trabalho e carreira.*

- ***Matemática Básica***

  Disponível em: <https://matematicabasica.net/>. Acesso em: 10 jul. 2020.

  Nesse site, *encontramos conteúdos de Matemática tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio, entre eles, uma seção com materiais de Estatística e exercícios resolvidos e outra abordando a Matemática financeira.*

- ***Khan Academy***

  Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/>. Acesso em: 5 jul. 2020.

  O site *disponibiliza gratuitamente cursos de Matemática, Ciências, Economia e Ciências da computação, de nível médio a superior. Os cursos contêm videoaulas e atividades.*

Bibliografia

AGÊNCIA NACIONAL DE ÁGUAS (ANA). *Manual de usos consuntivos da água no Brasil*. Brasília, 2019. Disponível em: <http://www.snirh.gov.br/portal/snirh/centrais-de-conteudos/central-de-publicacoes/ana_manual_de_usos_consuntivos_da_agua_no_brasil.pdf>. Acesso em: 18 fev. 2020.

Este manual trata das demandas de uso da água no Brasil e contém textos informativos, tabelas, gráficos e infográficos, apresentando o assunto por regiões brasileiras.

AGÊNCIA NACIONAL DE AVIAÇÃO CIVIL (Anac). *Relatório Anual de Segurança Operacional (RASO) 2018*. Disponível em: <https://www.anac.gov.br/assuntos/paginas-tematicas/gerenciamento-da-seguranca-operacional/arquivos/RASO_2018_v4.pdf>. Acesso em: 14 fev. 2020.

A Anac publica o Relatório Anual de Segurança Operacional *com o objetivo de fornecer informações importantes sobre o desempenho da aviação civil brasileira, em especial, sobre os acidentes que ocorreram nos últimos cinco anos, buscando melhorias para a segurança de nossa aviação.*

AGÊNCIA NACIONAL DE SAÚDE SUPLEMENTAR (ANS). *Dados gerais*. Disponível em: <https://www.ans.gov.br/perfil-do-setor/dados-gerais>. Acesso em: 10 fev. 2020.

A ANS é o órgão do governo responsável pelos planos de saúde no Brasil.

ALBERTS, Bruce et al. *Fundamentos da biologia celular*. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2011.

Este livro apresenta explicações sobre o funcionamento de uma célula viva e também informações necessárias para a compreensão de assuntos da Biomedicina e da Biologia que fazem parte de nossas vidas.

APÓS CHUVA causar caos em São Paulo, cidade tem trânsito abaixo da média nesta terça-feira. *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 11 fev. 2020. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/cotidiano/2020/02/apos-chuva-causar-caos-em-sao-paulo-cidade-tem-apenas-um-ponto-de-alagamento-e-transito-abaixo-da-media.shtml>. Acesso em: 23 jun. 2020.

Neste link, *é possível ficar informado sobre o fluxo do trânsito após um evento climático precipitado em dia de verão.*

ARAUJO, Fernanda. Consórcio de veículo: entenda como funciona. *Serasa Ensina*. Disponível em: <https://www.serasa.com.br/ensina/dicas/consorcio-de-veiculo-entenda-como-funciona/>. Acesso em: 14 fev. 2020.

Neste link, *o Serasa esclarece as dúvidas sobre o funcionamento do consórcio de veículo, de maneira simples e direta.*

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE EMPRESAS DE PESQUISA (Abep). *Critério de Classificação Econômica Brasil*. 2019. Disponível em: <http://www.abep.org/criterioBr/01_cceb_2019.pdf>. Acesso em: 26 fev. 2020.

A Abep reúne as maiores empresas de pesquisa do Brasil e tem o objetivo de representar os interesses e contribuir para a profissionalização da indústria da pesquisa.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DO ALUMÍNIO (Abal). *Reciclagem*. Disponível em: <http://abal.org.br/sustentabilidade/reciclagem/>. Acesso em: 13 fev. 2020.

A Abal reúne discussões a respeito de assuntos pertinentes que estão relacionados à indústria do alumínio no país.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DOS FABRICANTES DE MOTOCICLETAS, CICLOMOTORES, MOTONETAS, BICICLETAS E SIMILARES (Abraciclo). *Dados do setor*. Disponível em: <https://www.abraciclo.com.br/site/producao/>. Acesso em: 17 fev. 2020.

Esta associação busca sempre oferecer inovações e conhecimentos sobre o setor de duas rodas.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA PARA O ESTUDO DA OBESIDADE E DA SÍNDROME METABÓLICA (Abeso). *Calculadora de IMC*. Disponível em: <https://abeso.org.br/obesidade-e-sindrome-metabolica/calculadora-imc/>. Acesso em: 28 ago. 2020.

Este site *aborda questões relacionadas à saúde, em particular, como combater a obesidade, informando sobre o cálculo do IMC no diagnóstico do problema.*

BEST HEALTH DEGREES. *Your chances of dying* (Suas chances de morrer). Disponível em: <https://www.besthealthdegrees.com/health-risks>. Acesso em: 20 fev. 2020.

Você sabe quais são as chances de uma pessoa morrer? Este site *apresenta a probabilidade que uma pessoa tem de morrer ao executar as mais variadas atividades, como jogar* videogame, *dançar, praticar ciclismo, saltar, esquiar e outras.*

BRASIL. Ministério da Educação. *Programa Universidade para Todos – ProUni*. Disponível em: <http://www.dados.gov.br/dataset/mec-prouni>. Acesso em: 4 mar. 2020.

O ProUni é um programa governamental que objetiva conceder bolsas de estudo, integrais e parciais, para estudantes do Ensino Médio em cursos de graduação nas instituições privadas de Ensino Superior.

BRASIL. Ministério da Infraestrutura. *Anuário Estatístico de Transportes*. Disponível em: <http://infraestrutura.gov.br/images/BIT_TESTE/Publica%C3%A7oes/suma_exec_aet_2010_2018.pdf>. Acesso em: 14 fev. 2020.

O Ministério da Infraestrutura é um órgão administrativo responsável pelas políticas nacionais de trânsito e de transportes.

BRASIL. Ministério da Saúde. *Assistência em planejamento familiar*: manual técnico. 4. ed. Brasília, 2002. Disponível em: <http://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/0102assistencia1.pdf>. Acesso em: 30 mar. 2020.

Este manual trata de assuntos diversos e de grande importância relacionados ao planejamento familiar, servindo de orientação e assistência para a população.

BRASIL. Ministério da Saúde. *Direitos sexuais, direitos reprodutivos e métodos anticoncepcionais*. Brasília, 2009. Disponível em: <http://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/direitos_sexuais_reprodutivos_metodos_anticoncepcionais.pdf>. Acesso em: 24 ago. 2020.

Este documento apresenta os direitos humanos, de maneira clara e objetiva, que são reconhecidos por leis nacionais e internacionais, esclarecendo os assuntos relacionados aos direitos reprodutivos e sexuais.

BRASIL. Ministério do Turismo. *Principais emissores*. Disponível em: <http://www.dadosefatos.turismo.gov.br/estat%C3%ADsticas-e-indicadores/principais-emissores.html>. Acesso em: 27 jan. 2020.

O Ministério do Turismo é um órgão do governo do Brasil responsável pelo desenvolvimento do turismo como atividade econômica sustentável que gera empregos, proporcionando a inclusão social.

CAIXA ECONÔMICA FEDERAL (CEF). *Mega-Sena*. Disponível em: <http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/megasena/>. Acesso em: 9 abr. 2020.

Este site *mantém as pessoas informadas acerca da loteria federal, como resultados de jogos, montante arrecadado, instruções de como realizar o jogo, probabilidade de acertar os números jogados, entre outros.*

CALABRIA, Angelica R.; CAVALARI, Mariana F. Um passeio histórico pelo início da teoria das probabilidades. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 10, 2013, Campinas. *Anais*... Campinas: Unicamp, 2013. Disponível em: <https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/335/o/Um_passeio_hist%C3%B3rico_pelo_in%C3%ADcio_da_teoria_das_probabilidades-Mariana_Feiteiro_Cavalari_e_Ang%C3%A9lica_R._Cal%C3%A1bria.pdf?1409001312>. Acesso em: 30 mar. 2020.

O artigo mostra que, desde a Antiguidade, a teoria das probabilidades já era estudada e apresenta discussões relevantes sobre sua sistematização.

CENTRO DE ESTUDOS, RESPOSTA E TRATAMENTO DE INCIDENTES DE SEGURANÇA NO BRASIL (Cert). *Estatísticas dos incidentes reportados ao Cert.br*. Disponível em: <https://www.cert.br/stats/incidentes/>. Acesso em: 10 fev. 2020.

O Cert é responsável pelos incidentes de segurança causados em computadores que utilizam redes conectadas à internet no Brasil e seu maior objetivo é aumentar os níveis de segurança e de capacidade no tratamento desses incidentes.

COMPANHIA NACIONAL DE ABASTECIMENTO (Conab). *Acompanhamento da safra brasileira*. Disponível em: <https://www.conab.gov.br/info-agro/safras>. Acesso em: 12 fev. 2020.

A Conab é uma empresa pública, vinculada ao Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento, presente em todas as regiões brasileiras e tem o objetivo de participar de políticas públicas para garantir a renda do produtor rural.

CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE FUTEBOL. *Campeonato Brasileiro de Futebol*: Série A - 2019. Disponível em: <https://www.cbf.com.br/futebol-brasileiro/competicoes/campeonato-brasileiro-serie-a/2019>. Acesso em: 26 fev. 2020.

O site *apresenta as mais variadas informações sobre o Campeonato Brasileiro de Futebol, como os times inscritos, os títulos brasileiros, os jogadores que participam de cada time, o calendário de jogos e muito mais.*

EMISSÃO CO_2. *Global Carbon Atlas*. Disponível em: <http://www.globalcarbonatlas.org/en/CO2-emissions>. Acesso em: 27 jan. 2020.

O Atlas Global de Carbono é uma plataforma que visa explorar e visualizar dados atualizados a respeito dos fluxos de carbono resultantes das diversas atividades humanas e também de processos naturais.

EMPRESA DE PESQUISA ENERGÉTICA (EPE). *Matriz energética e elétrica*. Disponível em: <https://www.epe.gov.br/pt/abcdenergia/matriz-energetica-e-eletrica>. Acesso em: 13 jun. 2020.

A EPE é uma empresa pública vinculada ao Ministério de Minas e Energia. Ela é responsável por fazer a prestação de serviços na área de estudos e pesquisas para oferecer subsídios ao planejamento do setor energético.

FEDERAÇÃO BRASILEIRA DE BANCOS (Febraban). Normativo *SARB 004/2009*. Disponível em: <https://www.febraban.org.br/7Rof7SWg6qmyvwJcFwF7I0aSDf9jyV/sitefebraban/Normativo%20SARB%20004-09%20-%20Atendimento%20em%20Ag%C3%AAncias.pdf>. Acesso em: 28 ago. 2020.

A Febraban é uma entidade que representa os bancos e tem o objetivo de aperfeiçoar e apresentar melhorias para o sistema bancário.

FIVB. *Copa do Mundo 2019*. Disponível em: <https://www.volleyball.world/en/volleyball/worldcup/2019/men/teams/bra%20brazil/players>. Acesso em: 28 ago. 2020.

Este site *contém notícias e informações sobre os jogos da Copa do Mundo de voleibol.*

FUNDAÇÃO CULTURAL PALMARES (FCP). *Quadro geral de comunidades remanescentes de quilombos (CRQs)*. Disponível em: <http://www.palmares.gov.br/wp-content/uploads/2015/07/quadro-geral-02-08-2019.pdf>. Acesso em: 7 fev. 2020.

A Fundação Cultural Palmares é uma entidade pública brasileira vinculada ao Ministério da Cultura e um de seus principais objetivos é promover a preservação das manifestações afro-brasileiras.

GONSALES, Fernando. Níquel Náusea. *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 27 set. 2002. Ilustrada p. E11.

A tira apresentada é uma das publicações de entretenimento da Folha de S.Paulo, também conhecida como Folha, jornal brasileiro de grande circulação no país, editado na cidade de São Paulo, o qual contém notícias, informações diversas, entretenimento e pesquisas.

HONG KONG foi a cidade mais visitada em 2019: Rio sai das 100 primeiras. *UOL*, 3 dez. 2019. Disponível em: <https://www.uol.com.br/viagem/noticias/2019/12/03/hong-kong-foi-a-cidade-mais-visitada-em-2019-rio-sai-das-100-primeiras.htm>. Acesso em: 11 fev. 2020.

Texto informativo sobre a metrópole Hong Kong publicado na página da Universo Online*. Conhecida pela sigla UOL, essa é uma empresa brasileira de conteúdo e serviços que apresenta diversos assuntos sobre saúde, economia, lazer, esporte e atualidades.*

IBGE. *Atlas Geográfico Escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro, 2018.

Contém informações geográficas, cartográficas e estatísticas, oferecendo dados importantes para o estudo e a análise das dimensões política, ambiental e econômica do Brasil.

IBGE. *Censo 2020*. Disponível em: <https://censo2020.ibge.gov.br>. Acesso em: 11 fev. 2020.

O site *nos auxilia a conhecer melhor nossos municípios, estados e país. Os resultados do Censo 2020 mostram a realidade brasileira, fornecendo dados e moldando o retrato do Brasil em determinado período de tempo.*

IBGE. Censo 2020. Disponível em: <https://censo2020.ibge.gov.br/apps/treinamentoCenso2020/media/apostila.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2020.

O Censo Demográfico apresenta informações detalhadas e atualizadas de como vive o povo brasileiro a fim de obter subsídios para a implementação de políticas públicas e realização de investimentos para um futuro melhor.

IBGE. *Pesquisa nacional por amostra de domicílios contínua*: trimestre móvel out.-dez. 2019. 31 jan. 2020. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/3086/pnacm_2019_dez.pdf>. Acesso em: 13 fev. 2020.

O documento expõe informações sobre sexo, idade e cor ou raça dos moradores. Esses dados são úteis para a compreensão e a caracterização do mercado de trabalho e também para o entendimento acerca de aspectos sociais e demográficos do país.

IBGE. Sistema IBGE de Recuperação Automática (Sidra). *Índice nacional de preços ao consumidor amplo*. 15 ago. 2020 . Disponível em: <www.sidra.ibge.gov.br/home/ipca15/brasil>. Acesso em: 28 jan. 2020.

Apresenta um resumo de dados por meio de tabelas de pesquisas realizadas sobre os mais diversos assuntos.

IBGE. *Tábua completa de mortalidade para o Brasil – 2018*: breve análise da evolução da mortalidade no Brasil. Rio de Janeiro, 2019. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/3097/tcmb_2018.pdf>. Acesso em: 18 fev. 2020.

Este documento contém a tábua de mortalidade, elaborada pelo IBGE, apresentando um modelo demográfico que descreve a incidência da mortalidade ao longo do ciclo vital das pessoas.

IMPRENSA NACIONAL. População residente segundo as unidades da federação e municípios. *Diário Oficial da União*, 28 ago. 2019. Disponível em: <http://www.in.gov.br/en/web/dou/-/resolucao-n-3-de-26-de-agosto-de-2019-212912380>. Acesso em 13 jun. 2020.

Este site *contém as estimativas da população para Estados e Municípios com a data de referência em 2019.*

INSTITUTO CHICO MENDES DE CONSERVAÇÃO DA BIODIVERSIDADE (ICMBio). *Livro vermelho da fauna brasileira ameaçada de extinção*. Brasília, 2018. 7 v. Disponível em: <http://www.icmbio.gov.br/portal/component/content/article/10187>. Acesso em: 7 fev. 2020.

A obra, que apresenta a fauna ameaçada de extinção no Brasil, foi publicada pelo ICMBio, uma plataforma virtual que visa à proteção e à conservação da biodiversidade e apresenta dados organizados de espécies contando com registros de ocorrências de 93 442 espécies.

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS (Inpe). *Prodes Amazônia*. Disponível em: <www.obt.inpe.br/OBT/assuntos/programas/amazonia/prodes>. Acesso em: 7 fev. 2020.

O Inpe é um instituto federal brasileiro dedicado à pesquisa e à exploração espacial e tem como objetivo desenvolver estudos e pesquisas científicas e promover o avanço tecnológico e a capacitação de recursos humanos para atuarem nas áreas espaciais, como ocorre com o projeto Prodes, que monitora por meio de satélites o desmatamento da Amazônia.

INTERNATIONAL ENERGY AGENCY (IEA). *Data and statistics* (Dados e estatísticas). Disponível em: <https://www.iea.org/data-and-statistics?country5WORLD&fuel5CO2%20emissions&indicator5CO2%20emissions%20by%20sector>. Acesso em: 14 fev. 2020.

A IEA trabalha com governos e indústrias auxiliando os países a fornecer energia segura e sustentável para todos.

LARCO. *40% de um barril de petróleo viram* diesel *e 18% gasolina após refino*. Disponível em: <http://www.larcopetroleo.com.br/noticias/40-de-um-barril-de-petroleo-viram-diesel-e-18-gasolina-apos-o-refino>. Acesso em: 5 mar. 2020.

A Larco é uma distribuidora de combustível e visa à integridade dos combustíveis oferecidos por meio de uma estrutura de distribuição de qualidade, tendo muita credibilidade no mercado.

MONTEIRO, Edson. *Trajetória histórico-social da engenharia brasileira*. Rio de Janeiro: Letra Capital, 2019.

O autor deste livro conta a trajetória da engenharia brasileira, de modo contextualizado, desde o final do século XIX até os dias atuais.

NÚCLEO DE INFORMAÇÃO E COORDENAÇÃO DO PONTO BR (NIC.br). *Pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação nos domicílios brasileiros*: TIC domicílios 2018. São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil, 2019. Disponível em: <https://cetic.br/media/docs/publicacoes/2/12225320191028-tic_dom_2018_livro_eletronico.pdf>. Acesso em: 18 fev. 2020.

Documento que apresenta os resultados de uma pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação nos domicílios brasileiros, além de assuntos relacionados à internet.

PICKOVER, Clifford A. *O livro da matemática*: de Pitágoras à 57ª dimensão, 250 marcos da história da matemática. Madrid: Librero, 2011.

Este livro trata de assuntos interessantes da Matemática e dos marcos mais significativos dessa ciência, destacando sua magia e mostrando como ela se faz presente em todos os lugares.

PROGRAMA DAS NAÇÕES UNIDAS PARA O DESENVOLVIMENTO (Pnud). *Relatório do Desenvolvimento Humano de 2019*. Disponível em: <http://hdr.undp.org/sites/default/files/hdr_2019_pt.pdf>. Acesso em: 28 ago. 2020.

O Pnud é o órgão da Organização das Nações Unidas que tem o objetivo de promover à população melhores condições de vida e de emprego, criando soluções para os problemas sociais internacionais.

QUAL A DIFERENÇA entre DNA, gene e cromossomo? *Superinteressante*, 2 set. 2019. Mundo Estranho. Disponível em: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/qual-a-diferenca-entre-dna-gene-e-cromossomo>. Acesso em: 28 fev. 2020.

Você sabe qual é a diferença entre DNA, gene e cromossomo? É possível ficar informado sobre isso e muito mais acessando esta revista, que apresenta vários assuntos interessantes, inclusive conteúdos relacionados à Matemática.

QUAL É A ORIGEM do jogo de dados? *Superinteressante*, 4 jul. 2018. Mundo estranho. Disponível em: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/qual-e-a-origem-do-jogo-de-dados/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

Esta revista expõe conteúdos interessantes e curiosidades dos mais variados assuntos, entre eles o relato sobre a origem do jogo de dados.

Retrato de Luca Pacioli. 1495. Jacopo de Barbari. Óleo sobre madeira.

Esta obra de arte apresenta o retrato do frade franciscano matemático Luca Pacioli e alguns elementos matemáticos.

SHALDERS, André. Como funcionam as pesquisas eleitorais? *BBC Brasil*, 23 abr. 2018. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/brasil-43845326>. Acesso em: 28 fev. 2020.

Entre as notícias de grande relevância, sobre o Brasil e o mundo, como saúde, esporte, economia e tecnologia, neste link *você encontra informações precisas sobre o mecanismo das pesquisas eleitorais.*

THE BOEING COMPANY. *Statistical Summary of Commercial Jet Airplane Accidents* (Resumo estatístico dos acidentes de avião a jato comercial). set. 2019. Disponível em: <http://www.boeing.com/news/techissues/pdf/statsum.pdf>. Acesso em: 7 fev. 2020.

The Boeing Company é uma empresa multinacional de desenvolvimento aeroespacial, sendo uma das maiores no ramo de fabricação de aeronaves.

THE SKYSCRAPER CENTER. *Building lists*. Disponível em: <www.skyscrapercentre.com/buildings>. Acesso em: 10 jul. 2020.

Neste site, *você fica sabendo sobre os cem edifícios já concluídos mais altos do mundo; os cem edifícios mais altos do mundo que ainda estão em construção; os cem edifícios mais altos para hotelaria e outras curiosidades.*

WATER FOOTPRINT NETWORK. *Product gallery*. Disponível em: <https://waterfootprint.org/en/resources/interactive-tools/product-gallery/>. Acesso em: 4 fev. 2020.

A Water Footprint Network é uma plataforma que visa à colaboração entre empresas, organizações e indivíduos no oferecimento de soluções para os problemas do mundo relacionados à água, incentivando seu uso correto.

WATSON, James D.; BERRY, Andrew. *DNA*: o segredo da vida. Trad. Carlos Afonso Malferrari. São Paulo: Companhia das Letras, 2005.

Este livro apresenta, por meio de linguagem simples e fotografias, os principais acontecimentos que marcaram a Biologia, contendo pesquisas sobre o funcionamento das moléculas de DNA e sua intervenção genética.

Siglas

Enem: Exame Nacional do Ensino Médio

ESPM-SP: Escola Superior de Propaganda e *Marketing* (São Paulo)

FGV-SP: Fundação Getúlio Vargas (São Paulo)

Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular (São Paulo)

Mack-SP: Universidade Presbiteriana Mackenzie (São Paulo)

Uece: Universidade Estadual do Ceará

UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina (Paraná)

Uespi: Universidade Estadual do Piauí

Ufac: Universidade Federal do Acre

UFJF-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora (Minas Gerais)

UFPA: Universidade Federal do Pará

UFPR: Universidade Federal do Paraná

UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UFRJ: Universidade Federal do Rio de Janeiro

UFRN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Unifesp: Universidade Federal de São Paulo

Matemática

Estatística, análise combinatória e probabilidade

Assessoria pedagógica

Sumário

1 O Ensino Médio e esta coleção 163

Estrutura da obra 163

A Matemática no Ensino Médio 167

Cultura de paz, combate à violência e promoção da saúde mental 171

Pensamento computacional 173

Metodologias e estratégias ativas 174

Avaliação 179

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Ensino Médio 183

Abordagem teórico-metodológica 187

Leitura e Matemática no Ensino Médio 190

Bibliografia consultada 193

2 Sugestões de cronogramas 197

3 Painel do volume 197

4 Sugestões para aprofundamento 202

Sugestões de leitura para o professor 202

Sites, vídeos e *podcasts* 203

Cursos e instituições 204

5 Orientações sobre os capítulos 206

CAPÍTULO 1 Análise combinatória e binômio de Newton 206

CAPÍTULO 2 Probabilidade 214

CAPÍTULO 3 Estatística 218

6 Páginas para reprodução 227

Fichas e quadro 227

Ficha de pesquisa 228

7 Resolução dos problemas e exercícios 230

1 O Ensino Médio e esta coleção

Estrutura da obra

Esta obra está estruturada em seis volumes, sendo estes autocontidos e não sequenciais, ou seja, cada volume apresenta todos os conteúdos imprescindíveis para a compreensão dos alunos, de modo que não seja necessário retomar conteúdos abordados em outros volumes. Assim, esta seção tem por objetivo apresentar como os capítulos do Livro do Estudante estão estruturados, com fac-símiles, textos explicativos a respeito de cada tipo de seção e destaques que poderão aparecer nos capítulos.

Para promover uma aprendizagem enriquecedora e completa, são usados nesta obra, tanto no desenvolvimento dos conteúdos como em seções especiais e tarefas propostas, textos que possuem vários elementos, como imagens, desenhos e ícones. Por isso, o uso neste volume de aparentes publicidades ou marcas é justificado pelo Parecer CNE/CEB nº 15/2000, quando menciona que “[...] o uso didático de imagens comerciais identificadas pode ser pertinente desde que faça parte de um contexto pedagógico mais amplo, conducente à apropriação crítica das múltiplas formas de linguagens presentes em nossa sociedade, submetido às determinações gerais da legislação nacional e às específicas da educação brasileira, com comparecimento módico e variado [...]”, tendo o único objetivo de auxiliar os alunos a compreender o conteúdo trabalhado.

- ***Estrutura do Livro do Estudante***

Abertura do capítulo

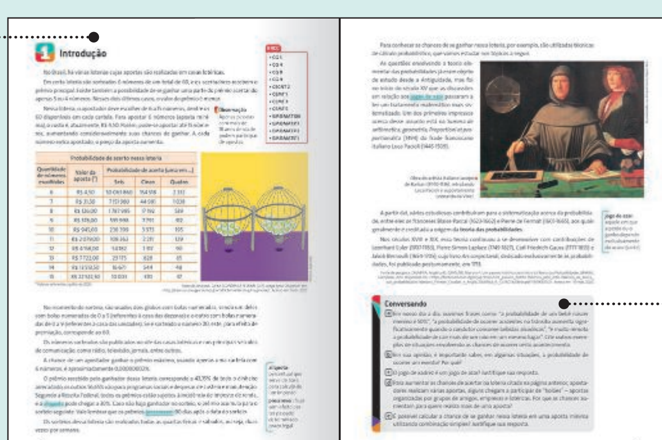
Nessas páginas, com base em um texto relacionado a diferentes assuntos e situações, os alunos são convidados a responder a algumas questões, que visam motivá-los a refletir sobre o conteúdo a ser trabalhado no decorrer do capítulo, além de explorar os conhecimentos prévios deles. Em geral, os assuntos abordados buscam estabelecer uma relação com outros componentes curriculares, como Biologia, Química e Física, por exemplo.

BNCC

Os códigos referentes a destaques da BNCC indicados no sumário estão sinalizados no início do capítulo correspondente, destacados neste quadro.

Introdução

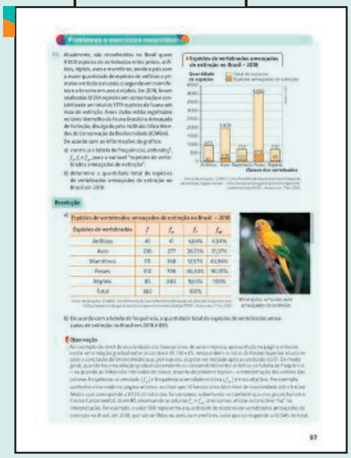
Todos os capítulos têm esse tópico inicial. Nele, há situações-problema, textos referentes à história da Matemática ou situações do cotidiano relacionadas ao conteúdo, explorando os conhecimentos prévios dos alunos e mostrando a necessidade de estudar o conceito abordado.



Conversando

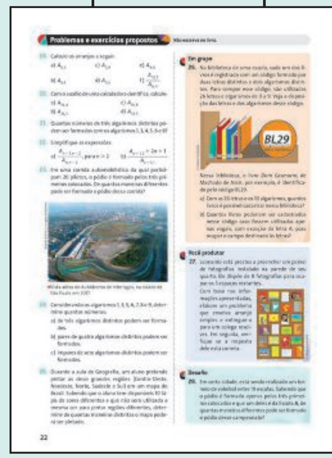
Seção no final da introdução, na qual são propostas questões que servem como diálogo inicial, a fim de incentivar a interlocução entre alunos e professor, bem como organizar e expor os argumentos individuais e a verbalização de ideias matemáticas.

Problemas e exercícios resolvidos



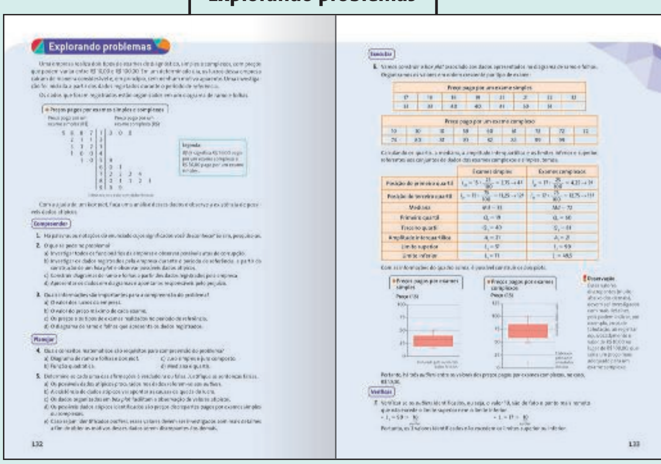
Nessa seção, são apresentadas tarefas resolvidas, que servem tanto de exemplo quanto complemento da teoria abordada. De modo geral, a seção vem logo após a teoria, a fim de contribuir no desenvolvimento de estratégias para a resolução de tarefas propostas nas demais seções do livro.

Problemas e exercícios propostos



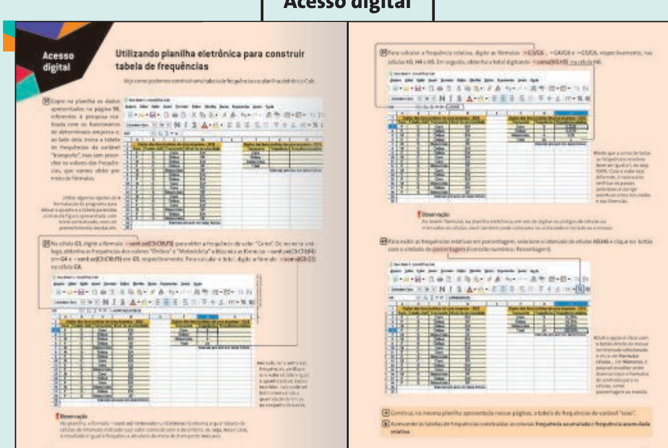
Propõe tarefas referentes ao conteúdo em estudo, que permitem aos alunos colocar em prática o que estão aprendendo, desenvolvendo assim o aprendizado por meio de situações desafiadoras e também utilizando diferentes estratégias de resolução.

Explorando problemas



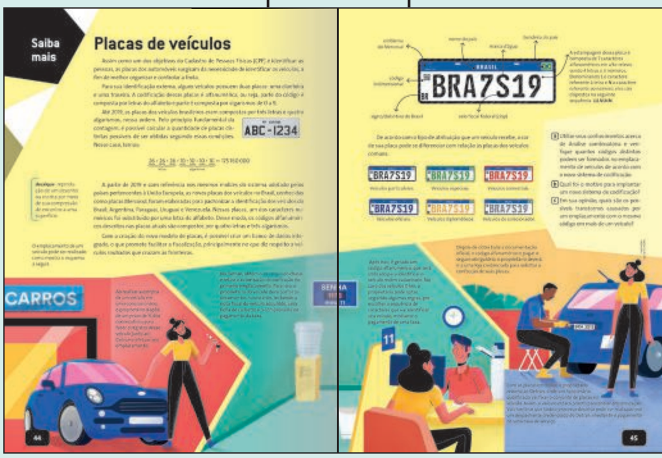
Seção que mostra maneiras de organizar o pensamento para resolver um problema por meio de raciocínio, representação, comunicação e argumentação. Nela, será apresentada cada etapa da resolução, em que se faz necessário mobilizar conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução.

Acesso digital



Apresentada em alguns capítulos, essa seção contém recursos digitais, como *softwares* e *sites*, e várias ferramentas tecnológicas computacionais, que possibilitam o desenvolvimento de atividades relacionadas ao conteúdo em estudo, a fim de incentivar os alunos a utilizar o computador no estudo da Matemática. Ao final da seção, são propostas algumas questões que visam familiarizá-los com o recurso apresentado e a verificação do que compreenderam a seu respeito.

Saiba mais

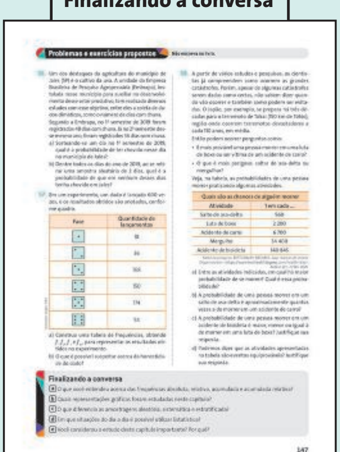


Essa seção apresenta informações complementares que vão além do conteúdo abordado, visando à formação dos alunos na construção da cidadania e mostrando as várias relações da **Matemática** com outras áreas do conhecimento, como **Ciências da Natureza** e **Ciências Humanas**, além de curiosidades ligadas ao conteúdo. Ao final, são propostas algumas questões para que eles possam refletir sobre o que foi estudado.

Conectando ideias

Seção em que os alunos são convidados a ler e interpretar informações apresentadas na forma de textos e infográficos, envolvendo diferentes temas e situações, e, com base nelas, a responder a algumas questões, as quais visam motivá-lo a refletir sobre o que foi estudado no capítulo e a perceber a relação desse conteúdo com situações cotidianas e outras áreas do conhecimento.

Finalizando a conversa



Encontrada ao final da última seção de problemas e exercícios propostos de cada capítulo, essa seção traz sugestões de questões cujo objetivo é levar os alunos a fazer uma análise sobre o que foi estudado, bem como expor o que foi compreendido por eles.

Desafio

Algumas tarefas são destacadas como **desafios**, pois envolvem resoluções que vão além da simples aplicação do conteúdo estudado.

Você produtor

Em algumas tarefas, é proposta a elaboração de problemas com base em imagens ou informações ou, então, a realização de algumas construções. Nesses casos, o destaque aparecerá para os alunos.

Vocabulário

Nesse quadro, encontram-se os significados de algumas palavras em destaque no texto, provavelmente desconhecidas dos alunos.

Em grupo

Pensando na formação mais ampla dos alunos, em algumas tarefas propostas, eles são convidados a resolvê-las em grupos com dois ou mais integrantes.

Você cidadão

No decorrer do capítulo, os alunos vão responder a questões que contribuem para a formação cidadã, refletindo a respeito do que está sendo questionado, tanto no seu cotidiano quanto na sociedade em que está inserido.

Observação

Quadro com informações complementares sobre a teoria abordada.

• *Destaques da Assessoria pedagógica*

BNCC

Apresenta as implicações no trabalho com a BNCC no Ensino Médio referentes ao trabalho com competências, habilidades, temas contemporâneos transversais, atitudes e vivências.

Planejamento individual e coletivo

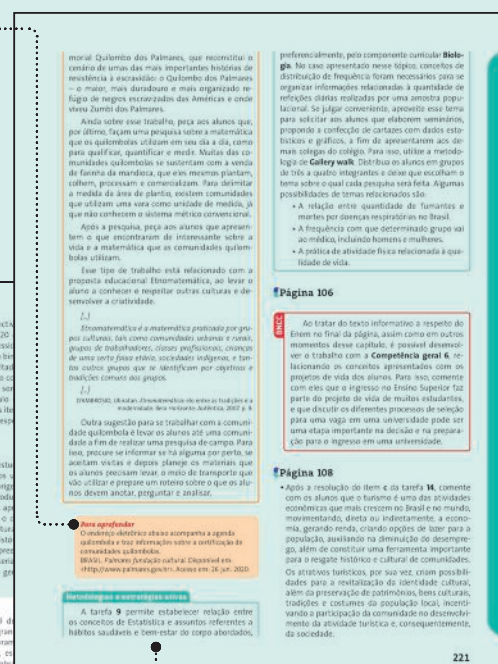
Apresenta subsídios para o planejamento individual e coletivo, podendo propor trabalho com outros professores do mesmo componente curricular ou com professores de diferentes componentes curriculares.

Avaliação

Apresenta diferentes modos para que você avalie os alunos, mapeando os conhecimentos (prévios e posteriores) deles, destacando tanto o caráter formativo quanto a preparação para exames de larga escala.

Para aprofundar

Traz sugestões de livros e *sites* para complementar o trabalho com o tema que está sendo estudado na página do livro do aluno ou na própria Assessoria pedagógica.



Boxe informativo

Apresenta informações para complementar o tema estudado na página do livro do aluno ou na própria Assessoria pedagógica.

Metodologias e estratégias ativas

Apresenta possibilidades de trabalho no desenvolvimento dos conteúdos com diferentes metodologias e estratégias ativas.

A Matemática no Ensino Médio

No cenário nacional, especificamente em relação à Educação Básica, é possível observar mudanças significativas nos últimos anos. Entre elas, pode-se destacar a elaboração e a aprovação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para todas as etapas da Educação Básica, além da reestruturação do Ensino Médio, o qual passou a ser referenciado como “novo Ensino Médio”.

Conforme indicam os marcos legais, principalmente as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – parecer CNE/CEB nº 3/2018 –, no “novo Ensino Médio”, é proposto que o aluno desenvolva o protagonismo juvenil, de tal modo que ele possa tomar decisões e assumir a responsabilidade por elas, além de garantir aprendizagens essenciais e comuns a todos os alunos, mas sem desconsiderar especificidades locais, culturais, sociais, entre outras. Assim, o ensino nessa etapa passa a ser organizado com base em itinerários formativos, os quais devem ser organizados considerando os objetivos, os projetos de vida e as escolhas realizadas pelos alunos diante das possibilidades estabelecidas em concordância com a BNCC, entre outros documentos.

Independentemente do itinerário formativo no qual o aluno será inserido, a Matemática é uma unidade curricular presente ao longo dos três anos do Ensino Médio, de modo que seu objetivo ultrapassa a simples memorização de fórmulas e a realização de cálculos. Conforme as orientações da BNCC (BRASIL, 2018), o ensino de Matemática deve ser organizado de modo a possibilitar a construção de uma visão mais integrada a essa ciência e condizente à sua aplicabilidade em contextos reais e ao seu papel na construção cidadã.

Diante do exposto, o ensino de Matemática deve ser organizado de tal modo que possibilite aos alunos

> *[...] desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.*
>
> *[...] (BRASIL, 2018, p. 529).*

A BNCC é estruturada, em cada unidade curricular, com base em competências específicas e habilidades esperadas. Sendo assim, a escolha dos conteúdos a serem abordados em cada ano do Ensino Médio deve ser orientada baseando-se tanto no desenvolvimento delas quanto no das competências gerais estabelecidas para o Ensino Médio como um todo, considerando as aprendizagens mínimas esperadas para os alunos dessa etapa de ensino, conforme descreve o texto desse documento (BRASIL, 2018).

Sendo assim, é essencial a organização do trabalho pedagógico no sentido de possibilitar ao aluno seu desenvolvimento, objetivando alcançar sua inserção e vivência em sociedade. Nesse sentido, é necessário atribuir a ele parte da responsabilidade diante de suas próprias aprendizagens, incentivando-o a desenvolver a autonomia e o protagonismo juvenil, o que pode ser realizado por meio do emprego de diferentes propostas e metodologias, visando contribuir para sua formação integral.

Conforme aponta Carbonell (2002, p. 16),

> *[...] não se pode olhar para trás em direção à escola ancorada no passado em que se limitava ler, escrever, contar e receber passivamente um banho de cultura geral. A nova cidadania que é preciso formar exige, desde os primeiros anos de escolarização, outro tipo de conhecimento e uma participação mais ativa [...].*

Nesse sentido, a mudança nas práticas e a criação de novas estratégias podem contribuir para o desenvolvimento de novas propostas que visam uma participação mais ativa dos alunos, de modo a propiciar um aprendizado mais efetivo e ancorado em ações colaborativas, permitindo estabelecer relações mais específicas com situações da realidade com as quais o aluno poderá deparar-se ao longo de sua vida.

Além dos objetivos citados, o Ensino Médio também deve proporcionar aos alunos a formação necessária para que possam obter resultados satisfatórios nos exames de larga escala relativos a essa etapa, como é o caso do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), o qual é essencial, por exemplo, para que os alunos deem continuidade à sua formação com o ingresso em cursos de Ensino Superior. Considerando que esse exame tem por objetivo avaliar o desempenho individual ao fim da escolaridade básica, o ensino de Matemática nessa etapa da Educação Básica deve favorecer o desenvolvimento das competências e habilidades necessárias para que obtenham um desempenho adequado nos exames de larga escala, contribuindo para que possam prosseguir com os estudos de acordo com seu projeto de vida.

Porém, muito além de uma etapa preparatória para exames de larga escala, o Ensino Médio deve ser organizado de modo a proporcionar aos alunos uma formação ampla e integral e possibilitar sua inserção na sociedade e no mercado de trabalho, desenvolvendo competências e habilidades que os auxiliarão no acompanhamento das transformações pelas quais a sociedade é submetida e na busca de formação continuada a fim de se atualizarem de acordo com essas transformações.

O estudante e o Ensino Médio

Conforme apresentado pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2011 *apud* BRASIL, 2018, p. 463), a juventude deve ser considerada não apenas como uma etapa de transição entre infância e maturidade, mas como uma

> *[...] condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes.*
>
> *[...] (BRASIL, Parecer CNE/CEB nº 5/2011).*

De acordo com Dayrell e Carrano (2014, p.112), a juventude

> *[...] constitui um momento determinado, mas que não se reduz a uma passagem. Ela assume uma importância em si mesma como um momento de exercício de inserção social. Nesse, o indivíduo vai se descobrindo e descortinando as possibilidades em todas as instâncias de sua vida, desde a dimensão afetiva até a profissional. Essa realidade ganha contornos próprios em contextos históricos, sociais e culturais distintos. As distintas condições sociais (origem de classe e cor da pele, por exemplo), a diversidade cultural (as identidades culturais e religiosas, os diferentes valores familiares etc.), a diversidade de gênero (a heterossexualidade, a homossexualidade, a transexualidade, por exemplo) e até mesmo as DIFERENÇAS TERRITORIAIS se articulam para a constituição dos DIFERENTES MODOS DE VIVENCIAR A JUVENTUDE.*
>
> *[...]*

O perfil do aluno que está inserido no Ensino Médio sofreu muitas modificações nos últimos anos, principalmente por influência de mudanças sociais e culturais vivenciadas pela sociedade, motivadas tanto pelas evoluções tecnológicas ocorridas nos últimos tempos quanto pela expansão do acesso dos alunos a essa etapa de ensino em todo o Brasil. No entanto, ainda que as tecnologias e outras inovações estejam presentes na vida de muitos jovens, considerando a extensão territorial do país e sua diversidade cultural, não é possível traçar um perfil único para o jovem matriculado no Ensino Médio devido à pluralidade de indivíduos, com diferentes características e interesses, sendo possível tratar apenas a respeito "das juventudes" presentes nas salas de aula de Ensino Médio do país.

Assim, apesar de existirem diferenças em relação a aspectos sociais, culturais e econômicos, entre outros, os jovens que integram o Ensino Médio devem ser considerados em sua totalidade, para que a escola possa acolher essa pluralidade de indivíduos, garantindo a eles a possibilidade de expandirem o protagonismo juvenil e de definirem seus projetos de vida (BRASIL, 2018), proporcionando-lhes um desenvolvimento integral, que perpassa a formação de caráter conteudista, e contribuindo para sua formação no sentido de integração e participação em sociedade.

Diante dessa pluralidade, é importante que a escola e o professor considerem, na organização do trabalho pedagógico, diferentes aspectos e busquem proporcionar a todos, independentemente de suas características, as oportunidades equivalentes de aprendizagem e de acesso a recursos, inclusive os tecnológicos, os quais estão presentes em diferentes setores da sociedade e farão parte do cotidiano de muitos alunos ao longo de sua vida.

Assim, é importante que o professor garanta a todos os alunos o acesso aos diferentes recursos tecnológicos disponíveis na escola, tanto aos que têm contato diário com esses equipamentos quanto aos que não têm acesso a eles, de maneira que tenham, no contexto escolar, as mesmas oportunidades de aprendizagem e preparação para os desafios que surgirem no ambiente escolar, em seu futuro profissional e no convívio em sociedade.

Nesse sentido, além de preocupar-se com os conteúdos matemáticos que devem ser trabalhados, é importante que o professor esteja atento às características dos jovens que integram as diferentes turmas, observando suas especificidades e considerando-as no momento de organizar seu trabalho, pois, se forem consideradas, por exemplo, duas turmas formadas por indivíduos da mesma faixa etária, observa-se que elas podem apresentar características completamente diferentes, conforme os sujeitos que as compõem. Por isso, esse é um fator essencial a ser considerado na organização dos trabalhos desenvolvidos pela escola e por seus professores.

O papel do professor

Atualmente, a interação de alguns alunos com a tecnologia incorporou mudanças de comportamento em sala de aula, e essa "geração digital" passou a exigir do professor a mesma alteração, como o professor utilizar essa tecnologia em suas aulas, para se manter atualizado e para se comunicar com outras pessoas. Além disso, há alunos que, por falta de acesso a algumas tecnologias, depositam na escola as esperanças de poder vivenciar experiências importantes de convívio social e que podem ser essenciais para seu futuro profissional. Fatores como esses indicam que o papel do professor precisa ser repensado e redimensionado significativamente, pois influenciam diretamente o ambiente escolar.

Na perspectiva do ensino tradicional, o conteúdo era transmitido por meio de aulas expositivas e pressupunha-se o aprendizado pelo acúmulo de informações. Assim, caberia ao aluno reter essas informações mediante a reprodução de atividades exploratórias, que, se realizadas de maneira correta, constatariam a aprendizagem. No entanto, a mera repetição não comprova o aprendizado, mas a capacidade de memorização e de aplicação dos conhecimentos. Reter grande quantidade de informações também não parece suficiente em uma sociedade dinâmica e complexa que requer cada vez mais habilidades e competências associadas à criatividade e à produção de conhecimento, entre muitas outras.

No entanto, diante dos objetivos formativos apresentados pela BNCC (BRASIL, 2018), em consonância com os demais marcos legais que regem a organização do Ensino Médio no Brasil, a mera transmissão de informações não é suficiente para a formação dos sujeitos. Devido às competências e às habilidades esperadas para esses indivíduos, as práticas pedagógicas precisam ser aprimoradas e construídas de modo a possibilitarem aos alunos esse tipo de formação, considerando suas características individuais.

Dessa maneira, devido às transformações ocorridas na sociedade, tanto a escola quanto o aluno sofreram modificações em seus papéis. Por esse motivo, na atualidade, é esperado que o ensino seja organizado de modo que o aluno passe a ter participação ativa no processo de aprendizagem, ou seja, torne-se agente da construção do próprio conhecimento. Nesse sentido, o professor deve se posicionar como um mediador e como um avaliador de processos, isto é, aquele que ajuda a fornecer as informações necessárias e faz intervenções que auxiliam o aluno a ter condições de construir seu conhecimento, reestruturando o processo quando necessário.

Para Santaló (1996, p. 11),

> *A missão dos educadores é preparar as novas gerações para o mundo em que terão que viver. Isto quer dizer proporcionar-lhes o ensino necessário para que adquiram as destrezas e habilidades que vão necessitar para seu desempenho, com comodidade e eficiência, no seio da sociedade que enfrentarão ao concluir sua escolaridade.*
>
> *[...]*

Sendo assim, o professor deve assumir, entre outros, os seguintes papéis.

- Provedor: aquele que torna os conceitos e os conteúdos matemáticos passíveis de serem aprendidos, fornecendo as informações necessárias, as quais os alunos ainda não têm condições de obter sozinhos, o que exige do professor o domínio do conteúdo e conhecimentos pedagógicos, tecnológicos e outros.
- Orientador: aquele que conduz e organiza o trabalho em sala de aula, buscando desenvolver a autonomia dos alunos e contribuir para o desenvolvimento das competências e habilidades esperadas para essa etapa de ensino.
- Incentivador: aquele que incentiva continuamente os alunos, motivando-os a refletir, investigar, levantar questões e debatê-las com os colegas.

Diante dessas novas perspectivas, é importante que o professor conheça as condições socioculturais, as expectativas e as competências cognitivas dos alunos, refletindo a respeito de como pode organizar seu trabalho no sentido de proporcionar a eles aprendizagens significativas, considerando as orientações e os objetivos estabelecidos para o ensino de Matemática no Ensino Médio. Assim, o professor terá condições de selecionar ou produzir situações-problema relacionadas ao cotidiano de sua turma. É relevante também o trabalho de determinado conteúdo em diversos contextos, a fim de que os alunos desenvolvam a capacidade de generalização. Além disso, o professor precisa ter conhecimento das mudanças que ocorrem dentro e fora da escola, repensando seu trabalho diante das transformações às quais a escola e a sociedade estão sujeitas.

Nesse aspecto, a formação do professor é fundamental, não se resumindo apenas à graduação ou à especialização, mas também à formação continuada, a fim de acompanhar o desenvolvimento de estudos e os progressos que ocorrem no âmbito educacional. É desejável, por exemplo, que um professor de Matemática saiba o conteúdo da área; é necessário que ele tenha algum conhecimento sobre psicologia, pedagogia, linguagem, sexualidade, infância, adolescência, sonho, afeto, vida etc., para que possa, no cotidiano da sala de aula, lidar com problemas e situações referentes a esses e a outros campos, os quais afetam os alunos e podem influenciar diretamente em suas aprendizagens.

Para se informar sobre as mudanças que ocorrem fora da escola, o professor precisa estar atento às constantes transformações e evoluções sociais, a fim de verificar se seu trabalho está contribuindo para a construção do conhecimento do estudante como cidadão.

De acordo com Brousseau (1996, p. 71),

> *[...] o professor é uma espécie de ator. Atua segundo um texto escrito em outro contexto e segundo determinada tradição. Podemos imaginá-lo como um ator da Commedia dell'arte: improvisa na hora, em função de um argumento ou uma trama.*
>
> *[...]*

No entanto, para que o professor possa organizar seu trabalho visando às aprendizagens essenciais aos alunos no Ensino Médio, é necessário considerar que, em todo trabalho pedagógico, a relação entre professor, aluno e saber está pautada em um conjunto de regras nem sempre explícitas. Essas regras emergem exatamente quando há a infração de uma delas, tanto por parte do professor quanto do aluno.

Por isso, há a necessidade de, inicialmente, estabelecer um acordo entre ambas as partes de maneira que tenham direitos e deveres e verifiquem também as responsabilidades de cada uma. A esse acordo, dá-se o nome de contrato didático.

Segundo Brousseau (2008, p. 9),

> *[...] Numa situação de ensino preparada e realizada pelo professor, o aluno em geral tem a tarefa de resolver o problema que lhe é apresentado, por meio da interpretação das questões colocadas, das informações fornecidas, das exigências impostas, que são a maneira de ensinar do professor. Esses hábitos específicos do professor, esperados pelo aluno, e os comportamentos deste, esperados pelo professor, constituem o contrato didático.*
>
> *[...]*

O contrato didático, portanto, pode ser entendido como um instrumento de análise da relação professor, aluno e saber.

Acerca do saber, com base nas ideias de Brousseau, Moretti e Flores (2002), destacam-se quatro elementos importantes:

- A ideia de divisão de responsabilidades: para que se efetive uma relação didática, é necessário que o professor esteja disposto a ensinar e que o aluno também cumpra seu papel no envolvimento com o aprendizado, manifestando seu desejo de aprender.
- A tomada de consciência do implícito: a manutenção das regras implícitas é fundamental para o processo de ensino-aprendizagem. Tomar consciência dessas regras propicia conflitos e espaços para trocas entre os parceiros, porém não é conveniente transformar tudo o que está implícito em explícito.
- A relação com o saber: a característica fundamental de uma relação didática reside na existência de assimetria entre as relações que professor e aluno mantêm com os saberes.
- A construção da comunicação didática: mediante o contrato didático, busca-se descobrir o que favorece ou impede o acesso dos alunos ao conhecimento e o que pode estar bloqueando ou não a entrada destes no processo de aprendizagem.

A quebra das regras contratuais sugere mudanças na relação e, consequentemente, novas configurações, considerando a ação e a reflexão do professor, bem como uma participação mais decisiva dos alunos. De acordo com Silva (1999), a conscientização da normatização contratual, sua explicitação e eventuais rupturas deveriam ser desenvolvidas sempre em consonância com uma ênfase segundo a qual professor e alunos tivessem papel ativo no processo.

Além disso, é necessário que o contrato didático esteja em consonância com a perspectiva pedagógica adotada, visto que é preciso adaptá-lo ao contexto em que está inserido. Se a relação didática se dá em um ambiente de aulas expositivas, o conjunto de regras, explícitas ou não, é diferente, por exemplo, daquele em que o aluno tem participação efetiva no processo de aprendizagem, realizando trabalhos, pesquisas, entre outras ações. Nesse sentido, considerando as orientações quanto ao uso de estratégias que possibilitem ao aluno assumir um papel de protagonista, sendo um sujeito ativo e responsável por sua aprendizagem, é importante que o contrato didático se alinhe a ações e posturas que considerem e favoreçam trocas entre professor e alunos, bem como ajude a manter um ambiente propício ao desenvolvimento.

Segundo o que foi apontado por algumas pesquisas e experiências, a presença do contrato didático tem se mostrado relevante na relação didática. Os bons resultados aparecem à medida que os alunos se sentem responsáveis por seus objetivos e pelos meios de alcançá-los, o que contribui para a prática do professor, que passa a valorizar o uso desse instrumento no processo de aprendizagem.

Assim como o professor tem autonomia para organizar o contrato didático, em conjunto com seus alunos, a organização dos conteúdos também pode ser estabelecida pelo professor, considerando sua formação e sua experiência com o componente curricular Matemática. Dessa maneira, com base em conceitos teóricos e em sua formação, o professor pode determinar qual é a melhor distribuição para os conteúdos ao longo do Ensino Médio, tendo em vista o conjunto de aprendizagens mínimas estabelecidas pela BNCC (BRASIL, 2018) para os alunos do Ensino Médio.

Nesse sentido, desde que considere todas as competências e as habilidades esperadas dos alunos ao concluírem o Ensino Médio, o professor tem autonomia para distribuir os conteúdos ao longo dessa etapa de ensino, ordenando-os e articulando-os da forma que julgar mais adequada, considerando as possíveis relações multidisciplinares e interdisciplinares que podem ser estabelecidas entre os diferentes componentes curriculares. Assim, o planejamento e a organização dos conteúdos podem ser feitos tanto individualmente quanto coletivamente, no contexto da escola, considerando os professores que atuam com o componente curricular de Matemática no Ensino Médio e também os professores de outras áreas do conhecimento. Desse modo, há a contribuição para uma abordagem contextualizada dos conceitos matemáticos e para o desenvolvimento de uma visão integral a respeito da Matemática, de sua aplicabilidade em situações presentes no cotidiano e de seu potencial para leitura, interpretação e transformação do mundo.

Para concluir, o professor deve ser um aliado na formação do aluno/cidadão, e não apenas um transmissor de conteúdo. Além disso, é importante que ele esteja preparado para as contínuas mudanças do cotidiano. Diante de todas as transformações que influenciam a sociedade e o espaço escolar, o professor precisa repensar continuamente seu papel e sua postura em sala de aula, para que possa contribuir para a aprendizagem dos alunos, deixando de ser apenas um transmissor de conteúdos e assumindo uma postura de provedor, orientador e incentivador. Com isso, o professor proporciona aos alunos um ambiente no qual são incentivados a assumir um papel ativo e a desenvolver as competências e as habilidades esperadas para o convívio em sociedade, além de estarem preparados a se adaptarem às mudanças que poderão influenciá-los ao longo da vida.

Cultura de paz, combate à violência e promoção da saúde mental

O ensino de Matemática no Ensino Médio não envolve apenas questões teóricas e conteudistas. Ele é permeado pelo cotidiano dos alunos e pelas relações interpessoais presentes no ambiente escolar, em relação ao professor, aos alunos e aos demais integrantes desse ambiente. Assim, de acordo com Vygotsky (*apud* MOREIRA, 2011), não é possível analisar o ensino e a aprendizagem sem considerar os contextos históricos, culturais e sociais nos quais os alunos estão inseridos. Nesse sentido, a organização do trabalho pedagógico deve considerar os fatores externos e internos que podem integrar o contexto da sala de aula e influenciar as aprendizagens.

Os alunos estão inseridos em uma sociedade na qual prevalece a coletividade, de modo que todos precisam cooperar e respeitar uns aos outros para que seja possível estabelecer uma relação de convivência com vistas a um bem comum. Além disso, ao concluírem o Ensino Médio, eles devem ter desenvolvido diversas competências e habilidades que permitam, entre outras ações, exercer a cidadania e integrar-se ao mercado de trabalho, o que exige o estabelecimento de relações por meio, principalmente, do diálogo, que deve estar presente também no contexto escolar.

Conforme destacado por Freire (1972 *apud* ALRO; SKOVSMOSE, 2010, p. 120-121), o diálogo “[...] é uma forma humilde e respeitosa de cooperar com o outro numa relação de confiança mútua. [...]”. Sendo assim, o diálogo consiste em um elemento fundamental para que ocorram as aprendizagens no contexto escolar e o desenvolvimento das competências e das habilidades relacionadas ao aprimoramento do aluno como cidadão. Além disso, com o exercício do diálogo, os alunos podem desenvolver a empatia e o respeito aos demais, contribuindo para inibir e evitar situações de violência no contexto escolar, como é o caso, por exemplo, da intimidação sistemática, conhecida como *bullying*.

De acordo com Fernandes, Yunes e Taschetto (2017, p. 144-145), o “*bullying* é definido como a prática violenta e intencional que causa dor, angústia e sofrimento às vítimas [...] O *bullying* pode causar problemas sérios para quem sofre, pratica ou testemunha. [...]”. Francisco e Libório (2009, p. 201) afirmam que, se,

> *[...] por um lado, as vítimas sofrem uma deterioração da sua autoestima, e do conceito que têm de si, por outro, os agressores também precisam de auxílio, visto que sofrem grave deterioração de sua escala de valores [...].*

Para lidar com esse tipo de situação, é importante que o professor busque informações a respeito da temática e converse com os demais atores do processo educativo, como coordenadores pedagógicos e diretores, de modo que todos possam trabalhar em conjunto para enfrentar situações de violência como o *bullying*. É imprescindível que o professor busque informações que lhe permitam identificar situações de violência em sala de aula e lidar com elas, evitando a exposição dos alunos e exercitando a escuta acolhedora, além de contribuir para a resolução dos problemas e a superação das situações de crise. Desse modo, o professor evita intimidações entre os alunos, caso existam, uma vez que episódios desse tipo, além de serem prejudiciais aos envolvidos, podem influenciar negativamente na aprendizagem e no convívio escolar.

Durante o ensino da Matemática, é possível desenvolver atividades que incentivem a cultura de paz, o combate à violência e a promoção da saúde mental por meio de algumas estratégias metodológicas que contribuem para evitar situações de conflito e violência, pois são criados espaços nos quais é incentivado o desenvolvimento da empatia, do respeito, dos valores humanos e da reflexão sobre os conflitos.

O desenvolvimento de atividades – como a realização de trabalhos cooperativos baseados na resolução de problemas, investigações, modelagem matemática, desenvolvimento de projetos, dinâmicas de grupos, entre outras – pode ser um importante aliado do combate às situações de violência. Tais atividades, além de serem empregadas em diferentes momentos e no trabalho com os mais variados conteúdos, mantendo o foco na aprendizagem dos conceitos matemáticos essenciais para o Ensino Médio, podem favorecer a construção de um ambiente no qual prevaleça o respeito mútuo, por meio da realização de trabalhos em grupos e pela participação ativa de todos os alunos, que se tornam atores principais no desenvolvimento das atividades.

Assim, é possível aliar o estudo dos conhecimentos teóricos com o desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas ao convívio social, contribuindo para a formação de indivíduos capazes de se relacionarem socialmente e de manterem o respeito em relação aos demais integrantes da sociedade e aos contextos nos quais estão inseridos.

As situações de violência não ocorrem somente em relação a terceiros, mas podem também ser autoprovocadas, principalmente no que se refere às tentativas de suicídio e automutilação. Por esse motivo, é importante que o professor busque acompanhar, a todo o momento, o comportamento dos alunos e sua interação com professores e colegas, observando se houve alguma mudança de comportamento e estando atento às situações, como o distanciamento social de algum aluno em sala de aula, que pode representar um problema de relacionamento ou, em situações mais graves, pensamentos de violência autoprovocada.

Por isso, além de organizar o trabalho pedagógico no que se refere a conceitos matemáticos, é importante que o professor proponha situações de aprendizagem que o aproximem dos alunos e que lhe permitam conhecê-los melhor, a fim de identificar possíveis situações críticas e tentar evitá-las, pois, além de formação técnica, o Ensino Médio deve ser orientado à formação de um indivíduo em todos os seus aspectos (BRASIL, 2018), especialmente nos sentidos social e emocional.

Conforme indica Costa, Figueiredo e Ribeiro (2013 *apud* SILVA *et al.*, 2019, p. 135), a escola não deve objetivar

> *[...] ser apenas um lugar onde se produz educação e conhecimento de forma eficaz, mas um lugar onde exista interesse e que haja saúde de todos os seus membros. A educação em saúde na escola dá-se mediante o processo onde se busca colaborar para a formação de um pensamento crítico do estudante, que tenha como resultado a aquisição de práticas que visem promover, manter e recuperar a própria saúde.*
>
> *[...]*

Quando se discute a respeito de saúde, é necessário considerar tanto os fatores físicos quanto os psicológicos. Sendo assim, é preciso que no Ensino Médio sejam desenvolvidas atividades que promovam a saúde mental dos alunos, e não apenas a aprendizagem dos conceitos essenciais. A articulação entre saúde mental e desenvolvimento cognitivo é um aspecto importante a ser considerado, visto que não é possível pensar em aprendizagem se não houver, entre outros elementos, uma predisposição do aluno em aprender, além de seu envolvimento com as atividades propostas.

No contexto da Matemática, considerando a necessidade da promoção da saúde mental, é importante articular várias estratégias metodológicas, propor tipos distintos de atividade, pois cada aluno tem um ritmo de aprendizagem diferente, e procurar sempre valorizar as produções realizadas mostrando a eles que o erro pode ser utilizado não como um fator negativo, mas como um mecanismo de autorregulação capaz de contribuir para a aprendizagem.

A fase da adolescência e a transição para a vida adulta são momentos delicados na vida e resultam em experiências diferentes para cada pessoa. Além de ser uma etapa na qual os indivíduos vivenciam novas experiências, esses períodos revelam possíveis vulnerabilidades, em que as pessoas precisam lidar com situações conflituosas (SILVA *et al.*, 2019), pois estão formando sua personalidade e precisam fazer escolhas importantes em relação ao futuro, como a escolha de uma profissão e a participação em exames de larga escala, como é o caso do Enem e das provas de vestibulares. Dessa maneira, na organização do trabalho pedagógico, é importante que o professor também considere esse tipo de situação e organize propostas que considerem o momento de vida dos alunos em conjunto com a formação mínima necessária, buscando contribuir para a aprendizagem deles e, ao mesmo tempo, considerando a promoção de sua saúde mental.

O ensino de Matemática no Ensino Médio deve oferecer aos alunos as condições necessárias para se tornarem indivíduos capazes de assumir seus papéis na sociedade de maneira adequada, utilizando seus conhecimentos teóricos a fim de contribuir, por exemplo, para a resolução dos problemas que podem surgir e para o exercício da profissão escolhida, e que possam promover uma cultura de paz e de respeito ao próximo, em sua família, em sua comunidade, em seu trabalho e em todos os contextos nos quais ele se insira.

Para que essa formação possa ser efetivada, é essencial que a escola se torne um ambiente de promoção da cultura de paz, nas mais variadas atividades realizadas e entre todas as pessoas envolvidas: alunos, professores, diretores, supervisores, entre outros. Desse modo, vivenciando um ambiente no qual as relações humanas sejam respeitadas, em que situações críticas sejam resolvidas por meio do diálogo e da reflexão e onde a violência não seja promovida, os alunos poderão desenvolver as competências e as habilidades que lhes permitirão contribuir para que a cultura de paz se propague também fora do ambiente escolar, ou seja, em sociedade e na própria vida.

Pensamento computacional

A evolução tecnológica impactou significativamente nossa sociedade nos últimos anos. O uso da tecnologia, mediado pela internet, tem tomado cada vez mais espaço na rotina dos jovens, seja para comunicação pelas redes sociais, seja para se atualizarem por meio de notícias e informações publicadas na *web*. O desenvolvimento do pensamento computacional ganhou destaque nesse processo, pois está associado ao uso adequado e direcionado das tecnologias, de modo a incentivar as capacidades criativa, crítica e estratégica, contribuindo para desenvolver habilidades relativas aos fundamentos da computação, aplicando-os nas mais diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de resolver problemas de maneira individual e colaborativa (OLÍMPIO JUNIOR; VILLA-OCHOA, 2013; SILVA, 2019).

Em outras palavras, o pensamento computacional está relacionado ao pensamento analítico e ao raciocínio dedutivo, que envolvem a Lógica e a Matemática. Podemos ainda mencionar que o pensamento computacional pode contribuir com a resolução de problemas, bem como tornar os alunos hábeis a fazer uma representação geométrica ou, ainda, solucionar sistemas aplicando corretamente as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDICs), o que vai ao encontro da **Competência específica 4** da área de **Matemática e suas Tecnologias** (BRASIL, 2018). Dessa maneira, é necessário incentivá-los a fazer uso dessas tecnologias como uma alternativa para a aprendizagem, com o intuito de transformar problemas e/ou situações considerados de difícil resolução em um processo compreensível e que possam ser resolvidos com mais facilidade.

O pensamento computacional tem como base quatro pilares – decomposição, reconhecimento de padrões, abstração, algoritmo (LIUKAS, 2015) – que orientam o processo de solução de problemas. Assim, quando nos deparamos com um problema, sua solução pode ser pensada computacionalmente. Em outras palavras, é preciso analisar o problema e dividi-lo em partes menores, por meio da **decomposição**, aumentando a atenção aos detalhes. Na sequência, ocorre o **reconhecimento de padrões** nos problemas decompostos, identificando similaridades em diferentes processos para solucioná-los de maneira mais eficiente e rápida. Já pela **abstração**, buscamos uma solução que possa ser válida em mais de um problema e o que pode ser ignorado. Por fim, verificamos os procedimentos necessários para solucionar o problema, pensando assim no **algoritmo**.

No universo da Educação Básica, o uso do computador pode consolidar e aprofundar conhecimentos, habilidades, atitudes e valores desenvolvidos no ensino que estejam relacionados à área de **Matemática e suas tecnologias**. Nesse viés, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 474) menciona que o

> *pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos.*
>
> [...]

O pensamento computacional no cotidiano escolar

O mundo digital engloba métodos para a solução de problemas baseados nos fundamentos e técnicas computacionais, consistindo em uma forma de incentivar o raciocínio lógico. Desse modo, no âmbito da educação, os alunos podem desenvolver o pensamento computacional conforme a afinidade que tenham com a tecnologia, aprimorando assim técnicas como a abstração e a organização. Em relação a essa afinidade, Prensky (2010) aponta duas gerações distintas: os nativos digitais e os imigrantes digitais. Os primeiros são a geração que já nasceu em uma cultura digital, ou seja, há compatibilidade tecnológica de maneira intuitiva e orgânica. Já os imigrantes digitais, embora façam uso dos aparatos tecnológicos, não têm a mesma aptidão dos nativos, pois precisam se adaptar a esse uso.

O uso da tecnologia tem modificado a maneira de pensar e de viver em sociedade, isso porque não há espaço para um ensino desconectado da realidade, pois vivemos a era da informação. As gerações mais novas, desde muito cedo, já estão em contato com a tecnologia, realizando atividades complexas de maneira muito simples.

> *[...] com o avanço das tecnologias digitais e a consequente facilidade de acesso à informação, a escola já não é a única fonte de conhecimento disponível para as pessoas. Por meio do desenvolvimento dos computadores, smartphones, tablets e internet, pode-se aprender em qualquer lugar e a qualquer hora. Contudo, o papel da escola não termina, mas se expande, e cabe a ela direcionar e capacitar os alunos a explorar responsavelmente esses novos caminhos.*
>
> *[...] (SUNAGA; CARVALHO, 2015, p. 141).*

Nessa perspectiva, torna-se importante propor aulas com o uso de tecnologias digitais de informação e comunicação, incentivando os alunos a desenvolver diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático (indução, dedução, abdução e raciocínio por analogia) por meio de diversos problemas, atividades e vivências, especialmente para promover práticas (orais e escritas) de argumentação e inferência. Um dos desafios do processo educativo, mediado pelo uso dessas tecnologias, consiste em construir respostas às demandas colocadas por um contexto social, econômico e cultural, ou seja, reconhecer suas potencialidades para propor e/ou implementar soluções (BRASIL, 2018).

Para garantir a aprendizagem, além de desenvolver as habilidades cognitivas (ler, escrever e fazer operações matemáticas), no intuito de atingir bons resultados, é necessário incentivar e proporcionar o conhecimento para o exercício da cidadania, fazendo uso do pensamento computacional. Nesse viés, consideramos aliados do processo de ensino a alfabetização e o letramento digital, assegurando o desenvolvimento, do ponto de vista matemático e computacional, da análise crítica, criativa e propositiva de temas relacionados aos princípios éticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social.

Para explorar e promover ainda mais o contato dos alunos com o pensamento computacional ao longo da Educação Básica, é possível fazer uso de alguns recursos, que podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico e incentivar o desenvolvimento de noções gerais de programas de computador. Nesta coleção são utilizados alguns desses recursos, como o VisualG, a planilha eletrônica Calc da LibreOffice e o GeoGebra, todos gratuitos e desenvolvidos na seção **Acesso digital**. Tais recursos, assim como tarefas específicas e a seção **Explorando problemas**, que são trabalhadas ao longo da coleção, possibilitam construir e analisar planilhas, gráficos, algoritmos e fluxogramas.

O VisualG, por exemplo, permite criar, editar, interpretar e executar algoritmos. Além disso, incentiva os alunos a desenvolver a lógica e a programação, pois é elaborado especialmente para iniciantes. Na coleção, são dadas instruções para utilizá-lo e tarefas para colocar em prática a aprendizagem.

Já a seção **Explorando problemas** e algumas tarefas específicas da seção **Problemas e exercícios resolvidos** e **Problemas e exercícios propostos** são organizadas de modo que não há necessidade de utilizar recursos tecnológicos, pois nelas é preciso que os alunos as resolvam por meio do raciocínio – representando, comunicando e argumentando. Além disso, em **Explorando problemas** são apresentadas cada etapa da resolução, mobilizando conhecimentos e habilidades com o objetivo de identificar conceitos e conceber um processo de resolução, desenvolvendo, assim, o pensamento computacional.

Para concluir, propomos a necessidade de praticar o pensamento computacional, com o intuito de mostrar que os meios tecnológicos têm desempenhado um papel importante ao atender algumas das necessidades dos professores e alunos, dando continuidade nos processos de ensino e aprendizagem. Além disso, é possível desenvolver esse pensamento por meio de tipos de abordagens diferentes. Por fim, torna-se importante compreender que o pensamento computacional pode ser mobilizado dentro e fora do ambiente escolar.

Metodologias e estratégias ativas

A atual sociedade globalizada e informatizada tem exigido mudanças significativas na educação, destacando-se a importância da aprendizagem ativa, que considera os alunos como protagonistas dessa ação, que exige responsabilidade, pois é algo compartilhado com o professor. Esse modelo de aprendizagem baseia-se na participação ativa dos alunos em um conjunto de atividades, como resolver problemas, desenvolver projetos, conjecturar, modelar situações, ler, escrever, perguntar, discutir e participar de seminários. Portanto, faz-se necessário que o professor torne-se mediador, orientador e supervisor, promovendo um ambiente que possibilite aos alunos desenvolver a autonomia e assumir o protagonismo nos processos de sua aprendizagem. Para isso, pesquisadores sugerem o uso de diferentes estratégias, que têm como objetivo envolver e engajar os alunos ativamente em todas as etapas. Entre os benefícios do uso dessas estratégias, estão:

> *[...] o protagonismo estudantil, a apreensão das informações mediadas, habilidades comunicacionais, habilidades de raciocínio avançadas, trabalho em equipe, motivação, novos recursos de aprendizagem e respeito aos vários estilos de aprendizagem. [...] (MOREIRA; RIBEIRO, 2016, p. 97).*

Esta coleção possibilita que o professor desenvolva experiências definidas por um conjunto de atividades, levando os alunos a realizar algo e a refletir sobre o que estão fazendo, interagindo com o assunto em estudo, de modo dinâmico, e não apenas recebendo a informação do professor de maneira passiva.

Entre as diferentes estratégias de aprendizagem, elencamos algumas possibilidades, como **Sala de aula invertida**, **Rotação por estações** e **estação laboral**, **Seminários**, **Fishbowl**, **Gallery Walk**, **Modelagem matemática** e **Tecnologias digitais de informação e comunicação** (TDICs).

A seguir, destacamos características dessas metodologias ativas e sugerimos seções do livro que apresentam potencialidades para desenvolvê-las.

Sala de aula invertida

Nessa metodologia, também conhecida como **Flipped classroom**, os alunos são desafiados a estudar os conteúdos básicos em casa, por meio de vídeos, textos, pesquisas, entre outros suportes, para que posteriormente, em sala de aula, o professor esclareça dúvidas, problematize e complemente o conteúdo com discussões e atividades práticas. A **Sala de aula invertida** também permite trabalhar as dificuldades dos alunos, não apenas apresentar meramente o conteúdo a ser estudado. Segundo Valente (2014, p. 86), ao usar essa estratégia, o professor tem que cumprir algumas regras, a saber:

> *[...] 1) as atividades em sala de aula envolvem uma quantidade significativa de questionamento, resolução de problemas e outras atividades de aprendizagem ativa, obrigando os alunos a recuperar, aplicar e ampliar o material aprendido [....];*
>
> *2) os alunos recebem feedback imediatamente após a realização das atividades presenciais. [...].*

O uso dessa metodologia em sala de aula requer que o professor tenha em mente seus objetivos e planeje com antecedência as tarefas que serão realizadas pelos alunos. Ainda com base em Valente (2014), o fato de os alunos terem contato com o material antes da aula permite a eles que trabalhem no próprio ritmo e tentem desenvolver ao máximo a compreensão em torno do que estão estudando. Além disso, esse primeiro contato dá a eles motivação antecipada para a aula,

> *[...] com isso, o aluno pode entender o que precisa ser mais bem assimilado, captar as dúvidas que podem ser esclarecidas em sala de aula e planejar como aproveitar o momento presencial, com os colegas e com o professor. [...] (VALENTE, 2014, p. 92).*

O planejamento deve ser feito com base nos conteúdos propostos no volume, mas de maneira criativa, com o intuito de incentivar os alunos a buscar conhecimento e descobrir caminhos para seu aprendizado. Nesse sentido, a **Sala de aula invertida** torna a aprendizagem mais significativa e permite que os alunos se tornem protagonistas de sua aprendizagem.

Uma dúvida que pode ocorrer ao professor é a possibilidade de desenvolver essa estratégia tendo como base o livro didático. Isso pode ser feito utilizando os contextos das páginas de abertura, das seções **Explorando problemas**, **Saiba mais** e **Conectando ideias**. Na abertura de cada um dos capítulos, são tratados assuntos contextualizados relacionados aos conceitos trabalhados no capítulo. Utilizando a **Sala de aula invertida**, o professor pode solicitar aos alunos que leiam o material disponibilizado na seção, além de sugerir vídeos introdutórios sobre o tema problematizado, o que vai ajudá-los a responder às perguntas propostas. Também pode pedir a eles que anotem as principais ideias e o que entenderam sobre os vídeos e a leitura, uma vez que essa atividade deve ser realizada antecipadamente pelos alunos em casa. Outra possibilidade é que eles tragam para a sala de aula questões sobre o tema e que estas sejam apresentadas à turma, pois assim estão assumindo o papel de debatedores durante a discussão. Na aula, pode-se discutir os pontos e as anotações realizadas pelos alunos, promovendo uma reflexão em torno da relação entre esse tema e o conceito. Tal discussão deve ser orientada de maneira que, ao final, eles consigam responder às questões propostas e tenham um conhecimento preliminar sobre o conceito, mas, naturalmente, o resultado da discussão poderá abarcar outras questões trazidas por eles e não constantes no livro. Dessa maneira, é importante ressaltar que se trata apenas de uma possibilidade, pois a **Sala de aula invertida** pode ser utilizada no momento que o professor julgar conveniente e utilizar as seções ou boxes do livro que melhor se alinhem a seus objetivos.

Rotação por estações e estação laboral

Metodologia que consiste em organizar os alunos em grupos que se revezam dentro do espaço preparado pelo professor (estações), podendo ser em sala de aula ou não, ou seja, dá oportunidade para que sejam utilizados outros espaços.

Essa estratégia requer do professor organização prévia do ambiente, com estações específicas de trabalho e programação fixa, para que os alunos façam um rodízio nessas estações, de acordo com o tempo fixo preestabelecido. Um desses pontos específicos deve incluir uma tecnologia digital e os outros podem inserir atividades, como instruções para pequenos grupos ou para todos os alunos a um só tempo, projetos em grupo, tutoria individual ou, ainda, tarefas escritas (SOUZA; ANDRADE, 2016). Cada estação deve conter uma atividade diferente e que não dependa uma da outra, mas ainda assim com um objetivo central e que se refira ao mesmo conteúdo.

A quantidade de estações que o professor vai formar está relacionada ao total de alunos da turma. Sugere-se que quanto maior a turma mais estações sejam formadas, de maneira que os grupos não tenham uma quantidade grande de alunos. O uso dessa estratégia permite que o professor identifique e analise o desempenho individual e do grupo sobre o que foi apresentado em cada uma das estações. Para tal, é preciso definir os objetivos de cada estação, de acordo com os resultados que se deseja alcançar e com a atividade proposta na estação. Soares *et al.* (2019) destacam que a **Rotação por estação laboral** é parecida com a **Rotação por estação**, a diferença é que a primeira inclui o laboratório de informática.

Além disso, os estudantes que forem direcionados ao laboratório trabalham de modo autônomo, cumprindo os objetivos que o professor propuser, com sua orientação ou por meio de um tutor.

Diante do exposto, pode-se afirmar que ambas as metodologias permitem que os alunos se tornem ativos no processo de aprendizagem. Visando a essa aprendizagem ativa, como podemos desenvolver tal estratégia utilizando o livro didático? Entre as possibilidades, o professor pode usar, por exemplo, a seção **Acesso digital**, que propõe o uso de *softwares* de Geometria dinâmica, planilhas, linguagem de programação, entre outros suportes, para desenvolver certas potencialidades de conceito. Desse modo, pode-se utilizar essa seção e empregar a metodologia **Rotação laboral** fazendo uso do laboratório de informática. Por exemplo: o professor pode criar uma estação em que os alunos façam uma tarefa por escrito sobre determinado conteúdo; outra estação em que é proposta a eles a mesma tarefa, mas utilizando materiais diversos, como malhas quadriculadas e réguas; outra, contendo um jogo matemático sobre o conteúdo da tarefa; e, por último, uma estação no laboratório de informática, onde os alunos poderão praticar o conceito trabalhado nas estações anteriores e que está sugerido na seção **Acesso digital**.

Caso utilize a **Rotação por estação laboral**, é necessário verificar se a escola possui um laboratório de informática que contenha computadores com o *software* desejado instalado. Caso não o tenha, *smartphones* podem ser usados, pois alguns *softwares*, como o GeoGebra, também estão disponíveis para esses dispositivos gratuitamente, porém com algumas diferenças em determinadas funcionalidades.

Seminários

Os **Seminários**, como metodologia ativa de aprendizagem, pressupõem o uso de técnicas, geralmente uma dinâmica em grupo, para estudar determinado assunto. Envolvem, além de uma pesquisa por parte dos alunos, discussões e debates sobre o tema escolhido. O professor pode optar por realizar um seminário individual ou em grupo, sendo este o mais comum. Por isso, é importante criar um ambiente propício às discussões.

Marconi e Lakatos (2017) destacam que, além de desenvolver habilidades de pesquisa, essa estratégia proporciona aos alunos a reflexão sobre o assunto estudado, pois eles ficam responsáveis por pesquisar e organizar e expor suas ideias para a turma, o que contribui para o desenvolvimento da autonomia e da habilidade de argumentação. Dessa maneira, os seminários em aulas de Matemática podem levar os alunos a procurar relações entre os conceitos matemáticos e as situações do cotidiano, e boxes como **Conversando** e **Finalizando a conversa** ajudam no estabelecimento dessa relação. Por exemplo, pode ser proposto um seminário sobre determinado conteúdo a ser abordado no capítulo e cada grupo fica responsável por apresentar informações elencando características, diferenças e situações do dia a dia em que esses conceitos estão presentes.

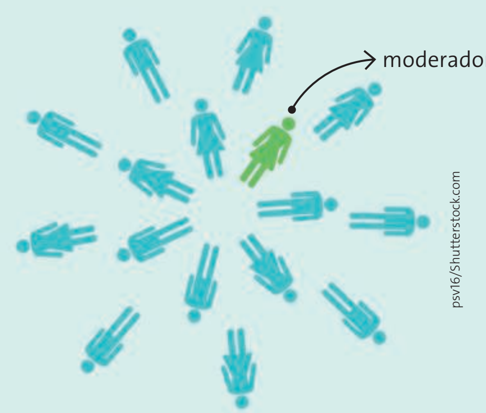
Outra possibilidade é sugerir aos alunos que se dividam em grupos, pesquisem as perguntas propostas nos boxes já mencionados e, posteriormente, apresentem os resultados à turma. Nesse sentido, o professor sugere um seminário sobre o conteúdo das questões e, para a apresentação, fica combinado que eles podem usar recursos como cartazes ou apresentações mais elaboradas em ferramentas virtuais, como a construção de uma apresentação em *slides*, com as principais informações da pesquisa. Esta última opção é válida se a escola disponibilizar projetores. Outra sugestão é que os alunos produzam vídeos sobre as questões trabalhadas. É importante ressaltar que tal estratégia pode ser utilizada com base em outras seções ou boxes dessa coleção.

Fishbowl

A metodologia **Fishbowl**, conhecida como "método aquário", é uma estratégia de aprendizagem interativa, que tem como objetivo apoiar a discussão em grupo e possibilitar que os alunos exponham suas opiniões a respeito de determinado assunto. Além disso, permite a troca de experiência entre os participantes e que os alunos revisem o conteúdo, propiciando o protagonismo deles e a aprendizagem colaborativa. Segundo Graminha (2019, p. 86), essa estratégia requer a organização do ambiente

> *[...] de modo que alguns estudantes ocupem um círculo central dentro de um círculo externo [...] onde discutem temas relacionados ao seu aprendizado, previamente proposto pelo professor. A discussão é iniciada pelos alunos que ocupam o círculo central e observada pelos alunos do círculo externo, que caso queiram participar da discussão podem ocupar o espaço do círculo central substituindo um participante. [...].*

É necessário ainda ter um moderador, no caso o professor, para instigar e direcionar a discussão proposta.



psv16/Shutterstock.com

Nessa coleção, uma possibilidade é que o professor use os questionamentos propostos nos boxes **Você cidadão** e **Conversando**, pois ambos contêm questões que favorecem a discussão sobre diversos temas da atualidade, especialmente o **Você cidadão**.

Como sugestão, o professor pode solicitar aos alunos que conversem com seus familiares sobre o tema em questão e, na aula, expressem essas informações posicionando-se criticamente. Para esse momento, os alunos devem ser divididos em dois grupos – sendo um grupo menor, que vai ocupar o círculo central, e outro ocupando os lugares do círculo maior. É necessário deixar uma cadeira vazia no círculo central e, se algum aluno do círculo maior quiser contribuir com o debate, deve levantar-se em silêncio e sentar na cadeira vazia. Para isso, um integrante do círculo central precisa voluntariar-se e ir para o círculo maior, pois é necessário que sempre haja uma cadeira vazia para aqueles que queiram contribuir com a discussão. Para utilizar essa estratégia, o professor precisa de espaço onde as cadeiras consigam ficar dispostas em dois círculos.

Situações que envolvem temas como os propostos no boxe **Você cidadão** contribuem para o desenvolvimento da **Competência geral 12** ao levar os alunos a agir pessoal e coletivamente, com autonomia e responsabilidade, tomando decisões com base em princípios éticos e democráticos.

Gallery walk

Gallery walk, também traduzida como "A caminhada na galeria", é uma metodologia cooperativa, em que os alunos têm papel ativo no processo de aprendizagem, permitindo que eles discutam variados assuntos com os colegas, o que favorece o desenvolvimento de habilidades como investigação, avaliação, síntese, colaboração e trabalho cooperativo.

Para o desenvolvimento dessa metodologia, o professor pode dividir a turma em grupos, que receberão um tema previamente escolhido para discutirem e/ou pesquisarem. Após isso,

> *[...] cada grupo elabora um cartaz acerca do tema e, em seguida, são redistribuídos em novos grupos com um integrante de cada grupo anterior. Os cartazes são colocados nas paredes e os novos grupos irão se deslocar pela sala de aula visitando os cartazes, e cada estudante que parar em frente do cartaz que ajudou a elaborar deve apresentá-lo, ensinando os seus colegas. [...] (REIS* et al.*, 2019, p. 108).*

Diante das potencialidades dessa estratégia, como podemos desenvolvê-la tendo como base o livro didático? Entre as várias possibilidades, o professor pode utilizar as seções **Saiba mais** ou **Conectando ideias**. Na primeira, por exemplo, são apresentados textos e imagens envolvendo o conteúdo em estudo, relacionados a outras áreas do conhecimento, como Química, Física e Biologia, que podem servir como base para a realização da pesquisa e/ou discussão. Uma sugestão de trabalho é que o professor organize os alunos em grupos e solicite que cada um interprete as informações fornecidas na seção, relacionando o contexto com a Matemática. Além disso, pode-se solicitar que eles façam uma pesquisa sobre os assuntos envolvidos na seção e, em seguida, elaborem cartazes para mostrar os resultados de suas pesquisas e os exponham na sala de aula.

Por fim, o professor também pode solicitar aos alunos que anotem anonimamente, em um pequeno pedaço de papel, suas opiniões sobre a pesquisa realizada em cada grupo. Ao final da exposição, é importante que seja efetuada uma discussão entre professor e alunos sobre os pontos mais relevantes de cada cartaz.

Modelagem matemática

Podemos afirmar que a **Modelagem matemática** implica em criar um modelo, sendo este um padrão ou uma fórmula, para explicar, compreender ou interpretar um fenômeno natural, tornando o processo de aprendizagem mais significativo, pois os conteúdos estudados são aplicados no dia a dia dos alunos em fenômenos que podem ser de qualquer área do conhecimento.

Bassanezi (2002, p. 18) menciona o uso da Matemática em uma colocação sobre a Modelagem matemática:

> *O objetivo fundamental do "uso" de Matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camuflados num emaranhado de variáveis de menor importância.*

A **Modelagem matemática**, como metodologia, apresenta uma proposta de ensino na qual os alunos são levados a relacionar determinadas situações reais com a Matemática. Nesse sentido, eles são incentivados a problematizar ou investigar situações do cotidiano que geram reflexões sobre a presença da Matemática e usá-la para explicar tais situações.

Ao utilizar a Modelagem matemática durante as aulas, o professor as torna mais motivadoras, despertando nos alunos o interesse e a criatividade, bem como proporciona a eles o avanço na aprendizagem.

Com esse trabalho, é possível mostrar aos alunos a utilidade diária da Matemática e também relacioná-la com outras áreas do conhecimento, por exemplo, na produção de alimentos, na descrição de um fenômeno natural, em uma situação que envolva a Medicina, na aplicabilidade na criação de animais, no comércio, na construção civil, tudo por meio de observação de padrões e obtenção de fórmulas auxiliares.

O papel do professor que faz uso dessa metodologia de ensino é o de orientador, podendo, por exemplo, sugerir alguns temas aos alunos, que estarão organizados em grupos e farão pesquisas, coleta de dados, investigações, levantamento de hipóteses, análise das soluções encontradas e, por fim, validarão o modelo construído de acordo com o tema proposto. Durante o processo de trabalho, o professor esclarece dúvidas, orienta, faz sugestões e apontamentos para nortear os alunos quanto ao desenvolvimento do processo.

Um exemplo prático é propor à turma a análise de vários tipos de embalagens usadas no comércio local, e pesquisar e relatar qual delas têm o maior volume e o menor custo de matéria-prima.

Em outro exemplo, pode-se buscar a medida da altura de determinada caixa (base de formato retangular, circular, quadrado etc.) para que o volume seja o máximo. A partir dos resultados, o respectivo gráfico é construído e também é definido o formato ideal de determinada embalagem.

Diante das potencialidades dessa estratégia, como podemos desenvolvê-la tendo como base o livro didático? Entre as várias opções, o professor pode utilizar as seções **Explorando problemas, Conectando ideias** e até mesmo por meio de problemas contextualizados, que são apresentados na seção **Problemas e exercícios propostos**. Cabe a ele, então, avaliar a situação e adequá-la à realidade em que se encontra para desenvolver o trabalho com a Modelagem matemática. Desse modo, o processo de aprendizagem se torna mais motivador e desafiador para os alunos.

Tecnologias digitais de informação e comunicação (TDICs)

A cada dia o uso das tecnologias digitais da informação e da comunicação se torna mais presente no processo de ensino e aprendizagem. Segundo a BNCC (BRASIL, 2018, p. 528), no Ensino Médio, o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos alunos do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos e pela potencialidade das mídias sociais. Nesse contexto, destaca-se a importância de fazer uso dos recursos das tecnologias digitais e aplicativos, tanto para a investigação matemática como para o desenvolvimento do pensamento computacional. Destaca-se também que é mais importante saber usar os recursos digitais do que deixar de usá-los. Para isso, torna-se fundamental que os alunos usem adequadamente computadores, calculadoras científicas, *softwares*, aparelhos celulares e aplicativos. Esses alunos, como instrumentos de aprendizagem escolar, precisam se familiarizar e se atualizar com as novas tecnologias digitais, munindo-se dos conhecimentos tecnológicos para as demandas sociais presentes e futuras. Contudo, é necessário que qualquer recurso didático seja integrado a situações que os levem ao exercício da análise e da reflexão. Não basta visar à capacitação dos alunos para futuras habilitações em termos das especializações tradicionais, mas também formá-los para que possam desenvolver novas competências, em função da constante evolução que se espera de um novo profissional, capaz de lidar com novas tecnologias e linguagens e responder satisfatoriamente a novos ritmos, processos e desafios.

O uso adequado de tecnologias digitais na sala de aula favorece o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas de ordem mais complexa, em determinadas situações, possibilitando que os alunos explorem a aplicabilidade do conhecimento adquirido. Nesta coleção, o professor pode explorar as tecnologias digitais, por exemplo, na seção **Acesso digital**, na qual eles têm a oportunidade de lidar com alguns procedimentos digitais em conjunto com tarefas relacionadas aos conteúdos trabalhados no capítulo. O objetivo é levá-los à familiaridade com o uso das tecnologias e tornar presentes diferentes *softwares*, de planilhas e de linguagem da programação, no desenvolvimento das aulas, contribuindo de maneira efetiva com a construção do conhecimento matemático dos alunos. Uma sugestão para trabalhar com essa seção é realizar uma aula no laboratório de informática ou, em alguns casos, com aplicativo nos *smartphones*, caso o professor julgue conveniente. Em um primeiro momento, ele explica aos alunos as funcionalidades da ferramenta e depois permite que eles a explorem e a conheçam. Depois, pode propor aos alunos que desenvolvam as tarefas presentes na seção, além de preparar outras que julgar necessário. Ao final da aula, é importante realizar uma sistematização dos conceitos vistos durante o uso da tecnologia envolvida.

Essa metodologia, alinhada com essa seção, contempla a **Competência geral 7**, pois possibilita a produção do conhecimento e a resolução de problemas utilizando tecnologias digitais.

Ao utilizar esses recursos em sala de aula, é importante verificar com antecedência a disponibilidade do laboratório de informática e se os *softwares* que serão usados estão disponíveis nas máquinas ou, ainda, avaliar a possibilidade de usar *smartphones* e se há aparelhos em quantidade suficiente. Em caso negativo, é necessário organizar os alunos em grupos ou duplas para fazer a atividade.

Algumas considerações

O professor pode utilizar outras metodologias ativas de ensino em que o aluno se torna o protagonista do processo de aprendizagem, aqui não destacadas. Independentemente de qual seja utilizada, é importante que se planeje e estruture as propostas que serão desenvolvidas com antecedência, deixando claro aos alunos a maneira de cada metodologia ser trabalhada, estabelecendo algumas regras entre professor e alunos. Nesses tópicos, foram apresentadas algumas possibilidades, sugestões de seções e alguns boxes, que favorecem o desenvolvimento das tarefas e estratégias. Outro ponto importante é que elas podem ser utilizadas no momento em que o professor julgar mais conveniente e aplicadas em associação a outras seções ou boxes do livro. Devemos lembrar que os recursos digitais e as metodologias ativas são ferramentas auxiliares na personalização da aprendizagem, permitindo que os alunos aprendam no seu ritmo, de acordo com os conhecimentos que já tenham, facilitando o avanço na aprendizagem.

Avaliação

Quando pensamos em avaliação, podemos partir do pressuposto de que avaliar consiste em algo essencial às atividades humanas, isto é, em diferentes situações, independentemente da posição que ocupe, o ser humano terá de definir critérios, estabelecer relações e tomar decisões. Em razão disso, é fato que a avaliação está presente em toda proposta educacional. Contudo, ainda assim, consiste em algo complexo e polêmico, passível de críticas e controvérsias.

No âmbito da Educação Matemática, a avaliação pensada como algo isolado, estanque, como um fim em si mesmo, sem considerar os processos de ensino e aprendizagem desenvolvidos, é encarada como insatisfatória. Nessa modalidade de avaliação, um dos instrumentos, e às vezes o único, é a prova mensal ou bimestral, utilizada para quantificar o conhecimento dos alunos. Nelas, de modo geral, eles são levados a resolver problemas e questões semelhantes aos propostos durante as aulas. Em razão de sua forma, tal instrumento não consegue a abrangência necessária dos elementos a serem avaliados – conhecimentos, habilidades, atitudes, valores etc. Consequentemente, terá mais sucesso o aluno que coincidentemente tiver estudado os conteúdos correspondentes aos propostos na prova, enquanto será baixa a nota daquele que optou por se dedicar mais a outros conteúdos.

A avaliação que assume essas características é denominada somativa, a qual está relacionada prioritariamente à identificação de um desempenho pontual dos alunos. Quando observamos os processos ocorridos no ambiente escolar, muitas vezes identificamos que a escola e seus professores reforçam, no processo avaliativo, alguns aspectos negativos, como

> *[...] foco na classificação, caráter de exclusão, autoritarismo, avaliação de perspectiva individual, destaque para a memorização, valorização do quantitativo e busca por apenas um bom resultado na prova. [...]. (PAIXÃO, 2016, p. 5).*

Essas são algumas características da avaliação somativa e que reforçam sua preocupação em gerar resultados, como “aprovado” ou “reprovado”, ou, ainda, de valores numéricos correspondentes ao desempenho dos alunos, ou seja, notas.

Esse tipo de avaliação não é suficiente quando o interesse do professor vai além da atribuição de notas e classificação dos alunos. Considerando que a proposta do Ensino Médio esteja relacionada à construção de conhecimentos, desenvolvimento de habilidades, atitudes e valores, de acordo com o conjunto de aprendizagens mínimas estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), é importante que a avaliação integre o trabalho pedagógico, não sendo exclusiva apenas para desenvolvimento em momentos pontuais, como fechamentos de bimestres e semestres, mas coerente com os objetivos estabelecidos pelo professor.

No entanto, ao longo de sua formação, principalmente no Ensino Médio e após sua conclusão, os alunos serão colocados diante de avaliações de caráter somativo, como os exames de larga escala, entre eles as provas de vestibular e do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Esses exames têm relação direta com a avaliação somativa, por estarem alinhados a seu objetivo principal de classificar os alunos para o ingresso em cursos superiores. Assim, apesar de não ser suficiente para acompanhá-los no Ensino Médio, a avaliação somativa será vivenciada pelos alunos ao longo de seu percurso nessa etapa de ensino. Por isso, também precisa estar presente nos ambientes escolares, não exclusiva mas integrada aos demais tipos de avaliação.

Em contraposição a essa forma de avaliar, prioritariamente pontual, na Educação Matemática são valorizadas as abordagens voltadas à avaliação contínua, mediante a valorização daquilo que os alunos sabem do todo, algo que é visto como parte do processo de ensino e aprendizagem, vinculada a um projeto pedagógico coerente em relação a suas finalidades. Segundo Rabelo (1998, p. 11), a "[...] avaliação é inerente e imprescindível, durante todo o processo educativo que se realize em um constante trabalho de ação-reflexão-ação [...]".

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Básica, nº 9394/1996, em seu art. 24, inciso V, destaca que a avaliação escolar deve atender ao critério de ser

> *[...] contínua e cumulativa do desempenho do aluno, com prevalência dos aspectos qualitativos sobre os quantitativos e dos resultados ao longo do período sobre os de eventuais provas finais. [...].*

Sendo assim, no Ensino Médio a avaliação deve ser organizada de modo a perpassar todo o ano letivo, não se restringindo às provas bimestrais ou semestrais, mas sendo constante, acompanhando os alunos em todo seu desenvolvimento ao longo do ano letivo e em cada disciplina, especialmente em Matemática.

Além de contínua, a avaliação deve ser desenvolvida de maneira a integrar os processos de ensino e aprendizagem, não sendo mero instrumento de identificação de desempenho pontual, mas contribuindo para o desenvolvimento dos alunos, particularmente para o ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio.

A avaliação formativa objetiva fornecer informações que permitam ao professor acompanhar a aprendizagem dos alunos e reorganizar seu trabalho com o intuito de atender às diferenças individuais observadas, isto é, a avaliação precisa ser associada a um processo de intervenção pedagógica, o qual deve contribuir com as aprendizagens dos alunos e auxiliar na superação das dificuldades manifestadas por eles (VILLAS BOAS, 2019). Assim, na avaliação formativa, o objetivo não é exclusivo para atribuição de nota, mas consiste em um acompanhamento dos alunos ao longo dos processos de ensino e aprendizagem, visando à promoção da aprendizagem a eles.

Popham (2008 *apud* VILLAS BOAS, 2019, p. 18) apresenta, em consonância com sua visão de avaliação formativa como processo planejado, em que professores e alunos utilizam as informações coletadas para ajustar o trabalho pedagógico, as seguintes características para esse tipo de avaliação:

> *[...]*
>
> *É um processo, não um teste em particular; é um processo planejado, que envolve diferentes atividades; é usada não apenas por professores, mas também por estudantes; ocorre durante o desenvolvimento do trabalho pedagógico; fornece* feedback *a professores e estudantes; a função do* feedback *é ajudar professores e estudantes a promover ajustes que atendam aos propósitos curriculares almejados.*
>
> *[...]*

Sendo assim, tanto professores quanto alunos devem utilizar-se das informações obtidas a partir da avaliação formativa para que seja possível promover a aprendizagem, contribuindo para a reorganização do trabalho pedagógico, a superação de dificuldades e o desenvolvimento dos alunos.

Vista por esta perspectiva, isto é, como parte de um projeto pedagógico, a avaliação corresponde a uma forma de verificação da eficácia do método didático-pedagógico desenvolvido pelo professor. Com base nos resultados das avaliações, o docente tem como conferir se os elementos de sua prática estão adequados aos objetivos que pretende atingir e se favorecem a aprendizagem dos alunos, de modo que possa reorientar sua prática pedagógica quando necessário. Sendo assim,

> *[...] a avaliação formativa existe para promover as aprendizagens. Isso só pode ocorrer se o professor aprimorar o trabalho pedagógico. Portanto, um dos componentes dessa avaliação é a possibilidade de o professor ajustar as atividades que desenvolve com seus alunos. [...]. (VILLAS BOAS, 2019, p. 19).*

Assim, a reorganização da prática pedagógica a partir dos resultados obtidos por meio da avaliação formativa é uma etapa indispensável do trabalho do professor.

Porém, para que isso ocorra, é necessário que o professor organize seu trabalho no sentido de desenvolver um processo avaliativo de modo simultâneo aos processos de ensino e aprendizagem, além de ser contínuo durante todo o ano letivo. Além disso, é preciso articular as avaliações formativa e somativa, de modo que ambas possam contribuir com a aprendizagem dos alunos. Conforme destaca Paixão (2016, p. 7),

> *[...]*
>
> *Em ambientes em que o processo avaliativo segue seu curso ideal, com a avaliação formativa e a somativa trabalhando conjuntamente em prol da aprendizagem [...] o que se vê é uma parceria entre professor e aluno, que faz a avaliação deixar de ser uma prova comprobatória e passe a ser um instrumento para verificação do progresso. [...]. Ao avaliar o aluno desse modo, a escola não apenas o valoriza, destacando suas habilidades e conquistas, mas também assume responsabilidade direta por seu desempenho – o fato de um aluno não alcançar os objetivos de aprendizagem passa a ser um problema conjunto, e não isolado, o que reforça a parceria. [...].*

Além disso, no processo avaliativo, uma etapa importante consiste em mapear os conhecimentos, habilidades, atitudes e valores que os alunos já possuem para que, a partir disso, seja possível organizar um trabalho pedagógico significativo e que permita a eles se desenvolverem. Uma estratégia que pode contribuir nesse sentido é utilizar a avaliação diagnóstica.

De acordo com Castillo Arredondo (2013), a finalidade da avaliação diagnóstica é dar início ao processo educativo conhecendo as reais características dos alunos, em relação aos aspectos pessoais e acadêmicos, sendo esse conhecimento essencial para que o professor consiga organizar sua prática em concordância com a realidade de sala de aula, partindo do que os alunos já sabem e já desenvolveram, e não de um aluno ideal e que nem sempre corresponde à realidade.

Com base no diagnóstico obtido para cada aluno, identificado por diferentes instrumentos, como provas, testes, atividades de resolução de problemas, discussões em grupo, entre outros, considerando as especificidades dos conceitos matemáticos, o professor pode organizar seu trabalho considerando os conhecimentos prévios dos alunos e construir propostas adequadas a eles e coerentes com os conhecimentos, habilidades, atitudes e valores esperados para a etapa em questão. Para a preparação dos instrumentos de avaliação diagnóstica, as premissas podem ser as orientações da Base Nacional Comum Curricular, verificando se os alunos atingiram os conhecimentos mínimos esperados para as etapas anteriores, seja em relação aos anos finais do Ensino Fundamental, seja em séries anteriores do Ensino Médio.

No processo avaliativo, no que diz respeito aos alunos, é preciso dar a eles a oportunidade de verificar suas dificuldades e necessidades na construção do conhecimento. Por meio do processo de avaliação, eles poderão tomar consciência dos conteúdos que já aprenderam e, também, identificar a necessidade de uma dedicação maior em relação a alguns assuntos. Dessa forma, para que a avaliação possa contribuir significativamente para a aprendizagem dos alunos, é necessário que ela "[...] deixe de ser utilizada como recurso de autoridade, que decide sobre os destinos do educando, e que assuma o papel de auxiliar o crescimento. [...]" (LUCKESI, 2006, p. 166).

Outro instrumento eficiente para que professores e alunos possam verificar, respectivamente, seu trabalho e sua aprendizagem, é a autoavaliação. Conforme Villas Boas (2008, p. 51), esta corresponde

> *[...] ao processo pelo qual o próprio aluno analisa continuamente as atividades desenvolvidas e em desenvolvimento, registra suas percepções e seus sentimentos e identifica futuras ações, para que haja avanço na aprendizagem [...].*

Dessa forma, a avaliação é direcionada para a aprendizagem, sendo um importante processo associado à avaliação formativa. Nesse sentido, os alunos poderão refletir sobre a própria aprendizagem, assumindo um papel ativo, enquanto o docente pensará mais a respeito de seu trabalho e o reorganizará de modo a potencializar as aprendizagens dos alunos.

Diante dessas possibilidades, considerando a articulação entre as avaliações diagnóstica, formativa e somativa, em conjunto com a autoavaliação, o processo avaliativo, portanto, passa a ter um caráter de formação, e não de punição. O foco, agora, está na compreensão dos conteúdos e procedimentos avaliados, e os erros cometidos pelos alunos não têm mais caráter punitivo, antes se converteram em elementos de investigação, discussão e produção de novos saberes. Desse modo, é importante que o professor aborde a questão do erro de maneira que os alunos compreendam sua importância como indicativo de possíveis dificuldades que podem ser superadas mediante o direcionamento dos estudos, o que pode ser realizado pelo professor por meio de mudanças nas metodologias, atividades ou abordagens, conforme as observações realizadas por ele durante a avaliação.

Por isso, o processo avaliativo deve ser praticado diariamente no ambiente escolar. Nesse contexto, a avaliação consiste em uma maneira de o professor estar consciente das conquistas da turma e, desse modo, manter-se atento às falhas que podem ocorrer nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática, sendo configurada como parte desses processos. Uma maneira de desenvolver um trabalho contínuo de avaliação com seus alunos é utilizar diversos recursos, como listas de atividades, apresentação de seminários, relatórios e provas escritas e elaboração de portfólios, mediante a utilização de instrumentos que envolvam a produção escrita. De posse dessas ferramentas avaliativas, é possível obter informações sobre a apreensão e o registro das ideias que os alunos levantaram com base na situação apresentada. De acordo com Buriasco e Soares (2008), essas informações constituem um material valioso para o repertório de planejamento das aulas e das suas escolhas didáticas. Além disso, fornece subsídios comunicativos entre professor e alunos.

O documento PCN+ Ensino Médio – Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, em relação às Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 2002, p. 131), indica que ao

> *[...] professor são oferecidas incessantemente muitas oportunidades de observação e avaliação no desenrolar de seu trabalho com os alunos. Muitas vezes, usamos as informações, mas não mantemos nenhum registro delas, outras vezes recolhemos informações que já possuíamos, de que não necessitamos ou das quais nunca faremos uso. Pontuar, registrar e relatar são procedimentos comuns numa avaliação que se integra ao ensino.*
>
> *[...]*

Assim, é importante que o docente aproveite as diferentes oportunidades para acompanhar o desenvolvimento dos alunos e procure utilizar-se de registros para que possa, com base neles, reorganizar sua prática conforme julgue necessário. Além dos registros elaborados por ele, é importante que sejam utilizados os que foram feitos pelos próprios alunos, como parte da avaliação, já que uma das habilidades a ser desenvolvida no Ensino Médio, na área de Matemática, é a comunicação de ideias, por escrito e de forma oral, utilizando linguagem matemática e a língua materna.

Em relação aos recursos que possibilitam a comunicação oral, professor e alunos poderão negociar significados e ideias matemáticas associados a conceitos, além de trabalhar estratégias e procedimentos para a resolução de problemas. O objetivo é auxiliar no processo de aprendizagem de Matemática, sendo a avaliação um instrumento de mediação, permitindo aos alunos a compreensão e o desenvolvimento das habilidades, assim como a produção de conhecimento sobre os conceitos envolvidos.

Os instrumentos de avaliação escolhidos pelo professor devem ser coerentes com seus objetivos e com as estratégias metodológicas adotadas. Considerando uma integração entre as avalições diagnóstica, formativa e somativa, em conjunto com a autoavaliação, os mais variados instrumentos podem ser utilizados, desde que sejam estabelecidos objetivos claros para a utilização de cada um deles.

Em relação ao trabalho com grandes grupos de alunos, que apresentam suas características individuais e níveis de desenvolvimento próprios, o processo avaliativo tem um papel indispensável para que o professor possa conhecer cada aluno e organizar seu trabalho no sentido de atender às dificuldades manifestadas. Nesse caso, a diversificação das metodologias adotadas e dos instrumentos de avaliação, com destaque para observação, análise dos registros escritos, acompanhamento de discussões realizadas em pequenos grupos ou com a turma, entre outros procedimentos, são indispensáveis para que, além de dirigir seu olhar a todos os alunos, o professor atenda às necessidades individuais deles, promovendo um espaço onde haja cooperação entre os pares e ocorra a promoção da aprendizagem significativa a todos.

Nesta coleção, o professor tem a oportunidade de verificar as aprendizagens dos alunos e analisar seu método didático-pedagógico. Ao longo de cada capítulo, são propostas várias tarefas, por meio das quais ele poderá seguir o processo de aprendizagem dos alunos aula a aula, sem precisar reservar sua avaliação para um único momento. Além disso, mediante as informações que tiver, poderá refazer, se necessário, seus planos de aula, a fim de adequá-los para cada turma.

Nesta coleção, temos a presença das seções **Conversando** e **Finalizando a conversa**, cujo objetivo é contribuir com a organização das temáticas e dos conteúdos abordados. A respeito da primeira seção, esta visa introduzir os temas que serão discutidos na unidade, sendo importante o professor realizar um trabalho no sentido de introduzir os conteúdos que serão estudados, bem como suas possíveis aplicações práticas, para que os alunos percebam a presença da Matemática na realidade. Além disso, em associação com essa seção, o professor pode desenvolver outras atividades com o objetivo de identificar os conhecimentos prévios dos alunos a respeito da temática que será discutida, aproveitando o momento para aplicação de avaliação diagnóstica que lhe permita refletir e organizar seu trabalho considerando os conhecimentos deles e suas dificuldades, a fim de tornar o aprendizado significativo e direcionado às características da turma.

Já em relação à seção **Finalizando a conversa**, o professor pode, além de propor as atividades e discussões apresentadas nesta coleção, utilizar outros instrumentos para contribuir com a avaliação dos alunos e com identificação de possíveis lacunas de aprendizagem, as quais podem ser sanadas mediante um trabalho em articulação com essa última seção, e em cada unidade. Nesse momento, caso seja necessário e conveniente, o professor pode também utilizar-se de elementos da avaliação somativa, em concordância com o sistema de avaliação adotado pela instituição escolar em que atua.

Cabe ressaltar que os alunos poderão ser submetidos, ao longo do Ensino Médio, a diferentes exames de larga escala, como o já citado Enem. Assim, a avaliação do tipo somativa também precisa estar presente no sistema adotado, para que eles se preparem para esse tipo de prova. Nesse sentido, o professor pode fazer uso de instrumentos como provas objetivas e/ou dissertativas, simulados envolvendo questões desses exames, entre outros, para que, além de acompanhar o desempenho dos alunos, possa prepará-los para uma participação em provas desse tipo. Porém, não se pode esquecer que a avaliação somativa não deve ser a única forma de avaliar, e sim mais uma maneira de acompanhar o desenvolvimento dos alunos, além das já citadas avaliações diagnóstica e formativa.

Diante desses temas, na organização do trabalho pedagógico, um dos elementos indispensáveis é a avaliação que corresponde a um processo indissociável do ensino e da aprendizagem de Matemática. Por isso, essa avaliação deve ser integrada ao trabalho pedagógico, assumindo um caráter contínuo e prioritariamente formativo, por meio da articulação entre as características das avaliações diagnóstica, formativa e somativa, em conjunto com a autoavaliação, contribuindo para que a ação docente seja voltada à organização e à proposição de atividades que sejam significativas aos alunos e que contribuam com a aprendizagem de conceitos matemáticos, bem como para o desenvolvimento das habilidades, das atitudes e dos valores esperados para esses alunos na conclusão dessa etapa de ensino.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Ensino Médio

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo, que tem como objetivo definir o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais para todos os alunos e que devem ser desenvolvidas em todas as etapas da Educação Básica (Educação Infantil; Ensino Fundamental e Ensino Médio). Por se tratar de um documento normativo, a BNCC é referência nacional para a formulação dos currículos das redes públicas municipal e estadual das escolas e para as propostas pedagógicas tanto das instituições escolares da rede pública quanto da rede privada. Além disso, o documento visa contribuir para o alinhamento de ações em âmbito federal, estadual e municipal no que se refere à formação de professores e à avaliação. A BNCC foi elaborada a fim de garantir que todos os alunos, independentemente da rede de ensino e do estado onde moram, tenham um patamar comum de aprendizagem.

As aprendizagens comuns aos alunos devem assegurar o desenvolvimento de competências, isto é

> *[...] a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. [...] (BRASIL, 2018, p. 8).*

Nesse sentido, a BNCC define dois tipos de competência, a saber: gerais, que possuem uma interlocução e desdobram-se no tratamento didático proposto para as três etapas da Educação Básica durante a construção de conhecimento, atitudes e valores; e específicas, ou seja, de cada área do conhecimento.

As competências gerais devem ser desenvolvidas durante todas as etapas da Educação Básica, a fim de capacitar os alunos a resolver problemas complexos do cotidiano e exercer uma cidadania consciente. São competências gerais:

> **1** *Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.*
>
> **2** *Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.*
>
> **3** *Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.*
>
> **4** *Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artísticas, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.*
>
> **5** *Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.*
>
> **6** *Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.*
>
> **7** *Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.*
>
> **8** *Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.*
>
> **9** *Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.*
>
> **10** *Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários. (BRASIL, 2018, p. 9-10).*

Os conteúdos abordados ao longo da coleção levam os alunos a desenvolver as competências citadas anteriormente. Também nesta coleção é disposta a seção intitulada **Acesso digital**, que propõe ao professor trabalhar com *softwares* matemáticos e de programação com intuito de que os alunos resolvam problemas e produzam conhecimentos matemáticos e de outras áreas do conhecimento, contemplando assim a **Competência geral 5**.

Além disso, alguns temas da coleção realizam uma abordagem histórica do conteúdo ou, ainda, estão relacionados com diferentes culturas étnicas e raciais, o que contempla a **Competência geral 3**.

As páginas temáticas iniciais de cada capítulo abordam conteúdos relacionados ao dia a dia, como energia elétrica, armazenamento de dados na medicina, entre outros. Esses conteúdos favorecem o exercício da curiosidade intelectual, a investigação científica, o trabalho coletivo, a utilização de diferentes tipos de linguagem (verbal, geométrica, algébrica, entre outras), contemplando assim diferentes competências gerais.

Conforme a BNCC, o Ensino Médio está dividido em áreas de conhecimento (Linguagens e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Ciências Humanas e Sociais Aplicadas). Para cada uma dessas áreas, são definidas competências específicas, que fazem uma inter-relação com as respectivas competências do Ensino Fundamental, realizando adequações de acordo com as especificidades do Ensino Médio. Relacionadas a cada uma delas são descritas habilidades, que devem ser desenvolvidas ao longo dessa etapa da Educação Básica.

No que diz respeito à área do conhecimento Matemática e suas Tecnologias, a BNCC aponta as unidades temáticas, os objetos de conhecimentos e as habilidades que os alunos devem consolidar no Ensino Fundamental, e propõe que as aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental sejam ampliadas e aprofundadas no Ensino Médio. Propõe também recursos e estratégias para resolver problemas mais complexos com que os alunos vão se deparar na vida acadêmica e social. De acordo com a BNCC, o Ensino Médio tem como objetivo desenvolver a construção de uma visão integrada da Matemática aplicada à realidade, de tal modo que os alunos sejam capazes de utilizar conhecimentos matemáticos para analisar, interpretar e resolver problemas do cotidiano e de diferentes áreas do conhecimento. Para isso é necessário que as aulas considerem as vivências dos alunos, que são impactados de modos diferentes pelos avanços tecnológicos e pelas exigências do mercado de trabalho. Nesse contexto, é importante destacar o papel dos recursos de tecnologias digitais e aplicativos.

Ainda segundo a BNCC, para que os objetivos do Ensino Médio se concretizem na área de conhecimento da Matemática, é necessário que os alunos desenvolvam

> *[...] habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. [...] (BRASIL, 2018, p. 529).*

A primeira competência específica da área de Matemática e suas Tecnologias refere-se à utilização de

> *[...] estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral" (BRASIL, 2018, p. 531).*

Essa competência é ampla e permite que o professor realize propostas e práticas que favoreçam o desenvolvimento de habilidades referentes à interpretação e à compreensão da realidade utilizando conceitos matemáticos. Além disso, possibilita que o aluno utilize conceitos, estratégias e procedimentos matemáticos para a tomada de decisões não só em problemas matemáticos, mas em atividades de diferentes áreas. Nesta coleção, as páginas que iniciam cada tema, bem como a seção **Problemas e exercícios propostos**, dão ao professor a oportunidade de utilizar estratégias de trabalho que colocam os alunos como o centro do processo de aprendizagem, permitindo assim que ele possa abordar os conceitos estudados em cada tema para resolver problemas cotidianos e de outras áreas do conhecimento, como Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Essa seção engloba não só exercícios matemáticos, mas problemas que fazem parte do dia a dia dos alunos, a fim de que eles possam aplicar os conceitos matemáticos em situações reais.

> *Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática (BRASIL, 2018, p. 534).*

Esta é a segunda competência específica da área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias, que amplia a primeira de maneira a colocar os alunos para investigar situações e desafios que tenham impactos social e ambiental. Além desses aspectos, essa competência prevê que eles sejam capazes de identificar aspectos consensuais ou não em discussões que envolvem problemas éticos, sustentáveis e com base em princípios solidários. A segunda competência específica também propicia a interação colaborativa entre os alunos, a fim de que possam aprender e ensinar Matemática de modo significativo. A seção **Saiba mais** e as páginas iniciais permitem que eles tenham contato com situações sociais e ambientais, como o consumo consciente de energia elétrica, tratado no tema sobre cálculo de área e volume.

A terceira competência específica refere-se à utilização de

> *[...] estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2018, p. 535).*

Essa competência mobiliza habilidades relacionadas a resolução, interpretação, formulação e construção de problemas e modelos matemáticos que envolvem conceitos algébricos, geométricos, estatísticos, entre outros. O texto da BNCC destaca que os alunos do Ensino Médio devem mobilizar habilidades que podem ser necessárias para resolver problemas ao longo da vida, assim é preciso que os problemas elaborados e resolvidos sejam de diferentes contextos. Os temas relacionados a funções, de modo geral, oferecem ao professor exercícios que envolvem a solução de problemas cotidianos em que os conceitos podem ser aplicados diretamente para sua resolução ou, ainda, situações em que os alunos precisem fazer adaptações de seu uso a fim de resolver um problema ou construir um modelo matemático que descreva a situação em estudo. Ao trabalhar funções trigonométricas, por exemplo, por meio da análise das marés, os alunos têm a oportunidade de descrever o movimento das marés por meio de uma função seno ou cosseno, criando assim um modelo matemático que auxilia a interpretar a situação. Nesse caso, o uso de tecnologias digitais facilita o desenvolvimento de modelos e a formulação e resolução de problemas, o que possibilita a eles terem acesso às alternativas de experiências variadas e que facilitam a aprendizagem de conceitos matemáticos e a capacidade de raciocinar logicamente, testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações. A seção **Acesso digital** possibilita a realização de um trabalho em que *softwares* podem ser aplicados na construção de modelos e/ou na resolução de problemas. Já na seção **Problemas e exercícios propostos** algumas tarefas requerem dos alunos a formulação de problemas que envolvem assuntos cotidianos, destacados no **Você cidadão**.

A quarta competência específica relaciona-se à compreensão e utilização,

> *[...] com flexibilidade e precisão, [de] diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas (BRASIL, 2018, p. 538).*

Ser capaz de utilizar diferentes tipos de representação para um mesmo objeto matemático na resolução de problemas de diferentes contextos é uma das habilidades vinculadas a essa competência. O texto da BNCC destaca que

> *[...] ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de modo significativo sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente [...]. (BRASIL, 2018, p. 538).*

Assim, é importante que eles tenham domínio dos conceitos matemáticos a fim de realizar conversões entre os diferentes tipos de representação, como do registro algébrico para o registro gráfico, e vice-versa. Na seção **Problemas e exercícios propostos**, os alunos necessitam de conhecimentos sobre essas representações para que possam aplicá-las da melhor maneira possível na resolução de problemas matemáticos e problemas de diferentes contextos.

> *Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 540).*

Esta é a quinta e última competência específica da área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias. O desenvolvimento dessa competência requer um conjunto de habilidades relacionadas às capacidades de investigação e formulação de explicações e argumentações a respeito de problemas decorrentes de experiências empíricas.

Ao propor tarefas que permitem o desenvolvimento das competências gerais para o Ensino Médio e competências específicas para a área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias, o professor contribui para que os alunos desenvolvam o senso crítico, possibilitando analisar, refletir e construir argumentos sobre questões socioambientais. Além disso, o desenvolvimento das habilidades que constituem todas as competências específicas contribui para que eles se tornem cidadãos conscientes. Por exemplo, ao trabalhar sobre unidades de medida de volume e área, pode-se abordar o assunto sobre consumo de energia elétrica, discutindo com os alunos, além dos conceitos matemáticos, maneiras de economizar energia. O trabalho que sugere a investigação e a leitura e interpretação de textos científicos divulgados em diferentes mídias propicia a eles o desenvolvimento de habilidades necessárias à formação crítica e reflexiva.

Vale ressaltar que os temas da coleção foram pensados de modo a propiciar ao professor possibilidades de desenvolver as diferentes competências e habilidades propostas na BNCC.

Ao longo da coleção é possível que alunos e professor identifiquem quais competências e habilidades serão desenvolvidas nos temas trabalhados. No que se refere aos primeiros, eles podem identificar as habilidades que o tema propicia desenvolver em boxes denominados "BNCC". As habilidades são escritas em códigos, permitindo identificar a qual competência específica refere-se o número da habilidade e a qual área do conhecimento pertence. Por exemplo, na habilidade **EM13MAT104** temos primeiro um par de letras (**EM**), que indica a etapa de Ensino Médio. O primeiro par de números (**13**) mostra que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio. A segunda sequência de letras aponta a área (três letras) ou o componente curricular (duas letras), nesse caso **MAT**, que significa Matemática e suas Tecnologias. Já os números finais indicam a competência específica à qual se relaciona a habilidade (1º número) e sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência (dois últimos números).

Além das páginas disponíveis para os alunos, na Assessoria pedagógica são mostradas ao professor as competências gerais e específicas e as habilidades da BNCC desenvolvidas em determinados problemas, exercícios ou seções especiais. Ao propor e explicitar os assuntos em cada tema, sempre que pertinente é composto o boxe **BNCC**. Nesse boxe, é apresentada a maneira pela qual determinado conteúdo propicia o desenvolvimento de certa competência e habilidade.

Além de estabelecer as competências gerais e específicas de cada área do conhecimento, a BNCC propõe os chamados Temas Contemporâneos Transversais, que buscam contextualizar o que é ensinado relacionando-os com temas que sejam de interesse dos alunos e que contribuam para sua formação cidadã.

> *[...] O grande objetivo é que o estudante não termine sua educação formal tendo visto apenas conteúdos abstratos e descontextualizados, mas que também reconheça e aprenda sobre os temas que são relevantes para sua atuação na sociedade. [...] (BRASIL, 2019, p. 7).*

Além disso, com base nesses temas, espera-se que os alunos compreendam melhor aspectos de seu dia a dia, como utilizar o dinheiro, cuidar da saúde, usar novas tecnologias digitais, entre outros. A BNCC engloba seis áreas temáticas, que são: cidadania e civismo; ciência e tecnologia; economia; meio ambiente; multiculturalismo; e saúde. Essas englobam quinze temas contemporâneos: ciência e tecnologia; direitos da criança e do adolescente; diversidade cultural; educação alimentar e nutricional; educação ambiental; educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras; educação em direitos humanos; educação financeira; educação fiscal; educação para o consumo; educação para o trânsito; processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso; saúde; trabalho; e vida familiar e social, conforme ilustra a imagem a seguir.

Governo Federal/Ministério da Educação

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2020.

Há distintas maneiras e concepções de trabalhar esses temas na escola, sendo positiva essa diversidade de abordagens, pois garante a autonomia das redes de ensino e dos professores.

A BNCC propõe que esses temas sejam trabalhados em conjunto com outras áreas do conhecimento, podendo fazer uso de diferentes metodologias ativas, em que os alunos tornam-se o centro do processo de aprendizagem. Ao longo dos temas desta coleção, em cada página inicial, é possível contemplar esse tipo de trabalho em conjunto com professores de componentes curriculares como Física, Ciências Biológicas, Arte, História, entre outros. Além disso, ao estudar temas que propiciam aos alunos discutir assuntos relacionados à saúde, ao meio ambiente e à educação física, por exemplo, eles desenvolvem a reflexão e a interpretação crítica desses assuntos por meio de conceitos tanto matemáticos quanto de outras áreas do conhecimento. Isso é visto na seção **Você cidadão**, na qual são explorados assuntos que permitem ao professor trabalhar os temas contemporâneos transversais também em conjunto com outros professores.

O trabalho com os temas contemporâneos transversais promove o desenvolvimento de competências gerais e específicas propostas na BNCC.

A assessoria pedagógica apresenta em quais ocasiões da coleção é possível realizar um trabalho em conjunto com outros professores, bem como qual tema contemporâneo transversal abordar, oferecendo sugestões ao professor.

O trabalho com os pressupostos da BNCC e com os temas contemporâneos transversais permite que o professor desenvolva com os alunos habilidades, atitudes e valores que os auxiliarão na formação – tanto no âmbito acadêmico como fora dele.

Nesse sentido, sempre que possível e conveniente, é importante promover situações que favoreçam o desenvolvimento dessas habilidades, desses valores e atitudes por meio de reflexões, discussões, debates, trabalho em grupo, uso adequado das tecnologias e pesquisas.

Abordagem teórico-metodológica

Esta obra tem como proposta oferecer subsídios para possibilitar o desenvolvimento acadêmico e pessoal dos alunos, apresentando conteúdos por meio de situações-problema advindas da realidade, favorecendo assim a compreensão do conceito tanto no âmbito da Matemática quanto em suas aplicações em situações de diferentes áreas. Além disso, a obra se alinha à teoria sociointeracionista, valorizando aspectos históricos e culturais e posicionando os alunos no centro do processo de aprendizagem.

Os conteúdos são abordados de maneira direta e propiciam o uso de metodologias ativas, permitindo o protagonismo dos alunos em seu processo de aprendizagem. Já as situações-problema consideram o protagonismo juvenil, bem como contribuem para que eles reflitam criticamente sobre essas situações, entendam as relações próprias do mundo do trabalho e façam escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e a seu projeto de vida.

Quando se trata da aprendizagem, seja no âmbito da Matemática, seja em questões relacionadas aos projetos pessoais, é importante considerar o conhecimento prévio e as experiências de vida dos alunos, que servirão de suporte para introduzir novos conceitos e tomar decisões diante de questões que envolvam conceitos matemáticos e situações nos âmbitos social, ambiental, financeiro, no mundo do trabalho, entre outras. Nesse sentido, o conteúdo desta obra considera tais conhecimentos prévios necessários e, sempre que possível, a apresentação é feita de maneira gradativa, até chegar à formalização.

Ao longo da obra também são propostos recursos, como o uso de tecnologias digitais que proporcionam a visualização de conceitos mais abstratos, de modo a facilitar a compreensão desses conceitos, contribuindo assim para a construção do saber, do trabalho interativo e colaborativo, de processos de descobertas de modo dinâmico, utilizando a teoria e a prática. Além disso, os conteúdos favorecem o desenvolvimento de trabalho interdisciplinar com professores de diferentes componentes curriculares. De modo geral, essa interdisciplinaridade tem sido entendida como uma maneira de articular dois ou mais componentes por meio da exploração de determinados assuntos, visando analisar, discutir e compreender os diferentes pontos de vista apresentados em cada uma das áreas de conhecimento, o que pode auxiliar os alunos na construção de seus conhecimentos em uma perspectiva mais ampla e múltipla.

> *[...] Nesse sentido, o ensino de Matemática deve engajar-se na crescente preocupação com a formação integral do aluno como cidadão da sociedade contemporânea [...] [em que] "cada vez mais é obrigado a tomar decisões políticas complexas. Introduz-se, assim, definitivamente, na agenda da Matemática escolar, o ensino voltado para a formação de cidadãos críticos e responsáveis. [...]." (TOMAZ; DAVID, 2008, p. 15).*

Um modo de viabilizar o trabalho integrado com outras áreas do conhecimento é por meio do desenvolvimento de projetos. Vale ressaltar, contudo, que um projeto desse tipo, para ser bem-sucedido, precisa de mais do que integração entre as áreas do conhecimento, ou seja, é necessário envolvimento e empenho entre os participantes, tanto professores quanto alunos. Para Nogueira (1998, p. 33), tal integração "[...] pretende atingir como complementaridade das diferentes disciplinas, já que demonstra aos alunos possíveis inter-relações nelas existentes. [...]". Ainda segundo o autor, outro fator importante para a execução de projetos interdisciplinares é a possibilidade de acesso à pesquisa. Com isso, espera-se que os alunos, ao perceberem as relações entre as áreas do conhecimento, sejam motivados a

> *[...] buscar novos conhecimentos sobre um tema, problema ou questão, pois agora o projeto apresenta perspectivas múltiplas, em que todas as disciplinas contribuem de uma certa forma, e, por consequência, [...] receber orientações e desafios para a pesquisa de vários professores em prol de um tema único (NOGUEIRA, 1998, p. 33).*

Nesta obra, o caráter interdisciplinar da Matemática é explorado por meio de tarefas, apresentação de informações e contextos diversificados. Nas tarefas, por exemplo, a Matemática atua como instrumento de apoio para a resolução de problemas, em geral, vinculados a situações envolvendo medições, cálculos e interpretações de informações relacionadas a várias áreas do conhecimento. Por meio dessas situações, os conceitos trabalhados nos capítulos são resgatados e utilizados para compreender informações e conceitos abordados em outras áreas do conhecimento, estabelecendo uma relação entre elas. Assim, espera-se que os alunos percebam essa interação, a fim de construir o conhecimento de modo mais amplo e significativo.

A interdisciplinaridade também pode ser um modo de relacionar a Matemática com temas contemporâneos transversais, permitindo assim que os alunos interpretem criticamente situações que contribuam para uma formação cidadã. Ao longo da obra, tarefas e seções, como as páginas de abertura, as seções **Saiba mais** e **Conectando ideias**, bem como o destaque **Você cidadão**, permitem o trabalho com esses temas contemporâneos transversais, favorecendo assim a discussão sobre situações que levam os alunos a pensar em que medida as atividades feitas na escola ou fora dela estão associadas ao planejamento e às decisões de seus projetos de vida. Outra seção que merece ser comentada é **Explorando problemas**, que possibilita a formulação de hipóteses, a validação de resultados para a elaboração de conceitos, a autonomia da comunicação e a organização do raciocínio.

Por meio das tarefas propostas e dos possíveis encaminhamentos, os alunos expressam suas ideias, seja escrevendo, seja dialogando com o professor e os colegas. Nesse sentido, eles têm a oportunidade de se comunicar e de desenvolver a capacidade de organizar o raciocínio, construir argumentos bem fundamentados e ouvir seus colegas, contribuindo assim para o desenvolvimento de atitudes de respeito mútuo, cooperação e senso crítico que são essenciais para a formação deles como indivíduos, e que são obtidas por meio do trabalho em grupo, proposto em alguns momentos da obra. Isso favorece a interação e a consequente participação de todos os alunos no processo. Com isso, apresentam-se mais possibilidades para expor ideias, argumentar sobre seus pontos de vista e discutir diferentes estratégias e soluções. Por causa desses fatores, o trabalho em pequenos grupos tem sido frequentemente sugerido nas aulas de Matemática. Apesar de muitos professores o rejeitarem

> *[...] sob alegação de que os alunos fazem muito barulho e não sabem trabalhar coletivamente, essa modalidade de trabalho é valiosa para várias das competências que se deseja desenvolver. Outro aspecto que se deve enfatizar é a importância da comunicação em Matemática, por ser uma competência valiosa como relato, registro e expressão. [...]. (BRASIL, 2002, p. 129).*

Ao realizar o trabalho em grupo é fundamental que o professor esteja atento para como os alunos se organizam em determinada atividade, visto que essa deve permitir a eles que atinjam satisfatoriamente os objetivos estabelecidos. Iniciar o trabalho em equipe com os alunos desde a Educação Básica torna-se cada vez mais importante, visto que

> *[...] pode ajudar a promover o desenvolvimento profissional dos indivíduos nele envolvidos, podendo proporcionar momentos de aprendizagem mútua e potenciar reflexões individuais. [...] (HARGREAVES, 1998, apud DIAS, 2008, p. 236).*

Contudo, ao desenvolver o trabalho em grupo, é preciso que o professor considere certos aspectos ao orientar os alunos (WASSERMANN, 1990), conforme descrito a seguir.

- O professor precisa conversar com os alunos acerca de como espera que eles trabalhem em grupo, sobre o que significa trabalhar em grupo e sobre os materiais que eles irão utilizar.
- É importante que se dê aos alunos oportunidade para levantarem questões relativas aos pontos que os preocupam.
- É importante conversar com os alunos, também, sobre as possibilidades, as opções, e sobre o modo como as escolhas podem ser feitas. Se possível, mostrar como isso é feito.
- O professor precisa mostrar entusiasmo pelo trabalho em grupo e conversar com os alunos sobre o quanto acredita que esta seja uma boa maneira de aprender.

- É preciso demonstrar confiança na capacidade de os alunos cooperarem com o trabalho.
- É importante discutir com os alunos acerca do conjunto de requisitos essenciais para o trabalho em grupo: cada um esperar sua vez, partilhar, conversar, ter respeito pelos outros e cuidado com os materiais.
- Solicite aos alunos que expressem suas ideias e façam sugestões para tornar tudo mais eficaz. Dê-lhes oportunidades para decidirem sobre o funcionamento dos grupos durante um trabalho na sala de aula.

Também é importante que o professor planeje cada atividade e auxilie os alunos quando necessário, orientando-os a registrar as conclusões a que chegarem.

Além disso, nas **Orientações sobre os capítulos**, presentes nesta Assessoria pedagógica, são propostas sugestões de trabalhos em grupo em momentos pertinentes, como **Conversando**, **Saiba mais**, **Você cidadão** e **Explorando problemas**, ou em situações especiais – durante as tarefas das seções **Problemas e exercícios propostos** – e, quando pertinente, nas tarefas em destaque de **Você produtor** ou **Em grupo**.

Outro fator importante é o professor procurar estratégias para o desenvolvimento dos conceitos das tarefas. Algo que tem conquistado um papel de destaque, em virtude dos mais variados benefícios que pode oferecer ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento, independentemente do nível de ensino, é a resolução de problemas.

De acordo com os PCN (BRASIL, 2000, p. 52),

> *[...] os alunos, confrontados com situações-problema, novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação.*
>
> *[...]*

Do mesmo modo, segundo os PCN+ (BRASIL, 2002, p. 112-113),

> *[...]*
>
> *A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas.*
>
> *[...] [No processo de resolução], o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido.*
>
> *[...]*

Para que o trabalho com a resolução de problemas possa ser viabilizado, é necessário que o professor promova situações em sala de aula que possibilitem aos alunos vivenciar experiências nas quais estejam presentes, dando a eles a oportunidade de resolver problemas em contexto prático. Além disso, é preciso oferecer experiências com problemas cujas resoluções não sejam únicas, isto é, que permitam várias respostas. Tudo isso pode contribuir para que os alunos deixem de ser meros espectadores e tornem-se agentes ativos no processo de aprendizagem em Matemática.

As páginas de abertura introduzem os conteúdos de maneira contextualizada, o que favorece o estabelecimento de uma relação entre conceitos matemáticos e suas aplicações. Além disso, na seção **Problemas e exercícios propostos**, são apresentadas outras situações que permitem aos alunos, por exemplo, ampliar seus conhecimentos sobre os conceitos e procedimento matemáticos relacionados à resolução de problemas, bem como elaborar e resolver esses problemas.

Toda a obra foi pensada e construída de modo que atenda às necessidades dos jovens da atual sociedade, considerando as culturas juvenis. A escola deve sempre levar em consideração a presença de um jovem que enfrenta vários conflitos na construção de sua identidade. Eles buscam fazer parte de um grupo de amigos para partilhar sua vida, daí nasce a cultura juvenil, grupo caracterizado por apresentar uma cultura com valores, símbolos, ídolos, gostos pela música, características, mitos e linguagem próprios, entre outros aspectos. A cultura juvenil é dotada de uma sintonia de ideias, comportamentos e interesses dos adolescentes.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as competências gerais explicitam o compromisso da educação brasileira com a "[...] formação humana integral e com a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. [...]." (BRASIL, 2018, p. 25). Nesse sentido, o professor exerce um papel fundamental no Ensino Médio, pois deve priorizar o desenvolvimento das competências e habilidades propostas pela BNCC, levando em consideração e tendo como base as culturas juvenis, de modo a realizar um trabalho diferenciado para conquistar os jovens, preparando-os para o futuro, com o objetivo de formar cidadãos críticos, capazes de atuar em uma sociedade justa.

De acordo com Viana (2014, p. 258), "[...] os estudantes do Ensino Médio, em maioria jovens, são portadores de experiências, sensibilidades e saberes que, muitas vezes, não cabem nos padrões ou cânones culturais e nas propostas curriculares escolares. [...]". Portanto, é necessário que haja o diálogo entre as culturas juvenis e a cultura escolar e que esse diálogo conduza à construção do saber.

> *As experiências culturais juvenis estão, muitas vezes, presentes, mas nem sempre são valorizadas e potencializadas nas escolas. Essas experiências juvenis carregam conhecimentos sensíveis e cognitivos intrínsecos que podem ser expandidos na medida em que se mesclam com outras áreas do conhecimento ou são reconhecidas em seus sentidos próprios*
>
> *[...] (VIANA, 2014, p. 259).*

Para tornar isso possível, o professor deve olhar para os jovens enxergando suas características comuns e também as específicas, valorizando as diferenças entre eles. Para conquistá-los, é importante ouvi-los e torná-los sujeitos de sua aprendizagem. O professor precisa demonstrar esse interesse em conhecê-los e conhecer suas experiências, incluindo-os em um processo colaborativo e interdisciplinar e promovendo o protagonismo juvenil, bem como contribuir para a construção de seu projeto de vida, isto é, que pensem sobre aspectos profissionais, escolares, entre outros. O projeto de vida, segundo Leão *et al.* (2011, p. 1071),

> *[...] seria uma ação do indivíduo de escolher um, entre os futuros possíveis, transformando os desejos e as fantasias que lhe dão substância em objetivos passíveis de serem perseguidos, representando, assim, uma orientação, um rumo de vida. Nesse sentido, o projeto não deve ser entendido como resultado de um cálculo matemático, estrategicamente elaborado, ou de um processo linear, como está presente no senso comum.*
>
> *[...]*

Assim, os temas propostos na obra levam os alunos a refletir sobre aspectos financeiros, trabalhistas, sociais, ambientais, entre outros, o que contribui para sua formação como cidadãos e para que tomem decisões futuras conscientes, auxiliando na construção de seus projetos pessoais. Com as propostas de práticas inovadoras, como desenvolvimento de projetos integrados articulando diferentes áreas do conhecimento, contidas nesta obra, bem como por meio do desenvolvimento de metodologias diferenciadas, é possível desenvolver um trabalho significativo para os alunos, tornando-os protagonistas do processo de aprendizado.

Leitura e Matemática no Ensino Médio

A leitura é uma atividade essencial para o estudo do componente curricular Matemática, além de ser condição básica para a aprendizagem e para a apropriação de conceitos. Em decorrência dessa importância, o professor dessa disciplina é, também, um professor de leitura. De fato, ele é, em geral, o leitor que atua como modelo na interpretação dos textos matemáticos. Se considerarmos a leitura como uma prática social – que se difere de acordo com quem e o que lê, para quem lê e com que propósitos se lê –, a exatidão e a precisão na leitura de um problema por um matemático são mais bem interpretadas por aquele que tem essa prática social – o professor de Matemática, de acordo com Kleiman (1998).

Há, no entanto, outra faceta da relação entre a leitura e a Matemática que inverte tal relação: a Matemática é essencial para a leitura e a interpretação de muitos dos textos com os quais nos deparamos na vida social. Ela está na vida de todos e consiste em instrumento essencial para uma leitura crítica dos textos do cotidiano, pois saber como realizar uma leitura que envolve dados matemáticos deve fazer parte do repertório de um leitor. Por isso, ensiná-lo a fazer essa leitura pode contribuir de forma essencial em sua formação.

Se o jovem ou adolescente ainda tem dificuldades de leitura quando chega ao Ensino Médio, reduzem-se as possibilidades de aprendizagem de alguns conceitos básicos que lhe permitem mobilizar suas capacidades de raciocínio matemático. Resolver equações é uma importante habilidade matemática, e é com base nesse raciocínio que os alunos acompanham a leitura do problema e podem decidir como escrever a equação, que dados ignorar e quais serão os dados desconhecidos. Portanto, para escrever uma equação, eles precisam do raciocínio matemático, mas antes, para raciocinar, precisam ler e interpretar enunciados.

Tanto a linguagem matemática como a língua natural são essenciais no cotidiano das pessoas. Estudos confirmam, com base na observação da prática docente, que se os alunos não conseguem interpretar a linguagem natural, dificilmente chegarão a entender a linguagem matemática e contextualizar conceitos. Por isso, fica difícil para o professor preocupado com a aprendizagem de seus alunos ignorar os problemas de leitura.

As dificuldades encontradas por jovens e adolescentes para aprender conhecimentos e conceitos matemáticos não estão totalmente fora do âmbito da educação matemática. Limitar-se a apontar que eles não aprendem o conteúdo de Matemática porque têm problemas de leitura não é suficiente, mesmo que a leitura seja apenas um recurso, nunca o "essencial da aula", como propõem os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 2000).

De fato, o ensino de Matemática deve ter, como os PCNEM sugerem, uma função formativa, podendo auxiliar os alunos a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, transcendendo seu papel instrumental e assim

> *[...] gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. [...] (BRASIL, 2000, p. 40).*

Com esses argumentos, é difícil pensar em alguma prática formativa que venha a ser mais enriquecedora e viabilizadora para essa formação do que a leitura. Nesse contexto, assim como outros recursos tecnológicos são explorados pelo professor, como o uso da calculadora, constituem-se de caráter fundamental o ensino e o uso da língua escrita – especificamente a leitura – como uma tecnologia, um recurso, um instrumento central para a aprendizagem contínua.

É importante lembrar que o professor de Matemática não foi formado para ensinar a ler. Todavia, ele pode atuar modelando os modos de leitura nas práticas matemáticas. Isso pode ser feito com base em uma reflexão sobre seus hábitos e estratégias de leitura aliados a uma compreensão das dificuldades características do leitor escolar no Ensino Médio.

Levando essas restrições em consideração, é possível encontrar pelo menos três áreas de atuação do professor de Matemática para contribuir na formação de leitores de textos matemáticos: desenvolvimento da leitura crítica, do vocabulário e de estratégias de estudo.

Desenvolvimento da leitura crítica

A Matemática está relacionada intimamente com o desenvolvimento das capacidades de interpretar, analisar, sintetizar, abstrair e projetar, e todas estas se apoiam no uso da linguagem natural, ou seja, verbal. Se tomamos como exemplo uma das competências matemáticas exigidas nas provas do Enem, como a competência de

> *[...] Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação (INEP, 2015, p. 6),*

e retiramos a especificidade do texto matemático (ou seja, gráficos e tabelas), vemos que esse trecho poderia descrever uma competência de leitura, pois prever, extrapolar, interpolar e interpretar são também absolutamente indispensáveis para a leitura de qualquer texto. Além disso, as habilidades necessárias para demonstrar a competência de interpretar informações de natureza científica e social são, de fato, habilidades de leitura. Se, novamente, retiramos as referências aos gráficos e tabelas, devemos utilizar informações para fazer inferências; resolver problemas com dados; e analisar informações como recurso para a construção de argumentos.

Um dos importantes atributos da Matemática consiste em sua natureza abstrata, e tal abstração está baseada nas capacidades de deduzir, inferir, prever e extrapolar, ou seja, na capacidade de pensamento crítico. Por isso, quando o jovem ou adolescente consegue transformar um enunciado (uma história, uma descrição em palavras) em um problema matemático, ele está, de fato, retirando o contexto, ou abstraindo dele a Matemática, de tal modo que o problema básico passa a ser entendido independentemente da situação em que foi apresentado, isto é, de sua aplicação.

A extração de um problema matemático com base em um enunciado em linguagem natural é um processo complexo. Para ensinar esse processo, o professor pode iniciar com problemas simples, aumentando aos poucos a complexidade. Novos conceitos e novas habilidades podem ser desenvolvidos em problemas de complexidade crescente, aumentando gradativamente a maneira de traduzir a linguagem natural em linguagem matemática, uma forma de raciocínio crítico. Dessa forma, ao engajar os alunos com suas perguntas, na resolução desses problemas, do mais simples aos mais complexos, o professor propicia a mobilização do pensamento crítico, exigindo habilidades usadas na leitura de outros textos e em outras situações da vida cotidiana que demandam o engajamento intelectual do indivíduo. Portanto, está ensinando a ler criticamente os textos de sua área de especialização.

Saber posicionar-se social e politicamente é fundamental para o jovem em formação. Por isso é importante que o professor desenvolva nos alunos a competência comunicativa, para que eles sejam capazes de utilizar com segurança os recursos comunicativos que forem necessários para determinados contextos, sabendo argumentar e defender suas opiniões com coerência, criticando, se necessário, no sentido de discordar daquilo que lhes é apresentado, mas sem recorrer a discussões sem fundamento ou concordar simplesmente por não saber argumentar.

Aprendizagem de vocabulário especializado

O conhecimento e o uso preciso de termos, operações e símbolos são essenciais para o domínio da matéria (assim como em toda disciplina). Nesse contexto, a Matemática é precisa: os significados de termos e os conceitos devem ser completamente unívocos, sem ambiguidades, sob a pena de, na falta desse conhecimento, o jovem ou o adolescente falhar na comunicação e na resolução de problemas. Por isso, professor e alunos devem estar completamente de acordo sobre os significados das palavras que usam para se comunicarem.

Existem termos matemáticos utilizados na linguagem cotidiana com sentidos diferentes. Estudos realizados sobre a apropriação de vocabulário mostram que uma criança, ao se deparar com uma palavra já conhecida, mas com sentido diferente, o primeiro significado se impõe a ela, mesmo que não faça sentido no contexto. Com os jovens, essa dificuldade de descartar o significado primário também pode acontecer. De acordo com alguns estudos, há uma probabilidade maior de os alunos perceberem os dois sentidos quando sua atenção é dirigida para o fato. Em uma pesquisa sobre conhecimentos matemáticos, Oliveira e Lopes (2012) destacam que, em um primeiro contato com o tema, os alunos não conseguem entender o significado matemático de um termo da linguagem natural.

Uma atividade proposta nesse mesmo estudo consistia na elaboração de um glossário pelos alunos, com base em um levantamento dos termos que eles consideravam mais importantes. Nesse trabalho, os alunos apresentavam a definição com as próprias palavras, fornecendo um exemplo, uma aplicação ou uma relação com outro termo. Quando os termos tinham significados diferentes na Matemática e na linguagem cotidiana, ambos eram registrados. Certamente, o conhecimento vocabular é essencial para a aprendizagem de novos conceitos apresentados aos alunos. Essa pesquisa mostra que a focalização no termo, no decorrer da aula, por exemplo, leva-os a procurar as diferenças com a linguagem cotidiana e a construir uma nova definição, dessa vez matemática, para o termo em questão.

Desse modo, a prática de leitura e escrita nas aulas de Matemática no Ensino Médio pode ser um caminho que propicia a relação professor/aluno e aluno/alunos mais interativa e, consequentemente, mais efetiva. Isso não apenas para a construção do conhecimento matemático, mas para o conhecimento em geral, contribuindo, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), para uma estratégia que repense os processos de ensino e aprendizagem, possibilitando aos alunos não apenas a aquisição de conhecimentos e competências, mas também convivência e realização individual, por meio de experiências inovadoras.

Desenvolvimento de estratégias de estudo

No Ensino Médio, é possível que alguns alunos ainda não tenham desenvolvido as estratégias de estudo independentes, esperadas nessa etapa da Educação Básica, na qual já deviam ter desenvolvido práticas de leitura (e de escrita, ou seja, práticas de letramento) mais autônomas. Em relação a qualquer leitura, mais ainda em relação a textos matemáticos, os alunos parecem depender do auxílio contínuo do professor. Pesquisadores (RIBEIRO; KAIBER, 2012) têm observado que a tendência é solicitar ajuda diante da primeira dificuldade na leitura do problema, sem ao menos tentar resolvê-la relendo, anotando e sublinhando. Entretanto, esses estudos também destacam que basta o professor orientá-los a fazer uma segunda leitura, que a superação das dificuldades já passa a ser notada. Essas práticas mostram que boa parte dos alunos não tem repertório de leitura adequado e, com isso, não desenvolveu estratégias de estudo que permitam um aprendizado autônomo.

Uma maneira de orientar o jovem ou adolescente a desenvolver estratégias próprias de estudo é ensiná-lo a utilizar o livro didático, pois este, se bem utilizado, fornece aos alunos uma oportunidade de revisar o conteúdo estudado e refletir sobre os conceitos abordados. Desse modo, o livro didático de Matemática auxilia na consulta e no esclarecimento de conceitos. Com o livro, os alunos determinam seus ritmos de leitura e de aprendizagem (eles podem até solicitar ajuda a algum membro da família e este pode ajudar, desde que seja um leitor e o material esteja apresentado de modo explícito).

Para que os alunos estudem de maneira independente, eles devem entender como o texto está estruturado. Saber usar a estrutura textual é uma habilidade que precisa ser desenvolvida, e os alunos precisam de estratégias que os ajudem a explorar todo o capítulo, a lê-lo de modo global, para entender que parte da informação é importante, que informações dependem de outras e o que é detalhe. Esse conteúdo pode fazer parte de uma aula cujo objetivo é conhecer o livro didático: ler o sumário; analisar como são sinalizados os títulos e os subtítulos (tamanho das letras, cores, uso de números); descobrir partes do texto e suas relações, o que os subtítulos indicam; verificar hierarquias entre seções e subseções; e elaborar um diagrama mostrando essas relações. Também, com o objetivo de adquirir estratégias de leitura e estudo independentes, eles podem ser orientados a fazer um resumo do capítulo contendo os conceitos mais importantes abordados, com exemplos ou aplicações.

Os documentos oficiais defendem que a Matemática no Ensino Médio tem valores formativo e instrumental. O foco na leitura, por um lado, desenvolve o raciocínio e o pensamento crítico; por outro, constitui-se em ferramenta indispensável para interpretar e resolver problemas corriqueiros.

O professor de Matemática tem a oportunidade de formar cidadãos que sejam capazes de expressarem suas ideias adequadamente e de modo competente, oralmente e por escrito, para que possam se inserir de pleno direito na sociedade e ajudar na construção e na transformação da sociedade em que atuam. Portanto, é preciso reconhecer que a linguagem matemática é de suma importância, não apenas para os estudiosos da área, mas para qualquer cidadão que necessita utilizá-la com criticidade e autonomia.

Bibliografia consultada

- ALRO, Helle; SKOVSMOSE, Ole. *Diálogo e aprendizagem em educação matemática*. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.
  Este livro argumenta que o bom diálogo em sala de aula está relacionado diretamente com a aprendizagem, relatando sua importância.
- BASSANEZI, Rodney C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.
  Este livro motiva o professor a usar a metodologia Modelagem Matemática no encaminhamento das aulas, partindo da ideia de que é possível articular atividades de modelagem e resolução de situações-problema, permitindo a análise de resultados, a interpretação de gráficos e tabelas, entre outras ações.
- BRASIL. Ministério da Educação. Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF: MEC, 1996. p. 27833. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 15 jun. 2020.
  Este site apresenta a lei de diretrizes e bases da Educação Nacional.
- ________. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2020.
  Este site apresenta a versão final completa da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que norteia o trabalho do professor atendendo às demandas dos alunos desta época e preparando-os para o futuro.
- ________. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. *Parecer CNE/CEB nº 3/2018*. Brasília, DF: 8 nov. 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=102311-pceb003-18&category_slug=novembro-2018-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 16 jun. 2020.
  Este documento apresenta o parecer homologado do Ministério da Educação e a atualização das Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, observadas as alterações introduzidas pela LDB por meio da Lei nº 13.415/2017.
- ________. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. *Parecer CNE/CEB nº 5/2011*. Distrito Federal, DF: Ministério da Educação, 4 maio 2011. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=9915-pceb005-11-1-1&Itemid=30192>. Acesso em: 15 jun. 2020.
  Este documento apresenta o parecer homologado do Ministério da Educação sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.
- ________. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2020.
  Este documento visa a um detalhamento esclarecedor de como os Temas Contemporâneos Transversais podem ser inseridos no contexto da Educação Básica e como articular esses temas com os conteúdos escolares.
- ________. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Ensino Médio. Brasília, 2000. p. 53.
  Este documento apresenta as diretrizes curriculares em âmbito nacional, que precedeu a Base Nacional Comum Curricular.
- ________. *PCN+ Ensino Médio*: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2002.
  A finalidade deste documento é delimitar a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias apresentando orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM).
- BROUSSEAU, Guy. *Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas*: conteúdos e métodos de ensino. Tradução de Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008.
  O documento apresenta uma teoria das situações didáticas, criada e aperfeiçoada ao longo de quatro décadas, incluindo os alunos, o meio que os cerca e o professor. O autor desenvolve esta teoria pautado na relação que se estabelece entre aluno, professor e conhecimento e no fato de que a relação existente entre eles necessita de regras e negociações, que o autor denomina como "contrato didático".
- ________. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, Cecília; IRMA, Saiz (Org.). *Didática da matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996. p. 48-72.
  Este livro é uma coleção com sete trabalhos escritos por profissionais diferentes. Os assuntos abordados nos trabalhos são voltados à educação matemática, com reflexões, análises e propostas didáticas.
- BURIASCO, Regina L. C.; SOARES, Maria T. C. Avaliação de sistemas escolares: da classificação dos alunos à perspectiva de análise de sua produção

matemática. In: VALENTE, Wagner R. (Org.). *Avaliação em matemática*: história e perspectivas atuais. Campinas: Papirus, 2008.

Este livro contém resultados de pesquisas que mostram as modificações que a avaliação escolar sofreu desde os tempos do Brasil Império até os dias atuais.

- CARBONELL, Jaume. *A aventura de inovar a mudança na escola.* Rio de Janeiro: Artmed, 2002.

  Este livro apresenta ao leitor práticas modernas que podem tornar a escola um espaço inovador.

- CASTILLO ARREDONDO, Santiago. *Avaliação educacional e promoção escolar.* Curitiba: InterSaberes, 2013.

  Este livro apresenta discussões sobre a avaliação educacional e formas como os professores podem aplicá-la. O autor desenvolve a prática avaliadora baseada não somente em conteúdos curriculares, mas em valores e atitudes essenciais para a formação cidadã.

- DAYRELL, Juarez; CARRANO, Paulo; MAIA, Carla L. (Org.). *Juventude* e en*sino médio*: sujeitos e currículos em diálogo. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2014.

  Este livro apresenta reflexões a respeito do jovem no Brasil e de seus desdobramentos e relações com o currículo do Ensino Médio.

- DIAS, Paulo. Pontos de partida para uma dinâmica de trabalho colaborativo. In: GTI (Eds.). *O professor de matemática e os projectos de escola*. Lisboa: APM, 2008, p. 233-256.

  Este artigo apresenta o relato do trabalho de professores de Matemática de uma escola em condições precárias. Porém, a escola conta com o comprometimento de uma equipe de professores na realização de projetos que envolvem recursos tecnológicos.

- FRANCISCO, Vinicius Marcos; LIBÓRIO, Renata Maria Coimbra. Um estudo sobre o *bullying* entre escolares do Ensino Fundamental. *Psicologia*: Reflexão e Crítica, Porto Alegre, v. 22, n. 2, p. 200-207, 2009. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/prc/v22n2/a05v22n2.pdf>. Acesso em: 11 jul. 2020.

  O artigo levanta reflexões sobre o bullying *no ambiente escolar e apresenta um projeto de intervenção motivado por um relato escrito das experiências negativas de um aluno que sofria com práticas violentas.*

- FERNANDES, Grazielli; YUNES, Maria Angela Mattar; TASCHETTO, Leonidas Roberto. *Bullying* no ambiente escolar: o papel do professor e da escola como promotores de resiliência. *Revista Sociais e Humanas*, Santa Maria, v. 30, n. 3, p. 141-154, 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufsm.br/sociaisehumanas/article/download/27701/pdf>. Acesso em: 15 jun. 2020.

  Este artigo esclarece o que vem a ser o bullying *e relata a experiência de uma professora que realizou um projeto depois que descobriu o sofrimento de um de seus alunos ao voltar às aulas.*

- GRAMINHA, Cristiano V. Aplicação do método *fishbowl* na discussão do tratamento fisioterapêutico da artrite reumatoide no curso de graduação em fisioterapia. In: GARCÊS, Bruno Pereira (Org.). *Aprendizagem centrada nos estudantes em sala de aula*. Uberlândia: Edibrás, 2019.

  Este livro apresenta relatos da aplicação das diferentes metodologias ativas em sala de aula, que podem tornar o processo de ensino-aprendizagem mais significativo, despertando o interesse dos alunos.

- INEP. *Matrizes de Referência*. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/matriz-de-referencia>. Acesso em: 10 jul. 2020.

  Este documento visa indicar as habilidades a serem avaliadas em cada etapa da escolarização, além de orientar a elaboração de itens de testes e provas, que servem de referência na elaboração do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem).

- KLEIMAN, Angela B.; MORAES, Silvia E. *Leitura e interdisciplinaridade*. Campinas: Mercado de Letras, 1998.

  Este livro contém sugestões de práticas de organização do planejamento para que se realizem trabalhos interdisciplinares no ambiente escolar articulando diferentes áreas do conhecimento, a fim de ir além do modo tradicional de ensino.

- LEÃO, Geraldo *et al*. Juventude, projetos de vida e ensino médio. *Educação & Sociedade*, v. 32, n. 117, p. 1067-1084, 2011.

  O artigo relata parte de uma pesquisa feita com jovens que cursavam o Ensino Médio objetivando mostrar a visão deles em relação às contribuições da escola em suas vidas.

- LIUKAS, Linda. *Hello Ruby:* Adventures in Coding. New York: Feiwel & Friends, 2015.

  Este livro tem o objetivo de iniciar a linguagem de programação ensinando primeiro seus conceitos, sem que seja necessário ter um computador. A autora conta a história de uma menina que tem muita imaginação e interesse para resolver quebra-cabeças.

- LUCKESI, Cipriano C. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. São Paulo: Cortez, 2006.

  Este livro apresenta estudos específicos sobre temas da avaliação da aprendizagem de maneira crítica e propõe novos caminhos e possibilidades nessa área da prática educativa escolar.

- MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. *Fundamentos de metodologia científica*. 8. ed. São Paulo: Atlas, 2017.

  O conteúdo deste livro serve de embasamento para o trabalho profissional, apresentando procedimentos *didáticos, fundamentos para trabalhos escolares, orientações de análises de textos, relatórios, memorandos, entre outros aspectos inerentes à educação.*

- MOREIRA, Marco Antonio. ***Teorias de aprendizagem***. 2. ed. São Paulo: EPU, 2011.

  A obra apresenta de maneira acessível teorias de aprendizagem importantes e significativas para a Educação, como o construtivismo, o humanismo, o behaviorismo, entre outras abordagens.

- MOREIRA, Jonathan Rosa; RIBEIRO, Jefferson Bruno Pereira. Prática pedagógica baseada em metodologia ativa: aprendizagem sob a perspectiva do letramento informacional para o ensino na educação profissional. Periódico Científico *Outras palavras*, v. 12, n. 2, 2016, p. 93. Disponível em: <http://revista.faculdadeprojecao.edu.br/index.php/Projecao5/article/download/722/608>. Acesso em: 29 jun. 2020.

  Artigo que relata a análise de um estudo feito para apresentar um modelo de prática pedagógica baseado na metodologia ativa de aprendizagem para a educação profissional.

- MORETTI, Méricles Thadeu.; FLORES, Cláudia Regina. ***Elementos do contrato didático***. (Ensaio). Mimeo. UFSC, 2002.

  Neste trabalho, os autores fazem uma estruturação da noção de contrato didático e discutem suas implicações na prática escolar.

- NOGUEIRA, Nilbo R. ***Interdisciplinaridade aplicada***. 3. ed. São Paulo: Érica, 1998.

  O livro tem como objetivo definir as diferenças entre multidisciplinaridade, pluridisciplinaridade, interdisciplinaridade e transdisciplinaridade e relacionar a pedagogia dos projetos com a interdisciplinaridade.

- PAIXÃO, Claudiane Reis da (org.). ***Avaliação***. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.

  Esse livro apresenta diversos temas relacionados à avaliação, mostrando na prática seu funcionamento e propiciando ao leitor mais subsídios para o estudo sobre a avaliação.

- RABELO, Edmar Henrique. ***Avaliação***: novos tempos, novas práticas. Petrópolis: Vozes, 1998.

  O autor apresenta uma proposta de avaliação, baseada em pesquisas, que leva em consideração discussões sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a nova LDB.

- OLIVEIRA, Roberto Alves de; LOPES, Celi Espasandin. O ler e o escrever na construção do conhecimento matemático no Ensino Médio. *Bolema*, Rio Claro, v. 26, n. 42b, p. 513-534, abr. 2012. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2012000200006&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 16 jul. 2020.

  O artigo apresenta uma pesquisa qualitativa que investigou as estratégias de leitura e escrita no ensino de Matemática analisando as atividades propostas e organizando-as em um portfólio.

- OLIMPIO JUNIOR, Antonio; VILLA-OCHOA, Jhony A. Coletivos pensantes e compreensão conceitual no cálculo diferencial e integral: uma composição de olhares. In: BORBA, Marcelo. C.; CHIARI, Aparecida S. S. (Org.). ***Tecnologias digitais e educação matemática***. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013. p. 141-174.

  Este livro é uma reunião de vários trabalhos, de diferentes pesquisadores, voltados às tecnologias digitais para a educação.

- PRENSKY, Marc. O papel da tecnologia no ensino e na sala de aula. Tradução de Cristina M. Pescador. *Conjectura*, Caxias do Sul, v. 15, n. 2, p. 201-204, maio/ago. 2010. Disponível em: <http://www.ucs.br/etc/revistas/index.php/conjectura/article/view/335>. Acesso em: 30 jun. 2020.

  O autor deste artigo argumenta que uma das principais metas a serem atingidas no século XXI pelos professores é saber com qual pedagogia devemos ensinar nossos alunos. O papel da tecnologia, nas salas de aula, deveria ser o de oferecer suporte ao novo paradigma de ensino. Assim, é proposta uma discussão: será que as tecnologias estão cumprindo esse papel?

- REIS, Francislene Glória de Freitas et al. Gallery walk: o uso da aprendizagem colaborativa no ensino de bioquímica. In: GARCÊS, Bruno Pereira (Org.). ***Aprendizagem centrada nos estudantes em sala de aula***. Uberlândia: Edibrás, 2019.

  A obra apresenta relatos da aplicação de diferentes metodologias ativas em sala de aula. O artigo em questão descreve o método Gallery walk e oferece exemplos que podem tornar o processo de ensino-aprendizagem mais significativo e motivador.

- RIBEIRO, Vânia G. da Silva; KAIBER, Carmen T. ***Leitura e interpretação de textos matemáticos***: construindo competências no Ensino Médio. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/cc/PDF/CC4.pdf>. Acesso em: 13 maio 2020.

  O texto apresenta um estudo com o objetivo de identificar as dificuldades na interpretação e na produção de textos matemáticos por alunos do Ensino Médio por meio de coleta e análise de dados, de acordo com as competências e as habilidades preconizadas pelo Enem e pelos PCN.

- SANTALÓ, Luis A. Matemática para não matemáticos. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Org.). ***Didática da matemática***: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

  Por meio do processo didático de ensino da Matemática, o professor deve levar os alunos ao desenvolvi-

mento constante. A didática da Matemática deve ser uma ferramenta que auxilia o trabalho do professor, mas que seja voltada ao entendimento dos processos de aprendizagem dos alunos, de modo que, cada vez mais, proporcione seus avanços.

- SUNAGA, Alexsandro; CARVALHO, Camila Sanches. As tecnologias digitais no ensino híbrido. In: BACICH, Lilian; NETO, Adolfo Tanzi; TREVISANI, Fernando de Mello (Org.). *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

  Baseado em pesquisas, este livro aborda o uso da tecnologia na sala de aula, fazendo uma ligação entre o padrão atual de ensino e a estruturação de um novo currículo escolar. O artigo apresenta análises da educação híbrida com base em experiências vividas por um grupo de professores das redes pública e privada.

- SILVA, Benedito A. da. Contrato didático. In: FRANCHI, Anna et al. *Educação matemática*: uma introdução. São Paulo: Educ, 1999.

  O artigo apresenta conceitos relacionados à didática da Matemática. Com o objetivo de contribuir para pesquisas voltadas a esse tema, o autor expressa a necessidade de mostrar ao alunos uma matemática contextualizada, tornando a aprendizagem mais significativa.

- SILVA, Gabriel Veloso da et al. *Promoção de saúde mental para adolescente em uma escola de Ensino Médio*: um relato de experiência. Rev. NUFEN, Belém, v. 11, n. 2, p. 133-148, maio/ago. 2019. Disponível em: <http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2175-25912019000200009&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 30 abr. 2020.

  O texto apresenta um relato de experiência de acadêmicos que realizaram uma atividade de intervenção sobre educação e saúde com estudantes do Ensino Médio, envolvendo relações interpessoais, bullying *e suicídio.*

- SILVA, Rodrigo Tavares da. *Atividades para estudo de integrais em um ambiente de ensino híbrido*. 2019. 128 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2019.

  Essa dissertação apresenta reflexões sobre o estudo de integrais e o uso da tecnologia em uma perspectiva de ensino híbrido, apresentando discussões pertinentes a respeito desse tipo de ensino nas aulas de Matemática.

- SOUZA, Priscila R.; ANDRADE, Maria do Carmo F. Modelos de rotação do ensino híbrido: estações de trabalho e sala de aula invertida. *E-Tech*: Tecnologias para Competitividade Industrial, Florianópolis, v. 9, n. 1, p. 3-16, 2016.

  Este artigo trata de estudos de caso que utilizaram o modelo de Rotação por estações de trabalho e também o modelo de Sala de aula invertida. As autoras relatam experiências e apresentam sugestões de sites *para o aprofundamento do estudo de ambos os modelos de ensino, oferecendo um valioso conteúdo para quem quer implementar essas metodologias em suas aulas.*

- TOMAZ, Vanessa S.; DAVID, Maria Manuela M. S. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

  Neste livro, as autoras refletem sobre como lidar com a interdisciplinaridade no ensino da Matemática e apresentam situações práticas em sala de aula que possibilitam várias aprendizagens.

- VALENTE, José Armando. *Blended learning* e as mudanças no ensino superior: a proposta da sala de aula invertida. *Educar em Revista*, Curitiba, Ed. Especial, n. 4, p. 79-97, 2014.

  Este texto aborda reflexões sobre a necessidade de tornar presentes práticas inovadoras na sala de aula, destacando a postura do professor diante disso. Ele apresenta também detalhes sobre a metodologia Sala de aula invertida.

- VIANA, Maria Luiza. Estéticas, experiências e saberes: artes, culturas juvenis e o Ensino Médio. In: DAYRELL, Juarez; CARRANO, Paulo; MAIA, Carla L. (Org.). *Juventude e Ensino Médio*: sujeitos e currículos em diálogo. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2014.

  O artigo trata de assuntos relacionados aos desafios do Ensino Médio e à necessidade de levar aos alunos saberes que os ajudarão em seus projetos de vida e em suas escolhas para o futuro.

- VILLAS BOAS, Benigna Maria de Freitas. *Conversas sobre avaliação*. Campinas: Papirus, 2019.

  Este livro aborda temas que comumente geram dúvidas sobre o assunto avaliação, apresentando reflexões e apontamentos para o dia a dia em sala de aula.

- ________. *Virando a escola do avesso por meio da avaliação*. Campinas: Papirus, 2008.

  Este livro analisa duas problemáticas da escola brasileira: repetência e evasão escolar, além de discutir o uso da avaliação formativa e abordar a autoavaliação.

- WASSERMANN, Selma. *Brincadeiras sérias na Escola Primária*. Lisboa: Instituto Piaget, 1990.

  Neste livro, a autora demonstra que as atividades lúdicas, no âmbito da sala de aula, podem contribuir para o desenvolvimento emocional, social e intelectual das crianças.

2 Sugestões de cronogramas

A seguir, apresentamos duas sugestões de cronogramas para o trabalho com esta coleção, **Opção 1** e **Opção 2**, nas quais os conteúdos estão distribuídos em seis volumes, com seus respectivos capítulos.

Tanto uma quanto a outra dão sugestões para o professor elaborar o planejamento de modo **bimestral**, **trimestral** ou **semestral**. Ainda assim, ele tem autonomia pedagógica para elaborar outro cronograma para esta coleção, baseando-se em suas necessidades e na realidade que o cerca, como a grade curricular, a quantidade de aulas e horas destinadas à Matemática e as condições de cada turma.

Neste quadro, chamaremos de:

- F.A.Q.E.L. o volume de Funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica;
- T.F.P.P. o volume de Trigonometria, fenômenos periódicos e programação;
- G.S.M.F. o volume de Grandezas, sequências e matemática financeira;
- M.S.L.G.A. o volume de Matrizes, sistemas lineares e geometria analítica;
- E.A.C.P. o volume de Estatística, análise combinatória e probabilidade;
- G.E.P. o volume de Geometria espacial e plana.

Bimestre	
1º	Volume **F.A.Q.E.L.** Capítulos **1** e **2**
2º	Volume **F.A.Q.E.L.** Capítulos **3**, **4** e **5**
3º	Volume **T.F.P.P.** Capítulos **1** e **2**
4º	Volume **T.F.P.P.** Capítulos **3** e **4**
5º	Volume **G.S.M.F.** Capítulo **1**
6º	Volume **G.S.M.F.** Capítulos **2** e **3**
7º	Volume **M.S.L.G.A.** Capítulos **1, 2** e **3**
8º	Volume **M.S.L.G.A.** Capítulos **4** e **5**
9º	Volume **E.A.C.P.** Capítulos **1** e **2**
10º	Volume **E.A.C.P.** Capítulo **3**
11º	Volume **G.E.P.** Capítulos **1** e **2**
12º	Volume **G.E.P.** Capítulo **3**

Trimestre	
1º	Volume **F.A.Q.E.L.** Capítulos **1**, **2** e **3**
2º	Volume **F.A.Q.E.L.** Capítulos **4** e **5**
3º	Volume **G.S.M.F.** Capítulos **1**, **2** e **3**
4º	Volume **E.A.C.P.** Capítulos **1, 2** e **3**
5º	Volume **M.S.L.G.A.** Capítulos **1** e **2**
6º	Volume **M.S.L.G.A.** Capítulos **3**, **4** e **5**
7º	Volume **T.F.P.P.** Capítulos **1** e **2**
8º	Volume **T.F.P.P.** Capítulos **3** e **4**
9º	Volume **G.E.P.** Capítulos **1**, **2** e **3**

Semestre	
1º	Volume **F.A.Q.E.L.** Capítulos **1**, **2**, **3**, **4** e **5**
2º	Volume **T.F.P.P.** Capítulos **1**, **2**, **3** e **4**
3º	Volume **G.S.M.F.** Capítulos **1**, **2** e **3**
4º	Volume **M.S.L.G.A.** Capítulos **1**, **2**, **3**, **4** e **5**
5º	Volume **E.A.C.P.** Capítulos **1**, **2** e **3**
6º	Volume **G.E.P.** Capítulos **1**, **2** e **3**

3 Painel do volume

Nesta coleção, cada volume procura trabalhar os conhecimentos da área de Matemática de maneira dinâmica, buscando, sempre que possível, articular conteúdos multimodais e manifestações plurais de cultura e propondo o desenvolvimento de ações que levem os alunos a serem protagonistas de sua aprendizagem de modo significativo, conforme a realidade deles.

Desse modo, para facilitar o trabalho do professor durante o planejamento de suas aulas, apresentamos a lista de competências e de habilidades cujo desenvolvimento é propiciado neste volume e um painel geral de conteúdos e objetivos.

Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias e Habilidades relacionadas a elas

CEMT 1

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

EM13MAT102

- Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

EM13MAT106

- Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

CEMT 2

Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

EM13MAT202

- Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.

CEMT 3

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

EM13MAT310

- Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

EM13MAT311

- Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

EM13MAT312

- Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

EM13MAT316

- Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

CEMT 4

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

EM13MAT406

- Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

EM13MAT407

- Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

CEMT 5

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

EM13MAT511

- Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias

CECNT 1

Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.

CECNT2

Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

Painel geral

O painel geral de conteúdos e objetivos está organizado com as seguintes colunas:

- **Capítulo**: identifica o número do capítulo deste volume.
- **Conteúdos/conceitos principais**: apresenta conteúdos e/ou conceitos principais por capítulo.
- **Objetivos específicos**: indica os objetivos específicos a serem obtidos no estudo de cada capítulo.
- **BNCC**: apresenta o código das Competências gerais (CG), das Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias (CEMT), das Competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias (CECNT) e das Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias (EM13MATxxx) da BNCC, cujo trabalho é favorecido no volume, conforme o capítulo.
- **Integrações possíveis entre componentes curriculares**: indica a possibilidade de integração com componentes curriculares, conforme o capítulo.
- **Temas contemporâneos transversais**: indica os temas contemporâneos explorados em cada capítulo.

	Conteúdos/conceitos principais	Objetivos específicos	BNCC	Integrações possíveis entre componentes curriculares	Temas contemporâneos transversais
Capítulo 1	• Análise combinatória e binômio de Newton • Princípio fundamental da contagem • Diagrama de árvore ou árvore de possibilidades • Fatorial • Arranjo simples • Quantidade de arranjos simples • Permutação simples • Combinação simples • Quantidade de combinações simples • Permutação com elementos repetidos • Triângulo de Pascal • Binômio de Newton • Termo geral do Binômio de Newton	• Reconhecer elementos de análise combinatória e utilizá-los para estabelecer estratégias de resolução em situações-problema. • Compreender e aplicar o princípio fundamental da contagem ou princípio multiplicativo. • Utilizar o diagrama de árvore para determinar a quantidade possível de agrupamentos com elementos distintos de um conjunto. • Reconhecer $n!$ como o produto dos n números naturais consecutivos de n até 1, com $n > 1$. • Utilizar a calculadora científica na obtenção do fatorial de um número, do número total de arranjos simples e do número de combinações simples. • Compreender os conceitos de arranjo simples, permutação simples e combinação simples. • Diferenciar e aplicar os conceitos de arranjo simples, permutação simples e combinação simples. • Calcular a quantidade total de agrupamentos de um arranjo simples. • Resolver situações-problema que envolvam os conceitos de arranjo simples, permutação simples e combinação simples. • Compreender, reconhecer e aplicar o conceito de permutação com elementos repetidos. • Calcular a quantidade total de agrupamentos de uma combinação simples. • Analisar e reconhecer um número binomial. • Reconhecer o triângulo de Pascal como uma maneira de dispor os números binomiais ordenadamente. • Aplicar a fórmula do binômio de Newton no desenvolvimento de $(a + b)^n$, com a e b reais e n natural. • Identificar o termo geral do binômio de Newton. • Compreender e aplicar a fórmula do binômio de Newton. • Reconhecer e aplicar a fórmula do termo geral do binômio de Newton.	• CG 5 • CECNT 1 • CECNT 2 • CEMT 3 • EM13MAT310	• Educação Física • Língua Portuguesa • Biologia	• Ciência e tecnologia
Capítulo 2	• Probabilidade • Experimento aleatório, espaço amostral e eventos • Probabilidade em espaço amostral equiprovável • Probabilidade de um evento não ocorrer • Probabilidade da união de eventos • Probabilidade condicional • Eventos simultâneos • Lei binomial das probabilidades	• Compreender o conceito de probabilidade. • Calcular a probabilidade de determinado evento ocorrer nas formas fracionária, decimal e percentual. • Compreender o conceito de experimento aleatório. • Classificar eventos aleatórios, sendo “pouco ou muito provável”, “improvável” ou “impossível”. • Reconhecer e determinar um espaço amostral. • Compreender o que caracteriza um evento. • Calcular a probabilidade de acontecimentos em um espaço amostral equiprovável. • Determinar a probabilidade de um evento ocorrer em um espaço amostral finito.	• CG 3 • CG 4 • CG 8 • CG 9 • CECNT 2 • CEMT 1 • CEMT 3 • CEMT 5 • EM13MAT106 • EM13MAT311 • EM13MAT312 • EM13MAT511	• Biologia	• Direitos da criança e do adolescente • Educação financeira • Educação para o consumo • Vida familiar e social • Saúde

Capítulo 2		• Calcular a probabilidade de um evento não ocorrer. • Resolver situações-problema envolvendo a probabilidade da união de eventos. • Compreender e aplicar o conceito de probabilidade condicional. • Compreender o conceito de eventos simultâneos e calcular a probabilidade de sua ocorrência. • Compreender o conceito de distribuição binomial no cálculo de probabilidades e utilizá-lo na resolução de situações-problema.			
Capítulo 3	• Estatística • Termos da estatística (população, amostra e variável) • Distribuição de frequência • Frequência absoluta e frequência relativa • Frequência acumulada e frequência acumulada relativa • Intervalo de classe • Medidas de tendência central (média aritmética, moda e mediana) • Separatrizes • Representação gráfica de dados estatísticos • Gráficos de barras, de linhas e de setores • Histograma • Pictograma • *Box plot* • Ramo e folhas • Medidas de dispersão (desvio médio, variância e desvio padrão) • Medidas de tendência central e de dispersão para dados agrupados • Estatística e probabilidade	• Interpretar e resolver problemas que envolvam conceitos básicos de estatística. • Reconhecer a importância da estatística no cotidiano. • Compreender os conceitos de população, amostra e variável estatística e o que cada uma representa no processo de pesquisa. • Classificar os tipos de variáveis e de amostragens. • Identificar e calcular a distribuição de frequência a partir de dados obtidos em uma pesquisa. • Compreender os conceitos de frequências absoluta, relativa, acumulada e acumulada relativa, bem como obter os valores correspondentes para dados agrupados e não agrupados. • Compreender o conceito de intervalo de classe e sua aplicabilidade na organização dos dados. • Identificar e utilizar as medidas de tendência central para representar um conjunto de dados. • Calcular separatrizes a fim de dividir uma sequência de valores colocados em ordem crescente. • Ler, analisar e interpretar diferentes tipos de gráficos, como de barras, de linhas, de setores, histograma, pictograma e *box plot*. • Construir os diferentes tipos de gráficos, como de barras, de linhas, de setores, histograma, pictograma e *box plot*. • Representar, utilizando o diagrama de ramo e folhas, a distribuição de frequências de uma variável quantitativa. • Construir, ler e interpretar histogramas e polígonos de frequência. • Identificar a diferença entre média aritmética e média ponderada. • Compreender os conceitos de média, moda e mediana. • Efetuar cálculos envolvendo média, moda e mediana. • Compreender os conceitos de desvio médio, variância e desvio padrão. • Efetuar cálculos envolvendo desvio médio, variância e desvio padrão. • Interpretar e resolver problemas que envolvam conceitos relacionados a medidas de tendência central e medidas de dispersão. • Interpretar os dados estatísticos e analisar de modo crítico as informações obtidas. • Compreender os acontecimentos do dia a dia de natureza aleatória, possibilitando a identificação de resultados possíveis desses acontecimentos.	• CG 6 • CG 7 • CG 10 • CEMT 1 • CEMT 2 • CEMT 3 • CEMT 4 • CEMT 5 • EM13MAT102 • EM13MAT202 • EM13MAT316 • EM13MAT406 • EM13MAT407 • EM13MAT511	• Geografia • Biologia • Química • História • Sociologia	• Educação ambiental

4 Sugestões para aprofundamento

Essa seção tem como objetivo oferecer ao professor subsídios para aprofundar seus estudos e pesquisas, visto que é um profissional sempre em busca de novas reflexões e que acompanha as mudanças no processo educativo. A seguir, apresentamos referências e sugestões comentadas de livros, *sites*, vídeos e *podcasts* para pesquisa ou consulta. Cabe ressaltar que o professor também pode realizar suas pesquisas em referências que não foram citadas nesta coleção.

Sugestões de leitura para o professor

Metodologia de ensino de Matemática

- ***Ensino da matemática: concepções, metodologias, tendências e organização do trabalho pedagógico***

  GÓES, Anderson R. T.; GÓES, Heliza C. Curitiba: InterSaberes, 2015.

  Propõe maneiras de melhorar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática em sala de aula dos ensinos Fundamental e Médio, contemplando as novas tendências dessa área. Apresenta o histórico da Matemática no Brasil, bem como recursos e materiais didáticos relevantes para o ensino da Matemática, como planejamento, elaboração e avaliação de atividades e o uso de livros didáticos e paradidáticos.

- ***Modelagem matemática no ensino***

  BIEMBENGUT, Maria S.; HEIN, Nelson. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2018.

  Neste livro, a modelagem matemática é mostrada no cotidiano da sala de aula em suas várias possibilidades de trabalho, dando opções ao professor de tornar suas aulas mais significativas e motivadoras.

- ***Resolver problemas e pensar a matemática***

  CONTI, Keli C.; LONGO, Conceição A. C. (Org.). Campinas: Mercado de Letras, 2017.

  Livro que apresenta um conjunto de textos sobre o tema "resolução de problemas", indicando etapas importantes a serem trabalhadas nas aulas de Matemática, além de mostrar como é possível tornar a sala de aula um lugar para questionar, contextualizar e formular problemas, e não apenas propor questões com respostas previsíveis.

- ***Sala de aula invertida: uma metodologia ativa de aprendizagem***

  BERGMANN, Jonathan; SAMS, Aaron. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

  Nesta obra, o autor explica como utilizar a metodologia ativa sala de aula invertida *e as tecnologias a ela associadas, visando obter dos alunos mais motivação, desempenho e autonomia.*

Formação de professores

- ***A fascinante história da matemática: da pré-história aos dias de hoje***

  LAUNAY, Mickaël. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019.

  Neste livro, a Matemática é apresentada de um modo belo, poético e cativante. Com suas histórias, curiosidades e teoremas, está além de apenas fórmulas que necessitam ser decoradas. Com uma linguagem simples e acessível, leva o leitor a conhecer o início da contagem, da geometria e da álgebra e vai até os estudos de vanguarda na área da robótica atual.

- ***Aprender e ensinar geometria***

  LORENZATO, Sergio. Campinas: Mercado de Letras, 2015.

  Propõe o ensino de Geometria levando os alunos a ser participativos, tornando assim as aulas motivadoras e significativas.

- ***Cálculo das funções de uma variável***

  ÁVILA, Geraldo. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003. v. 1.

  O livro motiva o interesse do leitor pela Matemática ao mesmo tempo que oferece uma visão mais completa do papel do cálculo nos contextos científico, histórico e cultural dos últimos quatro séculos.

- ***Constituição do saber matemático: reflexões filosóficas e históricas***

  MENEGHETTI, Renata C. G. Londrina: Eduel, 2010.

  Este livro apresenta elementos para discutir o processo de constituição do saber matemático. Propõe, ainda, um exame das concepções de conhecimento matemático em algumas correntes filosóficas, desde o tempo de Platão, que foram significativas para o desenvolvimento da Matemática.

- ***Culturas juvenis: múltiplos olhares***

  CATANI, Afrânio M.; GILIOLI, Renato S. P. São Paulo: Editora Unesp, 2008.

  Livro que mostra como as manifestações das culturas juvenis têm aumentado cada vez mais, configurando-se como um panorama cultural variado e de tendências de maneiras de expressão em relação aos jovens.

- ***Descobrindo a geometria fractal: para a sala de aula***

  BARBOSA, Ruy Madsen. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

  Neste livro é apresentado um estudo sobre os fractais, voltado para o uso em sala de aula, buscando introduzi-lo na Educação Matemática brasileira. Contém capítulos específicos, como os de criação e exploração de fractais, de manipulação de materiais concretos e de relacionamento com o triângulo de Pascal, sobretudo um, com recursos computacionais – softwares educacionais em uso no Brasil.

- ***Didática da matemática: uma análise da influência francesa***

  PAIS, Luiz Carlos. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

  Este livro aborda conceitos principais da tendência conhecida como "didática francesa" e também temas como transposição didática, contrato didático, obstáculos epistemológicos e engenharia didática. Além disso, essa tendência é adotada ao trabalhar as concepções dos alunos e a formação de professores.

- ***História e tecnologia no ensino da matemática***

  CARVALHO, Luiz M. et al. (Org.). Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. v. 2.

  Coletânea relevante de trabalhos que discutem a qualidade da Educação Básica no Brasil, com modelos de ensino visando a uma qualidade melhor na formação dos alunos.

- ***Introdução à sociologia da juventude***

  GROPPO, Luís A. Jundiaí: Paco Editorial, 2017.

  Este livro apresenta contribuições fundamentais da Sociologia para conhecer melhor as juventudes nas sociedades atuais.

- ***Jovens e cotidiano: trânsitos pelas culturas juvenis e pela escola da vida***

  STECANELA, Nilda. Caxias do Sul: EdUCS, 2010.

  O livro trabalha temas que vão desde a abordagem histórico-sociológica da categoria "juventude", passando pela questão educacional, até a problemática das identidades na sociedade moderna, além de discussões a respeito da territorialidade e seus significados.

- ***Matemática básica interdisciplinar***

  AVERSI-FERREIRA, Tales A. Campinas: Átomo, 2018.

  Esta obra aborda a Matemática básica de modo prático e interdisciplinar com as áreas de Física, Química e Biologia. Apresenta discussões teóricas e exercícios, tendo o objetivo de levar os alunos ao domínio das operações matemáticas e sua aplicabilidade nessas diferentes áreas, bem como às metodologias científicas aplicadas a cada caso.

- ***O processo de avaliação nas aulas de matemática***

  LOPES, Celi E.; MUNIZ, Maria I. S. (Org.). Campinas: Mercado de Letras, 2010.

  Relata uma prática avaliativa que resulta da dissertação de mestrado **A prática avaliativa nas aulas de Matemática: uma ação compartilhada com os alunos***. Também apresenta instrumentos avaliativos e a maneira de colocá-los em prática, bem como a formação contínua de professores de Matemática que atuam em diferentes níveis da Educação Básica.*

Educação Matemática

- ***Álgebra linear***

  BOLDRINI, José L. et al. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

  Enfatiza o uso dos conceitos de Álgebra no decorrer de todos os textos. Os pré-requisitos para a utilização deste livro são os tópicos de Matemática normalmente estudados no Ensino Médio.

- ***Da etnomatemática a arte-*****design** ***e matrizes cíclicas***

  GERDES, Paulus. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

  Este livro discute e também dá exemplos de como a Matemática se relaciona com outras atividades humanas, quebrando barreiras entre áreas que muitas vezes são vistas de modo estanque no Ensino Médio ou no Ensino Superior.

- ***Educação matemática: da teoria à prática***

  D'AMBROSIO, Ubiratan. 23. ed. Campinas: Papirus, 2019.

  Neste livro são abordados aspectos da cognição de natureza matemática e questões teóricas da educação. Além disso, apresenta discussões sobre temas diretamente ligados à sala de aula e às inovações da prática docente, propondo reflexões sobre o assunto.

- ***Informática e educação matemática***

  BORBA, Marcelo de C.; PENTEADO, Miriam G. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

  Traz o resultado de um trabalho sobre informática educativa e exemplos do uso da informática com alunos e professores relacionados à utilização de computadores e calculadoras gráficas em Educação Matemática.

- ***Relações de gênero, educação matemática e discurso: enunciados sobre mulheres, homens e matemática***

  SOUZA, Maria Celeste R. F.; FONSECA, Maria da Conceição F. R. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

  Este livro proporciona uma reflexão sobre o modo como as relações de gênero permeiam as práticas educativas, em particular as que se constituem no âmbito da Educação Matemática. Propõe uma análise que mostra como os discursos sobre relações de gênero e Matemática repercutem e produzem desigualdades, abrangendo aspectos que envolvem vida doméstica, relações de trabalho, o cotidiano escolar, entre outros.

- ***Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica: sobre linguagens e práticas culturais***

  FLORES, Cláudia R.; CASSIANI, Suzani. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

  Contribui para a propagação dos diferentes modos de pensar e pesquisar os problemas da educação, abordando questões tanto matemáticas quanto científicas.

Sites, vídeos e *podcasts*

- ***Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática***

  Disponível em: <https://www.ime.usp.br/caem/index.php>. Acesso em: 24 jun. 2020.

  Trata-se de um órgão que presta assessoria e formação continuada referente ao aperfeiçoamento e extensão científico-cultural para professores e estudantes de Matemática. Entre as várias atividades, oferece cursos, oficinas e palestras e promove eventos para os diferentes níveis de ensino.

- ***Matemática Humanista***
  Disponível em: <https://www.matematicahumanista.com.br/podcast>. Acesso em: 25 jun. 2020.
  Primeiro **podcast** *sobre Educação Matemática e Matemática Humanista do Brasil, com entrevistas,* **reviews** *de livros e eventos, humor e arte, tudo com o clima típico das rádios. Além disso, apresenta posicionamentos diante do ensino e da aprendizagem de Matemática bastante diferentes dos mais usualmente vividos em escolas e universidades.*
- ***Ministério da Educação (MEC)***
  Disponível em: <https://www.youtube.com/ministeriodaeducacao_MEC/>. Acesso em: 24 jun. 2020.
  Disponibiliza vídeos institucionais desenvolvidos pelo MEC e as últimas notícias sobre educação no país.
- ***Minuto IBGE***
  Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/minuto-ibge.html>. Acesso em: 25 jun. 2020.
  Podcast que apresenta fatos, curiosidades, relatos e dados relevantes que estão presentes no cotidiano dos brasileiros. Consiste em um programa de rádio semanal disponibilizado gratuitamente, para emissoras de todo o país, por meio da Rede Nacional de Rádio.
- ***Nova Escola***
  Disponível em: <https://novaescola.org.br/>. Acesso em: 25 jun. 2020.
  Edição on-line *que dá aos alunos a oportunidade de acessar diversas informações sobre educação, em várias áreas do conhecimento, pesquisar artigos publicados e consultar o acervo da revista.*
- ***Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas***
  Disponível em: <http://www.obmep.org.br/>. Acesso em: 24 jun. 2020.
  O site contém várias informações sobre o evento e possibilita às escolas que se inscrevam on-line. *Apresenta também informações sobre provas, gabaritos, datas, escolas inscritas, entre outras.*
- ***O Quadro Negro***
  Disponível em: <http://www.central3.com.br/category/podcasts/o-quadro-negro/>. Acesso em: 25 jun. 2020.
  Traz informações, trocas de experiências, análises e discussões pontuais sobre assuntos variados da educação, tornando o podcast *um espaço aberto para que educandos, educadores e todos os interessados participem do tema proposto.*
- ***Portal Aprendiz***
  Disponível em: <https://portal.aprendiz.uol.com.br/>. Acesso em: 24 jun. 2020.
  Tem como maior objetivo mostrar que é possível tornar as cidades espaços educativos, onde se pode aprender, criar, pensar e transformar. Assim, as oportunidades educativas que as cidades oferecem constituem o principal foco das reportagens publicadas no site, *fazendo dos territórios lugares mais educadores, inteligentes, sustentáveis, criativos, inclusivos e democráticos.*
- ***Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos (RBEP)***
  Disponível em: <http://rbep.inep.gov.br/ojs3/index.php/rbep/issue/view/423>. Acesso em: 24 jun. 2020.
  No site é possível encontrar edições anteriores da revista, além da opção de pesquisar por artigos, que podem ser baixados. Trata-se de um periódico quadrimestral, publicado em formatos impresso e eletrônico. A RBEP publica artigos inéditos, resultantes de pesquisas que apresentem consistência, rigor e originalidade na abordagem do tema e que contribuem para a construção do conhecimento na área da educação.

Cursos e instituições

- ***Ucsal – Universidade Católica de Salvador***
  Especialização em Docência em Matemática
  Disponível em: <https://www.ucsal.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***Uece – Universidade Estadual do Ceará***
  Especialização em Ensino de Matemática
  Mestrado Profissional em Matemática
  Disponível em: <http://www.uece.br/ced/cursos/lato-sensu/presencial/metodologia-do-ensino-de-matematica/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UEFS – Universidade Estadual de Feira de Santana***
  Especialização em Matemática
  Mestrado Profissional em Matemática
  Disponível em: <http://www.uefs.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UEG – Universidade Estadual de Goiás***
  Especialização em Matemática e Educação Matemática
  Especialização em Matemática para a Educação Básica e Superior
  Especialização em Matemática Pura e Aplicada
  Especialização em Ensino da Matemática
  Disponível em: <http://www.prp.ueg.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UEL – Universidade Estadual de Londrina***
  Especialização em Estatística com Ênfase em Pesquisa Quantitativa
  Disponível em: <http://www.uel.br/pos/estatistica-quantitativa/portal/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
  Mestrado e Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática
  Disponível em: <http://www.uel.br/pos/mecem/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
  Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional
  Disponível em: <http://www.uel.br/pos/pgmac/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
  Mestrado Profissional em Matemática
  Disponível em: <http://www.uel.br/pos/profmat/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UEM – Universidade Estadual de Maringá***
  Mestrado e Doutorado em Educação para a Ciência e Matemática
  Disponível em: <http://www.pcm.uem.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.

Mestrado e Doutorado em Matemática
Disponível em: <http://www.pma.uem.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
Mestrado Profissional em Matemática
Disponível em: <http://www.profmat.uem.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.

- ***UEMG – Universidade do Estado de Minas Gerais***
Especialização em Ensino de Ciências e Matemática
Disponível em: <http://www.uemg.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***Ufal – Universidade Federal de Alagoas***
Mestrado e Doutorado em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Disponível em: <http://www.ufal.edu.br/unidadeacademica/im/pt-br/pos-graduacao/matematica>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***Ufam – Universidade Federal do Amazonas***
Mestrado e Doutorado em Matemática
Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
Disponível em: <https://www.ufam.edu.br/pos-graduacao.html>. Acesso em: 25 jun. 2020.
- ***Ufes – Universidade Federal do Espírito Santo***
Mestrado em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
Disponível em: <http://www.matematica.ufes.br/pt-br/pos-graduacao/PPGMAT/linhas-de-pesquisa>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFMS – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul***
Mestrado e Doutorado em Educação Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
Disponível em: <http://posgraduacao.ufms.br/portal/cursos/buscar>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFPB – Universidade Federal da Paraíba***
Pós-Graduação em Matemática – Mestrado e Doutorado
Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional
Mestrado Profissional em Matemática
Disponível em: <http://www.mat.ufpb.br/posgrad/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFPE – Universidade Federal de Pernambuco***
Mestrado em Educação em Ciências e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Estatística – Mestrado e Doutorado
Programa de Pós-Graduação em Matemática – Mestrado e Doutorado
Programa de Pós-Graduação em Matemática Computacional – Doutorado
Disponível em: <https://www.ufpe.br/cursos>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul***
Mestrado e Doutorado Acadêmico em Matemática
Mestrado e Doutorado Acadêmico em Matemática Aplicada
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Disponível em: <http://www.ufrgs.br/ufrgs/ensino/pos-graduacao>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro***
Especialização em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
Mestrado e Doutorado em Matemática
Disponível em: <http://app.pr2.ufrj.br/listarStrictoMestreDoutor>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte***
Mestrado e Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática
Mestrado em Matemática Aplicada e Estatística
Mestrado Profissional em Matemática
Disponível em: <https://sigaa.ufrn.br/sigaa/public/curso/lista.jsf?nivel=S&aba=p-stricto>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina***
Mestrado e Doutorado em Matemática
Mestrado Profissional
Disponível em: <https://ppgmtm.posgrad.ufsc.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFV – Universidade Federal de Viçosa***
Mestrado em Matemática
Matemática em Rede Nacional
Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática
Disponível em: <http://www.ppg.ufv.br/?page_id=383>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFPI – Universidade Federal do Piauí***
Mestrado e Doutorado em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
Disponível em: <https://sigaa.ufpi.br/sigaa/public/curso/lista.jsf?nivel=S&aba=p-ensino>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UnB – Universidade de Brasília***
Mestrado e Doutorado em Educação – Linha de pesquisa de Educação em Ciências e Matemática
Disponível em: <https://www.mat.unb.br/pagina/pesquisa-projetos>. Acesso em: 26 jun. 2020.
Mestrado Profissional de Matemática
Disponível em: <http://www.fe.unb.br/index.php?option=com_content&view=article&id=153&Itemid=1392>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***USP – Universidade de São Paulo***
Mestrado e Doutorado em Estatística
Mestrado e Doutorado em Matemática
Mestrado e Doutorado em Matemática Aplicada
Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria
Disponível em: <https://www5.usp.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.

5 Orientações sobre os capítulos

CAPÍTULO 1 Análise combinatória e binômio de Newton

Páginas 10 e 11

Metodologias e estratégias ativas

Uma possibilidade de trabalho com o assunto inicial desse capítulo, o jogo de xadrez, é utilizar a metodologia da **sala de aula invertida**. Para isso, solicite previamente aos alunos que leiam as páginas de abertura em casa, individualmente, e entregue-lhes ou anote na lousa o seguinte desafio, que introduz o conteúdo desse capítulo e diz respeito a uma lenda sobre a origem desse jogo: "Com o objetivo de distrair um rei, desolado pela morte de seu filho em uma batalha, um jovem lhe ofereceu como presente o jogo de xadrez. O rei, encantando com o presente, disse ao jovem que escolhesse sua recompensa. O jovem então pediu um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois grãos pela segunda, quatro grãos pela terceira, e assim sucessivamente, até que o tabuleiro fosse completo. O rei aceitou a proposta e solicitou o cálculo da quantidade total de grãos. Avalie o consentimento do rei com essa proposta, calculando a quantidade total de grãos de trigo que ele precisará entregar."

Então, no momento da aula, escolha alguns alunos para apresentarem suas resoluções na lousa e promova uma discussão para avaliar se eles e os demais conseguem chegar a um consenso entre si. Ao final das apresentações e discussões, apresente-lhes a resposta para esse desafio: "Quando viu o resultado, 18 446 744 073 709 551 616 grãos de trigo, o rei notou que, mesmo plantando trigo sobre toda a superfície da Terra, não seria possível pagar a recompensa". Caso os alunos tenham dificuldade ou não consigam obter esse número, apresente o seguinte quadro para facilitar a compressão.

Casa do tabuleiro	1ª	2ª	3ª	...	64ª
Grãos de trigo	2^0	2^1	2^2	...	2^{63}

Sendo assim, o resultado é dado pela soma

$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{63}$.

- Um instrumento possível para realizar o cálculo acima é o *software* GeoGebra. Ele é um programa dinâmico e gratuito que combina recursos de construções geométricas, algébricas, gráficos, tabelas, entre outros. Sua interface é simples e exibe comandos para realizar diferentes tipos de construções. É possível acessá-lo diretamente do navegador, sem necessidade de instalá-lo. Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic>. Acesso em: 22 jun. 2020. *Download* para instalação disponível em: <https://www.geogebra.org/download>. Acesso em: 22 jun. 2020. O *site* também contém informações e materiais de apoio para a utilização do programa.
- A fim de obter a soma das potências de 2 apresentadas no quadro, por meio desse *software*, basta utilizar o comando Soma(<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>) que, nesse caso, corresponde à Soma(2^n, n, 0, 63).
- Verifique se os alunos respondem corretamente aos itens **a** e **b**, pois são de caráter interpretativo. Com relação ao item **c**, liste os benefícios da prática do xadrez levantados pelos alunos, complementando com outros que não tenham sido citados.
- Após o primeiro contato com o tema, alguns questionamentos podem ser relevantes para o início de uma discussão.
  - Qual é o principal assunto tratado nessas páginas?
  - Você sabe jogar xadrez?
  - O assunto abordado nessas páginas tem relação com quais áreas do conhecimento? Justifique sua resposta.
  - Qual é a relação do jogo de xadrez com a Matemática?

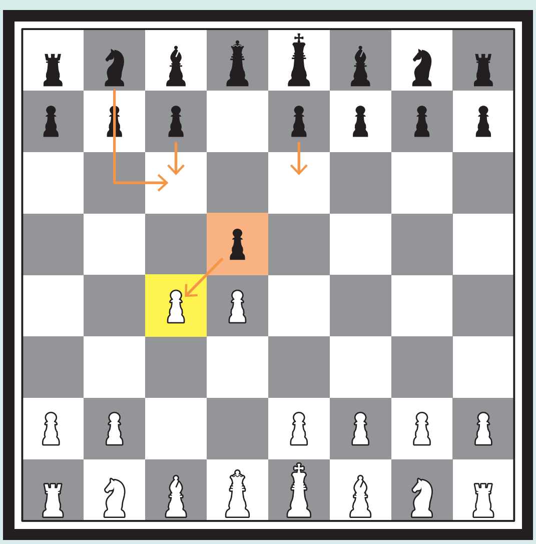
  Espera-se que os alunos percebam que o tratamento do xadrez como um jogo de tabuleiro, com peças e regras específicas, assim como os benefícios desse esporte, relacionam-se mais especificamente ao componente curricular **Educação Física**. A Matemática consiste em um instrumento de apoio, facilitando a compreensão e avaliação das jogadas.

  O jogo de xadrez envolve memorização, raciocínio lógico e capacidade de cálculo para analisar as inúmeras possibilidades existentes em cada jogada e suas possíveis consequências, ou seja, as combinações das jogadas futuras, do próprio jogador e de seu adversário. Por esse motivo, cada jogada deve ser bem pensada e calculada.

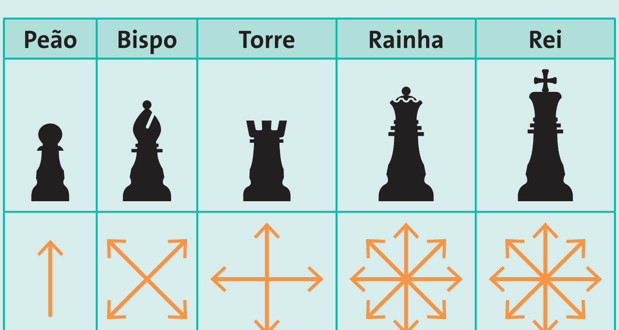
A prática de esportes deve fazer parte da rotina de todos, principalmente de crianças e adolescentes que estão em fase de crescimento corporal e formação intelectual. Aquele que se envolve com jogos de estratégias e raciocínio, como o xadrez, desenvolve inúmeras habilidades individuais, como as já citadas, além da própria motivação e desejo de superação que o esporte pode proporcionar.

Aproveite esse momento para explicar aos alunos sobre os campeonatos de xadrez, considerados competições esportivas. Caso for de fácil acesso, combine uma visita guiada para assistir a uma competição de xadrez na região, incentivando nos alunos a prática desse jogo e o conhecimento de toda a partida.

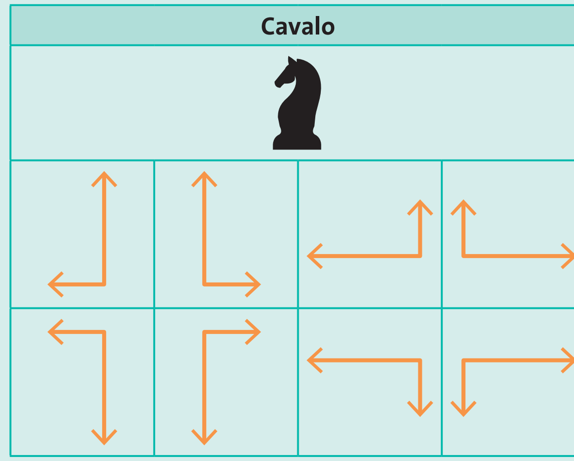
- Se julgar conveniente, reproduza a imagem a seguir, que retrata o início de uma partida de xadrez, com destaque para o movimento de algumas peças.



Explique-lhes que o movimento a ser realizado no tabuleiro depende da peça escolhida, pois cada uma delas é movimentada de uma maneira específica.



O cavalo é a única peça do xadrez que se movimenta em mais de uma direção a cada jogada. Nesse caso, o formato do movimento de um cavalo se assemelha a um "L", a partir de sua casa de origem.



Ilustrações: Rafael L. Galon

Página 12

- Caso os alunos demonstrem desconhecer as unidades de medida GB, TB e GHz, explique-lhes que GB (*gigabyte*) e TB (*terabyte*) são usados para medir a capacidade de armazenamento de um dispositivo, e GHz (giga-hertz) refere-se à velocidade de um processador, e um hertz é equivalente à quantidade de ciclos por segundo de uma determinada frequência, como ondas sonoras, batidas do coração e a frequência de um computador, que mede seu desempenho.
- O assunto escolhido para iniciar esse capítulo de maneira contextualizada foi computadores, pelo fato de serem aparelhos presentes no cotidiano de grande parte da população, seja para fins pessoais, profissionais ou de estudo. Atualmente, ao adquirir um computador, o cliente tem a possibilidade de escolher cada um dos seus componentes separadamente, adaptando o produto final às suas necessidades. Se julgar conveniente, pergunte aos alunos se eles têm computador em casa, pedindo que especifiquem suas configurações, caso as conheçam. Conforme os componentes e características forem sendo citados, estabeleça um critério de comparação com as definições apresentadas nos infográficos.

  Considere um computador qualquer como exemplo e verifique com os alunos a possibilidade de substituir alguns de seus componentes pelos apresentados na segunda imagem da página, solicitando que determinem quantos modelos diferentes pode-se obter de acordo com as disponibilidades ofertadas. Conduza essa dinâmica de modo a fazer com que os próprios alunos se questionem a respeito da quantidade total de computadores que é possível obter, antecipando, assim, a pergunta proposta nessa página.
- Diga aos alunos que o estudo da Análise combinatória, bastante utilizado em outras áreas do conhecimento, como Lógica, Estatística, Economia, entre

outras, teve início no século XVI com o matemático italiano Nicola Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia. Além dele, outros matemáticos, como os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662), contribuíram para o estudo desse assunto.

- Se julgar conveniente, apresente aos alunos as seguintes informações sobre Fermat.
  - O francês Pierre de Fermat recebeu sua educação inicial em casa. Tornou-se um discreto advogado, enquanto a Matemática fazia parte de sua vida apenas como lazer. Contudo, seus estudos enriqueceram tantos ramos da Matemática, que ele é considerado o maior matemático francês do século XVII. Entre várias contribuições, a mais importante é a moderna teoria dos números.

Para aprofundar

No endereço eletrônico a seguir, você encontra um artigo que trata da análise dos métodos de ensino de Análise combinatória, desde os primórdios até os dias atuais, buscando traçar semelhanças entre eles. Inclui também tarefas com o intuito de auxiliar alunos e professores no trabalho com esse conceito.

VAZQUEZ, Cristiane Maria Roque; NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner. Análise Combinatória: Alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. *Anais do VIII ENEM – Minicurso GT 5 – História da Matemática e Cultura*. Disponível em: <www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>. Acesso em: 22 jun. 2020.

Página 13 Conversando

- No item **e**, verifique se os alunos perceberam que, caso Carolina optasse pelo processador de 3.8 GHz, a quantidade de possibilidades diminuiria, pois, em vez de cinco, teríamos apenas uma possibilidade para escolher o processador, enquanto o restante das opções continuaria com a mesma quantidade disponível. Nesse caso, podemos responder a essa pergunta por meio do seguinte cálculo: $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$, ou seja, 48 maneiras.

Página 14

- Para complementar o assunto abordado no conteúdo **Princípio fundamental da contagem**, diga aos alunos que, para quem opta por adquirir um carro 0 km, as montadoras disponibilizam vários opcionais aos clientes. Além da cor e da potência do motor, pode-se escolher o acabamento interno, tamanho das rodas, conjunto elétrico, ar-condicionado, direção hidráulica, sistemas de segurança entre outras opções.

Página 16

BNCC

A proposta da tarefa **5** contempla aspectos da habilidade **EM13MAT310**, pois os alunos são levados a elaborar e resolver um problema relacionado à Análise combinatória, mais especificamente ao princípio fundamental da contagem. Com isso, espera-se que eles investiguem os problemas já trabalhados em sala de aula e utilizem os conhecimentos adquiridos previamente como base para a elaboração de uma nova situação. Tarefas que trabalham com a elaboração e resolução de problemas possibilitam aos alunos o desenvolvimento não apenas da capacidade matemática para lidar com esse tipo de situação, mas também da capacidade de elaborar argumentos e hipóteses, contribuindo, assim, para o desenvolvimento da **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

A fim de complementar a questão em destaque no **Você cidadão**, na tarefa **10**, peça aos alunos que, em duplas, realizem uma pesquisa e elaborem um texto sobre a importância da utilização de transportes coletivos. Essa pesquisa pode ser realizada antes ou depois da discussão em sala de aula, conforme julgar mais conveniente.

Para nortear a discussão, pode-se apontar alguns detalhes, como afirmar que, caso a população optasse pela utilização de transportes coletivos, a quantidade de veículos nas vias diminuiria, reduzindo assim os congestionamentos, a quantidade de acidentes e a emissão de gases que agravam o efeito estufa, como o dióxido de carbono (CO2). Esse tema está relacionado com a **Competência específica 1** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**: “Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global”, mais especificamente com a habilidade **EM13CNT105**: “Analisar os ciclos biogeoquímicos e interpretar os efeitos de fenômenos naturais e da interferência humana sobre esses ciclos, para promover ações individuais e/ou coletivas que minimizem consequências nocivas à vida”.

Outra questão relevante a ser apontada diz respeito às adequações dos transportes coletivos para superar as dificuldades de locomoção de pessoas com mobilidade reduzida, idosos, gestantes, obesos ou pessoas com dificuldades físicas temporárias ou permanentes. Existem vários projetos que visam essas adequações, como veículos com suspensão pneumática, que permite o rebaixamento do veículo, sempre que necessário, aproximando-o do nível do chão e facilitando a entrada, freios antitravamento (ABS), plataforma elevatória, veículos que comportam cadeiras de rodas e cães-guia, entre outros.

- Ainda com relação ao contexto da tarefa **10**, pergunte aos alunos quantos deles têm o hábito de utilizar os transportes coletivos com frequência. Por meio de questionamentos, leve-os a relatar se já presenciaram casos em que idosos, gestantes ou pessoas com necessidades especiais tiveram de permanecer em pé no transporte coletivo porque todos os assentos reservados estavam ocupados, geralmente, por pessoas sem necessidade alguma. Verifique se eles já observaram cenas em que alguém, acomodado em um assento comum, cedeu seu lugar, de modo a tornar o trajeto dessa pessoa mais confortável. Explique-lhes que o ato de ceder o lugar a um idoso, gestante ou pessoa com necessidade especial é um ato de empatia e cidadania, que demonstra preocupação com o próximo. Tal atitude pode ser tomada não apenas em transportes coletivos, mas também em filas de espera de lojas, instituições bancárias, supermercados, entre outros. Desafie os alunos a tomar uma atitude parecida e a relatar aos colegas como foi essa experiência.

Página 17

- Uma sugestão para iniciar o assunto desse tópico é desenvolver com os alunos, na prática, a tarefa com fichas proposta nessa página, antes de abordá-la no livro. Para realizá-la, peça aos alunos que se organizem em grupos com três integrantes e reproduzam as fichas e o quadro que se encontram nas páginas para reprodução desta Assessoria pedagógica.

  Inicialmente, distribua a cada grupo as cinco fichas com algarismos distintos. Em seguida, solicite aos alunos que verifiquem quantos números distintos com três algarismos podem ser formados utilizando três dessas fichas. Repita o processo utilizando quatro fichas e depois, as cinco fichas, a fim de que percebam a relação entre a quantidade de possibilidades e a quantidade de fichas (algarismos) em mãos.

  Para complementar a proposta, distribua também para cada grupo o quadro que está junto com as fichas e peça aos alunos que o completem, à medida que investigam os números formados e obtenham a quantidade de números distintos com três, quatro e cinco algarismos.

  Ao final, converse com os alunos e verifique se os grupos conseguiram chegar às mesmas respostas. Se julgar pertinente, escreva na lousa o quadro a seguir com as quantidades de números de algarismos distintos formados com três, quatro e cinco algarismos.

Quantidade de algarismos que compõem o número	Quantidade de números distintos que podem ser formados
3	60
4	120
5	120

Página 22

BNCC

Na tarefa **20**, é necessário o uso de uma tecnologia digital, nesse caso uma calculadora científica. Essa tarefa permite o desenvolvimento da **Competência geral 5** ao possibilitar aos alunos a compreensão das funções dos botões da calculadora e sua utilização para resolução de problemas de maneira crítica e significativa.

Planejamento individual e coletivo

O contexto abordado na tarefa **26** possibilita uma integração com o componente curricular **Língua Portuguesa**. Questione os alunos se eles têm o costume de ler livros, revistas ou jornais, e explique que essa prática resulta em benefícios, como enriquecimento do vocabulário, aumento da capacidade de argumentação e memorização, aperfeiçoamento da capacidade de escrita, desenvolvimento do pensamento crítico, expansão da capacidade de concentração, ampliação do repertório cultural e prevenção de doenças relacionadas à memória. Se julgar conveniente, solicite o auxílio do professor do componente curricular **Língua Portuguesa** e promova um trabalho conjunto, com o intuito de levar os alunos a praticar a leitura, tanto em ambiente escolar quanto fora dele.

Página 30

- Na resolução da tarefa **55**, o conceito de combinação simples é necessário para calcular a quantidade de caracteres que o sistema braile permite representar. Com isso, espera-se que o aluno utilize os conhecimentos desenvolvidos no estudo desse capítulo enquanto conhece esse importante sistema de comunicação desenvolvido para pessoas com deficiência visual.

Metodologias e estratégias ativas

Sistemas de comunicação criados para atender pessoas com deficiências, como a Libras ou a escrita braile, são importantes exemplos de como a fala e a escrita podem se adaptar de acordo com as necessidades. Para enriquecer o conhecimento dos alunos sobre esse tema, solicite que, em grupos de três ou quatro integrantes, escolham alguma palavra ou frase para ser representada em braile por meio de cartazes, junto a figuras ou desenhos que as represente, utilizando a metodologia **Gallery walk**. Com isso, os alunos poderão visualizar, a partir de seus trabalhos e dos demais colegas, várias combinações possíveis para os seis pontos da escrita braile, formando diversas palavras. Esse tipo de trabalho permite aos alunos que assumam um papel ativo no processo de aprendizagem, pesquisando e selecionando palavras, bem como colaborando entre si. Após a finalização, proponha que os cartazes sejam colados nas paredes da sala de aula ou nas demais paredes da escola, para que os outros alunos do colégio possam ver.

Página 33

- Se julgar conveniente, apresente aos alunos alguns exemplos numéricos de número binomial quando $p = 0$, $p = 1$ e $n = p$. Veja a seguir alguns exemplos.

a) $\binom{8}{0} = \dfrac{8!}{0!(8-0)!} = \dfrac{8!}{1 \cdot 8!} = 1$

b) $\binom{9}{1} = \dfrac{9!}{1!(9-1)!} = \dfrac{9 \cdot 8!}{1 \cdot 8!} = 9$

c) $\binom{6}{6} = \dfrac{6!}{6!(6-6)!} = \dfrac{6!}{6! \cdot 0!} = 1$

Página 34

- Antes de apresentar a relação de Stifel aos alunos, peça-lhes que observem o triângulo de Pascal. Depois, proponha alguns questionamentos, conforme sugestões a seguir.
  - Como é possível obter o terceiro elemento da quarta linha utilizando os elementos da linha anterior?
  - Que relação podemos observar quanto ao número 6, apresentado na quinta linha, e os números apresentados na quarta linha?
  - Se você fosse completar a sétima linha do triângulo de Pascal, como isso poderia ser feito utilizando os elementos da sexta linha?

  Após os alunos responderem às perguntas, verifique se eles percebem que, para obter um elemento de uma linha, basta adicionar os dois elementos consecutivos da linha anterior, imediatamente acima dele. Com base nessa informação, diga que esse procedimento se chama relação de Stifel.

Página 36

- Ao propor a resolução da tarefa **64**, verifique se os alunos percebem que os números binomiais indicados nas adições dos itens **c** e **e** representam, respectivamente, todos os elementos das linhas 6 e 20 do triângulo de Pascal. Nesses casos, não há necessidade de determinar o resultado de cada número binomial para, posteriormente, adicionar os resultados obtidos e chegar ao valor desejado. De acordo com a 3ª propriedade, apresentada na página **35**, a soma dos elementos da *n*-ésima linha do triângulo de Pascal é igual a 2^n. Portanto, os resultados dos itens **c** e **e** são iguais a $2^6 = 64$ e $2^{20} = 1\,048\,576$, respectivamente.

Página 37

- Com o intuito de tornar mais significativo o estudo do binômio de Newton, apresente aos alunos um pouco mais da história de Isaac Newton e a origem da fórmula que leva seu nome. Para isso, reproduza e distribua aos alunos o texto e as questões apresentadas a seguir. Essa dinâmica possibilita o desenvolvimento da autonomia em relação à leitura e também a percepção das contribuições da história da Matemática. Com isso, eles poderão compreender que os atuais avanços tecnológicos não seriam possíveis sem o conhecimento científico das gerações passadas.

Isaac Newton

O inglês Isaac Newton, nascido no Natal de 1642, na aldeia de Woolsthorpe, é um dos grandes nomes da ciência. Suas contribuições foram inúmeras em várias áreas do conhecimento, estendendo-se pela Física e Matemática. Sua obra baseou-se nos trabalhos de renomados cientistas, como Galileu Galilei.

Newton era filho de agricultores e desde cedo se mostrou uma criança estudiosa e solitária, apresentando excelentes habilidades matemáticas. Assim, aos 18 anos de idade, foi enviado ao Trinity College, em Cambridge, para realizar seus estudos.

Desde cedo, Newton demonstrou afinidade pela filosofia da natureza, contrariando as tradições aristotélicas que ainda vigoravam na época. Suas leituras exprimiam uma amplitude de interesses, pois iam além daquelas exigidas pelo programa universitário. Além de os **Elementos**, de Euclides, e de obras de René Descartes, especialmente a **Geometria**, publicada em 1637, Newton leu as obras de Boyle, Kepler, Wallis, e **Diálogo**, de Galileu.

Não demorou para que ele começasse a desenvolver sua própria Matemática, tornando-se um autodidata e adquirindo rapidamente um extenso conhecimento sobre a filosofia da natureza.

Entre as contribuições de Newton, podemos citar, no campo da Física, a teoria da gravitação e a explicação da natureza da luz. No campo da Matemática, destacam-se os binômios generalizados e o método dos fluxos, atualmente chamado cálculo diferencial e integral, estudado por matemáticos, físicos, químicos, biólogos, economistas, engenheiros etc.

A maior parte de seus feitos veio a público anos depois de realizados. O teorema do binômio generalizado, desenvolvido por Newton em 1664 ou 1665, por exemplo, foi divulgado apenas em 1685, por John Wallis, na obra **Álgebra de Walli**, com os devidos créditos a Newton.

Em 1676, Newton descreveu e explicou o teorema do binômio generalizado em duas cartas enviadas a Henry Oldenburg, na época secretário da Royal Society, expresso da seguinte maneira:

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + $$
$$+ \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ\ldots \text{ em que:}$$

- A representa o 1º termo $\left(P^{\frac{m}{n}}\right)$;
- B representa o 2º termo $\left(\frac{m}{n}AQ\right)$;
- C representa o 3º termo, e assim por diante.

Os coeficientes binomiais para expoentes inteiros já eram conhecidos pelos matemáticos cerca de meio milênio antes de serem desenvolvidos por Newton. Assim, a transição de expoentes inteiros para fracionários demorou cerca de quinhentos anos. Acredita-se que um dos motivos que causaram tanta demora foi a notação matemática utilizada, que não era adequada.

Fontes de pesquisa: DEPARTAMENTO DE ASTRONOMIA DO INSTITUTO DE FÍSICA DA UFRGS. *Sir Isaac Newton*. Disponível em: <http://astro.if.ufrgs.br/bib/newton.htm>. Acesso em: 11 ago. 2020.
FORATO, T. C. M. *Isaac Newton*. Disponível em: <http://www.ghtc.usp.br/Biografias/Newton/Newton3.htm>. Acesso em: 11 ago. 2020.
BOYER, C. B.; MERZBACH U. C. *História da Matemática*. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

a) Quando estava na universidade, Newton tinha interesse em qual tipo de Filosofia? O que contribuiu para que ele adquirisse um grande conhecimento nesse campo?

b) Cite algumas contribuições de Newton à ciência.

- Respostas do texto:

a) Newton tinha interesse na filosofia da natureza. Ele leu várias obras, entre elas, a **Geometria**, de René Descartes, **Diálogo**, de Galileu, e a **Fisiologia**, de Charleton, que não faziam parte do programa universitário. Dessa maneira, ele adquiriu rapidamente, como autodidata, um conhecimento extenso do que havia de mais novo nessa filosofia.

b) Entre as contribuições deixadas por Newton, podemos citar, no campo da Física, a teoria da gravitação e a explicação da natureza da luz. No campo da Matemática, podem ser citados os binômios generalizados e o método dos fluxos, atualmente chamado cálculo diferencial e integral, estudado por matemáticos, físicos, químicos, biólogos, economistas, engenheiros etc.

Páginas 42 e 43 Acesso digital

- Nessa seção, foi utilizada a versão 6.4.2.2 do Calc do LibreOffice, um programa de planilhas eletrônicas. Para realizar o *download* e instalá-lo, acesse o endereço eletrônico <http://pt-br.libreoffice.org>. Acesso em: 23 jun. 2020.
- Ao trabalhar essa seção com os alunos, verifique se eles sabem que cada parte dada pelo cruzamento de uma linha com uma coluna é chamada célula, cuja localização é indicada por um código alfanumérico.

BNCC

O objetivo dessa seção é desenvolver nos alunos o pensamento computacional, levando-os a compreender quais dados e fórmulas devem ser inseridos na planilha eletrônica para a construção do triângulo de Pascal. Além disso, situações como essas contemplam aspectos da **Competência geral 5**, pois possibilitam a produção do conhecimento e resolução de problemas utilizando tecnologias digitais.

Páginas 44 e 45 Saiba mais

- O objetivo dessa seção é trabalhar com o sistema de emplacamento de veículos no Brasil, apresentando suas principais características e as modificações ocorridas em 2019. Como a codificação dessas placas é uma composição alfanumérica, ou seja, composta por letras e algarismos, é necessário utilizar o princípio fundamental da contagem para determinar a quantidade total de placas distintas que esse sistema permite obter. Espera-se que os conhecimentos desenvolvidos durante o estudo desse capítulo auxiliem os alunos a compreender por que esse sistema é capaz de disponibilizar uma grande quantidade de placas distintas.

Emiliano Cavalcante

Codificação nos modelos de placas utilizados antes de 2019.

Codificação nos modelos de placas utilizados a partir de 2019.

- No novo sistema de codificação, a combinação das três primeiras letras das placas obedece ao padrão já utilizado no modelo antigo, identificando cada veículo de acordo com a unidade federativa em que seu registro foi efetuado. Se julgar conveniente, reproduza na lousa o quadro a seguir, que especifica o intervalo de combinação de letras correspondente a cada unidade federativa do país até 2019.

Unidade federativa	Série inicial	Série final
Paraná	AAA - 0001	BEZ - 9999
São Paulo	BFA - 0001	GKI - 9999
Minas Gerais	GKJ - 0001	HOK - 9999
Maranhão	HOL - 0001	HQE - 9999
Mato Grosso do Sul	HQF - 0001	HTW - 9999
Ceará	HTX - 0001	HZA - 9999
Sergipe	HZB - 0001	IAP - 9999
Rio Grande do Sul	IAQ - 0001	JDO - 9999
Distrito Federal	JDP - 0001	JKR - 9999
Bahia	JKS - 0001	JSZ - 9999
Pará	JTA - 0001	JWE - 9999
Amazonas	JWF - 0001	JXY - 9999
Mato Grosso	JXZ - 0001	KAU - 9999
Goiás	KAV - 0001	KFC - 9999
Pernambuco	KFD - 0001	KME - 9999
Rio de Janeiro	KMF - 0001	LVE - 9999
Piauí	LVF - 0001	LWQ - 9999
Santa Catarina	LWR - 0001	MMM - 9999
Paraíba	MMN - 0001	MOW - 9999
Espírito Santo	MOX - 0001	MTZ - 9999
Alagoas	MUA - 0001	MVK - 9999
Tocantins	MVL - 0001	MXG - 9999
Rio Grande do Norte	MXH - 0001	MZM - 9999
Acre	MZN - 0001	NAG - 9999
Roraima	NAH - 0001	NBA - 9999
Rondônia	NBB - 0001	NEH - 9999
Amapá	NEI - 0001	NFB - 9999

DETRAN Santa Catarina. *Combinação de letras e placas.* Disponível em: <http://www.detran.sc.gov.br/informacoes/veiculos/combinacao-de-letras-e-placas>. Acesso em: 23 jun. 2020.

- Comente com os alunos que, para motocicletas e alguns outros veículos, o modelo de placas segue o mesmo padrão das placas de carro, diferenciando-se apenas pelo tamanho e pela disposição dos elementos na placa.

Ilustrações: Camila Carmona

- Enfatize aos alunos que, apesar de as informações contidas no quadro serem referentes ao modelo antigo de codificação, as regras continuam sendo válidas para o modelo atual em relação às três primeiras letras.

  A simples substituição de um algarismo por uma letra no novo modelo de codificação fez com que a quantidade de placas distintas possíveis de serem obtidas passasse de 175 760 000 para 456 976 000, ou seja, um aumento de mais de 280 milhões de combinações possíveis. Por meio dessa alteração, é provável que o novo modelo de codificação atenda às necessidades do mercado por um longo período.

Avaliação

Aproveite esse momento para realizar uma avaliação diagnóstica com a turma. Para isso, reúna os alunos em grupos de, no máximo, três integrantes e peça-lhes que leiam todo o conteúdo apresentado nessas páginas. Com base nessa leitura, oriente-os a escrever no caderno eventuais dúvidas. Em seguida, peça aos grupos que repassem suas dúvidas entre si, de modo que um possa auxiliar a sanar as dúvidas do outro, promovendo uma interação entre os alunos. Caso eles apresentem dificuldades nessa etapa, peça que leiam as dúvidas em voz alta e, por meio de questionamentos, promova uma conversa com toda a turma. Para isso, proponha algumas questões, como as sugeridas a seguir.

- Nos modelos de emplacamento atual, é possível saber em qual unidade federativa o veículo foi licenciado analisando apenas o código de sua placa?
- Em sua opinião, é possível saber o nome do atual proprietário do veículo analisando apenas o código informado em sua placa?

Esse tipo de avaliação possibilita que se verifique como o aluno está interagindo com o conhecimento e permite que você tome decisões para melhoria da qualidade do processo de ensino-aprendizagem executando um novo planejamento, caso necessário.

Para aprofundar

A reportagem apresentada no endereço eletrônico indicado a seguir traz algumas informações a respeito do novo padrão de emplacamento de veículos no Brasil.

REIS, Alessandro. Placa Mercosul: saiba o que muda com o modelo adotado em todo o Brasil. *UOL*, 27 jan. 2020. Disponível em: <https://www.uol.com.br/carros/noticias/redacao/2020/01/27/placa-mercosul-saiba-o-que-muda-com-o-modelo-adotado-em-todo-o-brasil.htm>. Acesso em: 23 jun. 2020.

Páginas 46 e 47 Conectando ideias

BNCC

Aproveite que o assunto abordado nessa seção trata dos estudos relacionados ao genoma humano e estabeleça conexão com o tema contemporâneo transversal **Ciência e tecnologia**. Promova um debate a respeito dos grandes feitos alcançados pelo ser humano nas últimas décadas no ramo da ciência e o quanto a tecnologia influenciou direta e positivamente essas conquistas. Comente com os alunos que grande parte dos resultados alcançados em laboratório, por exemplo, só é possível graças ao grande aporte tecnológico disponível, sem o qual esses trabalhos dificilmente seriam realizados. Se julgar conveniente, comente a respeito do grande feito alcançado por uma equipe de cientistas brasileiros, que, em fevereiro de 2020, foi responsável por sequenciar, em tempo recorde (48 horas), o genoma do coronavírus.

Informações sobre a composição do DNA, sua função e localização são abordados, preferencialmente, pelo componente curricular **Biologia**, no tratamento da identidade dos seres humanos e informações genéticas e estão relacionados com a **Competência específica 2** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**: “Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis”, mais especificamente com a habilidade **EM13CNT208**: “Aplicar os princípios da evolução biológica para analisar a história humana, considerando sua origem, diversificação, dispersão pelo planeta e diferentes modos de interação com a natureza, valorizando e respeitando a diversidade étnica e cultural humana”.

- Se necessário, realize uma análise sobre a composição do DNA, que é formado por ligações de pares nucleotídeos. Esses nucleotídeos têm em comum um fosfato e um açúcar, e o que os diferencia são as bases nitrogenadas. Espera-se, então, que os conceitos de Análise combinatória estudados nesse capítulo auxiliem o aluno na compreensão e representação da estrutura do DNA, já que a maneira como as bases nitrogenadas estão combinadas nessa estrutura define as informações genéticas de cada indivíduo.
- Antes de solicitar aos alunos que respondam às questões apresentadas, proponha as perguntas indicadas a seguir.
  - Em sua opinião, por que o título da seção é “A ’receita’ dos seres vivos”?
  - Qual é o componente do DNA que pode ser relacionado com a Análise combinatória?
- Se julgar conveniente, comente que, em 1953, o americano James Dewey Watson, nascido em 6 de abril de 1928, e o inglês Francis Harry Compton Crick (1916-2004) divulgaram um trabalho revelando ao mundo a estrutura do DNA com o famoso formato da dupla hélice, o que rendeu a ambos o prêmio Nobel de Medicina de 1962. Outro comentário interessante a ser feito é sobre o Projeto Genoma. Com início em 1990, esse projeto envolveu vários países, teve um custo de 2,7 bilhões de dólares e duração de 13 anos. O principal objetivo foi mapear todo o código genético dos seres vivos e identificar a função de cada gene, para, assim, entender a hereditariedade e combater doenças. Sabe-se, atualmente, que o ser humano tem cerca de 25 000 genes, mas suas funções ainda não foram todas detalhadas.

Para aprofundar

O artigo a seguir conta a história de um grupo de cientistas japoneses que, após quase 15 anos de trabalho, conseguiram recriar em laboratório certo tipo de organismo capaz de explicar a origem da vida na Terra.

DOMÍNGUEZ, Nuño. Encontrado o organismo que explica a origem de toda a vida complexa da Terra. *El País*, 18 jan. 2020. Disponível em: <https://brasil.elpais.com/brasil/2020/01/17/ciencia/1579284583_584643.html>. Acesso em: 23 jun. 2020.

A matéria discorre a respeito de um projeto desenvolvido pelo Centro de Pesquisas sobre o Genoma Humano e Células-Tronco (CEGH-CEL), que visa desenvolver pesquisas relacionadas ao genoma humano, doenças genéticas e estudos com células-tronco.

PACHECO, Denis. Grupo da USP transforma segredos dos genes humanos em tratamentos para todos. *Jornal da USP*, 19 dez. 2019. Disponível em: <https://jornal.usp.br/universidade/grupo-da-usp-transforma-segredos-dos-genes-humanos-em-tratamentos-para-todos>. Acesso em: 22 jun. 2020.

CAPÍTULO 2

Probabilidade

Páginas 48 e 49

- Ao introduzir esse capítulo, comece explorando o princípio multiplicativo da contagem que, ao mesmo tempo que se caracteriza como uma parte desafiadora da Matemática, também possibilita a contextualização e incentiva o raciocínio dos alunos.
- Em seguida, oriente os alunos a ler o texto introdutório e incentive o debate em sala de aula a respeito da temática abordada no texto. Entre as discussões promovidas em sala de aula, incentive os alunos a identificar:
  - Qual é o principal assunto abordado nessa página?
  - Você conhece alguém que costuma participar de jogos de loteria? Essa pessoa já ganhou?
  - Em sua opinião, existem muitas chances de uma pessoa ganhar na loteria? Justifique sua resposta.
- Ao responder às perguntas apresentadas anteriormente, espera-se que os alunos percebam que jogos de loteria contam com o fator sorte, mas, principalmente, direcione-os ao entendimento de que a chance de uma pessoa ganhar na loteria é muito pequena.

Página 50

Metodologias e estratégias ativas

Por meio da metodologia da **Sala de aula invertida**, divida os alunos em grupos e solicite que, em casa, façam uma pesquisa sobre o funcionamento de jogos de loteria famosos, como a Mega-Sena. Os alunos podem pesquisar, por exemplo, por quantos números esse jogo é composto, quantos números podem ser escolhidos em cada aposta, quais são as apostas mínima e máxima permitidas, quais são as chances de uma pessoa acertar uma quadra, uma quina ou uma sena. Incentive-os a se apoiar em princípios de contagem, em porcentagem, proporcionalidade, enfim, mobilizando conhecimentos matemáticos já construídos por eles até o momento.

Na data combinada, disponha os alunos em uma roda a fim de que todos possam expor o resultado de suas pesquisas. Realize algumas perguntas sobre o tema em questão e conduza essa roda de conversa. Uma sugestão também é sortear os nomes dos alunos para que façam perguntas entre si.

BNCC

Aproveite esse momento para fazer relação entre o assunto abordado com os temas contemporâneos transversais **Educação financeira**, **Educação para o consumo** e **Vida familiar e social**, enfatizando problemas financeiros, familiares e emocionais que podem advir dos jogos de azar e da ilusão de enriquecer por meio deles.

Página 51

- Ao realizar uma abordagem histórica a respeito da teoria das probabilidades, complemente as informações destacando as contribuições de Jules Henri Poincaré (1854-1912), de Émile Borel (1871-1956) e de John Von Neumann (1903-1957), que são nomes associados ao estudo de probabilidades e à teoria dos jogos. Comente que, em 1933, Andrei Nikolaevich Kolmorov (1903-1987) estabeleceu um rigor matemático para a probabilidade a partir do seu livro *Fundamentação do Cálculo de Probabilidades*, em que desenvolveu com maior rigor a teoria das probabilidades a partir de axiomatização baseada pela teoria da medida.
- O mais importante de se destacar, nesse momento, é que a teoria das probabilidades e a teoria dos jogos estão presentes em situações do cotidiano.

Conversando

- Para esse momento, incentive os alunos a acrescentar outras situações em que possam identificar a relevância de determinar as chances de um evento acontecer. Ainda sem definir formalmente, ajude-os a perceber que existem alguns acontecimentos que, embora sejam realizados muitas vezes sob as mesmas condições, não apresentam os mesmos resultados, ou seja, os resultados são imprevisíveis. É principalmente nessas situações que visamos calcular os prováveis resultados, ou seja, as chances ou probabilidades de ocorrência de um resultado determinado.

BNCC

A proposta de trabalho dessa seção aborda a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, no sentido de propor a interpretação de modelos matemáticos associados a problemas provenientes de diversos contextos, como é o caso do cálculo para determinar a chance de ocorrer certos eventos. Além disso, as reflexões propostas possibilitam o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT312**, ao utilizar o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios consecutivos para a resolução de situações-problema.

Página 52

Planejamento individual e coletivo

Nesse momento, a fim de integrar os componentes curriculares **Matemática** e, preferencialmente, **Biologia**, pode ser realizado um trabalho envolvendo o tema contemporâneo transversal **Direitos da criança e do adolescente** ao propor uma pesquisa sobre a prevenção à gravidez, complementando esses estudos com dados estatísticos e probabilísticos sobre a gravidez na adolescência e os fatores de risco associados a ela.

BNCC

A habilidade **EM13MAT106** da BNCC é contemplada na tarefa **1**, pois possibilita a identificação de situações nas quais é necessário tomar decisões, ou seja, ao fazer com que os alunos avaliem as probabilidades de falha na escolha de um método contraceptivo em detrimento de outro. Além disso, essa tarefa requer que os alunos utilizem os conhecimentos e estratégias matemáticas desenvolvidas nesse capítulo, levando em consideração o contexto em que a situação está inserida, contemplando, assim, a **Competência específica 1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Página 53

- Ao relacionar a invenção dos dados com os jogos de dados, são citados elementos presentes em culturas juvenis, como o RPG, jogos de tabuleiros e outros que usam dados. Por meio desses jogos, os jovens promovem e compartilham o interesse por assuntos como leitura, aventura e história, utilizando os dados para obter aleatoriedade em diversas etapas dos jogos.

Página 54

- Nesse momento, aproveite o conteúdo multimodal apresentado pela tirinha e incentive os alunos a refletir sobre a situação relatada e sobre sua relação com a definição de evento.
- Em seguida, instigue-os a citar outros exemplos de eventos certos e, também, a refletir sobre situações de eventos impossíveis. Por exemplo, ao jogar um dado comum (numerado de 1 a 6), qual é a chance de sair um número maior do que 6? Comente que essa ocorrência é impossível devido à configuração de um dado comum.
- Também, a partir do lançamento de um dado, pode-se explorar a definição de evento certo questionando os alunos sobre a chance de sair um número menor do que 7 ao se jogar um dado comum. Explique que esse resultado é certo, ou seja, sempre acontecerá.

Para aprofundar

Você pode encontrar mais informações sobre conceitos de probabilidade consultando o *link* indicado a seguir.

Além de explicações em linguagem simples e breve, você vai encontrar vídeos curtos explicando ideias elementares a respeito de probabilidade.

Probabilidade: conceitos básicos. *Khan Academy*. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/math/probability/probability-geometry/probability-basics/a/probability-the-basics>. Acesso em: 19 jun. 2020.

Página 56

- Na tarefa **R4**, pode-se complementar com outros eventos além dos que foram apresentados, tais como:
  - A soma ser maior do que 10.
  - Sair a mesma quantidade de pontos em ambas as faces dos dados.
  - A soma ser maior do que 1 e menor do que 13.
- Também é importante enfatizar que o espaço amostral é dependente do experimento. De modo a facilitar a compreensão desse assunto, proponha, em sala de aula, atividades práticas ou exercícios mentais simples, como a realização de lançamento de um dado e, em seguida, de dois dados. Também é uma boa oportunidade para destacar o conceito de evento impossível, como o de obter uma soma maior do que 12.

Página 57

BNCC

A **Competência geral 9** é contemplada na tarefa **5** ao abordar o tema de jogo de basquete em cadeira de rodas, pois esse tema permite promover o exercício da empatia e respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

Ao trabalhar com a tarefa **6**, os alunos poderão reconhecer se os espaços amostrais são discretos ou contínuos, o que colabora para contemplar parcialmente a habilidade **EM13MAT511** e a **Competência específica 5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

A tarefa **7** permite o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT311** ao propor aos alunos que determinem o espaço amostral. Aproveite essa tarefa e reflita com os alunos sobre o uso de lentes apropriadas para óculos escuros. Propostas como essa levam os alunos a cuidar de sua saúde física, possibilitando o desenvolvimento da **Competência geral 8**.

Página 60

- Ao abordar a probabilidade de um evento não ocorrer, enfatize que essa é uma situação diferente de um evento impossível. Se julgar necessário, apresente situações-problema complementares de ambos os casos para que os alunos percebam que o evento impossível é aquele em que o evento é vazio e, portanto, não há possibilidade de que venha a ocorrer. Já a probabilidade de um evento não ocorrer corresponde ao complementar de um evento que pode ocorrer.

Página 64

- Com as tarefas **18** e **21** é possível verificar se os alunos reconhecem espaços amostrais equiprováveis.

Página 65

- Ao resolver a tarefa **28**, aproveite esse momento para fazer relação entre o assunto abordado com o tema contemporâneo transversal **Saúde**, promovendo a discussão sobre a importância da doação de sangue. Tendo em vista a contextualização e aprofundamentos dos estudos a respeito de probabilidade, bem como a discussão sobre esse tema, pode-se promover uma pesquisa sobre o quadro de compatibilidade sanguínea.

	RECEPTOR							
DOADOR	+AB	–AB	+A	–A	+B	–B	+O	–O
+AB	🩸	X	X	X	X	X	X	X
–AB	🩸	🩸	X	X	X	X	X	X
+A	🩸	X	🩸	X	X	X	X	X
–A	🩸	🩸	🩸	🩸	X	X	X	X
+B	🩸	X	X	X	🩸	X	X	X
–B	🩸	🩸	X	X	🩸	🩸	X	X
+O	🩸	X	🩸	X	🩸	X	🩸	X
–O	🩸	🩸	🩸	🩸	🩸	🩸	🩸	🩸

Rafael L. Gaion

Compatibilidade para transfusão sanguínea

Metodologias e estratégias ativas

Após a pesquisa, proponha problemas de probabilidade, como: “Qual é a probabilidade de um receptor AB positivo receber doação de sangue?”. Por ser de um receptor universal, trata-se de um evento certo se considerarmos a existência de doadores de qualquer tipo sanguíneo. Caso a mesma pergunta fosse formulada para o receptor O negativo, na ausência de pelo mesmo um doador também O negativo, isso resultaria em um evento impossível. Além disso, pode-se propor um tema que mobilize os conhecimentos construídos até o momento sobre probabilidade, utilizando, assim, a metodologia ativa de **Modelagem matemática**.

BNCC

Ao propor a elaboração e resolução de problemas que envolvem cálculo de probabilidade, a tarefa **34** contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT312**.

- Peça aos alunos que leiam individualmente e com atenção a tarefa **36** e depois faça o seguinte questionamento:
  - Em primeira análise, qual é a cor das bolas em maior quantidade?

No caso, são as verdes, pois se a probabilidade de sortear uma bola azul é a metade da probabilidade de sortear uma amarela e um terço da probabilidade de sortear uma verde, então significa que existem mais bolas amarelas do que azuis e mais verdes do que amarelas. Essa primeira análise é importante para que os alunos façam uma prévia das possíveis respostas que vão encontrar.

Para resolver essa tarefa, pode-se utilizar a definição de probabilidade de um evento ocorrer. Nesse caso, há três eventos possíveis (três cores de bolas) e um espaço amostral de 12 bolas, ou seja, $x + y + z = 12$, sendo x, y e z as quantidades de bolas azuis, amarelas e verdes, respectivamente.

Chame a atenção dos alunos aos cuidados no momento de efetuar cálculos com frações. É possível que deem atenção à resolução das probabilidades e esqueçam de utilizar a relação $x + y + z = 12$.

Página 68

- A situação apresentada na tarefa **44**, assim como os questionamentos propostos, permite a reflexão sobre a importância desse tipo de evento para a participação dos indivíduos na comunidade em geral, levando-os a refletir sobre atuação na comunidade e projeto de vida.

Página 69

- A partir do conteúdo de probabilidade condicional, é possível introduzir outros conceitos igualmente importantes nos estudos de probabilidade, tal como o de eventos independentes. Ressalte para os alunos que para resolver problemas de probabilidade condicional, reduzir o espaço amostral e calcular as probabilidades para esse novo espaço pode ser uma estratégia prática e simples.

Página 73

BNCC

A tarefa **R18** promove a construção de um fluxograma que possibilita calcular a probabilidade do evento A ocorrer sabendo que o evento B ocorreu. Para calcular a probabilidade da primeira carta retirada ser menor do que 7 e a segunda carta ser um valete de espada na tarefa **R19**, os alunos podem recorrer ao fluxograma obtido na tarefa anterior. Nesse momento, o aluno adquire conhecimentos sobre os elementos que compõem um fluxograma e a maneira de construí-lo, contemplando a habilidade **EM13MAT315**. Além disso, a linguagem dos fluxogramas se relaciona à **Competência geral 4**, pois permite ao aluno ampliar seu repertório de linguagens.

- Para simplificar a notação, estamos utilizando apenas as três figuras e as setas para representar os passos do fluxograma da tarefa **R18**. A introdução de novas figuras e outros detalhes sobre esse assunto serão trabalhados no capítulo **4** do volume **Trigonometria, fenômenos periódicos e programação**.

Página 75

BNCC

A seção **Você cidadão** permite uma reflexão sobre o que os alunos costumam fazer nos horários de lazer e a importância de se dedicar a alguma atividade relaxante. Aproveite para propor uma discussão sobre esses temas, isso possibilitará uma ampliação de referências e experiências culturais diversas e do conhecimento sobre si, além de incentivar nos alunos escolhas de estilos de vida saudáveis e sustentáveis, contemplando assim a **Competência geral 8**.

O contexto da tarefa **50**, a feira de artesanato, pode ser explorado ao propor que seja desenvolvida uma pesquisa sobre o assunto, de modo a valorizar as diversas manifestações artísticas e culturais, permitindo-se assim o desenvolvimento da **Competência geral 3**.

Página 76

BNCC

Durante o trabalho com a tarefa **52**, é apresentada aos alunos uma situação em que pessoas portadoras ou não de certa doença são submetidas a determinado exame para verificar sua eficácia. Esse tema está relacionado à **Competência específica 2** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**: "Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis", mais especificamente à habilidade **EM13CNT205**: "Interpretar resultados e realizar previsões sobre atividades experimentais, fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas noções de probabilidade e incerteza, reconhecendo os limites explicativos das ciências", pois, ao utilizar a probabilidade para interpretar o resultado dos testes, o aluno pode prever se os resultados dos exames serão confiáveis.

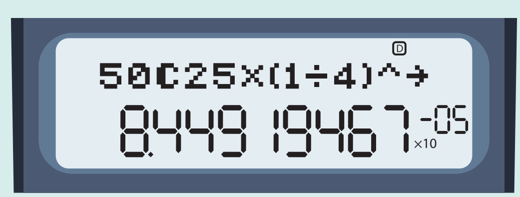
Página 78

Planejamento individual e coletivo

Explique aos alunos que a Lei Binomial das Probabilidades é usada, por exemplo, para determinar a probabilidade de um casal ter filhos meninos ou meninas, desconsiderando-se a ordem de ocorrência. Esse assunto permite um trabalho relacionado ao componente curricular **Biologia**, nos estudos de Genética. Aproveite também para enfatizar como muitos outros conceitos de Probabilidade também se aplicam à Genética e outros estudos da Biologia, sobretudo pelo fato de a probabilidade envolver eventos aleatórios, como é o caso do encontro de dois gametas com determinados genes.

Página 80

- Caso julgue necessário, comente com os alunos que no item **a** da tarefa **R25**, para obter o valor de $\binom{50}{25} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{25} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{25}$, podemos utilizar uma calculadora científica digitando a sequência de telas:



Sergio L. Filho

- Oriente os alunos que em algumas calculadoras, a tecla x^y substitui a tecla ^.

Página 81 Finalizando a conversa

Avaliação

Aproveite as questões dessa seção para propor uma avaliação diagnóstica com a turma e verificar o entendimento e as dificuldades dos alunos em relação aos conceitos fundamentais dos estudos de probabilidade. Nesse momento, é importante verificar se os alunos compreenderam a diferença entre probabilidade e possibilidade, bem como a importância desse estudo em relação à sua aplicação em diferentes situações e em outras áreas do conhecimento.

Esse tipo de avaliação possibilita que se verifique como o aluno está interagindo com o conhecimento e permite que você tome decisões para melhoria da qualidade do processo de ensino-aprendizagem executando um novo planejamento, caso julgue necessário.

Páginas 84 e 85 Conectando ideias

- O tema dessa seção é o sistema de crédito por consórcio, que consiste em um grupo de pagantes de prestações mensais com o objetivo de obter determinado crédito financeiro por meio de sorteios e lances. Esse assunto pode ser relacionado ao tema contemporâneo transversal **Educação para o consumo**, permitindo que seja feita uma reflexão sobre a importância da educação financeira para o consumo e investimentos. Nesse caso, os conceitos de probabilidade são úteis para compreender como funciona o consórcio e entender por que as chances de uma pessoa ser contemplada aumentam com o passar do tempo. Assim, espera-se que os alunos relacionem os conhecimentos desenvolvidos durante o estudo do capítulo a assuntos pertinentes à Economia e também se familiarizem com esse tipo de investimento financeiro.
- Após a leitura pelos alunos das informações presentes nessa seção, proponha as perguntas a seguir.
  - Você conhece ou já ouviu falar sobre o sistema de consórcios?
  - Que momento do sistema de consórcio relaciona-se ao conceito de probabilidade?
  - Um indivíduo que adquiriu um consórcio terá sempre a mesma probabilidade de ser contemplado com uma carta de crédito?

Com essas questões, espera-se que os alunos percebam que o conceito de probabilidade está presente no momento do sorteio de uma cota, o que ocorre todos os meses. E que, conforme os meses vão passando, a probabilidade de um indivíduo ser sorteado aumenta, já que as cotas contempladas por sorteio ou lance são retiradas do grupo.

CAPÍTULO 3 Estatística

Páginas 86 e 87

- Para iniciar os trabalhos dessas páginas, forme grupos com três a quatro integrantes e solicite aos alunos a leitura das informações apresentadas e discutam sobre elas. Oriente-os a responder às questões propostas, anotando as respostas no caderno. Outras questões podem ser relevantes para iniciar uma discussão:
  - Qual é o principal assunto abordado nessas páginas?
  - Você faz uso consciente da água?
  - Se a maior parte da superfície do planeta é coberta de água, a preocupação mundial com o desperdício desse recurso se justifica? Explique sua opinião.
  - Que outras áreas do conhecimento também podem abordar assuntos referentes à água? Converse com seus colegas sobre esse ponto.

Verifique se as respostas dadas ao item **c** estão corretas, pois trata-se de uma questão de caráter interpretativo. Com relação à questão **a**, incentive os alunos a argumentar sobre a importância do consumo consciente de água e de evitar desperdícios. Se surgirem dúvidas durante essas discussões, permita, se possível, que sejam respondidas por alunos de outros grupos.

BNCC

Este conteúdo permite aos alunos perceber que a Matemática pode ser utilizada para compreender e representar informações de outras áreas do conhecimento. No infográfico apresentado na página **87**, as representações gráficas de dados estatísticos foram necessárias para apresentar dados referentes à quantidade de água consumida na produção de alguns produtos, desenvolvendo, assim, a **Competência específica 1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, mais especificamente a habilidade **EM13MAT102**.

Planejamento individual e coletivo

O tema água pode ser abordado por diversos componentes curriculares, preferencialmente **Geografia**, **Biologia** e **Química**. Como o enfoque do tema dessas páginas é a utilização da água, tanto para consumo quanto para a produção, aproveite para desenvolver um trabalho em parceria com o professor do componente curricular **Química**. Os alunos podem pesquisar sobre as propriedades da água, como a solubilidade, que permite que ela seja consumida de maneira direta e indireta pelo ser humano. A água possui diversas utilidades, devido às suas características e propriedades, como ser uma substância insípida, incolor, inodora, ter grande facilidade de produzir misturas, realizar o transporte de substâncias e causar esfriamento de equipamentos, além de ser considerada um solvente universal, pela capacidade de dissolver inúmeras substâncias.

Complemente as informações dizendo que, apesar de grande parte do planeta ser coberto por água, a maior parte dessa água não é disponível para uso. Diga também que o objetivo é mostrar que, além do consumo direto, a água é consumida indiretamente pelas pessoas, devido à sua utilidade em bens ou serviços. Ao vestirmos uma calça *jeans* e uma camiseta de algodão, por exemplo, consumimos, indiretamente, 10 500 L de água.

O termo "água virtual" foi criado para fazer referência a esse consumo indireto, como os valores apresentados no infográfico da página **87**. No caso da agricultura, a "água virtual" é a quantidade de recurso hídrico consumida na produção de determinado cultivo (sendo expressa em m^3/ton). Esse cálculo é de grande importância para a avaliação da viabilidade das culturas. A China, por exemplo, importa cerca de 18 milhões de toneladas de soja por ano, quantidade que exige um consumo aproximado de 33,75 bilhões de litros de "água virtual", recurso hídrico que o país não possui.

Páginas 88 e 89

- Uma sugestão de trabalho com o conteúdo proposto na introdução desse capítulo é pedir aos alunos que leiam individualmente as informações contidas em cada página. Em seguida, faça oralmente algumas perguntas em relação às informações da página **88**.
  - De que maneira estão representadas as informações contidas nessa página?
  - Qual é o assunto tratado nos gráficos e na tabela dessa página?
  - Quais tipos de gráficos estão representados nessa página?

  Depois, peça a eles que respondam no caderno:
  - Qual é o país que mais enviou turistas para o Brasil em 2018?
  - A quantidade total de bolsas integrais oferecidas pelo ProUni, em 2019, nas regiões Norte, Nordeste, Centro-Oeste e Sul é maior ou menor do que a quantidade de bolsas integrais oferecidas na região Sudeste? Em sua opinião, por que há essa diferença?
  - Analisando o gráfico de setores, o que você pode concluir?

Pergunte aos alunos se eles sabem o que é ProUni e, caso não saibam, diga-lhes que ProUni significa Programa Universidade para Todos e é promovido pelo governo brasileiro. Esse programa tem como finalidade a concessão de bolsas de estudos integrais e parciais em cursos de graduação em instituições privadas de Ensino Superior.

Avaliação

Como proposta de avaliação diagnóstica, peça aos alunos que escrevam um resumo sobre o que entenderam acerca do infográfico referente à Carteira de Trabalho e Previdência Social assinada, apresentado na página **89**. Em seguida, escolha três alunos para lerem em voz alta o que escreveram.

Essa dinâmica tem como objetivo verificar a compreensão dos alunos acerca das informações apresentadas nas páginas, bem como resgatar seus conhecimentos em relação aos conteúdos estudados anteriormente, analisar e interpretar os dados e conhecer os tipos de gráficos apresentados.

Para aprofundar

Além de conter informações sobre o ProUni, o *link* a seguir traz uma seção sobre o Sistema de Seleção Unificada (Sisu) e o Fundo de Financiamento Estudantil (Fies).

BRASIL. O que é o ProUni. *Ministério da Educação.* Disponível em: <http://siteprouni.mec.gov.br>. Acesso em: 25 jun. 2020.

Página 90 Conversando

- Em relação ao infográfico da página **90**, peça-lhes que leiam as informações e faça algumas perguntas oralmente, tais como:
  - Cite outros benefícios que a Carteira de Trabalho e Previdência Social pode proporcionar ao trabalhador.
  - Quais são as fases das pesquisas para obter dados estatísticos?
- Após propor os itens **a** e **b**, aproveite a oportunidade para verificar como os alunos têm acesso às informações, se leem jornais e revistas regularmente, se assistem a programas de televisão ou se têm acesso à internet. Nesse momento, comente com eles sobre a importância do hábito da leitura para nos manter informados. Diga-lhes que é necessário sempre ficarmos atentos à veracidade das informações que obtemos, uma vez que, apesar de existirem fontes sérias e confiáveis que se baseiam em pesquisas e estudos estatísticos para nos informar, há também meios não confiáveis com informações manipuladas intencionalmente ou não.

- No item **d**, comente com os alunos que a Estatística pode ser empregada como ferramenta fundamental em várias outras ciências, como na Medicina, fornecendo metodologia adequada para possibilitar a decisão sobre a eficiência de um novo tratamento no combate a determinada doença; no estudo da evolução e incidência de uma epidemia; na área tecnológica, para apontar problemas relacionados ao cálculo de posição de uma astronave, cuja solução depende de conceitos e teorias estatísticas mais avançadas; na agricultura, no aprimoramento de produtos agrícolas etc.

Páginas 91 e 92

BNCC

O conteúdo que começa a ser tratado nessas páginas, população e amostra, introduz conceitos importantes que serão trabalhados durante o capítulo. Nesse momento, é importante que os alunos consigam analisar gráficos e amostras de pesquisas estatísticas, bem como interpretar as informações apresentadas neles. Desse modo, poderão desenvolver a habilidade **EM13MAT102**.

Metodologias e estratégias ativas

Utilize a metodologia da **Sala de aula invertida** para trabalhar com os alunos esse conteúdo. Para isso, solicite antecipadamente que eles leiam, em casa, o conteúdo das duas páginas e que anotem no caderno a definição para população e para amostra, em Estatística. Durante a aula, promova uma discussão sobre os pontos principais e as anotações que eles fizeram, questionando-os também sobre as características de amostragem apresentadas (aleatória, sistemática e estratificada).

Página 94

- Para complementar as informações básicas necessárias para a realização de uma pesquisa eleitoral, informe aos alunos que os resultados são apresentados com uma margem de erro amostral, ou seja, quando uma pesquisa divulga que um candidato obteve 28% das intenções dos votos, com margem de erro de 2 pontos percentuais, significa que existem chances do candidato obter entre 26% e 30% dos votos.

  Em relação às sondagens ou enquetes realizadas em *sites* e redes sociais sobre intenções de votos dos eleitores, comente com os alunos que elas não são consideradas como pesquisas, pois não há controle em relação a quem vai respondê-las. Por esse motivo, os resultados poderão estar distorcidos. Além disso, de acordo com a Lei nº 9.504 de 1997, é proibida a realização de enquetes relacionadas ao processo eleitoral no período de campanha eleitoral.

Página 97

BNCC

A tarefa **R1** permite o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT406**, pois os alunos são levados a expressar o resultado de uma pesquisa no formato de uma tabela de frequências e, a partir dela, determinar a quantidade de espécies de vertebrados ameaçados de extinção. Essa tarefa também contempla a **Competência específica 4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, ao utilizar a representação matemática em formato de tabela de frequência para buscar a solução da tarefa.

Páginas 98 e 99 **Acesso digital**

- Nessa seção foi utilizada a versão 6.4.2.2 do Calc do LibreOffice, um programa de planilhas eletrônicas. Para realizar o *download* e instalá-lo, acesse o *link* <http://pt-br.libreoffice.org>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- Respostas dessa seção na página **226**.

BNCC

Com essa seção é possível desenvolver a **Competência específica 5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, no momento em que os alunos fazem experimentações e observam padrões a partir do *software* Calc.

Página 100

- Ao propor a tarefa **7**, complemente as informações, apresentando aos alunos o texto a seguir.

Comunidades Quilombolas

As comunidades quilombolas são grupos com identidade cultural própria e se formaram por meio de um processo histórico que começou nos tempos da escravidão no Brasil. Elas simbolizam a resistência a diferentes formas de dominação. Essas comunidades mantêm forte ligação com sua história e trajetória, preservando costumes e cultura trazidos por seus antepassados.

A identificação de uma pessoa como quilombola é autodeclaratória [...]

BRASIL. Ministério da Cidadania. *Comunidades Quilombolas*. Disponível em: <http://mds.gov.br/assuntos/seguranca-alimentar/direito-a-alimentacao/povos-e-comunidades-tradicionais/comunidades-quilombolas>. Acesso em: 26 jun. 2020.

Planejamento individual e coletivo

Aproveite a oportunidade para desenvolver um trabalho sobre as comunidades quilombolas, em parceria com o professor do componente curricular **História**. Explique aos alunos que no alto da Serra da Barriga, em Alagoas, encontra-se o Parque Memorial Quilombo dos Palmares, que reconstitui o cenário de umas das mais importantes histórias de resistência à escravidão: o Quilombo dos Palmares – o maior, mais duradouro e mais organizado refúgio de negros escravizados das Américas e onde viveu Zumbi dos Palmares.

Ainda sobre esse trabalho, peça aos alunos que, por último, façam uma pesquisa sobre a matemática que os quilombolas utilizam em seu dia a dia, como para qualificar, quantificar e medir. Muitas das comunidades quilombolas se sustentam com a venda de farinha da mandioca, que eles mesmos plantam, colhem, processam e comercializam. Para delimitar a medida da área de plantio, existem comunidades que utilizam uma vara como unidade de medida, já que não conhecem o sistema métrico convencional.

Após a pesquisa, peça aos alunos que apresentem o que encontraram de interessante sobre a vida e a matemática que as comunidades quilombolas utilizam.

Esse tipo de trabalho está relacionado com a proposta educacional Etnomatemática, ao levar o aluno a conhecer e respeitar outras culturas e desenvolver a criatividade.

> *[...]*
>
> *Etnomatemática é a matemática praticada por grupos culturais, tais como comunidades urbanas e rurais, grupos de trabalhadores, classes profissionais, crianças de uma certa faixa etária, sociedades indígenas, e tantos outros grupos que se identificam por objetivos e tradições comuns aos grupos.*
>
> *[...]*
>
> D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. p. 9.

Outra sugestão para se trabalhar com a comunidade quilombola é levar os alunos até uma comunidade a fim de realizar uma pesquisa de campo. Para isso, procure se informar se há alguma por perto, se aceitam visitas e depois planeje os materiais que os alunos precisam levar, o meio de transporte que vão utilizar e prepare um roteiro sobre o que os alunos devem anotar, perguntar e analisar.

Para aprofundar

O endereço eletrônico abaixo acompanha a agenda quilombola e traz informações sobre a certificação de comunidades quilombolas.

BRASIL. *Palmares fundação cultural*. Disponível em: <http://www.palmares.gov.br>. Acesso em: 26 jun. 2020.

Metodologias e estratégias ativas

A tarefa **9** permite estabelecer relação entre os conceitos de Estatística e assuntos referentes a hábitos saudáveis e bem-estar do corpo abordados, preferencialmente, pelo componente curricular **Biologia**. No caso apresentado nesse tópico, conceitos de distribuição de frequência foram necessários para se organizar informações relacionadas à quantidade de refeições diárias realizadas por uma amostra populacional. Se julgar conveniente, aproveite esse tema para solicitar aos alunos que elaborem seminários, propondo a confecção de cartazes com dados estatísticos e gráficos, a fim de apresentarem aos demais colegas do colégio. Para isso, utilize a metodologia de **Gallery walk**. Distribua os alunos em grupos de três a quatro integrantes e deixe que escolham o tema sobre o qual cada pesquisa será feita. Algumas possibilidades de temas relacionados são:

- A relação entre quantidade de fumantes e mortes por doenças respiratórias no Brasil.
- A frequência com que determinado grupo vai ao médico, incluindo homens e mulheres.
- A prática de atividade física relacionada à qualidade de vida.

Página 106

BNCC

Ao tratar do texto informativo a respeito do Enem no final da página, assim como em outros momentos desse capítulo, é possível desenvolver o trabalho com a **Competência geral 6**, relacionando os conceitos apresentados com os projetos de vida dos alunos. Para isso, comente com eles que o ingresso no Ensino Superior faz parte do projeto de vida de muitos estudantes, e que discutir os diferentes processos de seleção para uma vaga em uma universidade pode ser uma etapa importante na decisão e na preparação para o ingresso em uma universidade.

Página 108

- Após a resolução do item **c** da tarefa **14**, comente com os alunos que o turismo é uma das atividades econômicas que mais crescem no Brasil e no mundo, movimentando, direta ou indiretamente, a economia, gerando renda, criando opções de lazer para a população, auxiliando na diminuição do desemprego, além de constituir uma ferramenta importante para o resgate histórico e cultural de comunidades.

  Os atrativos turísticos, por sua vez, criam possibilidades para a revitalização da identidade cultural, além da preservação de patrimônios, bens culturais, tradições e costumes da população local, incentivando a participação da comunidade no desenvolvimento da atividade turística e, consequentemente, da sociedade.

Planejamento individual e coletivo

A tarefa **15** possibilita ao aluno aplicar os conhecimentos desenvolvidos durante o estudo do capítulo em um contexto relacionado ao planejamento familiar, tema comumente abordado pelo componente curricular **Geografia**, no estudo das populações e densidade demográfica. Nesse caso, conceitos de frequência e média aritmética foram necessários para representar dados acerca da quantidade de filhos de algumas famílias. Assim, espera-se que o aluno aprofunde os conhecimentos desenvolvidos durante o estudo do capítulo e saiba mais sobre a transformação da natalidade ao longo do tempo.

Página 110

- Uma sugestão para introduzir o conteúdo Moda é realizar na sala de aula, com envolvimento de todos os alunos, uma atividade prática semelhante à apresentada. Para isso, reúna os alunos em dois grupos e solicite a eles que construam um quadro com a idade de cada integrante do grupo. Depois, faça algumas perguntas, como:
  - Os dados coletados possuem moda? Se possuírem, qual é?
  - Nesse caso, apareceu mais de uma moda? Se sim, quais são as outras modas?
  - Outra sugestão é solicitar aos alunos que construam quadros sobre outros temas, como: o número do seu calçado, sua comida preferida, sua cor preferida. Em seguida, realize as perguntas sugeridas acima.

  Se julgar conveniente, utilize a mesma dinâmica ao introduzir o conteúdo Mediana.

Página 113

BNCC

As tarefas **25** e **26** permitem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT316**, pois envolvem a resolução de problemas, em contextos variados, a partir do cálculo e interpretação das medidas de tendência central (Média, Moda e Mediana). Além disso, a tarefa **25** está relacionada com a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, ao solicitar aos alunos que utilizem conceitos matemáticos para resolver o problema, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Página 117

- A pesquisa proposta no final dessa página tem por objetivo levar os alunos a trabalhar com a análise de reportagens, gênero textual jornalístico, a fim de avaliarem se há fragilidades argumentativas, tanto no texto verbal quanto em textos não verbais, como as representações numéricas e gráficas.

  Oriente-os a pesquisar as reportagens em fontes confiáveis e, preferencialmente, imparciais, como *sites* oficiais do governo ou até mesmo *sites* de notícias. Após a seleção dos textos, peça aos alunos que verifiquem se as informações apresentadas foram baseadas em pesquisas oficiais ou de institutos de pesquisa renomados. Essa análise auxilia a verificar se os dados são confiáveis.

  Pergunte aos alunos se o texto apresenta a fala de especialistas, se existem incoerências dentro da reportagem e se os dados possuem alguma generalização indevida ou ainda distorções nas escalas ou na escolha do tipo de gráfico mais apropriado para representar os dados, avaliando, assim, a força e a qualidade dos argumentos apresentados pelo jornalista em seu texto.

Página 118

BNCC

Na tarefa **34**, verifique se os alunos perceberam que, observando o gráfico, pode-se notar um aumento de aproximadamente 20 vítimas de um ano para o outro. Dessa maneira, a afirmação feita pelo apresentador não é razoável de acordo com os dados do gráfico. Esse tipo de tarefa é uma boa oportunidade para desenvolver a habilidade **EM13MAT102** com os alunos, no que se refere aos erros de interpretação. Comente com eles que, nesse caso, a confusão se dá em virtude da quebra da escala, alterando o tamanho verdadeiro das barras. Assim, apenas comparando as barras, tem-se a impressão de que a quantidade de atropelamentos de um ano para o outro parece ter duplicado, o que não se comprova ao observarmos os dados numéricos.

Página 120

BNCC

O contexto da tarefa **35** está relacionado ao tema contemporâneo transversal **Educação ambiental**. Aproveite para explicar para os alunos que a importância de reciclar alumínio está nos benefícios para o meio ambiente e também para o país, pois promove a economia de matéria-prima e energia elétrica, reduzindo também a quantidade de lixo destinada aos aterros sanitários. Além de tudo, colabora para a redução da taxa de desemprego, pois a reciclagem gera renda para milhares de pessoas. Destaque que o alumínio é o tipo de material com maior porcentagem de reciclagem no Brasil, chegando a ser quase 100% reciclado, conforme apresentado no gráfico.

Planejamento individual e coletivo

O enunciado da tarefa **36** traz informações relacionadas ao desemprego no Brasil, assunto normalmente abordado pelo componente curricular **Geografia**. Para interpretar as informações apresentadas em um gráfico de linhas, o aluno vai precisar dos conhecimentos desenvolvidos durante o estudo do capítulo.

Para complementar o desenvolvimento do trabalho durante a realização dessa tarefa **36**, faça algumas perguntas, como:

- Entre quais meses consecutivos de cada um dos anos apresentados houve a maior redução percentual na quantidade de pessoas desocupadas?
- Podemos afirmar que havia uma maior quantidade de pessoas desocupadas em 2018 em relação a 2019? Por quê?
- Que medidas você acredita que possam ser tomadas pela sociedade visando diminuir a taxa de desocupação?

Promova um debate em relação a esse assunto, informando que uma das medidas a ser tomada é a qualificação profissional, visto que em algumas áreas é necessário importar mão de obra. Outra medida é a criação de emprego formal, que garante direitos trabalhistas e previdenciários. Esse tema permite que os alunos entendam as relações próprias do mundo do trabalho e façam escolhas alinhadas ao seu projeto de vida.

Página 121

BNCC

O tema tratado nessa página, o efeito estufa e o aquecimento global, possibilita o desenvolvimento da **Competência geral 10** com os alunos, no que diz respeito à tomada de decisões com base em princípios democráticos e sustentáveis. Para isso, comente com eles que, entre os conceitos de sustentabilidade, há o objetivo de reduzir a emissão dos gases do efeito estufa, com diversas medidas ambientais, políticas, econômicas e sociais. O efeito estufa é um processo que ocorre quando parte da radiação do Sol (percebida como calor), que atinge a superfície da Terra, é refletida e bloqueada por Gases de Efeito Estufa (GEE), gerando mais calor.

No campo das ações políticas, por exemplo, podemos citar os investimentos em projetos que pretendam desenvolver filtros mais potentes para as emissões de CO_2 e gás metano industriais. Já no campo geológico, podemos destacar a importância da restauração de áreas degradadas, bem como a preservação dos ecossistemas do planeta.

Página 124

BNCC

O contexto da tarefa **37** traz informações a respeito dos principais usos da água no Brasil: abastecimento humano (urbano e rural), abastecimento animal, indústria de transformação, mineração, termeletricidade, irrigação e evaporação líquida de reservatórios artificiais. Nesse contexto, a **Competência geral 7** pode ser trabalhada com os alunos, pois possibilita que desenvolvam a capacidade de argumentar, com base em informações confiáveis, a respeito do consumo responsável de água. Para isso, verifique se eles têm consciência da importância da água, recurso fundamental para os mais diversos fenômenos: desenvolvimento de uma cidade, processos de produção de indústrias, uso na agricultura etc.

- A tarefa **38** propõe aos alunos que identifiquem, no gráfico de setores apresentado, inadequações que possam comprometer a interpretação dos dados. A proposta do item **c** sugere aos alunos que analisem, de modo crítico e sob o ponto de vista matemático, textos publicados pelos meios de comunicação, a fim de que possam constatar se as informações e elementos são verídicos, não distorcidos e imparciais.

Página 126

Planejamento individual e coletivo

O tema da tarefa **42** permite estabelecer relação com o componente curricular **Biologia**, abordando estatística no contexto de desnutrição e obesidade humana. No caso, calculou-se o IMC (Índice de Massa Corporal) de uma amostra de pessoas e os dados resultantes foram organizados e apresentados utilizando conceitos de frequência absoluta, frequência relativa, intervalo de classe e histograma.

Página 129

BNCC

Tão importante como aprender a construir um *box plot* é saber fazer sua interpretação, conforme orienta a habilidade **EM13MAT407**. Durante a exploração desse tema, comente com os alunos que esse tipo de gráfico auxilia a visualizar a mediana, a dispersão e a simetria de um conjunto de dados. Além disso, é excelente para identificar *outliers*, que podem ser erros de observação ou de arredondamento.

Página 131

BNCC

A tarefa **47** permite o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT407**, uma vez que os alunos são levados a interpretar um conjunto de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas, além de identificar qual é o mais eficiente para sua análise.

Avaliação

Ao final do trabalho com esse tópico, verifique se os alunos compreenderam a importância de observar se existem inadequações em gráficos divulgados que possam causar erros de interpretação. Solicite aos alunos que pesquisem e levem para a sala de aula gráficos divulgados em programas de televisão, *sites* de notícias e redes sociais e que procurem por inadequações nesses gráficos.

Algumas possibilidades de trabalho com esses gráficos são pedir para os alunos trocarem os gráficos entre eles e procurarem inadequações nos gráficos trazidos pelos colegas, ou então apresentarem os gráficos com inadequações para a turma. Também é possível propor uma discussão sobre os motivos pelos quais as manipulações podem ter sido feitas, ou então propor aos alunos que façam manipulações nos gráficos com objetivo de interferir na interpretação, e propor aos colegas que identifiquem quais foram as interferências feitas.

Páginas 132 e 133 Explorando problemas

- O trabalho com essa seção permite o desenvolvimento do pensamento computacional do aluno ao resolver o problema proposto por meio das etapas **compreender** o problema, **planejar** uma possível estratégia de resolução, **executar** a resolução e, por último, **verificar o resultado**.

Páginas 140 e 141 Saiba mais

BNCC

Após os alunos lerem o texto e as informações contidas nessa seção e responderem aos itens **a** e **b**, oriente-os na resolução do item **c** quanto à elaboração da pesquisa. Para isso, reúna-os em grupos de três a quatro integrantes, e oriente-os na escolha de um tema ou questão relevante para traçar os primeiros caminhos.

Se possível, reproduza as fichas de pesquisa que se encontram nas **Páginas para reprodução** desta Assessoria pedagógica para orientar os alunos durante a organização, o registro e a conclusão da pesquisa.

Explique aos alunos que a primeira ficha eles podem usar para organizar as informações da pesquisa, como o tema, as questões que serão pesquisadas e outras informações importantes. Além disso, nessa ficha devem ser registrados os dados obtidos na pesquisa e os cálculos necessários para a conclusão e o relatório da pesquisa.

Na segunda ficha, deve ser elaborado o relatório da pesquisa, com o tema da pesquisa, uma explicação dos motivos e objetivos da pesquisa e outras informações importantes. Em seguida, nos locais indicados, deve ser escrito um resumo dos dados obtidos e dos resultados analisados, seguido de uma representação gráfica para facilitar a visualização dos dados e resultados. No final, devem ser relatadas as conclusões obtidas com a pesquisa, indicando se o objetivo foi atingido e explicando os resultados. Caso seja possível, o relatório também pode conter propostas de intervenção sobre o tema pesquisado com base nas conclusões a que chegaram.

Combine com os alunos uma maneira de apresentar os relatórios produzidos para os colegas, verificando se as informações contidas em cada relatório são suficientes para apresentar com clareza os resultados da pesquisa realizada.

Nessa tarefa, os alunos desenvolvem a habilidade **EM13MAT202** ao executar uma pesquisa a partir de uma questão relevante em todas as suas etapas. Além disso, eles estarão desenvolvendo outras habilidades, como a organização e a gestão do tempo e, ainda, a tomada de decisões relacionadas às conclusões obtidas na pesquisa, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática, o que se relaciona com a **Competência específica 2** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

- Ao realizar o trabalho com essa seção, planeje uma visita guiada a um centro de pesquisa como abordado na seção. Assim os alunos perceberão a importância de uma pesquisa fidedigna e uma execução em fases.

Página 142

- Para complementar o assunto apresentado nessa página, diga aos alunos que os aparelhos elétricos de nosso dia a dia proporcionam muitas facilidades, mas também podem gerar problemas, como o consumo excessivo de energia elétrica. Por isso, o consumo consciente deve partir de todos: desligue as luzes e os aparelhos de ambientes vazios; substitua lâmpadas incandescentes por LED; tome banhos rápidos; não deixe aparelhos no modo *standby*; prefira eletrodomésticos com o selo Procel; evite colocar alimentos quentes na geladeira.

Se necessário, diga aos alunos que o selo Procel é um produto desenvolvido e concedido pelo Programa Nacional de Conservação de Energia Elétrica (Procel), cujo objetivo é orientar o consumidor no ato da compra, recomendando os produtos que possuem melhores níveis de eficiência energética, além de estimular a fabricação e a comercialização de produtos mais eficientes.

Página 145

BNCC

O tópico desenvolvido a partir dessa página explora o reconhecimento de eventos equiprováveis ou não, assim como possíveis implicações no cálculo de probabilidades. Dessa maneira, a habilidade **EM13MAT511** está parcialmente contemplada.

Páginas 148 e 149 Saiba mais

Planejamento individual e coletivo

Essa seção trata da utilização das medidas de tendência central em notícias que necessitam apresentar informações de dados estatísticos. Com base em vários exemplos, mostra-se que muitas vezes a ferramenta escolhida, entre média, moda e mediana, por exemplo, busca apresentar a notícia de maneira impactante, o que pode causar uma interpretação errônea pelo leitor. Com isso, espera-se que os conhecimentos desenvolvidos durante o estudo do capítulo auxiliem o aluno a reconhecer essas ferramentas matemáticas em textos, assim como a interpretar essas informações de maneira correta. Assuntos como esse podem ser abordados também pelo componente curricular **Sociologia**, em discussões sobre cultura e relação entre sociedade e meios de comunicação em massa, que visam muitas vezes à conscientização do aluno sobre as possíveis alienações que os veículos de divulgação de notícias podem causar. Uma sugestão para complementar o trabalho com essa seção é levar para a sala de aula algumas informações, publicadas em jornais, revistas e internet, cujos dados estejam apresentados de maneira equivocada, gerando dupla interpretação. Com o material em mãos, reúna os alunos em grupos e distribua a cada grupo uma das reportagens, a fim de que a leiam, interpretem e analisem seus dados, verificando se há algum tipo de incoerência.

Organize um debate entre os alunos para que cada grupo apresente ao restante da sala a reportagem analisada e suas conclusões.

Páginas 150 e 151 Conectando ideias

Planejamento individual e coletivo

Desastres aéreos é o tema principal dessa seção, na qual podemos obter informações sobre suas principais causas, bem como observar uma comparação entre esses eventos e os acidentes em outros meios de transporte. Assuntos como esses podem ser abordados também pelo componente curricular **Geografia**, no tratamento de desastres e acidentes, com o intuito de estudar as alterações causadas e também os índices comparativos, no tratamento de mapas, índices e taxas. No caso, conceitos estatísticos, como distribuição de frequência, representação de dados estatísticos e medidas de tendência central, são necessários para apresentar e compreender dados sobre esses desastres. Espera-se que esses conceitos favoreçam a compreensão de que, apesar de muitas vezes um desastre aéreo impressionar pela maneira que ocorre e pela alta quantidade de vítimas fatais resultante de um único acidente, esse fato não supera a quantidade de acidentes de trânsito e vítimas fatais que ocorrem todo ano no Brasil.

Peça aos alunos que leiam as informações contidas no infográfico e, antes de resolverem os itens **a** e **b**, respondam às questões a seguir.

- Apesar de os desastres aéreos comoverem a opinião pública, explique por que viajar de avião ainda é um meio de transporte seguro.
- Cite duas das principais causas de acidentes aéreos.
- Em quais dos anos citados ocorreu a maior e a menor quantidade de acidentes aéreos no Brasil?
- De acordo com os dados apresentados na tabela, compare a quantidade de vítimas fatais em acidentes aéreos e em acidentes de trânsito. A que conclusão você pode chegar?
- Na operação de uma aeronave, entre a decolagem e o pouso, em que momento há maior chance de ocorrer um acidente?
- Analisando as informações apresentadas, a que conclusões você pode chegar em relação às viagens aéreas?

Complemente o assunto realizando um debate com os alunos acerca das respostas dadas e, caso surja alguma dúvida, esclareça-a.

Para aprofundar

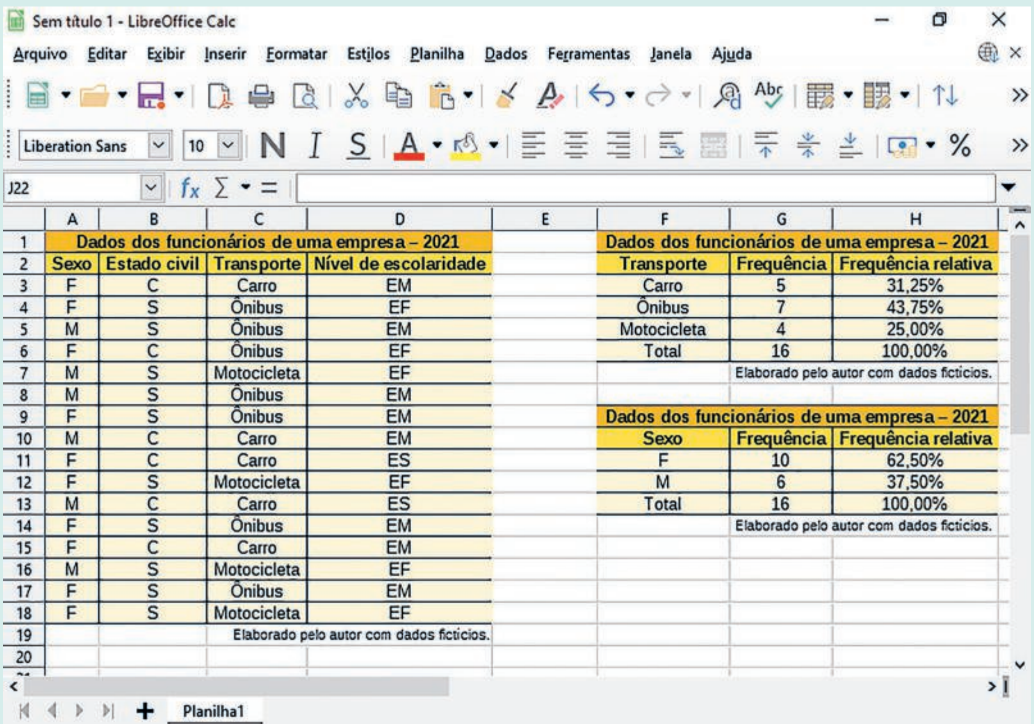
Obtenha informações do setor de aviação civil com dados e estatísticas sobre aeronaves, aeroportos, segurança operacional, drones e muito mais no *link* a seguir.

AGÊNCIA NACIONAL DE AVIAÇÃO CIVIL – Anac. Disponível em: <https://www.anac.gov.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.

No endereço eletrônico a seguir, há dados completos e estatísticas de acidentes aeronáuticos da aviação civil e da Força Aérea Brasileira.

CENTRO DE INVESTIGAÇÃO E PREVENÇÃO DE ACIDENTES AERONÁUTICOS – Cenipa. Disponível em: <http://www2.fab.mil.br/cenipa>. Acesso em: 26 jun. 2020.

• Resposta da seção **Acesso digital** das páginas **98** e **99**.

a) 

Dados dos funcionários de uma empresa – 2021			
Sexo	Estado civil	Transporte	Nível de escolaridade
F	C	Carro	EM
F	S	Ônibus	EF
M	S	Ônibus	EM
F	C	Ônibus	EF
M	S	Motocicleta	EF
M	S	Ônibus	EM
F	S	Ônibus	EM
M	C	Carro	EM
F	C	Carro	ES
F	S	Motocicleta	EF
M	C	Carro	ES
F	S	Ônibus	EM
F	C	Carro	EM
M	S	Motocicleta	EF
F	S	Ônibus	EM
F	S	Motocicleta	EF

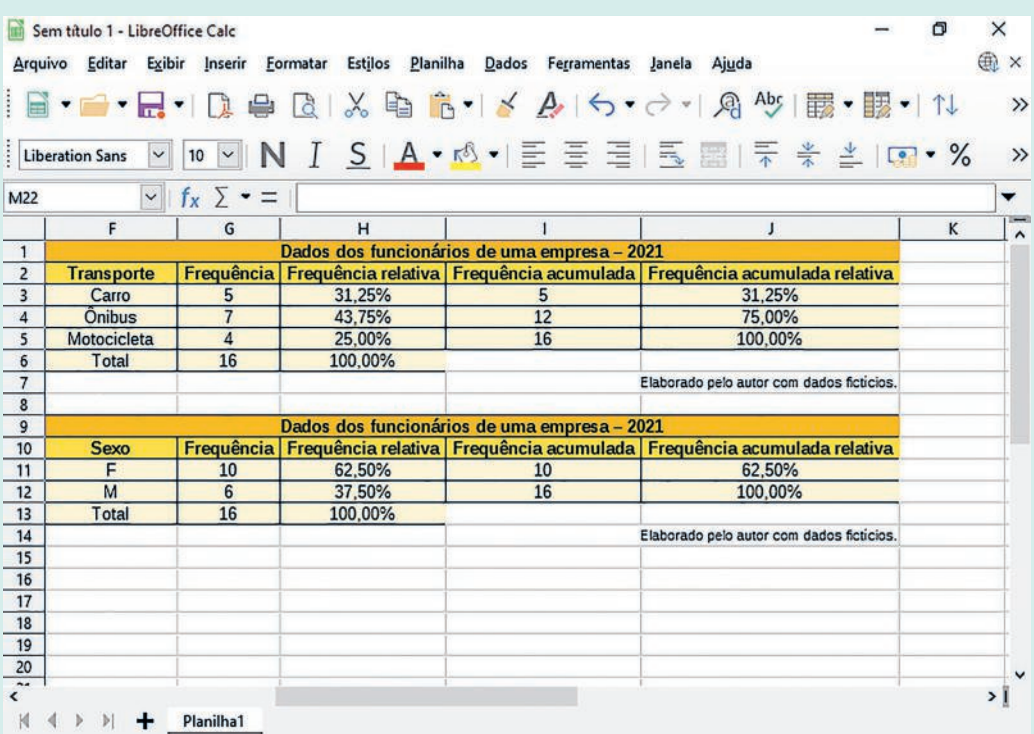
Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Dados dos funcionários de uma empresa – 2021		
Transporte	Frequência	Frequência relativa
Carro	5	31,25%
Ônibus	7	43,75%
Motocicleta	4	25,00%
Total	16	100,00%

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Dados dos funcionários de uma empresa – 2021		
Sexo	Frequência	Frequência relativa
F	10	62,50%
M	6	37,50%
Total	16	100,00%

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

b) 

Dados dos funcionários de uma empresa – 2021				
Transporte	Frequência	Frequência relativa	Frequência acumulada	Frequência acumulada relativa
Carro	5	31,25%	5	31,25%
Ônibus	7	43,75%	12	75,00%
Motocicleta	4	25,00%	16	100,00%
Total	16	100,00%		

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

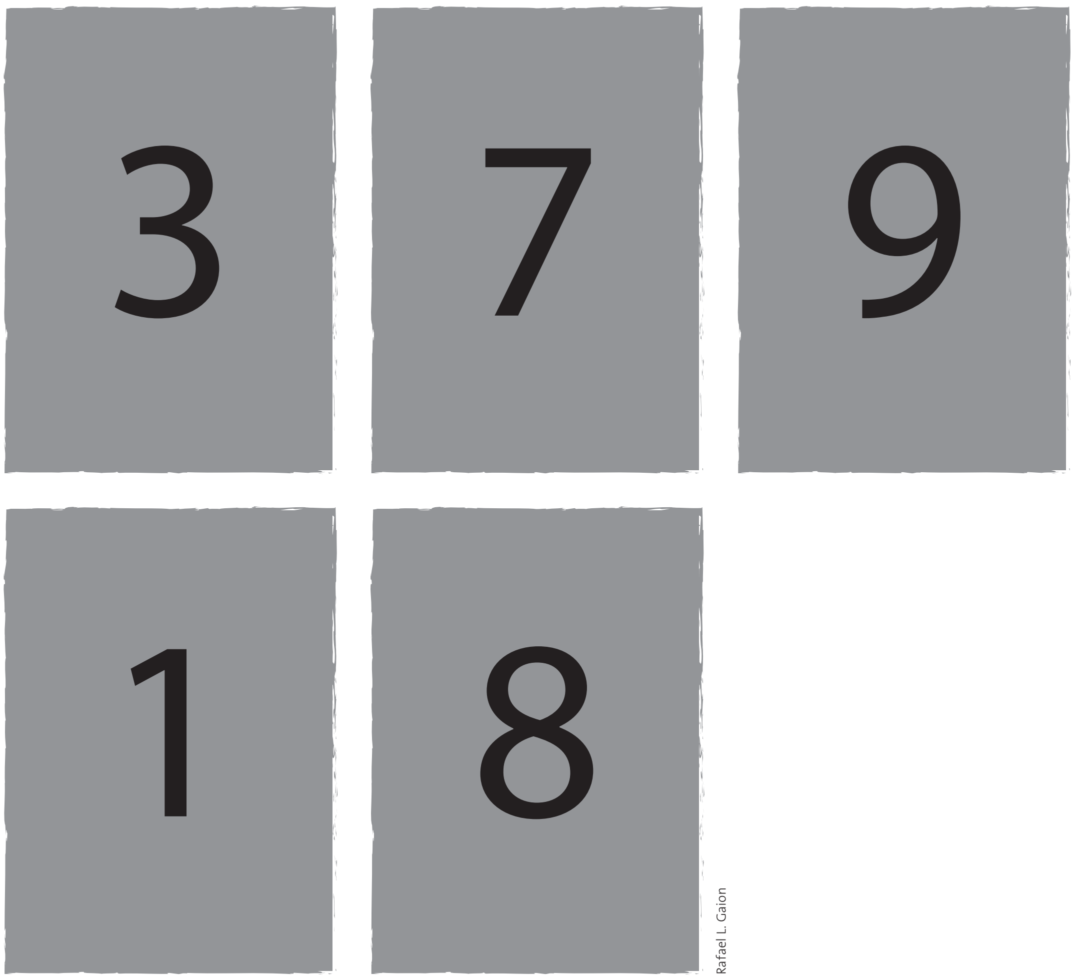
Dados dos funcionários de uma empresa – 2021				
Sexo	Frequência	Frequência relativa	Frequência acumulada	Frequência acumulada relativa
F	10	62,50%	10	62,50%
M	6	37,50%	16	100,00%
Total	16	100,00%		

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Fotos: Reprodução/Libre Office Calc/The Document Foundation

6 Páginas para reprodução

Fichas e quadro



Rafael L. Gaion

Quantidade de algarismos que compõem o número	Quantidade de números distintos que podem ser formados
3	
4	
5	

Ficha de pesquisa

Tema e questões a serem pesquisados

Registro dos dados

Análise dos dados

Tema da pesquisa: ______________________________

Objetivos da pesquisa

____

____

____

Resumo dos resultados obtidos

____

____

____

____

Representação gráfica

Título: ______________________________

Sergio L. Filho

Fonte de pesquisa: ______________________________

Relatório com as conclusões

____

____

____

____

____

____

7 Resolução dos problemas e exercícios

Capítulo 1 Análise combinatória e binômio de Newton

1. Como são 10 possibilidades de modelos de calça, 19 de modelos de camisa, 15 de modelos de *shorts* e 8 de modelos de sapato, temos:

$$10 + 19 + 15 + 8 = 52$$

Portanto, Éder tem 52 possibilidades para comprar uma única peça de roupa.

2. Como havia 22 sacolas com sabonetes, 25 com enfeites para a casa, 30 com doces *gourmet* e 18 com aromatizadores de ambientes, temos:

$$22 + 25 + 30 + 18 = 95$$

Logo, há 95 possibilidades de sacolas.

3. Para cada uma das 6 afirmações, há 2 possibilidades: verdadeira ou falsa. Desse modo:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$$

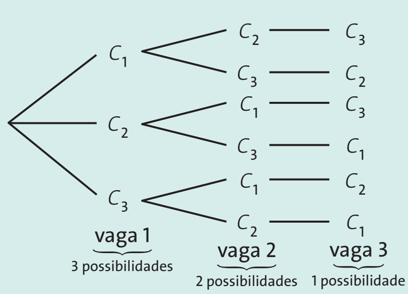
Logo, o teste pode ser respondido de 64 maneiras distintas.

4. Com base no princípio fundamental da contagem, temos: $14 \cdot 6 = 84$. Logo, são 84 maneiras distintas de preparar um sorvete.

5. Resposta pessoal. Possível resposta: Luísa têm 4 opções de recheio para montar um sanduíche, 3 opções de pães e 2 opções de patê. Quantas maneiras diferentes Luísa tem para montar um sanduíche composto de uma opção de recheio, uma opção de pão e uma opção de patê?

6. Com base no princípio fundamental da contagem, temos: $90 \cdot 120 \cdot 60 = 648\,000$. Logo, são 648 000 maneiras diferentes para comprar 3 jogos.

7. a) Considere C_1, C_2 e C_3 os três contratados pela indústria. Assim, podemos representar as possíveis maneiras que as vagas podem ser ocupadas pelos contratados da seguinte maneira:



b) Depois que algum contratado ocupa uma vaga, ele não pode ocupar outra. Assim, temos:

- 3 possibilidades do contratado C_1 ocupar a vaga 1;
- 2 possibilidades do contratado C_2 ocupar a vaga 2;
- 1 possibilidade do contratado C_3 ocupar a vaga 3.

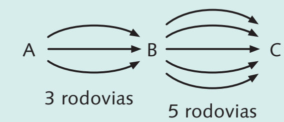
Dessa maneira, o total de maneiras diferentes que as vagas podem ser ocupadas pelos contratados é dada por:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \rightarrow 6 \text{ maneiras}$$

8. Para entrar no estádio, uma pessoa tem 8 possibilidades e para sair essa mesma pessoa tem 7 possibilidades (todos os portões, salvo aquele por onde ela entrou). Desse modo, com base no princípio fundamental da contagem, temos: $8 \cdot 7 = 56$.

Logo, são 56 maneiras distintas de entrar no estádio.

9.



Assim, temos $3 \cdot 5 = 15$

Portanto, há 15 maneiras diferentes para ir da cidade **A** à **C**, passando por **B**.

10. alternativa **b**

Para resolver o problema, vamos calcular o total de possibilidades e subtrair os casos não permitidos, ou seja, aqueles com 3 números iguais:

$$\frac{A}{B} = \frac{\overbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}^{\text{todos}} - \overbrace{5 \cdot 1 \cdot 1}^{\text{3 números iguais}}}{\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{\text{todos}} - \underbrace{4 \cdot 1 \cdot 1}_{\text{3 números iguais}}} = \frac{120}{60} = 2$$

- Resposta pessoal.

11. Com base no princípio fundamental da contagem, temos:

$$\underbrace{26 \cdot 26}_{\text{letras}} \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}_{\text{algarismos}} = 6\,760\,000.$$

Logo, é possível cadastrar 6 760 000 senhas.

12. Sabendo que um número é divisível por 5 quando o algarismo da unidade U é 0 ou 5 e sabendo que devemos excluir o caso quando o primeiro algarismo é zero, temos:

$$U = 0 \Rightarrow 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$
$$U = 5 \Rightarrow 8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$$

Logo, o total de números divisíveis por 5 é 952.

13. a) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) $3 \cdot 0! = 3 \cdot 1 = 3$

c) $5! - 4! = 5 \cdot 4! - 4! = 4!(5 - 1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 = 96$

d) $\dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 720$

e) $\dfrac{8!5!}{7!6!} = \dfrac{8 \cdot 7!5!}{7!6 \cdot 5!} = \dfrac{4}{3}$

f) $\dfrac{8! + 5!}{5!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5! + 5!}{5!} = 337$

g) $\dfrac{9!}{7! - 6!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{7 \cdot 6! - 6!} = 84$

14. a) $13! = 6\,227\,020\,800$

b) $2 \cdot 10! = 7\,257\,600$

c) $8! + 9! = 403\,200$

d) $\dfrac{25!}{18!} = 2\,422\,728\,000$

15. a) $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!} = \dfrac{(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!} = \dfrac{1}{n^2 + n}$

b) $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!} = \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = n^2 - 3n + 2$

c) $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)!} = \dfrac{(n+2) \cdot (n+1)!}{(n+1)!} = n + 2$

d) $\dfrac{(n+2)!}{n! + (n+1)!} = \dfrac{(n+2)(n+1)n!}{n! + (n+1)n!} = n + 1$

e) $\dfrac{(n+1)!}{(n+2)!} \cdot \dfrac{(n+3)!}{n(n+1)!} =$

$= \dfrac{(n+1)!}{(n+2)!} \cdot \dfrac{(n+3)(n+2)!}{n(n+1)!} = \dfrac{n+3}{n}$

f) $\dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{n!} =$

$= \dfrac{(n+1) \cdot n! + (n+2) \cdot (n+1) \cdot n!}{n!} = n^2 + 4n + 3$

16. $\dfrac{(n+2)! + (n+1)(n-1)!}{(n+1)(n-1)!} = 9$

$\dfrac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)! + (n+1)(n-1)!}{(n+1)(n-1)!} = 9$

$(n+2)n + 1 = 9$

$n^2 + 2n + 1 = 9$

$n^2 + 2n - 9 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos dois valores para n, $n = 2$ e $n = -4$.

Portanto, a igualdade é verdadeira para $n = 2$ e $n = -4$.

17. Fazendo as devidas simplificações, obtemos:

$\dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+1)n!} = 2 + 3n - n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(n+2)(n+1)n! + (n+1)n!}{(n+1)n!} = 2 + 3n - n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n + 3 = 2 + 3n - n^2 \Rightarrow n^2 - 2n + 1 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, temos $\Delta = 0$ e, portanto, $n = 1$.

18. Pela definição de fatorial, temos $1! = 1$ e $0! = 1$. Assim:

$(3x^2 - 7)! = 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 7 = 1 \\ \text{ou} \\ 3x^2 - 7 = 0 \end{cases}$

- $3x^2 - 7 = 1 \Rightarrow x^2 - \dfrac{8}{3} = 0 \begin{cases} x_1 = \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \\ x_2 = -\dfrac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases}$
- $3x^2 - 7 = 0 \Rightarrow x^2 - \dfrac{7}{3} = 0 \begin{cases} x_3 = \dfrac{\sqrt{21}}{3} \\ x_4 = -\dfrac{\sqrt{21}}{3} \end{cases}$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =$

$= \dfrac{2\sqrt{6}}{3} + \left(-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right) + \dfrac{\sqrt{21}}{3} + \left(-\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right) = 0$

19. a) $A_{5,3} = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 60$

b) $A_{6,5} = \dfrac{6!}{(6-5)!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!}{1!} = 720$

c) $A_{7,4} = \dfrac{7!}{(7-4)!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 840$

d) $A_{7,3} = \dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 210$

e) $A_{8,6} = \dfrac{8!}{(8-6)!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 20\,160$

f) $\dfrac{A_{10,7}}{A_{6,4}} = \dfrac{\dfrac{10!}{(10-7)!}}{\dfrac{6!}{(6-4)!}} = \dfrac{10!2!}{3!6!} =$

$= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!2!}{3 \cdot 2!6!} = 1680$

20. a) $A_{18,4} = 73\,440$

b) $A_{25,5} = 6\,375\,600$

c) $A_{14,8} = 121\,080\,960$

d) $A_{32,5} = 24\,165\,120$

21. Como serão formados números de 3 algarismos e há 6 algarismos que podem ser escolhidos, temos:

$$A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 120$$

Portanto, podem ser formados 120 números.

22. a) $\dfrac{A_{n-1,n-2}}{A_{n,n-2}} = \dfrac{\dfrac{(n-1)!}{[(n-1)-(n-2)]!}}{\dfrac{n!}{[n-(n-2)]!}} = \dfrac{(n-1)!2!}{1!n!} =$

$= \dfrac{(n-1)! \cdot 2}{n(n-1)!} = \dfrac{2}{n}$

b) $\dfrac{A_{n+1,2} + 2n + 1}{A_{n+1,1}} = \dfrac{\dfrac{(n+1)!}{[(n+1)-2]!} + 2n + 1}{\dfrac{(n+1)!}{[(n+1)-1]!}} =$

$= \dfrac{\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} + 2n + 1}{\dfrac{(n+1)!}{n!}} =$

$= \dfrac{\dfrac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} + 2n + 1}{\dfrac{(n+1)n!}{n!}} =$

$= \dfrac{(n+1)n + 2n + 1}{n+1} = \dfrac{n^2 + 3n + 1}{n+1}$

23. Como são 20 pilotos no total e apenas 3 desses pilotos formam o pódio, temos:

$$A_{20,3} = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{17!} = 6\,840$$

Portanto, o pódio pode ser formado de 6 840 maneiras diferentes.

24. a) Devemos formar um número com 3 algarismos distintos, escolhendo entre 7 algarismos. Então:

$$A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 210$$

Logo, podem ser formados 210 números.

b) São duas as possibilidades para o algarismo das unidades: 6 ou 8. Desse modo:

$$2A_{6,3} = 2 \cdot \frac{6!}{(6-3)!} = 2 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 240 \text{ números}$$

Logo, podem ser formados 240 números.

c) São cinco as possibilidades para o algarismo das unidades: 1, 3, 5, 7 e 9. Desse modo:

$$5A_{6,6} = 5 \cdot \frac{6!}{(6-6)!} = 5 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{0!} =$$

$$= \frac{3\,600}{1} = 3\,600$$

Logo, podem ser formados 3 600 números.

25. Considerando a quantidade total de lápis e a quantidade de regiões a ser pintada, temos:

$$A_{10,5} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 30\,240$$

Portanto, o mapa poderá ser pintado de 30 240 maneiras distintas.

26. a) $A_{26,2} \cdot A_{10,2} = \dfrac{26!}{(26-2)!} \cdot \dfrac{10!}{(10-2)!} =$

$= \dfrac{26 \cdot 25 \cdot \cancel{24!}}{\cancel{24!}} \cdot \dfrac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 650 \cdot 90 = 58\,500$

Portanto, é possível registrar 58 500 livros.

b) $A_{4,2} \cdot A_{10,2} = \dfrac{4!}{(4-2)!} \cdot \dfrac{10!}{(10-2)!} =$

$= \dfrac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} \cdot \dfrac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 12 \cdot 90 = 1\,080$

Portanto, podem ser cadastrados 1 080 livros.

27. Resposta pessoal. Possível resposta: De quantas maneiras distintas Leonardo pode dispor as fotografias nos espaços disponíveis no painel?

28. A escola **A** pode ocupar o 1º, 2º ou 3º lugar, assim temos:

$3A_{18,\,2} = 3 \cdot \dfrac{18!}{(18-2)!} = 3 \cdot \dfrac{18!}{16!} = \dfrac{3 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16!}{16!} = 918$

Portanto, há 918 maneiras de formar o pódio desse campeonato.

29. a) $P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$

b) $\dfrac{P_{10}}{P_8} = \dfrac{10!}{8!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 90$

c) $P_2 \cdot P_5 = 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 240$

d) $\dfrac{A_{7,3}}{P_3} = \dfrac{\dfrac{7!}{(7-3)!}}{3!} = \dfrac{7!}{4!3!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

30. a) Considerando o total de letras da palavra, temos:

$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$

Portanto, são 3 628 800 anagramas no total.

b) Se as letras V, T e R estão sempre juntas, podemos considerá-las uma única letra e permutáveis entre si:

$P_3P_8 = 3!8! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 241\,920$

Logo, são 241 920 anagramas.

c) O total de maneiras para escolher as vogais que iniciam e terminam a palavra é $A_{4,2}$. Determinadas essas vogais, há 8 letras a serem permutadas, ou seja, P_8 anagramas.

$A_{4,\,2} \cdot P_8 = \dfrac{4!}{(4-2)!} 8! = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$

$= 483\,840$

Logo, são 483 840 anagramas.

31. Os números maiores do que 42 815 formados pelos algarismos 1, 2, 4, 5 e 8 são:

- $u > 5$ para um número do tipo "42 81u": nenhuma possibilidade;
- $d > 1$ para um número do tipo "42 8du": 1 possibilidade;
- $c > 8$ para um número do tipo "42 cdu": nenhuma possibilidade;
- $U > 2$ para um número do tipo "4U cdu": $2 \cdot 3! = 12 \rightarrow 12$ possibilidades;
- $C > 4$ para um número do tipo "CU cdu": $2 \cdot 4! = 48$, ou seja, 48 possibilidades.

Assim, temos: 1 + 12 + 48, ou seja, 61 possibilidades no total.

32. Do enunciado, temos:

$$\begin{cases} n! = x \\ (n+1)! = x + 35\,280 \\ (n-1)! = x - 4\,320 \quad \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n! = x & \text{(I)} \\ (n+1)! = x + 35\,280 & \text{(II)} \\ -(n-1)! = -x + 4\,320 & \text{(III)} \end{cases}$$

Adicionando I e III, temos:

$n! - (n-1)! = 4\,320 \Rightarrow$

$\Rightarrow n(n-1)! - (n-1)! = 4\,320 \Rightarrow$

$\Rightarrow (n-1)(n-1)! = 4\,320 \Rightarrow$

$\Rightarrow (n-1)! = \dfrac{4\,320}{n-1}$ (IV)

Adicionando II e III, temos:

$(n+1)! - (n-1)! = 39\,600 \Rightarrow$

$\Rightarrow (n+1)n(n-1)! - (n-1)! = 39\,600 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[(n+1)n - 1\right](n-1)! = 39\,600$ (V)

Substituindo IV em V, temos:

$\left[(n+1)n - 1\right] \cdot \dfrac{4\,320}{(n-1)} = 39\,600 \Rightarrow$

$\Rightarrow (n^2 + n - 1) \cdot 6 = 55(n-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 6n^2 + 6n - 6 = 55n - 55 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6n^2 - 49n + 49 = 0 \begin{cases} n_1 = 7 \\ n_2 = \dfrac{7}{6} \text{ (não convém)} \end{cases}$

Portanto, há 7 livros nessa pilha.

33. Resposta pessoal. Possível resposta: De quantas maneiras diferentes esse grupo poderá se acomodar nessa fileira de modo que o casal fique sempre junto?

34. a) $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Portanto, são 720 números.

b) • Se os algarismos 3 e 4 estão sempre juntos, podemos considerá-los um único elemento permutável entre si: $P_2 \cdot P_5 = 2! \cdot 5! = 240$.

Logo, são 240 números.

• Os números pares, nesse caso, terminam em 4 e 8.

Terminam em 4: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Terminam em 8: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Logo, são 240 números pares.

35. alternativa **c**

$$\left.\begin{array}{l} 1\_\_\_ \\ 2\_\_\_ \\ 31\_\_ \\ 3214 \\ 3241 \end{array}\right\} P_3 + P_3 + P_2 + 1 + 1 = 16 \rightarrow 16^{\text{a}} \text{ posição}$$

36. a) $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Logo, são 120 anagramas.

b) $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Logo, são 720 anagramas.

c) $P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$. Logo, são 40 320 anagramas.

37.
- Fixando a primeira letra da palavra, temos:
  $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ palavras
- Fixando as duas primeiras letras da palavra, temos:
  $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ palavras
- Fixando as três primeiras letras da palavra, temos:
  $P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$ palavras

Por ordem alfabética, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I}\_\_\_\_ \\ \text{LI}\_\_\_ \\ \text{LO}\_\_\_ \\ \text{LRI}\_\_ \\ \text{LROIV} \end{array}\right\} P_4 + P_3 + P_3 + P_2 + 1 = 39 \rightarrow 39^{\text{a}} \text{ posição}$$

38. alternativa **b**

Precisamos considerar que há seis sequências de explosões que correspondem à mesma permutação circular, ou seja, a sequência $C_2C_4C_6C_1C_3C_5$ é equivalente às sequências $C_4C_6C_1C_3C_5C_2$, $C_6C_1C_3C_5C_2C_4$, $C_1C_3C_5C_2C_4C_6$, $C_3C_5C_2C_4C_6C_1$ e $C_5C_2C_4C_6C_1C_3$. Então, devemos dividir o total de permutações por 6:

$$\frac{P_6}{6} = \frac{6!}{6} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6} = 120$$

Portanto, 120 ordens.

39. alternativa **b**

Os anagramas possíveis da palavra FELIZ são:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Multiplicando a quantidade de anagramas pela duração de cada anagrama na tela, temos:

$$120 \cdot 0{,}8 = 96 \rightarrow 96 \text{ s}$$

Assim, o vídeo terá duração de 1 minuto e 36 segundos, ou seja, entre 1 e 2 minutos.

40. alternativa **e**

Fixando uma das letras dessa palavra, temos:

$$\underset{1}{\underset{\downarrow}{\_}} \quad \underset{4}{\underset{\downarrow}{\_}} \quad \underset{3}{\underset{\downarrow}{\_}} \quad \underset{2}{\underset{\downarrow}{\_}} \quad \underset{1}{\underset{\downarrow}{\_}}$$

$P_4 = 4! = 24 \rightarrow 24$ palavras

Considerando as letras em ordem alfabética, as três primeiras são A, O ou P. Calculando todas as palavras que começam por essas letras, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{A} \\ \text{O} \\ \text{P} \end{array}\right\} 3P_4 = 3 \cdot 4! = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72$$

Portanto, a 73ª palavra em ordem alfabética será RAOPV.

41. a) $C_{8,3} = \dfrac{8!}{3!(8-3)!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 56$

b) $C_{9,4} = \dfrac{9!}{4!(9-4)!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 126$

c) $C_{13,5} = \dfrac{13!}{5!(13-5)!} = \dfrac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8!} = 1\,287$

d) $C_{23,21} = \dfrac{23!}{21!(23-21)!} = \dfrac{23 \cdot 22 \cdot 21!}{21!2 \cdot 1} = 253$

e) $C_{7,3} \cdot C_{10,2} = \dfrac{7!}{3!(7-3)!} \cdot \dfrac{10!}{2!(10-2)!} =$

$= \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} \cdot \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2 \cdot 1 \cdot 8!} = 1575$

f) $\dfrac{C_{12,4}}{C_{9,2}} = \dfrac{\dfrac{12!}{4!(12-4)!}}{\dfrac{9!}{2!(9-2)!}} = \dfrac{12!2!7!}{4!8!9!} =$

$= \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!2!7!}{4 \cdot 3 \cdot 2!8 \cdot 7!9!} = 13{,}75$

42. a) $C_{28,3} = 3\,276$

b) $C_{20,5} = 15\,504$

c) $C_{32,7} = 3\,365\,856$

d) $C_{45,38} = 45\,379\,620$

43. a) $\dfrac{C_{5,k} \cdot (5-k) \cdot k!(4-k)!}{30} = \dfrac{\dfrac{5!}{k!(5-k)!} \cdot (5-k)!k!}{30} =$

$= \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{30} = 4$

b) $\dfrac{C_{n+1,n} + n + 1}{C_{n+1,1}} = \dfrac{\dfrac{(n+1)!}{n!(n+1-n)!} + n + 1}{\dfrac{(n+1)!}{1!(n+1-1)!}} =$

$= \dfrac{\dfrac{(n+1)n!}{n!1!} + n + 1}{\dfrac{(n+1)n!}{n!}} = \dfrac{n+1+n+1}{n+1} =$

$= \dfrac{2(n+1)}{n+1} = 2$

44. $A_{n,p} = 2 \cdot C_{n,p} \Rightarrow \dfrac{n!}{(n-p)!} = 2 \cdot \dfrac{n!}{p!(n-p)!} \Rightarrow p! = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 2$

45. De acordo com o total de questões que o professor pode utilizar e a quantidade de questões da prova, temos:

$C_{20,17} = \dfrac{20!}{17!(20-17)!} = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{17!3!} = \dfrac{6\,840}{3 \cdot 2 \cdot 1} =$

$= 1\,140$

Logo, podem ser preparadas 1 140 provas distintas.

46. Considerando o total de pessoas do corpo de júri e a quantidade que fará parte do conselho da sentença, temos:

$C_{21,7} = \dfrac{21!}{7!(21-7)!} = \dfrac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14!}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 14!} =$

$= 116\,280$

Logo, são 116 280 maneiras diferentes de compor o conselho.

47. Existem diferentes maneiras de resolver essa tarefa. Uma delas é considerar os dados de entrada e saída:

Início

1. Leia os números n e p, sendo n a quantidade total de indivíduos e p a quantidade de pessoas que formam um grupo.
2. Calcule $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Fim

48. Considerando o total de lados de um dodecágono e que a partir de dois vértices consecutivos é obtido um lado e não uma diagonal, temos:

$$C_{12,2} - 12 = \frac{12!}{2!(12-2)!} - 12 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{2 \cdot 1 \cdot 10!} - 12 = 54$$

Portanto, um dodecágono tem 54 diagonais.

49. $$C_{12,5} = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 792$$

Portanto, os filmes indicados poderão ser escolhidos de 792 maneiras distintas.

50. Resposta pessoal. Possível resposta: Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas em uma turma de 32 alunos?

51. Considerando a quantidade total de cada objeto e a quantidade de cada um deles em cada *kit*, temos:

$$C_{24,5} \cdot C_{7,4} \cdot C_{9,2} =$$

$$= \frac{24!}{5!(24-5)!} \cdot \frac{7!}{4!(7-4)!} \cdot \frac{9!}{2!(9-2)!} =$$

$$= \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 19!} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{2 \cdot 1 \cdot 7!} =$$

$$= 53\,555\,040$$

Logo, há 53 555 040 maneiras distintas de montar um *kit*.

52. Considerando a quantidade total de pessoas disponíveis de cada cargo e quantos poderão participar da equipe, temos:

$$C_{4,1} \cdot C_{5,2} \cdot C_{8,2} = \frac{4!}{1!(4-1)!} \cdot \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot \frac{8!}{2!(8-2)!} =$$

$$= \frac{4 \cdot 3!}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2! \cdot 6!} = 1120$$

Logo, o presidente dessa empresa poderá escalar a equipe de 1 120 maneiras distintas.

53. a) $$C_{7,2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} = 21$$

Portanto, podem ser formados 21 segmentos de reta.

b) $$C_{7,3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = 35$$

Portanto, podem ser formados 35 triângulos.

54. alternativa **a**

$$C_{2,2} \cdot C_{26,3} = \frac{2!}{2!(2-2)!} \cdot \frac{26!}{3!(26-3)!} =$$

$$= 1 \cdot \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 23!} = 2\,600$$

Logo, podem ser formadas 2 600 comissões tendo Antônio e Bruno como membros.

55. alternativa **d**

Cada caractere é formado por 6 pontos e ao menos um desses pontos se destaca em relação aos demais. Nesse caso, vamos calcular as possibilidades quando temos 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 pontos que se destacam:

$$C_{6,1} + C_{6,2} + C_{6,3} + C_{6,4} + C_{6,5} + C_{6,6} =$$

$$= 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$$

Portanto, a quantidade total de caracteres que podem ser representados no sistema braile é 63.

56. $$C_{9,3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = 84$$

Logo, eles têm 84 possibilidades para escolher os estados que vão visitar.

57. Temos 7 bolas nessa urna, sendo 3 com números pares (2, 4 e 6) e 4 com números ímpares (1, 3, 5 e 7). Assim:

a) $$\underbrace{C_{3,2}}_{2\text{ pares}} \cdot \underbrace{C_{4,2}}_{2\text{ ímpares}} = \frac{3!}{2!(3-2)!} \cdot \frac{4!}{2!(4-2)!} =$$

$$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1!}{2 \cdot 1 \cdot 1!} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 1 \cdot 2!} = 18$$

Logo, há 18 possibilidades para essa situação.

b) • 2 pares e 2 ímpares:

$$\underbrace{C_{3,2}}_{2\text{ pares}} \cdot \underbrace{C_{4,2}}_{2\text{ ímpares}} = 18$$

• 3 pares e 1 ímpar:

$$\underbrace{C_{3,3}}_{3\text{ pares}} \cdot \underbrace{C_{4,1}}_{1\text{ ímpar}} =$$

$$= \frac{3!}{3!(3-3)!} \cdot \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{1}{0!} \cdot \frac{4 \cdot 3!}{1 \cdot 3!} = \frac{4}{1} = 4$$

Número de possibilidades: $18 + 4 = 22$.

c) • 3 ímpares e 1 par:

$$\underbrace{C_{4,3}}_{3\text{ ímpares}} \cdot \underbrace{C_{3,1}}_{1\text{ par}} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot \frac{3!}{1!(3-1)!} =$$

$$= \frac{4 \cdot 3!}{3!1} \cdot \frac{3 \cdot 2!}{1 \cdot 2!} = 12$$

• 4 ímpares:

$$\underbrace{C_{4,4}}_{4\text{ ímpares}} = \frac{4!}{4!(4-4)!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$$

Número de possibilidades: $12 + 1 = 13$.

58. alternativa **e**

- número possível de folhas de resposta:

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 78\,125$

- número de triângulos:

$$C_{30,3} = \frac{30!}{3!(30-3)!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 27!} = 4\,060$$

59. alternativa **a**

A ordem em que os quatro times são sorteados não faz diferença na constituição do grupo **A**. Nesse caso, a quantidade total de escolhas possíveis pode ser calculada por uma combinação de 12 times tomados 4 a 4 $(C_{12,4})$.

A quantidade total de escolhas dos times para o jogo de abertura leva em conta a ordem em que os times são sorteados para definir o campo de disputa. Logo, temos um arranjo de 4 times tomados 2 a 2 $(A_{4,2})$.

60. • PORTO tem cinco letras, sendo duas letras O, assim:

$$P_5^{(2,1,1,1)} = \frac{5!}{2!1!1!1!} = 60$$

Logo, são 60 anagramas.

• CACAU tem cinco letras, sendo duas letras A e duas letras C, assim:

$$P_5^{(2,2,1)} = \frac{5!}{2!2!1!} = 30$$

Logo, são 30 anagramas.

- PRATELEIRA tem dez letras, sendo duas letras R, duas letras A e duas letras E, assim:

$$P_{10}^{(2,2,2,1,1,1,1)} = \frac{10!}{2!2!2!1!1!1!1!} = 453\,600$$

Logo, são 453 600 anagramas.

a) Resposta pessoal. Possível resposta: PRAIA e TINTA.

b) Existem diferentes maneiras de resolver essa tarefa. Uma delas é considerar dados de entrada e saída:

> **Início**
>
> **1.** Leia o número n, sendo a quantidade de letras da palavra. E leia $n_1, n_2, \dots, n_r$, sendo a quantidade de letras, respectivamente, que se repete uma vez, duas vezes, e assim por diante.
>
> **2.** Calcule $P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!}$.
>
> **Fim**

61. a) • Fixando um dos algarismos 2 na unidade simples:

$$P_5^{(2,1,1,1)} = \frac{5!}{2!1!1!1!} = 60$$

• Fixando o algarismo 6 na unidade simples:

$$P_5^{(2,2,1)} = \frac{5!}{2!2!1!} = 30$$

Quantidade de números pares: 60 + 30 = 90.

b) • Fixando um dos algarismos 3 na unidade simples:

$$P_5^{(2,1,1,1)} = \frac{5!}{2!1!1!1!} = 60$$

• Fixando o algarismo 1 na unidade simples:

$$P_5^{(2,2,1)} = \frac{5!}{2!2!1!} = 30$$

Quantidade de números ímpares: 60 + 30 = 90.

c) Como os algarismos 6 e 1 devem estar juntos, podemos considerar que os dois ocupam apenas uma posição no número formado. Assim, calculamos $P_5^{(2,2,1)}$. Porém, a ordem dos números 6 e 1 formam números diferentes (P_2).

$$P_2 P_5^{(2,2,1)} = 2!\,\frac{5!}{2!2!1!} = 60$$

Quantidade de números que têm os algarismos 6 e 1 juntos: 60.

62. Considerando todas as palavras que começam por A, C ou M, tem-se:

- A: $P_5^{(2,1,1,1)} = \dfrac{5!}{2!1!1!1!} = 60$
- C: $P_5^{(2,1,1,1)} = 60$
- M: $P_5^{(2,2,1)} = \dfrac{5!}{2!2!1!} = 30$

Número de palavras começadas por A, C ou M:

60 + 60 + 30 = 150

Assim, a 151ª palavra será OAACCM.

63. Considerando a quantidade de fichas de cada letra e o total de anagramas formados, temos:

$$P_{(n+3)}^{(2,1,n)} = 26 + \frac{n^3}{2} \Rightarrow \frac{(n+3)!}{2!1!n!} = 26 + \frac{n^3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n!}{2n!} = 26 + \frac{n^3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+3)(n+2)(n+1) = 52 + n^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^3 + 6n^2 + 11n + 6 = 52 + n^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6n^2 + 11n - 46 = 0 \begin{cases} n_1 = 2 \\ n_2 = -\dfrac{23}{6} \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Logo, ele conseguiu 2 fichas com a letra J.

64. a) $\binom{20}{20} + \binom{2}{0} + \binom{8}{5} = 1 + 1 + \dfrac{8!}{5!(8-5)!} =$

$= 2 + \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!\,6} = 58$

b) $\binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{3}{3} = \binom{7}{3} + \binom{7}{3} + 1 = 2\binom{7}{3} + 1 =$

$= 2 \cdot \dfrac{7!}{3!(7-3)!} + 1 = 2 \cdot \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{6 \cdot 4!} + 1 = 71$

c) $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} =$

$= 2^6 = 64$

d) $\binom{12}{5} + \binom{12}{6} + \binom{13}{6} + \binom{13}{7} =$

$= \binom{13}{6} + \binom{13}{6} + \binom{13}{6} = 3\binom{13}{6} =$

$= 3 \cdot \dfrac{13!}{6!(13-6)!} = 3 \cdot \dfrac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{720 \cdot 7!} = 5\,148$

e) $\binom{20}{0} + \binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \binom{20}{3} + \dots + \binom{20}{19} + \binom{20}{20} =$

$= 2^{20} = 1\,048\,576$

- Resposta pessoal. Possível resposta:

$\binom{7}{2} + \binom{6}{1} + \binom{4}{0} + \binom{5}{5}$ e $\binom{6}{2} + \binom{5}{1} + \binom{3}{0}$.

65. a) $\binom{7}{2} = \binom{x}{5} \Rightarrow \binom{7}{5} = \binom{x}{5} \Rightarrow x = 7$

b) $\binom{29}{27} + \binom{29}{x} = \binom{30}{x}$

Note que a equação é equivalente à relação de Stifel, com $p = x$, $p - 1 = 27$ e $n = 30$.

- $p - 1 = 27 \Rightarrow p = 28$
- $p = x \Rightarrow x = 28$

c) $\binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3} + \dots + \binom{x}{x} = 2^{10} \Rightarrow 2^x = 2^{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 10$

d) $\binom{8}{x} \cdot x = \binom{15}{3} - \binom{15}{12} \Rightarrow \binom{8}{x} \cdot x = \binom{15}{3} - \binom{15}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \binom{8}{x} \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0$

66. a) $k = 2^9 = 512$

b) $k = \binom{16}{12} + \binom{16}{12} + \binom{16}{2} = 2\binom{16}{12} + \binom{16}{2} =$

$= 2 \cdot \dfrac{16!}{12!(16-12)!} + \dfrac{16!}{2!(16-2)!} =$

$= 2 \cdot \dfrac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12!4!} + \dfrac{16 \cdot 15 \cdot 14!}{2 \cdot 14!} = 3\,760$

c) $\binom{31}{0} = \binom{k}{17} \Rightarrow 1 = \binom{k}{17} \Rightarrow k = 17$

d) $\binom{23}{15} = \binom{k}{15} + \binom{k}{14} \Rightarrow k = 22$

e) $\binom{k}{10} = \binom{17}{7} \Rightarrow \binom{k}{10} = \binom{17}{10} \Rightarrow k = 17$

67. $\binom{n-1}{6} - \binom{n+1}{8} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)!}{6!(n-1-6)!} - \frac{(n+1)!}{8!(n+1-8)!} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{56(n-1)! - (n+1)n(n-1)!}{8!(n-7)!} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 + n - 56 = 0 \begin{cases} n_1 = 7 \\ n_2 = -8 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, $n = 7$.

68. alternativa **b**

$$\underbrace{\binom{8}{5} : \binom{8}{3}}_{1} - \underbrace{\binom{7}{7} \cdot \binom{7}{1}}_{1 \cdot 7 = 7} = 1 - 7 = -6 = -\binom{6}{1}$$

69. a) $\binom{20}{4} \cdot x - \binom{19}{3} = \binom{19}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \binom{20}{4} \cdot x = \binom{19}{3} + \binom{19}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \binom{20}{4} \cdot x = \binom{20}{4} \Rightarrow x = 1$$

b) $\binom{15}{15} + \binom{5}{3} \cdot x = \binom{12}{0} \cdot x \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 + \frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot x = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} \cdot x = x - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x = x - 1 \Rightarrow 9x = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{9}$$

70. alternativa **b**

Continuando o triângulo de Pascal, podemos verificar que o número 30 aparecerá na 31ª linha. Vejamos:

....

1 29 ... 29 1

1 30 ... 30 1 ← linha 31

Portanto, $n = 2$.

71. 1

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

a) $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$

b) $(2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n)$

c) $\frac{2^n}{2^{n+1}} = 2^{n-(n+1)} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

72. a) $(y+2)^4 =$

$= \binom{4}{0}y^4 2^0 + \binom{4}{1}y^3 2^1 + \binom{4}{2}y^2 2^2 + \binom{4}{3}y^1 2^3 + \binom{4}{4}y^0 2^4 =$

$= 1y^4 + 4y^3 2 + 6y^2 4 + 4y8 + 1 \cdot 16 =$

$= y^4 + 8y^3 + 24y^2 + 32y + 16$

b) $(2a+b)^6 =$

$= \binom{6}{0}(2a)^6 b^0 + \binom{6}{1}(2a)^5 b^1 + \binom{6}{2}(2a)^4 b^2 +$

$+ \binom{6}{3}(2a)^3 b^3 + \binom{6}{4}(2a)^2 b^4 + \binom{6}{5}(2a)^1 b^5 +$

$+ \binom{6}{6}(2a)^0 b^6 = 1 \cdot 64a^6 + 6 \cdot 32a^5 b + 15 \cdot 16a^4 b^2 +$

$+ 20 \cdot 8a^3 b^3 + 15 \cdot 4a^2 b^4 + 6 \cdot 2ab^5 + 1b^6 = 64a^6 +$

$+ 192a^5 b + 240a^4 b^2 + 160a^3 b^3 + 60a^2 b^4 + 12ab^5 + b^6$

c) $(x-5)^7 =$

$= \binom{7}{0}x^7(-5)^0 + \binom{7}{1}x^6(-5)^1 + \binom{7}{2}x^5(-5)^2 +$

$+ \binom{7}{3}x^4(-5)^3 + \binom{7}{4}x^3(-5)^4 + \binom{7}{5}x^2(-5)^5 +$

$+ \binom{7}{6}x^1(-5)^6 + \binom{7}{7}x^0(-5)^7 =$

$= 1x^7 + 7(-5)x^6 + 21 \cdot 25x^5 + 35(-125)x^4 +$

$+ 35 \cdot 625x^3 + 21(-3\,125)x^2 + 7 \cdot 15\,625x + 1(-78\,125) =$

$= x^7 - 35x^6 + 525x^5 - 4\,375x^4 + 21\,875x^3 - 65\,625x^2 +$

$+ 109\,375x - 78\,125$

d) $\left(3 + \frac{x}{3}\right)^5 =$

$= \binom{5}{0}3^5\left(\frac{x}{3}\right)^0 + \binom{5}{1}3^4\left(\frac{x}{3}\right)^1 + \binom{5}{2}3^3\left(\frac{x}{3}\right)^2 +$

$+ \binom{5}{3}3^2\left(\frac{x}{3}\right)^3 + \binom{5}{4}3^1\left(\frac{x}{3}\right)^4 + \binom{5}{5}3^0\left(\frac{x}{3}\right)^5 =$

$= 1 \cdot 243 + 5 \cdot 27x + 10 \cdot 3x^2 + 10 \cdot \frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^4}{27} +$

$+ 1 \cdot \frac{x^5}{243} = 243 + 135x + 30x^2 + \frac{10}{3}x^3 +$

$+ \frac{5}{27}x^4 + \frac{1}{243}x^5$

e) $\left(-2ab + \frac{1}{2}\right)^4 =$

$= \binom{4}{0}(-2ab)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \binom{4}{1}(-2ab)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 +$

$+ \binom{4}{2}(-2ab)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{4}{3}(-2ab)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 +$

$+ \binom{4}{4}(-2ab)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 \cdot 16a^4 b^4 + 4(-4)a^3 b^3 + 6a^2 b^2 +$

$+ 4\left(-\frac{1}{4}\right)ab + 1 \cdot \frac{1}{16} = 16a^4 b^4 - 16a^3 b^3 +$

$+ 6a^2 b^2 - ab + \frac{1}{16}$

f) $\left(a^2 + \frac{1}{b}\right)^4 = \binom{4}{0}(a^2)^4\left(\frac{1}{b}\right)^0 + \binom{4}{1}(a^2)^3\left(\frac{1}{b}\right)^1 +$

$+ \binom{4}{2}(a^2)^2\left(\frac{1}{b}\right)^2 + \binom{4}{3}(a^2)^1\left(\frac{1}{b}\right)^3 +$

$+ \binom{4}{4}(a^2)^0\left(\frac{1}{b}\right)^4 =$

$= a^8 + 4 \cdot \frac{a^6}{b} + 6 \cdot \frac{a^4}{b^2} + 4 \cdot \frac{a^2}{b^3} + \frac{1}{b^4}$

73. Resposta pessoal. Possível resposta: $(b+3)^3$ e $(-2xy+5)^4$.

74. a) $(\sqrt{2}+3)^3 = \binom{3}{0}(\sqrt{2})^3 \cdot 3^0 + \binom{3}{1}(\sqrt{2})^2 \cdot 3^1 +$

$+\binom{3}{2}(\sqrt{2})^1 \cdot 3^2 + \binom{3}{3}(\sqrt{2})^0 \cdot 3^3 =$

$= 1 \cdot 2\sqrt{2} + 3 \cdot 6 + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 9 + 1 \cdot 27 = 29\sqrt{2} + 45$

b) $(-\sqrt{3}+2\sqrt{5})^3 = \binom{3}{0}(-\sqrt{3})^3(2\sqrt{5})^0 +$

$+\binom{3}{1}(-\sqrt{3})^2(2\sqrt{5})^1 + \binom{3}{2}(-\sqrt{3})^1(2\sqrt{5})^2 +$

$+\binom{3}{3}(-\sqrt{3})^0(2\sqrt{5})^3 = 1(-3\sqrt{3}) + 3 \cdot 6\sqrt{5} +$

$+3(-20\sqrt{3}) + 1 \cdot 40\sqrt{5} = 58\sqrt{5} - 63\sqrt{3}$

c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{1}{3}}\right)^4 = \binom{4}{0}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^0 +$

$+\binom{4}{1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^1 + \binom{4}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 +$

$+\binom{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^1\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3 + \binom{4}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^4 =$

$= 1 \cdot \frac{9}{16} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 6 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{9} = \frac{625}{144}$

d) $(-\sqrt{11}-\sqrt{16})^5 = \binom{5}{0}(-\sqrt{11})^5(-\sqrt{16})^0 +$

$+\binom{5}{1}(-\sqrt{11})^4(-\sqrt{16})^1 + \binom{5}{2}(-\sqrt{11})^3(-\sqrt{16})^2 +$

$+\binom{5}{3}(-\sqrt{11})^2(-\sqrt{16})^3 + \binom{5}{4}(-\sqrt{11})^1(-\sqrt{16})^4 +$

$+\binom{5}{5}(-\sqrt{11})^0(-\sqrt{16})^5 = 1(-121)\sqrt{11} + 5(-484) +$

$+10(-176)\sqrt{11} + 10(-704) + 5(-256)\sqrt{11} +$

$+1(-1\,024) = -3\,161\sqrt{11} - 10\,484$

75. a) $T_{p+1} = \binom{6}{p}x^{6-p} \cdot 2^p$

b) $T_{p+1} = \binom{9}{p}(3bx)^{9-p} \cdot y^p$

c) $T_{p+1} = \binom{5}{p}(-x)^{5-p} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^p$

d) $T_{p+1} = \binom{8}{p}(2x)^{8-p} \cdot (-y)^p$

Para o 5º termo, temos: $p+1=5 \Rightarrow p=4$. Logo:

a) $T_{4+1} = \binom{6}{4}x^{6-4} \cdot 2^4 = 15x^2 \cdot 16 = 240x^2$

b) $T_{4+1} = \binom{9}{4}(3bx)^{9-4} \cdot y^4 = 126 \cdot 243b^5x^5 \cdot y^4 = 30\,618b^5x^5y^4$

c) $T_{4+1} = \binom{5}{4}(-x)^{5-4} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^4 = 5(-16)\frac{1}{x^3} = -80 \cdot \frac{1}{x^3}$

d) $T_{4+1} = \binom{8}{4}(2x)^{8-4} \cdot (-y)^4 = 70 \cdot 16x^4 \cdot y^4 = 1\,120x^4y^4$

76. a) I, II e IV; como esses binômios apresentam expoente par, a quantidade de elementos de seus respectivos desenvolvimentos é ímpar, admitindo, portanto, um termo médio.

b) I: Como o binômio está elevado à 10ª potência, seu desenvolvimento possui 11 termos. Assim, o termo médio ou termo central é o 6º termo (T_6), ou seja, $p+1 = 6 \Rightarrow p = 5$:

$$T_6 = \binom{10}{5}(2x)^{10-5} \cdot 1^5 = 252 \cdot 32x^5 = 8\,064x^5$$

II: Como o binômio está elevado à 6ª potência, seu desenvolvimento possui 7 termos. Assim, o termo médio ou termo central é o 4º termo (T_4), ou seja, $p+1=4 \Rightarrow p=3$:

$$T_4 = \binom{6}{3}a^{6-3} \cdot (-b^2)^3 = 20(-a^3b^6) = -20a^3b^6$$

III: Como o binômio está elevado à 5ª potência, seu desenvolvimento possui 6 termos. Assim, os termos centrais são o 3º e 4º termos $(T_3$ e $T_4)$, ou seja, $p+1=3 \Rightarrow$

$\Rightarrow p=2$ e $p+1=4 \Rightarrow p=3$:

$T_3 = \binom{5}{2}3^{5-2} \cdot (xy)^2 = 10 \cdot 3^3x^2y^2 = 270x^2y^2$

$T_4 = \binom{5}{3}3^{5-3} \cdot (xy)^3 = 10 \cdot 3^2x^3y^3 = 90x^3y^3$

IV: Como o binômio está elevado à 4ª potência, seu desenvolvimento possui 5 termos. Assim, o termo médio ou termo central é o 3º termo (T_3), ou seja, $p+1=3 \Rightarrow p=2$:

$T_3 = \binom{4}{2}3^{4-2} \cdot \left(\frac{3}{2x}\right)^2 = 6 \cdot \frac{81}{4x^2} = \frac{243}{2} \cdot \frac{1}{x^2}$

77. Resposta pessoal. Possível resposta: Escreva a fórmula do termo geral dos binômios a seguir.

78. Temos $T_3 = \binom{10}{2}m^{10-2} \cdot n^2$ e $T_9 = \binom{10}{8}m^{10-8} \cdot n^8$. Logo, a razão entre os coeficientes de T_3 e T_9 é: $\frac{\binom{10}{2}}{\binom{10}{8}} = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{10}{2}} = 1$.

79. a) $T_{p+1} = \binom{5}{p}(-8)^{5-p} \cdot x^p$

$x^p = 1 \Rightarrow x^p = x^0 \Rightarrow p = 0$

$T_{0+1} = \binom{5}{0}(-8)^{5-0} \cdot x^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow T_1 = 1(-32\,768) = -32\,768$ (termo independente de x)

b) $T_{p+1} = \binom{4}{p}\left(\frac{3}{x}\right)^{4-p} \cdot x^p$

$x^{p-(4-p)} = 1 \Rightarrow x^{2p-4} = x^0 \Rightarrow p = 2$

$T_{2+1} = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{x}\right)^{4-2} \cdot x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow T_3 = 6 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^2 \cdot x^2 = 6 \cdot \frac{3^2}{x^2} \cdot x^2 = 54$ (termo independente de x)

c) $T_{p+1} = \binom{7}{p}(x^2)^{7-p} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^p$

$x^{2(7-p)-p} = 1 \Rightarrow x^{14-3p} = x^0 \Rightarrow p = \frac{14}{3}$

Assim, p não é um número natural. Portanto, no desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^7$ não existe termo independente de x.

80. Termo geral: $T_{p+1} = \binom{6}{p}(2b)^{6-p}\cdot(-1)^p$

$b^{6-p} = b^2 \Rightarrow p = 4$

$T_{4+1} = \binom{6}{4}(2b)^{6-4}\cdot(-1)^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow T_5 = 15(2b)^2\cdot 1 = 15\cdot 2^2b^2 = 60b^2$

81. Termo geral: $T_{p+1} = \binom{8}{p}(2a)^{8-p}\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^p$

$a^{8-p}b^p = a^4b^4 \Rightarrow p = 4$

$T_{4+1} = \binom{8}{4}(2a)^{8-4}\left(\frac{b}{2}\right)^4 = 70\cdot 2^4a^4\cdot\frac{b^4}{2^4} = 70a^4b^4$

Portanto, o coeficiente de a^4b^4 é 70.

82. a) Termo geral: $T_{p+1} = \binom{14}{p}(ab)^{14-p}\cdot(2b)^p$

- $T_5 = T_{4+1} = \binom{14}{4}(ab)^{14-4}\cdot(2b)^4 \Rightarrow$

  $\Rightarrow T_5 = 1001\cdot a^{10}b^{10}\cdot 2^4b^4 = 16\,016a^{10}b^{14}$

- $T_{10} = T_{9+1} = \binom{14}{9}(ab)^{14-9}\cdot(2b)^9 \Rightarrow$

  $\Rightarrow T_{10} = 2\,002\cdot a^5b^5\cdot 2^9b^9 = 1025\,024a^5b^{14}$

b) $p = \frac{14}{2} = 7$

$T_{7+1} = \binom{14}{7}(ab)^{14-7}\cdot(2b)^7 =$

$= 3\,432\cdot a^7b^7\cdot 128b^7 = 439\,296a^7b^{14}$

c) $a^{14-p} = 1 \Rightarrow a^{14-p} = a^0 \Rightarrow p = 14$

$T_{14+1} = \binom{14}{14}(ab)^{14-14}\cdot(2b)^{14} \Rightarrow T_{15} = 1(2b)^{14} = 16\,384b^{14}$

Logo, $16\,384b^{14}$ é o termo independente de a, mas não há termo independente de b, pois o expoente de b não varia.

83. a) $(1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$

b) $(2\cdot 1 + 3\cdot 1)^4 = 5^4 = 625$

c) $(2\cdot 1 - 4\cdot 1)^7 = -128$

d) $(-1 - 3\cdot 1)^5 = (-4)^5 = -1024$

84. I) a) $T_{p+1} = \binom{6}{p}(6x)^{6-p}\cdot 2^p$

b) $T_{3+1} = \binom{6}{3}(6x)^{6-3}\cdot 2^3 \Rightarrow T_4 = 20\cdot 6^3\cdot x^3\cdot 8 = 34\,560x^3$

c) $T_4 = 34\,560x^3$

d) $x^{6-p} = 1 \Rightarrow x^{6-p} = x^0 \Rightarrow p = 6$

$T_{6+1} = \binom{6}{6}(6x)^{6-6}\cdot 2^6 \Rightarrow T_7 = 1(6x)^0 64 = 64$

e) $x^{6-p} = x^4 \Rightarrow p = 2$

$T_{2+1} = \binom{6}{2}(6x)^{6-2}\cdot 2^2 \Rightarrow T_3 = 15\cdot 6^4\cdot x^4\cdot 4 = 77\,760x^4$

II) a) $T_{p+1} = \binom{4}{p}x^{4-p}\left(\frac{2}{x}\right)^p$

b) $T_{3+1} = \binom{4}{3}x^{4-3}\left(\frac{2}{x}\right)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow T_4 = 4x\cdot\frac{8}{x^3} = 32\cdot\frac{1}{x^2}$

c) $T_{2+1} = \binom{4}{2}x^{4-2}\left(\frac{2}{x}\right)^2 \Rightarrow T_3 = 6x^2\cdot\frac{4}{x^2} = 24$

d) $x^{4-p-p} = 1 \Rightarrow x^{4-2p} = x^0 \Rightarrow p = 2$

$T_3 = \binom{4}{2}x^{4-2}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^2 = 6\cdot x^2\cdot\frac{4}{x^2} = 24$

e) $x^{4-p-p} = x^4 \Rightarrow x^{4-2p} = x^4 \Rightarrow p = 0$

$T_{0+1} = \binom{4}{0}x^{4-0}\left(\frac{2}{x}\right)^0 \Rightarrow T_1 = 1x^4 = x^4$

III) a) $T_{p+1} = \binom{5}{p}(-5)^{5-p}(3x)^p$

b) $T_{3+1} = \binom{5}{3}(-5)^{5-3}(3x)^3 \Rightarrow T_4 = 10(-5)^2 3^3x^3 = 6\,750x^3$

c) Termos centrais:

$T_{2+1} = \binom{5}{2}(-5)^{5-2}(3x)^2 \Rightarrow T_3 = 10(-5)^3 3^2x^2 = -11\,250x^2$

$T_4 = 6\,750x^3$

d) $x^p = 1 \Rightarrow x^p = x^0 \Rightarrow p = 0$

$T_{0+1} = \binom{5}{0}(-5)^{5-0}(3x)^0 \Rightarrow T_1 = 1(-5)^5 = -3\,125$

e) $x^p = x^4 \Rightarrow p = 4$

$T_{4+1} = \binom{5}{4}(-5)^{5-4}(3x)^4 \Rightarrow T_5 = 5(-5)^1 3^4x^4 = -2\,025x^4$

IV) a) $T_{p+1} = \binom{8}{p}(2x^2)^{8-p}\cdot x^p$

b) $T_{3+1} = \binom{8}{3}(2x^2)^{8-3}\cdot x^3 \Rightarrow T_4 = 56\cdot 2^5\cdot x^{10}\cdot x^3 = 1\,792x^{13}$

c) $T_{4+1} = \binom{8}{4}(2x^2)^{8-4}\cdot x^4 \Rightarrow T_5 = 70\cdot 2^4\cdot x^8\cdot x^4 = 1\,120x^{12}$

d) $x^{2(8-p)+p} = 1 \Rightarrow x^{16-p} = x^0 \Rightarrow p = 16$

Não há termo independente de x, pois não existe um número natural p, com $0 \leqslant p \leqslant 8$, tal que $x^{16-p} = x^0$.

e) $x^{16-p} = x^4 \Rightarrow p = 12$

Não há termo em x^4, pois não existe um número natural p, com $0 \leqslant p \leqslant 8$, tal que $x^{16-p} = x^4$.

V) a) $T_{p+1} = \binom{7}{p}\left(\frac{2}{3}x\right)^{7-p}\cdot(2x^2)^p$

b) $T_{3+1} = \binom{7}{3}\left(\frac{2}{3}x\right)^{7-3}\cdot(2x^2)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow T_4 = 35\left(\frac{2}{3}x\right)^4 2^3x^6 = \frac{4\,480}{81}x^{10}$

c) Termos centrais:

$T_4 = \frac{4\,480}{81}x^{10}$

$T_{4+1} = \binom{7}{4}\left(\frac{2}{3}x\right)^{7-4}\cdot(2x^2)^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow T_5 = 35\left(\frac{2}{3}x\right)^3 2^4x^8 = \frac{4\,480}{27}x^{11}$

d) $x^{7-p+2p} = 1 \Rightarrow x^{7+p} = x^0 \Rightarrow p = -7$

Não existe termo independente de x, pois não há um número natural p, tal que $7 + p = 0$.

e) $x^{7+p} = x^4 \Rightarrow p = -3$

Não existe termo em x^4, pois não há um número natural p, tal que $7 + p = 0$.

Capítulo 2 Probabilidade

1. a) O índice de falha mais eficaz é aquele que possui o menor intervalo percentual. Nos métodos contraceptivos apresentados isso ocorre com o DIU, que tem índice de falha entre 0,1 a 0,8%.

b) Resposta pessoal. Possível resposta: Há os métodos contraceptivos definitivos, como a laqueadura e a vasectomia.

c) Porque eles impedem o contato entre os órgãos genitais e suas secreções, que podem conter os agentes patogênicos causadores desse tipo de doença.

2. $\Omega = \{(1, K), (1, C), (2, K), (2, C), (3, K), (3, C), (4, K), (4, C), (5, K), (5, C), (6, K), (6, C)\}$

3. C: cara; K: coroa

a) $\Omega = \{(K,K), (K,C), (C,K), (C,C)\}$

b) $A = \{(C,C)\}$

c) $B = \{(C,C), (K,C), (C,K)\}$

d) $D = \{(K,K)\}$

4. a) $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

b) $A = \{(4,6), (5,5), (6,4), (5,6), (6,5), (6,6)\}$

c) $B = \varnothing$

d) $C = \Omega$

5. Considerando os jogadores A, B, C, D e E, podemos ter as seguintes duplas.

$\Omega = \{(A,B), (A,C), (A,D), (A,E), (B,C), (B,D), (B,E), (C,D), (C,E), (D,E)\}$

6. a) Discreto, pois é possível enumerar os elementos desse conjunto.

b) Discreto, pois é possível enumerar os elementos desse conjunto.

c) Contínuo, pois não é possível enumerar os elementos desse conjunto.

d) Discreto, pois é possível enumerar os elementos desse conjunto.

7. a) três maneiras distintas

b) $\Omega = \{$R\$ 170,00; R\$ 190,00; R\$ 200,00$\}$

8. Resposta pessoal. Possível resposta:

a) Determine o evento A, em que os números são menores do que 9.

b) Determine o evento B, em que os números são pares.

9. $\Omega = \{$(Ana, Bruno), (Ana, Carlos), (Ana, Douglas), (Bruno, Carlos), (Bruno, Douglas), (Carlos, Douglas)$\}$

a) $A = \{$(Ana, Bruno), (Ana, Carlos), (Ana, Douglas)$\}$

b) $B = \{$(Ana, Carlos), (Ana, Douglas), (Carlos, Douglas)$\}$

c) $C = \varnothing$

10. a) $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

b) $A = \{(2,2)\}$

c) $B = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$

d) $C = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$

11. X: bola azul; Y: bola preta; Z: bola branca.

a) $\Omega = \{(X,X,X), (X,X,Y), (X,X,Z), (X,Y,X), (X,Y,Y), (X,Y,Z), (X,Z,X), (X,Z,Y), (X,Z,Z), (Y,X,X), (Y,X,Y), (Y,X,Z), (Y,Y,X), (Y,Y,Y), (Y,Y,Z), (Y,Z,X), (Y,Z,Y), (Y,Z,Z), (Z,X,X), (Z,X,Y), (Z,X,Z), (Z,Y,X), (Z,Y,Y), (Z,Y,Z), (Z,Z,X), (Z,Z,Y), (Z,Z,Z)\}$

b) $A = \{(X,Y,Z), (X,Z,Y), (Y,X,Z), (Y,Z,X), (Z,X,Y), (Z,Y,X)\}$

c) $B = \{(X,X,X), (Y,Y,Y), (Z,Z,Z)\}$

12. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$

13. C: copas; E: espadas; O: ouros; P: paus

a) $\Omega = \{(C,C), (C,E), (C,O), (C,P), (E,E), (E,O), (E,P), (O,O), (O,P), (P,P)\}$

b) $A = \{(C,E), (C,O), (C,P)\}$

c) $B = \{(C,E), (E,E), (E,O), (E,P)\}$

14. Temos o evento A, em que a soma dos números sorteados é par, dado por:

$A = \{(1,3), (1,5), (1,7), (1,9), (2,4), (2,6), (2,8), (2,10), (3,1), (3,5), (3,7), (3,9), (4,2), (4,6), (4,8), (4,10), (5,1), (5,3), (5,7), (5,9), (6,2), (6,4), (6,8), (6,10), (7,1), (7,3), (7,5), (7,9), (8,2), (8,4), (8,6), (8,10), (9,1), (9,3), (9,5), (9,7), (10,2), (10,4), (10,6), (10,8)\}$

Temos o evento B, em que o produto dos números sorteados é menor do que 20, dado por:

$B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (1,9), (1,10), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (2,8), (2,9), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (6,1), (6,2), (6,3), (7,1), (8,1), (8,2), (9,1), (9,2), (10,1)\}$

O evento C é a ocorrência simultânea dos eventos A e B, assim:

$C = \{(1,3), (1,5), (1,7), (1,9), (2,4), (2,6), (2,8), (3,1), (3,5), (4,2), (5,1), (5,3), (6,2), (7,1), (8,2), (9,1)\}$

15. a) $D = \{(1,2), (1,3), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,5), (3,2), (3,3), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,5), (5,2), (5,3), (5,5), (6,1), (6,2), (6,3), (6,5)\}$

b) $E = \{(2,3), (2,5), (4,3), (4,5), (6,3), (6,5)\}$

c) $F = \{(1,5), (2,5), (3,5)\}$

16. O espaço amostral é formado a partir da diferença entre as quantidades de pontos, conforme indicado no quadro a seguir:

Quantidade de pontos	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Portanto, $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

17. C: cara; K: coroa

$A = \{(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (C, K, K), (K, C, C), (K, C, K), (K, K, C)\}$

$n(A) = 7$

18. O espaço amostral é formado por $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, ou seja, temos $n(\Omega) = 9$. Os possíveis resultados de sorteio formam um espaço amostral equiprovável, isto é, cada uma das bolas dessa urna tem a mesma chance de ser sorteada.

a) $A = \varnothing$; $n(A) = 0$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{0}{9} = 0 \rightarrow 0\%$$

b) $B = \{2, 4, 6, 8\}$; $n(B) = 4$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{9} = 0,\overline{4} \rightarrow 44,\overline{4}\%$$

c) $\overline{B} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{9} =$$

$$= \frac{5}{9} = 0,\overline{5} \rightarrow 55,\overline{5}\%$$

d) $C = \{5\}$; $n(C) = 1$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{1}{9} = 0,\overline{1} \rightarrow 11,\overline{1}\%$$

e) $D = \{8, 9\}$; $n(D) = 2$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{2}{9} = 0,\overline{2} \rightarrow 22,\overline{2}\%$$

19. C: cara; K: coroa

$\Omega = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$; $n(\Omega) = 4$

$A = \{(C, K), (K, C)\}$; $n(A) = 2$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{4} = 0,5 \rightarrow 50\%$$

20. $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27\}$

$n(\Omega) = 28$

a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27\}$; $n(A) = 14$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{14}{28} = 0,5 \rightarrow 50\%$$

b) $B = \{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$; $n(B) = 6$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{28} \simeq 0,214 \rightarrow 21,4\%$$

c) $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $n(C) = 10$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{10}{28} \simeq 0,357 \rightarrow 35,7\%$$

d) $D = \{0\}$; $n(D) = 1$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{1}{28} \simeq 0,036 \rightarrow 3,6\%$$

e) $E = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$; $n(E) = 9$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{9}{28} \simeq 0,321 \rightarrow 32,1\%$$

21. alternativa **e**

$n(\Omega) = 36$

$A = \{(1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$; $n(A) = 21$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

- Sim, pois cada possível resultado do lançamento apresenta a mesma chance de ser sorteado.

22. $n(\Omega) = 36$

a) $\overline{A} = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$; $n(\overline{A}) = 6$

$$P(\overline{A}) = \frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \Rightarrow \frac{1}{6} = 1 - P(A)$$

$$P(A) = \frac{5}{6} = 0,8\overline{3} \rightarrow 83,\overline{3}\%$$

b) $\overline{B} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}$; $n(\overline{B}) = 11$

$$P(\overline{B}) = \frac{n(\overline{B})}{n(\Omega)} = \frac{11}{36}$$

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) \Rightarrow \frac{11}{36} = 1 - P(B)$$

$$P(B) = \frac{25}{36} = 0,69\overline{4} \rightarrow 69,\overline{4}\%$$

c) $\overline{C} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$; $n(\overline{C}) = 6$

$$P(\overline{C}) = \frac{n(\overline{C})}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) \Rightarrow \frac{1}{6} = 1 - P(C)$$

$$P(C) = \frac{5}{6} = 0,8\overline{3} \rightarrow 83,\overline{3}\%$$

d) $\overline{D} = \{(3, 2)\}$; $n(\overline{D}) = 1$

$$P(\overline{D}) = \frac{n(\overline{D})}{n(\Omega)} = \frac{1}{36}$$

$$P(\overline{D}) = 1 - P(D) \Rightarrow \frac{1}{36} = 1 - P(D)$$

$$P(D) = \frac{35}{36} = 0,97\overline{2} \rightarrow 97,\overline{2}\%$$

23. Seja $n(V)$ o número x de bolas verdes inseridas na urna. Desse modo:

$$P(V) = \frac{n(V)}{n(\Omega)} = \frac{x}{x + 4} = 50\% \Rightarrow \frac{x}{x + 4} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = x + 4 \Rightarrow x = 4$$

Ou seja, ao retirar uma bola ao acaso, para que a probabilidade de ela ser verde seja 50%, é preciso adicionar 4 bolas verdes na urna.

24. alternativa **e**

Seja A o evento em que a criança premiada seja filho(a) único(a). Assim, segue que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{7}{8 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3} = \frac{7}{25}$$

25. $n(\Omega) = 6 \cdot 8 = 48$

a) $A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}; n(A) = 6$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{48} = \frac{1}{8} = 0{,}125 \rightarrow 12{,}5\%$$

b) $B = \{(3,8), (4,7), (4,8), (5,6), (5,7), (5,8), (6,5), (6,6), (6,7), (6,8)\}; n(B) = 10$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{10}{48} = \frac{5}{24} = 0{,}208\overline{3} \rightarrow 20{,}8\overline{3}\%$$

c) $C = \{(1,6), (2,3), (3,2), (6,1)\}; n(C) = 4$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12} = 0{,}08\overline{3} \rightarrow 8{,}\overline{3}\%$$

d) $D = \{(1,1), (1,3), (1,5), (1,7), (3,1), (3,3), (3,5), (3,7), (5,1), (5,3), (5,5), (5,7)\}; n(D) = 12$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \rightarrow 25\%$$

e) $\overline{E} = \{(1,1)\}; n(\overline{E}) = 1$

$$P(\overline{E}) = \frac{n(\overline{E})}{n(\Omega)} = \frac{1}{48}$$

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E) \Rightarrow \frac{1}{48} = 1 - P(E)$$

$$P(E) = \frac{47}{48} = 0{,}979\overline{16} \rightarrow 97{,}9\overline{16}\%$$

f) $F = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,5), (1,7), (1,8), (2,1), (2,2), (2,3), (2,5), (2,7), (2,8), (3,1), (3,2), (3,3), (3,5), (3,7), (3,8), (5,1), (5,2), (5,3), (5,5), (5,7), (5,8)\}; n(F) = 24$

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(\Omega)} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \rightarrow 50\%$$

26. C: cara; K: coroa

$n(\Omega) = 2^5 = 32$

a) $A = \{(C, C, C, C, C)\}; n(A) = 1$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{32} = 0{,}03125 \rightarrow 3{,}125\%$$

b) $B = \{(K, C, C, C, C), (C, K, C, C, C), (C, C, K, C, C), (C, C, C, K, C), (C, C, C, C, K)\}; n(B) = 5$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{5}{32} = 0{,}15625 \rightarrow 15{,}625\%$$

c) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0{,}96875 \rightarrow 96{,}875\%$

d) $D = \{(K, K, K, K, K)\}; n(D) = 1$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{1}{32} = 0{,}03125 \rightarrow 3{,}125\%$$

27. $\Omega = \{567, 576, 657, 675, 756, 765\}$; $n(\Omega) = 6$

a) $A = \{576, 756\}$; $n(A) = 2$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} \rightarrow 33{,}\overline{3}\%$$

b) $\overline{A} = \{567, 657, 675, 765\}$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6} \rightarrow 66{,}\overline{6}\%$$

c) $B = \{756, 765\}$; $n(B) = 2$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} \rightarrow 33{,}\overline{3}\%$$

d) $C = \{567, 576\}$; $n(C) = 2$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} \rightarrow 33{,}\overline{3}\%$$

28. alternativa **e**

Pessoas com sangue tipo **B**:

$n(B) = 140 - (27 + 56 + 29) = 28$

$n(\Omega) = 140$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{28}{140} = \frac{1}{5} = 0{,}2 \rightarrow 20\%$$

29. $n(\Omega) = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 17!} = 1\,140$

$$n(A) = \frac{16!}{3!(16-3)!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 13!} = 560$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{560}{1\,140} = \frac{28}{57} \simeq 49{,}1\%$$

30. $n(\Omega) = 62$

a) $n(A) = 19$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{19}{62} \simeq 0{,}306 \rightarrow 30{,}6\%$$

b) $n(B) = 25$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{25}{62} \simeq 0{,}403 \rightarrow 40{,}3\%$$

c) $n(C) = 8$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{8}{62} = \frac{4}{31} \simeq 0{,}129 \rightarrow 12{,}9\%$$

d) $n(D) = 62 - 17 = 45$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{45}{62} \simeq 0{,}726 \rightarrow 72{,}6\%$$

31. alternativa **d**

O espaço amostral formado por todos os anagramas da palavra ESCOLA é dado por $n(\Omega) = 6!$, considerando que todas as consoantes estejam juntas, que quantidade de permutações é 3! e que as permutações das vogais e das consoantes juntas é dada por 4!. Assim:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3! \cdot 4!}{6!} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

Portanto, a probabilidade de que a palavra escrita no papel tenha todas as consoantes juntas é $\frac{1}{5}$.

32. alternativa **b**

Número de casos possíveis:

$$C_{30,4} = \frac{30!}{4!(30-4)!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 26!} = 27\,405$$

Possibilidades de escolha de 2 eleitores de **A**:

$$C_{15,2} = \frac{15!}{2!(15-2)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{2 \cdot 1 \cdot 13!} = 105$$

Possibilidades de escolha de 2 eleitores de **B**:

$C_{15,2} = 105$

D: 2 eleitores de **A** e 2 eleitores de **B**

$$P(D) = \frac{105 \cdot 105}{27\,405} = \frac{35}{87} \simeq 0{,}402 \rightarrow 40{,}2\%$$

33. Temos $n(\Omega) = 10 + x$, em que x corresponde à quantidade de bolas amarelas. Assim:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{10 \cdot 9}{(10+x) \cdot (9+x)} = \frac{3}{7} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 + 19x - 120 = 0$

Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos:

$\Delta = 19^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-120) = 841 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-19 \pm \sqrt{841}}{2 \cdot 1} = \frac{-19 \pm 29}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -24 \end{cases}$$

Desse modo, será necessário acrescentar 5 bolas amarelas na urna.

34. Resposta pessoal. Possível resposta: Uma universidade organiza, com uma agência de viagens, uma excursão para os alunos interessados em conhecer museus. Para isso, primeiro os alunos tiveram de preencher uma ficha individual visando apontar a preferência para o roteiro da viagem, e os resultados foram indicados no quadro apresentado. Cada aluno preencheu apenas uma ficha e apontou apenas um roteiro. Sabendo que será realizado apenas o sorteio de uma ficha, qual é a probabilidade de eles viajarem apenas para o Museu Oscar Niemeyer, em Curitiba?

35. alternativa **c**

$n(\Omega) = 10\,000$

$A = \{1, 10, 11, 12, \ldots, 19, 100, 101, 102, \ldots, 199, 1\,000, 1\,001, 1\,002, \ldots, 1\,999, 10\,000\}$;

$n(A) = 1 + 10 + 100 + 1000 + 1 = 1112$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1112}{10\,000} = \frac{139}{1\,250} =$$

$= 0{,}1112 \rightarrow 11{,}12\%$

36. $n(\Omega) = 12 \Rightarrow x + y + z = 12$

A: bola azul; $n(A) = x$

B: bola amarela; $n(B) = y$

C: bola verde; $n(C) = z$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow \frac{P(B)}{2} = \frac{x}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{n(B)}{n(\Omega)}}{2} = \frac{x}{12} \Rightarrow \frac{\frac{y}{12}}{2} = \frac{x}{12} \Rightarrow y = 2x$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot P(C) \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n(C)}{n(\Omega)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{12} \Rightarrow z = 3x$$

$x + y + z = 12 \Rightarrow x + 2x + 3x = 12 \Rightarrow x = 2$

$y = 2x \Rightarrow y = 2 \cdot 2 \Rightarrow y = 4$

$z = 3x \Rightarrow z = 3 \cdot 2 \Rightarrow z = 6$

37. Considerando o evento A obter um número ímpar e o evento B um número maior do que 2, segue que:

$n(\Omega) = 6$

$A = \{1, 3, 5\} \Rightarrow n(A) = 3$

$B = \{3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(B) = 4$

$A \cap B = \{3, 5\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Assim, a probabilidade de obter um número ímpar ou um número maior do que 2 será $\frac{5}{6}$.

38. $\Omega = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (4,1), (4,2), (4,3), (4,5), (4,6), (4,7), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6), (5,7), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,7), (7,1), (7,2), (7,3), (7,4), (7,5), (7,6)\}$; $n(\Omega) = 42$

a) $A = \{(1,7), (2,6), (3,5), (5,3), (6,2), (7,1)\}$; $n(A) = 6$

$$P(A) = \frac{6}{42} = \frac{1}{7} \simeq 0{,}143 \rightarrow 14{,}3\%$$

b) $B = \{(2,6), (3,4), (4,3), (6,2)\}$; $n(B) = 4$

$$P(B) = \frac{4}{42} = \frac{2}{21} \simeq 0{,}095 \rightarrow 9{,}52\%$$

c) $A \cap B = \{(2,6), (6,2)\}$; $n(A \cap B) = 2$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$$= \frac{1}{7} + \frac{2}{21} - \frac{2}{42} = \frac{4}{21} \simeq 0{,}190 \rightarrow 19\%$$

39. Resposta pessoal. Possível resposta:

Em uma urna são colocadas 20 bolas idênticas, numeradas de 1 a 20. Ao sortear ao acaso uma bola dessa urna, qual é a probabilidade de o número da bola ser múltiplo de 2 ou 3?

Dados $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{10}$ e $P(A \cup B) = \frac{13}{20}$.

40. C: cara, K: coroa

$\Omega = \{(1,C), (1,K), (2,C), (2,K), (3,C), (3,K), (4,C), (4,K), (5,C), (5,K), (6,C), (6,K)\}$; $n(\Omega) = 12$

a) $A = \{(3, C)\}$; $n(A) = 1$

$P(A) = \dfrac{1}{12} = 0{,}08\overline{3} \to 8{,}\overline{3}\%$

b) $B = \{(2, C), (4, C), (6, C)\}$; $n(B) = 3$

$P(B) = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25 \to 25\%$

c) $D = \{(1, K), (2, K), (3, K), (4, K), (5, K), (6, K)\}; n(D) = 6$

$E = \{(1, C), (1, K), (3, C), (3, K), (5, C), (5, K)\}; n(E) = 6$

$D \cap E = \{(1, K), (3, K), (5, K)\}; n(D \cap E) = 3$

$P(D \cup E) = P(D) + P(E) - P(D \cap E) =$

$= \dfrac{6}{12} + \dfrac{6}{12} - \dfrac{3}{12} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75 \to 75\%$

41. *c*: copas; *e*: espadas; *o*: ouros; *p*: paus

a) *B*: ser rei de paus

$B = \{K_p\}$; $n(B) = 1$

$P(B) = \dfrac{1}{52} \simeq 0{,}019 \to 1{,}9\%$

b) *C*: ser dama

$C = \{Q_c, Q_e, Q_o, Q_p\}$; $n(C) = 4$

$P(C) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13} \simeq 0{,}077 \to 7{,}7\%$

c) *D*: ser copas

$D = \{A_c, 2_c, 3_c, 4_c, 5_c, 6_c, 7_c, 8_c, 9_c, 10_c, J_c, Q_c, K_c\}; n(D) = 13$

$C \cap D = \{Q_c\}$; $n(C \cap D) = 1$

$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) =$

$= \dfrac{1}{13} + \dfrac{13}{52} - \dfrac{1}{52} = \dfrac{4}{13} \simeq 0{,}308 \to 30{,}8\%$

d) *E*: ser ouros

$E = \{A_o, 2_o, 3_o, 4_o, 5_o, 6_o, 7_o, 8_o, 9_o, 10_o, J_o, Q_o, K_o\}$; $n(E) = 13$

$P(E) = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$

$P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

F: ser rei

$F = \{K_c, K_e, K_o, K_p\}$; $n(F) = 4$

$P(F) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$

$P(\bar{F}) = 1 - P(F) = 1 - \dfrac{1}{13} = \dfrac{12}{13}$

$P(\bar{E}) \cdot P(\bar{F}) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{12}{13} = \dfrac{9}{13} \simeq 0{,}692 \to 69{,}2\%$

42. $n(\Omega) = 40$

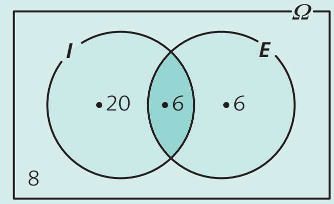
I: estudam inglês; *E*: estudam espanhol

Dos 40 alunos do curso, 8 não estudam nenhum dos dois idiomas. Nesse caso, 32 alunos estudam pelo menos um dos dois idiomas.

Sabemos que 26 alunos estudam inglês e 12 estudam espanhol. Então:

$26 - 12 = 14$ e $14 - 8 = 6$

Portanto, 6 alunos estudam inglês e espanhol. Representando por meio do diagrama de Venn, temos:



Rafael L. Gaion

a) $n(I) = 26$

$P(I) = \dfrac{26}{40} = \dfrac{13}{20} =$

$= 0{,}65 \to 65\%$

b) $n(E) = 12$

$P(E) = \dfrac{12}{40} = \dfrac{3}{10} =$

$= 0{,}3 \to 30\%$

c) $n(\overline{I \cup E}) = 8$

$P(\overline{I \cup E}) = \dfrac{8}{40} = \dfrac{1}{5} =$

$= 0{,}2 \to 20\%$

d) $n(I \cap E) = 6$

$P(I \cap E) = \dfrac{6}{40} = \dfrac{3}{20} =$

$= 0{,}15 \to 15\%$

e) $P(I \cup E) = P(I) + P(E) - P(I \cap E) =$

$= \dfrac{13}{20} + \dfrac{3}{10} - \dfrac{3}{20} = \dfrac{4}{5} =$

$= 0{,}8 \to 80\%$

43. $n(\Omega) = 1896$

L: candidatos que atingiram a pontuação mínima em Língua Portuguesa.

M: candidatos que atingiram a pontuação mínima em Matemática.

Dos 1896 candidatos, 860 não atingiram o mínimo em nenhuma das duas disciplinas.

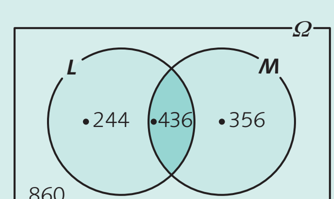
Sabemos que 680 candidatos atingiram a pontuação mínima em Língua Portuguesa e 792 em Matemática. Assim:

$792 + 680 = 1472$

$1896 - 1472 = 424$

$860 - 424 = 436$

Portanto, 436 candidatos atingiram a pontuação mínima nas duas disciplinas. Representando por meio do diagrama de Venn, temos:



Rafael L. Gaion

a) $n(L) = 680$

$P(L) = \frac{680}{1896} = \frac{85}{237} \simeq 0{,}359 \rightarrow 35{,}9\%$

b) $n(M) = 792$

$P(M) = \frac{792}{1896} = \frac{33}{79} \simeq 0{,}418 \rightarrow 41{,}8\%$

c) $n\left(\overline{L \cap M}\right) = 244 + 356 + 860 = 1\,460$

$P\left(\overline{L \cap M}\right) = \frac{1460}{1896} = \frac{365}{474} \simeq 0{,}77 \rightarrow 77\%$

d) $P(L \cap M) = 1 - P\left(\overline{L \cap M}\right) = 1 - \frac{365}{474} = \frac{109}{474} \simeq 0{,}23 \rightarrow 23\%$

44. $n(\Omega) = C_{12,6} = \frac{12!}{6! \cdot (12-6)!} = 924$

$n(A) = C_{5,3} \cdot C_{7,3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} =$

$= 10 \cdot 35 = 350$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{350}{924} \simeq 0{,}379 \rightarrow 37{,}9\%$

Portanto, das 6 vagas restantes, a probabilidade de que 3 sejam da região central é aproximadamente 38%.

- Resposta pessoal.
- Resposta pessoal. Espera-se que os alunos compreendam a importância de eventos que promovam a participação de toda a comunidade.

45. De acordo com as informações da questão, temos:

500: total de adesivos;

140: quantidade de adesivos relacionados somente a motos;

70: quantidade de adesivos relacionados somente a carros;

20: quantidade de adesivos relacionados a carros e motos;

270: quantidade de adesivos que não estão relacionados a carros e motos.

a) Falsa, pois a probabilidade de ser escolhido um adesivo relacionado somente a carro é dada por:

$\frac{70}{500} = 0{,}14$

b) Verdadeira.

c) Verdadeira.

d) Verdadeira.

46. a) Independentes, pois o primeiro lançamento da moeda não interfere no resultado do segundo lançamento da moeda.

b) Independentes, pois o lançamento do dado 1 não interfere no lançamento do dado 2.

c) Dependentes, pois retirar uma carta do baralho, sem reposição, modifica o espaço amostral da segunda retirada.

d) Dependentes, pois retirar uma bola de uma urna, sem reposição, altera o espaço amostral para o próximo sorteio.

47. a) Probabilidade de uma pessoa que gosta de esportes ser homem.

b) Probabilidade de uma pessoa que gosta de esportes ser mulher.

c) Probabilidade de uma pessoa que gosta de música não ser homem.

d) Probabilidade de uma pessoa que não gosta de cinema não ser mulher.

e) Probabilidade de uma mulher gostar de música.

f) Probabilidade de um homem não gostar de música.

- Resposta pessoal.
- Resposta pessoal.

48. Resposta pessoal. Possível resposta: sabendo que foi sorteada uma carta e, em seguida, foi sorteada outra sem reposição, qual é a probabilidade de a 1ª carta sorteada ser da cor verde e a 2ª ser da cor preta?

49. Considere o evento A e a primeira bola ser branca.

a) O evento B e a segunda bola ser azul:

$P\left(B \middle| A\right) = \frac{5}{14} \simeq 35{,}7\%$

b) O evento C e a segunda bola ser amarela:

$P\left(C \middle| A\right) = \frac{4}{14} \simeq 28{,}6\%$

c) O evento D e a segunda bola ser amarela:

$P\left(D \middle| A\right) = \frac{5}{14} \simeq 35{,}7\%$

d) No caso de a segunda bola não ser branca, temos o complemento do evento D. Assim:

$P\left(\overline{D} \middle| A\right) = 1 - \frac{5}{14} \simeq 64{,}3\%$

50.

	Masculino	Feminino
30 ou menos	99	98
Acima de 30	66	98
Total	165	196

a) A: mulher; B: acima de 30 anos

$P\left(A \middle| B\right) = \frac{98}{66 + 98} = \frac{49}{82} \simeq 0{,}598 \rightarrow 59{,}8\%$

b) C: homem; D: 30 anos ou menos

$P\left(C \middle| D\right) = \frac{99}{99 + 98} = \frac{99}{197} \simeq 0{,}503 \rightarrow 50{,}3\%$

c) $P\left(D \middle| A\right) = \frac{98}{196} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \rightarrow 50\%$

51. A: 2 bolas pretas e 1 bola branca

a) $n(\Omega) = C_{8,3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$

$n(A) = C_{3,2} \cdot C_{5,1} = \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{5!}{1!4!} = 3 \cdot 5 = 15$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{15}{56} \simeq 0{,}268 \rightarrow 26{,}8\%$

b) B: 3 bolas de mesma cor

$n(B) = C_{3,3} + C_{5,3} = \frac{3!}{3!0!} + \frac{5!}{3!2!} = 1 + 10 = 11$

$$P\left(A \,\middle|\, \overline{B}\right) = \frac{P\left(A \cap \overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} \qquad A \subset \overline{B} \Rightarrow A \cap \overline{B} = A$$

$$P\left(A \,\middle|\, \overline{B}\right) = \frac{P(A)}{1 - P(B)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(A \,\middle|\, \overline{B}\right) = \frac{\frac{15}{56}}{1 - \frac{11}{56}} = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} \to 33{,}\overline{3}\%$$

52. Considere o evento A um resultado positivo e o evento B um resultado positivo sendo portador da doença. Assim:

a) $P(A) = \dfrac{(200 - 170) + 90}{300} = \dfrac{120}{300} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4 \to 40\%$

b) $P\left(B \,\middle|\, A\right) = \dfrac{90}{120} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75 \to 75\%$

53. Considere o evento R sendo 2 DVDs de *rock*, o evento M sendo 2 DVDs de MPB e o evento S, 2 DVDs de samba. Desse modo, temos:

$P(R) = \dfrac{4}{12} \cdot \dfrac{3}{11}$ $\quad P(M) = \dfrac{5}{12} \cdot \dfrac{4}{11}$ $\quad P(S) = \dfrac{3}{12} \cdot \dfrac{2}{11}$

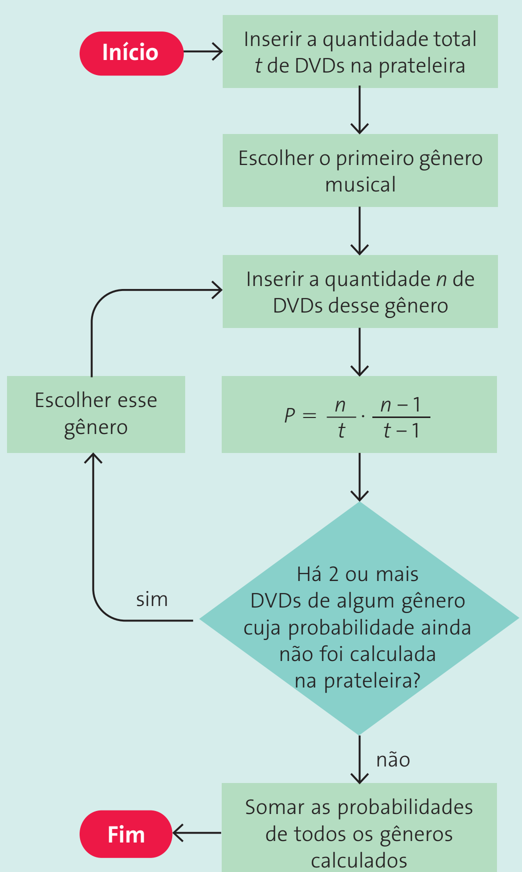
Assim:

$P(R) + P(M) + P(S) =$

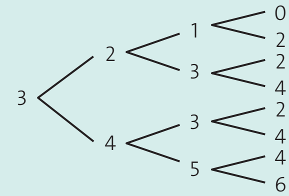
$$= \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{19}{66} = 0{,}2\overline{878}$$

Portanto, retirando 2 DVDs dessa estante, a probabilidade de serem do mesmo gênero musical é $28{,}\overline{78}\%$.

Um possível fluxograma é:



54. Representando a situação por meio da árvore de possibilidades, temos:



É mais provável que ele saia com R$ 2,00 ou R$ 4,00.

55. Considere o evento A um número par e o evento B um número divisível de 5. Assim:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \Rightarrow n(A) = 10$

$B = \{5, 10, 15, 20\} \Rightarrow n(B) = 4$

$A \cap B = A = \{10, 20\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$

$P\left(B \,\middle|\, A\right) = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2 \to 20\%$

Assim, a probabilidade de o evento B acontecer dado o evento A é 20%.

56. M: menina; H: menino; A: 1º filho é menina

$A = \{(M, M, M), (M, M, H), (M, H, H), (M, H, M)\}$

a) B: 2º e 3º filhos são meninas

$B = \{(M, M, M), (H, M, M)\}$ $\qquad A \cap B = \{(M, M, M)\}$

$P\left(B \,\middle|\, A\right) = \dfrac{1}{4} = 0{,}25 \to 25\%$

b) C: 2º filho menina e 3º filho menino

$C = \{(M, M, H), (H, M, H)\}$ $\qquad A \cap C = \{(M, M, H)\}$

$P\left(C \,\middle|\, A\right) = \dfrac{1}{4} = 0{,}25 \to 25\%$

c) D: 2 meninas e 1 menino

$D = \{(M, M, H), (M, H, M), (H, M, M)\}$

$A \cap D = \{(M, M, H), (M, H, M)\}$

$P\left(D \,\middle|\, A\right) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5 \to 50\%$

57. a) H: filho ser menino; M: filho ser menina

$P(H) = P(M) = \dfrac{1}{2} = 0{,}5 \to 50\%$

- Família de Tennessee:

  Como a probabilidade dos eventos sucessivos é independente, temos:

  Seja A o evento em que os 13 filhos do casal sejam meninos. Assim, segue que:

- Família de Illinois:

  $P(A) = P(H)^{13} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{13} = \dfrac{1}{8\,192}$

  Seja B o evento em que os 5 primeiros filhos, dos 11 do casal, sejam meninas e C o evento em que os outros 6 filhos sejam meninos. Assim, segue que:

  $P(B) \cdot P\left(C \,\middle|\, B\right) = P(M)^5 \cdot P(H)^6 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 =$

  $= \left(\dfrac{1}{2}\right)^{11} = \dfrac{1}{2\,048}$

b) A probabilidade de o próximo filho ser menino ou menina é a mesma para o evento. Como os eventos (cada nascimento) são independentes, a probabilidade de o próximo ser menino é $\dfrac{1}{2}$, assim como a probabilidade de ser menina.

c) Seja D o evento em que os 5 primeiros filhos, dos 13 filhos do casal, sejam meninos e E o evento em que os outros 8 filhos sejam meninas. Assim, segue que:

$$P(D) \cdot P\left(E \mid D\right) = P(H)^5 \cdot P(M)^8 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{13} = \frac{1}{8\,192}$$

d) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos compreendam que a probabilidade de um filho nascer menino ou menina é a mesma, ou seja, 50%. Além disso, a sequência de nascimento dos filhos é muito particular. Logo, a probabilidade de ocorrer igual em mais de uma família é pequena.

e) Resposta pessoal.

58. alternativa **a**

De acordo com as informações dadas, temos: $n(\Omega) = 1\,200$; I: falam inglês; E: falam espanhol.

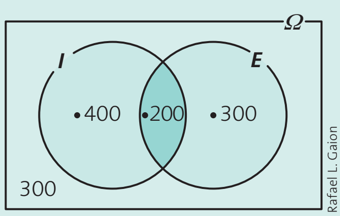
Dos 1 200 alunos, 300 não falam nenhum dos idiomas, assim

$1\,200 - 300 = 900$, isto é, 900 alunos falam pelo menos um dos idiomas.

$500 + 600 = 1\,100$ e $1\,100 - 900 = 200$

Logo, 200 alunos falam inglês e espanhol.

Representando as informações por meio de um diagrama, temos:



Seja o evento A o aluno que não fale inglês e o evento B, o aluno que não fale inglês e fale espanhol. De acordo com o diagrama $n(A) = 600$ e $n(B) = 300$. Assim:

$$P\left(B \mid A\right) = \frac{300}{600} = \frac{1}{2}$$

Portanto, a probabilidade de um aluno que não fale inglês, mas fale espanhol, é de $\frac{1}{2}$.

59. a) $\frac{1}{2\,332} \cdot \frac{1}{154\,518} = \frac{1}{360\,335\,976}$

b) $\frac{1}{1\,038} \cdot \frac{1}{370} = \frac{1}{384\,060}$

c) $\frac{1}{370} \cdot \frac{1}{10\,003} = \frac{1}{3\,701\,110}$

d) $\frac{1}{7\,151\,980} \cdot \frac{1}{1\,038} = \frac{1}{7\,423\,755\,240}$

- Resposta esperada: Pouco provável, pois as probabilidades estão mais próximas de 0 do que de 1.

60. alternativa **b**

1) Correta.

De acordo com a última coluna da tabela, na primeira linha, a probabilidade total de uma pessoa escolhida ao acaso ter pressão alta é 0,20.

2) Correta.

E: pessoas com excesso de peso

A: pessoas com pressão alta

$$P\left(A \mid E\right) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}10}{0{,}25} = 0{,}40$$

3) Incorreta.

N: pessoas com peso normal

A: pessoas com pressão alta

$$P\left(N \mid A\right) = \frac{P(N \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}08}{0{,}2} = 0{,}40$$

4) Correta.

De acordo com a terceira coluna e a segunda linha da tabela, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter pressão normal e peso deficiente é 0,20.

61. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a) A: ocorrer a face 5

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$\binom{n}{p} \cdot \left[P(A)\right]^p \cdot \left[1 - P(A)\right]^{n-p} =$$

$$= \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{6-4} =$$

$$= \frac{6!}{4!(6-2)!} \cdot \frac{1}{1\,296} \cdot \frac{25}{36} = 15 \cdot \frac{25}{46\,656} =$$

$$= \frac{125}{15\,552} \simeq 0{,}008 \to 0{,}8\%$$

b) B: ocorrer a face 6

$$P(B) = \frac{1}{6}$$

$$\binom{n}{p} \cdot \left[P(B)\right]^p \cdot \left[1 - P(B)\right]^{n-p} =$$

$$= \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{6-3} =$$

$$= \frac{6!}{3!(6-3)!} \cdot \frac{1}{216} \cdot \frac{125}{216} = 20 \cdot \frac{125}{46\,656} =$$

$$= \frac{625}{11\,664} \simeq 0{,}054 \to 5{,}4\%$$

c) C: ocorrer um número par

$$P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\binom{n}{p} \cdot \left[P(C)\right]^p \cdot \left[1 - P(C)\right]^{n-p} =$$

$$= \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-5} =$$

$$= \frac{6!}{5!(6-5)!} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{32} =$$

$$= 0{,}09375 \to 9{,}375\%$$

62. C: cara; K: coroa

$$P(C) = P(K) = \frac{1}{2}$$

$$\binom{n}{p} \cdot \left[P(C)\right]^p \cdot \left[P(K)\right]^{n-p} = \binom{8}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8-6} =$$

$$= \frac{8!}{6!(8-6)!} \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{4} = 28 \cdot \frac{1}{256} =$$

$$= \frac{7}{64} \simeq 0{,}1094 \to 10{,}94\%$$

63. $n(\Omega) = 10$

a) A: retirar bola azul

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [1 - P(A)]^{n-p} =$$

$$= \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right)^{5-4} =$$

$$= \frac{5!}{4!(5-4)!} \cdot \frac{16}{625} \cdot \frac{3}{5} = 5 \cdot \frac{48}{3\,125} = \frac{48}{625} =$$

$$= 0{,}0768 \to 7{,}68\%$$

b) B: retirar bola vermelha

$$P(B) = \frac{3}{10}$$

$$\binom{n}{p} \cdot [P(B)]^p \cdot [1 - P(B)]^{n-p} =$$

$$= \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{3}{10}\right)^{5-5} =$$

$$= \frac{5!}{5!(5-5)!} \cdot \frac{243}{100\,000} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{243}{100\,000} =$$

$$= \frac{243}{100\,000} = 0{,}00243 \to 0{,}243\%$$

c) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$$\binom{n}{p} \cdot [P(\bar{A})]^p \cdot [1 - P(\bar{A})]^{n-p} =$$

$$= \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right)^{5-5} = 1 \cdot \frac{243}{3\,125} \cdot 1 = \frac{243}{3\,125} =$$

$$= 0{,}07776 \to 7{,}776\%$$

64. C: cara

$$P(C) = 60\% = \frac{3}{5}$$

$$\binom{n}{p} \cdot [P(C)]^p \cdot [1 - P(C)]^{n-p} =$$

$$= \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right)^{5-4} =$$

$$= \frac{5!}{4!(5-4)!} \cdot \frac{81}{625} \cdot \frac{2}{5} = 5 \cdot \frac{162}{3125} = \frac{162}{625} =$$

$$= 0{,}2592 \to 25{,}92\%$$

65. A: ganhar brinde

$$\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [1 - P(A)]^{n-p} =$$

$$= \binom{50}{8} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^8 \cdot \left(1 - \frac{1}{20}\right)^{50-8} =$$

$$= \frac{50!}{8!(50-8)!} \cdot \frac{1}{20^8} \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^{42} \simeq 0{,}002 \to 0{,}2\%$$

66. A: filhote fêmea

$$P(A) = \frac{1}{5}$$

$$\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [1 - P(A)]^{n-p} = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{8-3} =$$

$$= \frac{8!}{3!(8-3)!} \cdot \frac{1}{125} \cdot \frac{1\,024}{3\,125} = 56 \cdot \frac{1\,024}{390\,625} =$$

$$= \frac{57\,344}{390\,625} \simeq 0{,}147 \to 14{,}7\%$$

67. A: fazer gol

$$P(A) = \frac{3}{4}$$

$$\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [1 - P(A)]^{n-p} = \binom{7}{5} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{7-5} =$$

$$= \frac{7!}{5!(7-5)!} \cdot \frac{243}{1024} \cdot \frac{1}{16} = 21 \cdot \frac{243}{16\,384} =$$

$$= \frac{5\,103}{16\,384} \simeq 0{,}311 \to 31{,}1\%$$

68. A: acertar resposta

$$\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [1 - P(A)]^{n-p} =$$

$$= \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-7} =$$

$$= \frac{10!}{7!(10-7)!} \cdot \frac{1}{128} \cdot \frac{1}{8} = 120 \cdot \frac{1}{1\ 024} =$$

$$= \frac{15}{128} \simeq 0{,}1172 \to 11{,}72\%$$

69. A: marcar alternativa correta

a) $\frac{40}{100} \cdot (10 + 20 + 5) = 14$

$$\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [1 - P(A)]^{n-p} =$$

$$= \binom{35}{14} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{14} \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{35-14} =$$

$$= \frac{35!}{14!(35-14)!} \cdot \frac{1}{5^{14}} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{21} \simeq 0{,}003506 \to 0{,}3506\%$$

b) $\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [1 - P(A)]^{n-p} =$

$$= \binom{35}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{35-5} =$$

$$= \frac{35!}{5!(35-5)!} \cdot \frac{1}{5^5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{30} \simeq 0{,}129 \to 12{,}9\%$$

70. A: comprar calça com numeração entre 40 e 44

$$P(\bar{A}) = 30\% = \frac{3}{10}$$

$$\binom{n}{p} \cdot [P(\bar{A})]^p \cdot [1 - P(\bar{A})]^{n-p} =$$

$$= \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{3}{10}\right)^{8-5} =$$

$$= \frac{8!}{5!(8-5)!} \cdot \frac{243}{100\,000} \cdot \frac{343}{1\,000} = 56 \cdot \frac{83\,349}{100\,000\,000} =$$

$$\frac{4\,667\,544}{100\,000\,000} = \frac{583\,443}{12\,500\,000} \simeq 0{,}0467 \to 4{,}67\%$$

71. Considere o evento A uma pessoa vacinada e que adquiriu uma doença. Assim:

$$P(A) = 20\% = \frac{1}{5}$$

$$\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [1 - P(A)]^{n-p} = \binom{8}{4} \cdot \left[\frac{1}{5}\right]^4 \cdot \left[1 - \frac{1}{5}\right]^4$$

$$= \frac{8!}{4! \cdot (8-4)!} \cdot \frac{1}{625} \cdot \frac{256}{625} = 70 \cdot \frac{256}{390\,625} =$$

$$= \frac{17\,920}{390\,625} = \frac{3\,584}{78\,125} \simeq 0{,}046 \to 4{,}6\%$$

Portanto, escolhendo-se ao acaso 8 pessoas vacinadas, a probabilidade de 4 delas adquirirem a doença é de aproximadamente 4,6%.

Capítulo 3 Estatística

1. Qualitativa:

- nominal: tipo de domicílio
- ordinal: grau de instrução dos moradores e mês de nascimento dos moradores

Quantitativa:

- discreta: total de homens e mulheres no domicílio, quantidade de banheiros no domicílio e idade dos moradores.
- contínua: rendimento mensal dos moradores.

2. Resposta pessoal. Possível resposta: pode fazer parte do questionário as variáveis qualitativas: nome, endereço, sexo; e as variáveis quantitativas: idade e telefone. O critério para formar uma amostra pode ser sortear dois alunos de cada fila da sala de aula.

3. a) internautas brasileiros

b) 10 500

c) Quantitativas: idade e quantidade de dias por semana que acessa à internet; qualitativas: sexo, escolaridade, profissão, se costuma realizar compras pela internet, gênero musical preferido, gênero cinematográfico preferido e gênero literário preferido.

4. Resposta pessoal. Possível resposta:
Uma indústria sorteou alguns de seus 6 000 funcionários para participar de uma pesquisa a respeito da qualidade de vida no trabalho. Eles foram questionados sobre que elemento seria mais relevante para se ter em um espaço de descanso. Por meio de elementos pré-definidos, os resultados obtidos foram indicados no quadro a seguir.

Elemento	Quantidade de indicações
Jogos	45
Televisão	35
Wi-Fi	90
Livros, revistas e jornais	24
Poltronas para descanso	56

Cada funcionário fez apenas uma sugestão. Sabendo disso, responda:

a) Qual a população dessa pesquisa?

b) Qual a quantidade da amostra selecionada?

c) Que tipo de variáveis foram aplicadas no questionário da pesquisa?

5. a) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que não, pois a pesquisa pode ser feita com uma amostra não equilibrada de eleitores, não representando de fato a intenção de voto da população, ou seja, a amostra só consideraria os eleitores que acessam à página específica da rede social utilizada.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que a pesquisa pode não ser confiável, pois a opinião dos eleitores da região em que a pesquisa foi feita pode ser diferente da opinião dos eleitores de outras regiões do país.

6.

Dados dos funcionários de uma empresa – 2021				
Estado civil	f	f_a	f_r	f_{ar}
Casado	6	6	37,5%	37,5%
Solteiro	10	16	62,5%	100%
Total	16		100%	

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

7. Resposta pessoal. Possível resposta: Construa uma tabela de frequências, obtendo f, f_a, f_r e f_{ar} para a variável "Quantidade de comunidades quilombolas no Brasil – 2019"; Qual o total de comunidades quilombolas no Brasil em 2019? Que porcentagem representa a quantidade de comunidades quilombolas na Região Sul do Brasil?

8.

Quantidade de carros vendidos em uma concessionária em cada dia da semana no mês de novembro de 2021				
Dias da semana	f	f_a	f_r	f_{ar}
Domingo	7	7	14,89%	14,89%
Segunda-feira	11	18	23,40%	38,29%
Terça-feira	5	23	10,64%	48,93%
Quarta-feira	3	26	6,38%	55,31%
Quinta-feira	9	35	19,15%	74,46%
Sexta-feira	6	41	12,77%	87,23%
Sábado	6	47	12,77%	100%
Total	47		100%	

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

9. a)

Refeições diárias por pessoa – 2021				
Quantidade de refeições diárias	f	f_a	f_r	f_{ar}
1	3	3	0,25%	0,25%
2	190	193	15,83%	16,08%
3	420	613	35%	51,08%
4	377	990	31,42%	82,5%
5	96	1 086	8%	90,5%
6	72	1 158	6%	96,5%
7 ou mais	42	1 200	3,5%	100%
Total	1 200		100%	

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

b) Foram entrevistadas 1 200 pessoas.

c) São 990 pessoas que realizam 4 refeições ou menos por dia.

d) A porcentagem de entrevistados que fazem a quantidade de refeições recomendadas é 14%.

10. a)

39	53	61	68	73	78	83	86
43	53	61	70	73	81	84	87
50	55	63	70	73	81	85	88
50	58	65	72	76	81	85	91
52	58	67	73	78	83	86	98

b)

Notas obtidas por 40 alunos de uma turma em certa avaliação de Matemática – 2021

Nota	f	f_a	f_r	f_{ar}
39 ⊢⊣ 49	2	2	5%	5%
50 ⊢ 60	8	10	20%	25%
60 ⊢ 70	6	16	15%	40%
70 ⊢ 80	10	26	25%	65%
80 ⊢ 90	12	38	30%	95%
90 ⊢ 100	2	40	5%	100%
Total	40		100%	

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

c) • 26 alunos obtiveram nota inferior a 79;
• 75% dos alunos obtiveram nota superior ou igual a 59.

11. a) $9 + 3 + 3 + 3 = 18$
Portanto, 18 funcionários.

b) $27 + 15 + 9 + 3 + 3 = 57$

$\frac{57}{60} = 0{,}95 = 95\%$

Portanto, 95% dos funcionários.

c) $15 + 9 + 3 + 3 = 30$
Portanto, 30 funcionários.

12. alternativa **d**

Observando o gráfico **II**, verificamos que há uma maior quantidade de espécies no ambiente com pH ótimo de sobrevida situado entre 7 e 8. Então, de acordo com o gráfico **I**, pode-se esperar uma maior quantidade de espécies no ambiente D, que tem a coluna correspondente a esse pH.

13.
- $\frac{A}{50} = 0{,}08 \Rightarrow A = 4$
- $A + B = 17 \Rightarrow 4 + B = 17 \Rightarrow B = 13$
- $A = E \Rightarrow E = 4$
- $F = 19 + 17 = 36$
- $H = 50$
- $\frac{B}{50} = I \Rightarrow \frac{13}{50} = I \Rightarrow I = 0{,}26 \rightarrow 26\%$
- $\frac{19}{50} = J \Rightarrow J = 0{,}38 \rightarrow 38\%$
- $8\% + I + J + L = 96\% \Rightarrow 8\% + 26\% + 38\% + L = 96\% \Rightarrow$
$\Rightarrow L = 24\%$
- $\frac{C}{50} = L \Rightarrow \frac{C}{50} = 0{,}24 \Rightarrow C = 12$
- $A + B + 19 + C + D = 50 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 + 13 + 19 + 12 + D = 50 \Rightarrow D = 2$
- $G = C + F = 12 + 36 = 48$
- $\frac{D}{50} = M \Rightarrow \frac{2}{50} = M \Rightarrow M = 0{,}04 \rightarrow 4\%$
- $N = 8\% + I + J + L + M = 8\% + 26\% + 38\% + 24\% + 4\% =$
$= 100\%$
- $O = 8\%$
- $P = 8\% + I = 8\% + 26\% = 34\%$
- $Q = J + P = 38\% + 34\% = 72\%$
- $R = M + 96\% = 4\% + 96\% = 100\%$

14. a) $\overline{x} = \frac{26{,}7 + 25{,}8 + 20{,}6 + 19{,}8 + 19{,}5}{5} =$

$= \frac{112{,}4}{5} = 22{,}48$

Portanto, em média, 22,48 milhões de pessoas visitaram as cidades mais visitadas o mundo em 2019.

b) A quantidade de turistas foi superior à média em Hong Kong e Bangcoc.

c) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos citem ações como investimento em infraestrutura, segurança e acessibilidade.

15. Temos:

a) $13 + 28 + 32 + 10 + 4 + 1 = 88$

Portanto, a pesquisa foi realizada com 88 famílias.

b) $\overline{x}_p = \frac{0 \cdot 13 + 1 \cdot 28 + 2 \cdot 32 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{88} =$

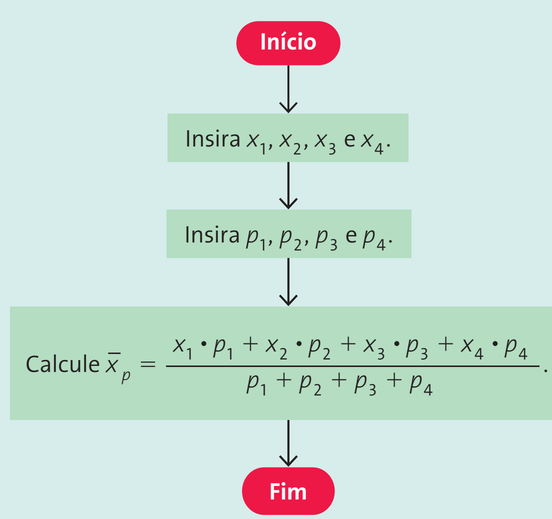
$= \frac{143}{88} = 1{,}625$

Portanto, a quantidade média de filhos por família é 1,625.

16. Resposta pessoal. Possível resposta: Considere as notas x_1, x_2, x_3 e x_4 e seus respectivos pesos p_1, p_2, p_3 e p_4. Escrevendo o algoritmo, temos:

Início
1. Leia as notas das provas.
2. Leia o peso de cada prova.
3. Calcule $\overline{x}_p = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}$.

Fim



17. alternativa **c**

$$\overline{x}_p = \frac{30 \cdot 60 + 35 \cdot 40}{100} = 32$$

Portanto, a média de idade da população analfabeta dessa cidade é 32 anos. Assim, ela vai receber o recurso **III**.

18. a) $\overline{x}_p = \frac{65 \cdot 0{,}3 + 72 \cdot 0{,}3 + 84 \cdot 0{,}4}{0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}4} =$

$$= \frac{74{,}7}{1} = 74{,}7$$

Portanto, a média final obtida por esse aluno foi 74,7.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que é a média ponderada, devido à aplicação de pesos distintos nas provas.

19. Resposta pessoal. Possível resposta: Calcule a média diária de decolagens para essa quinzena.

20. • Nota final obtida pelo candidato **A**

$$\overline{x}_p = \frac{19 \cdot 2 + 16 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 20 \cdot 3 + 10 \cdot 5}{2 + 2 + 3 + 3 + 5} = \frac{207}{15} = 13{,}8$$

• Nota final obtida pelo candidato **B**

$$\overline{y}_p = \frac{21 \cdot 2 + 19 \cdot 2 + 11 \cdot 3 + 22 \cdot 3 + 5 \cdot 5}{2 + 2 + 3 + 3 + 5} = \frac{204}{15} = 13{,}6$$

21. a) • Média de Vanessa: $\overline{x}_V = \frac{455}{50} = 9{,}1$

$$\frac{8{,}5P_1 + 9{,}5P_2}{P_1 + P_2} = 9{,}1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8{,}5P_1 + 9{,}5P_2}{5} = 9{,}1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8{,}5P_1 + 9{,}5P_2 = 45{,}5 \qquad \text{(I)}$$

• Média de Omar: $\overline{x}_O = \frac{395}{50} = 7{,}9$

$$\frac{8{,}5P_1 + 7{,}5P_2}{P_1 + P_2} = 7{,}9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8{,}5P_1 + 7{,}5P_2}{5} = 7{,}9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8{,}5P_1 + 7{,}5P_2 = 39{,}5 \qquad \text{(II)}$$

Por I e II, temos:

$$\begin{cases} 8{,}5P_1 + 9{,}5P_2 = 45{,}5 \\ 8{,}5P_1 + 7{,}5P_2 = 39{,}5 \quad \cdot(-1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8{,}5P_1 + 9{,}5P_2 = 45{,}5 \\ -8{,}5P_1 - 7{,}5P_2 = -39{,}5 \end{cases}$$

$$2P_2 = 6 \quad \Rightarrow P_2 = 3$$

$$P_1 + P_2 = 5 \Rightarrow P_1 + 3 = 5 \Rightarrow P_1 = 2$$

Portanto, $P_1 = 2$ e $P_2 = 3$.

b) $\frac{6{,}5P_1 + 8P_2}{P_1 + P_2} = \frac{6{,}5 \cdot 2 + 8 \cdot 3}{5} = \frac{37}{5} = 7{,}4$

$50 \cdot 7{,}4 = 370$

Portanto, a bonificação será R$ 370,00.

c) $\frac{7P_1 + n_B P_2}{P_1 + P_2} \cdot 50 = 410 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{7 \cdot 2 + n_B \cdot 3}{5} \cdot 50 = 410 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_B = 9$$

Portanto, a outra nota foi 9.

22. Resolução na página **255**.

23. • $\overline{x} = \frac{12 + 7 + 3 \cdot 6 + (-4) + 0 + (-2) + 5 + 2 + 4 + 9}{12} =$

$$= \frac{51}{12} = 4{,}25 \rightarrow 4{,}25 \text{ funcionários}$$

• $Mo = 6 \rightarrow 6$ funcionários

• $Md = \frac{5 + 6}{2} = 5{,}5 \rightarrow 5{,}5$ funcionários

24. alternativa **b**

Pela quantidade de estudantes, podemos verificar que a mediana será dada pela média aritmética dos dois valores centrais. Assim:

$$Md = \frac{6 + 8}{2} = 7$$

Portanto, a nota mediana dessa prova foi 7,0.

25. alternativa **d**

Organizando os dados em um rol, temos:

0	6	6,5	6,5	7	7	8	8	10	10

Como $n = 10$, a mediana é dada pela média aritmética do 5º e do 6º termo do conjunto de valores: $Md = \frac{7 + 7}{2} = 7$.

Se esse aluno obtivesse nota menor ou igual a 7, os termos centrais continuariam sendo iguais a 7, logo a mediana não se alteraria.

Obtendo nota 10 para o aluno faltoso, teríamos:

6	6,5	6,5	7	7	8	8	10	10	10

Assim: $Md = \frac{7 + 8}{2} = 7{,}5$.

Obtendo nota maior do que 7 e menor do que 10, teríamos $7 < Md \leqslant 7{,}5$.

Como $7{,}5 < 7{,}6 < 7{,}8$, a equipe Gama continuaria na terceira colocação, independentemente da nota obtida pelo aluno.

26. a) • Média:

$$\overline{x} = \frac{6 \cdot 17 + 23 \cdot 18 + 16 \cdot 19 + 8 \cdot 20 + 5 \cdot 21 + 2 \cdot 22}{60} =$$

$$= \frac{1129}{60} \simeq 18{,}82$$

• Moda: a idade com maior frequência é 18, logo $Mo = 18$.

• Mediana: os dois valores centrais são iguais a 19. Assim: $Md = 19$.

b) $\underbrace{6}_{17 \text{ anos}} + \underbrace{23}_{18 \text{ anos}} + \underbrace{16}_{19 \text{ anos}} + \underbrace{8}_{20 \text{ anos}} = 53$

Portanto, 53 alunos.

c) • Alunos com mais de 19 anos:

$$\underbrace{8}_{20\text{ anos}} + \underbrace{5}_{21\text{ anos}} + \underbrace{2}_{22\text{ anos}} = 15$$

• Total de alunos: $6 + 23 + 16 + 8 + 5 + 2 = 60$.

Assim, temos: $\frac{15}{60} = 0{,}25$.

Portanto, 25% dos alunos dessa turma têm mais de 19 anos.

27. Organizando o conjunto em ordem crescente, temos:

0	1	1	1	1	1	2	3	4
5	5	6	7	7	8	9	10	10

a) Como Q_1 corresponde ao P_{25}, temos: $I_{25} = 18\frac{25}{100} = 4{,}5$.

Assim, P_{25} é o 5º valor da sequência, ou seja, $Q_1 = 1$.

b) Como Q_2 corresponde ao P_{50}, temos: $I_{50} = 18\frac{50}{100} = 9$.

Assim, P_{50} é a média aritmética entre o 9º e o 10º valor da sequência, ou seja, $Q_2 = 4{,}5$.

c) Como Q_3 corresponde ao P_{75}, temos: $I_{75} = 18\frac{75}{100} = 13{,}5$.

Assim, P_{75} é o 14º valor da sequência, ou seja, $Q_3 = 7$.

d) Como D_5 corresponde ao P_{50}, temos: $I_{50} = 18\frac{50}{100} = 9$.

Assim, P_{50} é a média aritmética entre o 9º e o 10º valor da sequência, ou seja, $D_5 = 4{,}5$.

e) Como D_3 corresponde ao P_{30}, temos:

$I_{30} = 18\frac{30}{100} = 5{,}4$.

Assim, P_{30} é o 6º valor da sequência, ou seja, $D_3 = 1$.

f) Como D_8 corresponde ao P_{80}, temos:

$I_{80} = 18\frac{80}{100} = 14{,}4$.

Assim, P_{80} é o 15º valor da sequência, ou seja, $D_8 = 8$.

28. a) Como Q_3 corresponde ao P_{75}, temos:

$I_{75} = 16\frac{75}{100} = 12$.

Assim, P_{75} é a média aritmética entre o 12º e o 13º valor da sequência, ou seja, $Q_3 = 50$.

Como D_5 corresponde ao P_{50}, temos:

$I_{50} = 16\frac{50}{100} = 8$.

Assim, P_{50} é a média aritmética entre o 8º e o 9º valor da sequência, ou seja, $D_5 = 48{,}5$.

b) Possível resposta: 75% dos pães tem 50 g ou menos e 50% dos pães tem 48,5 g ou menos.

29. a) Calculando a média, temos:

$$\frac{3 \cdot 130 + 4 \cdot 140 + 7 \cdot 150 + 6 \cdot 160 + 2 \cdot 170}{22} = 150$$

Portanto, o tempo médio de funcionamento das máquinas é 150 horas.

b) Organizando os dados do quadro em rol, temos:

130	130	130	140	140	140	140	150	150	150	150
150	150	150	160	160	160	160	160	160	170	170

Assim, sendo $n = 22$, temos:

• Q_1 corresponde a P_{25}, então: $I_{25} = 22 \cdot \frac{25}{100} = 5{,}5$.

Portanto, considerando o 6º elemento do rol, temos $Q_1 = 140$.

• Q_3 corresponde a P_{75}, então: $I_{75} = 22 \cdot \frac{75}{100} = 16{,}5$.

Portanto, considerando o 17º elemento do rol, temos $Q_3 = 160$.

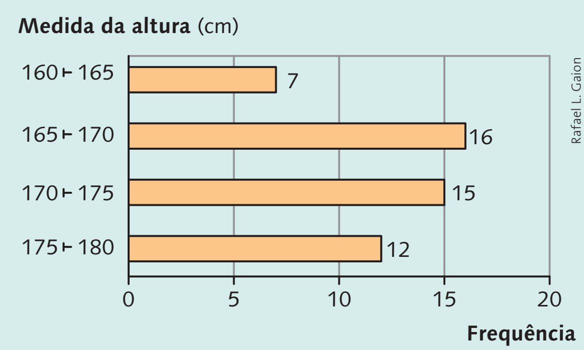
c) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que a revisão de 25% das máquinas é feita com até 140 horas de funcionamento e a revisão de 75% das máquinas é feita com até 160 horas de funcionamento.

30. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos formulem uma situação envolvendo valores que possam ser organizados em rol e que elaborem questionamentos relacionados à interpretação dos resultados.

31. Analisando o gráfico, verificamos que os três dias consecutivos em que há maior quantidade de acessos são sexta-feira, sábado e domingo. Assim, de acordo com as regras impostas por Renata e para que ela tenha uma maior quantidade de acessos nos dias de inscrição e no dia do sorteio, ela deve iniciar as inscrições na sexta-feira e realizar o sorteio no domingo.

32. Resposta pessoal. Possível resposta: Em um concurso público, foram feitos exames de aptidão física. Entre os dados obtidos, temos as alturas dos candidatos, conforme o gráfico a seguir.

Medida da altura dos candidatos – exame de aptidão física – 2021



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

a) A medida da altura mediana se encontra em que classe?

b) Determine o primeiro e o terceiro quartil.

33. a) De acordo com o gráfico, em 2016, no Brasil e nos demais países, a energia mais utilizada foi a não renovável.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que não é possível fazer afirmações sobre a quantidade de energia produzida com os dados apresentados, pois o gráfico refere-se à relação entre os tipos de energia produzida.

34. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que não parece razoável, pois a diferença entre a quantidade de vítimas de 2020 para 2021 é aproximadamente 20 pessoas, o que representa menos de 5% da quantidade do ano de 2020.

35. a) Não, pois o Japão teve uma diminuição no índice de reciclagem.

b) Sendo x o total de toneladas produzidas em 2017, temos:

$\frac{295{,}8}{x} = \frac{97{,}3}{100} \Rightarrow x \simeq 304$, ou seja, no Brasil, foram produzidas cerca de 304 mil toneladas de latas de alumínio.

c) A maior variação da porcentagem de latas recicladas no Brasil foi 6,7%; no Japão foi 18,6% e nos EUA foi 13,2%. Assim, a maior variação ocorreu no Japão.

d) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que a reciclagem possibilita a economia de energia na produção de novas latas de alumínio, além de não ser necessária a utilização da matéria-prima para produzir uma nova meta.

e) Possíveis respostas: latas, panelas, utensílios de cozinha, embalagens. Espera-se que os alunos respondam que, caso não fossem reciclados, esses objetos ocupariam espaços nos lixões e exigiriam mais mineração para a produção de objetos novos, entre outros motivos.

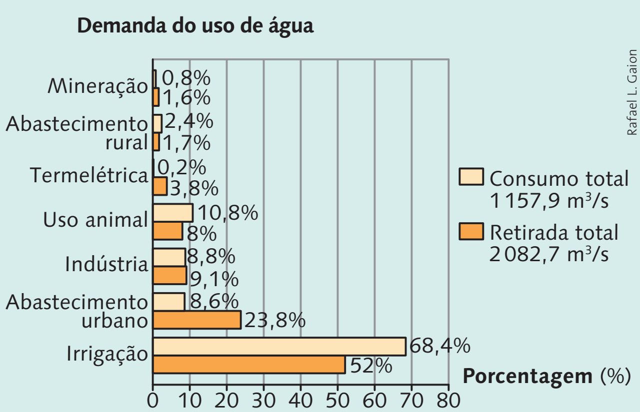
36. a) Em janeiro, fevereiro e março de 2017. Possível resposta: nesse trimestre móvel, a quantidade de pessoas desocupadas que estavam à procura de emprego atingiu seu maior número no período de referência.

b) Em 2019, ocorreu a menor taxa: de 11%; em 2017, ocorreu a maior taxa: 13,7%. Desse modo, a maior variação da taxa de desocupação foi 2,7%.

c) No primeiro trimestre de 2017, a taxa foi 12,6%; no último trimestre de 2019, a taxa foi 11%. Assim, a taxa diminuiu 1,6%.

37. a)

Demanda de uso de água no Brasil – 2017



Rafael L. Gaion

Fonte de pesquisa: AGÊNCIA NACIONAL DE ÁGUAS (ANA). *Manual de usos consuntivos de águas no Brasil*. Brasília, 2019. Disponível em: <http://www.snirh.gov.br/portal/snirh/centrais-de-conteudos/central-de-publicacoes/ana_manual_de_usos_consuntivos_da_agua_no_brasil.pdf>. Acesso em: 18 fev. 2020.

b) Resposta pessoal. Possível resposta: Em uma residência com 4 pessoas que consomem 38 m³ de água por mês, cada pessoa consome em média 316,67 litros de água por dia, sendo superior aos 110 litros indicado para o consumo diário.

38. a) Não, pois diversos tipos de pessoas moram em variados municípios, cuja realidade local é diferente dos outros municípios do estado. A amostra daria unicamente indicações sobre a população constituída pelos moradores desse município.

b) Sim, pois as porcentagens indicadas somam mais do que 100%, a amostra utilizada não é representativa e a área do setor correspondente a 55% é menor do que deveria ser.

39. Resposta pessoal. Possível resposta: Qual região apresenta a maior porcentagem de produção de cana-de-açúcar? Qual região apresenta a menor porcentagem de produção de cana-de-açúcar?

40. a)

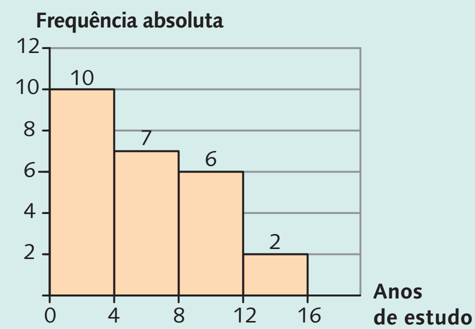
Quantidade de anos de estudo de cada um dos 25 candidatos a um emprego – 2021

Anos de estudo	f	f_a	f_r	f_{ar}
0 ⊢ 4	10	10	40%	40%
4 ⊢ 8	7	17	28%	68%
8 ⊢ 12	6	23	24%	92%
12 ⊢ 16	2	25	8%	100%
Total	25		100%	

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

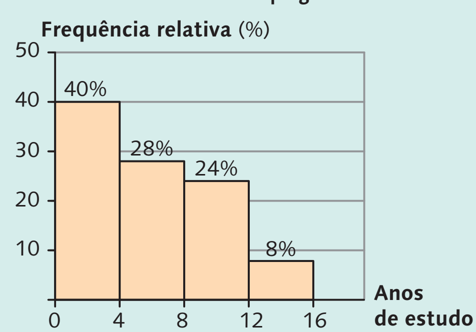
b)

Quantidade de anos de estudo de cada um dos 25 candidatos a um emprego – 2021



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

Quantidade de anos de estudo de cada um dos 25 candidatos a um emprego – 2021



Sergio L. Filho

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

c) $6 + 2 = 8 \rightarrow 8$ candidatos

d) $40\% + 28\% + 24\% = 92\%$

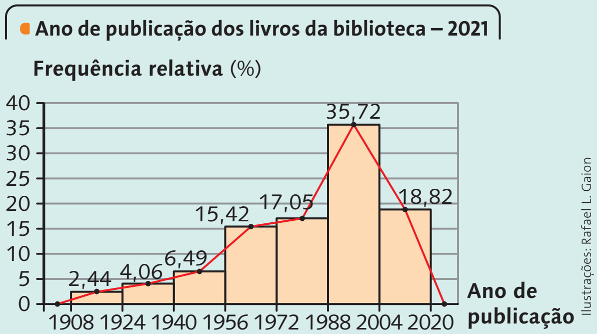
41. a)

Ano de publicação dos livros da biblioteca – 2021

Ano de publicação	f	f_a	f_r	f_{ar}
1908 ⊢ 1924	978	978	2,44%	2,44%
1924 ⊢ 1940	1 630	2 608	4,06%	6,5%
1940 ⊢ 1956	2 608	5 216	6,49%	12,99%
1956 ⊢ 1972	6 194	11 410	15,42%	28,41%
1972 ⊢ 1988	6 846	18 256	17,05%	45,46%
1988 ⊢ 2004	14 344	32 600	35,72%	81,18%
2004 ⊢ 2020	7 561	40 161	18,82%	100%
Total	40 161		100%	

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

b)



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

42. a) de 7 a 17 pessoas

b) Sim. Na faixa de IMC de 25,5 a menos de 29, há 14 pessoas. Logo, há pelo menos 14 pessoas com sobrepeso nessa empresa.

c) Não podemos dizer com certeza, pois não há informações suficientes para garantir que todas as pessoas contadas na terceira linha estejam na categoria de peso normal ou na de sobrepeso.

d) $\frac{73}{(1{,}72)^2} \simeq 24{,}68$

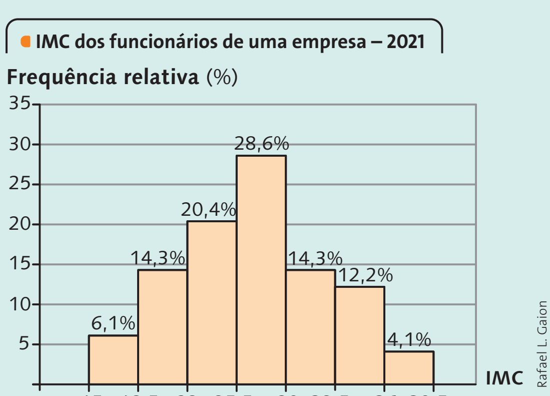
Essa pessoa se enquadra na categoria de peso normal.

e)

IMC dos funcionários de uma empresa – 2021

IMC	f	f_r
15 ⊢ 18,5	3	6,1%
18,5 ⊢ 22	7	14,3%
22 ⊢ 25,5	10	20,4%
25,5 ⊢ 29	14	28,6%
29 ⊢ 32,5	7	14,3%
32,5 ⊢ 36	6	12,2%
36 ⊢ 39,5	2	4,1%
Total	49	100%

Elaborado pelo autor com dados fictícios.



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

43. a) Foram produzidas no Brasil em 2012 um total de 1 690 187 motos.

b) O aumento da produção brasileira de 2004 a 2014 foi de 460 329 motos, ou seja, aproximadamente 43,54%.

c) O Brasil ultrapassou pela primeira vez a produção de 1,5 milhão de unidades entre os anos de 2006 e 2007.

d) A produção de motos no Brasil diminuiu em relação ao ano anterior nos anos de 2009, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016 e 2017.

44. a) $828 - 533{,}33 = 274{,}67$, ou seja, a diferença entre a medida da altura do Burj Khalifa e a do edifício CN Tower é 274,67 metros.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos percebam que o consumo excessivo de água contribui para o esgotamento dos recursos hídricos.

c) sim; Resposta pessoal. Espera-se que os alunos reflitam sobre a existência de recursos tecnológicos para esse tipo de construção.

45. alternativa **c**

Organizando os valores, temos: 09, 48, 48, 55, 59, 60, 60, 60, 62, 64, 72, 75, 78, 79, 80, 85, 85, 91, 98, 100. Logo, $n = 20$, assim:

Para determinar o Q_1, que corresponde ao P_{25}, temos:

$$I_{25} = 20\frac{25}{100} = 5$$

Assim, P_{25} é a média aritmética entre o 5º e o 6º valor da sequência, ou seja, $Q_1 = 59{,}5$.

Para determinar Md, que corresponde ao P_{50}, temos:

$$I_{50} = 20\frac{50}{100} = 10$$

Assim, P_{50} é a média aritmética entre o 10º e o 11º valor da sequência, ou seja, $Md = 68$.

Para determinar o Q_3, que corresponde ao P_{75}, temos:

$$I_{75} = 20\frac{75}{100} = 15$$

Assim, P_{75} é a média aritmética entre o 15º e o 16º valor da sequência, ou seja, $Q_3 = 82{,}5$.

Determinando a amplitude interquartílica, temos:

$$A_i = Q_3 - Q_1 = 82{,}5 - 59{,}5 = 23$$

Determinando o limite superior, temos:

- maior valor dos dados: 100
- $Q_3 + 1{,}5 \cdot A_i = 82{,}5 + 1{,}5 \cdot 23 = 82{,}5 + 34{,}5 = 117$

logo, $L_S = 100$, pois é o menor valor entre 100 e 117.

Determinando o limite inferior, temos:

- menor valor dos dados: 9
- $Q_1 - 1{,}5 \cdot A_i = 59{,}5 - 1{,}5 \cdot 23 = 59{,}5 - 34{,}5 = 25$

logo $L_I = 25$, pois é o maior valor entre 9 e 25.

Além dos valores determinados, há um ponto de *outlier*, o 9.

46. a) De acordo com o diagrama, podemos ver que o maior valor do ramo é 9 e há apenas a folha 0. Assim, a maior pontuação foi 90.

b) De acordo com os dados, há 10 valores maiores do que 50. Portanto, 10 equipes tiveram mais de 50 pontos.

47. a) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos compreendam que, conforme a legenda, os valores à direita representam o algarismo da unidade para a quantidade de peças defeituosas em um lote produzido na fábrica **A** e os valores à esquerda representam o algarismo da unidade para a quantidade de peças defeituosas em um lote produzido na fábrica **B**.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que sim, pois os dados são dispostos lado a lado, o que torna possível compará-los visualmente.

c) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que é o *box plot*, o qual representa os dados visualmente, sem a necessidade de apresentar números, facilitando a comparação dos dados.

48. a)
- Competidor **A**: $10 + 70 + 30 + 30 + 60 = 200 \to 200$ pontos
- Competidor **B**: $80 + 20 + 60 + 10 + 30 = 200 \to 200$ pontos

b)
- Competidor **A**: $\bar{x}_A = \dfrac{200}{5} = 40$

$$\sigma_A^2 = \frac{(10-40)^2 + (70-40)^2}{5} + \frac{2(30-40)^2 + (60-40)^2}{5} = \frac{2\,400}{5} = 480$$

$$\sigma_A = \sqrt{480} \simeq 22 \to 22 \text{ pontos}$$

- Competidor **B**: $\bar{x}_B = \dfrac{200}{5} = 40$

$$\sigma_B^2 = \frac{(80-40)^2 + (20-40)^2 + (60-40)^2}{5} + \frac{(10-40)^2 + (30-40)^2}{5} = \frac{3\,400}{5} = 680$$

$$\sigma_B = \sqrt{680} \simeq 26 \to 26 \text{ pontos}$$

c) O competidor **A**, pois $\sigma_A < \sigma_B$.

49. a)
$$\bar{x} = \frac{8 \cdot 1000 + 20 \cdot 1200 + 9 \cdot 1500 + 6 \cdot 2\,000}{50} + \frac{4 \cdot 3\,000 + 2 \cdot 4\,000 + 5\,000}{50} = \frac{82\,500}{50} = 1\,650$$

Assim, temos: $6 + 4 + 2 + 1 = 13$ e $\dfrac{13}{50} = 0{,}26$.

Portanto, 13 funcionários têm um salário acima da média, que representa 26% do total de funcionários.

b) Calculando o desvio padrão, obtemos:

$$\sigma^2 = \frac{8 \cdot (1000 - 1\,650)^2 + 20 \cdot (1200 - 1\,650)^2}{50} + \frac{9 \cdot (1500 - 1\,650)^2 + 6 \cdot (2\,000 - 1\,650)^2}{50} + \frac{4 \cdot (3\,000 - 1\,650)^2 + 2 \cdot (4\,000 - 1\,650)^2}{50} + \frac{(5\,000 - 1\,650)^2}{50} = \frac{37\,925\,000}{50} = 758\,500$$

$$\sigma = \sqrt{758\,500} \simeq 870{,}9$$

Assim, $\left[1\,650 - \dfrac{870{,}9}{2}; 1\,650 + \dfrac{870{,}9}{2}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow [1\,214{,}55; 2\,085{,}45]$

De acordo como o gráfico, podemos verificar que há 15 funcionários pertencentes ao intervalo.

50. Resposta pessoal. Possível resposta: A temperatura média desse setor é 31 °C (verdadeira). A mediana desse setor é 31 °C (falsa). O desvio padrão desse setor é aproximadamente 2,2 °C (verdadeira).

51. alternativa **d**

1. Verdadeira, pois, observando o quadro, verificamos que o maior desvio padrão é o da turma **B**.
2. Verdadeira, visto que os valores do desvio padrão das turmas são diferentes.
3. Falsa, porque o desvio padrão da turma **A** é o menor, logo as notas dessa turma se apresentaram menos dispersas em torno da média.

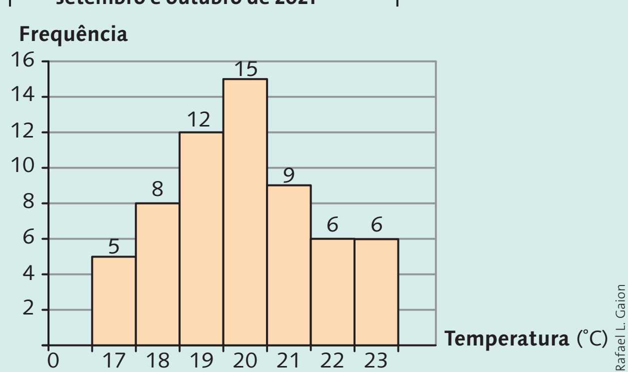
52. alternativa **a**

$$\bar{x} = \frac{1\,095 \cdot 58 + 1\,195 \cdot 77 + 1\,295 \cdot 120}{836} + \frac{1\,395 \cdot 128 + 1\,495 \cdot 195 + 1\,595 \cdot 258}{836} \simeq 1\,426{,}46$$

53. Resolução na página **256**.

54. Resposta pessoal. Possível resposta:

Temperatura de determinada cidade – setembro e outubro de 2021



Elaborado pelo autor com dados fictícios.

55. alternativa **d**

Classe	Ponto médio	f_a
4,5 ⊢ 5,5	$m_1 = \dfrac{4{,}5 + 5{,}5}{2} = 5{,}0$	3
5,5 ⊢ 6,5	$m_2 = \dfrac{5{,}5 + 6{,}5}{2} = 6{,}0$	9
6,5 ⊢ 7,5	$m_3 = \dfrac{6{,}5 + 7{,}5}{2} = 7{,}0$	22
7,5 ⊢ 8,5	$m_4 = \dfrac{7{,}5 + 8{,}5}{2} = 8{,}0$	27
8,5 ⊢ 9,5	$m_5 = \dfrac{8{,}5 + 9{,}5}{2} = 9{,}0$	29
9,5 ⊢ 10,5	$m_6 = \dfrac{9{,}5 + 10{,}5}{2} = 10{,}0$	30

1. Verdadeira.

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 5{,}0 + 6 \cdot 6{,}0 + 13 \cdot 7{,}0 + 5 \cdot 8{,}0 + 2 \cdot 9{,}0 + 1 \cdot 10{,}0}{30} =$$

$$= 7{,}0 \to 7\text{s}$$

2. Verdadeira.

$$\sigma^2 = \frac{3 \cdot (5{,}0 - 7{,}0)^2 + 6 \cdot (6{,}0 - 7{,}0)^2}{30} +$$

$$+ \frac{13 \cdot (7{,}0 - 7{,}0)^2 + 5 \cdot (8{,}0 - 7{,}0)^2 + 2 \cdot (9{,}0 - 7{,}0)^2}{30} +$$

$$+ \frac{1 \cdot (10{,}0 - 7{,}0)^2}{30} \simeq 1{,}33 \to 1{,}33 \text{ s}^2$$

3. Verdadeira.

O desvio padrão é a raiz quadrada positiva da variância.

4. Falsa.

$\frac{9}{30} = 0{,}3 \neq 0{,}5$

56. a) Temos:

$P = \frac{48}{181} \simeq 0{,}27$

Assim, a probabilidade de ter chovido no dia sorteado, no município de Jales, em um dia no 1º semestre de 2019 é aproximadamente 27%.

b) A probabilidade de chover em um dia de 2019 no município de Jales é dada por:

$$P = \frac{48 + 36}{365} \simeq 0{,}23$$

Assim, para determinar a probabilidade de não chover em um dia, fazemos:

$$1 - P = 0{,}77$$

Desse modo, a chance de não chover em dois dias aleatórios é dada por: $0{,}77 \cdot 0{,}77 = 0{,}5929$.

Portanto, a probabilidade será de 59,29%.

57. a)

Registros do experimento de lançamento de um dado – 2021

Face	f	f_a	f_r	f_{ar}
1	18	18	3%	3%
2	36	54	6%	9%
3	168	222	28%	37%
4	150	372	25%	62%
5	174	546	29%	91%
6	54	600	9%	100%
Total	600		100%	

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

b) É possível suspeitar que o dado não seja honesto, pois esperava-se resultados próximos para todas as faces, e isso não ocorreu. A face 5, por exemplo, foi obtida em 29% dos lançamentos, enquanto a face 1 foi obtida em apenas 3% dos lançamentos.

58. a) Salto de asa-delta; $\frac{1}{560} \simeq 0{,}002$, ou seja, aproximadamente 0,2%.

b) $\frac{6\,700}{560} \simeq 12$

Assim, a probabilidade é aproximadamente 12 vezes maior.

c) Menor, pois a probabilidade de morrer em um acidente de bicicleta é $\frac{1}{140\,845} \simeq 0{,}0000071$, ou seja, aproximadamente 0,00071%, e de morrer em uma luta de boxe é $\frac{1}{2\,200} \simeq 0{,}00045$, ou seja, aproximadamente 0,045%.

d) Não, pois esses eventos não apresentam a mesma chance de ocorrer.

Resolução do capítulo **3**

22. a)
- $\bar{x} = \frac{3 \cdot 3 + 4 + 9 + 2 + 2 \cdot 1 + 6}{9} = \frac{32}{9} \simeq 3{,}6$
- $Mo = 3$
- $Md = 3$

b) $\bar{x} = \frac{2 \cdot 7 + 2 \cdot 2 + 1 + (-4) + 2 \cdot 3 + (-2) + 9 + 8 + 10}{12} = \frac{46}{12} \simeq 3{,}8$

- trimodal: $Mo = 2$; $Mo = 3$; $Mo = 7$
- $Md = \frac{3 + 3}{2} = 3$

c) $\bar{x} = \frac{3 + (-2) + 4 + 5 + 2 + (-3) + 9 + 7 + 6 + 0 + 10 + 8 + (-1) + 1}{14} = \frac{49}{14} = 3{,}5$

- amodal
- $Md = \frac{3 + 4}{2} = 3{,}5$

d) $\bar{x} = \frac{3 \cdot (-6) + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 5 + 6 + 7 + 4 \cdot 8}{14} = \frac{42}{14} = 3$

- $Mo = 8$
- $Md = \frac{4 + 5}{2} = 4{,}5$

53.

Massa de alguns pacotes de arroz durante a aferição de uma empacotadora – 2021			
Classe	**Ponto médio**	f_a	f_r
4,970 ⊢ 4,980	$m_1 = \frac{4{,}970 + 4{,}980}{2} = 4{,}975$	4	3,33%
4,980 ⊢ 4,990	$m_2 = \frac{4{,}980 + 4{,}990}{2} = 4{,}985$	14	8,33%
4,990 ⊢ 5,000	$m_3 = \frac{4{,}990 + 5{,}000}{2} = 4{,}995$	52	31,67%
5,000 ⊢ 5,010	$m_4 = \frac{5{,}000 + 5{,}010}{2} = 5{,}005$	96	36,67%
5,010 ⊢ 5,020	$m_5 = \frac{5{,}010 + 5{,}020}{2} = 5{,}015$	114	15%
5,020 ⊢ 5,030	$m_6 = \frac{5{,}020 + 5{,}030}{2} = 5{,}025$	120	5%

Elaborado pelo autor com dados fictícios.

a) $4 + 10 + 38 + 44 + 18 + 6 = 120$ pacotes

b) • $\bar{x} = \frac{4 \cdot 4{,}975 + 10 \cdot 4{,}985 + 38 \cdot 4{,}995 + 44 \cdot 5{,}005}{120} + \frac{18 \cdot 5{,}015 + 6 \cdot 5{,}025}{120} \simeq 5{,}002 \rightarrow 5{,}002$ kg

- $Mo = 5{,}005$ kg
- Mediana

Para determinar a classe que o valor da mediana pertence, fazemos:

$$3{,}33 + 8{,}33 + 31{,}67 = 43{,}33 \rightarrow 43{,}33\%$$

Logo, o valor que supera 50% dos dados está entre 5,000 e 5,010. Desse modo, a mediana se encontra na classe 5,000 ⊢ 5,010. Sendo assim:

$$\frac{5{,}010 - 5{,}000}{Md - 5{,}000} = \frac{36{,}67}{\underbrace{6{,}67}_{50 \vdash 43{,}33}}$$

$$36{,}67Md - 183{,}35 = 0{,}0667$$

$$Md \simeq 5{,}002 \rightarrow 5{,}002 \text{ kg}$$

c) • $D_m = \frac{4 \cdot |4{,}9755 - 5{,}002| + 10 \cdot |4{,}985 - 5{,}002|}{120} + \frac{38 \cdot |4{,}995 - 5{,}002| + 44 \cdot |5{,}005 - 5{,}002|}{120} +$

$+ \frac{18 \cdot |5{,}015 - 5{,}002| + 6 \cdot |5{,}025 - 5{,}002|}{120} \simeq 0{,}009 \rightarrow 0{,}009$ kg

- $\sigma^2 = \frac{4 \cdot (4{,}975 - 5{,}002)^2 + 10 \cdot (4{,}985 - 5{,}002)^2}{120} + \frac{38 \cdot (4{,}995 - 5{,}002)^2 + 44 \cdot (5{,}005 - 5{,}002)^2}{120} +$

$+ \frac{18 \cdot (5{,}015 - 5{,}002)^2 + 6 \cdot (5{,}025 - 5{,}002)^2}{120} \simeq 0{,}000119$

- $\sigma = \sqrt{0{,}000119} \simeq 0{,}011 \rightarrow 0{,}011$ kg

ISBN: 978-65-5763-033-4

9 786557 630334