ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS
ENSINO MÉDIO

MANUAL DO PROFESSOR

Matemática Interligada

Trigonometria, fenômenos periódicos e programação

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO –
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO

CÓDIGO DA COLEÇÃO:
0182P21202

CÓDIGO DA COLEÇÃO:
0182P21202134

Editora responsável
Thais Marcelle de Andrade

editora scipione

ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS
ENSINO MÉDIO

Matemática Interligada

Trigonometria, fenômenos periódicos e programação

MANUAL DO PROFESSOR

Editora responsável

Thais Marcelle de Andrade

Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR)

Especialista em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR)

Editora de materiais didáticos da área de Matemática, possui experiência como professora de Matemática em escolas públicas e particulares

1ª edição, São Paulo, 2020

editora scipione

editora scipione

Presidência: Paulo Serino

Direção editorial: Lauri Cericato

Gestão de projeto editorial: Heloisa Pimentel

Coordenação de área: Juliana Grassmann dos Santos, Marcela Maris

Projeto e produção editorial: Scriba Soluções Editoriais

Edição: Sheila C. Molina, Thais Marcelle de Andrade

Assistência editorial: Guilherme Francisco de Almeida, Henrique Gonçalves Menck, Tatiana Aleixo Bologna

Planejamento e controle de produção editorial: Camila Rumiko Minaki Hoshi (ger.), Priscilla de Freitas Cornelsen Rosa (superv.), Daiana Fernanda Leme de Melo (coord.)

Preparação e revisão: Equipe Scriba

Projeto gráfico e *design*: Marcela Pialarissi

Arte: André Leandro Silva (ger.), Tamires Rose Azevedo (coord.), Ingridhi Borges (edição de arte), Leandro Júnior Pimenta e Leda Teodorico (diagramação)

Iconografia e tratamento de imagens: Erick Lopes de Almeida (coord.), André Silva Rodrigues (pesquisa iconográfica), Johannes de Paulo (tratamento de imagens)

Licenciamento de conteúdos de terceiros: Erick Lopes de Almeida (coord.), Marissol Martins Maia

Capa: Luis Vassallo

Foto de capa: Jon and Tina Reid/Moment RF/Getty Images

Avenida Paulista, 901, 4º andar
Jardins – São Paulo – SP – CEP 01310-200
Tel.: 4003-3061
www.edocente.com.br
atendimento@aticascipione.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Matemática interligada : trigonometria, fenômenos periódicos e programação / obra coletiva ; editora responsável Thais Marcelle de Andrade. -- 1. ed. -- São Paulo : Scipione, 2020.

Suplementado pelo manual do professor
Bibliografia
ISBN 978-65-5763-026-6 (aluno)
ISBN 978-65-5763-027-3 (professor)

1. Matemática e suas tecnologias (Ensino Médio) 2. Matemática (Ensino Médio) 3. Trigonometria 4. Logarítmos 5. Lógica de programação I. Andrade, Thais Marcelle de.

20-2800 CDD 510.7

Angélica Ilacqua CRB-8/7057

2020
Código da obra CL 719987
CAE 729724 (AL) / 729725 (PR)
1ª edição
1ª impressão
De acordo com a BNCC.

Impressão e acabamento

Elaboração de conteúdos

Thais Marcelle de Andrade
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).
Especialista em Educação Matemática pela UEL-PR.
Editora de materiais didáticos da área de Matemática, possui experiência como professora de Matemática em escolas públicas e particulares.

Victor Hugo dos Santos Gois
Licenciado em Matemática pela UEL-PR.
Especialista em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Editor de materiais didáticos da área de Matemática.

Elias Borges da Silva
Licenciado em Matemática pela UEL-PR.
Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela UEL-PR.
Possui experiência como professor de Matemática em escolas públicas.

Eduardo Henrique Gomes Tavares
Bacharel em Matemática pela UEL-PR.
Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela UEL-PR.
Editor e produtor de conteúdo de materiais didáticos da área de Matemática.

Keila Tatiana Boni
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP-PR).
Licenciada em Física pela Universidade Estadual de Maringá (UEM-PR).
Especialista em Educação Inclusiva pela Universidade Castelo Branco (UCB-RJ).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL-PR.
Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL-PR.
Possui experiência como professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental e do Ensino Superior.

Daniela Kaspary
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS).
Mestre em Educação Matemática pela UFMS.
Colabora em pesquisas do Grupo de Estudo em Didática da Matemática da UFMS e na produção de materiais didáticos da área de Matemática.

editora scipione

Presidência: Paulo Serino
Direção editorial: Lauri Cericato
Gestão de projeto editorial: Heloisa Pimentel
Coordenação de área: Juliana Grassmann dos Santos, Marcela Maris
Projeto e produção editorial: Scriba Soluções Editoriais
Edição: Sheila C. Molina, Thais Marcelle de Andrade
Assistência editorial: Guilherme Francisco de Almeida, Henrique Gonçalves Menck, Tatiana Aleixo Bologna
Planejamento e controle de produção editorial: Camila Rumiko Minaki Hoshi (ger.), Priscilla de Freitas Cornelsen Rosa (superv.), Daiana Fernanda Leme de Melo (coord.)
Preparação e revisão: Equipe Scriba
Projeto gráfico e *design*: Marcela Pialarissi
Arte: André Leandro Silva (ger.), Tamires Rose Azevedo (coord.), Ingridhi Borges (edição de arte), Leandro Júnior Pimenta e Leda Teodorico (diagramação)
Iconografia e tratamento de imagens: Erick Lopes de Almeida (coord.), André Silva Rodrigues (pesquisa iconográfica), Johannes de Paulo (tratamento de imagens)
Licenciamento de conteúdos de terceiros: Erick Lopes de Almeida (coord.), Marissol Martins Maia
Capa: Luis Vassallo
Foto de capa: Jon and Tina Reid/Moment RF/Getty Images

Avenida Paulista, 901, 4º andar
Jardins – São Paulo – SP – CEP 01310-200
Tel.: 4003-3061
www.edocente.com.br
atendimento@aticascipione.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Matemática interligada : trigonometria, fenômenos periódicos e programação / obra coletiva ; editora responsável Thais Marcelle de Andrade. -- 1. ed. -- São Paulo : Scipione, 2020.

Suplementado pelo manual do professor
Bibliografia
ISBN 978-65-5763-026-6 (aluno)
ISBN 978-65-5763-027-3 (professor)

1. Matemática e suas tecnologias (Ensino Médio) 2. Matemática (Ensino Médio) 3. Trigonometria 4. Logarítmos 5. Lógica de programação I. Andrade, Thais Marcelle de.

20-2800 CDD 510.7

Angélica Ilacqua CRB-8/7057

2020
Código da obra CL 719987
CAE 729724 (AL) / 729725 (PR)
1ª edição
1ª impressão
De acordo com a BNCC.

Impressão e acabamento

Elaboração de conteúdos

Thais Marcelle de Andrade
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).
Especialista em Educação Matemática pela UEL-PR.
Editora de materiais didáticos da área de Matemática, possui experiência como professora de Matemática em escolas públicas e particulares.

Victor Hugo dos Santos Gois
Licenciado em Matemática pela UEL-PR.
Especialista em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Editor de materiais didáticos da área de Matemática.

Elias Borges da Silva
Licenciado em Matemática pela UEL-PR.
Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela UEL-PR.
Possui experiência como professor de Matemática em escolas públicas.

Eduardo Henrique Gomes Tavares
Bacharel em Matemática pela UEL-PR.
Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela UEL-PR.
Editor e produtor de conteúdo de materiais didáticos da área de Matemática.

Keila Tatiana Boni
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP-PR).
Licenciada em Física pela Universidade Estadual de Maringá (UEM-PR).
Especialista em Educação Inclusiva pela Universidade Castelo Branco (UCB-RJ).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL-PR.
Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL-PR.
Possui experiência como professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental e do Ensino Superior.

Danielly Kaspary
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS).
Mestre em Educação Matemática pela UFMS.
Colabora em pesquisas do Grupo de Estudo em Didática da Matemática da UFMS e na produção de materiais didáticos da área de Matemática.

Apresentação

As situações cotidianas que demandam de nós alguma decisão, interpretação e análise crítica das informações, aliadas ao rápido avanço da tecnologia presente em diferentes setores, evidenciam a necessidade de dominarmos alguns conhecimentos específicos, sobretudo na área de Matemática e suas Tecnologias.

O estudo da Matemática contribui para o desenvolvimento de estratégias e do raciocínio lógico e incentiva a criatividade, entre outros aspectos. Por isso, oferecemos a você um livro que o leve a perceber as várias relações da Matemática com outras áreas do conhecimento e suas implicações na realidade.

Neste livro, há uma diversidade de assuntos relacionados a situações cotidianas envolvendo conteúdos matemáticos básicos e necessários para o Ensino Médio. Além disso, você encontrará tarefas em que terá a oportunidade de explorar, de maneira aprofundada, os conceitos estudados.

Por fim, é importante ressaltar que esta obra foi elaborada com o objetivo de contribuir para um melhor ensino da Matemática. Por isso, esperamos que você, ao utilizá-la, tenha um papel ativo na construção de seu conhecimento matemático e que ela contribua para sua formação cidadã.

Bons estudos.

Conheça seu livro

Os conteúdos de seu livro são apresentados em capítulos e, nesses capítulos, você vai encontrar várias seções, algumas envolvendo tarefas, outras contendo textos, gráficos e infográficos com informações sobre diversos temas.

A seguir, é apresentada a descrição de cada uma dessas seções.

Abertura do capítulo

No início de cada capítulo, são apresentadas duas páginas que têm o papel de introduzir o conteúdo a ser estudado. Com base em um texto relacionado a diferentes assuntos e situações, você é convidado a responder a algumas questões que visam motivá-lo a refletir sobre os conteúdos a serem trabalhados no decorrer do capítulo, além de explorar seus conhecimentos prévios.

Você cidadão

Em alguns casos, você será convidado a responder questões que contribuem para sua formação cidadã, refletindo sobre questões de seu cotidiano e de toda a sociedade. Por isso, essas tarefas recebem o destaque Você cidadão.

Conversando

Nessa seção, você é convidado, por meio de algumas questões, a um diálogo inicial com seus colegas e seu professor sobre os conteúdos abordados e alguns temas e situações relacionados a eles.

Problemas e exercícios resolvidos

Você encontrará nessa seção resoluções de tarefas, cujo objetivo é contribuir para o desenvolvimento do repertório individual de estratégias pessoais de resolução, tanto de tarefas propostas no decorrer do capítulo quanto de questões da sociedade ou outras com as quais se depare no cotidiano particular.

Problemas e exercícios propostos

Nessa seção, são apresentadas tarefas referentes ao conteúdo em estudo. Essas tarefas vão ajudá-lo a pôr em prática o que está aprendendo e a desenvolver novos conhecimentos mediante situações desafiadoras e, também, diferentes estratégias de resolução.

Você produtor

Há tarefas em que você precisará elaborar um problema com base em imagens ou informações ou então realizar algumas construções. Essas tarefas receberão o destaque Você produtor.

Desafio

Algumas tarefas propostas envolvem resoluções que vão além da simples aplicação do conteúdo estudado. Por isso, elas recebem o destaque Desafio. Para resolver essas tarefas, você precisará desenvolver suas próprias estratégias.

Em grupo

Em alguns momentos, você será convidado a resolver, com dois ou mais colegas, algumas tarefas propostas. Essas tarefas terão o destaque Em grupo.

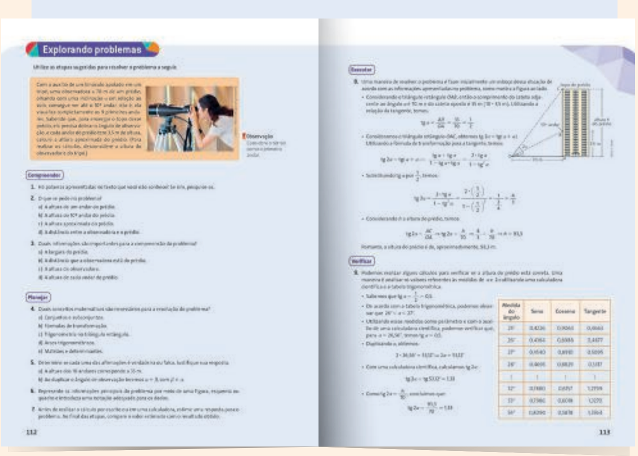
Finalizando a conversa

Nessa seção, são apresentadas questões que o levarão a fazer uma análise sobre o que foi estudado no capítulo. Ao respondê-las, você poderá expor suas ideias acerca do assunto.

Explorando problemas

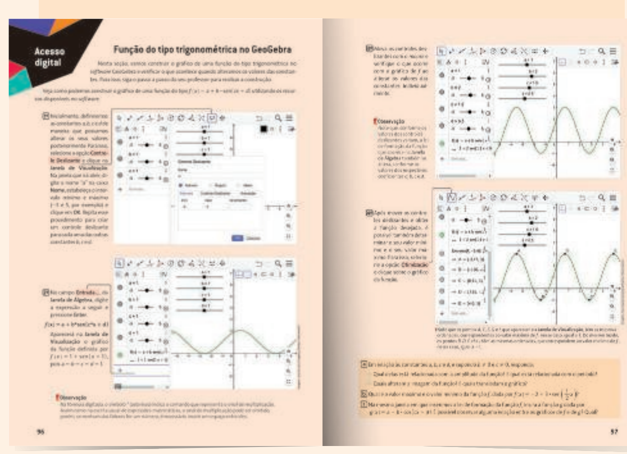
Nessa seção, são apresentadas maneiras de organizar o pensamento para resolver um problema por meio de raciocínio, representação, comunicação e argumentação.

Nela, serão apresentadas resoluções etapa por etapa de tarefas em que se faz necessário mobilizar conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução.



Acesso digital

Apresentada em alguns capítulos, essa seção traz recursos, como *softwares* e *sites*, que possibilitam o desenvolvimento de atividades relacionadas aos conteúdos trabalhados. Ao final da seção, são propostas algumas questões com base nas informações apresentadas.



Saiba mais

Nessa seção, são apresentados textos e imagens envolvendo o conteúdo em estudo, relacionados a outras áreas do conhecimento, além de curiosidades referentes ao conteúdo. No final, há algumas questões que você vai responder com base nas informações apresentadas.

Conectando ideias

Nessa seção, você é convidado a ler e interpretar infográficos envolvendo diferentes temas e situações e, com base nisso, a responder a algumas questões, sendo motivado a refletir sobre o que estudou no decorrer do capítulo.

Objetivos e competências

Objetivos gerais

Este volume tem o compromisso de lhe proporcionar o desenvolvimento da autonomia, do pensamento crítico, da capacidade de tomar decisões com o intuito de que você seja o protagonista da construção de sua aprendizagem.

Sendo assim, os objetivos gerais deste volume são:

- Compreender e aplicar o teorema de Pitágoras.
- Determinar as relações entre seno, cosseno e tangente e seus valores.
- Compreender as leis do seno e as do cosseno e sua relação com o cálculo da área de um triângulo qualquer.
- Relacionar seno, cosseno e tangente de ângulos, em graus ou em radiano, com a circunferência trigonométrica.
- Compreender os sinais do seno, cosseno e tangente em relação aos quadrantes de uma circunferência trigonométrica.
- Determinar a redução de um ângulo para o primeiro quadrante.
- Esboçar os gráficos das funções seno e cosseno.
- Compreender as relações trigonométricas fundamentais e suas fórmulas de transformações.
- Compreender o conceito de algoritmo, o de fluxogramas e a relação entre eles.
- Utilizar expressões matemáticas em linguagem de programação.
- Familiarizar com o conceito de constantes, variáveis, estruturas de condição e de repetição.
- Elaborar algoritmos para a resolução de situações-problemas.
- Resolver situações-problema que envolvem os conhecimentos matemáticos apresentados relacionados a situações do cotidiano e a outras áreas do conhecimento.

Justificativa

Neste volume estudaremos a trigonometria do triângulo e como a partir delas somos capazes de definir as relações trigonométricas, como seno, cosseno e tangente. Além disso, estudaremos a lógica de programação.

Na Antiguidade, já se utilizavam relações em triângulos para a obtenção de medidas de grandezas de difícil acesso, como no caso da mensuração da altura da pirâmide do Egito. Esses conhecimentos continuam sendo empregados em diversas áreas, como na construção civil. Exemplos como esses são apresentados em tarefas e seções desse material para incentivar o estudo sobre a trigonometria no triângulo.

A trigonometria ainda é aprofundada nesse volume com o estudo sobre as funções trigonométricas, que está presente no nosso dia a dia. Por exemplo, em fenômenos periódicos, como as marés, o movimento harmônico simples e as ondas de rádio.

Ainda sobre trigonometria, as simplificações algébricas proporcionadas pelas transformações trigonométricas vão facilitar o estudo do tema e ampliar as possibilidades dos alunos na realização de tarefas matemáticas propostas no decorrer do material.

Fechamos o volume com o conteúdo de lógica de programação. Aqui apresentaremos o que é um algoritmo, o que são fluxogramas, algumas das expressões matemáticas e as estruturas de condição que são amplamente utilizadas em linguagens de programação, com intenção de prepará-lo para uma sociedade cada vez mais tecnológica.

Competências

Para contemplar as necessidades de formação dos alunos toda esta coleção está centrada no desenvolvimento de Competências gerais da Educação Básica e específicas da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, assim como orienta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A seguir apresentamos as competências gerais, as competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias e da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, cujo desenvolvimento é favorecido neste volume.

Competências gerais da Educação Básica

CG 1 Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

CG 2 Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

CG 4 Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

CG 5 Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio e Habilidades relacionadas

A seguir, foram organizadas as ocorrências, das Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias, discriminadas por cores. Para cada Competência específica, estão listadas as habilidades relacionadas a elas e que foram favorecidas neste volume.

CEMT 3 Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

CEMT 4 Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

Competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias para o Ensino Médio

Além do compromisso com a área de Matemática, o trabalho com alguns conceitos ou tarefas desta coleção contribui para o desenvolvimento de aspectos de outras áreas do conhecimento, sobretudo com relação a Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Sendo assim, listamos a seguir a Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias cujo trabalho é favorecido neste volume.

CECNT 2 Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

CEMT 3	**EM13MAT306** • Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.	Capítulo 2 Capítulo 3
	EM13MAT308 • Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.	Capítulo 1
	EM13MAT315 • Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.	Capítulo 4
CEMT 4	**EM13MAT405** • Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.	Capítulo 4

Sumário

CAPÍTULO 1

Trigonometria no triângulo

Charles Wollertz/Alamy/Fotoarena

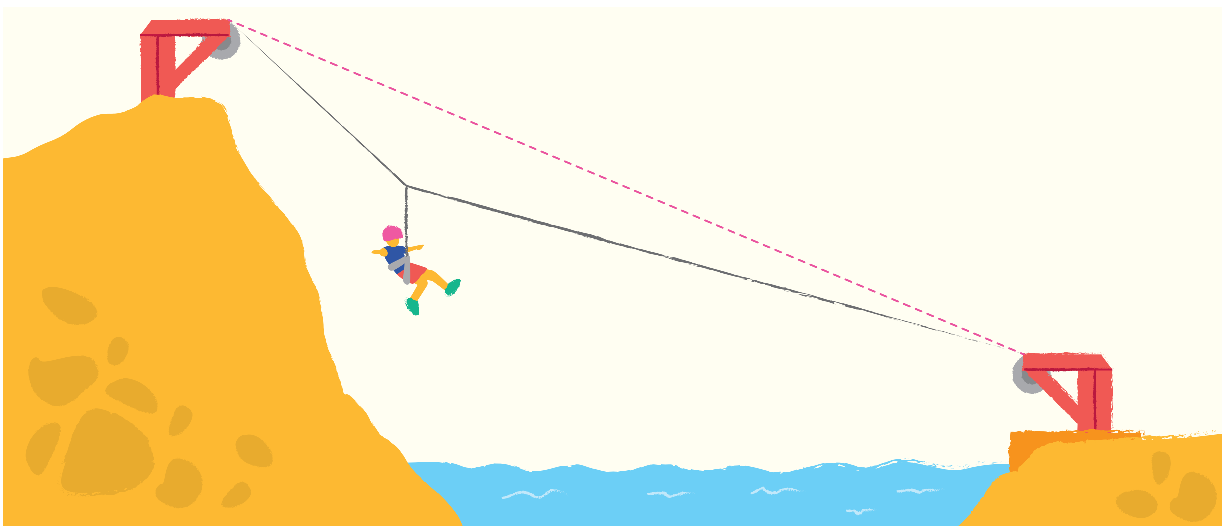
A instalação de uma tirolesa deve ser feita somente por profissionais treinados que utilizarão técnicas adequadas para que o praticante tenha total segurança e a emoção garantida.

TIROLESA

Existem vários tipos de esportes, entre eles, os esportes radicais. Esse termo é utilizado para nomear esportes com elevado grau de risco físico, dadas as condições de altura, velocidade, entre outras.

Como exemplo de esporte radical, podemos citar a tirolesa, que consiste em uma prática esportiva na qual a pessoa é presa a roldanas que deslizam por um cabo, cujas extremidades estão em alturas diferentes. Em geral, ela é praticada em meio a paisagens naturais e proporciona ao praticante a sensação de sobrevoar o terreno, lago ou rio abaixo dele. Essa técnica também é utilizada para o transporte de mercadorias de um ponto a outro.

Para que a descida na tirolesa não seja prejudicada, a instalação do cabo é extremamente importante, pois a diferença excessiva entre as medidas das alturas das extremidades e também a instalação do cabo com muita folga podem provocar um funcionamento inadequado do equipamento.



Heloísa Pintarelli

a Além da tirolesa, cite outros esportes radicais que você conhece.
Resposta pessoal. Possíveis respostas: rapel, paraquedismo, *snowboard*.

b Em sua opinião, como pode ser calculada a diferença entre as medidas das alturas das extremidades do cabo da tirolesa? Possível resposta: utilizando alguns conhecimentos relacionados à trigonometria no triângulo.

Caso os alunos apresentem dúvidas ao responder a questão **b**, converse com eles a fim de despertar o interesse a respeito dos conteúdos expostos neste capítulo, explicando-lhes que, após o estudo dos tópicos propostos, eles terão ferramentas para resolver problemas semelhantes ao apresentado.

Você cidadão

c Quais as vantagens de praticar esportes radicais em grupo?
Possíveis respostas: maior experiência, mais segurança, contato com novas pessoas.

1 Introdução

As pirâmides do Egito sempre despertaram curiosidade, tanto por sua grandiosidade, quanto pelos mistérios a elas relacionados. Por exemplo, como elas foram construídas, se as civilizações daquela época não dispunham de recursos com os quais contamos atualmente?

Essas grandiosas construções eram projetadas por arquitetos da época e, em seguida, aprovadas pelo faraó. Descobertas arqueológicas indicam o uso de recursos fundamentais como rampas e alavancas no processo de construção.

Veja no esquema uma das teorias sobre o modo como as pirâmides foram construídas.

Anos após a construção das pirâmides, o matemático grego Tales de Mileto, que viveu por volta de 624 a 548 a.C., deparou-se com o seguinte desafio: obter a medida da altura de uma das pirâmides dos faraós do Egito.

Diante dessa situação, Tales pôde utilizar somente os recursos da época e seus conhecimentos sobre segmentos proporcionais.

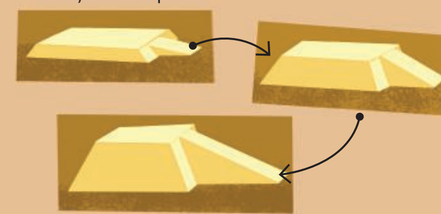
Tales trabalhou algum tempo como mercador, o que lhe gerou riqueza suficiente para dedicar a parte final de sua vida ao estudo e às viagens. Segundo conta a história, em uma de suas viagens, Tales foi ao Egito e defrontou-se com o problema da medição da altura da pirâmide.

I Os imensos blocos de calcário e as rochas preciosas utilizados nas pirâmides eram cortados nas dimensões adequadas para serem transportados.

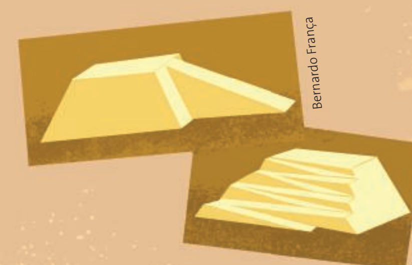
II Os blocos cortados eram colocados em uma espécie de trenó de madeira, que era puxado por trabalhadores com o auxílio de cordas até o local onde as pirâmides seriam construídas.

III Em seguida, eram retirados do trenó e carregados por meio de rampas e alavancas. Com o objetivo de facilitar o transporte dessas peças, as toras que formavam a rampa eram constantemente molhadas para diminuir o atrito entre elas e os trenós.

À medida que a pirâmide se tornava mais alta, a rampa era aumentada tanto na altura quanto no comprimento, a fim de manter a inclinação adequada.



As pirâmides foram construídas com vários estilos de rampas, cada uma de acordo com certa necessidade.

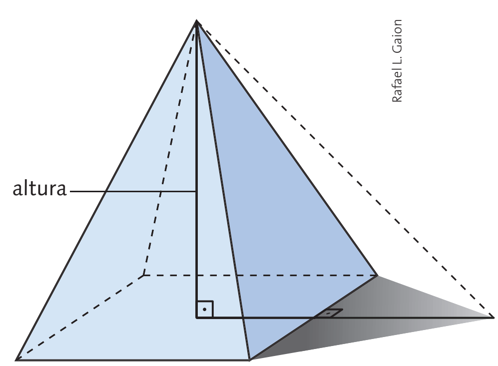


Bernardo França

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas(SP): Editora da Unicamp, 2004.

Há duas versões sobre o método empregado por Tales para realizar a medição. A mais antiga, descrita por Hierônimos (331-440), um discípulo de Aristóteles (384-322 a.C.), diz que Tales desenhou uma circunferência com a medida do comprimento do raio igual à medida de sua altura e postou-se no centro dela. Em outra versão, Tales, em vez do próprio corpo, utilizou uma vareta fincada perpendicularmente no solo.

Embora ambas as versões pequem ao não mencionar a dificuldade de obter, nos dois casos, a medida do comprimento da sombra da pirâmide, supõe-se que o raciocínio de Tales era o mesmo. Quando sua sombra (ou a sombra da vareta) atingisse a circunferência, ou seja, no momento em que a medida do comprimento de sua sombra fosse igual à medida de sua altura (ou da medida da altura da vareta), as medidas do comprimento da sombra e da altura da pirâmide também seriam iguais. Assim, bastava que, nesse momento, a extremidade da sombra da pirâmide fosse marcada com uma estaca e seu comprimento medido.



Rafael L. Gaion

O raciocínio utilizado por Tales culminou no que hoje conhecemos como teorema de Tales, muito utilizado na Matemática, na Engenharia, na Física e em outras áreas. Explique aos alunos que, no esquema da imagem, estamos supondo que o Sol se encontra em uma posição privilegiada e oferece uma sombra ideal para realizar a medição do comprimento da sombra de maneira perpendicular à aresta da base da pirâmide.

Conversando

a) Em sua opinião, de que outra maneira, além da apresentada, as pirâmides poderiam ter sido construídas? Resposta pessoal.

b) Como a ideia de proporcionalidade está presente no método empregado por Tales no cálculo da altura da pirâmide? Possível resposta: ao comparar a medida do comprimento de sua sombra com o comprimento da sombra da pirâmide, Tales estabelece uma relação de proporção entre a medida de sua altura e a da pirâmide.

c) Por que, na segunda versão, a vareta foi fincada perpendicularmente no solo?

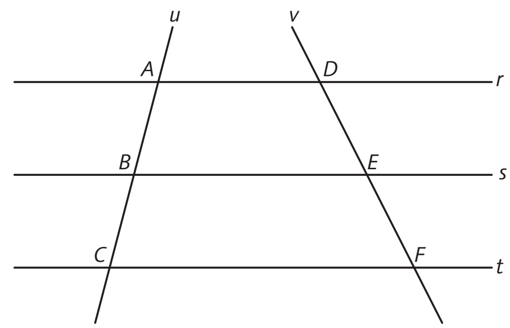
d) Nos dias atuais, que outra maneira poderia ser utilizada para medir a altura da pirâmide? Resposta pessoal.

c) Porque a medida da altura da vareta é correspondente e proporcional à medida da altura da pirâmide. Além disso, a altura da pirâmide é perpendicular à sua sombra e, para ser correspondente, a vareta também deve ser perpendicular ao solo.

2 Feixe de retas paralelas

Dadas três ou mais retas paralelas em um mesmo plano, chamamos esse conjunto de **feixe de retas paralelas**. Na imagem ao lado as retas *r*, *s* e *t* formam um feixe de retas paralelas, indicado por $r//s//t$.

Nessa mesma imagem, também estão representadas as **retas transversais** *u* e *v*. Chamamos de transversal a reta do plano que corta o feixe de retas paralelas.



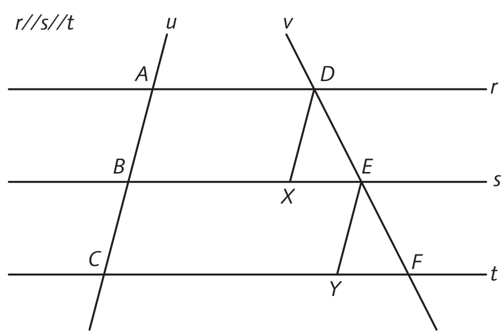
$r // s // t$

De acordo com a imagem:

- são pontos correspondentes: *A* e *D*, *B* e *E*, *C* e *F*.
- são segmentos correspondentes: $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$, $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$.

Suponha que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ sejam **congruentes** $\left(\overline{AB} \cong \overline{BC}\right)$, ou seja, que $AB = BC$. Vamos demonstrar que $\overline{DE} \cong \overline{EF}$. Para isso, traçamos $\overline{DX}$ e $\overline{EY}$ paralelos à reta *u*.

Observação
A medida do comprimento de $\overline{AB}$ é representada por $\text{med}\left(\overline{AB}\right)$ ou AB.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$

Note que *ABXD* e *BCYE* são paralelogramos.

Desse modo, $\overline{AB} \cong \overline{DX}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EY}$.

Como $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, então $\overline{DX} \cong \overline{EY}$.

Observando os triângulos *DXE* e *EYF*, temos: $\begin{cases} \bullet\ \overline{DX} \cong \overline{EY} \\ \bullet\ X\hat{D}E \cong Y\hat{E}F \text{ (correspondentes)} \\ \bullet\ X\hat{E}D \cong Y\hat{F}E \text{ (correspondentes)} \end{cases}$

Observação
Para simplificar a escrita, neste capítulo não faremos distinção entre grandezas e suas respectivas medidas. Então, em situações do tipo "o comprimento do segmento", por exemplo, estamos nos referindo à "medida do comprimento do segmento".

Pelo caso de congruência LAA_0 (lado, ângulo e ângulo oposto), os triângulos *DXE* e *EYF* são congruentes.

Desse modo, $\overline{DE} \cong \overline{EF}$, como queríamos demonstrar.

Assim, demonstramos a seguinte propriedade:

Quando um feixe de retas paralelas divide uma reta transversal em segmentos congruentes, dividirá também outra reta transversal qualquer em segmentos congruentes.

Veja mais informações sobre a congruência de triângulos nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.

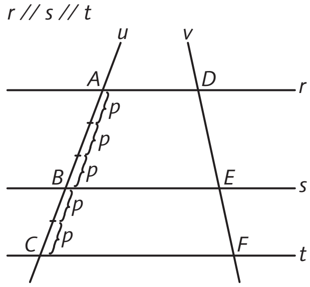
3 Teorema de Tales

Em um feixe de retas paralelas temos a seguinte propriedade:

Se um feixe de retas paralelas intersecta duas transversais quaisquer distintas, então a razão entre os comprimentos dos segmentos obtidos em uma das transversais é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes da outra transversal.

Vamos demonstrar a propriedade para o caso em que os segmentos são **comensuráveis**, ou seja, em que é possível dividir os segmentos em partes inteiras de mesmo comprimento.

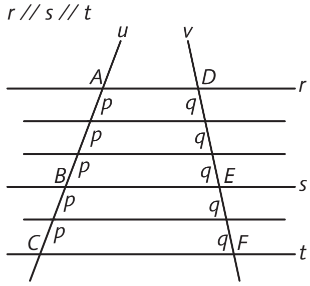
Considere um feixe de retas paralelas r, s e t que determinam sobre a reta transversal v os segmentos de reta $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ e, sobre a transversal u, os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, de maneira que seja possível dividir $\overline{AB}$ em m partes de comprimento p e $\overline{BC}$ em n partes de comprimento p, com m e n inteiros.



$AB = m \cdot p$ e $BC = n \cdot p$

Observação
No exemplo da imagem, $m = 3$ e $n = 2$.

Traçando retas paralelas às retas r, s e t, que passam pelos pontos obtidos na divisão dos segmentos, segue, pela propriedade demonstrada na página anterior, que os segmentos determinados na reta v são congruentes. Indicando por q os comprimentos desses segmentos, temos:



Ilustrações: Rafael L. Gaion

$DE = m \cdot q$ e $EF = n \cdot q$

Nesse caso:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{m \cdot p}{n \cdot p} = \frac{m}{n} \qquad \frac{DE}{EF} = \frac{m \cdot q}{n \cdot q} = \frac{m}{n}$$

Logo, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. Isso significa que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são proporcionais a $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$.

Essa propriedade também pode ser verificada para segmentos que não são comensuráveis, porém a demonstração não será apresentada.

Um feixe de retas paralelas determina, em duas retas transversais quaisquer, segmentos proporcionais.

Essa propriedade é conhecida como **teorema de Tales**.

Observação
A recíproca do teorema de Tales, conforme apresentada a seguir, também é verdadeira, porém não a demonstraremos neste livro.

Se um feixe de retas dividir duas transversais em partes proporcionais, as retas do feixe são paralelas.

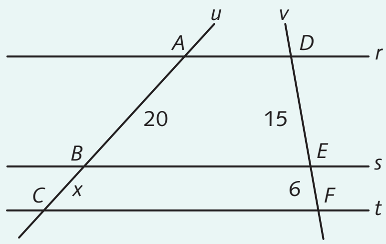
Na figura anterior, podemos observar outras proporções a partir desse teorema. São elas:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \qquad \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \qquad \frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF} \qquad \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$$

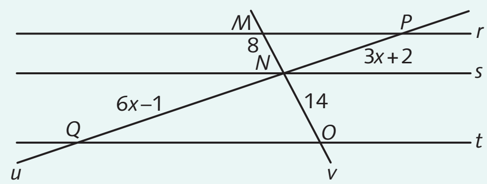
Problemas e exercícios resolvidos

R1. Determine o valor de x nas figuras, sabendo que as retas r, s e t são paralelas.

a)



b)



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Resolução

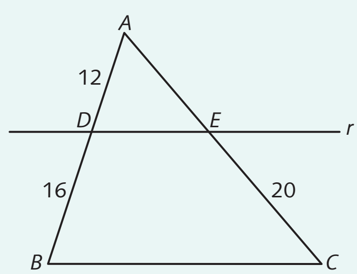
a) Utilizando o teorema de Tales:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \Rightarrow \frac{20}{15} = \frac{x}{6} \Rightarrow 15x = 120 \Rightarrow x = 8$$

b) Note que $\overline{MN}$ e $\overline{NO}$ pertencem à reta v, e $\overline{PN}$ e $\overline{NQ}$, à reta u. Assim, de acordo com o teorema de Tales:

$$\frac{MN}{PN} = \frac{NO}{NQ} \Rightarrow \frac{8}{3x + 2} = \frac{14}{6x - 1} \Rightarrow 48x - 8 = 42x + 28 \Rightarrow 6x = 36 \Rightarrow x = 6$$

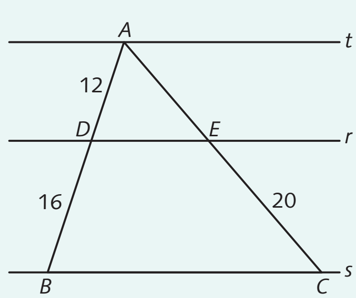
R2. Na figura a seguir a reta r é paralela ao lado $\overline{BC}$ do $\triangle ABC$. Qual é o comprimento do lado $\overline{AC}$ do triângulo?



Resolução

Tomamos uma reta s que contém $\overline{BC}$ e uma reta t que passa por A e é paralela a r e s. Pelo teorema de Tales, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo são divididos em segmentos proporcionais.

Ilustrações: Rafael L. Gaion



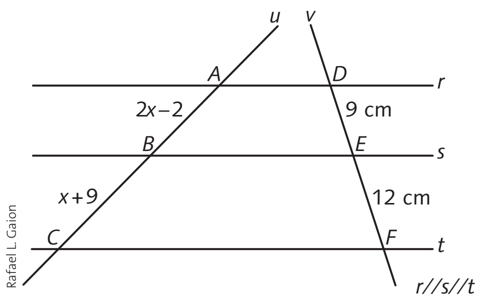
Observação
Pode-se verificar que toda reta paralela a um dos lados de um triângulo, e que cruza os outros dois lados, divide esses dois lados em segmentos de reta proporcionais.

Desse modo:

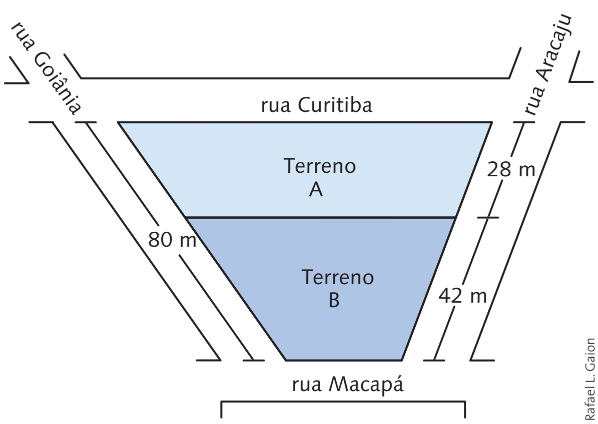
$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC} \Rightarrow \frac{28}{16} = \frac{AC}{20} \Rightarrow 16 \cdot AC = 560 \Rightarrow AC = 35$$

Portanto, $AC = 35$.

1. Determine, em centímetros, o comprimento de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. $AB = 12$ cm; $BC = 16$ cm

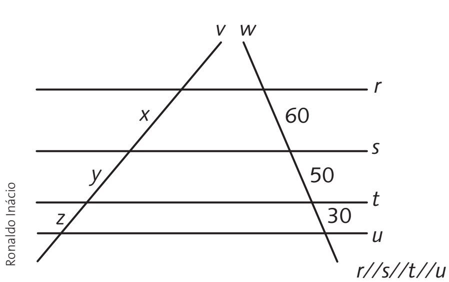


2. A figura representa parte de um mapa. As ruas Curitiba e Macapá e o muro que separa os terrenos **A** e **B** são paralelos.

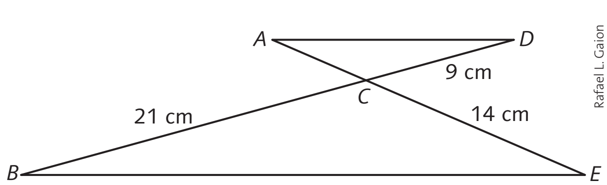


Determine o comprimento dos lados de cada terreno que fica de frente à rua Goiânia.
terreno **A**: 32 m; terreno **B**: 48 m

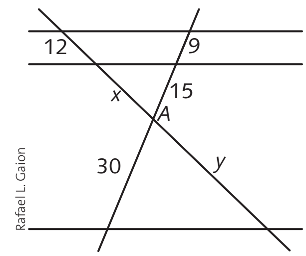
3. Determine os valores de x, y e z na figura, sabendo que $x + y + z = 168$.
$x = 72$, $y = 60$ e $z = 36$



4. Determine o comprimento de $\overline{AC}$ na figura abaixo, sabendo que $\overline{AD} // \overline{BE}$. $AC = 6$ cm



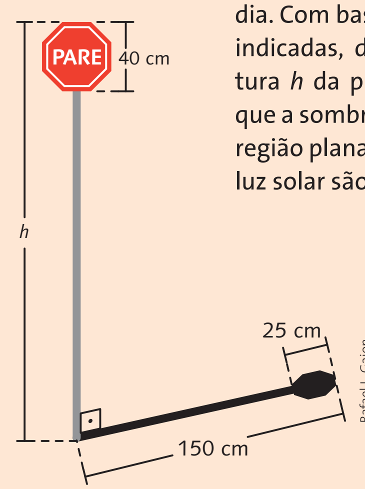
5. Sabendo que as retas r, s e t são paralelas, determine os valores de x e y. $x = 20$ e $y = 40$



Observação
Imagine uma reta u paralela às retas r, s e t que passa pelo ponto A.

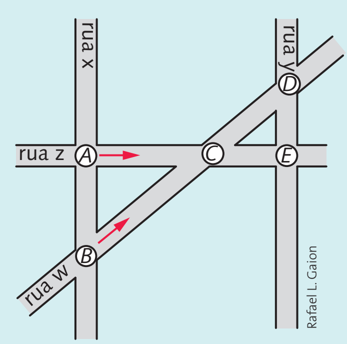
Em grupo

6. O esquema a seguir representa uma placa de trânsito e sua sombra em certo momento do dia. Com base nas dimensões indicadas, determinem a altura h da placa. Considerem que a sombra está sobre uma região plana e que os raios de luz solar são paralelos. 240 cm



Desafio

7. A figura representa parte do mapa de uma cidade, na qual as ruas x e y são paralelas.



Observação
A velocidade média v é dada por $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, em que Δs é a distância percorrida e Δt é o tempo gasto no percurso.

Na rua z, um veículo parte de A com destino a E percorrendo, em velocidade constante, AC em 4 s e CE em 3 s.

Pela rua w, a uma velocidade constante de 39 km/h, um veículo parte de B com destino a D. Se esse veículo percorre BC em 6 s, calcule, em metros, a distância entre C e D. $CD = 48{,}75$ m

4 Semelhança de triângulos

Dizemos que dois polígonos são **semelhantes** quando satisfazem às seguintes condições:

- os ângulos internos correspondentes são congruentes, ou seja, têm a mesma medida.
- os lados correspondentes são proporcionais.

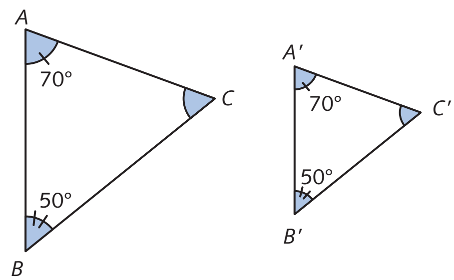
É possível verificar se dois triângulos são semelhantes sem necessariamente analisar ambas as condições. Para isso, utilizamos os casos de semelhança, apresentados a seguir.

1º caso de semelhança: ângulo e ângulo (AA)

Dois triângulos são semelhantes quando têm dois ângulos internos correspondentes congruentes.

Observação
A medida do ângulo $A\hat{B}C$ é representada por $\text{med}\left(A\hat{B}C\right)$.

Exemplo



Nos triângulos ao lado, temos:

- $\text{med}\left(A\hat{B}C\right) = \text{med}\left(A'\widehat{B'}C'\right) = 50°$;
- $\text{med}\left(C\hat{A}B\right) = \text{med}\left(C'\widehat{A'}B'\right) = 70°$.

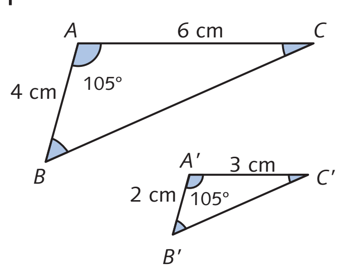
Portanto, pelo caso AA, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes ($\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$).

2º caso de semelhança: lado, ângulo e lado (LAL)

Dois triângulos são semelhantes quando têm dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por eles congruentes.

Observação
Na próxima página, você será desafiado a demonstrar um dos casos de semelhança apresentados. Os outros dois casos também podem ser demonstrados, porém, serão apenas enunciados e exemplificados.

Exemplo



Nos triângulos ao lado, temos:

- $\text{med}\left(C\hat{A}B\right) = \text{med}\left(C'\widehat{A'}B'\right) = 105°$;
- $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{4}{2} = 2$ e $\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{6}{3} = 2$.

  Logo, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$.

Portanto, pelo caso LAL, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

3º caso de semelhança: lado, lado e lado (LLL)

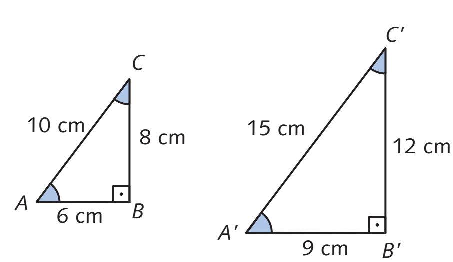
Dois triângulos são semelhantes quando têm os três lados correspondentes proporcionais.

Exemplo

Referente aos triângulos ao lado, temos:

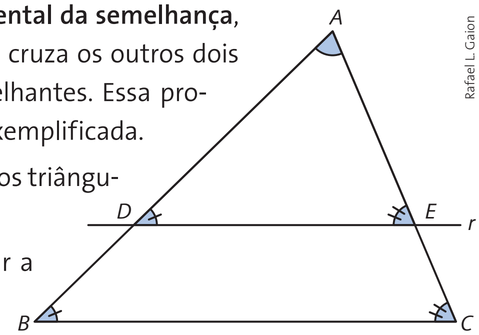
- $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$;
- $\dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$;
- $\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$.

Logo, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ e, pelo caso LLL, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Uma propriedade interessante, conhecida como **teorema fundamental da semelhança**, determina que, se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo cruza os outros dois lados formando um novo triângulo, então esses triângulos são semelhantes. Essa propriedade pode ser demonstrada, porém, neste livro, ela será apenas exemplificada.



Rafael L. Gaion

No triângulo *ABC* ao lado, a reta *r* é paralela ao lado $\overline{BC}$. Nesse caso, os triângulos *ABC* e *ADE* são semelhantes.

- Utilize o teorema fundamental da semelhança para demonstrar a veracidade do 1º caso de semelhança.

Veja a resposta nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.

Observação

Para realizar essa demonstração, considere os triângulos *ABC* e *DEF*, tais que $\hat{A} \cong \hat{D}$ e $\hat{B} \cong \hat{E}$. Em seguida, mostre que as outras condições de semelhança são satisfeitas.

Problemas e exercícios resolvidos

R3. Em certo momento, um poste projeta uma sombra com 1,2 m de comprimento. Ao mesmo tempo, uma pessoa de 1,75 m de altura, próxima ao poste, projeta uma sombra de 0,35 m de comprimento. Qual é a altura do poste?

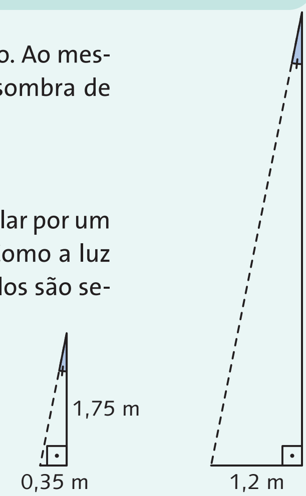
Resolução

Podemos representar esquematicamente o poste, sua sombra e o raio de luz solar por um triângulo retângulo, assim como a pessoa, sua sombra e o raio de luz solar. Como a luz solar incide com mesmo ângulo sobre o poste e a pessoa, então esses triângulos são semelhantes pelo 1º caso de semelhança (AA).

Assim, tomando a altura do poste como *x*, temos:

$$\frac{x}{1{,}75} = \frac{1{,}2}{0{,}35} \Rightarrow 0{,}35x = 1{,}2 \cdot 1{,}75 \Rightarrow x = \frac{2{,}1}{0{,}35} \Rightarrow x = 6$$

Portanto, o poste mede 6 m de altura.

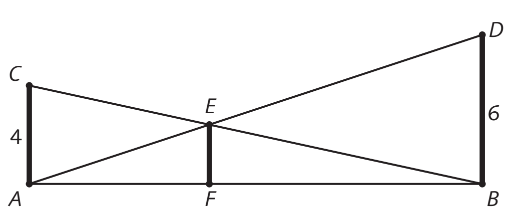


Rafael L. Gaion

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

8. (Enem) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e a haste é representada pelo segmento $\overline{EF}$, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta $\overline{AB}$. Os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ representam cabos de aço que serão instalados.



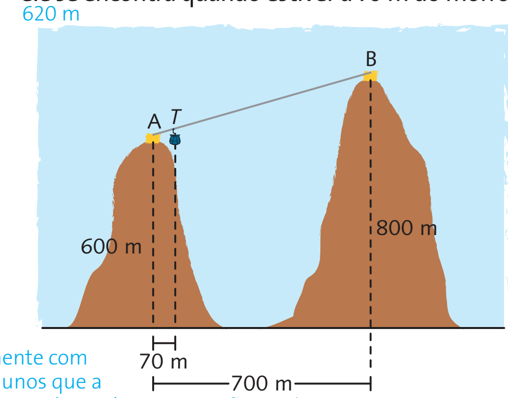
Rafael L. Gaion

Qual deve ser o valor do comprimento da haste $\overline{EF}$? c

a) 1 m
b) 2 m
c) 2,4 m
d) 3 m
e) $2\sqrt{6}$ m

9. Na figura *T* representa um teleférico. Desprezando as dimensões do teleférico, calcule a que altura do solo ele se encontra quando estiver a 70 m do morro A.

620 m



Rafael L. Gaion

Comente com os alunos que a imagem não está em proporções reais.

Você produtor

10. Elabore um problema envolvendo semelhança de triângulos que tenha como resposta a frase:

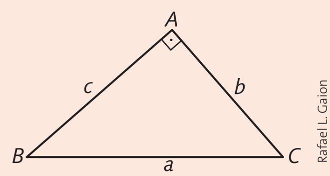
A altura do prédio é igual a 40 metros.

Resposta pessoal. Possível resposta: em um mesmo momento, um prédio projeta uma sombra de 20 m de comprimento, enquanto uma pessoa de 1,7 m de altura projeta uma sombra de 85 cm de comprimento. Qual é a altura do prédio?

5 Teorema de Pitágoras

Em um triângulo retângulo é válida a seguinte relação que envolve os comprimentos da hipotenusa – lado oposto ao ângulo reto e o maior lado do triângulo retângulo – e dos catetos – lados adjacentes ao ângulo reto.

> Em todo triângulo retângulo a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos é igual ao quadrado do comprimento da hipotenusa.
>
> $$a^2 = b^2 + c^2$$

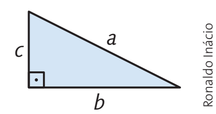


Observação
Para simplificar a escrita, neste capítulo vamos dizer, em algumas situações, "segmento *a*" para nos referirmos ao segmento cuja medida do comprimento é *a*. Então, em vez de dizer "quadrado cujo lado tem 3 cm de comprimento", diremos simplesmente "quadrado de lado 3 cm", entre outras.

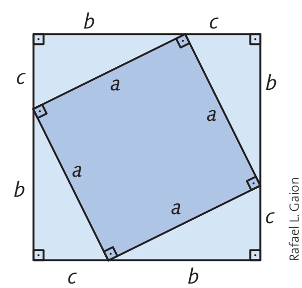
O primeiro registro da demonstração desse teorema é creditado a Pitágoras, e por isso leva o seu nome. No entanto, casos particulares dessa relação já eram de conhecimento de povos anteriores a Pitágoras, como os babilônios, por exemplo.

Podemos demonstrar o teorema de Pitágoras da seguinte maneira.

Inicialmente, consideramos o triângulo retângulo ABC.



Na figura ao lado, o quadrado de lado $b + c$ é formado por quatro triângulos congruentes e um quadrado menor de lado a.



A área do quadrado maior pode ser calculada de duas maneiras diferentes.

- Adicionando a área do quadrado de lado a e a área dos quatro triângulos retângulos congruentes: $a^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2}$.
- Elevando ao quadrado o comprimento do lado: $(b + c)^2$.

Igualando as duas áreas, temos:

$$a^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2} = (b + c)^2 \Rightarrow a^2 + 2bc = b^2 + bc + bc + c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + \cancel{2bc} = b^2 + \cancel{2bc} + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Observação
Região poligonal é a reunião de um polígono e todos os seus pontos interiores. Neste livro, vamos utilizar a palavra polígono para nos referirmos tanto aos polígonos quanto às regiões poligonais.

Problemas e exercícios resolvidos

R4. Para apoiar um poste de rede elétrica, foi utilizado um cabo de aço fixado ao solo a uma distância de 6 m do poste. Calcule a que altura aproximada do poste está fixado o cabo de aço sabendo que ele mede 10 m.

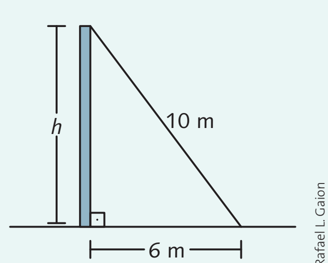
Resolução

Podemos fazer uma representação dessa situação por meio do esquema apresentado.

Utilizando o teorema de Pitágoras, calculamos a altura h:

$10^2 = h^2 + 6^2 \Rightarrow h^2 = 64 \Rightarrow h = 8$

Portanto, a altura é, aproximadamente, 8 m.



Observação
Neste tópico, ao extrair raízes quadradas de ambos os membros de uma equação, vamos considerar apenas os valores positivos, pois as incógnitas são comprimentos de segmentos de reta que não assumem valores negativos.

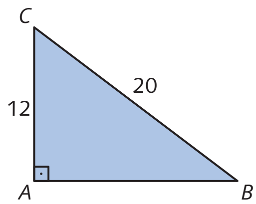
Na tarefa **17**, por se tratar de uma questão de vestibular, embora estejamos usando “comprimento da diagonal”, por exemplo, aparece a palavra “mede” para se referir ao comprimento da diagonal do retângulo.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

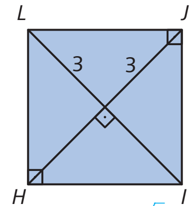
11. Calcule a área e o perímetro de cada uma das figuras.

a)



$A = 96$ u.a.; $P = 48$ u.c.

b)



$A = 18$ u.a.; $P = 12\sqrt{2}$ u.c.

Ilustrações: Rafael L. Gaion

Em grupo

12. (Enem) Quatro estações distribuidoras de energia, **A**, **B**, **C** e **D**, estão dispostas como vértices de um quadrado de 40 km de lado. Deseja-se construir uma estação central que seja ao mesmo tempo equidistante das estações **A** e **B** e da estrada (reta) que liga as estações **C** e **D**. A nova estação deve ser localizada: c

a) no centro do quadrado.

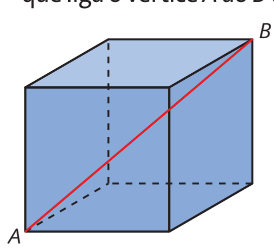
b) na perpendicular à estrada que liga **C** e **D** passando por seu ponto médio, a 15 km dessa estrada.

c) na perpendicular à estrada que liga **C** e **D** passando por seu ponto médio, a 25 km dessa estrada.

d) no vértice de um triângulo equilátero de base **AB**, oposto a essa base.

e) no ponto médio da estrada que liga as estações **A** e **B**.

13. Calcule o volume do cubo sabendo que a diagonal que liga o vértice A ao B tem 20 cm de comprimento. $\frac{8\,000\sqrt{3}}{9}$ cm^3



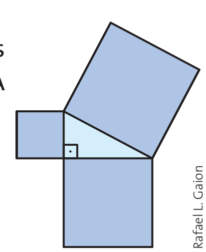
Rafael L. Gaion

Observação

Para calcular o volume do cubo, utilize a fórmula $V = a^3$, em que a é o comprimento de sua aresta.

14. (UPM-SP) Na figura, a soma das áreas dos três quadrados é 18. A área do quadrado maior é: a

a) 9
b) 10
c) 12
d) 6
e) 8

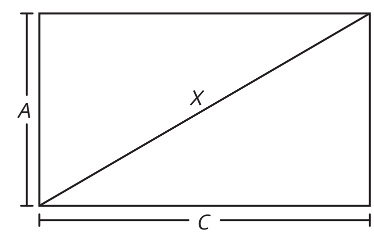


Rafael L. Gaion

15. Qual a altura de um triângulo equilátero cujo perímetro é 36 cm? $6\sqrt{3}$ cm

16. A área de um quadrado é dada pelo produto das raízes da equação $2x^2 - 13x + 18 = 0$. Determine o comprimento da diagonal desse quadrado. $3\sqrt{2}$ u.c.

17. (Enem) A unidade de medida utilizada para anunciar o tamanho das telas de televisores no Brasil é a polegada, que corresponde a 2,54 cm. Diferentemente do que muitos imaginam, dizer que a tela de uma TV tem X polegadas significa que a diagonal do retângulo que representa sua tela mede X polegadas, conforme ilustração.



Rafael L. Gaion

O administrador de um museu recebeu uma TV convencional de 20 polegadas, que tem como razão do comprimento (C) pela altura (A) a proporção 4 : 3, e precisa calcular o comprimento (C) dessa TV a fim de colocá-la em uma estante para exposição.

A tela dessa TV tem medida do comprimento C, em centímetro, igual a d

a) 12,00
b) 16,00
c) 30,48
d) 40,64
e) 50,80

18. Em um *blog*, que publica conteúdos sobre Matemática, foram apresentados três exemplos de triângulos. Para cada um desses triângulos, verificou-se que a soma dos quadrados dos comprimentos de seus lados menores resultava no quadrado do comprimento do lado maior. Na sequência, a seguinte afirmação foi feita. Veja a resposta desta tarefa na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

[...]

Logo, a partir dos exemplos apresentados, podemos generalizar esta relação da seguinte forma:

“Dado um triângulo qualquer, a soma dos quadrados dos comprimentos de seus dois lados menores é igual ao quadrado do comprimento do lado maior.”

Essa relação pode ser muito útil para resolver diversos problemas em que os comprimentos de dois lados de um triângulo são conhecidos.

Calculando o comprimento do lado de um triângulo. Disponível em: <https://matematicaemdestaque.wixsite.com/blog/post/calculando-o-comprimento-do-lado-de-um-tri%C3%A2ngulo>. Acesso em: 13 ago. 2020.

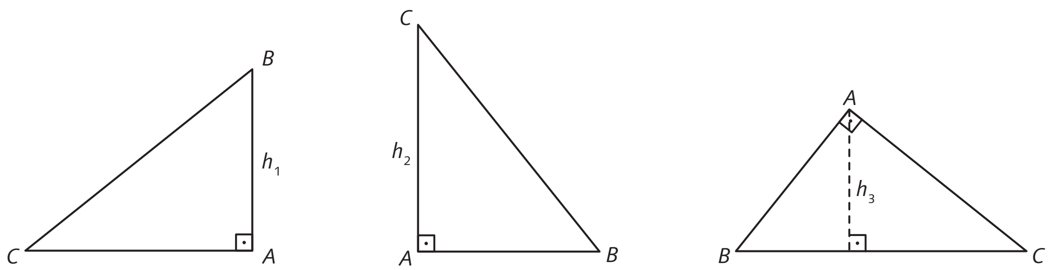
a) Você concorda com a afirmação do texto citado? Justifique sua resposta.

b) O autor do texto generalizou uma relação matemática por meio de três exemplos apresentados. O que você pensa sobre essa estratégia? Converse com os colegas e o professor.

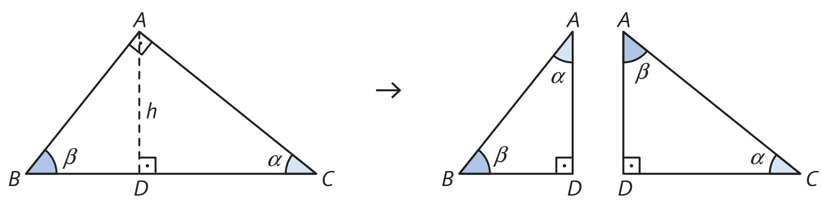
c) Como você faria para avaliar essa publicação e verificar a qualidade dos dados apresentados?

6 Relações métricas no triângulo retângulo

A seguir o triângulo retângulo *ABC* foi representado em diferentes posições. Além disso, indicamos as alturas (h_1, h_2, h_3) relativas a cada um dos lados.

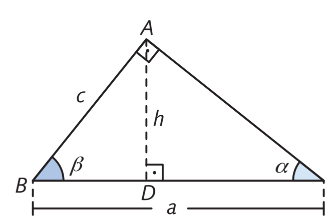


Note que a altura relativa a cada um dos catetos é o outro cateto. No entanto, ao considerarmos a altura relativa à hipotenusa, obtemos dois outros triângulos retângulos. Traçando a altura $\overline{AD}$ relativa à hipotenusa do triângulo retângulo *ABC*, temos, pelo 1º caso de semelhança (AA), $\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$.



Assim, podemos estabelecer algumas relações entre os comprimentos dos lados desses triângulos. Para isso, vamos indicá-los por letras minúsculas, de modo que:

- *a* é o comprimento da hipotenusa.
- *b* é o comprimento de um dos catetos.
- *c* é o comprimento do outro cateto.
- *h* é o comprimento da altura relativa à hipotenusa.
- *m* é o comprimento da projeção do cateto *b* sobre a hipotenusa.
- *n* é o comprimento da projeção do cateto *c* sobre a hipotenusa.



Além disso, temos $a = m + n$.

Como em triângulos semelhantes os comprimentos dos lados correspondentes são proporcionais, podemos estabelecer as seguintes relações:

- $\frac{b}{c} = \frac{m}{h} \Rightarrow b \cdot h = c \cdot m$
- $\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow m \cdot n = h^2$
- $\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow a \cdot h = c \cdot b$
- $\frac{b}{c} = \frac{h}{n} \Rightarrow b \cdot n = c \cdot h$
- $\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow a \cdot n = c^2$
- $\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow a \cdot m = b^2$

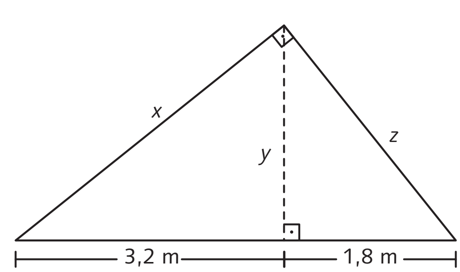
Exemplo

Considerando o triângulo retângulo ao lado, vamos determinar os valores de *x*, *y* e *z*.

$$\frac{3{,}2 + 1{,}8}{x} = \frac{x}{3{,}2} \Rightarrow 5 \cdot 3{,}2 = x \cdot x \Rightarrow 16 = x^2 \Rightarrow x = 4 \rightarrow 4 \text{ cm}$$

$$\frac{3{,}2}{y} = \frac{y}{1{,}8} \Rightarrow 3{,}2 \cdot 1{,}8 = y \cdot y \Rightarrow 5{,}76 = y^2 \Rightarrow y = 2{,}4 \rightarrow 2{,}4 \text{ cm}$$

$$\frac{3{,}2 + 1{,}8}{z} = \frac{z}{1{,}8} \Rightarrow 5 \cdot 1{,}8 = z \cdot z \Rightarrow 9 = z^2 \Rightarrow z = 3 \rightarrow 3 \text{ cm}$$

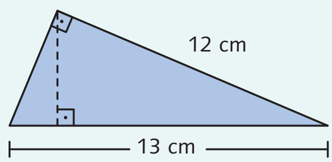


Ilustrações: Rafael L. Gaion

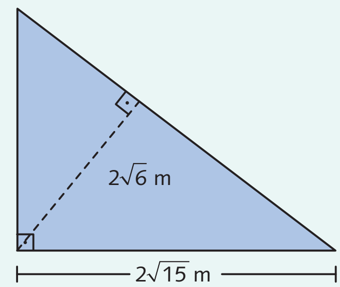
Problemas e exercícios resolvidos

R5. Calcule o perímetro e a área dos seguintes triângulos.

a)



b)



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Resolução

a) Seja x o comprimento do cateto menor. Assim:

$$12^2 + x^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5 \rightarrow 5 \text{ cm}$$

O perímetro P é calculado por:

$$P = 13 + 12 + 5 = 30 \rightarrow 30 \text{ cm}$$

Seja h o comprimento da altura relativa à hipotenusa. Desse modo:

$$\frac{13}{5} = \frac{12}{h} \Rightarrow 13 \cdot h = 5 \cdot 12 \Rightarrow h = \frac{60}{13} \rightarrow \frac{60}{13} \text{ cm}$$

A área A é calculada por:

$$A = \frac{13 \cdot \frac{60}{13}}{2} = \frac{60}{2} = 30 \rightarrow 30 \text{ cm}^2$$

Portanto, o perímetro do triângulo é 30 cm e a área, 30 cm^2.

b) Seja n o comprimento da projeção sobre a hipotenusa do cateto de comprimento $2\sqrt{15}$ m. Assim:

$$n^2 + \left(2\sqrt{6}\right)^2 = \left(2\sqrt{15}\right)^2 \Rightarrow n^2 = 60 - 24 \Rightarrow n = 6 \rightarrow 6 \text{ m}$$

Seja b o comprimento do outro cateto. Desse modo:

$$\frac{2\sqrt{15}}{b} = \frac{6}{2\sqrt{6}} \Rightarrow b \cdot 6 = 2\sqrt{15} \cdot 2\sqrt{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{4\sqrt{90}}{6} \Rightarrow b = \frac{2 \cdot 3\sqrt{10}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 2\sqrt{10} \rightarrow 2\sqrt{10} \text{ m}$$

Seja m o comprimento da projeção sobre a hipotenusa do cateto de comprimento $2\sqrt{10}$ m.

Assim:

$$\frac{6}{2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{m} \Rightarrow 6 \cdot m = \left(2\sqrt{6}\right)^2 \Rightarrow m = \frac{4 \cdot 6}{6} \Rightarrow m = 4 \rightarrow 4 \text{ m}$$

Sendo a o comprimento da hipotenusa, temos:

$$a = 4 + 6 = 10 \rightarrow 10 \text{ m}$$

O perímetro P é calculado por:

$$P = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15} + 10 = 2\left(5 + \sqrt{10} + \sqrt{15}\right) \rightarrow 2\left(5 + \sqrt{10} + \sqrt{15}\right) \text{m}$$

A área A é calculada por:

$$A = \frac{10 \cdot 2\sqrt{6}}{2} = 10\sqrt{6} \rightarrow 10\sqrt{6} \text{ m}^2$$

Portanto, o perímetro do triângulo é $2\left(5 + \sqrt{10} + \sqrt{15}\right)$ m, e a área, $10\sqrt{6}$ m^2.

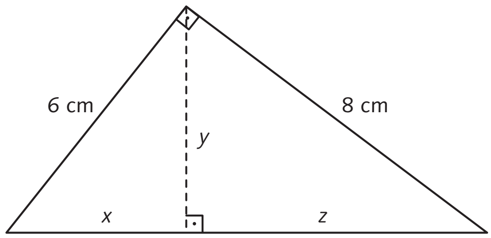
22. Oriente os alunos a considerar que o terceiro lado pode ser um dos catetos ou a hipotenusa, além de calcular o comprimento do terceiro lado e da altura relativa à hipotenusa para ambos os casos, verificando qual possui a altura com o comprimento apresentado.

Problemas e exercícios propostos

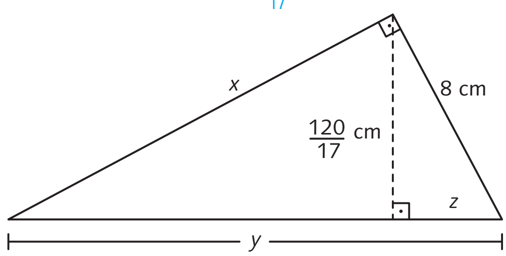
Não escreva no livro.

19. Em cada triângulo, calcule os valores de x, y e z.

a) $x = 3{,}6$ cm, $y = 4{,}8$ cm, $z = 6{,}4$ cm



b) $x = 15$ cm, $y = 17$ cm, $z = \frac{64}{17}$ cm

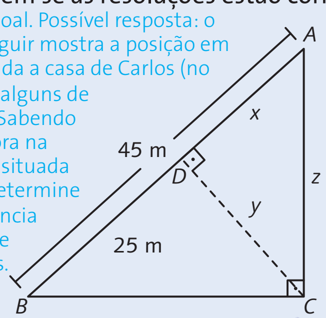


Ilustrações: Rafael L. Gaion

Você produtor

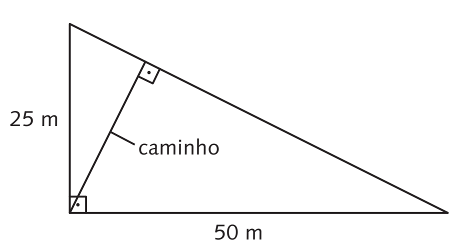
20. De acordo com a imagem a seguir, elabore um problema contextualizado e troque com um colega. Resolvam os problemas, destroquem e avaliem se as resoluções estão corretas.

Resposta pessoal. Possível resposta: o esquema a seguir mostra a posição em que está situada a casa de Carlos (no ponto C) e de alguns de seus colegas. Sabendo que Diogo mora na casa que está situada no ponto D, determine a menor distância entre a casa de Diogo e Carlos.



Rafael L. Gaion

21. Em uma praça com formato de triângulo retângulo, um caminho em linha reta será construído ligando um "vértice" a um de seus lados, conforme o esquema.



Rafael L. Gaion

Desconsiderando a largura do caminho, calcule:

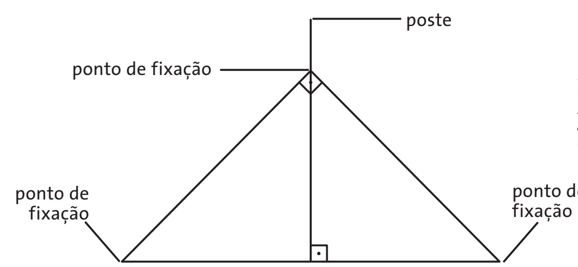
a) o comprimento do maior lado da praça.
aproximadamente 55,9 m

b) o comprimento do caminho que será construído.
aproximadamente 22,4 m

Desafio

22. Um triângulo retângulo possui os comprimentos de dois de seus lados iguais a 4 cm e 6 cm. Calcule o comprimento do terceiro lado sabendo que o comprimento da altura relativa à hipotenusa é $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ cm. $2\sqrt{5}$ cm

23. Um poste, de largura desprezível, foi fixado perpendicular ao chão com dois cabos auxiliando na sua sustentação, de maneira que os pontos de fixação são vértices de um triângulo, conforme o esquema. (Dado: $\sqrt{2} \simeq 1{,}414$.)



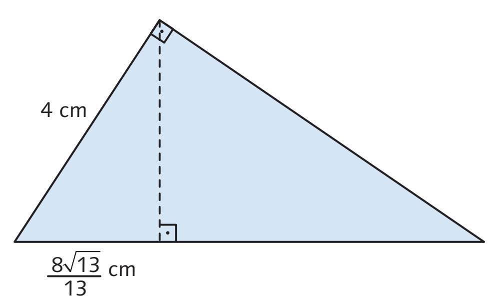
Rafael L. Gaion

Sabendo que os dois cabos possuem mesmo comprimento, estão fixados no chão a 10 metros da base do poste e formam um ângulo reto entre eles, responda às questões a seguir.

a) A que altura do chão os cabos foram fixados no poste? 10 m

b) Qual é o comprimento de cada cabo?
aproximadamente 14,14 m

24. Calcule a área do triângulo a seguir. 12 cm^2



Rafael L. Gaion

Você produtor

25. Construa um triângulo retângulo e calcule o comprimento da altura relativa à hipotenusa e das projeções dos catetos sobre a hipotenusa. Em seguida, apresente algumas dessas medidas para um colega e peça que ele determine as outras medidas.

Resposta pessoal. Espera-se que os alunos verifiquem se as medidas apresentadas são suficientes para que as outras medidas possam ser determinadas pelo colega.

7 Seno, cosseno e tangente

Dá-se o nome de **trigonometria** ao ramo da geometria que estuda os métodos para calcular o comprimento dos lados e a medida dos ângulos de um triângulo qualquer. Aplicável em várias áreas, como Engenharia, Astronomia, Geografia e Topografia, a trigonometria é fundamental na prática de profissionais dessas áreas.

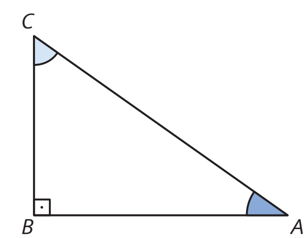
Trigonometria: palavra do latim que significa medida do triângulo. *Trigon*: triângulo; *metria*: medida.

Neste tópico, iremos estudar as relações trigonométricas no triângulo retângulo, ou seja, aquelas que envolvem os comprimentos dos lados e as medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo.

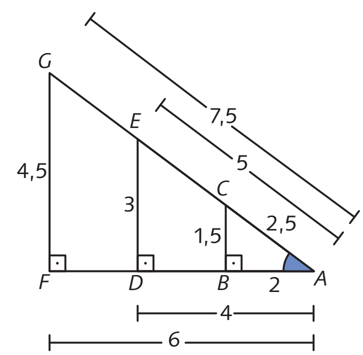
Antes, porém, vamos determinar quais são os catetos oposto e adjacente de um triângulo retângulo em relação a um determinado ângulo interno.

Considere o triângulo retângulo *ABC*.

- Em relação ao ângulo $\hat{A}$, o lado $\overline{BC}$ é o **cateto oposto** e o lado $\overline{AB}$ é o **cateto adjacente**.
- Em relação ao ângulo $\hat{C}$, o lado $\overline{AB}$ é o **cateto oposto** e o lado $\overline{BC}$ é o **cateto adjacente**.



Agora, considere os triângulos retângulos *ABC*, *ADE* e *AFG*, semelhantes pelo 1º caso (AA).



De acordo com o teorema de Tales, vamos estabelecer a igualdade das seguintes razões.

- Razão entre os comprimentos dos catetos opostos em relação ao ângulo $\hat{A}$ e os comprimentos das hipotenusas.

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{FG}{AG} \Rightarrow \frac{1{,}5}{2{,}5} = \frac{3}{5} = \frac{4{,}5}{7{,}5} = 0{,}6$$

Note que as razões obtidas são iguais. Chamamos essa razão de **seno do ângulo** $\hat{A}$, e indicamos por $\text{sen}\,\hat{A} = 0{,}6$.

- Razão entre os comprimentos dos catetos adjacentes em relação ao ângulo $\hat{A}$ e os comprimentos das hipotenusas.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AG} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{2{,}5} = \frac{4}{5} = \frac{6}{7{,}5} = 0{,}8$$

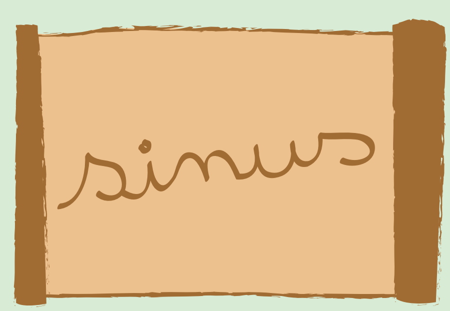
Nesse caso, as razões obtidas são também iguais. Chamamos essa razão de **cosseno do ângulo** $\hat{A}$, e indicamos por $\cos\hat{A} = 0{,}8$.

- Razão entre os comprimentos dos catetos opostos e os comprimentos dos catetos adjacentes em relação ao ângulo $\hat{A}$.

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{FG}{AF} \Rightarrow \frac{1{,}5}{2} = \frac{3}{4} = \frac{4{,}5}{6} = 0{,}75$$

Nesse outro caso, as razões obtidas também são iguais. Chamamos essa razão de **tangente do ângulo** $\hat{A}$, e indicamos por $\text{tg}\,\hat{A} = 0{,}75$.

A Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), pela Norma ABNT NBR ISO 80000-2, válida desde 17 de agosto de 2012, recomenda o uso da notação tan *x*. Porém, nesta coleção, manteremos tg *x* por ser a notação mais convencional em sala de aula.

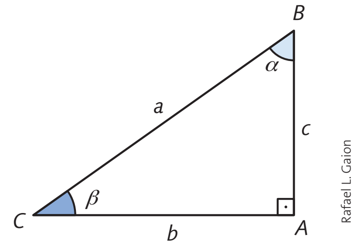


Ilustrações: Rafael L. Gaion

A palavra **seno** vem de *sinus*, tradução latina de *jaib*, que faz parte do vocabulário árabe e significa enseada ou baía. Antes, porém, seno, para os hindus, tinha nome de *jiva*, metade da corda, e, para os árabes, *jiba*. Hoje, *jiba* é uma palavra que não tem sentido em árabe, passou-se a usar *jaib*.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. 3. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 2012.

As razões seno, cosseno e tangente são chamadas **razões trigonométricas**. Com essas razões, podemos determinar o comprimento de um lado do triângulo retângulo, sabendo a medida de um ângulo e o comprimento de outro lado. Também podemos determinar a medida de um ângulo sabendo o comprimento de dois dos lados.



Observação

A partir deste momento, quando escrevermos sen α, estamos nos referindo ao seno do ângulo cuja medida é α. O mesmo vale para as demais razões trigonométricas. Por exemplo, tg 45° indica a tangente do ângulo cuja medida é 45°.

Em todo triângulo retângulo, a razão entre o comprimento:

Se necessário, diga aos alunos que a indicação "comp." corresponde à abreviação de comprimento.

- do cateto oposto ao ângulo e o da hipotenusa é chamada **seno** do ângulo agudo.

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{comp. do cateto oposto a } \hat{B}}{\text{comp. da hipotenusa}} = \frac{b}{a} \qquad \text{sen}\,\beta = \frac{\text{comp. do cateto oposto a } \hat{C}}{\text{comp. da hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

- do cateto adjacente ao ângulo e o da hipotenusa é chamada **cosseno** do ângulo agudo.

$$\cos\alpha = \frac{\text{comp. do cateto adjacente a } \hat{B}}{\text{comp. da hipotenusa}} = \frac{c}{a} \qquad \cos\beta = \frac{\text{comp. do cateto adjacente a } \hat{C}}{\text{comp. da hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

- do cateto oposto ao ângulo e o do cateto adjacente a esse ângulo é chamada **tangente** do ângulo agudo.

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{comp. do cateto oposto a } \hat{B}}{\text{comp. do cateto adjacente a } \hat{B}} = \frac{b}{c} \qquad \text{tg}\,\beta = \frac{\text{comp. do cateto oposto a } \hat{C}}{\text{comp. do cateto adjacente a } \hat{C}} = \frac{c}{b}$$

Problemas e exercícios resolvidos

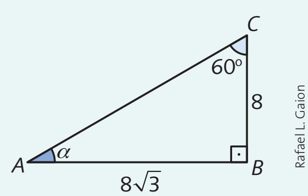
R6. Considerando o triângulo retângulo, determine:

a) o valor de α.

b) o comprimento do lado $\overline{AC}$.

c) os valores de sen 60°, cos 60° e tg 60°.

d) os valores de sen α, cos α e tg α.



Resolução

a) A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, dessa forma:

$$\alpha + 60° + 90° = 180° \Rightarrow \alpha = 30°$$

b) Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$(AC)^2 = (8\sqrt{3})^2 + 8^2 \Rightarrow (AC)^2 = 256 \Rightarrow AC = \sqrt{256} = 16$$

Portanto, o comprimento do lado AC é 16 unidades de comprimento.

c) • $\text{sen}\,60° = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ • $\cos 60° = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ • $\text{tg}\,60° = \frac{8\sqrt{3}}{8} = \sqrt{3}$

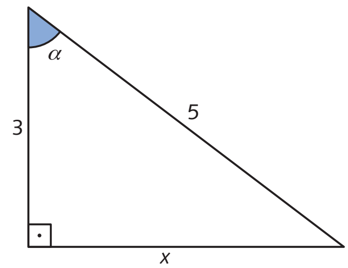
d) • $\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,30° = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

• $\cos\alpha = \cos 30° = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

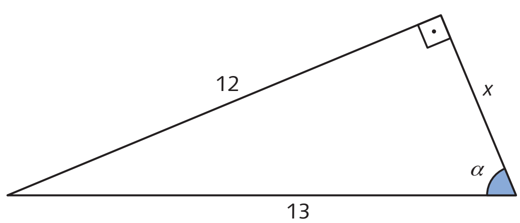
• $\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,30° = \frac{8}{8\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

26. Em cada triângulo, determine os valores de x, sen α, cos α e tg α.

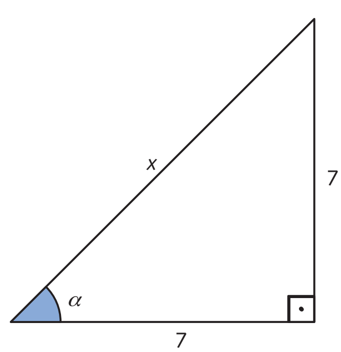
a) 4; sen $\alpha = \frac{4}{5}$; cos $\alpha = \frac{3}{5}$; tg $\alpha = \frac{4}{3}$



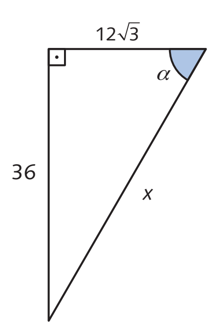
b) 5; sen $\alpha = \frac{12}{13}$; cos $\alpha = \frac{5}{13}$; tg $\alpha = \frac{12}{5}$



c) $7\sqrt{2}$; sen $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; cos $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; tg $\alpha = 1$



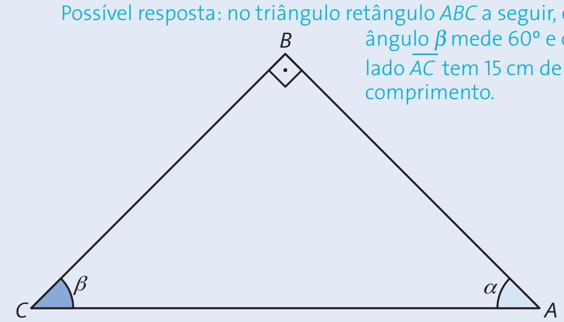
d) $24\sqrt{3}$; sen $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; cos $\alpha = \frac{1}{2}$; tg $\alpha = \sqrt{3}$



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Você produtor

27. Atribua um valor para β e um comprimento para o lado $\overline{AC}$ do triângulo. Depois, peça a um colega que calcule: Resposta pessoal.
Possível resposta: no triângulo retângulo ABC a seguir, o ângulo β mede 60° e o lado $\overline{AC}$ tem 15 cm de comprimento.



Rafael L. Gaion

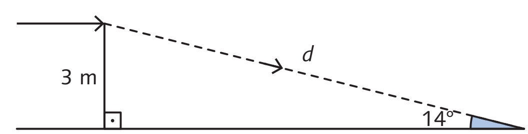
a) o valor de α.

b) o comprimento do lado $\overline{BC}$.

c) os valores de sen α, cos α e tg α.

Por fim, verifique se as respostas estão corretas.

28. O voo do 14-Bis, em que Santos Dumont ganhou o prêmio do Aeroclube da França, percorreu 60 m a uma altura de, aproximadamente, 3 m do solo.
Veja a seguir o esquema que representa a descida do 14-Bis até o solo, numa trajetória retilínea.

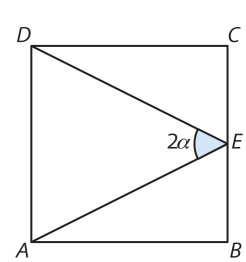


Rafael L. Gaion

Determine a distância máxima d aproximada que Santos Dumont teria percorrido do início da descida do 14-Bis até o momento em que ele atingiu o solo. 12,5 m
(Dados sen 14° = 0,24; cos 14° = 0,97; tg 14° = 0,25.)

29. (UFMG) Observe a figura:

Na tarefa **29**, por se tratar de uma questão de vestibular, é utilizado o termo "tangente do ângulo α" para se referir à tangente do ângulo cuja medida é α.



Rafael L. Gaion

Nesta figura, E é o ponto médio do lado $\overline{BC}$ do quadrado $ABCD$. A tangente do ângulo α é: a

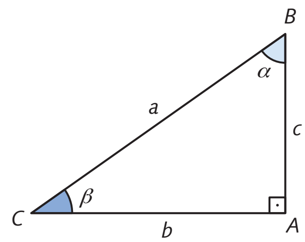
a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 2 d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8 Relações entre seno, cosseno e tangente

Utilizando as razões trigonométricas vistas anteriormente, podemos obter relações entre o seno, o cosseno e a tangente.

Vimos que em um triângulo retângulo *ABC* com ângulos agudos de medidas α e β, temos as seguintes relações:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{a}$	$\text{sen}\,\beta = \frac{c}{a}$
$\cos\alpha = \frac{c}{a}$	$\cos\beta = \frac{b}{a}$
$\text{tg}\,\alpha = \frac{b}{c}$	$\text{tg}\,\beta = \frac{c}{b}$



De acordo com o teorema de Pitágoras $(b^2 + c^2 = a^2)$ e utilizando sen α e cos α, vamos estabelecer uma relação entre essas razões.

Dividindo cada membro da equação $b^2 + c^2 = a^2$ por a^2, temos:

$$\frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$$

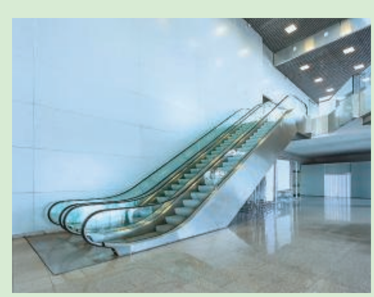
Como $\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{a}$ e $\cos\alpha = \frac{c}{a}$, segue que:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

A relação $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ é chamada **relação fundamental** entre seno e cosseno de um ângulo agudo.

Observação
Não podemos confundir $\text{sen}^2\,\alpha$, que é igual a $(\text{sen}\,\alpha)^2$, com $\text{sen}\,\alpha^2$, que é igual a $\text{sen}(\alpha \cdot \alpha)$.

Encontradas com frequência em *shoppings centers*, aeroportos, centros comerciais, entre outros, as escadas rolantes são um meio de transporte que consiste em uma escada inclinada, cujos degraus movem-se, tanto para cima quanto para baixo. Utilizadas para transportar de maneira confortável e rápida grande quantidade de pessoas entre andares de um edifício, as escadas rolantes foram colocadas em prática em 1895 pelo americano Jesse Reno, e sua primeira escada não era utilizada para transporte, e sim para as pessoas brincarem de subir e descer. Na escada rolante apresentada na fotografia, podemos imaginar um triângulo retângulo, em que β é o ângulo de inclinação entre a escada e o piso inferior.



Dmitry Bruskov/Shutterstock.com

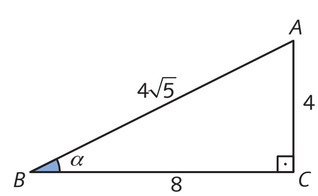
Escada rolante de um centro comercial.

Exemplo

No triângulo retângulo *ABC*, temos:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{8}{4\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Além disso:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{5}{25} + \frac{20}{25} = 1$$

Agora, vamos estabelecer uma relação entre as razões seno, cosseno e tangente.

Dividindo sen α por cos α, temos:

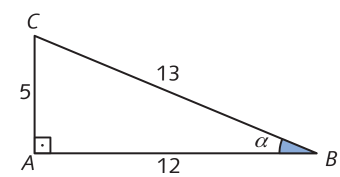
$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{\cancel{a}} \cdot \frac{\cancel{a}}{c} = \frac{b}{c} = \text{tg}\,\alpha$$

Portanto, para qualquer ângulo agudo de medida α, temos:

$$\boxed{\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}$$

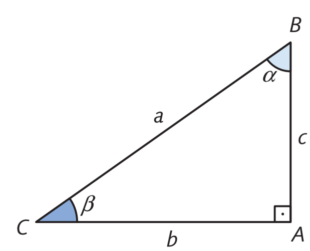
Exemplo

Vamos determinar a tg α no triângulo utilizando a relação $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$.



- $\text{sen}\,\alpha = \frac{5}{13}$
- $\cos\alpha = \frac{12}{13}$
- $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$

Ângulos complementares



Dizemos que dois ângulos são **complementares** quando a soma de suas medidas é 90°.

No $\triangle ABC$, temos $\boxed{\alpha + \beta = 90°}$, ou seja, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são **ângulos complementares**. Dessa maneira, $\boxed{\alpha = 90° - \beta}$ e $\boxed{\beta = 90° - \alpha}$ são menores do que 90° (ângulos agudos).

De $\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{a}$ e $\cos\beta = \frac{b}{a}$, segue que:

$$\text{sen}\,\alpha = \cos\beta \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \cos\underbrace{(90° - \alpha)}_{\beta}$$

De $\cos\alpha = \frac{c}{a}$ e $\text{sen}\,\beta = \frac{c}{a}$, segue que:

$$\cos\alpha = \text{sen}\,\beta \Rightarrow \cos\alpha = \text{sen}\underbrace{(90° - \alpha)}_{\beta}$$

Portanto, podemos concluir que:

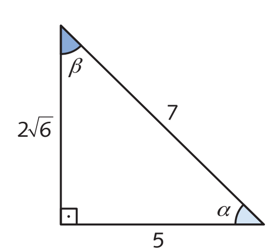
O seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno de seu complemento, e o cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno de seu complemento. Uma vez que o complemento do ângulo agudo de medida α é $90° - \alpha$, temos:

- $\text{sen}\,\alpha = \cos(90° - \alpha)$
- $\cos\alpha = \text{sen}\,(90° - \alpha)$

Exemplo

No triângulo apresentado, temos:

$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \beta = 90° - \alpha$$



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Além disso:

- $\text{sen}\,\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$

$\cos(90° - \alpha) = \cos\beta = \frac{2\sqrt{6}}{7}$

Portanto, $\boxed{\text{sen}\,\alpha = \cos\beta}$.

- $\cos\alpha = \frac{5}{7}$

$\text{sen}\,(90° - \alpha) = \text{sen}\,\beta = \frac{5}{7}$

Portanto, $\boxed{\cos\alpha = \text{sen}\,\beta}$.

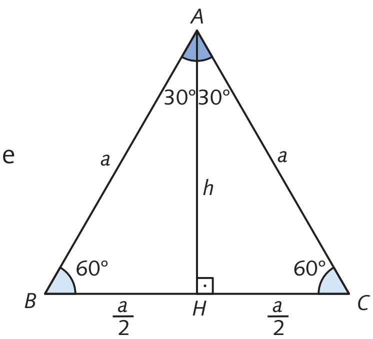
9 Valores do seno, do cosseno e da tangente de ângulos

Ao estudarmos a trigonometria no triângulo retângulo é comum encontrarmos situações envolvendo ângulos cujas medidas são 30°, 45° e 60°, chamados **ângulos notáveis**.

Veja como obter os valores do seno, do cosseno e da tangente desses ângulos utilizando as propriedades estudadas anteriormente.

Observação
A fim de simplificar a escrita, quando dissermos, por exemplo, ângulo de 30°, estamos nos referindo ao ângulo cuja medida é 30°.

Ângulos de 30° e 60°



Vamos considerar o triângulo equilátero de lado a. Utilizando o teorema de Pitágoras, determinamos a altura h em função de a.

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3a^2}}{\sqrt{4}} = \boxed{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

Agora, vamos calcular sen 30°, cos 30° e tg 30°.

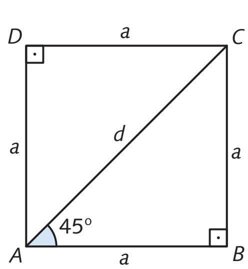
- $\text{sen } 30° = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2}$
- $\cos 30° = \dfrac{\overbrace{AH}^{h}}{AB} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} =$
  $= \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{tg } 30° = \dfrac{BH}{\underbrace{AH}_{h}} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{2}{a\sqrt{3}} =$
  $= \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Vamos calcular também sen 60°, cos 60° e tg 60°.

- $\text{sen } 60° = \dfrac{\overbrace{AH}^{h}}{AB} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} =$
  $= \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 60° = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2}$
- $\text{tg } 60° = \dfrac{\overbrace{AH}^{h}}{BH} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} =$
  $= \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{a} = \sqrt{3}$

Ângulo de 45°

Vamos considerar o quadrado de lado a. De acordo com o teorema de Pitágoras, determinamos o comprimento da diagonal d em função de a.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d = \sqrt{2a^2} = \boxed{a\sqrt{2}}$$

Agora, vamos calcular sen 45°, cos 45° e tg 45°.

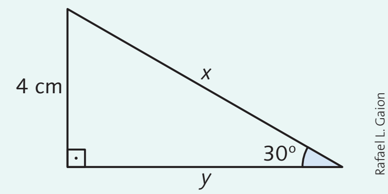
- $\text{sen } 45° = \dfrac{BC}{\underbrace{AC}_{d}} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 45° = \dfrac{AB}{\underbrace{AC}_{d}} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{tg } 45° = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{a}{a} = 1$

Observação
De acordo com os resultados obtidos nesta página, organizamos o seguinte quadro.

α	30°	45°	60°
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Problemas e exercícios resolvidos

R7. Determine o comprimento da hipotenusa x e do cateto maior y do triângulo retângulo ao lado.



Resolução

De acordo com o triângulo, $\operatorname{sen} 30° = \dfrac{4}{x}$ e $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{4}{y}$.

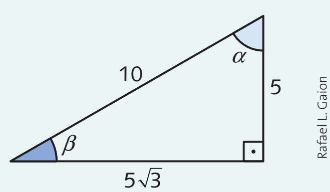
No quadro de ângulos notáveis apresentado na página anterior, temos $\operatorname{sen} 30° = \dfrac{1}{2}$ e $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Então:

- $\operatorname{sen} 30° = \dfrac{4}{x} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{x} \Rightarrow x = 8$

- $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{4}{y} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4}{y} \Rightarrow y\sqrt{3} = 12 \Rightarrow y = \dfrac{12}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{{}^{4}\cancel{12}\sqrt{3}}{\cancel{3}_{1}} = 4\sqrt{3}$

Portanto, o comprimento da hipotenusa desse triângulo é 8 cm e o do cateto maior é $4\sqrt{3}$ cm.

R8. Determine as medidas α e β do triângulo retângulo apresentado.

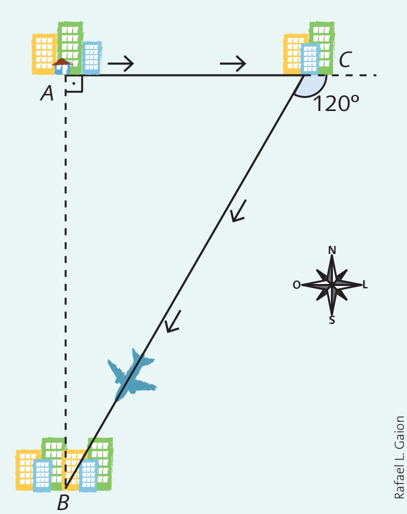


Resolução

Para determinar as medidas α e β, podemos utilizar, respectivamente, a razão cosseno e a razão tangente. Além disso, em ambos os casos, utilizamos o quadro de ângulos notáveis.

- $\cos \alpha = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$
- $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{5}{5\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta = 30°$

R9. Um avião parte da cidade **A** com destino à cidade **B**, localizada ao sul de **A**. Por erro de orientação, seguiu rumo ao leste. Após percorrer 54 km, o piloto detectou o erro e fez uma manobra sobre a cidade **C**, realizando um giro de 120°, corrigindo assim sua rota rumo à cidade **B**. Qual a distância percorrida pelo avião nessa viagem?



Resolução

Note que, no triângulo retângulo formado pelas linhas imaginárias, $A\hat{C}B$ mede 60°, pois o giro realizado foi de 120°. Tomando como referência o ângulo de 60°, podemos determinar BC, por meio da razão cosseno.

$$\cos 60° = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{54}{BC} \Rightarrow BC = 54 \cdot 2 \Rightarrow BC = 108$$

Adicionando as distâncias $AC = 54$ km e $BC = 108$ km, temos:

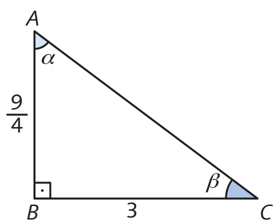
$$AC + BC = 54 + 108 = 162$$

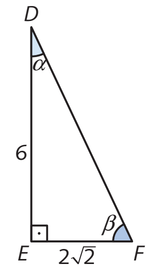
Portanto, a distância percorrida pelo avião foi 162 km.

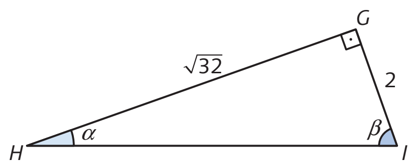
Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

30. Calcule o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos cujas medidas são α e β em cada um dos triângulos.







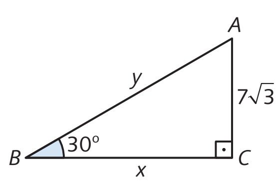
Ilustrações: Rafael L. Gaion

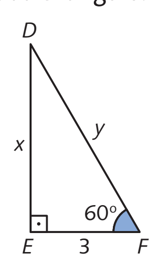
Em cada um dos triângulos, compare o valor de sen α com o de cos β. Compare também o valor de sen β com o de cos α.

O que você percebeu nos resultados comparados? Justifique sua resposta. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

31. Determine o valor de x e y em cada triângulo.

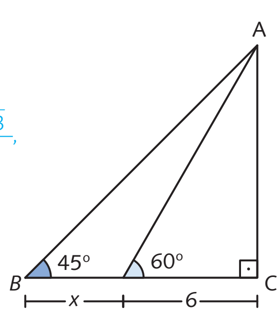
$\triangle ABC$: $x = 21$ e $y = 14\sqrt{3}$;
$\triangle DEF$: $x = 3\sqrt{3}$ e $y = 6$





Ilustrações: Rafael L. Gaion

32. Qual é o valor de x na figura? $x = 6(\sqrt{3} - 1)$



Rafael L. Gaion

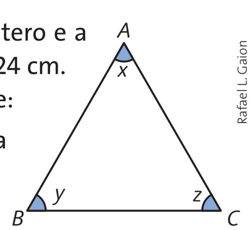
33. c) $\text{sen}\, y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos y = \frac{1}{2}$, $\text{tg}\, y = \sqrt{3}$

33. O triângulo ao lado é equilátero e a medida de seu perímetro é 24 cm. Nessas condições, determine:

a) o comprimento da altura desse triângulo. $4\sqrt{3}$ cm

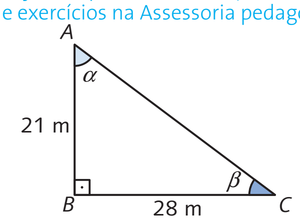
b) a medida de cada um de seus ângulos internos. $x = y = z = 60°$

c) o seno, o cosseno e a tangente do ângulo de medida y.



Rafael L. Gaion

34. De acordo com o triângulo, verifique se cada um dos itens é verdadeiro ou falso e justifique sua resposta. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.



Rafael L. Gaion

a) O comprimento da hipotenusa é 34 m.

b) $\text{sen}\, \beta = \cos \alpha = \frac{21}{35}$

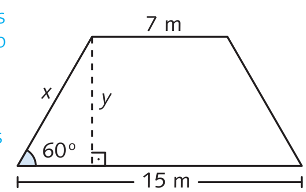
c) O comprimento da altura relativa à hipotenusa é $\frac{84}{5}$ m.

d) $\text{tg}\, \beta = 1{,}\overline{3}$

e) O perímetro desse triângulo é 84 m.

35. O quadrilátero representa um trapézio isósceles. Determine os valores de x e y. $y = 4\sqrt{3}$ m, $x = 8$ m

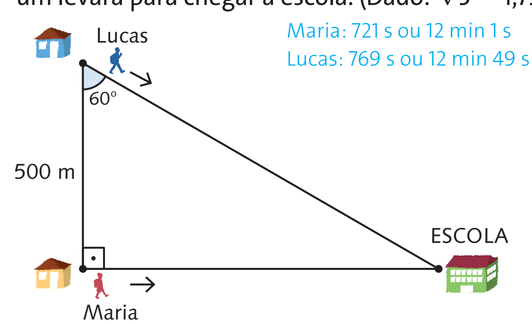
Explique aos alunos o que é um trapézio isósceles, isto é, aquele que tem os lados não paralelos com comprimentos iguais.



Rafael L. Gaion

36. Maria e Lucas estudam na mesma escola. Cada um saiu de casa no mesmo instante: Maria caminhando a uma velocidade de 1,2 m/s, e Lucas, a uma velocidade de 1,3 m/s. Sabendo que a casa de Lucas está a 500 m da casa de Maria, conforme esquema, calcule quantos minutos, aproximadamente, cada um levará para chegar à escola. (Dado: $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$.)

Maria: 721 s ou 12 min 1 s
Lucas: 769 s ou 12 min 49 s



Rafael L. Gaion

Você produtor

37. Pesquise sobre o que faz um agrimensor. Depois, elabore uma situação envolvendo as informações pesquisadas e as razões seno, cosseno ou tangente e entregue para um colega resolver. Por fim, verifique se as respostas estão corretas.

37. Resposta pessoal. Possível resposta: um engenheiro agrimensor realizou o levantamento topográfico de um terreno em formato de triângulo retângulo ABC. Sabendo que o lado $\overline{AB}$ desse terreno tem 25 m de comprimento e que as medidas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são 90° e 30°, respectivamente, determine os valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos agudos.

Tabela trigonométrica

Para cada ângulo, tem-se um valor correspondente para o seno, o cosseno e a tangente. Na tabela a seguir, apresentamos os valores aproximados do seno, do cosseno e da tangente de ângulos cujas medidas variam de 1° a 89°.

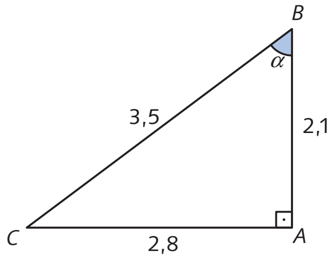
Medida do ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,0175	0,9998	0,0175
2°	0,0349	0,9994	0,0349
3°	0,0523	0,9986	0,0524
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405
9°	0,1564	0,9877	0,1584
10°	0,1736	0,9848	0,1763
11°	0,1908	0,9816	0,1944
12°	0,2079	0,9781	0,2126
13°	0,2250	0,9744	0,2309
14°	0,2419	0,9703	0,2493
15°	0,2588	0,9659	0,2679
16°	0,2756	0,9613	0,2867
17°	0,2924	0,9563	0,3057
18°	0,3090	0,9511	0,3249
19°	0,3256	0,9455	0,3443
20°	0,3420	0,9397	0,3640
21°	0,3584	0,9336	0,3839
22°	0,3746	0,9272	0,4040
23°	0,3907	0,9205	0,4245
24°	0,4067	0,9135	0,4452
25°	0,4226	0,9063	0,4663
26°	0,4384	0,8988	0,4877
27°	0,4540	0,8910	0,5095
28°	0,4695	0,8829	0,5317
29°	0,4848	0,8746	0,5543
30°	0,5000	0,8660	0,5774

Medida do ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
31°	0,5150	0,8572	0,6009
32°	0,5299	0,8480	0,6249
33°	0,5446	0,8387	0,6494
34°	0,5592	0,8290	0,6745
35°	0,5736	0,8192	0,7002
36°	0,5878	0,8090	0,7265
37°	0,6018	0,7986	0,7536
38°	0,6157	0,7880	0,7813
39°	0,6293	0,7771	0,8098
40°	0,6428	0,7660	0,8391
41°	0,6561	0,7547	0,8693
42°	0,6691	0,7431	0,9004
43°	0,6820	0,7314	0,9325
44°	0,6947	0,7193	0,9657
45°	0,7071	0,7071	1,0000
46°	0,7193	0,6947	1,0355
47°	0,7314	0,6820	1,0724
48°	0,7431	0,6691	1,1106
49°	0,7547	0,6561	1,1504
50°	0,7660	0,6428	1,1918
51°	0,7771	0,6293	1,2349
52°	0,7880	0,6157	1,2799
53°	0,7986	0,6018	1,3270
54°	0,8090	0,5878	1,3764
55°	0,8192	0,5736	1,4281
56°	0,8290	0,5592	1,4826
57°	0,8387	0,5446	1,5399
58°	0,8480	0,5299	1,6003
59°	0,8572	0,5150	1,6643
60°	0,8660	0,5000	1,7321

Medida do ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
61°	0,8746	0,4848	1,8040
62°	0,8829	0,4695	1,8807
63°	0,8910	0,4540	1,9626
64°	0,8988	0,4384	2,0503
65°	0,9063	0,4226	2,1445
66°	0,9135	0,4067	2,2460
67°	0,9205	0,3907	2,3559
68°	0,9272	0,3746	2,4751
69°	0,9336	0,3584	2,6051
70°	0,9397	0,3420	2,7475
71°	0,9455	0,3256	2,9042
72°	0,9511	0,3090	3,0777
73°	0,9563	0,2924	3,2709
74°	0,9613	0,2756	3,4874
75°	0,9659	0,2588	3,7321
76°	0,9703	0,2419	4,0108
77°	0,9744	0,2250	4,3315
78°	0,9781	0,2079	4,7046
79°	0,9816	0,1908	5,1446
80°	0,9848	0,1736	5,6713
81°	0,9877	0,1564	6,3138
82°	0,9903	0,1392	7,1154
83°	0,9925	0,1219	8,1443
84°	0,9945	0,1045	9,5144
85°	0,9962	0,0872	11,4301
86°	0,9976	0,0698	14,3007
87°	0,9986	0,0523	19,0811
88°	0,9994	0,0349	28,6363
89°	0,9998	0,0175	57,2900

Os valores da tabela trigonométrica podem ser utilizados para resolver problemas envolvendo triângulo retângulo.

Podemos, por exemplo, determinar a medida aproximada do ângulo $\hat{B}$ do triângulo a seguir. Nesse triângulo, estão indicados os comprimentos dos catetos e da hipotenusa. Assim, podemos utilizar as razões seno, cosseno ou tangente para determinar a medida desse ângulo.



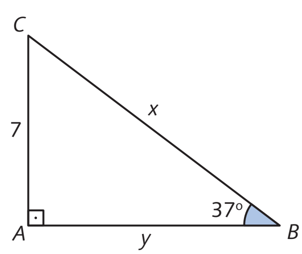
Medida do ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
52°	0,7880	0,6157	1,2799
53°	0,7986	0,6018	1,3270
54°	0,8090	0,5878	1,3764

- $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{2,8}{3,5} = 0,8$
- $\cos\alpha = \dfrac{2,1}{3,5} = 0,6$
- $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{2,8}{2,1} \simeq 1,3$

Consultando a tabela trigonométrica, verificamos que $\alpha \simeq 53°$.

Com o auxílio da tabela trigonométrica, também podemos determinar o comprimento aproximado de um dos catetos ou da hipotenusa de um triângulo retângulo, dada a medida de um ângulo agudo e o comprimento do outro cateto. No triângulo abaixo, por exemplo, podemos determinar os valores de *x* e *y* utilizando as razões seno e tangente.

- $\text{sen}\,37° = \dfrac{7}{x}$
- $\text{tg}\,37° = \dfrac{7}{y}$



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Medida do ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
36°	0,5878	0,8090	0,7265
37°	0,6018	0,7986	0,7536
38°	0,6157	0,7880	0,7813

Na tabela trigonométrica, consultamos os valores de sen 37° e tg 37° e, efetuando os cálculos, obtemos os valores aproximados de *x* e *y*.

$$\text{sen}\,37° \simeq \frac{7}{x} \Rightarrow x = \frac{7}{0,6018} \simeq 11,63 \rightarrow \text{aproximadamente } 11,63 \text{ u.c.}$$

$$\text{tg}\,37° = \frac{7}{y} \Rightarrow y \simeq \frac{7}{0,7536} \simeq 9,29 \rightarrow \text{aproximadamente } 9,29 \text{ u.c.}$$

Observação

u.c. corresponde à abreviação de unidade de comprimento.

Akg-images/Album/Fotoarena

Durante a segunda metade do século II a.C., foi compilada pelo astrônomo Hiparco de Niceia (c. 180-125 a.C.) aquela que se presume ser a primeira tabela trigonométrica. Por essa razão, Hiparco passou a ser chamado de “pai da trigonometria”.

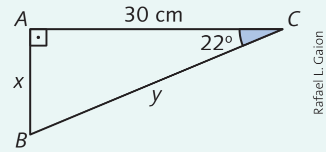
Fonte de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. 3. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 2012.

Xilogravura mostrando Hiparco no observatório de Alexandria.

Aproveite a oportunidade do texto e peça aos alunos que, em duplas, realizem uma pesquisa sobre o astrônomo Hiparco. Depois, peça a eles que apresentem os materiais pesquisados aos colegas.

Problemas e exercícios resolvidos

R10. Determine os valores de x e y no triângulo ABC.

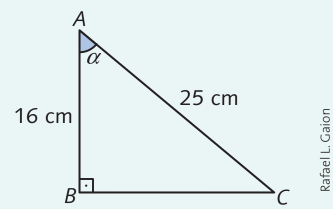


Resolução

Podemos obter os valores de x e y calculando, respectivamente, a tangente e o cosseno do ângulo $B\hat{C}A$. Nesse caso:

- $\text{tg}\ 22° = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow 0{,}4040 \simeq \dfrac{x}{30} \Rightarrow x \simeq 12{,}12 \rightarrow$ aproximadamente 12,12 cm
- $\cos 22° = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow 0{,}9272 \simeq \dfrac{30}{y} \Rightarrow y \simeq 32{,}36 \rightarrow$ aproximadamente 32,36 cm

R11. Determine o valor de α no triângulo retângulo.



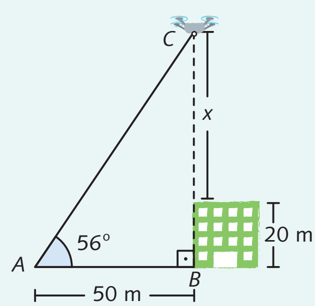
Resolução

Podemos obter o valor de α calculando:

$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{16}{25} = 0{,}64$$

Consultando a tabela trigonométrica, verificamos que $\alpha \simeq 50°$.

R12. Na imagem, o segmento de reta $\overline{AC}$ representa o trajeto realizado por um drone.

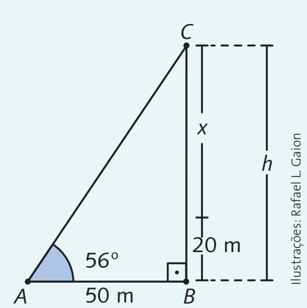


Qual é o valor de x?

Resolução

Podemos fazer uma representação dessa situação por meio do esquema apresentado ao lado, em que h indica a altura atingida pelo drone.

Inicialmente, calculamos a que altura o drone está do solo. Para isso, fazemos:



$$\text{tg}\ 56° = \frac{BC}{AB} \Rightarrow 1{,}4826 \simeq \frac{h}{50} \Rightarrow h \simeq 74{,}13$$

Logo, o drone está a, aproximadamente, 74,13 m do solo.

Subtraindo a altura do prédio desse resultado, determinamos o valor de x.

$$x \simeq 74{,}13 - 20 = 54{,}13$$

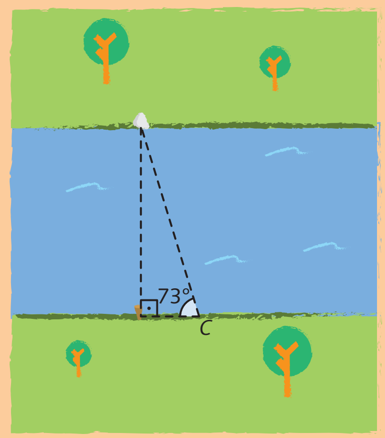
Portanto, x é, aproximadamente, 54,13 m.

Explorando problemas

Utilize as etapas sugeridas para resolver o problema a seguir.

Para medir a largura de um rio em certo local, um topógrafo observou uma pedra na outra margem do rio e fincou uma estaca formando uma linha imaginária perpendicular à margem do rio. Em seguida, ele avançou 15 metros para o lado e mediu o ângulo formado pelas linhas de observação de sua nova posição (ponto C) à pedra e à estaca, conforme apresentado no esquema.

Com base nessas informações, qual foi a largura do rio obtida pelo topógrafo?



Rafael L. Gaion

Compreender

Liste as palavras ou notações que os alunos elencarem e questione-os se essas palavras são importantes para resolver o problema.

1. Há palavras ou notações no enunciado cujos significados você desconhece? Se sim, pesquise-as. Resposta pessoal.

2. O que se pede no problema? b

a) A profundidade do rio naquele local.

b) A largura do rio naquele local.

c) A distância entre a estaca e o topógrafo.

d) A medida do ângulo formado pelas linhas de observação da nova posição do topógrafo (ponto C) à pedra e à estaca.

3. Quais informações são importantes para a compreensão do problema? c; d

a) A profundidade do rio naquele local.

b) A direção do vento no momento.

c) A distância entre a nova posição de observação do topógrafo (ponto C) e a estaca.

d) A medida do ângulo formado pelas linhas de observação da nova posição do topógrafo (ponto C) à pedra e à estaca.

Planejar

4. Qual conceito matemático é requisito para a resolução do problema? a

a) Trigonometria.

b) Área de figuras geométricas planas.

c) Probabilidade.

d) Volume de figuras geométricas espaciais.

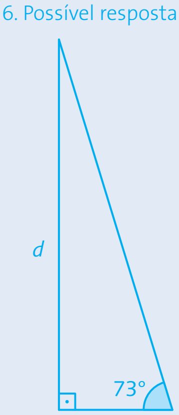
5. Determine se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Justifique suas respostas.

a) A largura do rio é igual à distância entre a pedra e a estaca. Verdadeira. Possível resposta: os valores são iguais, pois a pedra e a estaca formam uma linha imaginária perpendicular à margem do rio.

b) A distância entre a estaca e a nova posição do topógrafo (ponto C) não influencia no cálculo da largura do rio. Falsa. Possível resposta: como as únicas medições são o ângulo e essa distância, ela é necessária para determinar a largura do rio.

6. Represente as informações principais do problema por meio de uma figura, esquema ou quadro e introduza uma notação adequada para os dados.

6. Possível resposta:

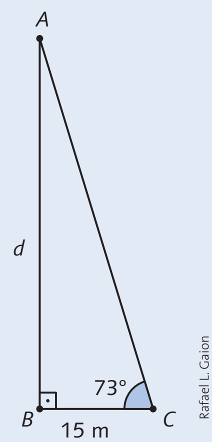


Em que d é a distância entre a pedra e a estaca.

7. Antes de efetuar cálculos por escrito ou na calculadora, estime uma resposta para o problema. Ao final das etapas, você pode comparar o valor estimado com o resultado obtido. Resposta pessoal.

Executar

8. Considere as posições da pedra e da estaca representadas pelos pontos *A* e *B*, respectivamente. Nesse caso, temos que os pontos *A*, *B* e *C* (nova posição do topógrafo) são vértices de um triângulo retângulo. Indicando por *d* a largura do rio, podemos representar essa situções por meio do seguinte esquema.



Agora, determinaremos o valor de ***d***. Para isso, calcularemos tg 73°. Note que, no triângulo *ABC*, em relação ao ângulo de 73°, $\overline{AB}$ é o cateto oposto e $\overline{BC}$ é o cateto adjacente. Desse modo:

$$\text{tg}\, 73° = \frac{AB}{BC}$$

Consultando a tabela trigonométrica, obtemos tg 73° $\simeq$ 3,2709. Assim:

$$\text{tg}\, 73° = \frac{AB}{BC} \Rightarrow 3{,}2709 \simeq \frac{d}{15} \Rightarrow d \simeq 3{,}2709 \cdot 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \simeq 49 \rightarrow \text{aproximadamente } 49 \text{ m}$$

Medida do ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
72°	0,9511	0,3090	3,0777
73°	0,9563	0,2924	3,2709
74°	0,9613	0,2756	3,4874

Portanto, a medida obtida pelo topógrafo foi, aproximadamente, 49 m.

Verificar

9. Para verificar se o valor obtido para *d* está correto, determinaremos sen $\hat{C}$ e, em seguida, com o auxílio da tabela trigonométrica, a medida do ângulo correspondente ao valor do seno calculado. Para isso, é necessário determinarmos, inicialmente, *AC*. Como o triângulo *ABC* é retângulo, segue que:

$$15^2 + 49^2 \simeq (AC)^2 \Rightarrow AC \simeq \sqrt{2\,626} \Rightarrow AC \simeq 51{,}24 \rightarrow \text{aproximadamente } 51{,}24 \text{ m}$$

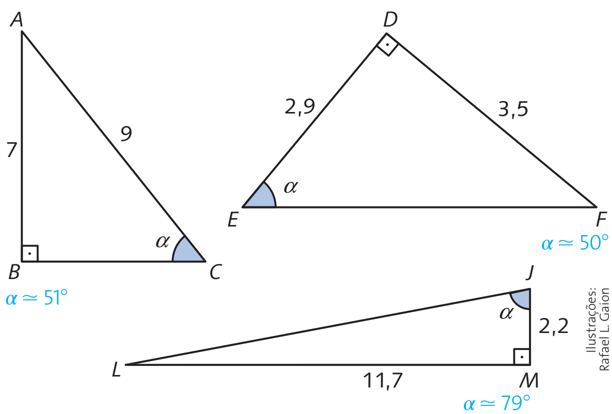
Sabendo que $d = AB \simeq 49$, temos:

$$\text{sen}\, \hat{C} = \frac{AB}{AC} \simeq \frac{49}{51{,}24} \simeq 0{,}9563$$

Observando a tabela trigonométrica, temos sen 73° $\simeq$ 0,9563. Assim, verificamos que o valor de *d* foi calculado corretamente.

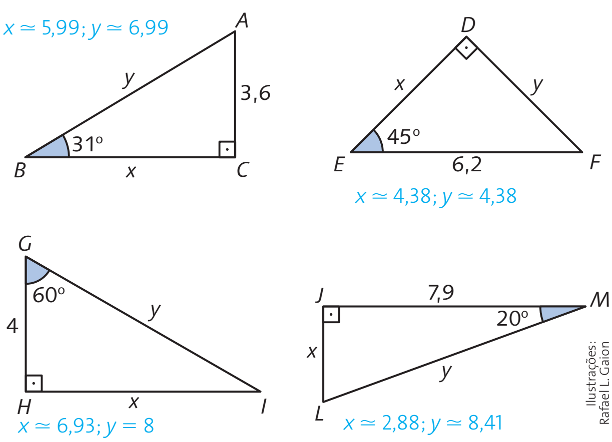
Observação
É possível utilizar outras razões trigonométricas para verificar se o valor obtido para *d* está correto.

38. Utilizando as relações trigonométricas do triângulo retângulo e a tabela trigonométrica, determine o valor de α indicado em cada um dos triângulos.

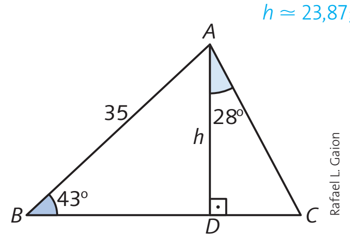


39. Sabendo que α é a medida de um ângulo agudo de um triângulo retângulo tal que $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, calcule tg α. tg α = 0,75

40. Calcule os valores de x e y nos triângulos.



41. Utilizando a tabela trigonométrica, obtenha os comprimentos da altura h e do lado $\overline{AC}$ no triângulo.
$h \simeq 23{,}87$; $AC \simeq 27{,}04$.



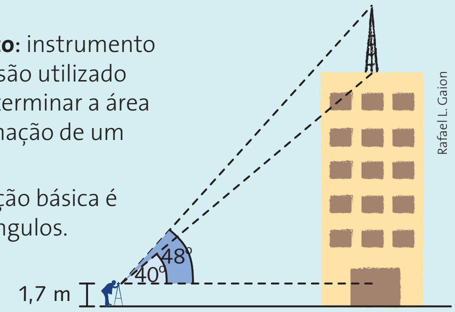
42. Determine a medida aproximada de cada um dos ângulos internos de um triângulo retângulo cujos comprimentos dos catetos são 13,2 cm e 17,5 cm.
37°; 53° e 90°

43. Em determinado horário do dia, uma árvore projeta no solo uma sombra de 8 m de comprimento. Nesse horário, a inclinação dos raios solares em relação ao solo é de 52°. Calcule a altura dessa árvore.
aproximadamente 10,24 m

Desafio

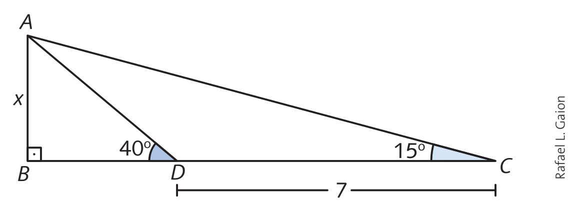
44. No topo de um prédio está instalada a torre de transmissão de uma emissora de TV. Com o auxílio de um **teodolito**, um engenheiro observou o topo do prédio com uma inclinação de 40° e o topo da torre sobre o prédio com uma inclinação de 48°.

Teodolito: instrumento de precisão utilizado para determinar a área e a inclinação de um terreno.
Sua função básica é medir ângulos.

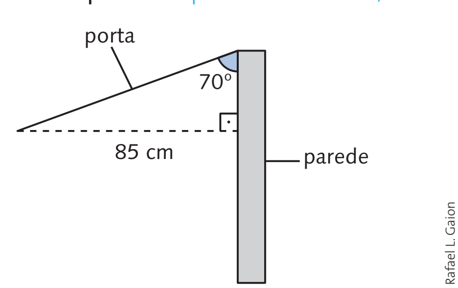


Sabendo que a torre de transmissão tem 8 m de altura, calcule a altura desse prédio.
aproximadamente 26,43 m

45. Calcule o valor de x na figura. $x \simeq 2{,}75$



46. Observe, no esquema, a vista de cima de uma porta entreaberta formando com uma parede um ângulo de 70°. Se essa porta for aberta até que o ângulo formado entre ela e a parede seja igual a 40°, qual será a distância entre a extremidade lateral da porta e a parede? aproximadamente 58,14 cm



Você produtor

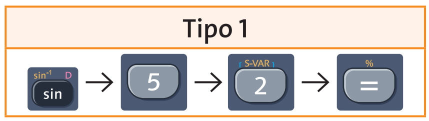
47. Elabore um problema envolvendo o cálculo de distâncias, alturas ou comprimentos em que seja necessário usar as relações trigonométricas para resolvê-lo. Em seguida, entregue a um colega para que ele o resolva. Por fim, verifique se a resolução está correta.

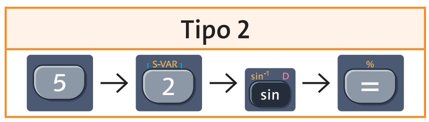
47. Resposta pessoal. Possível resposta: para auxiliar na sustentação de um poste perpendicular ao solo, foi fixado um cabo de aço, em seu topo, formando com o solo um ângulo de 30°. Sabendo que, no solo, o cabo de aço foi fixado a 10 m da base do poste, determine a altura desse poste.

A calculadora científica na trigonometria

Com uma calculadora científica é possível determinar o valor do seno, do cosseno e da tangente de um ângulo dado. As teclas que permitem calcular esses valores são, respectivamente, sin, cos e tan.

Podemos calcular o valor do sen 52°, por exemplo, utilizando dois tipos de calculadora científica. Observe a sequência de teclas em cada uma delas:

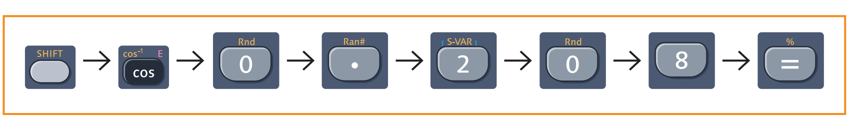


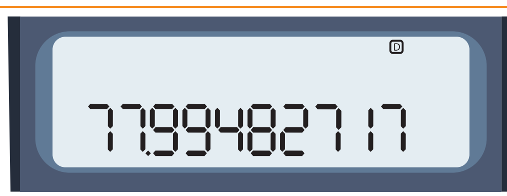


Já a segunda função das teclas sin, cos e tan permite calcular a medida do ângulo, ou seja, o valor de α em sen $\alpha = x$, cos $\alpha = x$ e tg $\alpha = x$, respectivamente.

Em geral, esses comandos são ativados, digitando, previamentre, a tecla SHIFT.

Para calcular o valor de α em cos $\alpha = 0{,}208$, por exemplo, digitamos a sequência de teclas abaixo em uma calculadora do tipo 1.





Ilustrações: Sergio L. Filho

Nesse caso, o valor de α é, aproximadamente, 78°.

Caso não haja calculadoras para todos os alunos, reúna-os em grupos para que realizem as tarefas propostas nesta página.

Problemas e exercícios propostos

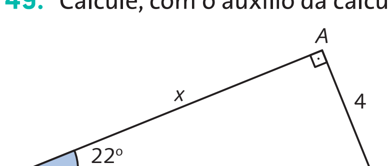
Não escreva no livro.

48. Utilizando uma calculadora científica, calcule o seno, o cosseno e a tangente de:

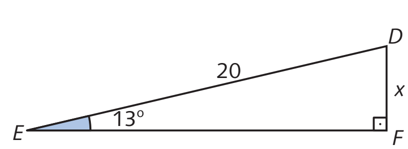
a) 12° b) 63° c) 2° d) 88° e) 72° f) 70,5°

Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

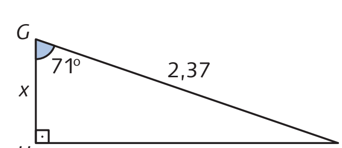
49. Calcule, com o auxílio da calculadora científica, o valor de x em cada um dos triângulos.



$x \simeq 9{,}90$



$x \simeq 4{,}5$



$x \simeq 0{,}77$

Ilustrações: Rafael L. Gaion

50. Com uma calculadora científica, determine em cada item o valor de α.

a) sen $\alpha = 0{,}715$ $\alpha \simeq 46°$

b) cos $\alpha = 0{,}947$ $\alpha \simeq 19°$

c) tg $\alpha = 1{,}78$ $\alpha \simeq 61°$

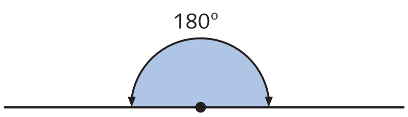
d) sen $\alpha = 0{,}149$ $\alpha \simeq 9°$

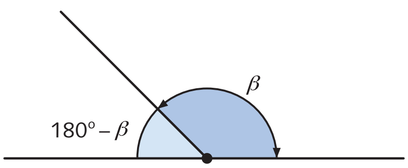
10 Seno e cosseno de ângulos obtusos

Algumas situações envolvendo ângulos agudos foram estudadas até o momento. Contudo, existem situações em que é necessário obter os valores do seno e do cosseno de um ângulo obtuso, ou seja, com medida β, tal que $90° < \beta < 180°$.

Abaixo estão representados um ângulo de 180° e sua divisão em um ângulo obtuso de medida β e outro agudo de medida $(180° - \beta)$, correspondente ao seu **suplemento**.

Observação
Dizemos que dois ângulos são **suplementares** quando a soma de suas medidas é 180°.





Ilustrações: Rafael L. Gaion

Com esses ângulos, podemos estabelecer as seguintes relações:

- o seno de um ângulo obtuso é igual ao seno de seu suplemento.

$$\text{sen}\ \beta = \text{sen}\ (180° - \beta)$$

- o cosseno de um ângulo obtuso é igual ao oposto do cosseno de seu suplemento.

$$\cos \beta = -\cos (180° - \beta)$$

Observação
A verificação dessas relações será estudada posteriormente. Portanto, cabe agora apenas utilizá-las na resolução de algumas situações.

Por meio dessas relações, vamos determinar o valor do seno e do cosseno dos ângulos de 120° e 138°.

- 120°

$$\text{sen}\ 120° = \text{sen}\ (180° - 120°) = \text{sen}\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120° = -\cos (180° - 120°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

Diga aos alunos que o valor de sen α, com $90° < \alpha < 180°$, é positivo, e o valor de cos α, negativo.

- 138°

$$\text{sen}\ 138° = \text{sen}\ (180° - 138°) = \text{sen}\ 42° \simeq 0{,}6691$$

$$\cos 138° = -\cos (180° - 138°) = -\cos 42° \simeq -0{,}7431$$

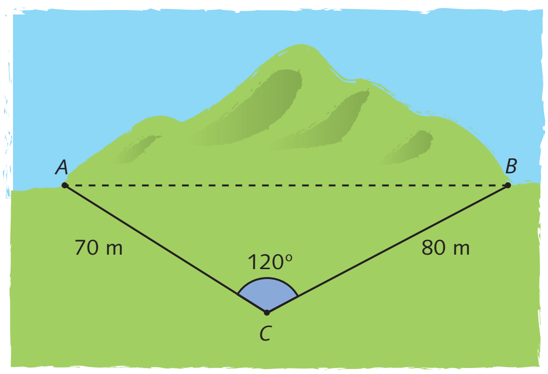
Observação
Os valores aproximados de sen 42° e cos 42° podem ser verificados na tabela trigonométrica ou em uma calculadora científica.

Quando a medida do ângulo é 90°, temos:

- $\text{sen}\ 90° = 1$
- $\cos 90° = 0$

11 Lei dos cossenos

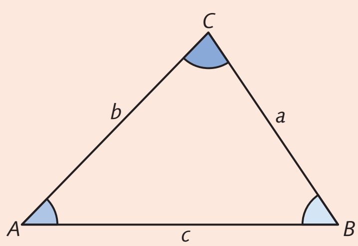
Certa estrada está sendo pavimentada e, em determinado trecho, será construído um túnel em linha reta que atravessa uma montanha. Para isso, um engenheiro, utilizando instrumentos, marcou os pontos A e B, que serão as extremidades do túnel, e o ponto C. Depois, mediu os comprimentos de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ e o ângulo $A\hat{C}B$, como mostra o esquema.



Em sua opinião, quais cálculos deveriam ser realizados para determinar o comprimento desse túnel? *

*Deixe que os alunos deem suas opiniões considerando as estratégias e resoluções propostas por eles. Depois, apresente-lhes as explicações da próxima página acerca da lei dos cossenos. Na página seguinte são realizados os cálculos para determinar o comprimento do túnel.

Para determinar o comprimento do túnel, podemos utilizar a **lei dos cossenos**. Essa lei diz que:

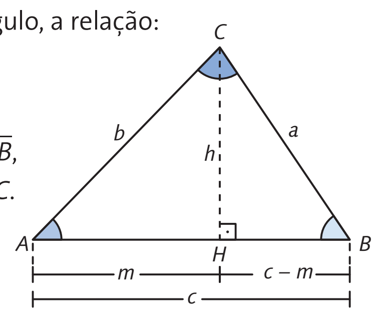
> Em todo triângulo, o quadrado do comprimento de um dos lados é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos outros dois lados, subtraído o dobro do produto dos comprimentos desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.
>
> Aplicando essa lei no $\triangle ABC$, temos as seguintes relações:
>
> 
>
>
> $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$
> $$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$
> $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

Observação
Lembre-se de que um triângulo acutângulo é aquele em que todos os seus ângulos são agudos.

Agora, vamos demonstrar, para um triângulo acutângulo, a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

No $\triangle ABC$ está traçada a altura relativa ao lado $\overline{AB}$, dividindo-o em dois triângulos retângulos, $\triangle HBC$ e $\triangle AHC$.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

- No $\triangle HBC$:

$$a^2 = h^2 + (c - m)^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot m + m^2 \quad \text{(I)}$$

- No $\triangle AHC$:

$$b^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - m^2 \quad \text{(II)} \qquad \cos \hat{A} = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos \hat{A} \quad \text{(III)}$$

Substituindo II em I:

$$a^2 = \underbrace{b^2 - m^2}_{h^2} + c^2 - 2 \cdot c \cdot m + m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot m$$

De III, segue que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot \underbrace{b \cdot \cos \widehat{A}}_{m} \Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A}}$$

Observação

Vimos a demonstração para um triângulo acutângulo; porém, a lei dos cossenos também é válida para os triângulos retângulos e obtusângulos.

De maneira análoga, podemos demonstrar que em um triângulo acutângulo valem as relações $\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B}}$ e $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \widehat{C}}$.

Utilizando a lei dos cossenos, vamos determinar o comprimento do túnel apresentado na página anterior, isto é, a distância entre os pontos A e B.

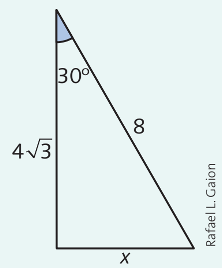
$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot (AC) \cdot (BC) \cdot \cos \widehat{C} \Rightarrow (AB)^2 = 70^2 + 80^2 - 2 \cdot 70 \cdot 80 \cdot \overbrace{\cos 120^\circ}^{-\cos(180^\circ - 120^\circ)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AB)^2 = 4\,900 + 6\,400 - 11\,200 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow AB = \sqrt{16\,900} \Rightarrow AB = 130 \rightarrow 130 \text{ m}$$

Se achar conveniente, peça aos alunos que, em duplas, realizem a demonstração da lei dos cossenos para triângulos obtusângulos e retângulos. Veja na Assessoria pedagógica essas demonstrações.

Problemas e exercícios resolvidos

R13. Determine o valor de x no triângulo.



Resolução

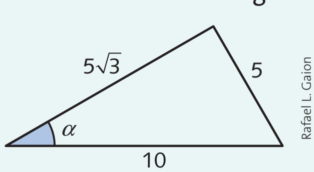
Aplicando a lei dos cossenos, obtemos:

$$x^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 8^2 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 48 + 64 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 112 - 96 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \sqrt{16} = 4$$

R14. Determine a medida α no triângulo.



Resolução

Utilizando a lei dos cossenos, segue que:

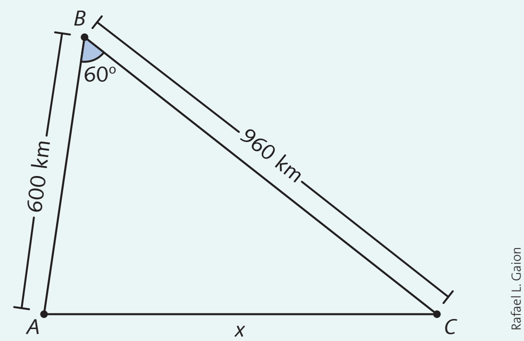
$$5^2 = 10^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3} \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25 = 100 + 75 - 100\sqrt{3} \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100\sqrt{3} \cdot \cos \alpha = 175 - 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{150}{100\sqrt{3}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

R15. Uma das rotas de uma companhia aérea parte da cidade **A**, faz escala na cidade **B** e, finalmente, chega à cidade **C**. A companhia aérea pretende criar uma nova rota, que parta da cidade **A** e chegue à cidade **C**, sem que haja escalas. Utilizando o esquema abaixo, que apresenta a distância em linha reta entre as cidades **A** e **B** e entre as cidades **B** e **C**, determine a distância em linha reta entre as cidades **A** e **C**.



Resolução

Utilizando a lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 600^2 + 960^2 - 2 \cdot 600 \cdot 960 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 360\,000 + 921\,600 - 1\,152\,000 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 1\,281\,600 - 576\,000 \Rightarrow$$

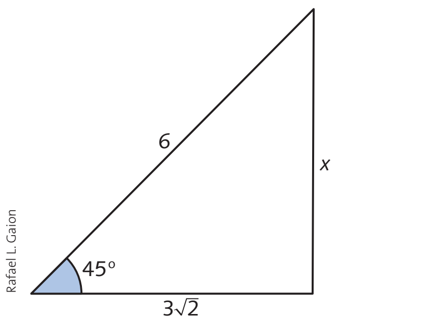
$$\Rightarrow x^2 = 705\,600 \Rightarrow x = \sqrt{705\,600} = 840$$

Portanto, a distância em linha reta entre as cidades **A** e **C** é 840 km.

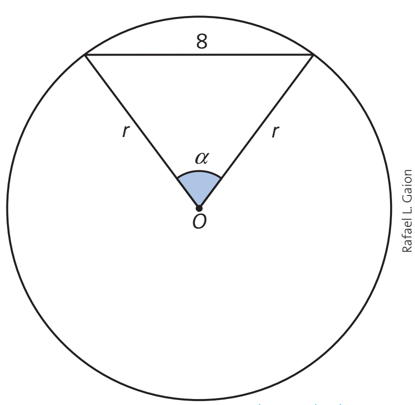
51. Determine o valor do seno e do cosseno dos ângulos de: Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

a) 150°.
b) 135°.
c) 110°.
d) 126°.
e) 152°.
f) 137°.

52. Determine o valor de x no triângulo a seguir. $x = 3\sqrt{2}$



53. Determine o comprimento do raio r da circunferência de centro O, sabendo que $\cos \alpha = \dfrac{7}{25}$. $\dfrac{20}{3}$

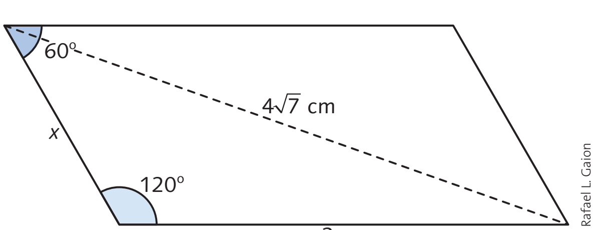


Você produtor

Resposta pessoal. Possível resposta: uma possibilidade é que se desenhe um triângulo tal que $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm e $BC = 5{,}8$ cm e solicite que se calcule o $\cos \hat{B}$.

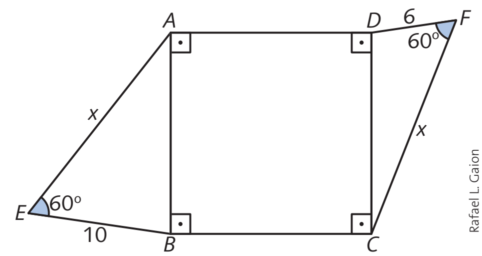
54. Desenhe um triângulo ABC em que estejam indicados os comprimentos de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, e peça a um colega que calcule $\cos \hat{B}$. Em seguida, verifique se a resposta obtida está correta.

55. Determine o perímetro do paralelogramo. 24 cm



56. De um ponto A partem, em um mesmo instante, dois móveis, M_1 em direção a B, a uma velocidade de 3 m/s, e M_2 em direção a C, a uma velocidade de 5 m/s. Sabendo que o ângulo formado entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ mede 30°, determine a distância aproximada entre os móveis após 12 segundos. aproximadamente 34 m

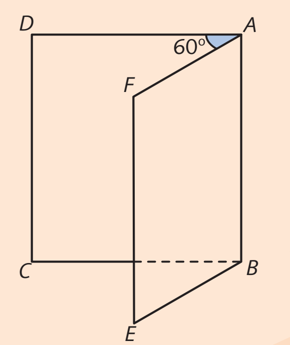
57. Qual é o perímetro do quadrado $ABCD$ na figura? 56 u.c.



Em grupo

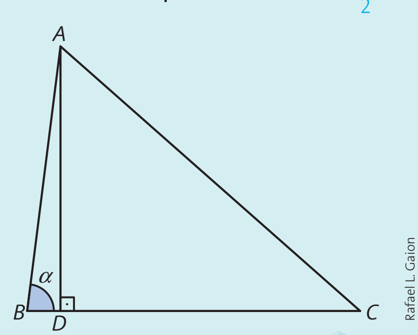
58. (UFPE) Na ilustração abaixo, $ABCD$ e $ABEF$ são retângulos, e o ângulo $D\hat{A}F$ mede 60°. Se $\overline{AB}$ mede $2\sqrt{30}$, $\overline{BE}$ mede 6 e $\overline{BC}$ mede 10, qual a distância entre os vértices C e F? $CF = 14$

Na tarefa **58**, por se tratar de uma questão de vestibular, embora estejamos usando "comprimento do lado", por exemplo, aparece a palavra "mede" para se referir ao comprimento do lado do retângulo.



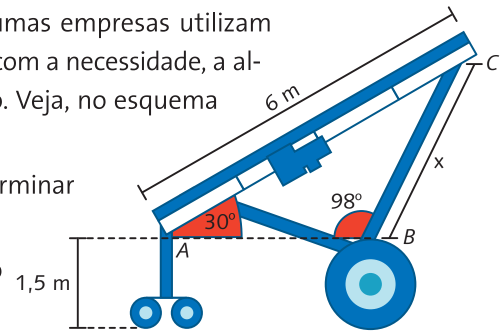
Desafio

59. Na figura, $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm e $AC = 6$ cm. Determine o comprimento de $\overline{BD}$. $\dfrac{1}{2}$ cm



12 Lei dos senos

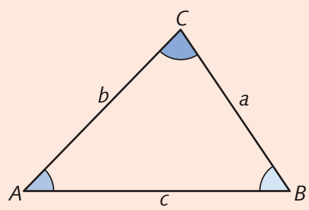
Para transportar certas mercadorias e facilitar o trabalho, algumas empresas utilizam esteiras elevatórias para carga e descarga de caminhões. De acordo com a necessidade, a altura da esteira pode ser ajustada, alterando o ângulo de inclinação. Veja, no esquema ao lado, um modelo de esteira.



Em sua opinião, quais cálculos deveriam ser realizados para determinar o valor de x indicado na esteira?*

A partir do esquema, podemos determinar o valor de x indicado na esteira utilizando a **lei dos senos**. Segundo essa lei:

Em todo triângulo, os comprimentos dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos. Aplicando essa lei no $\triangle ABC$, temos:

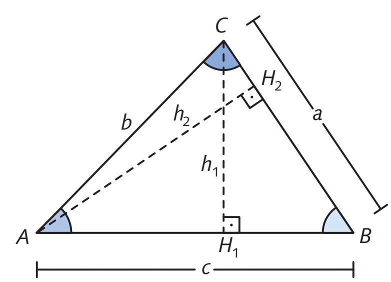


$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

*Deixe que os alunos deem suas opiniões considerando as estratégias e resoluções propostas por eles. Depois, apresente-lhes as explicações acerca da lei dos senos. No final da página são realizados os cálculos para determinar o valor de x indicado na esteira.

Agora, vamos demonstrar a lei dos senos para um triângulo acutângulo.

No $\triangle ABC$ estão traçadas as alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

- No triângulo retângulo AH_1C, temos: $\operatorname{sen}\hat{A} = \dfrac{h_1}{b} \Rightarrow h_1 = b \cdot \operatorname{sen}\hat{A}$
- No triângulo retângulo H_1BC, temos: $\operatorname{sen}\hat{B} = \dfrac{h_1}{a} \Rightarrow h_1 = a \cdot \operatorname{sen}\hat{B}$

Desse modo:

$$a \cdot \operatorname{sen}\hat{B} = b \cdot \operatorname{sen}\hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \qquad \text{(I)}$$

- No triângulo retângulo AH_2C, temos:

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{h_2}{b} \Rightarrow h_2 = b \cdot \operatorname{sen}\hat{C}$$

- No triângulo retângulo ABH_2, temos:

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{h_2}{c} \Rightarrow h_2 = c \cdot \operatorname{sen}\hat{B}$$

Desse modo:

$$b \cdot \operatorname{sen}\hat{C} = c \cdot \operatorname{sen}\hat{B} \Rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \qquad \text{(II)}$$

Comparando I e II, concluímos que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Observação

Vimos a demonstração para um triângulo acutângulo; porém, a lei dos senos também é válida para os triângulos retângulos e obtusângulos.

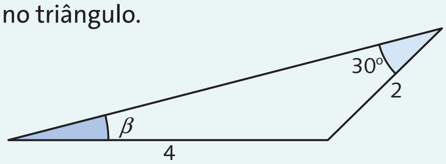
Se achar conveniente, peça aos alunos que, em duplas, realizem a demonstração da lei dos senos para triângulos obtusângulos e retângulos. Veja na Assessoria pedagógica essas demonstrações.

Utilizando a lei dos senos, vamos determinar o valor de x indicado na esteira apresentada acima, isto é, a distância entre os pontos B e C.

$$\frac{BC}{\operatorname{sen}30^\circ} = \frac{AC}{\operatorname{sen}98^\circ} \Rightarrow \frac{x}{0{,}5} \simeq \frac{6}{0{,}9903} \Rightarrow x \simeq 3 \rightarrow \text{aproximadamente } 3\text{ m}$$

Problemas e exercícios resolvidos

R16. Determine a medida β no triângulo.



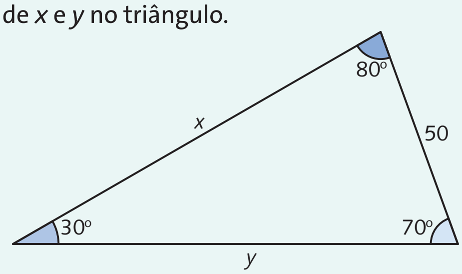
Rafael L. Gaion

Resolução

Utilizando a lei dos senos:

$$\frac{4}{\text{sen } 30°} = \frac{2}{\text{sen } \beta} \Rightarrow \frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\text{sen } \beta} \Rightarrow 4 \cdot \text{sen } \beta = 1 \Rightarrow \text{sen } \beta = \frac{1}{4} \Rightarrow \beta \simeq 14°$$

R17. Determine os valores de x e y no triângulo.



Rafael L. Gaion

Resolução

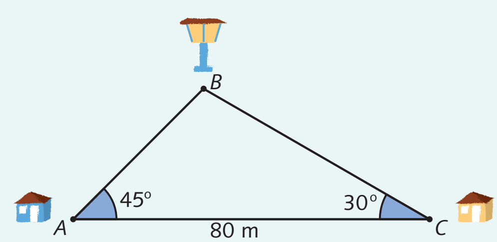
Aplicando a lei dos senos, temos: $\frac{50}{\text{sen } 30°} = \frac{x}{\text{sen } 70°} = \frac{y}{\text{sen } 80°}$.

Com o auxílio da tabela trigonométrica ou de uma calculadora científica, obtemos os valores aproximados dos senos dos ângulos de 70° e 80°.

Desse modo:

- $\frac{50}{0{,}5} \simeq \frac{x}{0{,}9397} \Rightarrow 0{,}5x \simeq 46{,}985 \Rightarrow x \simeq 93{,}97$
- $\frac{50}{0{,}5} \simeq \frac{y}{0{,}9848} \Rightarrow 0{,}5y \simeq 49{,}24 \Rightarrow y \simeq 98{,}48$

R18. O ponto B na figura representa um reservatório de água construído para abastecer duas casas, uma localizada no ponto A e outra, no ponto C. Determine as distâncias entre o reservatório e cada uma das casas.



Rafael L. Gaion

Resolução

Inicialmente, determinamos a medida de $A\hat{B}C$, isto é:

$$45° + 30° + \text{med}\left(A\hat{B}C\right) = 180° \Rightarrow \text{med}\left(A\hat{B}C\right) = 105°$$

Aplicando a lei dos senos, obtemos: $\frac{BC}{\text{sen } 45°} = \frac{AB}{\text{sen } 30°} = \frac{AC}{\text{sen } 105°}$.

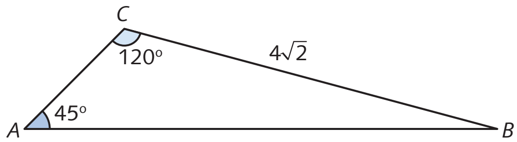
Com o auxílio da tabela trigonométrica ou de uma calculadora científica, obtemos os valores aproximados dos senos dos ângulos de 45° e 105°.

Assim:

- $\frac{AB}{0{,}5} \simeq \frac{80}{0{,}9659} \Rightarrow AB \simeq 41{,}41$
- $\frac{BC}{0{,}7071} \simeq \frac{80}{0{,}9659} \Rightarrow BC \simeq 58{,}57$

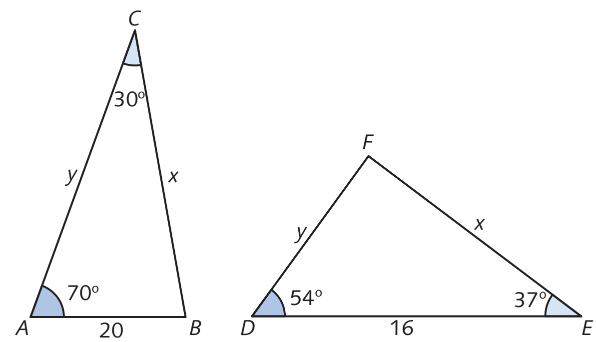
Portanto, as distâncias do reservatório às casas localizadas nos pontos A e C são, respectivamente, 41,41 m e 58,57 m.

60. Determine o comprimento de $\overline{AB}$ no triângulo.
$AB = 4\sqrt{3}$



Rafael L. Gaion

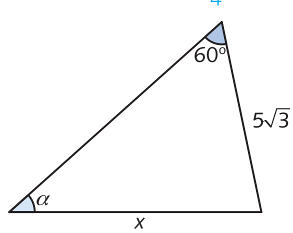
61. Utilizando a tabela trigonométrica ou uma calculadora científica, calcule os valores de x e y nos triângulos.



$x \simeq 37{,}59$ e $y \simeq 39{,}39$ $x \simeq 12{,}95$ e $y \simeq 9{,}63$

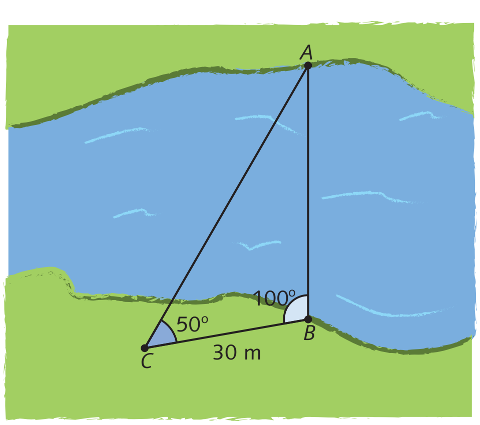
Ilustrações: Rafael L. Gaion

62. Sabendo que $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{2}{3}$, determine o valor de x no triângulo. $x = \dfrac{45}{4}$



Rafael L. Gaion

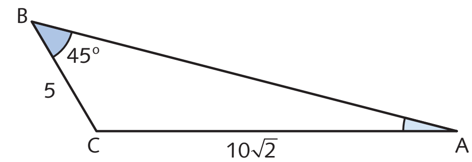
63. Sobre um rio, cujas margens são irregulares, deseja-se construir uma ponte que ligue os pontos A e B. Um topógrafo realizou as medições necessárias, obtendo o seguinte esquema:



Rafael L. Gaion

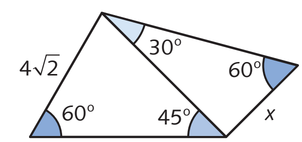
Com o auxílio da tabela trigonométrica ou de uma calculadora científica, determine o comprimento aproximado que a ponte deverá ter. 45,96 m

64. Determine $\text{sen}\,\hat{A}$ no triângulo. $\text{sen}\,\hat{A} = \dfrac{1}{4}$



Rafael L. Gaion

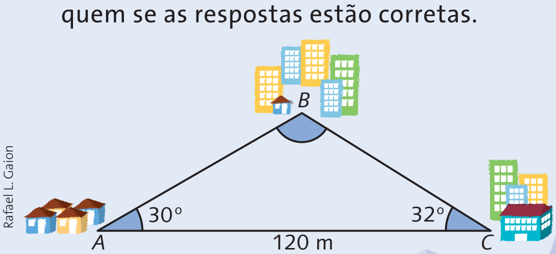
65. Qual é o valor de x na figura? $x = 4$



Rafael L. Gaion

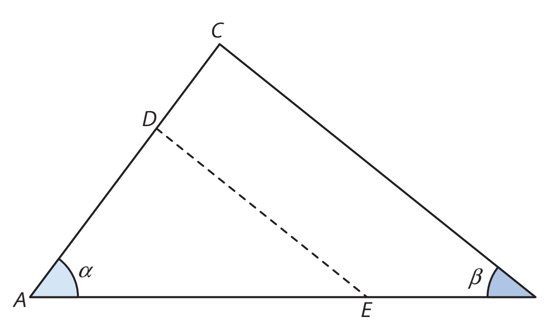
Você produtor

66. De acordo com o esquema, elabore e escreva um problema envolvendo as leis dos senos ou dos cossenos. Em seguida, troque o problema que você inventou com um colega. Por fim, resolvam os problemas e verifiquem se as respostas estão corretas.



Rafael L. Gaion

67. Na figura estão representadas cinco cidades, A, B, C, D, E e as rodovias $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.



Rafael L. Gaion

Será construída uma rodovia ligando as cidades D e E, que devido à posição dessas cidades, será paralela a $\overline{BC}$.

Sabendo que $AC = 75$ km, $AD = 50$ km, $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{4}{5}$ e $\text{sen}\,\beta = \dfrac{5}{8}$, determine quantos quilômetros:

a) tem a rodovia $\overline{BC}$. 96 km b) terá a rodovia $\overline{DE}$. 64 km

66. Resposta pessoal. Possível resposta: no esquema estão representadas as medições realizadas por um topógrafo de certa cidade, a fim de realizar um projeto de melhoria na pavimentação desse local. De acordo com o esquema, determine os comprimentos de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ obtidos pelo topógrafo.

13 Área de um triângulo qualquer

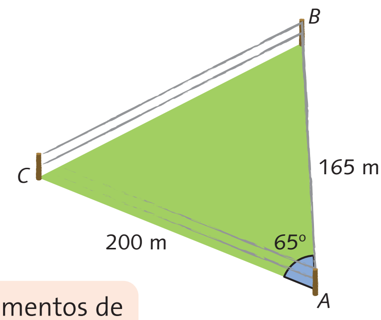
Certamente você já estudou que a área de um triângulo pode ser calculada por meio da expressão:

$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

S: área do triângulo
b: comprimento da base do triângulo
h: comprimento da altura do triângulo

No entanto, há situações em que não são fornecidos o comprimento da base nem o da altura do triângulo, como ocorre na situação a seguir.

Daniel vai fazer uma cerca de forma triangular para criar algumas cabeças de gado. Veja, no esquema ao lado, como será esse cercado.



Com base nesse esquema, podemos determinar a área da região cercada utilizando uma fórmula, definida da seguinte maneira:

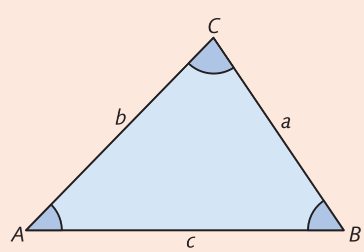
A área de qualquer triângulo é igual ao semiproduto dos comprimentos de dois lados pelo seno do ângulo por eles formado.

Considerando o $\triangle ABC$ e sua área S, temos:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,\hat{C}}{2}$$

$$S = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen}\,\hat{B}}{2}$$

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\,\hat{A}}{2}$$



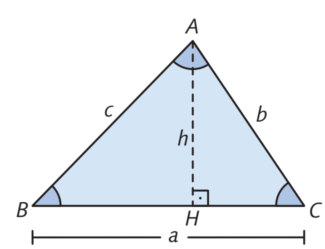
Agora, vamos demonstrar a fórmula $S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,\hat{C}}{2}$ para um triângulo acutângulo.

- A área S do triângulo é dada por:

$$S = \frac{a \cdot h}{2} \qquad \text{(I)}$$

- No triângulo retângulo AHC, temos:

$$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \text{sen}\,\hat{C} \qquad \text{(II)}$$



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Substituindo II em I, temos:

$$S = \frac{a \cdot \left(b \cdot \text{sen}\,\hat{C}\right)}{2} = \boxed{\frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,\hat{C}}{2}}$$

De maneira análoga, para $\hat{A}$ e $\hat{B}$, temos:

$$\boxed{S = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\,\hat{A}}{2}} \text{ e } \boxed{S = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen}\,\hat{B}}{2}}$$

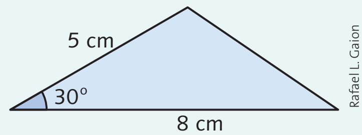
Observação
Vimos a demonstração para um triângulo acutângulo; porém, as relações apresentadas também são válidas para triângulos retângulos e obtusângulos.

Agora, vamos determinar a área da região cercada.

$$S = \frac{AB \cdot AC \cdot \text{sen}\,\hat{A}}{2} = \frac{165 \cdot 200 \cdot \text{sen}\,65°}{2} \simeq 14\,954 \rightarrow \text{aproximadamente } 14\,954 \text{ m}^2$$

Problemas e exercícios resolvidos

R19. Determine a área do triângulo apresentado.

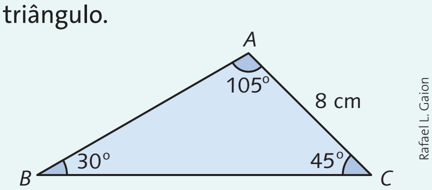


Resolução

Aplicando a fórmula da área de um triângulo qualquer, temos:

$$S = \frac{5 \cdot 8 \cdot \text{sen } 30°}{2} = \frac{5 \cdot 8 \cdot 0,5}{2} = 10 \rightarrow 10 \text{ cm}^2$$

R20. Determine a área do triângulo.



Resolução

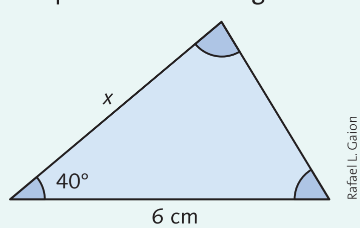
Para determinar a área de um triângulo, é preciso conhecer, pelo menos, o comprimento de dois de seus lados e do ângulo formado por eles. Nesse caso, podemos determinar, por exemplo, o comprimento de $\overline{AB}$ por meio da lei dos senos.

$$\frac{AB}{\text{sen } 45°} = \frac{AC}{\text{sen } 30°} \Rightarrow \frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8}{0,5} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{8}{0,5} = 8\sqrt{2} \rightarrow 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

Aplicando a fórmula da área de um triângulo qualquer, temos:

$$S = \frac{8 \cdot 8\sqrt{2} \cdot \text{sen } 105°}{2} \simeq \frac{8 \cdot 8\sqrt{2} \cdot 0,9659}{2} \simeq 43,71 \rightarrow \text{aproximadamente } 43,71 \text{ cm}^2$$

R21. Calcule o valor de x, sabendo que a área do triângulo é 10 cm^2.



Resolução

A área S do triângulo é dada por:

$$S = \frac{6 \cdot x \cdot \text{sen } 40°}{2}$$

Assim:

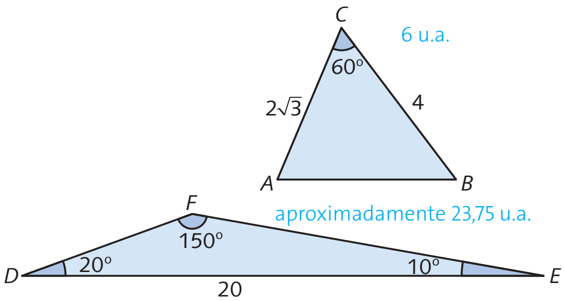
$$S = \frac{6 \cdot x \cdot \text{sen } 40°}{2} \Rightarrow S = 3 \cdot x \cdot \text{sen } 40° \Rightarrow x = \frac{S}{3 \cdot \text{sen } 40°}$$

Da tabela trigonométrica, temos sen 40° $\simeq$ 0,6428. Além disso, sabemos que a área do triângulo é 10 cm^2. Desse modo:

$$x \simeq \frac{10}{3 \cdot 0,6428} \simeq 5,186$$

Portanto, x é aproximadamente 5,186 cm.

68. Determine a área dos triângulos.

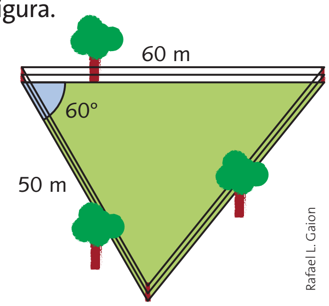


6 u.a.

aproximadamente 23,75 u.a.

Ilustrações: Rafael L. Gaion

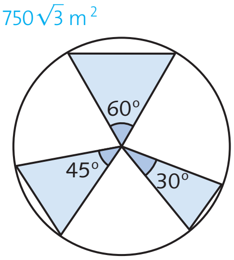
69. O dono de um sítio construiu um curral conforme mostra a figura.



Rafael L. Gaion

Determine o perímetro e a área desse curral.
perímetro: $(110 + 10\sqrt{31})$ m; área: $750\sqrt{3}$ m²

70. Na imagem, cada triângulo tem dois de seus vértices sobre a circunferência de raio a e um dos vértices coincide com o centro da circunferência. A área total da região em azul é: b



Rafael L. Gaion

a) $a^2\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$

b) $\dfrac{a^2}{4}(\sqrt{2}+1+\sqrt{3})$

c) $\dfrac{a^2}{2}(\sqrt{2}+1+\sqrt{3})$

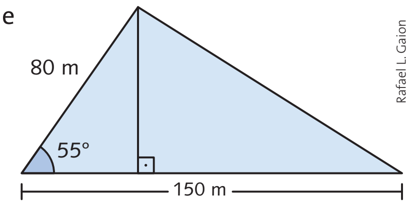
d) $a^2(\sqrt{2}+1+\sqrt{3})$

e) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Em grupo

71. Dois lados de certo triângulo têm $5\sqrt{2}$ m e 10 m de comprimento. Calculem a medida do ângulo interno formado por esses dois lados, sabendo que a área do triângulo é 25 m².
45° ou 135°

72. O estacionamento de um supermercado possui um formato triangular e será dividido conforme o esquema a seguir, em que a parte de maior área será coberta e a de menor área continuará descoberta.



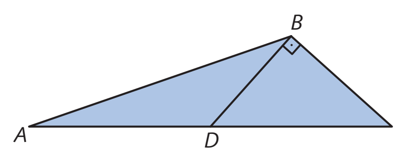
Rafael L. Gaion

a) Qual é a área total do estacionamento?
aproximadamente 4 915,2 m²

b) Qual é o perímetro da parte que ficará descoberta?
aproximadamente 191,43 m

c) Qual é a área da parte que será coberta?
aproximadamente 3 411,5 m²

73. No triângulo abaixo, D é o ponto médio de $\overline{AC}$, $BD = 2$ cm e $AC = 6$ cm.



Rafael L. Gaion

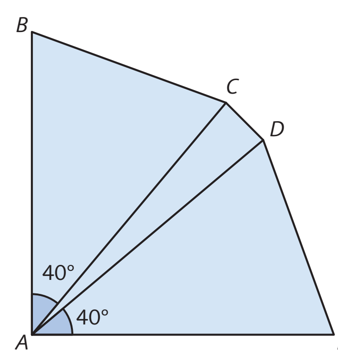
Calcule:

a) o seno do ângulo $\hat{C}$. $\text{sen}\ \hat{C} = \frac{2}{3}$

b) o comprimento do segmento $\overline{BC}$. $\sqrt{5}$ cm

c) a área do $\triangle ABC$. $2\sqrt{5}$ cm²

74. O esquema a seguir representa um jardim de área 72,96 m², em que $\overline{AB}$ é perpendicular à $\overline{AE}$ e $AB = AC = AD = AE$. Considerando os valores da tabela trigonométrica, calcule o comprimento da lateral $\overline{AB}$. aproximadamente 10 m



Rafael L. Gaion

Finalizando a conversa

a O que significa dizer que dois triângulos são semelhantes?
Possível resposta: seus ângulos internos correspondentes são congruentes e seus lados correspondentes são proporcionais.

b O que você entendeu acerca das relações trigonométricas? Possível resposta: são as relações que envolvem os comprimentos dos lados e as medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo.

c Quais razões trigonométricas foram estudadas neste capítulo?
Seno, cosseno e tangente.

d Em que situações as razões trigonométricas e as relações apresentadas neste capítulo podem ser utilizadas? Possíveis respostas: cálculos de áreas, cálculos de distâncias, cálculos da medida de ângulos.

Acesso digital

Triângulo retângulo no GeoGebra

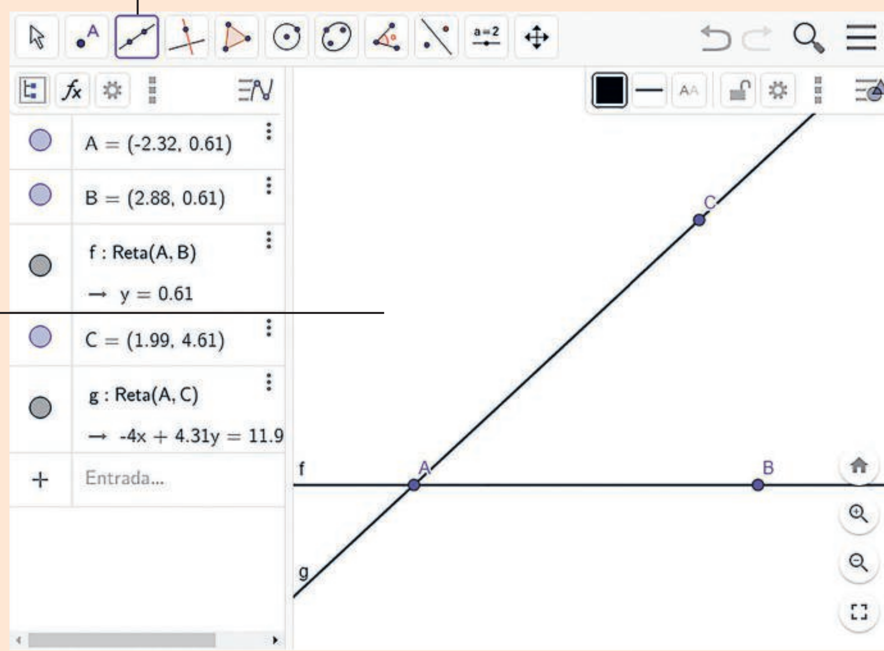
Neste tópico, vamos analisar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente em um triângulo retângulo. Para isso, vamos utilizar o GeoGebra, que é um *software* gratuito de geometria dinâmica.

Siga as orientações do professor e o passo a passo a seguir para realizar as construções.

Observação

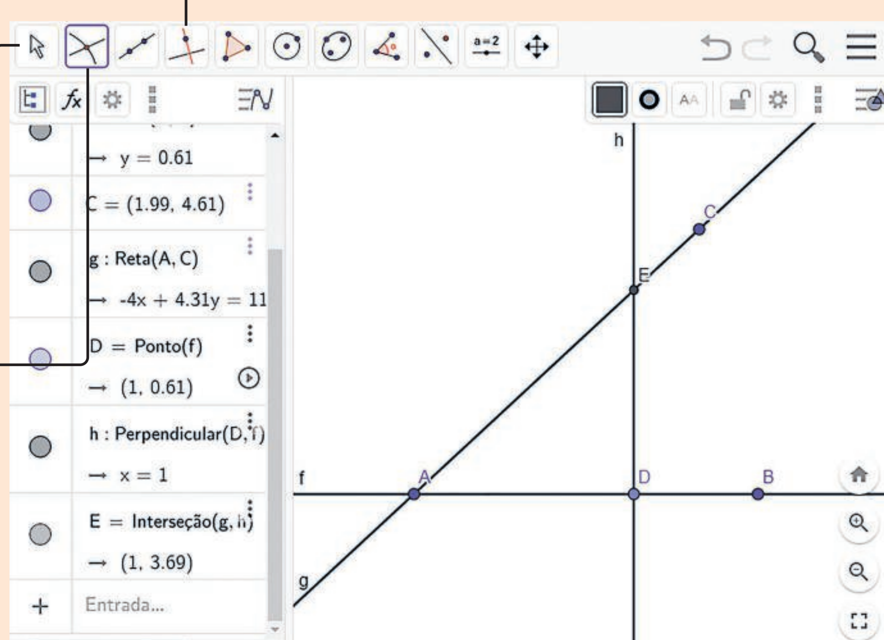
Nesta construção não precisaremos do eixo e da malha da **Janela de Visualização**. Então, se preferir, use as funções de **Exibir ou esconder os eixos** e **Exibir ou esconder as malhas** para ocultá-los. Caso queira ocultar outros objetos ou rótulos que achar necessário, basta clicar com o botão direito sobre eles e desabilitar as opções **Exibir Objeto** ou **Exibir Rótulo**, respectivamente.

1º Com a ferramenta **Reta**, clique em dois pontos *A* e *B* quaisquer da **Janela de Visualização** para construir uma reta *f*. Construa também uma reta *g*, clicando no ponto *A* e em um ponto qualquer *C*, conforme a imagem.



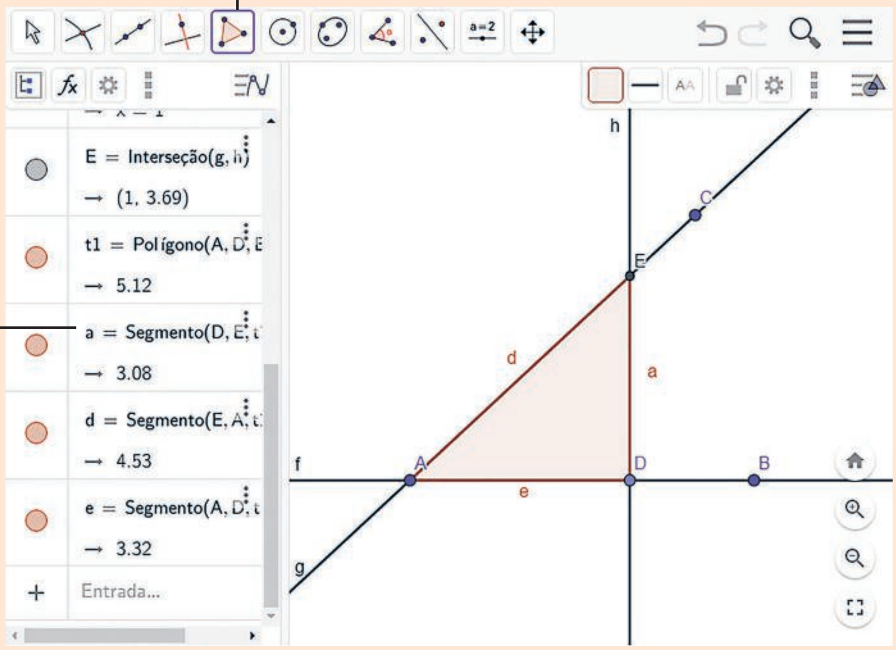
2º Com a ferramenta **Ponto**, clique e marque na reta *f* um ponto *D* qualquer entre *A* e *B*. Com a ferramenta **Reta Perpendicular**, clique sobre *D* e depois na reta *f*. Nesse caso, obtém-se a reta *h*.

3º Com a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**, clique nas retas *g* e *h* para marcar o ponto *E*.



Com essa construção, mesmo que você utilize a ferramenta **Mover** para mudar a posição dos pontos *A*, *B*, *C* ou *D*, as retas *f* e *h* permanecerão perpendiculares. Faça um teste!

4º Com a ferramenta **Polígono**, clique nos pontos *A*, *D*, *E* e novamente no ponto *A*.

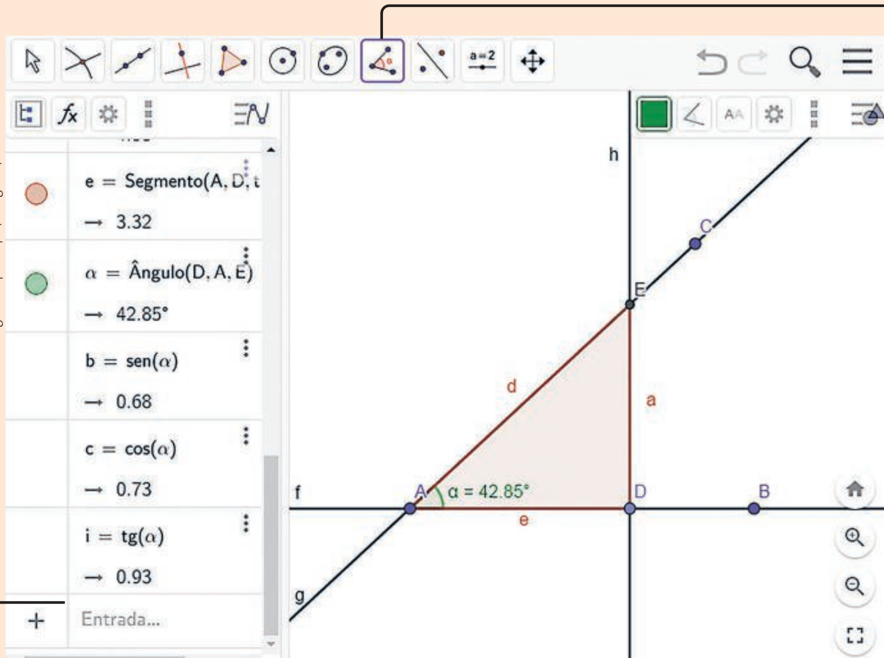


Diga aos alunos que, assim como a maioria dos *softwares*, o GeoGebra utiliza o ponto (.) como separador de casas decimais.

Note que o triângulo *ADE* é retângulo em *D*, pois dois lados (catetos *a* e *e*) pertencem a duas retas perpendiculares (*h* e *f*, respectivamente). O lado nomeado por *d* é a hipotenusa. Note ainda que, na **Janela de Álgebra**, aparecem os comprimentos de todos eles.

5º Para exibir a medida do ângulo interno $\hat{A}$ do triângulo, com a ferramenta **Ângulo**, clique nos pontos *D*, *A* e *E*, nessa ordem.

6º Na **Janela de Álgebra**, clique no campo **Entrada...**, digite sen(α) e aperte **Enter**. Faça o mesmo para cos(α) e tg(α).



Imagens: Reprodução/Geogebra/Markus Hohenwarter

a) Sim. Verifique se os alunos perceberam que, devido à construção do triângulo, ao alterar a posição do ponto *C*, além da medida do ângulo, os valores do cateto *a* e da hipotenusa *d* do triângulo retângulo também mudam, consequentemente, as razões trigonométricas envolvendo essas medidas também mudam.

Dependendo da versão do GeoGebra e do sentido (horário ou anti-horário) em que os pontos são selecionados, o programa pode entender que o ângulo a ser exibido é o maior ângulo, ou seja, um ângulo obtuso.

Para digitar o símbolo α, use a aba de letras gregas do **teclado virtual** da calculadora.

a) Utilize a ferramenta **Mover** para alterar a posição do ponto *C* e, consequentemente, o valor de α. Os valores de sen(α), cos(α) e tg(α) mudaram?

b) Ainda com a ferramenta **Mover** selecionada, altere a posição do ponto *D*. Dessa vez, os valores de sen(α), cos(α) e tg(α) mudaram? Por que isso aconteceu?

Não. Espera-se que os alunos percebam que, devido à construção do triângulo, ao alterar a posição do ponto *D*, o valor de α não se altera, fazendo com que um triângulo na posição inicial seja semelhante a um segundo triângulo na posição final pelo caso AA. Consequentemente, os lados correspondentes são proporcionais e os valores de sen(α), cos(α) e tg(α) não mudam.

Saiba mais

Distâncias de planetas ao Sol

As imagens representadas não estão em proporção e as cores utilizadas não correspondem às reais.

Como foi comentado no início deste capítulo, há aplicações da trigonometria em diversas áreas. Um exemplo de aplicação na Astronomia consiste na medição de distâncias entre corpos celestes.

No século XVI, o polonês Nicolau Copérnico (1473–1543) desenvolveu a chamada “teoria do Universo”.

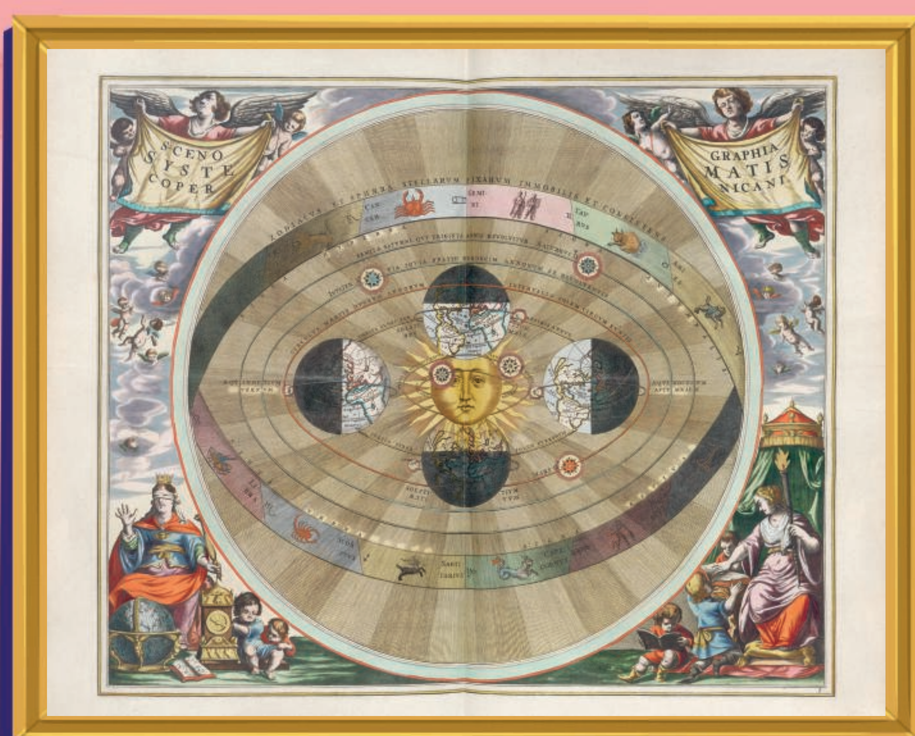
Essa teoria baseava-se na ideia de que os planetas do Sistema Solar mantinham um movimento uniforme e heliocêntrico, ou seja, cada planeta realizava um movimento circular, tendo o Sol como centro.

A teoria de Copérnico sofreu, ao longo da história, diversas modificações. No entanto, suas ideias ainda podem ser consideradas quando se estudam distâncias entre corpos celestes.

Oronoz/Album/Fotoarena/
Biblioteca del Gimnasio, Turín, Itália

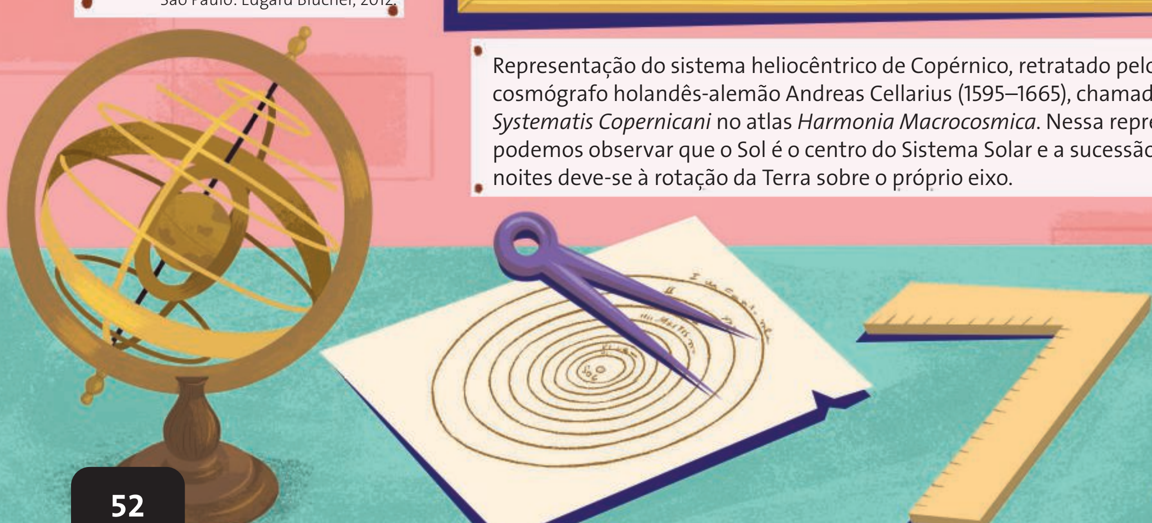
Nicolau Copérnico, depois de se formar na Universidade de Cracóvia, estudou leis, Medicina e Astronomia em Pádua e Bolonha. Em 1510, torna-se cônego da catedral de Frauenburg, e, apesar dos numerosos deveres administrativos, ele completa o célebre tratado *De revolutionibus orbium coelestium*, publicado no ano de sua morte (1543), cuja boa parte do conteúdo é sobre trigonometria.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. 3. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 2012.

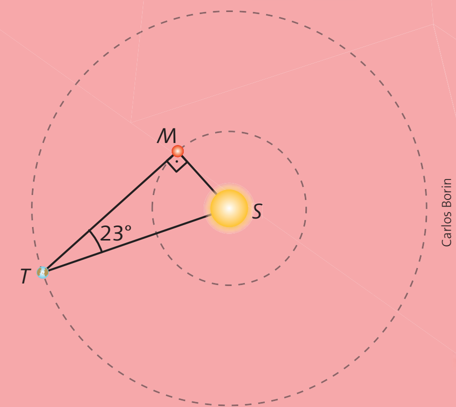


Reprodução/Biblioteca Nacional da França, Paris

Representação do sistema heliocêntrico de Copérnico, retratado pelo matemático e cosmógrafo holandês-alemão Andreas Cellarius (1595–1665), chamada *Scenographia Systematis Copernicani* no atlas *Harmonia Macrocosmica*. Nessa representação, podemos observar que o Sol é o centro do Sistema Solar e a sucessão de dias e noites deve-se à rotação da Terra sobre o próprio eixo.



Conhecendo alguns conceitos de trigonometria e utilizando a distância média da Terra ao Sol como unidade de comprimento, podemos determinar, de modo semelhante ao método utilizado por Copérnico, a distância média, por exemplo, entre o Sol e Mercúrio. Observe o esquema ao lado, no qual estão representados a Terra (T), Mercúrio (M) e o Sol (S), formando um triângulo.



Note que a órbita de Mercúrio é interna à da Terra e, por isso, o chamamos planeta inferior.

O maior valor que $S\hat{T}M$ atinge é, em média, 23° aproximadamente. Isso ocorre no momento de **elongação** máxima, ou seja, quando a reta que contém $\overline{TM}$ tangencia a órbita de Mercúrio.

Nesse momento, $T\hat{M}S$ é reto e, dessa maneira, podemos utilizar a razão seno para determinar o comprimento de $\overline{SM}$.

$$\text{sen } 23° = \frac{MS}{TS} \Rightarrow 0{,}39 \simeq \frac{MS}{TS} \Rightarrow MS \simeq 0{,}39 \cdot TS$$

Assim, a distância média entre o Sol e Mercúrio é, aproximadamente, 0,39 vezes a distância média da Terra ao Sol.

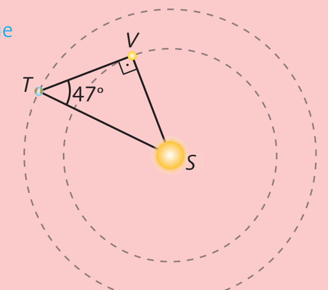
Elongação: aparente afastamento angular de um astro em relação a um ponto, centro da Terra, por exemplo, ou a um sistema fixo. No caso de planetas inferiores, nunca ultrapassa certo valor máximo, inferior a 90°.

a Que exemplo de aplicação da trigonometria o texto apresenta?
A medição de distâncias entre corpos celestes.

b Em que se baseava a "teoria do Universo" desenvolvida por Nicolau Copérnico?

c Tomando a distância média da Terra ao Sol como unidade de comprimento, calcule a distância média aproximada de Vênus ao Sol. Para isso, considere que, assim como Mercúrio, Vênus é um planeta inferior e sua elongação máxima é, em média, cerca de 47°, como mostra o esquema abaixo. $0{,}73 \cdot TS$

b) Na ideia de que cada planeta do Sistema Solar realizava um movimento circular tendo o Sol como centro.

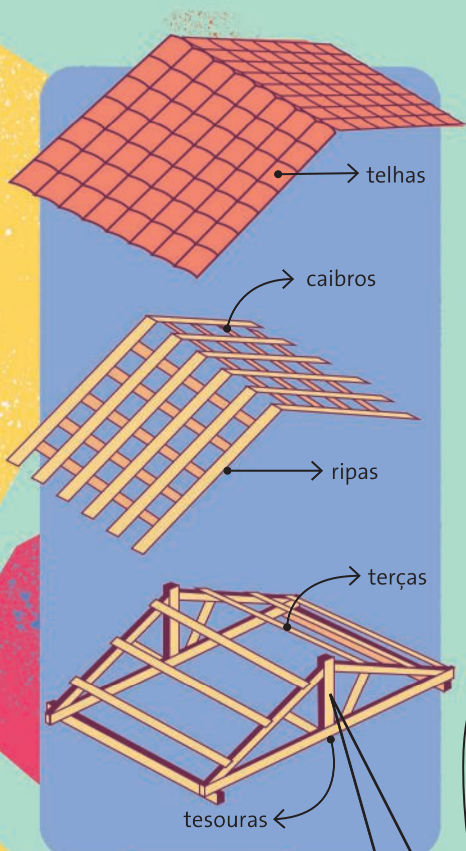


Conectando ideias

Telhas, telhados e trigonometria

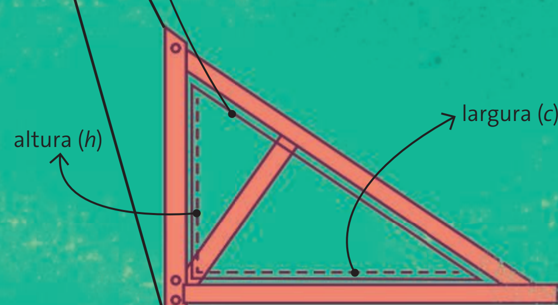
Os profissionais da construção civil preocupam-se com várias etapas do processo de uma obra, como fundação, estrutura, acabamento e telhado. Na etapa do telhado, por exemplo, a inclinação correta pode aumentar a segurança e o conforto do imóvel, além de evitar gastos desnecessários com a construção e com futuras manutenções. A inclinação do telhado influencia, entre outros fatores, a estabilidade das telhas em contato com o vento, o escoamento da água da chuva, o isolamento térmico e acústico e o custo final do projeto.

Definir o tipo de telha e as características do telhado, como a inclinação, é uma etapa muito importante na construção de um imóvel e deve ser feita por profissionais capacitados. Isso porque diferentes tipos de telhas podem necessitar de diferentes inclinações mínimas e máximas, devido aos diferentes tipos de encaixes e materiais.



Uma maneira de expressar a inclinação de um telhado é por meio de uma porcentagem. Para isso, calcula-se a razão entre a altura e a largura do vão do telhado, isto é, $\frac{h}{c}$. Por exemplo, se o vão de um telhado tem 4 m de altura e 10 m de largura, podemos dizer que sua inclinação é de 40%, pois $\frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\%$.

Observação
Uma inclinação de 40% significa que, para cada metro na horizontal, o telhado deve subir 0,4 m na vertical.

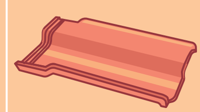
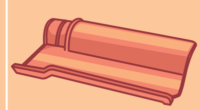
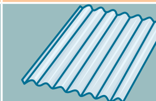
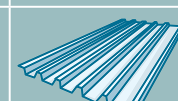


As imagens não estão representadas em proporção.

As telhas cerâmicas são encaixadas na estrutura e entre as próprias telhas. Porém, devido aos diferentes tipos de encaixe, elas precisam de uma inclinação mínima para que fiquem bem presas. Por outro lado, as telhas onduladas são mais leves e são fixadas na estrutura. Assim, a inclinação não influencia no encaixe delas, mas deve ser respeitada a inclinação mínima para evitar infiltração de água. Veja algumas opções de telhas com características que garantem margem de segurança e melhor aproveitamento de cada uma.

a) Com qual razão trigonométrica a inclinação de um telhado está relacionada? tangente

b) Cite outras situações na construção civil que envolvem o uso de razões trigonométricas.
Possíveis respostas: inclinação de rampas e de escadas, projetos em terrenos inclinados.

	Tipo de telha	Inclinação mínima	Quantidade de peças por m²	Massa das telhas molhadas por m² (kg/m²)	Opções das telhas citadas na tabela
Telhas cerâmicas	Francesa (Marselha)	40%	15	55	
	Colonial ou capa / canal ou paulista	35%	30	85	
	Romana	30%	16	60	
	Portuguesa	30%	18	60	
Telhas onduladas	Fibrocimento 6 mm	10%	Varia com a dimensão da telha	18	
	Aço galvanizado (zinco)	15%	Varia com a dimensão da telha	12	

Fonte de pesquisa: ESCOLA POLITÉCNICA PUC RS. *Coberturas*. Disponível em: <https://www.politecnica.pucrs.br/professores/soares/Tecnicas_Materiais_e_Estruturas_II/Construcoes_-_Coberturas.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2020.

Leandro Lassmar

CAPÍTULO 2

Funções trigonométricas

HBRH/Shutterstock.com

A respiração correta influencia na potência vocal de um cantor possibilitando que ele consiga cantar longos trechos de música sem inspirar ar.

Respiração

Uma pessoa consegue passar até três dias sem se alimentar, porém, não consegue ficar mais do que alguns minutos sem respirar. Em razão dessa necessidade, a respiração constitui um processo periódico, pois é preciso que se repita em intervalos regulares de tempo.

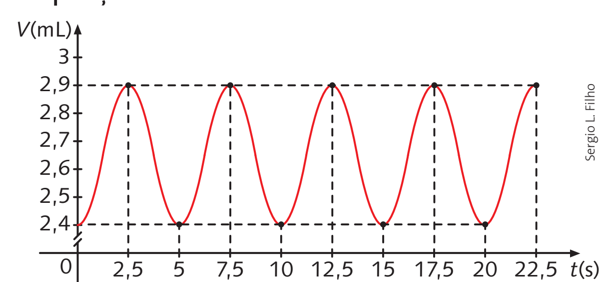
O sistema respiratório, além de estar relacionado com a sensação do olfato e com a produção da voz, é o responsável pela captação do gás oxigênio (O_2) na inspiração e liberação do gás carbônico (CO_2) na expiração. Essa troca gasosa ocorre de maneira correta e eficiente quando a respiração é executada por movimentos abdominais, em que músculos (como o diafragma, localizado abaixo dos pulmões) são contraídos na inspiração e relaxados na expiração.

É comum observar pessoas movimentando o tórax para respirar. O resultado é um processo acelerado, curto e pobre em oxigenação.

Veja no gráfico ao lado os valores para o volume do pulmão de um adulto em respiração normal (pelo tórax).

Fonte de pesquisa: FELTRIM, Maria; JARDIM, José. Movimento toracoabdominal e exercícios respiratórios: revisão da literatura. *Fisioterapia e Pesquisa*, USP. vol. 11, n. 2, jul./dez., 2004. Disponível em: <https://www.revistas.usp.br/fpusp/article/download/77373/81220>. Acesso em: 7 maio 2020.

Volume do pulmão de um adulto em respiração normal



Sergio L. Filho

a Qual a função do sistema respiratório? O sistema respiratório, além de estar relacionado com a sensação do olfato e com a produção da voz, é o responsável pela captação do gás oxigênio na inspiração e liberação do gás carbônico na expiração.

b Por que é necessário que a respiração seja um processo periódico? Devido à necessidade instantânea que temos de captar o gás oxigênio e eliminar o gás carbônico.

c Observando o gráfico, em quais intervalos de tempo ocorreu a inspiração e em qual ocorreu a expiração? inspiração: zero a 2,5 s; 5 s a 7,5 s; 10 s a 12,5 s; 15 s a 17,5 s; 20 s a 22,5 s
expiração: 2,5 s a 5 s; 7,5 s a 10 s; 12,5 s a 15 s; 17,5 s a 20 s

Você cidadão

d Em sua opinião, por que é importante respirar de maneira correta? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que respirar de maneira correta desacelera o processo e o torna mais longo e rico em oxigenação.

1 Introdução

BNCC
- CG 2
- CECNT 2
- CEMT 3
- EM13MAT306

Já estudamos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, relacionadas aos ângulos de triângulos, utilizadas para determinar medidas de ângulos e de comprimentos dos lados dos triângulos. Agora, vamos ampliar o estudo da trigonometria abordando essas mesmas razões na circunferência.

O estudo mais sistemático acerca da trigonometria é creditado ao grego Hiparco de Niceia (c. 180-125 a.C.) e, por esse motivo, ele é considerado o “pai da trigonometria”. Hiparco realizou diversos estudos, contribuindo tanto para a Astronomia quanto para a Matemática.

Na Matemática, principalmente na trigonometria, Hiparco propiciou o avanço mais notável. Foi ele quem introduziu na trigonometria grega a ideia da divisão do círculo em 360°. É provável que tenha tido essa ideia, baseando-se na Astronomia babilônica ou no grego Hipsicles (c. 180 a.C.), que, em seus estudos, dividia o dia em 360 partes iguais.

Também é creditado a Hiparco um tratado composto por 12 livros, o qual se ocupa da construção de uma tábua de cordas que, na essência, resultava no valor do seno de alguns ângulos. Anos mais tarde, o também grego Cláudio Ptolomeu (c. 85-165) aprofundou-se mais na construção de tábuas de cordas, obtendo o equivalente ao seno dos ângulos de 0° a 90°, com incrementos de 15’.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.


Granger Historical Picture Archive/Alamy/Fotoarena

Hiparco.

Na Astronomia, Hiparco determinou com uma boa aproximação a duração média do mês lunar e organizou um catálogo de 850 estrelas.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

Neste capítulo, iremos estudar as funções trigonométricas seno e cosseno. Objeto de estudo da trigonometria, essas funções são utilizadas, entre outras situações, para representar fenômenos naturais periódicos, como a duração do dia durante o ano e o movimento das marés. Porém, antes de nos aprofundarmos no estudo das funções trigonométricas, vamos entender o que é uma função. Para isso, iniciaremos estudando os conjuntos, conceito muito importante para compreender o que é uma função e, em seguida, vamos relembrar alguns conceitos relacionados à circunferência, a fim de auxiliar no estudo da circunferência trigonométrica.

Conversando

a) Como a trigonometria contribuiu para a Matemática e para a Astronomia? Possível resposta: na Matemática, foi introduzida a divisão do círculo em 360° e foram estabelecidas relações que originaram as funções trigonométricas. Essas funções são ferramentas importantes para o estudo de fenômenos naturais periódicos, como a duração do dia durante o ano e o movimento das marés.

b) O que você entende por trigonometria? Justifique sua resposta. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos recordem o que já foi estudado sobre o assunto no Ensino Fundamental e no capítulo anterior.

c) Além dos exemplos apresentados, cite outros fenômenos naturais periódicos. Possíveis respostas: as fases da Lua, variações de temperatura terrestre, o comportamento ondulatório do som, pressão sanguínea no coração, os níveis de água dos oceanos etc.

d) De acordo com o texto, vimos que a trigonometria contribuiu para a Astronomia. Em sua opinião, em quais outras áreas a trigonometria pode ter ajudado? Resposta pessoal. Possíveis respostas: Física, Química, Música e Engenharia.

2 Conjuntos

Utilizada em diversas áreas da Matemática, a ideia de conjunto está presente em muitos conceitos. Um **conjunto** é formado quando classificamos objetos de acordo com determinado critério, e tais objetos podem ser números, letras, cidades, pessoas etc.

De modo geral, os conjuntos são nomeados por letras maiúsculas do nosso alfabeto e os objetos são chamados **elementos**, sendo apresentados entre chaves e separados por vírgula ou ponto e vírgula.

Exemplos

1. Conjunto dos números pares positivos menores do que 30: $A = \{2, 4, 6, 8, \dots, 24, 26, 28\}$.
2. Conjunto dos números primos menores do que 15: $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.
3. Conjunto dos números naturais múltiplos de 5: $C = \{0, 5, 10, 15, 20, \dots\}$.

Outra maneira de representar um conjunto é por meio de uma **lei de formação** que define os seus elementos.

Exemplo

$P = \{x \mid x \text{ é um número divisor de } 15\}$ Neste caso, $P = \{1, 3, 5, 15\}$.

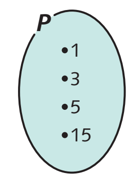
lê-se: tal que

Observação

As reticências (...), conforme apresentadas no conjunto *A*, indicam que há outros elementos entre 8 e 24. No conjunto *C*, indicam também que há outros elementos após o 20. Além disso, os conjuntos *A* e *B* são **finitos**, ou seja, é possível contar seus elementos, e o conjunto *C* é um conjunto **infinito**, pois não é possível contar seus elementos.

Os elementos de um conjunto também podem ser representados em um **diagrama**, conhecido por diagrama de Venn, em homenagem ao lógico e filósofo John Venn (1834-1923).

Observe o conjunto *P*, indicado no exemplo, representado no diagrama ao lado.



Sergio L. Filho

Dado um determinado conjunto, podemos verificar se um elemento **pertence** ou **não pertence** a esse conjunto, situações que podem ser indicadas pelos símbolos $\in$ e $\notin$, respectivamente. Considerando o conjunto $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, notamos que:

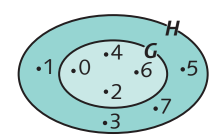
- 1 **pertence** a *F*: $1 \in F$.
- 9 **não pertence** a *F*: $9 \notin F$.

Observação

Além das maneiras apresentadas, é possível representar um conjunto por meio de intervalos. Esse assunto será estudado em tópico posterior ainda neste capítulo.

Subconjuntos e igualdade de conjuntos

Considere os conjuntos $G = \{0, 2, 4, 6\}$ e $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Podemos observar que todos os elementos de *G* também são elementos de *H*. Assim, dizemos que *G* é **subconjunto** de *H*, ou seja, *G* **está contido** em *H* e podemos indicar por $G \subset H$.



Rafael L. Gaion

Considerando os conjuntos *G* e *H*, observamos que *H* não é subconjunto de *G*, pois existe pelo menos um elemento de *H* que não é elemento de *G*. Assim, dizemos que *H* **não está contido** em *G* e podemos indicar por $H \not\subset G$.

Dados os conjuntos *A* e *B*, se todos os elementos do conjunto *A* são elementos do conjunto *B*, e todos os elementos do conjunto *B* também são elementos do conjunto *A*, dizemos que $A = B$.

Exemplo

$A = \{x \mid x \text{ é um número ímpar maior do que } 3\}$ $B = \{5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$

As maneiras de representar os conjuntos são diferentes, porém, indicam o mesmo conjunto, pois todos os elementos de *A* pertencem a *B*, e todos os elementos de *B* pertencem a *A*. Como os conjuntos são iguais, indicamos por $A = B$.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

1. Represente, por meio de uma listagem com chaves, o conjunto indicado em cada item. Depois, classifique-os em finito ou infinito.

a) Letras que compõem a palavra estudar. $\{a, d, e, r, s, t, u\}$; finito

b) Conjunto dos múltiplos positivos de 4. $\{4, 8, 12, 16, \dots\}$; infinito

c) Siglas dos estados da região Sul do Brasil. {PR, SC, RS}; finito

2. Considerando o conjunto $A = \{0, 2, 3, 4, 7, 8\}$, identifique as afirmativas corretas. corretas: a, b, c, d

a) $2 \in A$

b) $3 \in A$

c) $5 \notin A$

d) $\{2\} \subset A$

e) $\{0, 3\} \not\subset A$

f) $\{2, 5\} \subset A$

Conjuntos numéricos

Vimos anteriormente que os conjuntos são definidos como coleções de objetos, de acordo com determinadas características, e quando todos os elementos de um conjunto são números, o denominamos **conjunto numérico**. Vamos classificar alguns desses conjuntos.

Conjunto dos números naturais $(\mathbb{N})$ e inteiros $(\mathbb{Z})$

O conjunto dos números naturais é dado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

Esses números surgiram da necessidade que o ser humano teve, com o passar do tempo, de contar seus animais, objetos, membros da comunidade etc.

Observação

O conjunto dos números naturais sem o zero é um subconjunto de $\mathbb{N}$ e o indicamos por $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Se achar conveniente, comente com os alunos que, no diagrama de Venn, embora as regiões sejam limitadas, elas apresentam conjuntos infinitos.

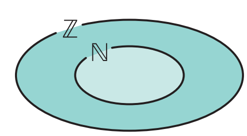
Os números naturais estão presentes em diversas situações do nosso cotidiano, e os utilizamos para representar quantidade, medida, código ou ordem. Contudo, há situações em que não é possível utilizar esses números, como para expressar uma dívida, uma temperatura abaixo de 0° Celsius, entre outras situações. Assim, é necessário utilizar os números inteiros negativos.

Os números inteiros negativos com os números naturais formam o conjunto dos números inteiros. Esse conjunto pode ser representado da seguinte maneira:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Observe que todos os elementos de $\mathbb{N}$ também são elementos de $\mathbb{Z}$, ou seja, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Veja alguns exemplos de subconjuntos de $\mathbb{Z}$.

- Conjunto dos números inteiros não negativos: $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\} = \mathbb{N}$.
- Conjunto dos números inteiros positivos: $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\} = \mathbb{N}^*$.
- Conjunto dos números inteiros não nulos: $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.



Sergio L. Filho

Conjunto dos números racionais $(\mathbb{Q})$

Os números racionais são utilizados para representar situações que não podem ser expressas pelos números inteiros. Um número racional é aquele que pode ser escrito como um quociente $\frac{a}{b}$ com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Assim, o conjunto dos números racionais pode ser expresso como:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são subconjuntos de $\mathbb{Q}$, assim $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Exemplos

a) $\frac{14}{2} = 7$

b) $-\frac{22}{11} = -2$

c) $-\frac{2}{9} = -0{,}2222\ldots = -0{,}\overline{2}$

d) $\frac{3}{4} = 0{,}75$

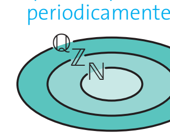
e) $\frac{2}{3} = 0{,}66666\ldots = 0{,}\overline{6}$

f) $-\frac{18}{4} = -4{,}5$

Reforce com os alunos que, no caso das dízimas periódicas, as reticências representam as infinitas casas que se repetem periodicamente.

Observando os exemplos acima, note que, ao dividir o numerador pelo denominador de cada um dos números fracionários:

- nos itens **d** e **f**, os resultados são números decimais com quantidade finita de casas depois da vírgula.
- nos itens **c** e **e**, os resultados são **dízimas periódicas**, ou seja, números decimais com infinitas casas decimais que se repetem periodicamente.
- nos itens **a** e **b**, os resultados são números inteiros.



Rafael L. Gaion

Conjunto dos números irracionais $(\mathbb{I})$

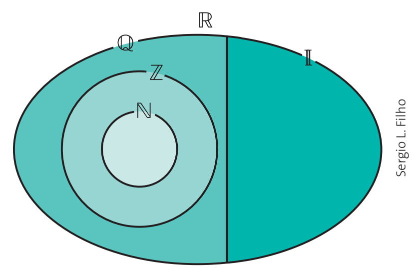
Além dos conjuntos numéricos estudados, há ainda um conjunto que é formado por números que não são racionais, isto é, não podem ser expressos por $\frac{a}{b}$ com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Esses números têm sua representação no formato decimal com infinitas casas decimais não periódicas e o conjunto que os representa é o dos **números irracionais**, indicado por $\mathbb{I}$.

Exemplos

- $\sqrt{3} = 1{,}732050...$
- $\sqrt{5} = 2{,}236067...$
- $\pi = 3{,}141592...$

Observação
Neste livro, o conjunto dos números irracionais será representado pelo símbolo $\mathbb{I}$.

Conjunto dos números reais $(\mathbb{R})$



O **conjunto dos números reais** é formado pela junção do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais e o indicamos por $\mathbb{R}$.

Como podemos verificar, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Além deles, destacamos outros subconjuntos de $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{R}^*$ (reais não nulos)
- $\mathbb{R}^*_-$ (reais negativos)
- $\mathbb{R}^*_+$ (reais positivos)
- $\mathbb{R}_-$ (reais não positivos)
- $\mathbb{R}_+$ (reais não negativos)

Intervalos

Podemos representar outros subconjuntos dos números reais por meio de desigualdades que chamamos **intervalos**. Assim, dados dois números reais a e b, com $a < b$, temos os seguintes intervalos.

- Intervalo aberto
  - $]a, b[= (a, b)$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- Intervalo fechado
  - $[a, b]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
- Intervalo fechado no extremo a e aberto no extremo b
  - $[a, b[= [a, b)$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$
- Intervalo aberto no extremo a e fechado no extremo b
  - $]a, b] = (a, b]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$

Além disso, podemos representar intervalos ilimitados, em que $-\infty$ significa menos infinito e $+\infty$, infinito.

- $]-\infty, a[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
- $]-\infty, a]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$
- $]a, +\infty[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- $[a, +\infty[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$
- $]-\infty, +\infty[$ ou $\mathbb{R}$

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

3. Classifique cada afirmação abaixo em verdadeira ou falsa. verdadeiras: a, d; falsas: b, c, e

a) $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$

b) $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$

c) $3 \in]3, 10[$

d) $\{2, 4, 6\} \subset [0, +\infty)$

e) $-5 \in \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 5\}$

4. Indique as alternativas CORRETAS. a, b, d

a) Todo número natural é também inteiro.

b) Todo número natural é também racional.

c) Todo número natural é também irracional.

d) Todo número natural é também real.

e) Todo número irracional é também inteiro.

5. Determine qual é o maior número natural N que torna verdadeira a desigualdade $-\frac{N}{9} > -\frac{19}{5}$.
$N = 34$

3 Funções

Em nosso cotidiano nos deparamos com diversas situações em que duas grandezas variáveis estão associadas, como o tempo que um estudante leva para ir de sua casa à escola e a velocidade média com que se desloca; o volume de ar nos pulmões e o tempo, conforme apresentado na abertura deste capítulo, entre outras situações. Essas associações estão ligadas a um importante conceito matemático chamado **função**.

Nesses exemplos, podemos notar que os elementos de um conjunto estão associados aos elementos de outro conjunto e, portanto, há uma relação de dependência entre eles. Dizemos, então, que uma variável depende da outra, ou está em função da outra.

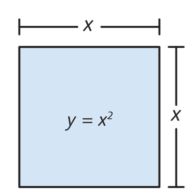
Definição de função

Uma função pode ser definida como:

> Dados os conjuntos *A* e *B* não vazios, dizemos que f é uma função de *A* em *B* (ou que *y* é uma função de *x*) se, e somente se, para cada elemento *x* do conjunto *A*, existe em correspondência um único elemento *y* do conjunto *B*.
>
> Representamos, assim:
>
> $$f: A \rightarrow B \quad \text{ou} \quad A \xrightarrow{f} B$$
>
> lê-se função f de *A* em *B*

Exemplos

1. As variáveis "área de uma região quadrada", indicada por *y*, e "comprimento do lado", indicada por *x*, estão relacionadas, de modo que a correspondência entre elas pode ser representada por meio da fórmula $y = x^2$, também chamada de **lei de formação** da função. Usamos a notação $f(x)$ (lemos "f de x") no lugar da variável *y*, ou seja, $f(x) = x^2$.

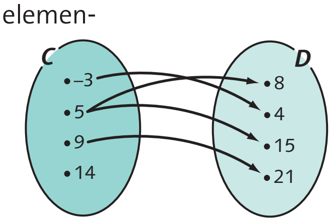


Rafael L. Gaion

Temos que $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função definida por $f(x) = x^2$, porque, a cada elemento *x* do conjunto $\mathbb{R}_+$, existe em correspondência um único elemento *y* do conjunto $\mathbb{R}_+$.

2. O conjunto $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ está relacionado ao conjunto $B = \{-6, -4, -2, 0, 2, 3\}$ por meio da função dada por $g(x) = -2x$, pois todos os elementos do conjunto *A* têm correspondente em *B* e cada elemento de *A* está associado a um único elemento de *B*.

3. O diagrama de flechas ao lado representa uma relação que não é uma função de *C* em *D*, pois, de acordo com o diagrama, podemos observar que há um elemento em *C* que não tem correspondente em *D*. Além disso, há um elemento em *C* com dois correspondentes em *D*.



Sergio L. Filho

Na definição apresentada antes dos exemplos, o conjunto *A* é o **domínio** $D(f)$ e o conjunto *B* é o **contradomínio** $CD(f)$ da função f. Quando $y \in B$ é tal que $f(x) = y$, para algum $x \in A$, dizemos que *y* é a imagem de *x* pela função f. O conjunto de todas as imagens é um subconjunto de *B*, chamado **conjunto imagem da função**, indicado por $Im(f)$.

Em alguns casos, o domínio e o contradomínio de uma função não são dados, sendo apresentada apenas a lei de formação da função. Nesses casos, consideramos o contradomínio o conjunto dos números reais, ou seja, $\mathbb{R}$, e o domínio o maior subconjunto possível dos números reais que *x* pode assumir e que resulte em um $y \in B$ tal que $f(x) = y$.

Exemplos

1. A função f, dada por $f(x) = 3x + 1$, é definida para todos os números reais, pois para qualquer valor real de x, obtém-se um número y também real. Logo, $D(f) = \mathbb{R}$.
2. A função g, dada por $g(x) = \frac{1}{x}$, é definida para todos os números reais não nulos, pois o denominador da fração não pode ser zero. Portanto, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$.
3. A função h, dada por $h(x) = \sqrt{1 - x}$, é definida apenas quando $(1 - x) \geqslant 0$, pois não existe raiz quadrada de número negativo em $\mathbb{R}$. Assim: $(1 - x) \geqslant 0 \Rightarrow -x \geqslant -1 \Rightarrow x \leqslant 1$.
   Portanto, $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}$.

Observação
Quando multiplicamos ou dividimos os dois membros de uma inequação por um mesmo número negativo, o sinal da desigualdade é invertido para que a sentença obtida permaneça verdadeira.

Gráfico de uma função

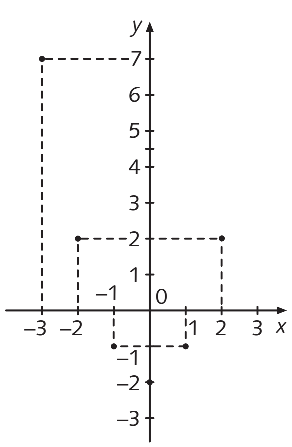
Quando "construímos" o gráfico de uma função, na verdade, estamos fazendo um esboço do seu formato, uma vez que não é possível representar na imagem todos os pontos do plano cartesiano.

O gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos (pares ordenados (a, b)) do plano cartesiano, em que $a \in D(f)$ e $b = f(a)$. Assim, para construir o gráfico de uma função f, podemos representar alguns pares ordenados de números reais (a, b) em um plano cartesiano, com $a \in D(f)$ e $b \in Im(f)$.

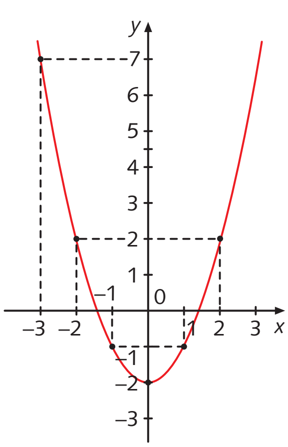
Como exemplo, vamos construir o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 2$.

Primeiramente, atribuímos alguns valores para x, calculamos os valores correspondentes para y e obtemos os pares ordenados (x, y). Depois, associamos cada par ordenado a um ponto no plano cartesiano e, por fim, traçamos o gráfico.

x	$f(x) = x^2 - 2$	(x, y)
-3	$f(-3) = (-3)^2 - 2 = 7$	$(-3, 7)$
-2	$f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2$	$(-2, 2)$
-1	$f(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$	$(-1, -1)$
0	$f(0) = 0^2 - 2 = -2$	$(0, -2)$
1	$f(1) = 1^2 - 2 = -1$	$(1, -1)$
2	$f(2) = 2^2 - 2 = 2$	$(2, 2)$



→



Ilustrações: Sergio L. Filho

Observação
Como $D(f) = \mathbb{R}$, há infinitos valores possíveis para x e, consequentemente, infinitos pares ordenados (x, y). Como não é possível representar todos eles, escolhemos alguns pontos para obter um esboço do gráfico. Por isso, nesse exemplo, podemos traçar uma curva contínua ligando os pontos no gráfico.

Domínio e conjunto imagem de uma função a partir do gráfico

Em alguns casos, podemos obter o domínio e o conjunto imagem da função analisando o gráfico. Para isso, basta fazermos a projeção nos eixos x e y.

A projeção no eixo x corresponde ao domínio da função e, no eixo y, ao conjunto imagem. Considerando o gráfico da função f, definida por $f(x) = x^2 - 2$, construído na página anterior, temos:

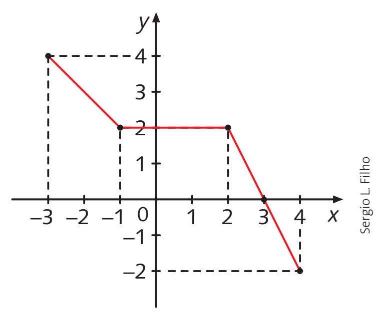
- $D(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = [-2, +\infty[= \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -2\}$

Valor máximo e valor mínimo de uma função

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer, $y_a \in Im(f)$ e $y_b \in Im(f)$. Se não existe $y \in Im(f)$ que seja maior do que y_a, temos que y_a é o **valor máximo** da função. Da mesma maneira, se não existe $y \in Im(f)$ menor do que y_b, dizemos que y_b é o **valor mínimo** da função.

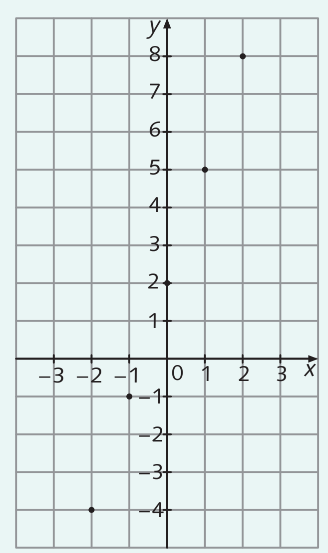
Exemplo

Considerando o domínio dessa função igual a $[-3,4]$, o valor máximo da função representada pelo gráfico ao lado é 4 e o valor mínimo é -2.



Problemas e exercícios resolvidos

R1. No plano cartesiano ao lado, estão indicados todos os pontos (a, b), em que $a \in D(f)$ e $b = f(a)$, referentes à função $f: A \to B$. Determine o domínio e o conjunto imagem dessa função.



Resolução

As coordenadas dos pontos referentes ao gráfico de f são: $(-2, -4)$, $(-1, -1)$, $(0, 2)$, $(1, 5)$ e $(2, 8)$.

O domínio da função f é o conjunto cujos elementos são as abscissas dos pares ordenados e as ordenadas são os elementos do conjunto imagem de f. Assim:

$D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $Im(f) = \{-4, -1, 2, 5, 8\}$

R2. Considere a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, definida por $f(x) = \dfrac{5x - 2}{4x}$. Determine o elemento do domínio de f, cuja imagem é $-\dfrac{3}{4}$.

Resolução

Temos que: $-\dfrac{3}{4} = \dfrac{5x - 2}{4x} \Rightarrow -12x = 20x - 8 \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}$

Portanto, o elemento do domínio de f é $x = \dfrac{1}{4}$.

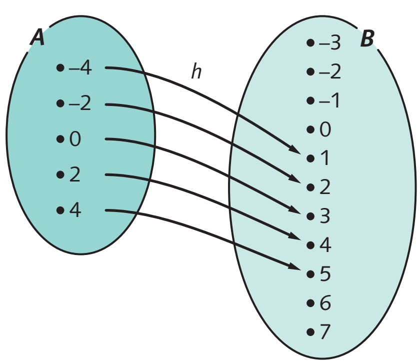
6. Classifique cada afirmativa abaixo em verdadeira ou falsa. Depois, reescreva as falsas tornando-as verdadeiras. verdadeira: c; falsas: a, b

a) O domínio e o contradomínio de uma função não podem ser iguais. O domínio e o contradomínio de uma função podem ser iguais.

b) O conjunto imagem de uma função sempre é diferente do contradomínio. O conjunto imagem de uma função nem sempre é diferente do contradomínio.

c) O conjunto imagem está contido no contradomínio de uma função.

7. Considere a função $h: A \to B$, representada pelo diagrama abaixo.



Rafael L. Gaion

Determine:

a) $D(h)$. $D(h) = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$

b) $CD(h)$. $CD(h) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

c) $Im(h)$. $Im(h) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

8. Seja a função $f: D \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 4x - 1$. Sabendo que $D = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, determine o conjunto imagem dessa função.
$Im(f) = \{-9, -5, -1, 3, 7, 11, 15\}$

9. Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{3x+1}{2}$. Determine o elemento do domínio de f, cuja imagem é 8. 5

Você produtor

10. Escreva a lei de formação de uma função e entregue para um colega, para que ele construa o gráfico dessa função e determine:

a) se há restrição no domínio;

b) o conjunto imagem;

c) o valor máximo (se houver) e o valor mínimo (se houver).

Por fim, verifique se as respostas estão corretas.

Resposta pessoal. Veja uma possível resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

11. Determine o domínio das funções, definidas por:

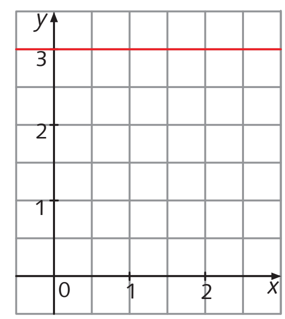
a) $f(x) = \dfrac{5}{2x+1}$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\dfrac{1}{2}\right\}$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \text{ e } x \neq 1\}$

c) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x+4}}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

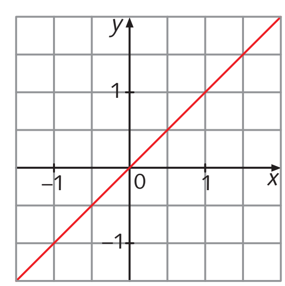
12. Determine o domínio e o conjunto imagem das funções cujos gráficos estão apresentados em cada item.

a)



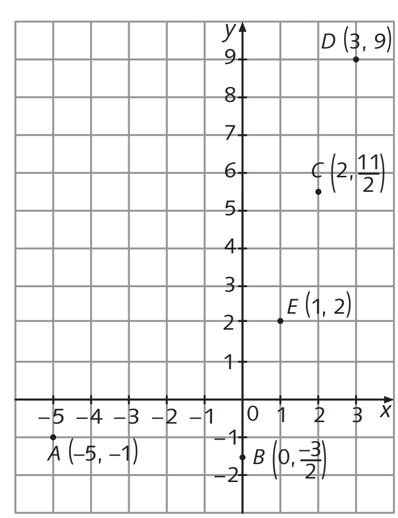
$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = 3$

b)



$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}$

c)



Ilustrações: Rafael L. Gaion

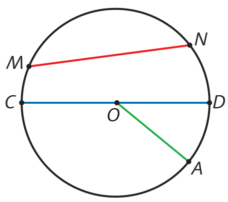
$D(f) = \{-5, 0, 1, 2, 3\}$; $Im(f) = \left\{-1, -\dfrac{3}{2}, 2, \dfrac{11}{2}, 9\right\}$

4 Circunferência

As formas circulares estão presentes em várias situações do cotidiano, obras de arte, placas de trânsito, entre outros.

A **circunferência** é determinada pelo conjunto de todos os pontos de um plano que estão a uma mesma distância de um ponto fixo, chamado **centro**.

Na circunferência abaixo, temos os seguintes elementos:



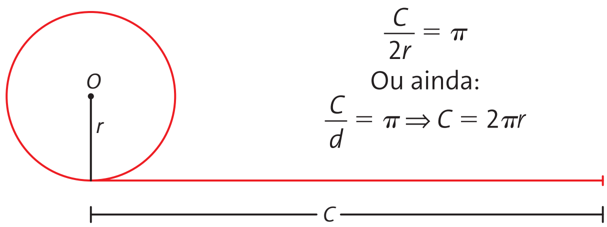
O: centro da circunferência

$\overline{MN}$: corda da circunferência

$\overline{AO}$: raio da circunferência (r)

$\overline{CD}$: diâmetro da circunferência $(d = 2r)$

Ao dividirmos o comprimento C de uma circunferência pelo diâmetro d, obtemos o número irracional π, que vale aproximadamente 3,14159.



$$\frac{C}{2r} = \pi$$

Ou ainda:

$$\frac{C}{d} = \pi \Rightarrow C = 2\pi r$$

Ilustrações: Sergio L. Filho

Com essa fórmula, podemos determinar o comprimento de uma circunferência, dado o raio r.

Exemplo

O comprimento de uma circunferência cujo raio é 7 cm pode ser calculado da seguinte maneira:

$$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 7 = 43{,}96, \text{ com } \pi = 3{,}14$$

Nesse caso, o comprimento da circunferência é, aproximadamente, 43,96 cm.

Observações

- O raio corresponde ao segmento de reta que liga o centro O a um ponto qualquer da circunferência, e o diâmetro é uma corda que passa pelo centro.
- Neste livro, não faremos distinção entre grandezas e suas respectivas medidas, para que possamos simplificar a escrita. Então, em situações do tipo "segmento com 3 cm de comprimento" na verdade estamos nos referindo à "medida do segmento com 3 cm de comprimento", assim como em situações do tipo "raio r" estamos nos referindo ao "raio cuja medida do comprimento é r", entre outros casos.
- Podemos obter, experimentalmente, aproximações de π medindo o comprimento e o diâmetro de qualquer objeto circular.
- Em algumas situações, considerou-se $\pi = 3{,}14$. Nesses casos, a medida obtida não será exata, pois utilizamos uma aproximação para o número irracional π. Sendo assim, entende-se que a medida 43,96 cm obtida no exemplo ao lado, não é exata.

Problemas e exercícios propostos

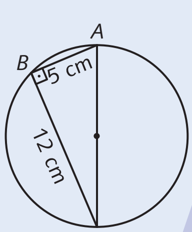
Não escreva no livro.

13. Qual é o comprimento aproximado de uma circunferência cujo comprimento do diâmetro é 18 cm? 56,52 cm

14. Determine o comprimento aproximado do raio de uma circunferência cujo comprimento é 94,2 cm. 15 cm

Você produtor

15. De acordo com a figura, escreva algumas questões relacionadas ao comprimento do raio e ao comprimento do diâmetro. Depois, dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se as respostas estão corretas.



Sergio L. Filho

Resposta pessoal. Possíveis respostas: qual é o comprimento do diâmetro dessa circunferência?; Qual é o comprimento do raio dessa circunferência?; Qual é o comprimento dessa circunferência?

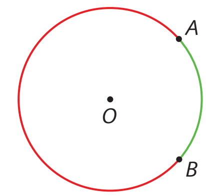
16. Duas polias são ligadas por uma correia, como mostra a figura.

Carlos Borin

Determine o comprimento aproximado da correia, sabendo que o comprimento do diâmetro de cada polia é 8 cm. 65,12 cm

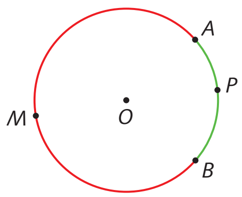
17. Considere uma circunferência de raio r e outra de raio $\frac{r}{2}$. Qual é a diferença entre os comprimentos dessas circunferências? πr

5 Arcos de circunferência



Consideremos uma circunferência de centro O. Nela, indicamos os pontos A e B que a dividem em duas partes. Cada uma dessas partes chama-se **arco de circunferência**, e os pontos A e B são denominados **extremidades dos arcos**.

Para diferenciar esses arcos, indica-se outro ponto em cada um deles.

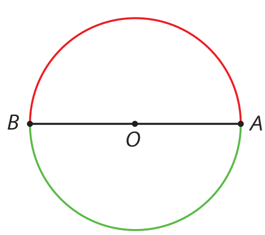


Nesse caso, indicam-se os arcos da seguinte maneira:

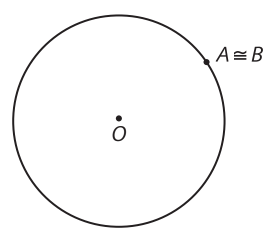
- arco APB: $\overset{\frown}{APB}$
- arco AMB: $\overset{\frown}{AMB}$

Se A e B são extremidades de um diâmetro, cada um dos dois arcos formados é chamado **semicircunferência**.

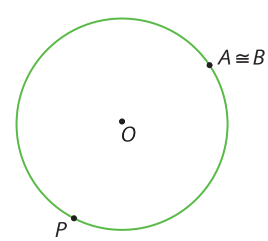
Caso os extremos coincidam, eles determinam na circunferência o arco nulo ou arco de uma volta.



$\overset{\frown}{AB}$: semicircunferência



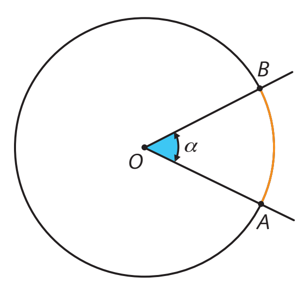
$\overset{\frown}{AB}$: arco nulo



$\overset{\frown}{APB}$: arco de uma volta

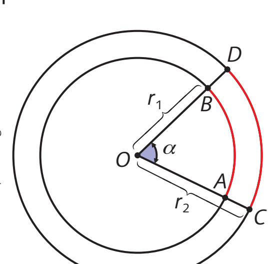
6 Ângulo central

Sejam A e B dois pontos pertencentes a uma circunferência de centro O. Ao traçarmos as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, determinamos o **ângulo central** $A\hat{O}B$ e o arco de circunferência $\overset{\frown}{AB}$. Tomando como unidade de medida do arco aquela definida na circunferência por um ângulo central, temos que a medida de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente.



$$\text{med}\left(A\hat{O}B\right) = \text{med}\left(\overset{\frown}{AB}\right) = \alpha$$

Cabe destacar que a medida de um arco não corresponde ao comprimento desse arco. Na imagem abaixo, $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ têm a mesma medida α, mas comprimentos diferentes. Isso ocorre porque as circunferências que contêm os arcos têm raios diferentes, isto é, $r_1 \neq r_2$.



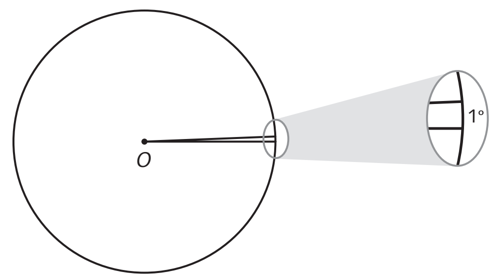
Ilustrações: Sergio L. Filho

7 Medidas de arcos e ângulos

A medida α de um ângulo central de uma circunferência ou de um arco pode ser expressa em **grau** ou **radiano**.

Grau

Ao dividirmos uma circunferência em 360 partes iguais, cada uma dessas partes é um arco de 1° (um grau). Portanto, uma circunferência possui 360°.



Os submúltiplos do grau são o **minuto** (′) e o **segundo** (″):

- 1 grau corresponde a 60 minutos: 1° = 60′.
- 1 minuto corresponde a 60 segundos: 1′ = 60″.

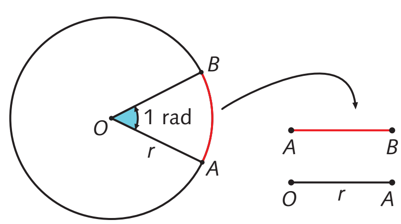
Se um arco de circunferência mede 5 graus, 12 minutos e 45 segundos, por exemplo, podemos indicar por 5° 12′ 45″.

Radiano

Além do grau, outra unidade para medir arco e ângulo é o radiano. Como vimos anteriormente, arcos com medidas de ângulos iguais podem ter comprimentos diferentes. Vamos estudar essa unidade de medida.

Consideramos $\overset{\frown}{AB}$ um arco em uma circunferência de centro O. Se $\overset{\frown}{AB}$ tem comprimento igual ao comprimento do raio, dizemos que ele mede **1 radiano**, que indicamos por **1 rad**.

De modo geral:



Observação

Se um arco mede 2 rad, seu comprimento corresponde ao de dois raios da circunferência. Se mede 3 rad, seu comprimento corresponde ao de três raios. E assim por diante.

> Radiano é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao do raio da circunferência que contém esse arco.
>
> Como o arco está associado a um ângulo central, dizemos também que radiano é a medida do ângulo central que determina, na circunferência, um arco cujo comprimento é igual ao do raio.

Em uma circunferência de raio r, a medida α, em radianos, de um arco $\overset{\frown}{AB}$ pode ser obtida dividindo o comprimento ℓ do arco pelo comprimento do raio dessa circunferência:

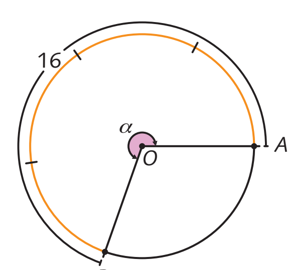
$$\alpha = \text{med}\left(\overset{\frown}{AB}\right) = \frac{\ell}{r}$$

- Então, o arco de uma volta mede quantos radianos?

Sabemos que o comprimento de uma circunferência qualquer é $C = 2\pi r$ u.c. Medindo a circunferência toda em radianos, temos:

$$\alpha = \frac{C}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}$$

Portanto, o arco de uma volta mede 2π rad.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Observação

O arco de meia-volta, correspondente a um ângulo central de 180°, mede $\frac{2\pi \text{ rad}}{2} = \pi$ rad.

Veja algumas medidas de arcos de circunferência em graus e em radianos.

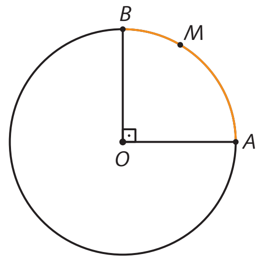
- $\frac{1}{4}$ de volta

$\text{med}\left(\overset{\frown}{AMB}\right) = 90° \text{ ou}$

$\text{med}\left(\overset{\frown}{AMB}\right) = 90° =$

$= \frac{1}{4} \cdot \underbrace{360°}_{2\pi \text{ rad}} =$

$= \frac{1}{4} \cdot 2\pi \text{ rad} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$



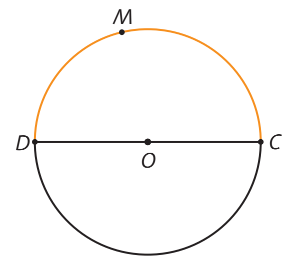
- $\frac{1}{2}$ volta

$\text{med}\left(\overset{\frown}{CMD}\right) = 180° \text{ ou}$

$\text{med}\left(\overset{\frown}{CMD}\right) = 180° =$

$= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{360°}_{2\pi \text{ rad}} =$

$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \text{ rad} = \pi \text{ rad}$



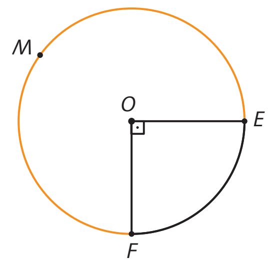
- $\frac{3}{4}$ de volta

$\text{med}\left(\overset{\frown}{EMF}\right) = 270° \text{ ou}$

$\text{med}\left(\overset{\frown}{EMF}\right) = 270° =$

$= \frac{3}{4} \cdot \underbrace{360°}_{2\pi \text{ rad}} =$

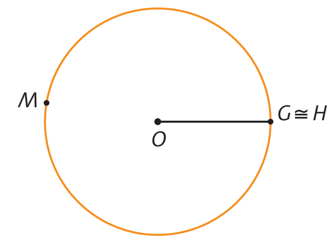
$= \frac{3}{4} \cdot 2\pi \text{ rad} = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$



- uma volta

$\text{med}\left(\overset{\frown}{GMH}\right) = 360° \text{ ou}$

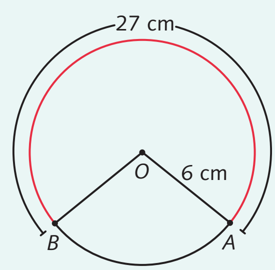
$\text{med}\left(\overset{\frown}{GMH}\right) = 2\pi \text{ rad}$



Ilustrações: Sergio L. Filho

Problemas e exercícios resolvidos

R3. Determine, em radianos, a medida de $\overset{\frown}{AB}$ na circunferência.



Sergio L. Filho

Resolução

$$\text{med}\left(\overset{\frown}{AB}\right) = \frac{\ell}{r} = \frac{27}{6} = 4{,}5$$

Portanto, a medida de $\overset{\frown}{AB}$ é 4,5 rad.

R4. Converta 45° em radianos.

Resolução

Utilizando a regra de três:

$$\begin{array}{ccc} \text{grau} & & \text{radiano} \\ 180 & \text{———} & \pi \\ 45 & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow \frac{180}{45} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 45\pi \Rightarrow x = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$$

Portanto, $45° = \frac{\pi}{4}$ rad.

Observação

Utilizamos regra de três, pois ela permite obter um valor, a partir de outros três valores conhecidos em uma proporção.

R5. Converta $\frac{17\pi}{150}$ rad em graus.

Resolução

Utilizando a regra de três:

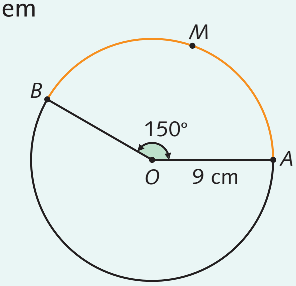
$$\begin{array}{ccc} \text{grau} & & \text{radiano} \\ 180 & \text{———} & \pi \\ x & \text{———} & \frac{17\pi}{150} \end{array} \Rightarrow \frac{180}{x} = \frac{\pi}{\frac{17\pi}{150}} \Rightarrow \frac{180}{x} = \frac{150}{17} \Rightarrow 150x = 3\,060 \Rightarrow x = \frac{3\,060}{150} = 20{,}4$$

Convertendo em minutos a parte decimal da medida em graus (0,4°), obtemos:

$$0{,}4 \cdot 60' = 24'$$

Portanto, $\frac{17\pi}{150}$ rad $= 20°\,24'$.

R6. De acordo com as indicações na imagem, determine o comprimento de $\overset{\frown}{AMB}$ em centímetros.



Sergio L. Filho

Resolução

Inicialmente, convertemos 150° em radianos.

grau		radiano
180	______	π
150	______	x

$\Rightarrow \dfrac{180}{150} = \dfrac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 150\pi \Rightarrow x = \dfrac{150\pi}{180}\ \ x = \dfrac{5\pi}{6}$ rad

Utilizando a relação $\alpha = \dfrac{\ell}{r}$, em que $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$ rad e $r = 9$ cm, temos:

$$\alpha = \frac{\ell}{r} \Rightarrow \frac{5\pi}{6} = \frac{\ell}{9} \Rightarrow 6\ell = 45\pi \Rightarrow \ell = \frac{45\pi}{6} = \frac{15\pi}{2}$$

Portanto, o comprimento do arco é $\dfrac{15\pi}{2}$ cm.

Diga aos alunos que, ao substituirmos π por 3,14 em $\dfrac{15\pi}{2}$, obtemos o comprimento aproximado do arco em centímetros, ou seja: $\dfrac{15 \cdot 3{,}14}{2} = 23{,}55 \rightarrow$ aproximadamente 23,55 cm.

R7. Determine, em centímetros, comprimento do raio de uma circunferência sabendo que o comprimento de um arco correspondente a um ângulo de 24° é 12 cm.

Resolução

Inicialmente, convertemos 24° em radianos.

grau		radiano
180	______	π
24	______	x

$\Rightarrow \dfrac{180}{24} = \dfrac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 24\pi \Rightarrow x = \dfrac{24\pi}{180} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{15}$ rad

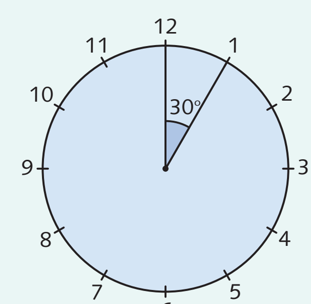
Segue que: $\alpha = \dfrac{\ell}{r} \Rightarrow \dfrac{2\pi}{15} = \dfrac{12}{r} \Rightarrow 2\pi r = \underbrace{12 \cdot 15}_{180} \Rightarrow r = \dfrac{90}{\pi} \simeq 28{,}66.$

Portanto, o comprimento do raio da circunferência é $\dfrac{90}{\pi}$ cm ou, aproximadamente, 28,66 cm.

R8. Quando um relógio marca 11 h 20 min, qual é a medida do menor ângulo formado entre os ponteiros das horas e dos minutos?

Resolução

Uma volta completa do mostrador de um relógio corresponde a 360°. Como o mostrador está dividido em 12 partes de mesma medida, cada uma dessas partes corresponde a 30°, pois, $\dfrac{360°}{12} = 30°$.

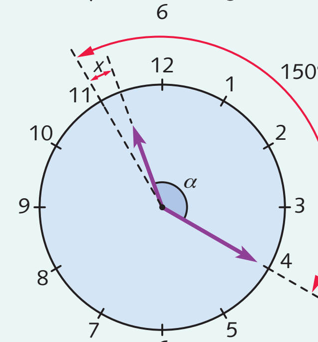


Às 11 h 20 min, o ponteiro dos minutos está localizado exatamente sobre o número 4 e o das horas entre o 11 e o 12. Caso o ponteiro das horas estivesse sobre o 11, o menor ângulo entre os ponteiros teria 150°, pois $5 \cdot 30° = 150°$.

Mas, como houve um deslocamento do ponteiro das horas, precisamos descobrir de quantos graus foi esse deslocamento. Para isso, resolvemos a seguinte regra de três:

Tempo (min)		Deslocamento (grau)
60	______	30
20	______	x

$\Rightarrow x = 10°$



Ilustrações: Sergio L. Filho

Assim, para obtermos a medida procurada, basta subtrairmos esse resultado dos 150° obtidos anteriormente.

$$\alpha = 150° - 10° = 140°$$

18. Observe a tirinha. Veja comentários e sugestões sobre esta tarefa nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.

HAGAR, de Dik Browne. *Folha de S. Paulo*, São Paulo, 24 nov. 2005.

a) Quantos graus correspondem ao giro sugerido pelo personagem? 180°

b) Por que o personagem não sugeriu um giro de uma volta completa?
Porque a volta completa deixaria novamente a embarcação na posição inicial.

Em grupo

19. Em cada item, expressem a medida em radianos.

a) 30° $\frac{\pi}{6}$ rad b) 72° $\frac{2\pi}{5}$ rad c) 245° $\frac{49\pi}{36}$ rad d) 320° $\frac{16\pi}{9}$ rad e) 96° $\frac{8\pi}{15}$ rad f) 216°30′ $\frac{433\pi}{360}$ rad

20. Em cada item, expressem a medida em graus.

a) $\frac{\pi}{5}$ rad 36° b) $\frac{4\pi}{9}$ rad 80° c) $\frac{89\pi}{100}$ rad 160°12′

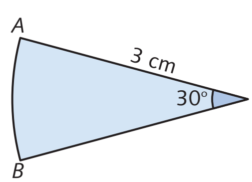
- Agora escrevam mais dois itens diferentes dos apresentados e peçam a outro grupo que expressem as medidas em graus. Depois, verifiquem se as resoluções estão corretas.

Resposta pessoal. Possível resposta: $\frac{35\pi}{8}$ rad e $\frac{7\pi}{3}$ rad.

21. Determine, em centímetros, o comprimento de cada arco indicado nas figuras.

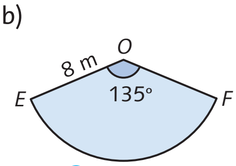
As imagens não estão representadas em proporção.

a)



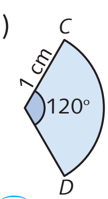
$\overset{\frown}{AB} \simeq 1{,}57$ cm

b)



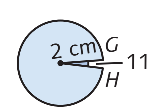
$\overset{\frown}{EF} \simeq 18{,}84$ cm

c)



$\overset{\frown}{CD} \simeq 2{,}09$ cm

d)



$\overset{\frown}{GH} \simeq 12{,}18$ cm

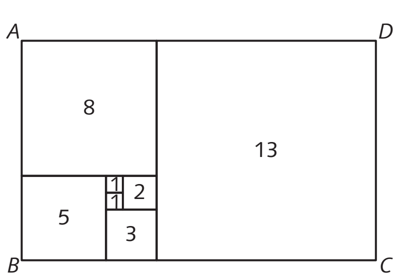
Ilustrações: Sergio L. Filho

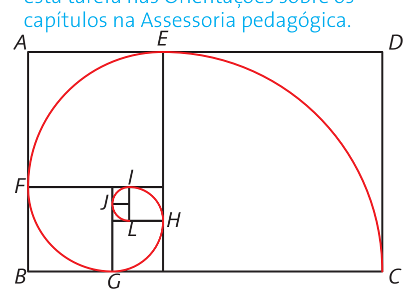
22. O retângulo *ABCD* é áureo, pois a razão entre os comprimentos de seus lados não congruentes é aproximadamente 1,618, ou seja, $\frac{AD}{AB} = \frac{21}{13} \simeq 1{,}618$. Esse retângulo está dividido em quadrados cujos comprimentos dos lados seguem a sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8 e 13.

Com o centro no vértice de cada quadrado, são traçados arcos de circunferência, formando uma espiral, conforme a figura. Veja comentários e sugestões sobre esta tarefa nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.

Chris Howes/Wild Places Photography/Alamy/Fotoarena

O padrão dessa espiral pode ser encontrado em galáxias, marfins de elefante, furacão, onda do oceano, rabo do cavalo-marinho, na concha do náutilo marinho (fotografia) etc.





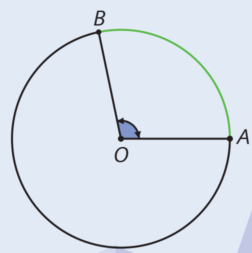
Ilustrações: Sergio L. Filho

Calcule o comprimento dessa espiral de *C* até *L*. aproximadamente 51,81 u.c.

Você produtor

23. Resposta pessoal. Possível resposta: $\overset{\frown}{AB} = 9$ cm; $r = 5$ cm

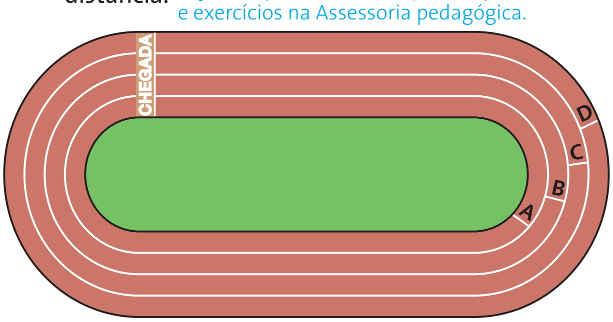
23. De acordo com a imagem, determine uma medida, em centímetros, para o comprimento de $\overset{\frown}{AB}$, e outra para o comprimento do raio. Depois, peça a um colega que calcule, de acordo com as medidas dadas por você, a medida do ângulo central $A\hat{O}B$. Por fim, verifique se ele resolveu corretamente.



Sergio L. Filho

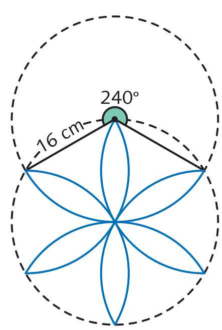
24. Em uma pista como a representada a seguir, quatro atletas vão disputar uma prova de corrida de curta distância. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Carlos Borin



Nesta imagem, **A**, **B**, **C** e **D** representam as posições de largada de cada atleta. Explique por que as posições de largada não estão alinhadas lado a lado.

25. A flor representada ao lado será confeccionada em arame. Quantos metros de arame, no mínimo, serão necessários para confeccioná-la, sabendo que suas pétalas serão do mesmo tamanho?
aproximadamente 2,01 m



Carlos Borin

26. Sejam C_1 uma circunferência de raio 3 cm e C_2 uma circunferência de raio 6 cm. Considerando essas informações, julgue verdadeira ou falsa cada uma das afirmações.

a) Um ângulo central de medida α determina um arco de comprimento ℓ em C_1 e 2ℓ em C_2.

b) O comprimento de C_1 equivale a duas vezes o comprimento de C_2.

c) Um arco ℓ em C_1 determina um ângulo α, enquanto o mesmo comprimento ℓ para um arco em C_2 determina um ângulo 2α.

d) Se aumentarmos em 1 cm o comprimento do raio da circunferência C_1 e da C_2, o comprimento de cada uma irá aumentar em 2π cm.

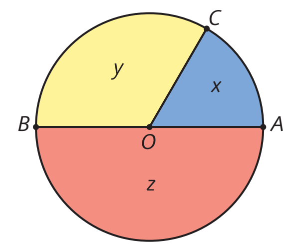
verdadeiras: a, d; falsas: b, c
Peça aos alunos que justifiquem os itens que julgam ser falsos.

Desafio

27. Um relógio está atrasado 3 horas e 12 minutos. Se uma pessoa acertar as horas desse relógio, de quantos graus será a diferença entre as posições inicial e final do ponteiro das horas? E do ponteiro dos minutos? 96°; 72°

28. (UFSCar-SP) O gráfico em setores do círculo de centro O representa a distribuição das idades entre os eleitores de uma cidade. O diâmetro $\overline{AB}$ mede 10 cm e o comprimento do menor arco, $\overset{\frown}{AC}$, mede $\frac{5\pi}{3}$ cm.

Na tarefa **28**, por se tratar de uma questão de vestibular, embora estejamos usando "comprimento do segmento", por exemplo, aparece a palavra "mede" para se referir ao comprimento do diâmetro $\overline{AB}$.



Sergio L. Filho

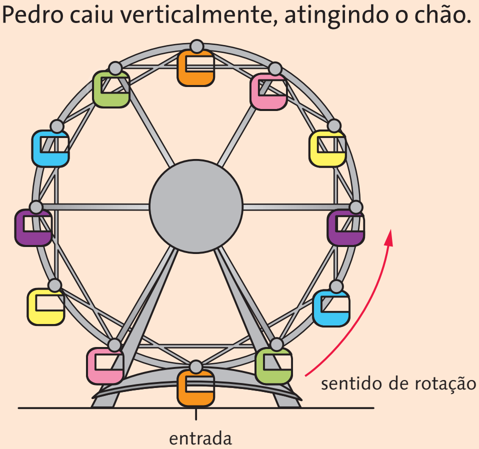
O setor x representa todos os 8 000 eleitores com menos de 18 anos, e o setor y representa os eleitores com idade entre 18 e 30 anos, cuja quantidade é: c

a) 12 000
b) 14 800
c) 16 000
d) 18 000
e) 20 800

Em grupo

29. Pedro foi com seu filho a um parque de diversões para brincar na roda-gigante. Após percorrerem um arco de $\frac{32\pi}{3}$ metros, a roda-gigante parou de repente, e o telefone celular de Pedro caiu verticalmente, atingindo o chão.

Carlos Borin



Sabendo que o comprimento do raio de circunferência da roda-gigante é 10 metros e que a distância entre o centro dessa circunferência e o solo é 12 m, o telefone celular caiu de uma altura de, aproximadamente: d

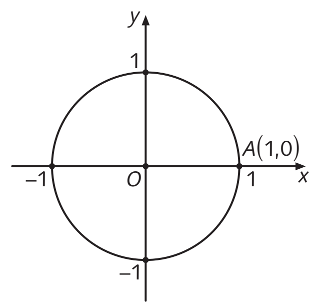
a) 10 m
b) 17 m
c) 20 m
d) 22 m

8 Circunferência trigonométrica

Dando continuidade aos nossos estudos sobre arcos e ângulos de uma circunferência, iremos abordar aqui alguns conceitos envolvendo a circunferência trigonométrica.

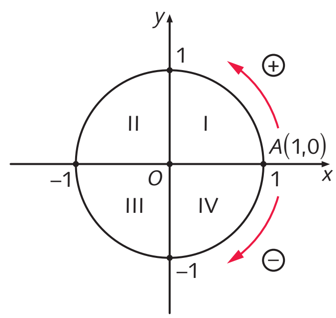
Inicialmente, vamos considerar uma circunferência de raio unitário, ou seja, cujo raio mede 1 unidade de comprimento ($r = 1$), em que o centro O coincide com a origem de um sistema cartesiano ortogonal.

A essa circunferência dá-se o nome de **circunferência trigonométrica**. Nela, o ponto $A(1,0)$ é a origem dos arcos, tendo o sentido **anti-horário** como o positivo e o sentido **horário**, como o negativo.



Observação

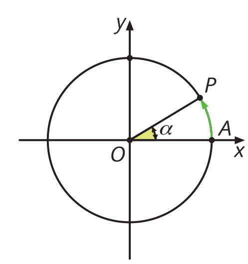
O **sistema cartesiano ortogonal**, também chamado **plano cartesiano**, é formado por dois eixos perpendiculares de mesma origem O. Os eixos dividem o plano em quatro regiões denominadas **quadrantes**. O eixo x é chamado de **eixo das abscissas** e o eixo y de **eixo das ordenadas**.



Observação

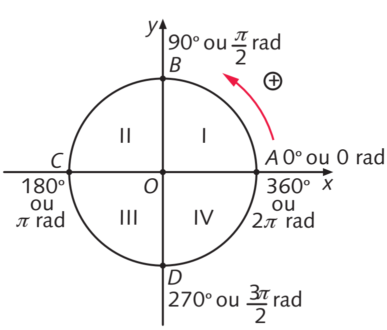
Nessa circunferência trigonométrica, I, II, III e IV indicam os quadrantes, numerados a partir do ponto A no sentido anti-horário.

Arcos trigonométricos



A cada ponto P pertencente à circunferência trigonométrica, podemos associar um arco $(\widehat{AP})$ com medida igual ao ângulo central α, chamado **arco trigonométrico**.

Na imagem a seguir, os pontos A, B, C e D são pontos de interseção entre os eixos e a circunferência trigonométrica.

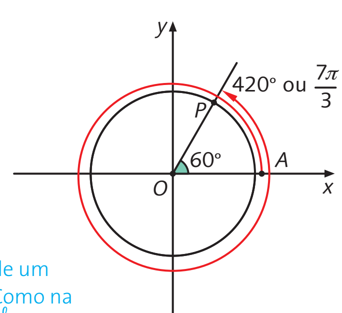


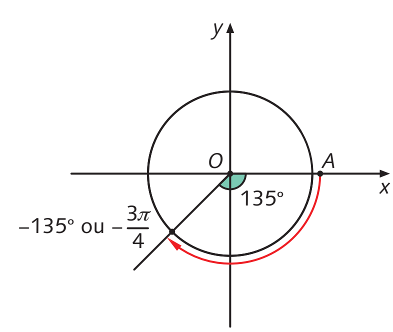
Observação

Note que a cada ponto está associado um arco cuja medida é dada em graus ou radianos. Como na circunferência trigonométrica $r = 1$, a medida de um arco em radianos e o seu comprimento são numericamente iguais. Desse modo, daqui por diante, denotaremos um arco, por exemplo, de $\frac{3\pi}{2}$ rad por $\frac{3\pi}{2}$.

Cabe destacar que em uma circunferência trigonométrica existem arcos maiores do que uma volta, bem como existem arcos negativos. Veja os exemplos ao lado.

Se achar necessário, complemente o terceiro quadro Observação desta página com a seguinte explicação: Como vimos na página **68**, a medida de α em radianos de um arco é dada por $\alpha = \frac{\ell}{r}$, sendo ℓ o comprimento do arco. Como na circunferência trigonométrica $r = 1$ u.c., temos que $\alpha = \frac{\ell}{r} \Rightarrow \alpha = \ell$, isto é, a medida de um arco em radiano e o seu comprimento são numericamente iguais.



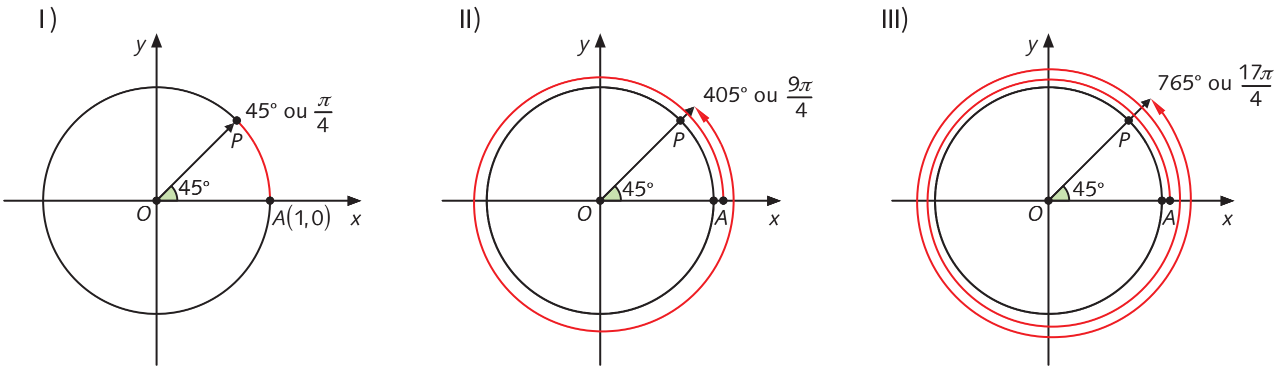


Ilustrações: Sergio L. Filho

Arcos côngruos

Em uma circunferência trigonométrica, podemos obter infinitos arcos com origem em *A* e extremidade no ponto *P*. Para verificar esse fato, deslocamos o ponto *P* no sentido anti-horário ou no sentido horário, dando voltas completas na circunferência.

Nas imagens abaixo vamos considerar uma circunferência com três arcos diferentes que coincidem na mesma extremidade *P*.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Analisando cada uma das figuras, temos que 45° ou $\frac{\pi}{4}$, 405° ou $\frac{9\pi}{4}$, 765° ou $\frac{17\pi}{4}$ têm a mesma extremidade *P*.

Nesse caso, o ponto *P* poderia girar *k* voltas completas, e a extremidade de $\overset{\frown}{AP}$ seria escrita da seguinte maneira:

$$45° + k \cdot 360° \text{ ou } \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \text{ sendo } k \in \mathbb{Z}$$

Como os arcos de 45°, 405°, 765° ou $\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}$ têm a mesma extremidade e diferem apenas na quantidade de voltas, dizemos que são arcos côngruos.

De modo geral:

Dizemos que dois arcos são **côngruos** quando os pontos que representam as suas extremidades coincidem.

A expressão geral dos arcos côngruos a um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, com $0° \leqslant \alpha < 360°$ ou $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, e um número k ($k \in \mathbb{Z}$), pode ser escrita como:

$$\alpha + k \cdot 360° \text{ ou } \alpha + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

O arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α é chamado **1ª determinação positiva** dos côngruos a ele.

Portanto, os arcos côngruos diferem entre si por um múltiplo de 360° ou 2π.

Exemplos

1. O arco de 60° é côngruo ao arco de $60° + 2 \cdot 360° = 780°$, ou $\frac{\pi}{3}$ é côngruo a $\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi = \frac{13\pi}{3}$.

2. O arco de $-45°$ é côngruo ao arco de $-45° + 4 \cdot 360° = 1395°$, ou $-\frac{\pi}{4}$ é côngruo a $-\frac{\pi}{4} + 4 \cdot 2\pi = \frac{31\pi}{4}$.

3. O arco de 70° é côngruo ao arco de $70° - 2 \cdot 360° = -650°$, ou $\frac{7\pi}{18}$ é côngruo a $\frac{7\pi}{18} - 2 \cdot 2\pi = -\frac{65\pi}{18}$.

Após abordar o conteúdo proposto nesta página (arcos côngruos), verifique a possibilidade de propor aos alunos que calculem a medida de $\overset{\frown}{AP}$ considerando que *P* tenha se deslocado 3 voltas completas no sentido anti-horário. Depois, considerando as estratégias e resoluções propostas e desenvolvidas por eles, escreva na lousa a resolução adequada, a fim de que eles possam verificar a resposta obtida.

Problemas e exercícios resolvidos

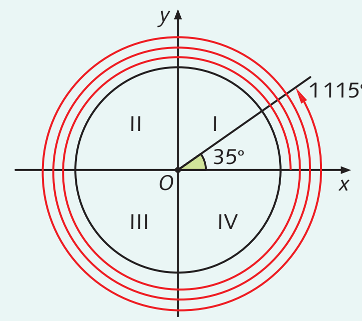
R9. Para cada um dos arcos, calcule a 1ª determinação positiva e a quantidade de voltas completas em relação à circunferência trigonométrica. Depois, escreva a expressão geral dos arcos côngruos.

a) 1 115°

b) $-\dfrac{10\pi}{3}$

Resolução

a) Como a medida absoluta do arco é maior do que 360°, dividimos 1 115° por 360°. O resto dessa divisão corresponde à 1ª determinação positiva α, e o quociente, à quantidade de voltas k.

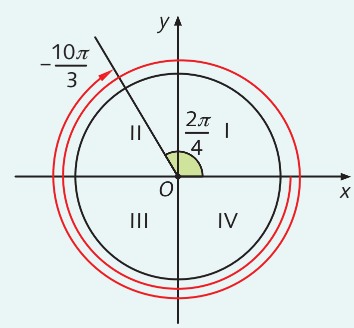


$$\begin{array}{r|l} 1\,115 & 360 \\ \hline 35 & 3 \end{array} \qquad 1\,115° = \underbrace{35°}_{\alpha} + \underbrace{3}_{k} \cdot 360°$$

Portanto, o arco corresponde a 3 voltas completas no sentido anti-horário e a 1ª determinação positiva é 35°.

A expressão geral para arcos côngruos medidos em graus pode ser escrita como $\alpha + k \cdot 360°$. Nesse caso, como $\alpha = 35°$, a expressão geral é $35° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

b) A fração $-\dfrac{6\pi}{3}$ é equivalente a -2π e possui o mesmo denominador de $-\dfrac{10\pi}{3}$, então:



Ilustrações: Sergio L. Filho

$$-\frac{10\pi}{3} = \underbrace{-\frac{6\pi}{3}}_{-2\pi} - \frac{4\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3} - \underbrace{1}_{k} \cdot 2\pi$$

A 1ª determinação positiva é dada por:

$$-\frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{2\pi}{3}$$

Portanto, o arco tem 1 volta completa em sentido horário e a 1ª determinação positiva é $\dfrac{2\pi}{3}$.

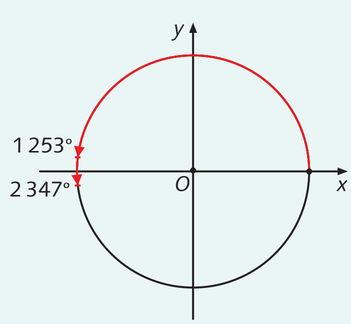
A expressão geral para arcos côngruos medidos em radianos pode ser escrita como $\alpha + k \cdot 2\pi$. Nesse caso, como $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$, a expressão geral é $\dfrac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

R10. Calcule, em graus, a medida do ângulo central determinado pelas extremidades dos arcos, cujos ângulos centrais correspondem a 1 253° e a 2 347°.

Resolução

Calculando a diferença entre a 1ª determinação positiva de ambos os arcos, obtemos a medida procurada.

Sergio L. Filho



$$\begin{array}{r|l} 1\,253 & 360 \\ \hline 173 & 3 \end{array} \qquad 1\,253° = 173° + 3 \cdot 360°$$

$$\begin{array}{r|l} 2\,347 & 360 \\ \hline 187 & 6 \end{array} \qquad 2\,347° = 187° + 6 \cdot 360°$$

$$187° - 173° = 14°$$

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

30\. Veja as respostas na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

30. Em uma circunferência trigonométrica, represente a extremidade de cada um dos arcos a seguir.

a) $45°$ c) $\frac{3\pi}{4}$ e) $\frac{2\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{5}$ d) $330°$ f) $-\frac{7\pi}{6}$

31. Ordene os arcos indicados nas fichas em ordem crescente pela primeira determinação positiva.
$762°, \frac{8\pi}{3}, \frac{11\pi}{4}, 1\,240°, 3\,110°, \frac{22\pi}{3}, \frac{17\pi}{5}$

$762°$ $\frac{8\pi}{3}$ $\frac{11\pi}{4}$ $1\,240°$

$3\,110°$ $\frac{22\pi}{3}$ $\frac{17\pi}{5}$

32. Determine o quadrante em que está localizada a extremidade de cada arco.

a) $\frac{2\pi}{5}$ rad 1º quadrante d) $2\,625°$ 2º quadrante

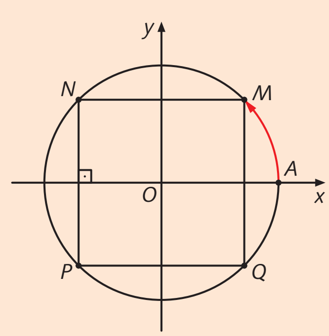
b) $-\frac{10\pi}{3}$ rad 2º quadrante e) $\frac{29\pi}{3}$ rad 4º quadrante

c) $\frac{19\pi}{3}$ rad 1º quadrante f) $1\,330°$ 3º quadrante

Em grupo

Veja comentários e sugestões sobre esta tarefa nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.

33. (Ufla-MG) A figura *MNPQ* é um retângulo inscrito em um círculo. Se a medida de $\overset{\frown}{AM}$ é $\frac{\pi}{4}$ rad, as medidas de $\overset{\frown}{AN}$ e $\overset{\frown}{AP}$, em radianos, respectivamente, são: a



Sergio L. Filho

a) $\frac{3}{4}\pi$ e $\frac{5}{4}\pi$ d) $\frac{1}{2}\pi$ e $\frac{5}{4}\pi$

b) π e $\frac{3}{2}\pi$ e) $\frac{3}{4}\pi$ e $\frac{5}{8}\pi$

c) $\frac{3}{4}\pi$ e 2π

34. Para rosquear completamente certo parafuso é necessário que ele gire $4\,365°$. Caso seja utilizada uma chave para a realização dessa tarefa, qual será a diferença, em graus, entre a posição inicial da chave e sua posição ao terminar de rosquear o parafuso? 45°

35. Qual a distância percorrida em centímetros por um pneu cujo comprimento do diâmetro é 90 cm, quando o eixo no qual está fixado realiza um giro de $6\,540°$? aproximadamente 5 133,9 cm

36. (UFC-CE) Dois arcos trigonométricos são côngruos se, e somente se, tiverem a mesma extremidade. Qual das medidas abaixo é um arco trigonométrico côngruo ao arco trigonométrico de $\frac{\pi}{7}$ rad? d

a) $\frac{22\pi}{7}$ rad c) $\frac{8\pi}{7}$ rad e) $\frac{13\pi}{7}$ rad

b) $\frac{6\pi}{7}$ rad d) $\frac{29\pi}{7}$ rad

37. Escreva a expressão geral dos arcos côngruos à 1ª determinação positiva de cada um dos arcos.

Veja as respostas na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

a) $626°$

b) $\frac{14\pi}{3}$ rad

c) $\frac{5\pi}{3}$ rad

d) $\frac{15\pi}{4}$ rad

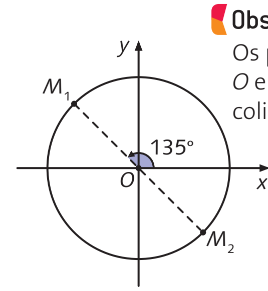
38. (UFRGS-RS) Qual é a expressão geral, em radianos, dos arcos com extremidades nos pontos indicados? $(k \in \mathbb{Z})$ b

a) $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

b) $\frac{3\pi}{4} + k\pi$

c) $\frac{3\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

d) $\frac{\pi}{4} + k\pi$



Observação

Os pontos M_1, O e M_2 são colineares.

Sergio L. Filho

Desafio

39. Durante certo período de tempo, um carro de corrida percorreu $\frac{45}{6}$ de volta em uma pista circular de raio *r*, tendo que parar por problemas mecânicos.

a) Calcule o ângulo do arco que representa todo o trajeto percorrido pelo carro. 2 700°

b) Determine, em graus, a medida do menor ângulo cujo arco possui extremidades no ponto de partida e no ponto em que o carro parou. 180°

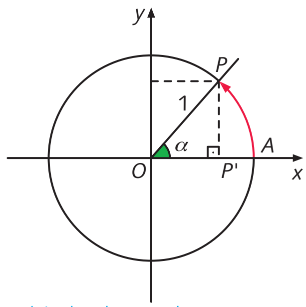
c) Quantas voltas a mais o carro deve percorrer para que o arco descrito em todo o percurso seja igual a $3\,780°$? 3 voltas

9 Ampliando o conceito de seno, cosseno e tangente

Anteriormente, estudamos as razões seno, cosseno e tangente relacionadas às medidas dos ângulos dos triângulos. Agora, iremos estudar essas razões na circunferência trigonométrica.

Seno e cosseno de um arco

Na circunferência trigonométrica estão representados um ângulo central com medida α e um ponto correspondente P sobre a circunferência.



- $\overset{\frown}{AP}$: arco cujo ângulo central tem medida α
- $\overline{PP'}$: perpendicular ao eixo x
- $\overline{OP}$: raio da circunferência $(r = 1)$
- $OP'P$: triângulo retângulo

Se necessário, lembre os alunos que o raio da circunferência trigonométrica é igual a 1.

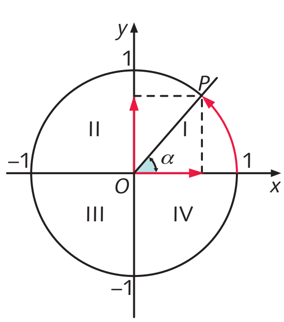
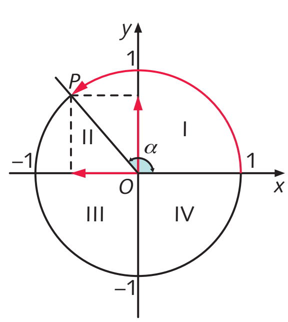
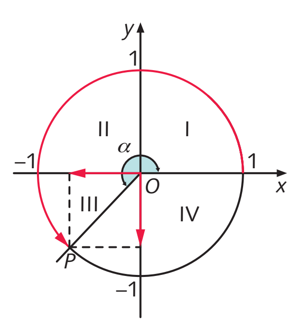
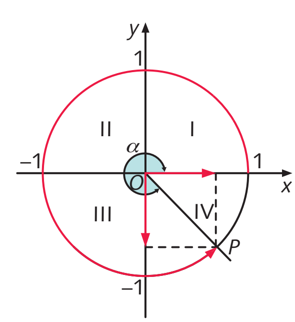
Utilizando as razões seno e cosseno no triângulo $OP'P$, temos:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{PP'}{OP} = \frac{PP'}{1} = PP' \qquad \cos \alpha = \frac{OP'}{OP} = \frac{OP'}{1} = OP'$$

Portanto, sen α corresponde à ordenada do ponto P (corresponde à medida da distância da projeção de P no eixo y à origem) e cos α corresponde à abscissa do ponto P (corresponde à medida da distância da projeção de P no eixo x à origem). Dizemos que o eixo y é o **eixo dos senos** e x, o **eixo dos cossenos**.

Variação do sinal de seno e de cosseno

Na circunferência trigonométrica, de acordo com o quadrante em que se encontra a extremidade P do arco, o valor do seno e do cosseno pode ser positivo ou negativo.

1º quadrante	2º quadrante	3º quadrante	4º quadrante
			
sen $\alpha > 0$ cos $\alpha > 0$	sen $\alpha > 0$ cos $\alpha < 0$	sen $\alpha < 0$ cos $\alpha < 0$	sen $\alpha < 0$ cos $\alpha > 0$

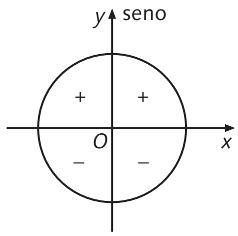
Ilustrações: Sergio L. Filho

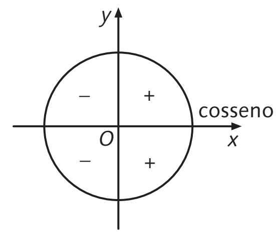
Observação

Nos 1º e 2º quadrantes, as ordenadas de P estão acima de O; assim, nos dois casos, sen $\alpha > 0$. Já nos 3º e 4º quadrantes, as ordenadas de P estão abaixo de O; assim, nos dois casos, sen $\alpha < 0$.

Nos 1º e 4º quadrantes, as abscissas de P estão à direita de O; assim nos dois casos, cos $\alpha > 0$. Já nos 2º e 3º quadrantes, as abscissas de P estão à esquerda de O; assim, nos dois casos, cos $\alpha < 0$.

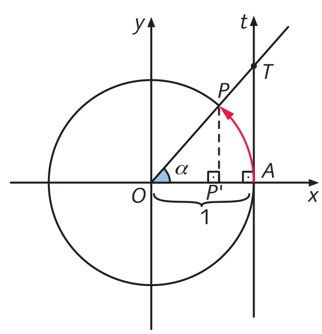
De modo geral, de acordo com o quadrante, temos para o seno e o cosseno os sinais:





Tangente de um arco

Vamos considerar, na circunferência trigonométrica abaixo, uma reta t, com a mesma orientação do eixo y, tangente à circunferência no ponto A, um arco $\stackrel{\frown}{AP}$ de medida α, com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, sendo k um número inteiro, e o ponto T obtido na interseção da reta tangente t e $\overleftrightarrow{OP}$.



A Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), pela Norma ABNT NBR ISO 80000-2, válida desde 17 de agosto de 2012, recomenda o uso da notação tan x. Porém, nesta coleção, manteremos tg x por ser a notação mais convencional em sala de aula.

Utilizando a razão tangente no triângulo retângulo OTA, temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$$

Portanto, a tg α corresponde ao comprimento do segmento AT sobre a reta t.

Podemos verificar a igualdade acima de outra maneira. Para isso, vamos indicar na figura a abscissa P' do ponto P no eixo x.

Na imagem acima, note que $\triangle OP'P \sim \triangle OAT$. Dessa maneira:

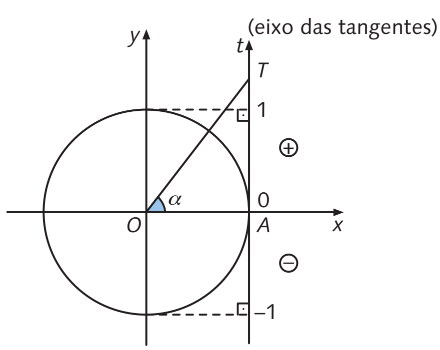
$$\frac{OP'}{OA} = \frac{P'P}{AT} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{AT} \Rightarrow AT = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}, \text{ com } \cos\alpha \neq 0, \text{ isto é, } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Como $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha$, então $AT = \text{tg}\,\alpha$.

A fim de ampliar o conceito de tangente de um arco trigonométrico, vamos considerar a reta t sendo o **eixo das tangentes**.

Desse modo, o valor da tangente de α corresponde à ordenada do ponto T sobre o eixo das tangentes, que pode ser positivo, negativo ou nulo.

Nesse momento, pode-se propor aos alunos que verifiquem a igualdade ao lado com base em semelhança de triângulos, antes de abordá-la no livro; isso pode ser proposto, por exemplo, em duplas. Depois, considerando as estratégias e resoluções propostas e desenvolvidas por eles, apresente as explicações encontradas no livro.



Ilustrações: Sergio L. Filho

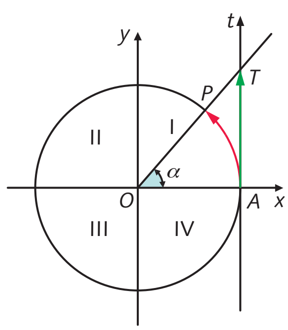
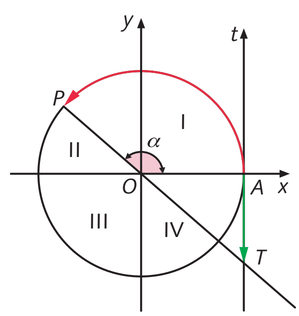
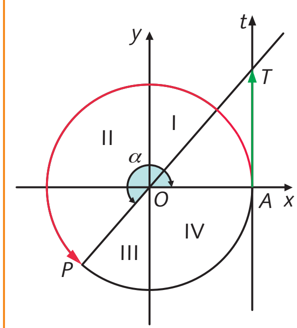
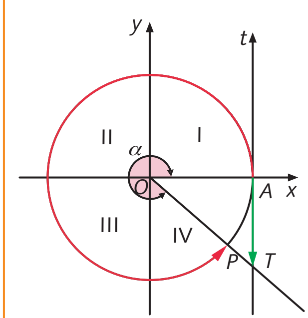
Observação

Quando um arco $\stackrel{\frown}{AP}$ de medida α tem extremidade sobre o eixo y, temos que $\overleftrightarrow{OP}$ é paralela ao eixo das tangentes.

Assim, para $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, tg α não está definida, pois $\cos\alpha = 0$. Portanto, $\text{tg}\,\frac{\pi}{2}$ e $\text{tg}\,\frac{3\pi}{2}$, por exemplo, não existem, pois $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ e $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$.

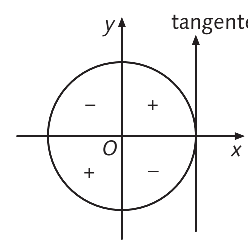
Variação do sinal da tangente

Na circunferência trigonométrica, de acordo com a posição da extremidade *P* do arco, o valor da tangente pode ser positivo ou negativo.

<table>
<tr><th>1º quadrante</th><th>2º quadrante</th><th>3º quadrante</th><th>4º quadrante</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td>tg $\alpha > 0$</td><td>tg $\alpha < 0$</td><td>tg $\alpha > 0$</td><td>tg $\alpha < 0$</td></tr>
</table>

Observação

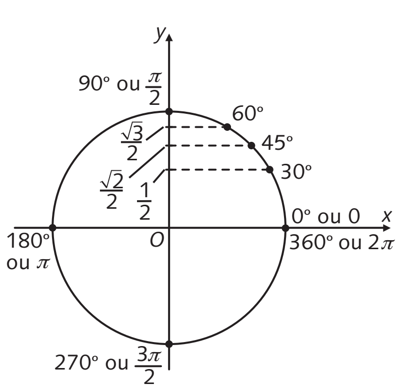
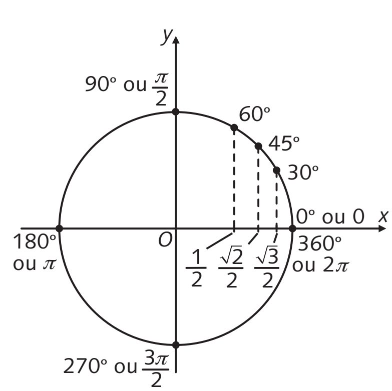
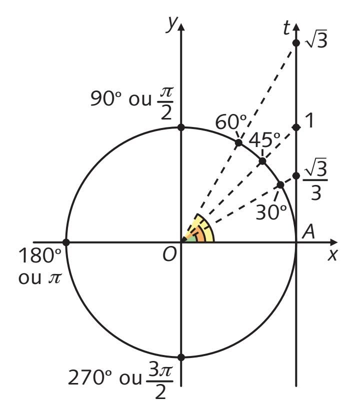
Nos 1º e 3º quadrantes, o prolongamento de $\overline{OP}$ corta o eixo das tangentes em um ponto *T* acima de *A*; assim, nos dois casos, tg $\alpha > 0$. Já nos 2º e 4º quadrantes, o prolongamento de $\overline{OP}$ corta o eixo das tangentes em um ponto *T* abaixo de *A*; assim nos dois casos, tg $\alpha < 0$.



De modo geral, de acordo com o quadrante, temos para a tangente os sinais representados ao lado.

Valores notáveis do seno, do cosseno e da tangente

Veja a seguir alguns ângulos indicados na circunferência trigonométrica e os respectivos valores de seno, cosseno e tangente desses ângulos.

<table>
<tr><th>Seno</th><th>Cosseno</th><th>Tangente</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Ilustrações: Sergio L. Filho

Observação

É comum encontrarmos situações envolvendo ângulos de 30°, 45° e 60°. Esses ângulos são chamados **ângulos notáveis**.

Ao apresentar os valores de alguns ângulos na circunferência trigonométrica, faça, em voz alta, algumas perguntas aos alunos, a fim de verificar se eles compreenderam e interpretaram as imagens corretamente, por exemplo: quais são o seno, o cosseno e a tangente de 45°; qual é o valor da tangente de 30°, entre outras.

Agora, veja os valores notáveis do seno, do cosseno e da tangente organizados em um quadro.

Observação
O símbolo $\nexists$ lê-se: não existe.

α	0 ou 0°	$\frac{\pi}{6}$ ou 30°	$\frac{\pi}{4}$ ou 45°	$\frac{\pi}{3}$ ou 60°	$\frac{\pi}{2}$ ou 90°	π ou 180°	$\frac{3\pi}{2}$ ou 270°	2π ou 360°
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0

Observação
Uma das justificativas para a não existência de $\text{tg}\,\frac{\pi}{2}$ e $\text{tg}\,\frac{3\pi}{2}$ pode ser verificada por meio da relação $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$. Como $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ e $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, teríamos:

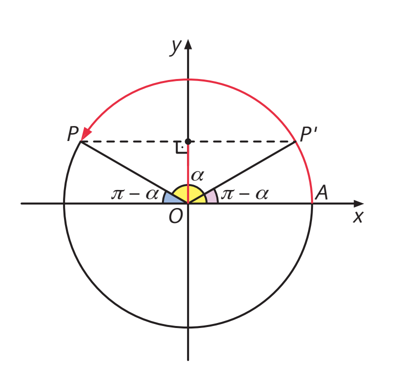
- $\text{tg}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\text{sen}\,\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}$: $\nexists$
- $\text{tg}\,\frac{3\pi}{2} = \frac{\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}}{\cos\frac{3\pi}{2}} = \frac{-1}{0}$: $\nexists$

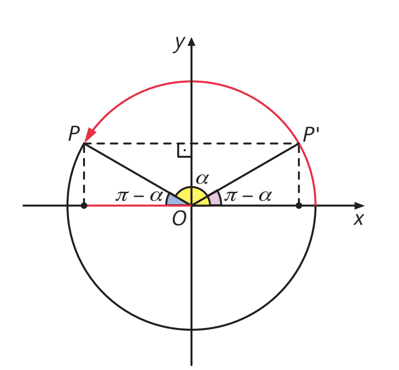
Redução ao 1º quadrante

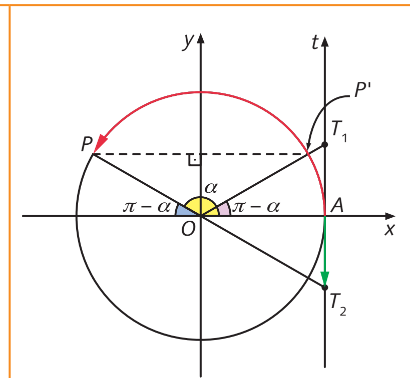
Neste tópico, iremos relacionar o seno, o cosseno e a tangente de um arco do 1º quadrante ao seno, ao cosseno e à tangente de arcos dos 2º, 3º e 4º quadrantes.

Redução do 2º para o 1º quadrante

Representamos um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, com $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, na circunferência trigonométrica. Considerando a simetria em relação ao eixo y, obtemos o ponto P', correspondente de P, no 1º quadrante.





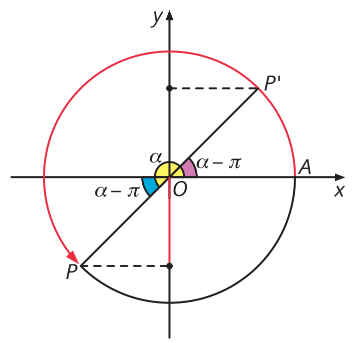


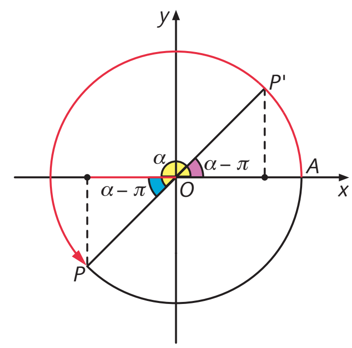
Ilustrações: Sergio L. Filho

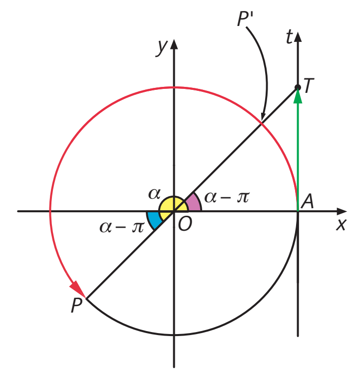
sen $\alpha =$ **sen** $(\pi - \alpha)$	**cos** $\alpha = -$**cos** $(\pi - \alpha)$	**tg** $\alpha = -$**tg** $(\pi - \alpha)$
Os pontos P e P' têm a mesma ordenada e sen $\alpha > 0$, pois o sinal do seno no 2º quadrante é positivo.	Os pontos P e P' têm abscissas opostas e cos $\alpha < 0$, pois o sinal do cosseno no 2º quadrante é negativo.	Os pontos T_1 e T_2 têm ordenadas opostas e tg $\alpha < 0$, pois o sinal da tangente no 2º quadrante é negativo.

Redução do 3º para o 1º quadrante

Representamos em uma circunferência trigonométrica um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, com $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Considerando a simetria em relação ao ponto O, obtemos o ponto P', correspondente de P, no 1º quadrante.



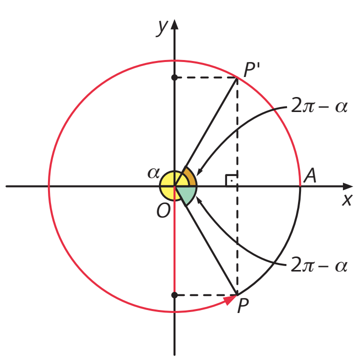


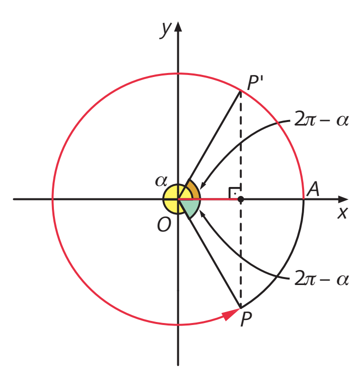


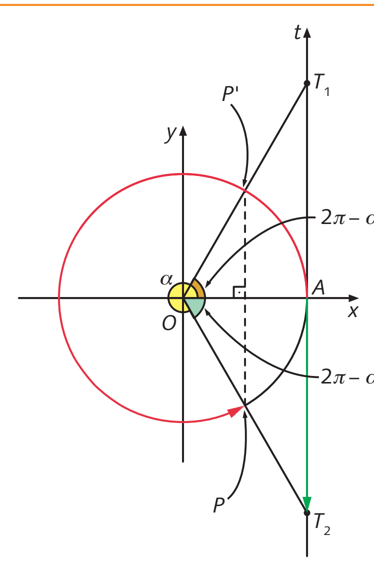
$\text{sen}\,\alpha = -\text{sen}\,(\alpha - \pi)$	$\cos\alpha = -\cos\,(\alpha - \pi)$	$\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,(\alpha - \pi)$
Os pontos P e P' têm ordenadas opostas e $\text{sen}\,\alpha < 0$, pois o sinal do seno no 3º quadrante é negativo.	Os pontos P e P' têm abscissas opostas e $\cos\alpha < 0$, pois o sinal do cosseno no 3º quadrante é negativo.	O ponto T tem ordenada positiva e $\text{tg}\,\alpha > 0$, pois o sinal da tangente no 3º quadrante é positivo.

Redução do 4º para o 1º quadrante

Representamos em uma circunferência trigonométrica um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, com $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Considerando a simetria em relação ao eixo x, obtemos o ponto P', correspondente de P, no 1º quadrante.







$\text{sen}\,\alpha = -\text{sen}\,(2\pi - \alpha)$	$\cos\alpha = \cos\,(2\pi - \alpha)$	$\text{tg}\,\alpha = -\text{tg}\,(2\pi - \alpha)$
Os pontos P e P' têm ordenadas opostas e $\text{sen}\,\alpha < 0$, pois o sinal do seno no 4º quadrante é negativo.	Os pontos P e P' têm a mesma abscissa e $\cos\alpha > 0$, pois o sinal do cosseno no 4º quadrante é positivo.	Os pontos T_1 e T_2 têm ordenadas opostas e $\text{tg}\,\alpha < 0$, pois o sinal da tangente no 4º quadrante é negativo.

Ilustrações: Sergio L. Filho

Problemas e exercícios resolvidos

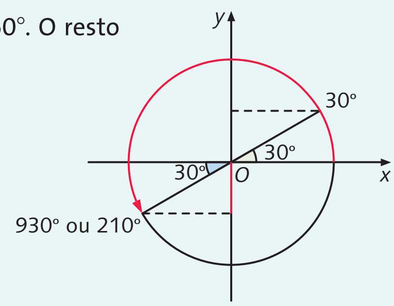
R11. Calcule:

a) sen 930°   b) $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$ c) tg 1 215°   d) $\text{tg}\,\dfrac{16\pi}{3}$

Resolução

a) sen 930°

Como a medida do arco é maior do que 360°, dividimos 930° por 360°. O resto dessa divisão indicará a 1ª determinação positiva desse arco.



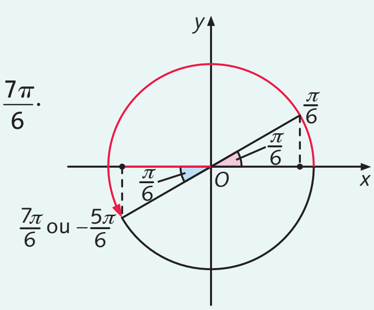
$$\begin{array}{r|l} 930 & 360 \\ \hline \underbrace{210}_{\text{resto da divisão}} & 2 \end{array} \qquad 930° = \underbrace{210°}_{\text{arco do 3º quadrante}} + 2 \cdot 360°$$

Como o arco de 210° tem extremidade no 3º quadrante, temos:

$$\text{sen } 930° = \text{sen } 210° = -\text{sen }(210° - 180°) = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}$$

Portanto, sen $930° = -\dfrac{1}{2}$.

b) $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$



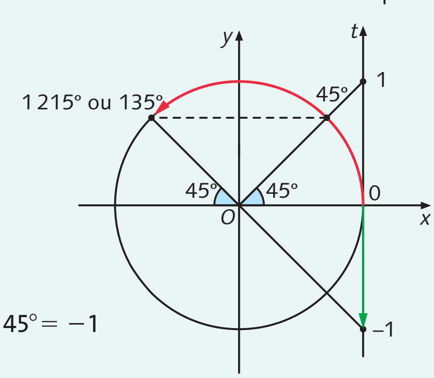
Inicialmente, obtemos a medida positiva do arco $-\dfrac{5\pi}{6}$, isto é: $2\pi - \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6}$.

Como o arco de $\dfrac{7\pi}{6}$ tem extremidade no 3º quadrante:

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\left(\frac{7\pi}{6} - \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c) tg 1 215°



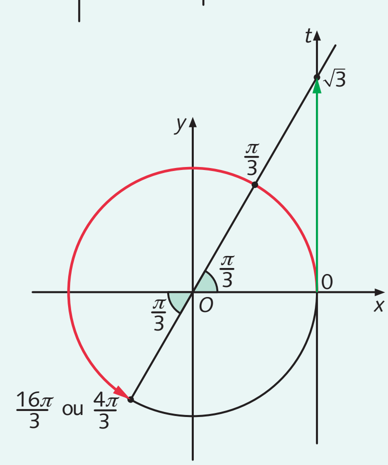
$$\begin{array}{r|l} 1\,215 & 360 \\ \hline \underbrace{135}_{\text{resto da divisão}} & 3 \end{array} \qquad 1\,215° = \underbrace{135°}_{\text{arco do 2º quadrante}} + 3 \cdot 360°$$

Como o arco de 135° tem extremidade no 2º quadrante:

$$\text{tg } 1\,215° = \text{tg } 135° = -\text{tg }(180° - 135°) = -\text{tg } 45° = -1$$

Portanto, tg 1 215° = −1.

d) $\text{tg}\,\dfrac{16\pi}{3}$



Inicialmente, obtendo a 1ª determinação positiva (α) de $\dfrac{16\pi}{3}$:

$$\frac{16\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2 \cdot \underbrace{\frac{6\pi}{3}}_{2\pi} = \underbrace{\frac{4\pi}{3}}_{\alpha} + 2 \cdot 2\pi$$

Como o arco $\dfrac{4\pi}{3}$ tem extremidade no 3º quadrante:

$$\text{tg}\,\frac{16\pi}{3} = \text{tg}\,\frac{4\pi}{3} = \text{tg}\left(\frac{4\pi}{3} - \pi\right) = \text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Portanto, $\text{tg}\,\dfrac{16\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Ilustrações: Sergio L. Filho

40. Determine o sinal de:

a) sen 390° positivo

b) $\text{sen}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ positivo

c) $\cos\frac{9\pi}{12}$ negativo

d) $\cos(-150°)$ negativo

e) $\text{tg}(-600°)$ negativo

f) $\text{tg}\left(-\frac{8\pi}{3}\right)$ positivo

41. Escreva os quadrantes em que se encontra a extremidade do arco de ângulo central α, tal que:

a) $\text{sen}\,\alpha = \frac{2}{3}$ 1º ou 2º quadrante

b) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ 2º ou 3º quadrante

c) $\text{tg}\,\alpha = 12$ 1º ou 3º quadrante

d) $\text{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3º ou 4º quadrante

42. Calcule os valores de seno, cosseno e tangente, indicados nos itens fazendo a redução ao 1º quadrante. (Dados: sen 72° = 0,9511; cos 41° = 0,7547, tg 15° = 0,2679.)

a) $\text{sen} = \frac{7\pi}{5}$ $-0{,}9511$

b) cos 581° $-0{,}7547$

c) $\text{tg}\left(-\frac{35\pi}{12}\right)$ 0,2679

Você produtor

43. Calcule o valor de:

a) sen 120° $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) cos 315° $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) tg 120° $-\sqrt{3}$

d) $\text{sen}\frac{7\pi}{6}$ $-\frac{1}{2}$

e) $\cos\frac{11\pi}{6}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\text{tg}\frac{7\pi}{6}$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

- Agora, determine medidas distintas de três arcos e peça a um colega que calcule os valores de seno, cosseno e tangente desses arcos. Por fim, verifique se as resoluções estão corretas.

Resposta pessoal. Possível resposta: 235°, $\frac{14\pi}{6}$ e $-\frac{8\pi}{3}$.

44. Determine o valor de x.

a) $\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, para $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ $x = \frac{2\pi}{3}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, para $x \in [0, 2\pi]$ $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{11\pi}{6}$

c) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, para $x \in [0, 2\pi]$ $x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

d) $\text{tg}\,x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, para $x \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ $x = \frac{11\pi}{6}$

e) $\text{tg}\,x = \sqrt{3}$, para $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

45. Qual é o seno do menor ângulo entre os ponteiros de um relógio que marca 10 h 10 min? aproximadamente 0,9063

Peça aos alunos que consultem a Tabela trigonométrica da página 33.

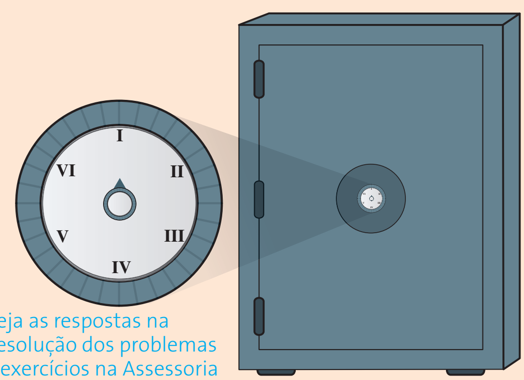
Em grupo

Veja comentários e sugestões nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.

46. Para abrir determinado cofre é preciso girar um disco numa ordem a partir da posição I (figura 1). Veja no quadro abaixo a sequência de movimentos que devem ser realizados no botão de combinação para abrir o cofre.

Movimento	Sentido do giro
1º	anti-horário até VI
2º	horário até II
3º	anti-horário até V
4º	horário até III
5º	anti-horário até IV

Observação
O ângulo obtido entre duas posições consecutivas é sempre o mesmo.



Carlos Borin

Veja as respostas na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

a) Em cada movimento, qual é, em graus, o ângulo do giro a ser realizado?

b) Determinem o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos obtidos no item **a**.

c) Qual a diferença, em graus, do botão de combinação em relação à posição final e a inicial até o:

- 3º movimento?
- 4º movimento?
- 5º movimento?

47. Resolva as expressões:

a) $\text{tg}\,510° + \frac{\text{sen}\,405° \cdot \cos 780°}{3 \cdot \text{tg}\,585°} + \text{tg}\,750°$ $\frac{\sqrt{2}}{12}$

b) $\text{sen}\frac{17\pi}{6} + \cos\frac{11\pi}{3} + \cos\frac{25\pi}{6} \cdot \text{sen}\frac{10\pi}{3} + \text{tg}\frac{13\pi}{3} \cdot \cos\frac{35\pi}{6} + \frac{\text{tg}\frac{13\pi}{4}}{4}$ 2

10 Função seno e função cosseno

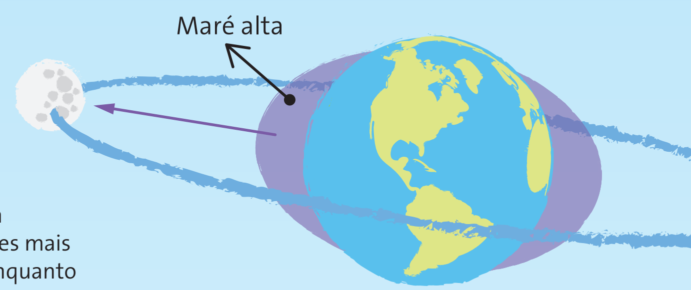
Podemos utilizar as funções trigonométricas para descrever várias situações do dia a dia, como em deslocamento de um pêndulo, na tensão de um circuito elétrico e na variação da duração do dia em certa localidade.

Neste tópico, estudaremos algumas particularidades sobre esses fenômenos periódicos, como seus gráficos, exemplos, aplicações e definições.

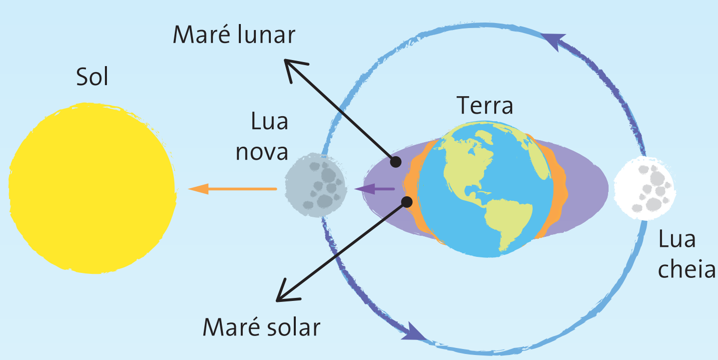
Chamamos de periódicos os fenômenos que se repetem sempre após o mesmo intervalo regular de tempo. Muitos deles podem ser observados na natureza, como o movimento das marés, o movimento do Sol e da Lua e também da órbita dos planetas.

As imagens não estão em proporção e as cores utilizadas não correspondem às reais.

Em média, as marés oscilam em um período de cerca de 6 h 12 min. Como a água sobe e desce duas vezes, o ciclo das marés completa-se, aproximadamente, a cada 24 h 50 min. Enquanto a Terra gira no seu movimento diário, suas regiões sofrem elevações de intensidades significativamente diferentes entre os pontos mais próximos e mais afastados da Lua.
As massas de água que estão mais próximas da Lua sofrem uma elevação de intensidade superior às massas de água que estão mais afastadas da Lua. No lado oposto da Terra as massas de água também se elevam, de forma que uma elevação compensa a outra. Assim, nas regiões mais próximas à Lua, essas elevações das águas correspondem às marés altas. Enquanto as massas de água se elevam em dois lados opostos na Terra, nas outras duas regiões do globo (também diametralmente opostas) elas diminuem, são as correspondentes marés baixas.



A atração do Sol e da Lua se combina



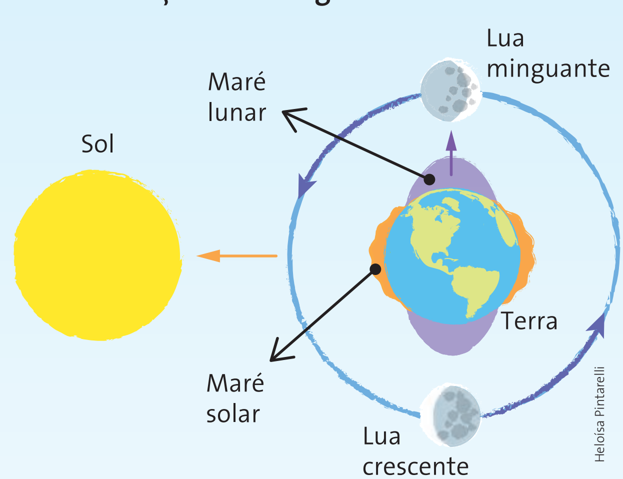
Apesar de o Sol ser bem maior do que a Lua, ele possui um efeito menor sobre as marés, porque sua distância em relação à Terra é muito grande.

A altura das marés alta e baixa, relativa ao nível do mar médio, também varia. Nos períodos de lua nova e de lua cheia, as forças gravitacionais do Sol e da Lua estão alinhadas na mesma direção (os três corpos estão alinhados). Temos então as marés mais altas.

Nos períodos de lua minguante e de lua crescente, quando as forças gravitacionais do Sol e da Lua estão em direções diferentes (os três estão dispostos em ângulo reto, sendo a Terra o vértice), anulando parte delas, temos as marés mais baixas.

A diferença entre a maré baixa e a maré alta é denominada amplitude das marés e se mede por meio de uma régua graduada ou marégrafo.

A atração do Sol age contra a da Lua



Fonte de pesquisa: OTGA. *Análise espectral de marés e suas aplicações*. Disponível em: <https://classroom.oceanteacher.org/mod/book/view.php?id=10338&chapterid=1342>. Acesso em: 19 ago. 2020.

As funções trigonométricas, que estudaremos nesse capítulo, são exemplos de funções periódicas.

Dizemos que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica quando existe um número real não nulo b, tal que $f(x + b) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se isso ocorre, então $f(x + kb) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$.

O período da função é o menor número $b > 0$, tal que $f(x + kb) = f(x)$.

Função seno

Em relação ao exemplo desenvolvido na página anterior, devido à sua periodicidade, certa maré pode ser descrita pela função definida por $A(t) = 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right)$, em que $A(t)$ é a altura da maré em relação ao nível do mar (em metros) e t, o tempo (em horas).

Na lei de formação da função A apresentada, note que a relação seno está presente. Essa é uma **função do tipo trigonométrica**. Antes de estudarmos esse tipo de função, estudaremos a função seno.

Dado um número real x, é possível associar a ele o seno do arco que mede x radianos, isto é, x a sen x. Para o número $x = \frac{\pi}{3}$, por exemplo, associamos o número $\frac{\sqrt{3}}{2}$, pois:

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

O domínio e o contradomínio da função $y = \text{sen}\,x$ são iguais a $\mathbb{R}$. O conjunto imagem, porém, está restrito ao intervalo $[-1, 1]$.

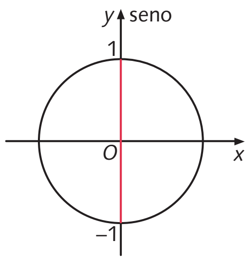
Chamamos de função seno a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada número real x associa o seno de um arco de x radianos, ou seja, $f(x) = \text{sen}\,x$.

Na função seno, temos:

- $D(f) = \mathbb{R}$
- $CD(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

Observação

A imagem da função seno corresponde à projeção da extremidade do arco sobre o **eixo vertical**, denominado **eixo dos senos**.



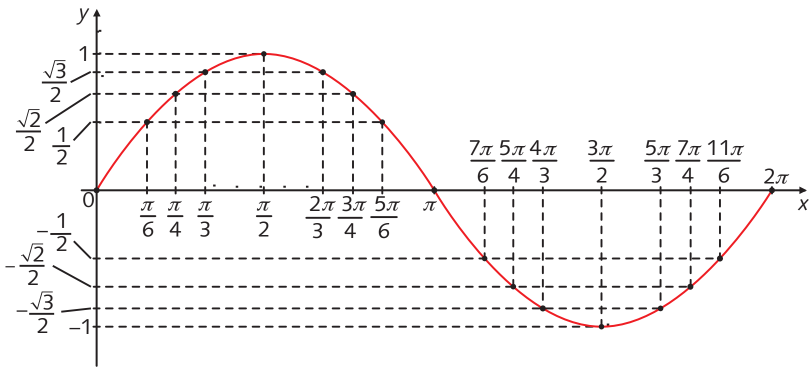
Ilustrações: Sergio L. Filho

Gráfico da função seno

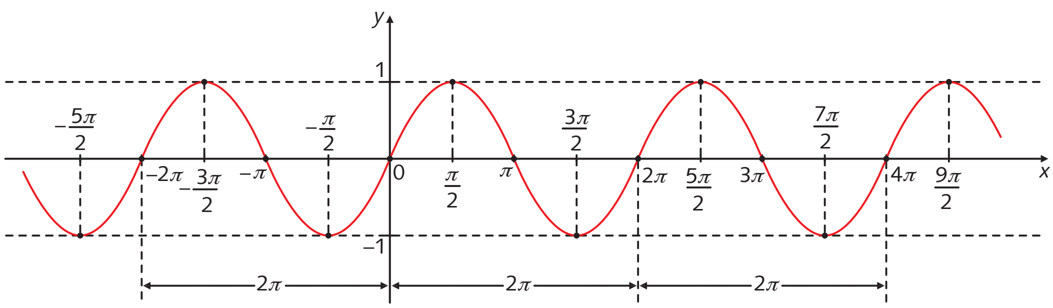
A fim de analisarmos a função seno, vamos construir no plano cartesiano o gráfico da função f, definida por $f(x) = \text{sen}\,x$, com $x \in [0, 2\pi]$. Para isso, utilizamos a ideia de representação de par ordenado de números reais $(x, f(x))$ em um plano cartesiano, com $x \in D(f)$ e $f(x) \in Im(f)$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Como $D(f) = \mathbb{R}$, existem infinitos valores para x e, consequentemente, infinitos pares ordenados. Assim, entre os pontos indicados no quadro, há infinitos pontos. Unindo esses pontos, obtemos o gráfico de f.



Agora vamos representar o gráfico com o domínio da função seno para todos os reais. Assim, neste gráfico estará representada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen}\, x$.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Observação
O gráfico da função f definida por $f(x) = \text{sen}\, x$ é simétrico em relação à origem.

- O gráfico da função seno é a curva chamada **senoide**.
- Os valores de f variam de -1 a 1, ou seja, têm valor mínimo -1 e valor máximo 1 $(-1 \leqslant \text{sen}\, x \leqslant 1)$.
- A função seno é **periódica**. Isso significa que parte do gráfico se repete de acordo com determinado período. No caso da função seno, um ciclo completo se dá de 2π em 2π, o que equivale a dizer que o período dessa função é 2π.

  Para todo $x \in \mathbb{R}$:

  $$\ldots = \text{sen}(x - 2\pi) = \text{sen}\, x = \text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x + 4\pi) = \ldots$$

  Assim, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

  $$\text{sen}\, x = \text{sen}(x + k \cdot 2\pi), \text{ sendo } k \in \mathbb{Z}$$

- Na função seno, dado um valor x, temos $\text{sen}(x) = -\text{sen}(-x)$. Quando isso ocorre, ou seja, $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in D(f)$, dizemos que f é uma **função ímpar**. Portanto, $f(x) = \text{sen}(x)$ é uma função ímpar. Exemplo:

  $$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- De acordo com o intervalo, a função seno varia da seguinte maneira:
  - no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (1º quadrante), a função é crescente e $f(x) > 0$;
  - no intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ (2º quadrante), a função é decrescente e $f(x) > 0$;
  - no intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ (3º quadrante), a função é decrescente e $f(x) < 0$;
  - no intervalo $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ (4º quadrante), a função é crescente e $f(x) < 0$.

Observação
Uma função f é **crescente** se, em determinado intervalo de seu domínio, para todo x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$. Por outro lado, se em determinado intervalo de seu domínio, para todo x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$, a função é **decrescente**. A função será **constante** se, em certo intervalo do domínio, para todo x pertencente a ele, $f(x) = k$, com $k \in \mathbb{R}$.

Função cosseno

Assim como na função seno, existem alguns fenômenos periódicos que podem ser descritos por meio de outras funções trigonométricas. Alguns tipos de movimentos são periódicos, como o Movimento Harmônico Simples (MHS), um movimento periódico oscilatório, em que um sistema vibra com certa amplitude em torno de um ponto de equilíbrio, realizando um mecanismo de "vaivém", sendo caracterizado por um período e por uma frequência.

Determinado MHS é descrito pela função B definida por $B(t) = 4 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$, em que t é o tempo, em horas, e B é a amplitude no tempo t. Nessa função, note que a relação cosseno está presente. Essa função também é do tipo trigonométrica. Porém, antes de estudarmos esse tipo de função, definiremos a função cosseno.

JanVlcek/Shutterstock.com

Nesse tipo de relógio, o pêndulo executa o MHS.

Dado um número real x, é possível associar a ele o cosseno do arco que mede x radianos, isto é, x a $\cos x$.

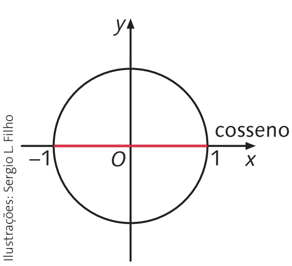
Para o número $x = \frac{\pi}{4}$, por exemplo, associamos o número $\frac{\sqrt{2}}{2}$, pois:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Chamamos de função cosseno a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada número real x associa o cosseno de um arco de x radianos, ou seja, $f(x) = \cos x$.

Na função cosseno, temos:

- $D(f) = \mathbb{R}$
- $CD(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$



Ilustrações: Sergio L. Filho

Observação

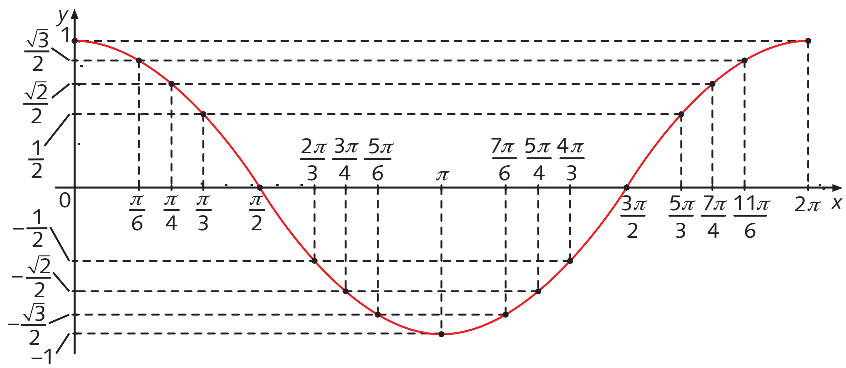
O conjunto imagem da função cosseno corresponde à projeção da extremidade do arco sobre o **eixo horizontal**, denominado **eixo dos cossenos**.

Gráfico da função cosseno

A fim de analisarmos a função cosseno, vamos construir no plano cartesiano o gráfico da função f, definida por $f(x) = \cos x$, com $x \in [0, 2\pi]$. Para isso, utilizamos a ideia de representação de par ordenado de números reais $(x, f(x))$ em um plano cartesiano, com $x \in D(f)$ e $f(x) \in Im(f)$.

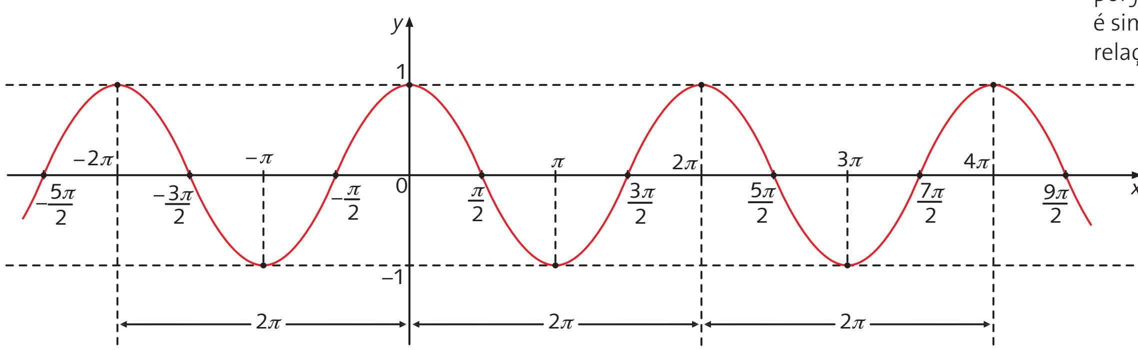
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$f(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Como $D(f) = \mathbb{R}$, existem infinitos valores para x e, consequentemente, infinitos pares ordenados. Assim, entre os pontos indicados no quadro, há infinitos pontos. Unindo esses pontos, obtemos o gráfico de f.



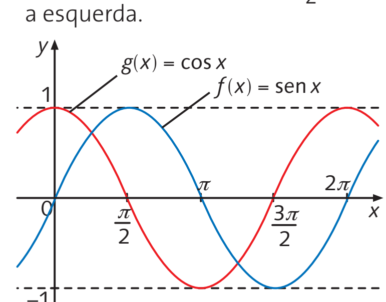
Agora vamos representar o gráfico com o domínio da função cosseno para todos os reais. Assim, neste gráfico estará representada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos x$.

Observação
O gráfico da função f definida por $f(x) = \cos x$ é simétrico em relação ao eixo y.



- Os valores de $f(x)$ variam de -1 a 1, ou seja, têm valor mínimo -1 e valor máximo 1 $(-1 \leq \cos x \leq 1)$.
- A função cosseno é periódica. No caso dessa função, o período é 2π.
  Para todo $x \in \mathbb{R}$:
  $$\ldots = \cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \ldots$$
  Assim, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:
  $$\cos x = \cos(x + k \cdot 2\pi), \text{ sendo } k \in \mathbb{Z}$$
- Na função cosseno, dado um valor x, temos $\cos x = \cos(-x)$. Quando isso ocorre, ou seja, $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in D(f)$, dizemos que f é uma **função par**. Portanto, $f(x) = \cos x$ é uma função par. Exemplo:
  $$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$
- De acordo com o intervalo, a função cosseno varia da seguinte maneira:
  - no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (1º quadrante), a função é decrescente e $f(x) > 0$;
  - no intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ (2º quadrante), a função é decrescente e $f(x) < 0$;
  - no intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ (3º quadrante), a função é crescente e $f(x) < 0$;
  - no intervalo $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ (4º quadrante), a função é crescente e $f(x) > 0$.

Observação
O gráfico da função cosseno é parecido com o gráfico da função seno, porém, transladado $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Problemas e exercícios resolvidos

R12. Determine os valores de m de modo que exista um número real x tal que $\cos x = 4m - 1$.

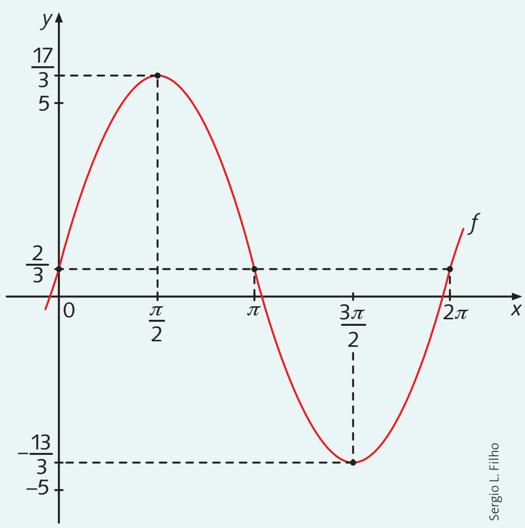
Resolução

Pela condição $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, podemos escrever a inequação: $-1 \leqslant 4m - 1 \leqslant 1$.
Resolvemos a inequação:

$$-1 \leqslant 4m - 1 \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 4m \leqslant 2 \Rightarrow 0 \leqslant m \leqslant \frac{1}{2}$$

Logo, os valores de m são dados pelo conjunto $\left\{m \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 \leqslant m \leqslant \frac{1}{2}\right\}$.

R13. Determine os valores mínimo e máximo da função f, definida por $f(x) = \frac{2}{3} + 5 \cdot \operatorname{sen} x$.



Resolução

Temos duas maneiras de obter esses valores.

1ª maneira

Vimos anteriormente que, para todo x real, temos:

$$-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$$

Multiplicando a desigualdade por 5, temos:

$$-5 \leqslant 5 \cdot \operatorname{sen} x \leqslant 5$$

Agora, adicionamos $\frac{2}{3}$ à desigualdade:

$$-\frac{13}{3} \leqslant \frac{2}{3} + 5 \cdot \operatorname{sen} x \leqslant \frac{17}{3}$$

Ou seja,

$$-\frac{13}{3} \leqslant f(x) \leqslant \frac{17}{3}$$

Observação
No próximo tópico, estudaremos com mais detalhes as funções do tipo trigométricas.

2ª maneira

Os valores máximo e mínimo da função seno são, respectivamente, 1 e -1. Assim:

- valor máximo

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} + 5 \cdot \overbrace{1}^{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} + 5 = \frac{17}{3}$$

- valor mínimo

$$f\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} + 5\underbrace{(-1)}_{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{2}{3} - 5 = -\frac{13}{3}$$

Portanto, o valor mínimo de f é $-\frac{13}{3}$ e o valor máximo é $\frac{17}{3}$.

Observação
Note que o conjunto imagem de f é $\left[-\frac{13}{3}, \frac{17}{3}\right]$.

48. Determine o domínio das funções f e g, definidas por:

a) $f(x) = 1 + \text{sen}\left(3x - \dfrac{2\pi}{3}\right)$ $D(f) = \mathbb{R}$

b) $g(x) = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{\pi}{2}\right)$ $D(g) = \mathbb{R}$

49. Em cada item, determine os valores de x de modo que: Veja as respostas na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

a) $\text{sen}\, x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, com $0° \leqslant x \leqslant 270°$

b) $\text{sen}\, x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, com $0° \leqslant x \leqslant 510°$

c) $\text{sen}\, x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, com $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$

d) $\cos x = \dfrac{1}{2}$, com $0° \leqslant x \leqslant 360°$

e) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, com $0° \leqslant x \leqslant 540°$

f) $\cos x = \dfrac{1}{2}$, com $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{17\pi}{3}$

50. Calcule os valores reais de m para os quais as igualdades sejam possíveis.

a) $\text{sen}\, x = m - 2$, com $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ $2 \leqslant m \leqslant 3$

b) $\text{sen}\, x = 5m + 4$, com $\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$ $-\dfrac{4}{5} \leqslant m \leqslant -\dfrac{3}{5}$

c) $\cos x = \dfrac{4m+1}{2}$, com $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ $-\dfrac{3}{4} \leqslant m \leqslant \dfrac{1}{4}$

d) $\cos x = 2m - 1$, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ $0 \leqslant m \leqslant 1$

51. Considere as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 2 - \text{sen}\,\dfrac{x}{4}$ e $g(x) = 2 + \cos\dfrac{x}{2}$, e calcule:

a) $f(0)$, $f(4\pi)$, $g(0)$ e $g(4\pi)$ Veja as respostas na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

b) $\dfrac{f(\pi)}{g(2\pi)}$ $\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$

c) $f(6\pi) - g(2\pi)$ 2

d) $f(2\pi) \cdot g(8\pi)$ 3

52. Para quais valores reais de x a igualdade $\dfrac{-\cos\alpha}{x+1} = 3$ é verdadeira?

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{4}{3} \leqslant x \leqslant -\dfrac{2}{3} \text{ e } x \neq -1\right\}$

53. Qual o valor de x para que a expressão $8 + \text{sen}(-x)$, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, assuma seu valor máximo? $x = \dfrac{3\pi}{2}$

54. Qual é a diferença entre os valores máximo e mínimo da função g, definida por $g(x) = 3 + \dfrac{1}{4} \cdot \text{sen}\, x$? $\dfrac{1}{2}$

55. (Unesp-SP) Uma máquina produz diariamente x dezenas de certo tipo de peça. Sabe-se que o custo de produção $C(x)$ e o valor de venda $V(x)$ são dados, aproximadamente, em milhares de reais, respectivamente, pelas funções C e V, dadas por:

$$C(x) = 2 - \cos\frac{x\pi}{6} \text{ e}$$

$$V(x) = 3\sqrt{2} \cdot \text{sen}\,\frac{x\pi}{12},\ 0 \leqslant x \leqslant 6.$$

O lucro, em reais, obtido na produção de três dezenas de peças é: c

a) 500
b) 750
c) 1000
d) 2 000
e) 3 000

Observação

O lucro é a diferença entre o valor de venda e o custo de produção.

Em grupo

56. A aceleração do movimento em queda livre de um corpo próximo da superfície terrestre em virtude das forças de atração dos corpos é chamada aceleração da gravidade. O valor da aceleração da gravidade, em geral, é considerado constante. Porém, esse valor varia de acordo com alguns fatores, como a latitude e a altitude. Ao nível do mar, em que a altitude é zero, podemos calcular a variação da gravidade por meio da seguinte expressão:

$$g = 9{,}7804\left(1 + 0{,}0052 \cdot \text{sen}^2\alpha\right)$$

em que g é a aceleração da gravidade em m/s² e α, a latitude em graus. Considerando apenas pontos da superfície terrestre que estejam ao nível do mar, determinem: (Dados: sen 27° ≃ 0,4540 e sen 14° ≃ 0,2402.)

a) a aceleração da gravidade em Florianópolis (SC), sabendo que ela está localizada na latitude 27°. aproximadamente 9,7912 m/s²

b) a aceleração da gravidade de um ponto localizado na linha do Equador, onde a latitude é 0°. 9,7804 m/s²

c) a latitude da cidade de Salvador, onde a aceleração da gravidade é 9,7830 m/s². aproximadamente 14°

Observações

- Latitude é a distância em graus de qualquer ponto da superfície terrestre em relação à linha do Equador, considerada latitude 0°.
- Ao realizar os cálculos, considere quatro algarismos depois da vírgula. Se necessário, utilize uma calculadora. Veja comentários e sugestões nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.

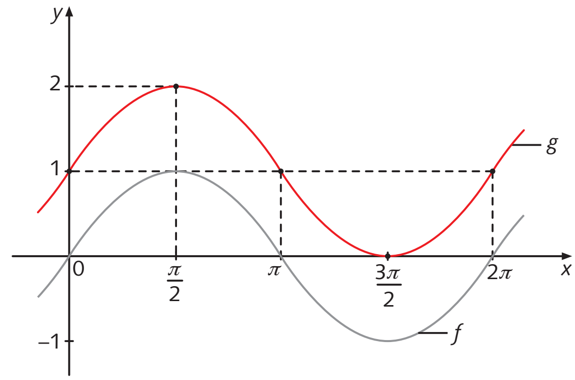
Função do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{trig}(cx + d)$

Observação
Nesta expressão, "trig" pode ser substituído por seno ou cosseno.

Observe o gráfico da função f, definida por $f(x) = \text{sen}\, x$ em relação às funções g, h e m, dadas por:

- $g(x) = 1 + \text{sen}\, x$

x	$y = g(x) = 1 + \text{sen}\, x$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	2
π	1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1



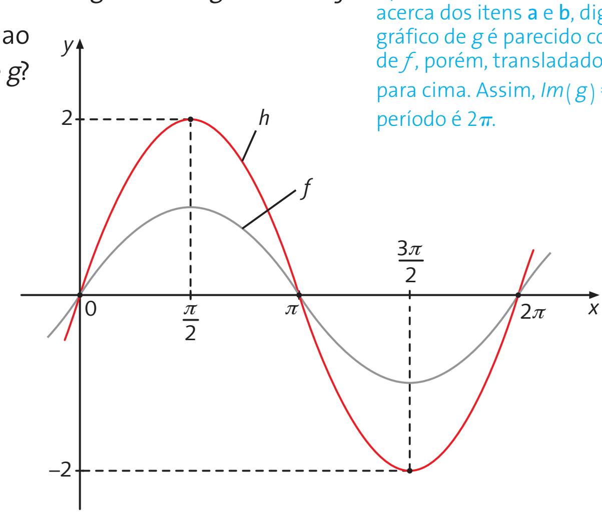
a) O que podemos observar ao compararmos o gráfico de g com o de f?

b) O que podemos observar em relação ao conjunto imagem de g? E ao período de g?

Após os alunos darem suas opiniões acerca dos itens **a** e **b**, diga-lhes que o gráfico de g é parecido com o gráfico de f, porém, transladado uma unidade para cima. Assim, $Im(g) = [0, 2]$, e o período é 2π.

- $h(x) = 2 \cdot \text{sen}\, x$

x	$y = h(x) = 2 \cdot \text{sen}\, x$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	2
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	−2
2π	0



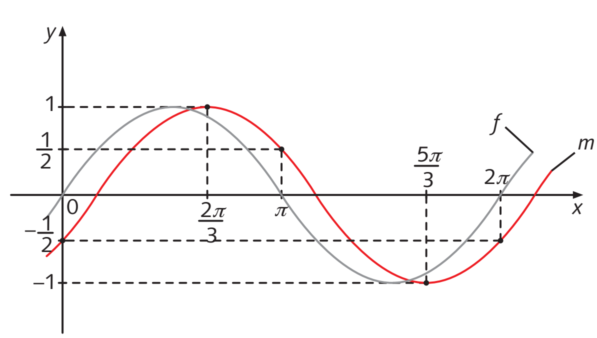
c) O que podemos observar ao compararmos o gráfico de h com o de f?

d) O que podemos observar em relação ao conjunto imagem de h? E ao período de h?

Após os alunos darem suas opiniões acerca dos itens **c** e **d**, diga-lhes que no gráfico de h a amplitude é aumentada uma unidade para cima e uma unidade para baixo em relação ao de f. Assim, $Im(h) = [-2, 2]$, e o período é 2π.

- $m(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

x	$y = m(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
0	$-\frac{1}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$	1
π	$\frac{1}{2}$
$\frac{5\pi}{3}$	−1
2π	$-\frac{1}{2}$



Ilustrações: Sergio L. Filho

e) O que podemos observar ao compararmos o gráfico de m com o de f?

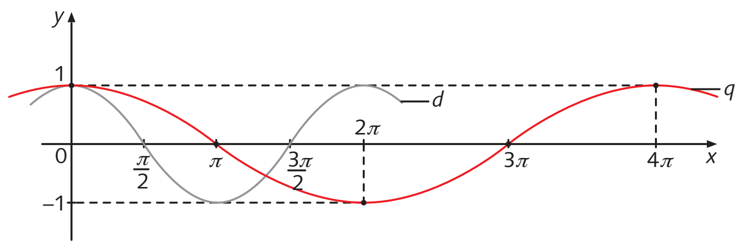
f) O que podemos observar em relação ao conjunto imagem de m? E ao período de m?

Após os alunos darem suas opiniões acerca dos itens **e** e **f**, diga-lhes que o gráfico de m é parecido com o gráfico de f, porém, transladado $\frac{\pi}{6}$ unidades para a direita. Assim, $Im(m) = [-1, 1]$ e o período é 2π.

Agora, observe o gráfico da função d, definida por $d(x) = \cos x$ em relação à função q, dadas por:

- $q(x) = \cos \frac{x}{2}$

x	$y = q(x) = \cos \frac{x}{2}$
0	1
π	0
2π	-1
3π	0
4π	1



g) O que podemos observar ao compararmos o gráfico de q com o de d?

h) O que podemos observar em relação ao conjunto imagem de q? E ao período de q?

Após os alunos darem suas opiniões acerca dos itens **g** e **h**, diga-lhes que o período de q é o dobro do período de d, ou seja, aumentou 2π unidades em relação a d. Assim, $Im(q) = [-1, 1]$, e o período é 4π.

Como vimos anteriormente, as funções apresentadas são funções do tipo trigonométricas e algumas delas podem ser relacionadas a fenômenos periódicos. De modo geral, essas funções podem ser escritas da seguinte maneira:

$$f(x) = a + b \cdot \text{trig}(cx + d), \text{ em que } \begin{cases} a, b, c \text{ e } d \text{ são constantes} \\ b \neq 0 \text{ e } c \neq 0 \\ \text{trig: indica uma função trigonométrica} \end{cases}$$

Qualquer uma das funções seno e cosseno pode ser escrita dessa maneira.

As funções apresentadas a seguir são do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{trig}(cx + d)$. Para cada uma delas, foram indicados a função trigonométrica e o valor numérico das constantes.

- $g(x) = 3 + 2 \cdot \cos x$, temos $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = 1 \\ d = 0 \\ \text{trig: cos} \end{cases}$

- $h(x) = -1 + \text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$, temos $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 3 \\ d = \frac{\pi}{2} \\ \text{trig: sen} \end{cases}$

As constantes a e b alteram os valores relacionados à imagem da função, e as constantes c e d alteram as características da função relacionadas aos valores de x.

De modo geral, as constantes a, b, c e d alteram o gráfico da função trigonométrica da seguinte maneira:

- Constante a: **translada** o gráfico da função em a unidades para "cima" $(a > 0)$, ou em $|a|$ unidades para "baixo" $(a < 0)$.

Observação

O **módulo** ou **valor absoluto** de um número real x é representado por $|r|$ e definido como:

$|r| = r$, se $r \geqslant 0$

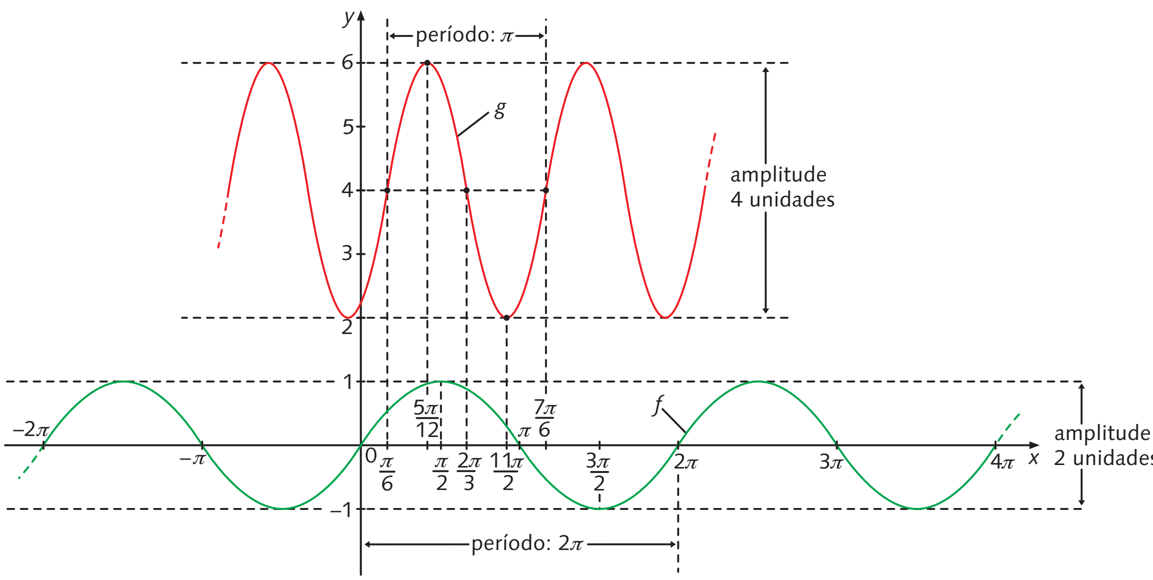
$|r| = -r$, se $r < 0$

- Constante b: **dilata verticalmente** o gráfico $(|b| > 1)$, ou **comprime verticalmente** o gráfico $(0 < |b| < 1)$. Se $b < 0$, o gráfico será simétrico, em relação ao eixo x, ao gráfico com $b > 0$. O módulo do valor assumido por essa constante nos fornece a metade da **amplitude do gráfico**.

- Constante c: **comprime** ($|c| > 1$) ou **dilata** ($|c| < 1$) horizontalmente o período da função trigonométrica, alterando o período p da função para o período $\frac{2\pi}{|c|}$.
- Constante d: translada o gráfico da função em $\left|\frac{d}{c}\right|$ unidades horizontais para a "esquerda" ($d > 0$), ou em $\left|\frac{d}{c}\right|$ unidades para a "direita" ($d < 0$).

Observação
A constante c altera o período da função.

Veja a seguir, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções f e g, dadas por $f(x) = \text{sen}\, x$ e $g(x) = 4 + 2 \cdot \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.



Sergio L. Filho

Analisando os gráficos dessas funções, podemos notar que, em relação ao gráfico de f, o de g sofreu as seguintes alterações:

foi dilatado verticalmente ($b > 1$)

o período foi comprimido horizontalmente ($|c| > 1$)

$$g(x) = 4 + 2 \cdot \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

foi transladado para cima ($a > 0$)

foi transladado para direita ($d < 0$)

Observação
Nesse caso:
- $a = 4$
- $b = 2$
- trig: sen
- $c = 2$
- $d = -\frac{\pi}{3}$

Problemas e exercícios resolvidos

R14. Determine o período das funções f e g, dadas por:

a) $f(x) = 1 + \text{sen}\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$

b) $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

Resolução

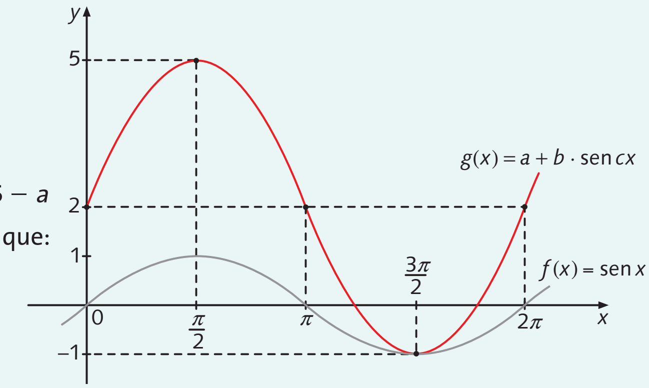
a) Utilizando a relação $p = \frac{2\pi}{|c|}$, calculamos o período de f:

$$p_f = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$$

b) Utilizando a relação $p = \frac{2\pi}{|c|}$, calculamos o período de g:

$$p_g = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$$

R15. Observe no plano cartesiano a seguir os gráficos das funções f e g, definidas por $f(x) = \text{sen}\,x$ e $g(x) = a + b \cdot \text{sen}\,cx$. Depois, determine o valor das constantes a, b e c, e escreva a lei de formação da função g.



Sergio L. Filho

Resolução

O conjunto imagem de g está no intervalo $[-1, 5]$.

Assim:

$-1 \leqslant a + b \cdot \text{sen}\,cx \leqslant 5 \Rightarrow -1 - a \leqslant b \cdot \text{sen}\,cx \leqslant 5 - a$

De acordo com o gráfico, temos que $b > 0$. Segue que:

$-1 - a \leqslant b \cdot \text{sen}\,cx \leqslant 5 - a \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{-1-a}{b} \leqslant \text{sen}\,cx \leqslant \dfrac{5-a}{b}$

$$\begin{cases} \dfrac{-1-a}{b} = -1 \\ \dfrac{5-a}{b} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 1 \\ -a - b = -5 \end{cases}$$

$$-2a = -4 \Rightarrow a = 2$$

$$-a + b = 1 \Rightarrow -2 + b = 1 \Rightarrow b = 3$$

Observando o gráfico, notamos que o período de g é 2π. Logo:

$$p = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow 2\pi = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = 1 \begin{cases} c = 1 \\ c = -1 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Assim, $c = 1$.

Portanto, $g(x) = 2 + 3 \cdot \text{sen}\,x$.

R16. Seja a função dada por $y = g(x) = 2 - \text{sen}\left(\pi x - \dfrac{3\pi}{2}\right)$, definida para todo x real. Determine o período e o conjunto imagem dessa função. Aproveite esta tarefa e peça aos alunos que esbocem o gráfico da função g.

Resolução

O período da função seno é $p = 2\pi$. Utilizando a relação $p_g = \dfrac{p}{|c|}$, obtemos o período de g:

$$p_g = \frac{p}{|c|} = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2$$

As constantes $a = 2$ e $b = -1$ alteram a imagem da função seno em duas unidades para cima.

Portanto, $Im(g) = [1, 3]$.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

57. Esboce o gráfico, obtenha o conjunto imagem e o período da função definida por:
Veja as respostas na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

a) $f(x) = -1 + \text{sen}\,2x$

b) $n(x) = 3 \cdot \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

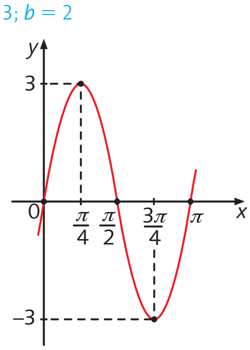
c) $m(x) = 4 \cdot \text{sen}\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

d) $g(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \text{sen}\left(\dfrac{x}{4} + \pi\right)$

e) $q(x) = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$

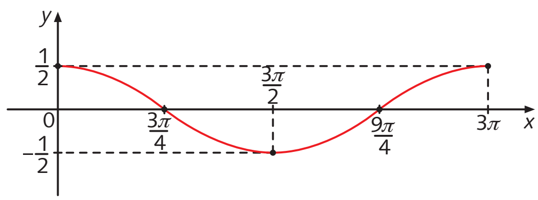
Oriente os alunos a construir um quadro com os valores dos pares ordenados que serão marcados no gráfico. E também, se achar conveniente, oriente-os a usar papel milimetrado para os esboços dos gráficos.

58. Considere a representação gráfica da função f, definida por $f(x) = a \cdot \text{sen}\,bx$, com $0 < x < \pi$ e $b \geqslant 0$. Quais são os valores de a e b? $a = 3$; $b = 2$



Sergio L. Filho

59. De acordo com a representação gráfica da função f, definida por $f(x) = a \cdot \cos bx$, com $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$ e $b \geqslant 0$, determine o valor de $a + b$. $\frac{7}{6}$



Sergio L. Filho

Em grupo

60. Obtenham o domínio, o conjunto imagem e o período da função definida por:

Veja as respostas na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

a) $g(x) = 2 - \text{sen}(x + \pi)$

b) $h(x) = -1 + 3 \cdot \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$

c) $m(x) = 1 + 3 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$

d) $q(x) = \frac{3}{2} - 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{7\pi}{6}\right)$

- Agora, escrevam a lei de formação de duas funções, uma do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ e outra do tipo $q(x) = e + m \cdot \cos(nx + h)$. Depois, peçam a um colega que determine o domínio, o conjunto imagem e o período de cada uma delas e, por último, verifiquem se as resoluções estão corretas.

61. O deslocamento horizontal de um pêndulo é dado pela função f, definida por $f(t) = a \cdot \text{sen}\, bt$, em que $f(t)$ é expresso em centímetros, t em segundos e a e b são constantes. Sabendo que para certo pêndulo $f(t) = 7 \cdot \text{sen}\, 3\pi t$, determine o conjunto imagem de f e o período de seu movimento. $Im(f) = [-7; 7]$; período: aproximadamente 0,67 s

62. A tensão, em volts, de um circuito elétrico é dada por $U(t) = a \cdot \text{sen}\, bt$, em que a e b são constantes e t é o tempo em segundos. Em certo circuito elétrico, a tensão é dada por $U(t) = 5{,}3 \cdot \text{sen}\, 30\pi t$. Determine o conjunto imagem de U e o período da tensão desse circuito.
$Im(U) = [-5{,}3; 5{,}3]$; período: aproximadamente 0,07 s

63. Determine os valores de m para que a função:

a) dada $f(x) = 2m + 5 \cdot \text{sen}\left(\frac{2x}{m} + \frac{\pi}{3}\right)$, tenha período 5π. $m = 5$ ou $m = -5$

b) dada por $g(x) = 3m + 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{m} + \frac{\pi}{5}\right)$, tenha período 3π. $m = -\frac{3}{2}$ ou $m = \frac{3}{2}$

64. Para determinada maré, a altura h, medida em metros, acima do nível médio do mar, é definida, aproximadamente, por $h(t) = 8 + 4\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t\right)$, em que t é o tempo medido em horas. Com base nas informações, determine o período de variação da altura da maré. 24 horas

Em grupo

65. Como vimos na página **84**, o movimento de subida e descida do nível do mar, ou seja, as marés, ocorre por influência do Sol e da Lua. Elaborem um problema envolvendo a altura de uma maré com relação ao nível do mar, em função do tempo, sendo esta uma função trigonométrica. Entreguem para outro grupo resolver e, por fim, verifiquem se a resolução está correta. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos apliquem a definição de função trigonométrica para elaborar o problema.

Desafio

66. (FGV-SP) No mês de abril o mercado financeiro viveu uma certa instabilidade, e o preço de determinada ação oscilou de tal maneira que ele poderia ser descrito pela função periódica: $f(x) = 4{,}50 + \text{sen}(2\pi x)$, em que $f(x)$ é o preço da ação, $x = 0$ representa o 1º dia útil de abril, $x = \frac{1}{4}$, o 2º dia útil, $x = \frac{1}{2}$, o 3º dia útil, e assim por diante. Veja as respostas na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

a) Esboce o gráfico da função $f(x)$ correspondente aos primeiros 5 dias úteis de abril.

b) Considerando que o dia 1º de abril foi segunda-feira, determine em que dias da 1ª semana útil de abril o preço dessa ação atingiu o maior e o menor valor.

c) Quais foram o maior e o menor valor dessa ação na 1ª semana útil de abril?

Finalizando a conversa

a) O que você entendeu sobre as funções trigonométricas? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos tenham compreendido que as funções trigonométricas podem representar fenômenos naturais periódicos, ou seja, que se repetem em iguais intervalos de tempo, como em estudos das variações da temperatura terrestre, no comportamento ondulatório do som, na pressão sanguínea no coração, nas cordas vibrantes, nos níveis de água dos oceanos etc.

b) As funções seno e cosseno são periódicas? Justifique sua resposta. Sim, pois ambas as funções se repetem no período $p = 2\pi$.

c) O que diferencia a função seno da função cosseno? Resposta pessoal. Possível resposta: a função seno é ímpar e a função cosseno é par.

d) Você considerou importante o estudo deste capítulo? Por quê? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que sim, pois, a partir das funções trigonométricas, é possível compreender, de maneira mais esclarecedora, como ocorrem alguns fenômenos periódicos e, assim, inferir e tomar decisões.

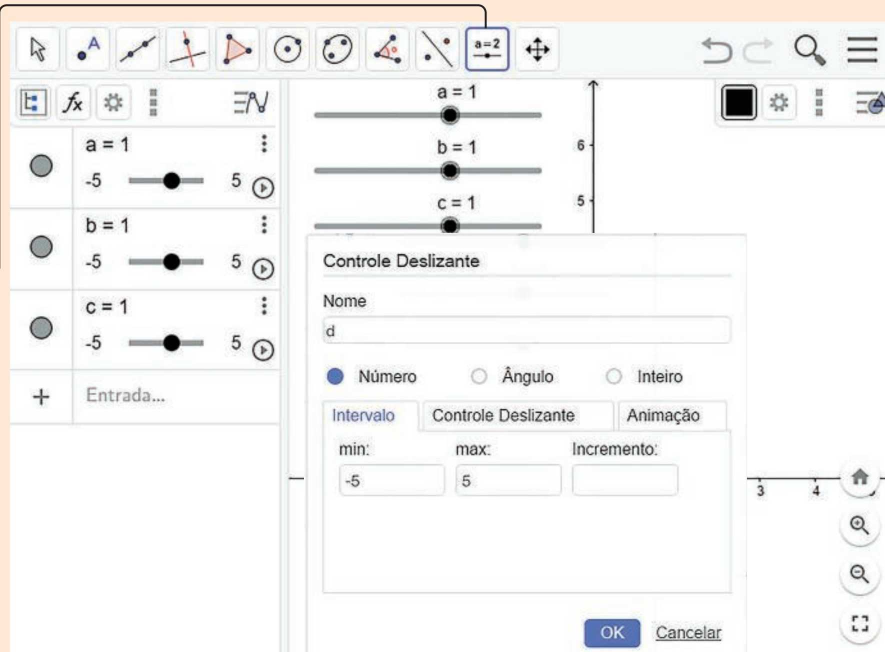
Acesso digital

Função do tipo trigonométrica no GeoGebra

Nesta seção, vamos construir o gráfico de uma função do tipo trigonométrica no *software* GeoGebra e verificar o que acontece quando alteramos os valores das constantes. Para isso, siga o passo a passo do seu professor para realizar a construção.

Veja como podemos construir o gráfico de uma função do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ utilizando os recursos disponíveis no *software*.

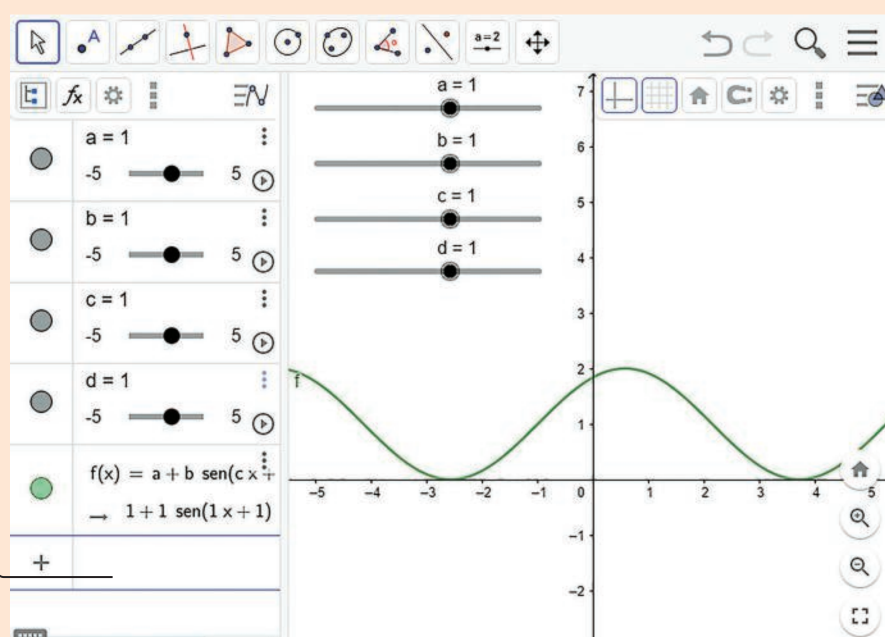
1º Inicialmente, definiremos as constantes *a*, *b*, *c* e *d* de maneira que possamos alterar os seus valores posteriormente. Para isso, selecione a opção **Controle Deslizante** e clique na **Janela de Visualização**. Na janela que irá abrir, digite o nome “a” na caixa **Nome**, estabeleça o intervalo mínimo e máximo (−5 e 5, por exemplo) e clique em **OK**. Repita esse procedimento para criar um controle deslizante para cada uma das outras constantes *b*, *c* e *d*.



2º No campo **Entrada...**, da **Janela de Álgebra**, digite a expressão a seguir e pressione **Enter**.

***f*(x) = a + b*sen(c*x + d)**

Aparecerá na **Janela de Visualização** o gráfico da função definida por $f(x) = 1 + \text{sen}(x + 1)$, pois $a = b = c = d = 1$.

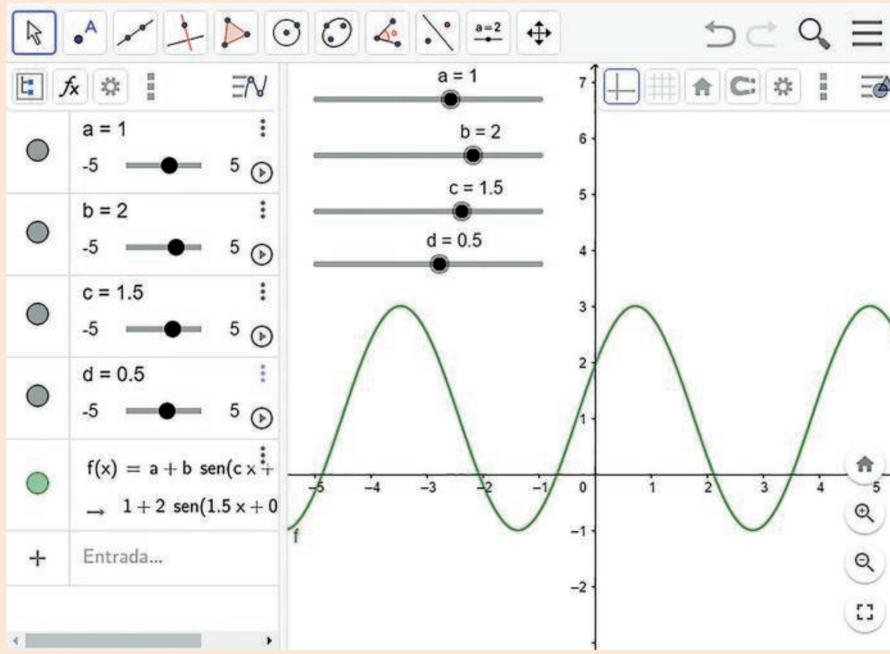


Imagens: Reprodução/Geogebra/Markus Hohenwarter

Observação

Na fórmula digitada, o símbolo * (asterisco) indica o comando que representa o sinal de multiplicação. Assim como na escrita usual de expressões matemáticas, o sinal de multiplicação pode ser omitido, porém, se nenhum dos fatores for um número, é necessário inserir um espaço entre eles.

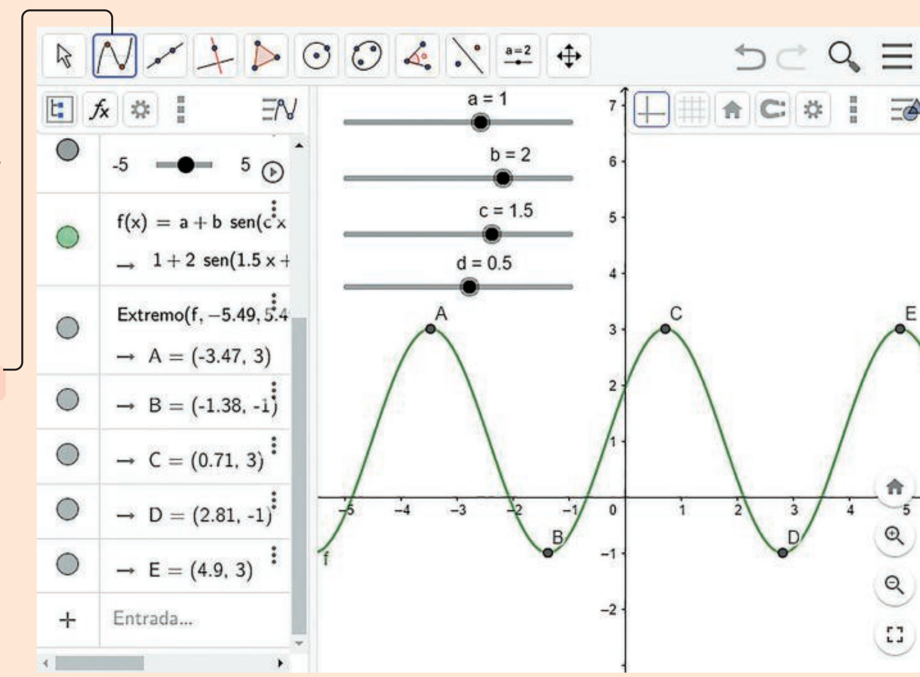
3º Mova os controles deslizantes com o *mouse* e verifique o que ocorre com o gráfico de f ao alterar os valores das constantes individualmente.



Observação

Note que, conforme os valores dos controles deslizantes variam, a lei de formação da função que aparece na **Janela de Álgebra** também se altera, conforme os valores dos respectivos coeficientes a, b, c e d.

4º Após mover os controles deslizantes e obter a função desejada, é possível também determinar o seu valor mínimo e o seu valor máximo. Para isso, selecione a opção **Otimização** e clique sobre o gráfico da função.



Imagens: Reprodução/Geogebra/Markus Hohenwarter

Note que os pontos A, C, E, G e I, que aparecem na **Janela de Visualização**, têm as mesmas ordenadas, correspondentes ao valor máximo de f, nesse caso, igual a 3. Do mesmo modo, os pontos B, D, F, H e J têm as mesmas ordenadas, que correspondem ao valor mínimo de f, nesse caso, igual a -1.

a) Em relação às constantes a, b, c e d, e supondo $b \neq 0$ e $c \neq 0$, responda:

- Qual delas está relacionada com a amplitude da função? E qual está relacionada com o período? *b; c*
- Quais alteram a imagem da função? E quais transladam o gráfico? *a e b; a e d*

b) Qual é o valor máximo e o valor mínimo da função f, dada por $f(x) = -2 + 3 \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$? valor máximo: 1; valor mínimo: -5

c) Na mesma janela em que inserimos a lei de formação da função f, insira a função g dada por $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$. É possível observar alguma relação entre os gráficos de f e de g? Qual?
Espera-se que os alunos respondam que sim e percebam que o gráfico de g é parecido com o gráfico de f, porém, transladada horizontalmente.

Saiba mais

Duração do dia

Veja uma sugestão de trabalho na Assessoria pedagógica.

Durante o ano, a quantidade de horas em que o dia é iluminado pela luz solar sofre variações. Isso acontece em razão dos movimentos de rotação e de translação realizados pela Terra.

O movimento de rotação é o movimento que a Terra realiza em torno do seu próprio eixo (no sentido oeste-leste). Esse movimento tem duração de cerca de 23 horas, 56 minutos e 4 segundos.

O movimento de translação corresponde ao movimento que a Terra realiza em torno do Sol, completando uma volta aproximadamente a cada 365 dias e 6 horas, a uma velocidade de aproximadamente 108 mil km/h.

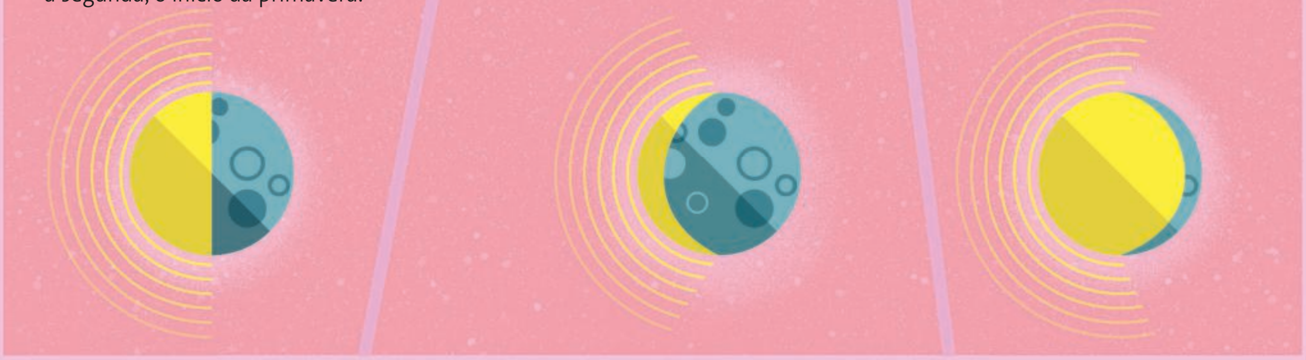
Em consequência dos movimentos de rotação e de translação, há uma incidência dos raios solares sobre a superfície da Terra durante o ano, dando origem às quatro estações: primavera, verão, outono e inverno.

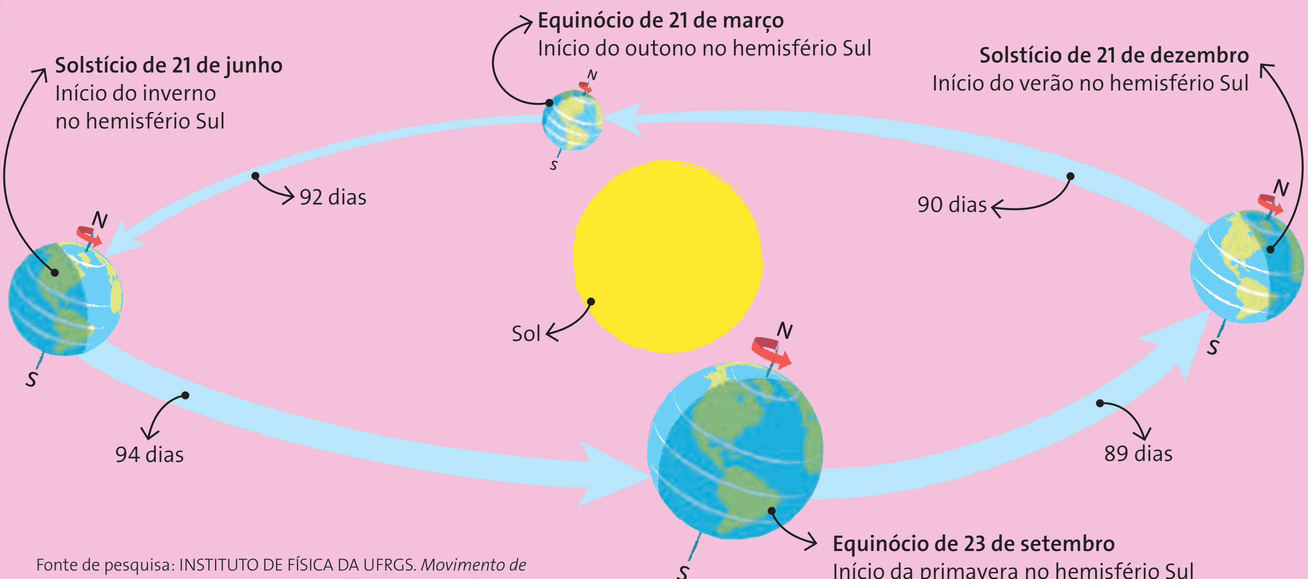
As imagens não estão em proporção e as cores utilizadas não correspondem às reais.

Em duas ocasiões no ano, a duração do dia é igual à da noite. São os chamados equinócios, que ocorrem, aproximadamente, em 21 de março e 23 de setembro. A primeira data marca o início do outono no hemisfério Sul, e a segunda, o início da primavera.

No hemisfério Sul, por volta de 21 de junho, ocorre o solstício de inverno, que marca o início dessa estação. Nessa data, o dia no hemisfério Sul tem a menor duração no ano.

Já por volta de 21 de dezembro, ocorre justamente o contrário. É o solstício de verão no hemisfério Sul (maior duração do dia no ano).





Ilustrações: Somma Studio

Fonte de pesquisa: INSTITUTO DE FÍSICA DA UFRGS. *Movimento de translação da Terra.* Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/mpef/mef008/mef008_02/Angelisa/translacao.html>. Acesso em: 7 maio 2020.

Para descrever a variação da duração do dia em certa localidade, durante o ano, chegou-se à função trigonométrica definida por:

$$h(x) = A + B \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi x}{365}$$

Essa função expressa a quantidade h de horas da duração do dia que uma localidade possui em certa data, em função do número x de dias passados de 21 de março (equinócio). Os coeficientes A e B dependem da duração do dia nos solstícios de verão e inverno, naquela localidade.

Para exemplificar, considere uma cidade brasileira em que, no solstício de verão, a duração do dia seja de 14 horas, e no de inverno, 9 horas e 40 minutos

$\left(\frac{29}{3} \text{ horas}\right)$.

Como no solstício de verão do hemisfério Sul são passados 275 dias de 21 de março, temos, para essa data, $x = 275$. Assim:

$$h(275) = A + B \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot 275}{365}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14 = A + B \cdot \underbrace{\text{sen}\,\frac{550\pi}{365}}_{\simeq -1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14 = A + B \cdot (-1) \Rightarrow 14 = A - B$$

No solstício de inverno do hemisfério Sul, são passados 92 dias de 21 de março, ou seja, para essa data $x = 92$. Assim:

$$h(92) = A + B \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot 92}{365}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{29}{3} = A + B \cdot \underbrace{\text{sen}\,\frac{184\pi}{365}}_{\simeq 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{29}{3} = A + B \cdot 1 \Rightarrow \frac{29}{3} = A + B$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 14 = A - B \\ \frac{29}{3} = A + B \end{cases}$, obtemos $A = \frac{71}{6}$ e $B = -\frac{13}{6}$.

Portanto, a função que expressa a quantidade h de horas da duração do dia nessa cidade é dada por:

$$h(x) = \frac{71}{6} - \frac{13}{6} \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi x}{365}$$

Com base nessa função é possível determinar o período aproximado de horas da duração do dia que ocorrerá em qualquer data do ano, após 21 de março, naquela cidade.

b) Equinócio de 21 de março, que marca o início do outono no hemisfério Sul e equinócio de 23 de setembro, que marca o início da primavera no hemisfério Sul.

Por causa dos movimentos de rotação e translação realizados pela Terra.

a De acordo com o texto, a quantidade de horas em que o dia é iluminado pela luz solar sofre variação. Por que razão isso acontece?

b Existem duas ocasiões no ano em que a duração do dia é igual à da noite. Quais são e em que época do ano ocorrem tais ocasiões?

c O texto mostra uma função do tipo trigonométrica que descreve a variação da duração do dia em certa localidade e exemplifica considerando uma cidade brasileira. Qual seria a duração do dia 20 de abril, nessa mesma cidade?
Aproximadamente 10 horas e 46 minutos.

Conectando ideias

Veja comentários e sugestões na Assessoria pedagógica.

Propagação ultrassônica

A medicina a cada dia procura desenvolver meios que visam fazer investigações no interior do corpo humano. Dentre eles, está a ultrassonografia, que por meio da emissão e reflexão (eco) de ultrassons, vibrações com frequências acima de 20 000 Hz (hertz), permite realizar algumas dessas investigações de maneira não invasiva ou minimamente invasiva. No caso da ultrassonografia, os equipamentos trabalham com frequências entre 1 e 5 MHz (megahertz), imperceptíveis ao ouvido humano.

As imagens não estão em proporção e as cores utilizadas não correspondem às reais.

Transdutor

A máquina de ultrassonografia, por meio do transdutor, transmite os ultrassons, que penetram na pele, chegando até as estruturas internas.

1 O transdutor capta os ultrassons refletidos, transforma-os em impulsos elétricos, transmitindo-os para a máquina. Esta, por sua vez, determina a distância entre o transdutor e os tecidos do bebê, utilizando a velocidade do som no tecido (cerca de 1540 m/s) e o tempo de retorno de cada ultrassom refletido (cerca de um milionésimo de segundo).

Gel/Vaselina

O gel é colocado sobre a barriga da gestante para facilitar o deslize do transdutor sobre a pele e eliminar o ar entre os dois, contribuindo para a propagação dos ultrassons no interior do corpo.

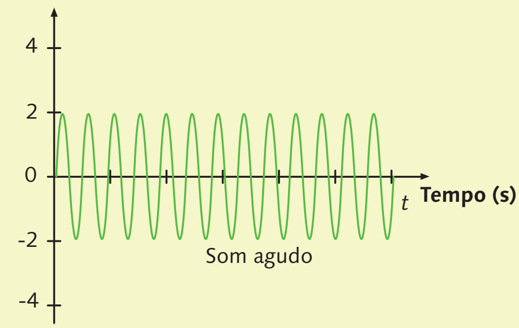
2 Os ultrassons se deslocam pelo interior da barriga até atingirem um limite entre tecidos, nesse caso, do bebê. Parte dos ultrassons é refletida de volta para o transdutor, e outra é refratada, até atingir outros limites do bebê e também ser refletida.

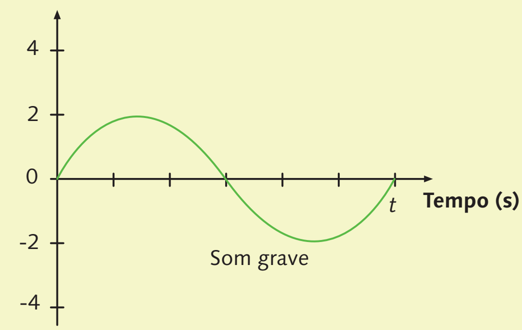
3 Na máquina, os reflexos são conectados, conforme as distâncias e as intensidades de cada um, formando uma imagem 2D (bidimensional), em lâminas.

Leandro Lassmar

- Controla os pulsos do Transdutor:
  - frequência
  - duração
  - modo de varredura
- Envia a imagem para o visor
- Conecta-se ao teclado
- Armazena em disco
- Envia para a impressora

Representação gráfica da propagação de uma onda sonora





Ilustrações: Sergio L. Filho

Abaixo de 20 e acima de 20 000 hertz, temos o infrassom e o ultrassom, respectivamente.

Fonte de pesquisa: INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO DA UFF. *Ultrassom*. Disponível em: <http://www.ic.uff.br/~aconci/Ultrasson.pdf>. Acesso em: 8 maio 2020.

a Existe relação entre os conteúdos abordados neste capítulo e a propagação das vibrações? Justifique sua resposta. Sim, pois o som se propaga de forma periódica, assim podemos representá-lo por funções do tipo trigonométricas.

b Os conhecimentos que você possui sobre funções trigonométricas o ajudaram a entender as informações apresentadas? Justifique sua resposta. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 3

Relações, equações e transformações trigonométricas

LianeM/Alamy/Fotoarena

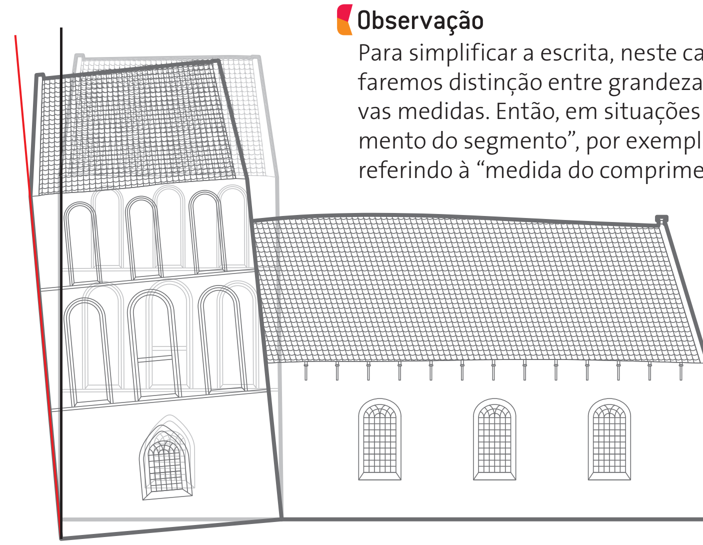
Torre da Igreja de Suurhsen, localizada na comarca de Aurich, norte da Alemanha, em 2015.

A inclinação da torre

Localizada no norte da Alemanha, a torre da Igreja de Suurhusen tem uma inclinação considerável que chama a atenção de quem observa. Essa igreja gótica recebeu essa torre por volta de 1450, e sua inclinação foi provocada pelo apodrecimento da madeira presente em sua fundação e devido ao terreno pantanoso. Com uma altura medindo aproximadamente 27 m, a torre se transformou num polo de atração turística, utilizada somente em ocasiões especiais devido ao risco de desabamento. Ela se manteve firme por algum tempo, mas começou a inclinar no século XIX, e em 2007 foi considerada a torre mais inclinada do mundo, com uma inclinação medindo 5,19°.

Observação

Para simplificar a escrita, neste capítulo, não faremos distinção entre grandezas e suas respectivas medidas. Então, em situações do tipo "o comprimento do segmento", por exemplo, estamos nos referindo à "medida do comprimento do segmento".



Heloísa Pintarelli

a Além da torre da Igreja de Suurhusen, realize uma pesquisa e cite outras construções que são conhecidas por apresentar inclinações em suas estruturas. Resposta pessoal. Possíveis respostas: Torres Puerta de Europa em Madri, torre de Pisa, torre de Torún na Polônia.

b Em sua opinião, qual foi o motivo de as construções apresentarem inclinação em sua estrutura? Resposta pessoal. Possível resposta: há casos em que a inclinação se deve ao fato de o solo não ser favorável à construção e, também, há casos em que a construção foi planejada para ser inclinada.

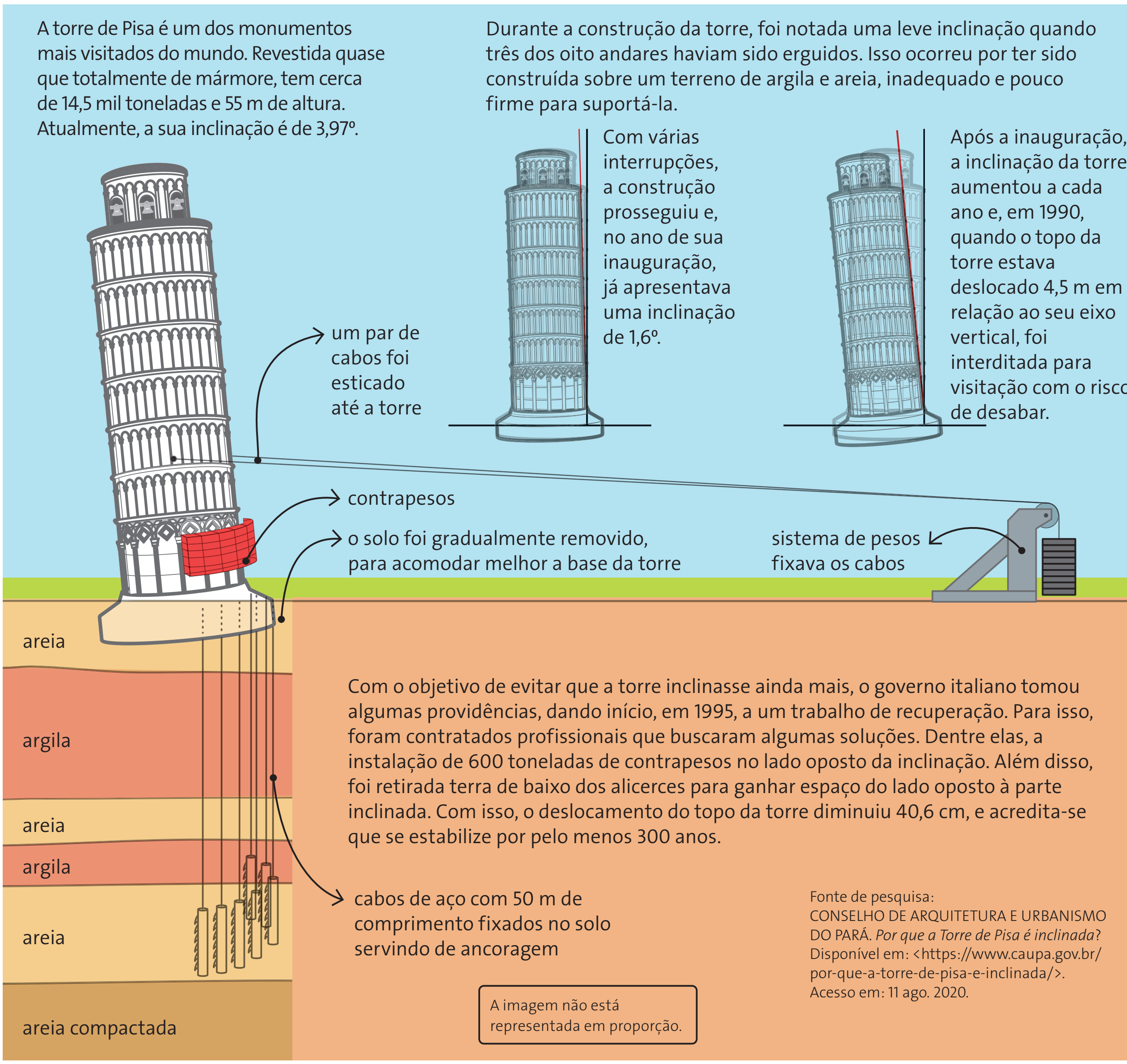
c Quantos metros, aproximadamente, a torre da Igreja de Suurhusen se afastou do seu eixo vertical quando foi considerada a torre mais inclinada do mundo? (Considere sen $5{,}19° = 0{,}09$.) aproximadamente 2,43 m de seu eixo vertical

Fonte de pesquisa: WORLD RECORD ACADEMY. *The Most tilted tower-world record set by Steeple church*. Disponível em: <https://www.worldrecordacademy.com/society/most_tilted_tower_world_record_set_by_Steeple_church_70921.htm>. Acesso em: 23 maio 2020.

1 Introdução

Assim como a torre da Igreja de Suurhusen, vista na página anterior, a torre de Pisa, localizada na Itália, também ficou conhecida em todo o mundo por sua inclinação. Sendo considerado um dos principais pontos turísticos do mundo, a torre de Pisa foi projetada para abrigar os sinos da Catedral de Pisa, e teve o início de sua construção em 1173, sendo concluída apenas em 1370.

BNCC
- **CEMT 3**
- **EM13MAT306**



Eduardo Carriça

Com base nas informações, podemos responder a algumas perguntas, como:

a) Quantos metros, aproximadamente, o topo da torre de Pisa estava afastado do eixo vertical, quando foi inaugurada?

b) Em 1990, o topo da torre de Pisa estava afastado do eixo vertical 4,5 m, com 5,5º de inclinação. Devido à depressão do terreno, se a altura da torre fosse medida desde o solo, qual seria o resultado obtido?

As respostas destas perguntas serão retomadas na tarefa resolvida **R8** deste capítulo, que se encontra na página 109.

Ao longo deste capítulo, iremos estudar alguns conceitos e procedimentos que poderão contribuir para a obtenção das respostas a essas perguntas.

Conversando

a) O que você já ouviu falar sobre a torre de Pisa? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que a torre de Pisa é mundialmente conhecida pela inclinação que ela possui, além de ser um ponto turístico muito requisitado pelos turistas que visitam a Itália.

b) Por qual motivo a torre de Pisa se inclinou? Por ter sido construída sobre um terreno de argila e areia, inadequado e pouco firme para suportá-la.

c) Em sua opinião, de que maneira os assuntos que você irá estudar neste capítulo podem contribuir para a resolução das questões da página anterior? Resposta pessoal. Possível resposta: os assuntos vão fornecer novas ferramentas matemáticas que permitem calcular as medidas solicitadas.

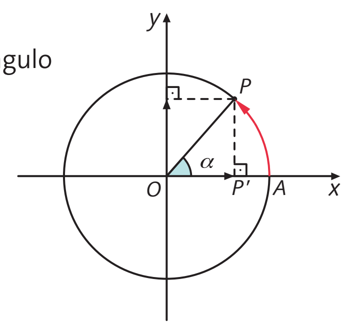
d) Quais cuidados devem ser tomados durante uma construção? Possível resposta: estudo do tipo de terreno e da sua resistência, escolha dos materiais adequados, observação quanto à durabilidade dos materiais escolhidos, planejamento do alicerce e dos acabamentos, entre outros importantes detalhes.

2 Relações trigonométricas fundamentais

Já estudamos anteriormente a relação fundamental $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nos triângulos retângulos. Agora, vamos estender essa relação a qualquer número real α.

Comente com os alunos que, se $\alpha = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, não temos o triângulo retângulo $OP'P$.

Considere a circunferência trigonométrica ao lado.



Para qualquer valor de α, com $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ e $k \in \mathbb{Z}$, temos o triângulo retângulo $OP'P$. De acordo com o teorema de Pitágoras:

$$\underbrace{(P'P)^2}_{\text{sen}^2\alpha} + \underbrace{(P'O)^2}_{\cos^2\alpha} = \underbrace{(OP)^2}_{1} \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Além da relação fundamental, também estudamos a relação $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$, que é válida para todo $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Ao observar essas relações, podemos notar que elas envolvem os valores do seno, do cosseno e da tangente. Além dessas relações, existem outras que também estão associadas aos valores dessas razões trigonométricas, entre elas, as chamadas **cotangente**, **secante** e **cossecante** definidas a seguir:

- Cotangente

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}, \text{ com } \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}, \text{ com } \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

- Secante

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \text{ com } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

- Cossecante

$$\text{cossec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}, \text{ com } \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Das relações fundamentais apresentadas, decorrem outras que iremos apresentar a seguir.

- Dividimos por $\cos^2\alpha$, com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, os dois membros da igualdade $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

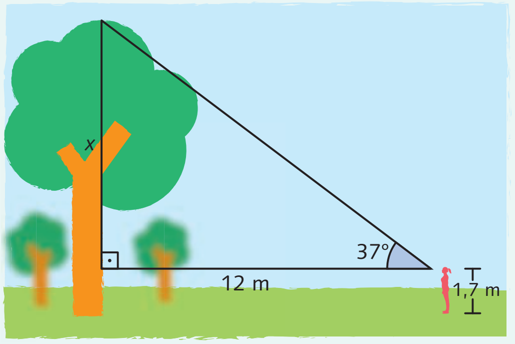
$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \boxed{\text{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha}, \text{ com } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } k \in \mathbb{Z}$$

- Dividimos por $\text{sen}^2\alpha$, com $\alpha \neq k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, os dois membros da igualdade $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} \Rightarrow \boxed{1 + \text{cotg}^2\alpha = \text{cossec}^2\alpha}, \text{ com } \alpha \neq k\pi \text{ e } k \in \mathbb{Z}$$

Problemas e exercícios resolvidos

R1. Talita está observando o topo de uma árvore, como mostra a figura.
Considerando sen 37° = 0,6, calcule a altura da árvore.



Resolução

Inicialmente, calculamos o valor de x. Para isso, utilizamos a relação fundamental e depois a razão tangente:

$\text{sen}^2 37° + \cos^2 37° = 1 \Rightarrow (0,6)^2 + \cos^2 37° = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 37° = 1 - 0,36 \Rightarrow \cos^2 37° = 0,64 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 37° = \sqrt{0,64} \Rightarrow \cos 37° = 0,8$

$\text{tg}\, 37° = \dfrac{\text{sen} 37°}{\cos 37°} = \dfrac{0,6}{0,8} = 0,75$ $\qquad$ $\text{tg}\, 37° = \dfrac{x}{12} \Rightarrow 0,75 = \dfrac{x}{12} \Rightarrow x = 9 \rightarrow 9 \text{ m}$

Adicionando o valor de x e a altura de Talita, obtemos a altura da árvore:

$$9 + 1,7 = 10,7$$

Portanto, a árvore tem aproximadamente 10,7 m de altura.

R2. Seja $\cos \alpha = -\dfrac{1}{3}$, com $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, determine sen α, cossec α e tg α.

Resolução

- sen α

  $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \dfrac{1}{9} \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = \dfrac{8}{9} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

  Como $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, $\text{sen}\,\alpha = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

- cossec α

  $\text{cossec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{1}{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

- tg α

  $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}{-\dfrac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$

R3. Se $\text{tg}\,x = \dfrac{4}{3}$, com $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, calcule o valor de sec x.

Resolução

$\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x \Rightarrow \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + 1 = \sec^2 x \Rightarrow \sec^2 x = \dfrac{25}{9} \Rightarrow \sec x = \pm\sqrt{\dfrac{25}{9}} = \pm\dfrac{5}{3}$

Como $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $\sec x = \dfrac{5}{3}$.

R4. Dado $\cos x = \dfrac{2}{5}$, determine o valor da expressão $\dfrac{\text{cotg}^2 x + 1}{\text{cossec}^2 x - 1}$.

Resolução

$$\frac{\text{cotg}^2 x + 1}{\text{cossec}^2 x - 1} = \frac{\text{cossec}^2 x}{\text{cotg}^2 x} = \frac{\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}}{\dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x}} = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\left(\dfrac{2}{5}\right)^2} = \frac{25}{4}$$

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

1. Seja sen $x = -\frac{2}{5}$, com $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$. Calcule:

a) cos x $\frac{\sqrt{21}}{5}$
b) tg x $-\frac{2\sqrt{21}}{21}$
c) cossec x $-\frac{5}{2}$
d) sec x $\frac{5\sqrt{21}}{21}$
e) cotg x $-\frac{\sqrt{21}}{2}$

2. Sendo $-5 \cdot \cos x = 3$, com $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, determine o valor de sen x. $-\frac{4}{5}$

3. Uma rampa com inclinação de θ deverá ser construída em uma escola para resolver um problema de desnível de 4 m. Qual será o comprimento dessa rampa? $\left(\text{Dado: tg } \theta = \frac{\sqrt{2}}{5}.\right)$ aproximadamente 14,70 m

4. Calcule o valor da expressão $\frac{\text{cossec } x - \text{sen } x}{\text{sec } x - \text{sen } x}$, sabendo que cotg $x = \frac{5}{2}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$. $\frac{125}{38}$

Você produtor Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

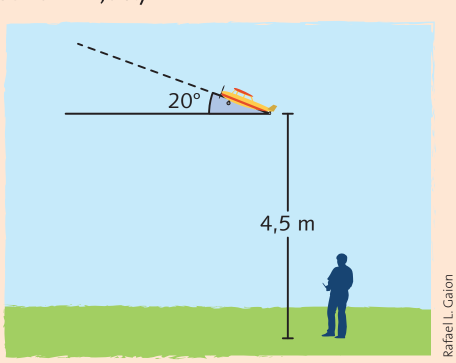
5. Determine o valor da cossecante de um arco e peça a um colega que calcule a tangente desse arco. Depois, verifique se a resolução está correta.

6. Sabendo que sen $x = \frac{7}{11}$, determine o valor da expressão $\frac{\text{cossec}^2 x - \text{cotg}^2 x + \cos^2 x}{(\sec x + \text{tg } x)(\sec x - \text{tg } x)}$. $\frac{193}{121}$

Veja comentários e sugestões sobre esta tarefa na Assessoria pedagógica.

Em grupo

7. Durante um voo, o avião de um praticante de aeromodelismo se encontrava conforme representado na imagem. (Dados: cossec 20° = 2,92 e sec 20° = 1,06.)



a) Qual é a altura aproximada do avião depois de percorrer 5 m na direção indicada? 6,21 m

b) Calcule a distância horizontal aproximada atingida pelo avião, depois de ter percorrido 8 m na direção e posição indicadas. aproximadamente 7,55 m

c) Determine uma altura atingida por esse avião a partir da posição indicada e peça a um colega que calcule quantos metros foram percorridos. Depois, verifique se a resolução feita por ele está correta.

Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

8. Seja cos $x = \frac{2}{3}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$. Calcule o valor de $-\frac{\text{sen}^2 x}{2} + 1$. $\frac{13}{18}$

9. Simplifique as expressões.

a) $\text{sen}^2 x + \frac{\text{sen}^2 x}{1 - \text{sen}^2 x} + \cos^2 x$ $\sec^2 x$

b) $\frac{\text{cossec}^2 x \cdot \sec x}{\text{cotg } x + \text{tg } x}$ cossec x

c) $\frac{\text{sen } x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\text{sen } x} - \text{cossec } x$ cossec x

10. Escrevendo a expressão $\frac{\sec^2 x - 1}{1 + \text{cotg}^2 x}$ em função de A, com tg $x \cdot$ sen $x = A$, obtemos: d

a) A
b) $\frac{1}{A}$
c) $2A$
d) A^2
e) $\sqrt{A}$

11. Simplificando a expressão $\frac{1 - \sec^2 x}{\text{sen}^2 x}$, obtém-se: c

a) $\text{sen}^2 x$
b) $-\cos^2 x$
c) $-\sec^2 x$
d) cossec x
e) $-$cotg x

12. Determine cotg x, sabendo que cossec $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ e x é um arco do 1º quadrante. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

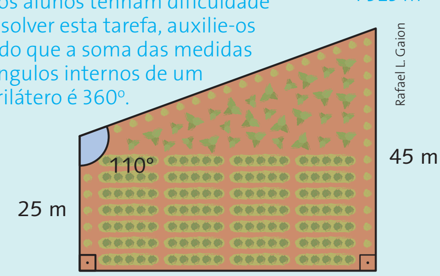
13. Se $a = \text{sen}^2 x$ e $b = \sqrt{2} \cdot \text{sen } x$, então $(a^2 - b^2 + 1)$ equivale a: d

a) $\text{sen}^2 x$
b) $\text{sen}^4 x$
c) $\cos^2 x$
d) $\cos^4 x$
e) 1

Desafio

14. Fernando reservou um terreno em sua chácara para o plantio de hortaliças. Para saber a quantidade de adubo e sementes que precisa comprar, ele tem de saber a área do terreno. Observe a imagem e determine a área desse terreno. (Dado: sen 70° = 0,94) aproximadamente 1 925 m²

Caso os alunos tenham dificuldade em resolver esta tarefa, auxilie-os dizendo que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°.



3 Fórmulas de transformação

Tomando como base os valores de sen a, sen b, cos a e cos b, é possível determinar os valores de sen $(a - b)$ e sen $(a + b)$, sendo a e b arcos da circunferência trigonométrica.

Para obter os valores de cos 75° e cos 15°, por exemplo, vamos usar os valores conhecidos de cos 30° e cos 45°, uma vez que:

- $\cos(45° + 30°) = \cos 75°$, pois $45° + 30° = 75°$
- $\cos(45° - 30°) = \cos 15°$, pois $45° - 30° = 15°$

Porém, não podemos confundir $\cos(\alpha \pm \beta)$ com $\cos\alpha \pm \cos\beta$, uma vez que apresentam valores diferentes, isto é, $\cos(\alpha \pm \beta) \neq \cos\alpha \pm \cos\beta$, com $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. A seguir mostramos, por exemplo, que $\cos(30° + 60°) \neq \cos 30° + \cos 60°$ e $\cos(30° - 60°) \neq \cos 30° - \cos 60°$.

- $\cos(30° + 60°) = \cos 90° = 0$
- $\cos 30° + \cos 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}$
- $\cos(30° - 60°) = \cos(-30°) = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 30° - \cos 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$

De maneira análoga, também podemos verificar que $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) \neq \operatorname{sen}\alpha \pm \operatorname{sen}\beta$ e $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) \neq \operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta$, com $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$.

Podemos calcular o seno, o cosseno e a tangente da soma e da diferença de arcos utilizando fórmulas. Essas fórmulas podem ser demonstradas e são apresentadas da seguinte forma:

- Seno da soma e da diferença

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

- Cosseno da soma e da diferença

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

- Tangente da soma e da diferença

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}, \text{ com } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}, \text{ com } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Observação
Os valores de cos 30° e cos 45° foram apresentados na tabela trigonométrica da página **33** deste volume.

A dedução dessas fórmulas pode ser feita na lousa com os alunos. Elas são encontradas na Assessoria pedagógica.

Observação
As fórmulas da soma e da diferença do seno, cosseno e tangente estão relacionadas à construção das tabelas trigonométricas.

Problemas e exercícios resolvidos

R5. Sendo $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, determine $\text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

Resolução

$$\text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{2} - \text{sen}\,\frac{\pi}{2} \cdot \cos\alpha = \text{sen}\,\alpha \cdot 0 - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

R6. Determine $\text{cotg}(\alpha - \beta)$, sabendo que $\text{tg}\,\alpha = \frac{x}{2}$ e $\text{tg}\,\beta = \frac{x}{4}$.

Resolução

$$\text{cotg}(\alpha - \beta) = \frac{1}{\text{tg}(\alpha - \beta)} = \frac{1}{\frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}} = \frac{1 + \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{4}}{\frac{x}{2} - \frac{x}{4}} = \frac{1 + \frac{x^2}{8}}{\frac{x}{4}} = \frac{x^2 + 8}{2x}$$

R7. Mostre que $\text{sen}\,2\alpha = 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha$.

Na tarefa **33** da página **111** o aluno irá mostrar, de maneira semelhante à apresentada na tarefa **R7**, a fórmula do cosseno e da tangente do arco duplo.

Resolução

Sabemos que $2\alpha = \alpha + \alpha$. De acordo com a fórmula do seno da soma:

$\text{sen}\,2\alpha = \text{sen}\,(\alpha + \alpha) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha + \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha$

Assim, $\text{sen}\,2\alpha = 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha$.

Observação

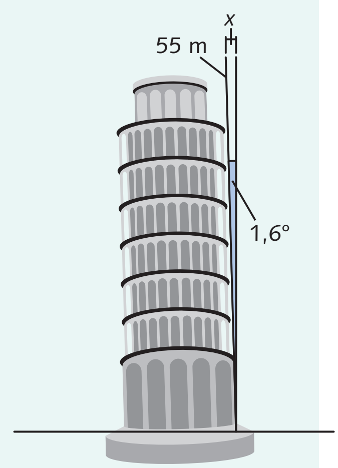
A igualdade $\text{sen}\,2\alpha = 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha$ é conhecida como **fórmula do seno de arcos duplos**.

R8. Na introdução do capítulo foram apresentadas algumas perguntas em relação à torre de Pisa. Veja a seguir a resolução dos itens propostos na página **104**.

a) Quantos metros, aproximadamente, o topo da torre de Pisa estava afastado do eixo vertical, quando foi inaugurada?

b) Em 1990, o topo da torre de Pisa estava afastado do eixo vertical 4,5 m, com 5,5° de inclinação. Devido à depressão do terreno, se a altura da torre fosse medida desde o solo, qual seria o resultado obtido?

(Dados: $\text{sen}\,1{,}6° = 0{,}0279$, $\text{tg}\,1{,}6° = 0{,}0279$, $\text{tg}\,3{,}9° = 0{,}0682$.)



Resolução

a) Podemos determinar quantos metros, aproximadamente, o topo da torre de Pisa se afastava do eixo vertical, por meio da razão seno:

$$\text{sen}\,1{,}6° = \frac{x}{55} \Rightarrow 0{,}0279 = \frac{x}{55} \Rightarrow x \simeq 1{,}53$$

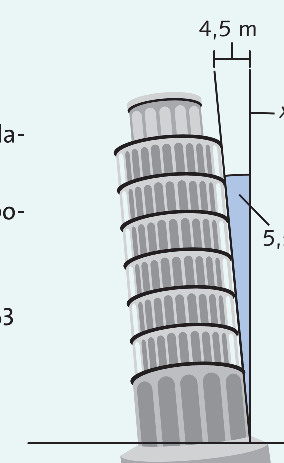
Portanto, o topo da torre de Pisa estava afastado do eixo vertical, aproximadamente, 1,53 m.

b) Para calcular a altura da torre de Pisa, vamos utilizar a razão tangente. Antes, porém, vamos calcular o valor de tg 5,5° utilizando a tangente da soma de arcos.

$$\text{tg}\,5{,}5° = \text{tg}\,(1{,}6° + 3{,}9°) = \frac{\text{tg}\,1{,}6° + \text{tg}\,3{,}9°}{1 - \text{tg}\,1{,}6° \cdot \text{tg}\,3{,}9°} = \frac{0{,}0279 + 0{,}0682}{1 - 0{,}0279 \cdot 0{,}0682} \simeq 0{,}0963$$

$$\text{tg}\,5{,}5° = \frac{4{,}5}{x} \Rightarrow 0{,}0963 = \frac{4{,}5}{x} \Rightarrow x \simeq 46{,}73$$

Se a altura da torre fosse medida desde o solo, o resultado obtido seria aproximadamente 46,73 m.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

15. Calcule o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos.

a) $75°$ b) $\frac{11\pi}{12}$ c) $15°$

16. Determine:

a) $\text{cotg}\,105°$ $\sqrt{3} - 2$

b) $\text{cossec}\,\frac{29\pi}{12}$ $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

c) $\text{cotg}\,\frac{5\pi}{12}$ $2 - \sqrt{3}$

17. Sabendo que $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{8}$, para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\cos\beta = \frac{2}{3}$, para $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$, calcule:

a) $\text{sen}(\alpha + \beta)$ $\frac{1}{12} - \frac{\sqrt{35}}{8}$

b) $\cos(\alpha + \beta)$ $\frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{7} + \frac{\sqrt{5}}{6}\right)$

c) $\cos(\alpha - \beta)$ $\frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{7} - \frac{\sqrt{5}}{6}\right)$

d) $\text{tg}(\alpha - \beta)$ $\frac{27\sqrt{7} + 128\sqrt{5}}{247}$

18. Sabendo que $\text{sen}(\alpha + \theta) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ e $\text{sen}\,\theta \cdot \cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$, calcule $\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\theta$. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

19. (Uece) Se $\text{tg}\,\alpha$ e $\text{tg}\,\beta$ são as raízes da equação $3x^2 - 6x + 2 = 0$, então o valor de $\text{tg}\,(\alpha + \beta)$ é: a

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9

20. Dado $\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{2}}{3}$, para $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule:

a) $\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ $\frac{\sqrt{7}}{3}$

b) $\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$ $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

c) $\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ $\frac{9 - 2\sqrt{14}}{5}$

21. Simplifique:

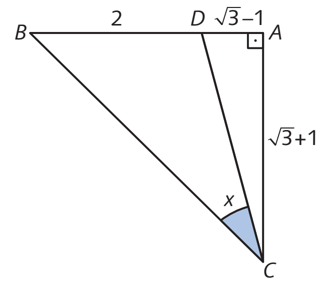
a) $\text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ $-\left(\frac{1 + \text{tg}x}{\text{tg}x - 1}\right)^2$

b) $\dfrac{\sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{sen}(x - \pi)}{\text{cossec}\,(x + \pi)}$ $\text{sen}\,x$

22. Sendo $\text{sen}\,x = -\frac{3}{5}$, determine $\text{cotg}\,x$, sabendo que $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$. $-\frac{4}{3}$

23. Dado $\text{tg}\,x = \frac{3}{2}$, determine $\frac{\sec^2 x}{\text{cossec}\,x \cdot \cos x}$. $\frac{39}{8}$

24. Determine a medida do ângulo $B\hat{C}D$ no triângulo. 30°



Rafael L. Gaion

25. Sabendo que $\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{7}$, $\cos\beta = \frac{3}{10}$ e que α e β são arcos do 1º quadrante, calcule:

a) $\text{sen}(\alpha + \beta)$ $\frac{12 + \sqrt{3\,003}}{70}$

b) $\cos(\alpha - \beta)$ $\frac{3\sqrt{33} + 4\sqrt{91}}{70}$

c) $\text{tg}(\alpha + \beta)$ $-\frac{400\sqrt{33} + 147\sqrt{91}}{1\,159}$

26. Qual o valor de A para que a igualdade

$$\text{sen}2\alpha \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen}^3\alpha + A \cdot \text{sen}^2\alpha + \text{sen}\alpha$$

seja verdadeira? $\text{sen}\,\alpha - 2\cos\alpha - \text{cossec}\,\alpha$

27. (Udesc) Seja x um arco tal que $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Suponha que $\text{sen}\,x = \frac{3}{4}$, então $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ é: d

a) $\frac{7}{4}$
b) $\frac{\sqrt{7}}{4}$
c) 0
d) $-\frac{3}{4}$
e) $\frac{5}{16}$

28. (FGV-SP) O valor de $\cos 72° - \cos^2 36°$ é idêntico ao de: d

a) $\cos 36°$
b) $-\cos^2 36°$
c) $\cos^2 36°$
d) $-\text{sen}^2 36°$
e) $\text{sen}^2 36°$

29. Adotando $\text{sen}\,26° = 0{,}44$ e $\cos 19° = 0{,}95$, qual dos itens apresenta uma soma maior do que 2? e

a) $\cos 26° + \text{sen}\,19°$

b) $\text{tg}\,26° + \text{tg}\,19°$

c) $\cos 71° + \text{sen}\,41°$

d) $\text{sen}\,86° + \text{sen}\,11°$

e) $\text{tg}\,56° + \text{tg}\,34°$

30. Mostre que:

a) $\text{sen}(30° + x) + \text{sen}(30° - x) = \cos x$

b) $\dfrac{\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)} = \text{tg}\,\alpha$

Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

31. Calcule $\text{tg}(b - a)$, sabendo que $\text{tg}\, b = \dfrac{3}{2}$ e $\cos a = \dfrac{1}{5}$, com $\dfrac{3\pi}{2} < a < 2\pi$. $-\dfrac{75 + 13\sqrt{6}}{106}$

32. Mostre que: Veja as respostas na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

a) $\text{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$

b) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}\,(\cos x + \text{sen}\, x)}{2}$

c) $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = \dfrac{1 + \text{tg}\, x}{1 - \text{tg}\, x}$

Em grupo

33. De maneira análoga à apresentada na tarefa resolvida **R7** da página **109**, mostrem que:

a) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$

b) $\text{tg}\, 2\alpha = \dfrac{2 \cdot \text{tg}\, \alpha}{1 - \text{tg}^2\, \alpha}$, com $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

Veja as respostas na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Observação

As igualdades $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$ e $\text{tg}\, 2\alpha = \dfrac{2 \cdot \text{tg}\, \alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$ são conhecidas, respectivamente, como **fórmulas do cosseno e da tangente do arco duplo**.

34. Calcule $y = (\text{sen}\, \alpha + \text{sen}\, \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2$, para $\alpha - \beta = 45°$. $2 + \sqrt{2}$

35. Adotando $\text{sen}\, 7° = 0{,}12$, $\cos 26° = 0{,}90$, $\cos 50° = 0{,}64$ e $\text{tg}\, 40° = 0{,}84$, calcule:

a) sen 67° — $\text{sen}\, 67° \simeq 0{,}92$

b) sen 38° — $\text{sen}\, 38° \simeq 0{,}61$

c) cos 24° — $\cos 24° \simeq 0{,}91$

d) cos 80° — $\cos 80° \simeq 0{,}17$

e) tg 10° — $\text{tg}\, 10° \simeq 0{,}18$

f) tg 85° — $\text{tg}\, 85° = 11{,}5$

36. Considere a função f definida por:

$$f(x) = \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

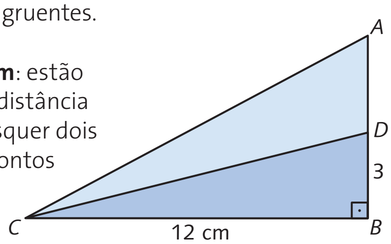
Mostre que $f(x)$ é igual a -1 para todo $x \in D(f)$.
Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

37. Calcule a área da região determinada pelo triângulo retângulo ABC, sabendo que $\overline{CD}$ é bissetriz de $A\hat{C}B$. $38{,}4\ \text{cm}^2$

Observação

A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos que **equidistam** dos lados desse ângulo. A bissetriz de um ângulo divide-o em dois ângulos congruentes.

equidistam: estão à mesma distância para quaisquer dois ou mais pontos



Rafael L. Gaion

38. (Vunesp) Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

a) Demonstre a identidade:

$$\sqrt{2} \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\, x - \cos x$$

b) Determine os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais a equação $\sqrt{2} \cdot (\text{sen}\, x - \cos x) = m^2 - 2$ admite soluções. $S = \{m \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant m \leqslant 2\}$

Você produtor

39. De acordo com o texto, escreva algumas questões e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se as respostas estão corretas.

No início do capítulo, vimos algumas informações sobre a torre de Pisa e a torre da Igreja de Suurhusen, conhecidas por sua inclinação. Outra construção que também apresenta inclinação são as torres Puerta de Europa, em Madri, na Espanha. Conhecidas como o símbolo da Madri moderna, são duas torres que se inclinam uma para outra, ultrapassando o ângulo de inclinação da torre da Igreja de Suurhusen, chegando a aproximadamente 9,7°.

Alexandre Rotenberg/Shutterstock.com

Torres Puerta de Europa, Espanha, em outubro de 2019.

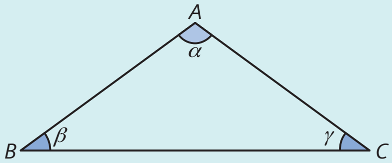
Também conhecidas como Torres KIO, em referência ao nome da principal empresa acionista, elas têm 115 m de altura e foram projetadas e construídas para terem essa inclinação. Começaram a ser construídas em 1990 e foram finalizadas em 1995, de acordo com o projeto do estúdio nova-iorquino John Burgee Architects.

Fonte de pesquisa: BEM-VINDO A MADRID. *Torres Kio (Puerta de Europa)*. Disponível em: <https://www.esmadrid.com/pt/informacao-turistica/torres-kio-puerta-europa>. Acesso em: 28 maio 2020.

Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Desafio

40. O triângulo ABC representado abaixo é isósceles.



Rafael L. Gaion

Nesse triângulo, $\alpha > 90°$ e $2\text{tg}\, \beta + \text{tg}\, \alpha = -\dfrac{3}{4}$. Calcule $\text{tg}^2\gamma \cdot \text{tg}\, \alpha$. $-\dfrac{3}{4}$

Explorando problemas

Utilize as etapas sugeridas para resolver o problema a seguir.

Com o auxílio de um binóculo apoiado em um tripé, uma observadora a 70 m de um prédio, olhando com uma inclinação α em relação ao solo, consegue ver até o 10º andar, isto é, ela visualiza completamente os 9 primeiros andares. Sabendo que, para enxergar o topo desse prédio, ela precisa dobrar o ângulo de observação, e cada andar do prédio tem 3,5 m de altura, calcule a altura aproximada do prédio. (Para realizar os cálculos, desconsidere a altura do observador e do tripé.)

ONOKY – Photononstop/Alamy/Fotoarena

Observação
Considere o térreo como o primeiro andar.

Compreender

1. Há palavras apresentadas no texto que você não conhece? Se sim, pesquise-as. Resposta pessoal.

2. O que se pede no problema? c

a) A altura de um andar do prédio.

b) A altura do 10º andar do prédio.

c) A altura aproximada do prédio.

d) A distância entre a observadora e o prédio.

3. Quais informações são importantes para a compreensão do problema? b e d

a) A largura do prédio.

b) A distância que a observadora está do prédio.

c) A altura da observadora.

d) A altura de cada andar do prédio.

Planejar

4. Quais conceitos matemáticos são necessários para a resolução do problema? b, c e d

a) Conjuntos e subconjuntos.

b) Fórmulas de transformação.

c) Trigonometria no triângulo retângulo.

d) Arcos trigonométricos.

e) Matrizes e determinantes.

5. Determine se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.

a) A altura dos 10 andares corresponde a 35 m.
Verdadeira, pois cada andar mede 3,5 m de altura e $10 \cdot 3{,}5 = 35 \rightarrow 35$ m.

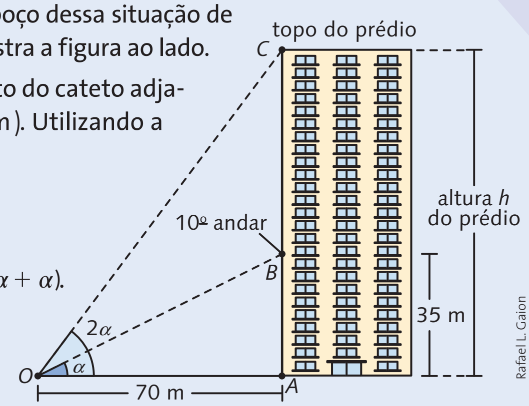
b) Ao duplicar o ângulo de observação teremos $\alpha + \beta$, com $\beta \neq \alpha$.
Falsa, ao duplicar o ângulo α, teremos 2α.

6. Represente as informações principais do problema por meio de uma figura, esquema ou quadro e introduza uma notação adequada para os dados.
Veja a resposta nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.

7. Antes de realizar o cálculo por escrito ou em uma calculadora, estime uma resposta para o problema. Ao final das etapas, compare o valor estimado com o resultado obtido.
Resposta pessoal. Espera-se que os alunos consigam fazer uma estimativa próxima do resultado obtido.

Executar

8. Uma maneira de resolver o problema é fazer inicialmente um esboço dessa situação de acordo com as informações apresentadas no problema, como mostra a figura ao lado.



- Considerando o triângulo retângulo OAB, então o comprimento do cateto adjacente ao ângulo α é 70 m e do cateto oposto é 35 m $(10 \cdot 3{,}5 \text{ m})$. Utilizando a relação da tangente, temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{35}{70} = \frac{1}{2}$$

- Consideramos o triângulo retângulo OAC, obtemos $\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha)$. Utilizando a fórmula de transformação para a tangente, temos:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

- Substituindo $\operatorname{tg} \alpha$ por $\frac{1}{2}$, temos:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

- Considerando h a altura do prédio, temos:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{AC}{OA} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{h}{70} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{h}{70} \Rightarrow h \simeq 93{,}3$$

Portanto, a altura do prédio é de, aproximadamente, 93,3 m.

Verificar

9. Podemos realizar alguns cálculos para verificar se a altura do prédio está correta. Uma maneira é analisar os valores referentes às medidas de α e 2α utilizando uma calculadora científica e a tabela trigonométrica.

- Sabemos que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} = 0{,}5$.
- De acordo com a tabela trigonométrica, podemos observar que $26° < \alpha < 27°$.
- Utilizando essas medidas como parâmetro e com o auxílio de uma calculadora científica, podemos verificar que, para $\alpha = 26{,}56°$, temos $\operatorname{tg} \alpha \simeq 0{,}5$.
- Duplicando α, obtemos:

$$2 \cdot 26{,}56° = 53{,}12° \Rightarrow 2\alpha = 53{,}12°$$

- Com uma calculadora científica, calculamos $\operatorname{tg} 2\alpha$:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} 53{,}12° \simeq 1{,}33$$

- Como $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{h}{70}$, concluímos que:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{93{,}3}{70} \simeq 1{,}33$$

Medida do ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
25°	0,4226	0,9063	0,4663
26°	0,4384	0,8988	0,4877
27°	0,4540	0,8910	0,5095
28°	0,4695	0,8829	0,5317
⋮	⋮	⋮	⋮
52°	0,7880	0,6157	1,2799
53°	0,7986	0,6018	1,3270
54°	0,8090	0,5878	1,3764

4 Equações trigonométricas

Estudamos anteriormente os fenômenos periódicos, isto é, aqueles que se repetem sempre após um intervalo regular de tempo. Na seção **Saiba mais** do capítulo anterior, obtivemos a lei de formação de uma função que permitia calcular o período aproximado de horas da duração do dia em qualquer data do ano, em certa cidade brasileira. Essa função era dada por $h(x) = \frac{71}{6} - \frac{13}{6} \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi x}{365}$, em que h expressa a quantidade de horas da duração do dia nessa cidade e x, o total de dias após 21 de março (equinócio).

Nessa situação, podemos calcular quantos dias se passaram do dia 21 de março, quando a duração do dia for cerca de 10h. Nesse caso, devemos calcular o valor de x quando $h(x) = 10$:

$$\underbrace{h(x)}_{10} = \frac{71}{6} - \frac{13}{6} \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi x}{365} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 = \frac{71}{6} - \frac{13}{6} \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi x}{365} \Rightarrow \text{sen}\,\frac{2\pi x}{365} = \frac{11}{13}$$

Essa equação, é um exemplo de **equação trigonométrica**.

Exemplos

- $\cos x = \frac{1}{2}$
- $\text{sen}\,x = \cos\frac{\pi}{2}$
- $3 + \text{tg}\,x = 1$

Sejam f e g funções trigonométricas na variável real x e domínios $D(f)$ e $D(g)$. Resolver uma equação trigonométrica $f(x) = g(x)$ significa determinar o conjunto solução S dos números s, tais que $s \in D(f) \cap D(g)$ e $f(s) = g(s)$ sejam verdadeiras.

Grande parte das equações trigonométricas pode ser transformada em uma das seguintes equações:

- $\text{sen}\,x = \text{sen}\,\alpha$
- $\cos x = \cos \alpha$
- $\text{tg}\,x = \text{tg}\,\alpha$

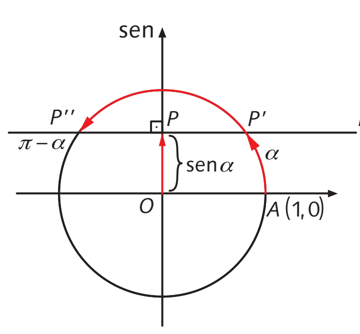
Observação

Dados os conjuntos $A = \{-1,0,3,5,6\}$ e $B = \{-1,1,3,5,7\}$, vamos determinar o conjunto C formado pelos elementos que pertencem a A e B simultaneamente.

Assim, temos $C = \{-1,3,5\}$. O conjunto C é chamado **interseção** de A e B e pode ser indicado por $A \cap B$, que se lê A **interseção** B.

Essas equações são chamadas **equações fundamentais**.

Para resolver equações do tipo $\text{sen}\,x = \text{sen}\,\alpha$, vamos representar na circunferência trigonométrica o ponto P tal que $\text{sen}\,\alpha = OP$. Pelo ponto P, traçamos uma reta r perpendicular ao eixo dos senos, intersectando a circunferência nos pontos P' e P''. Nesse caso, temos as seguintes possibilidades para P' e P'', respectivamente:



Rafael L. Gaion

- $\alpha + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
- $(\pi - \alpha) + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

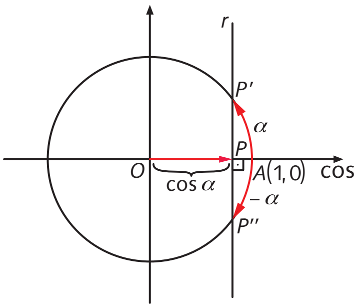
De forma resumida, podemos escrever:

$$\text{sen}\,x = \text{sen}\,\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = (\pi - \alpha) + 2k\pi \end{cases}, \text{com } k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, o conjunto solução da equação $\text{sen}\,x = \text{sen}\,\alpha$ é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = (\pi - \alpha) + 2k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Agora, para resolver equações do tipo $x = \cos \alpha$, vamos representar na circunferência trigonométrica o ponto P, tal que $\cos \alpha = OP$. Pelo ponto P, traçamos uma reta r perpendicular ao eixo dos cossenos, intersectando a circunferência nos pontos P' e P''.



Nesse caso, temos as seguintes possibilidades para P' e P'', respectivamente:

- $\alpha + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
- $-\alpha + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

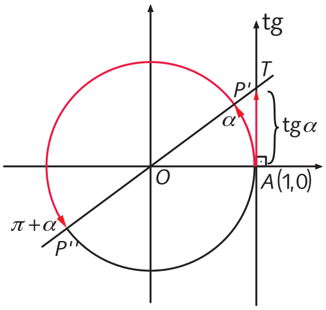
De forma resumida, podemos escrever:

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}, \text{com } k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, o conjunto solução da equação $\cos x = \cos \alpha$ é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \pm\alpha + 2k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Para resolver equações do tipo $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$, vamos representar na circunferência trigonométrica o ponto T sobre o eixo das tangentes, tal que $\operatorname{tg} \alpha = AT$. Traçamos uma reta passando por O e T intersectando a circunferência nos pontos P' e P''.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Nesse caso, P' e P'' correspondem a: $\alpha + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

De forma resumida, podemos escrever:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, o conjunto solução da equação $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$, com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Observação

No caso de $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, o conjunto solução de $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$ é vazio, o qual indicamos por $S = \varnothing$.

Após os alunos lerem o texto do quadro Observação, pergunte a eles por que, para $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, o conjunto solução é vazio. Leve-os a perceber que é porque a tangente desses arcos não existe.

Podemos resolver a equação $\operatorname{sen} \frac{2\pi x}{365} = \frac{11}{13}$, apresentada na página anterior, da seguinte maneira:

Sabendo que $\frac{11}{13} \simeq 0{,}846$, vamos consultar uma tabela trigonométrica para determinar o valor de α em que $\operatorname{sen} \alpha \simeq 0{,}846$, isto é, $\alpha \simeq 58°$. Assim:

Medida do ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
57°	0,8387	0,5446	1,5399
58°	0,8480	0,5299	1,6003
59°	0,8572	0,5150	1,6643

Antes de apresentar a resolução da equação, deixe que os alunos tentem resolvê-la antes de abordá-la no livro, a fim de que, em duplas, possam chegar ao resultado. Depois, considerando as estratégias e resoluções propostas e desenvolvidas por eles, apresente as explicações encontradas no livro.

$$\operatorname{sen} \frac{2\pi x}{365} = \frac{11}{13} \Rightarrow \frac{2 \cdot \overbrace{180°}^{\text{correspondente a um arco de } \pi \text{ rad}} \cdot x}{365} = 58° \Rightarrow 360°x = 58° \cdot 365 \Rightarrow x \simeq 58{,}8 \rightarrow \text{aproximadamente 58,8 dias}$$

Problemas e exercícios resolvidos

R9. Resolva as equações em $\mathbb{R}$.

a) $\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$

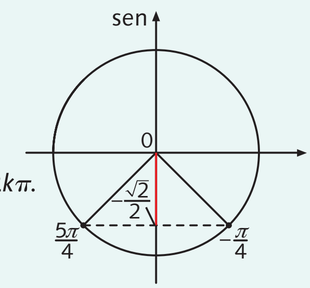
c) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right) = 1$

Resolução

a) $\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Para que sen x seja igual a $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, x deve ser igual a $\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ou $\underbrace{-\dfrac{\pi}{4}}_{\pi - \frac{5\pi}{4}} + 2k\pi$.



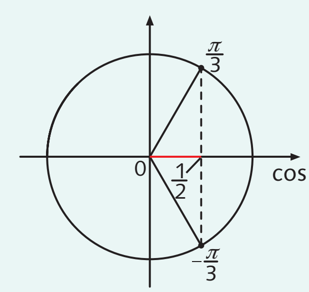
Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$

Nesse caso, $2x$ deve ser igual a $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Assim:

- $2x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$
- $2x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$



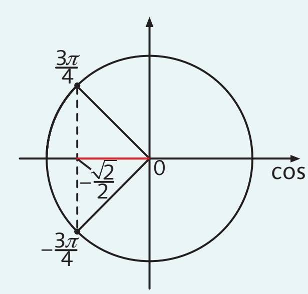
Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Nesse caso, $x + \dfrac{\pi}{4}$ deve ser igual a $\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $-\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$.

Assim:

- $x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$
- $x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = -\pi + 2k\pi$

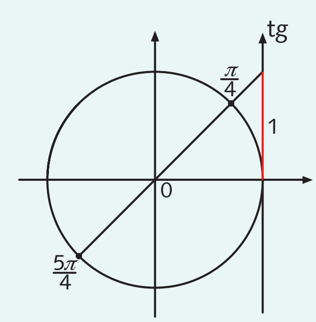


Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -\pi + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) $\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right) = 1$

Nesse caso, $\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right)$ deve ser igual a $\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

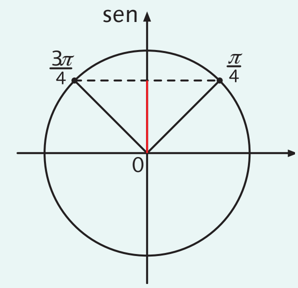
Assim: $x - \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi$.



Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ilustrações: Rafael L. Gaion

R10. Calcule o valor de x na equação $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$, com $x \in [0, 2\pi]$.



Rafael L. Gaion

Resolução

Para que sen x seja igual a $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$, x deve ser igual a $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $\underbrace{\frac{3\pi}{4}}_{\pi - \frac{\pi}{4}} + 2k\pi$.

Como $x \in [0, 2\pi]$, temos $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.

R11. Determine os valores de x para que $2 \cdot \operatorname{sen}^2 x - 7 \cdot \operatorname{sen} x + 3 = 0$, com $x \in \mathbb{R}$.

Resolução

$2 \cdot \operatorname{sen}^2 x - 7 \cdot \operatorname{sen} x + 3 = 0$

Fazendo sen $x = m$ na equação, temos: $2m^2 - 7m + 3 = 0 \begin{cases} m_1 = 3 \\ m_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$.

$$\text{Assim: } \begin{cases} \operatorname{sen} x = 3 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}, \text{ pois } -1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \\ \quad \text{ou} \\ \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \underbrace{\frac{5\pi}{6}}_{\pi - \frac{\pi}{6}} + 2k\pi \end{cases}$$

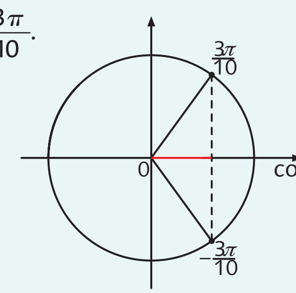
Observação
O símbolo $\nexists$ lê-se: não existe.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

R12. Resolva a equação $\cos x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}$ em $\mathbb{R}$.

Resolução

Como $\operatorname{sen} \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, temos: $\operatorname{sen} \frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{\pi}{5} = \cos \frac{3\pi}{10}$.



Rafael L. Gaion

Assim: $\cos x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{5} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{3\pi}{10}$.

Então: $x = \frac{3\pi}{10} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{3\pi}{10} + 2k\pi$.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \pm\frac{3\pi}{10} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

R13. Calcule o valor de x na equação $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$, com $x \in [0, 2\pi]$.

Resolução

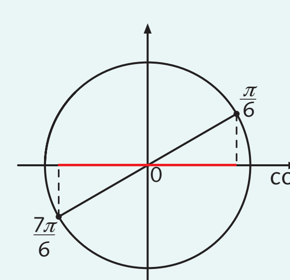
Para que cos x seja igual a $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$, x deve ser igual a $\frac{\pi}{3} - x + 2k\pi$ ou $-\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 2k\pi$.

Segue que:

- $x = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$
- $x = -\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 2k\pi \Rightarrow k = \frac{1}{6}$ (não convém)

Como $x \in [0, 2\pi]$, $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$.

Portanto, $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$.



Rafael L. Gaion

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

41 a 44. Veja as respostas na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

41. Resolva as equações em $\mathbb{R}$.

a) $\text{sen } 2x = -\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{1}{2} + \text{sen } x = 0$

c) $3 \cdot \text{tg } x = 3\sqrt{3}$

d) $\cos\left(x + \dfrac{2\pi}{5}\right) = 1$

e) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

f) $\text{tg } 4x = -1$

g) $\text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$

h) $\text{tg}\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

42. Em um mesmo plano cartesiano, esboce os gráficos das funções definidas por $f(x) = \cos 2x$ e $g(x) = \cos x$, no intervalo $x \in [0, 2\pi]$. Depois, determine as abscissas dos pontos de interseção dos gráficos nesse intervalo.

43. Na circunferência trigonométrica, represente as soluções da equação $\text{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

44. Resolva as equações em $\mathbb{R}$.

a) $\text{cossec } x = 1$

b) $\dfrac{1}{\sec x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\text{sen } x = \text{sen } \dfrac{3\pi}{5}$

d) $\cos x = \cos \dfrac{7\pi}{6}$

e) $\text{tg}^2 x = 1$

f) $4 \cdot \text{sen}^2 x - 4 \cdot \text{sen } x - 3 = 0$

g) $\cos x \cdot \text{cossec } \dfrac{5\pi}{3} = 1$

h) $\sec x = \text{cossec } \dfrac{3\pi}{8}$

42. Se achar conveniente, entregue aos alunos uma malha quadriculada para que eles possam esboçar os gráficos das funções.

45. Calcule os valores de x para os quais $\cos^2 2x + 6 = 7 \cdot \cos 2x$, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 \text{ ou } x = \pi \text{ ou } x = 2\pi\}$

46. Qual o conjunto solução da equação $2 \cdot \text{sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0$, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$?

47. (Unir-RO) A soma de todas as soluções reais da equação $\text{sen } 2x = \cos x$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é: d

a) 4π

b) π

c) 2π

d) 3π

e) 5π

49. Se achar conveniente, promova uma conversa envolvendo todos os alunos da turma sobre a importância da doação de sangue. Aproveite a oportunidade e solicite a eles que realizem uma pesquisa sobre os fatores que impedem definitivamente a doação de sangue.
Veja mais informações na Assessoria pedagógica.

48. Qual o conjunto solução da equação $\text{tg}^2 x = \dfrac{1}{3}$, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$?
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{6} \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{6} \text{ ou } x = \dfrac{7\pi}{6} \text{ ou } x = \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

Em grupo

49. Muitas campanhas têm sido realizadas com o objetivo de conscientizar a população sobre a importância de doar sangue e, assim, incentivar pessoas que não têm esse hábito a fazerem a doação, podendo tornar-se doadoras permanentes. Para doar sangue é necessário ter entre 18 e 69 anos, estar bem de saúde, levar um documento com fotografia, ter mais de 50 kg e, no momento da doação, não estar em jejum.

É importante saber que: a doação não traz risco à saúde; o material utilizado é descartável; quem doa sangue uma vez não é obrigado a doar sempre; homens podem doar sangue, no máximo, 4 vezes ao ano, e mulheres, no máximo 3 vezes.

withGod/Shutterstock.com

Pessoa em uma clínica especializada realizando uma doação de sangue.

No hemocentro de certo hospital, a quantidade de doações tem variado periodicamente. Suponha que em 2020, de janeiro ($t = 0$) a dezembro ($t = 11$), essa quantidade possa ser dada pela função definida por

$Q(t) = \alpha - \cos\left[\dfrac{(t-1)\pi}{6}\right]$, em que t representa tempo em meses ($0 \leqslant t \leqslant 11$), $Q(t)$ é dada em milhares e α é uma constante positiva.

a) Sabendo que no mês de fevereiro houve 2 mil doações de sangue, qual o valor de α? $\alpha = 3$

b) Em quais meses houve 3 mil doações de sangue? maio e novembro

Você cidadão

- Você conhece alguma pessoa que doa sangue? Resposta pessoal.
- Em sua opinião, qual é a importância de doar sangue? Resposta pessoal.

46. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{6} \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{6} \text{ ou } x = \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

50. Podemos calcular a distância horizontal percorrida por uma bola de basquete, utilizando a equação $s = \dfrac{v_0^2 \cdot \text{sen } 2\alpha}{g}$, em que s corresponde a essa distância, v_0 à velocidade inicial do lançamento da bola, α ao ângulo formado pela trajetória da bola com a horizontal e g à aceleração da gravidade. (Dados: $g = 9{,}8$ m/s^2; sen 60° = 0,87.)

UK Sports Pics Ltd/Alamy/Fotoarena

Nesse lançamento, a bola descreve uma trajetória parabólica.

a) Qual é a distância horizontal percorrida pela bola em um lançamento, sabendo que a velocidade inicial foi de 12 m/s e o ângulo α foi de 60°? aproximadamente 12,78 m

b) Em certo lançamento, a bola percorreu 5,29 m, com velocidade inicial de 7,2 m/s. Nessa situação, determine a medida do ângulo α. 45°

Você produtor

51. Elabore um problema envolvendo uma equação trigonométrica e dê para um colega resolver em $\mathbb{R}$. Em seguida, verifique se a resolução do problema está correta.

52. Considere as funções f e g definidas por $f(x) = \text{sen } 2x$ e $g(x) = \text{sen } x$. Para quais valores de x, $x \in [0, 2\pi]$, temos $f(x) \geqslant g(x)$?

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \pi \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{3} \text{ ou } x = 2\pi\right\}$

53. (UEL-PR) Em relação à equação $\cos x = \cos 2x$, com $x \in [0, 2\pi]$, é correto afirmar que: a

a) Possui uma solução no 3º quadrante.

b) Possui duas soluções no 2º quadrante.

c) Possui somente a solução nula.

d) Uma das suas soluções é π.

e) A única solução não nula é $\dfrac{2\pi}{3}$.

54. (Unesp-SP) Uma equipe de agrônomos coletou dados da temperatura (em °C) do solo em uma determinada região, durante três dias, a intervalos de 1 hora. A medição da temperatura começou a ser feita às 3 horas da manhã do primeiro dia ($t = 0$) e terminou 72 horas depois ($t = 72$). Os dados puderam ser aproximados pela função dada por $H(t) = 15 + 5 \cdot \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{12}t + \dfrac{3\pi}{2}\right)$, onde t indica o tempo (em horas) decorrido após o início da observação e $H(t)$ à temperatura (em °C) no instante t.

a) Resolva a equação $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{12}t + \dfrac{3\pi}{2}\right) = 1$, para $t \in [0, 24]$. $t = 12$

b) Determine a temperatura máxima atingida e o horário em que essa temperatura ocorreu no primeiro dia de observação. 20 °C; 15 horas

Nolanberg11/Shutterstock.com

Agrônomo em uma plantação realizando coleta de informações.

51. Resposta pessoal. Possível resposta: a partir da função dada por $h(x) = \dfrac{71}{6} - \dfrac{13}{6} \cdot \text{sen}\dfrac{2\pi x}{365}$, em que h expressa a quantidade de horas da duração do dia em determinada cidade e x o número de dias após 21 de março (equinócio), calcule a duração do dia, em horas, quando se passarem 92 dias do equinócio.

Finalizando a conversa

a) O que você entendeu acerca das relações trigonométricas fundamentais?
Resposta pessoal. Espera-se que os alunos tenham compreendido que essas relações ajudam na manipulação de algumas razões trigonométricas.

b) Quais fórmulas de transformações trigonométricas foram estudadas neste capítulo?
Seno da soma e da diferença, cosseno da soma e da diferença e tangente da soma e da diferença.

c) O que caracteriza uma equação trigonométrica?
Uma equação trigonométrica é caracterizada por uma igualdade com pelo menos uma razão trigonométrica, em que a incógnita se encontra na medida do arco.

d) Em que situações do dia a dia é possível utilizar as equações trigonométricas?
Possível resposta: situações que envolvam fenômenos periódicos, como os apresentados no capítulo.

e) Você considera importante o estudo deste capítulo? Por quê?

e) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que sim, pois, a partir do estudo das funções trigonométricas e equações trigonométricas, é possível compreender, de maneira abrangente, como manipular algumas razões trigonométricas bem como verificar a utilização das equações trigonométricas relacionando-as às situações envolvendo fenômenos periódicos.

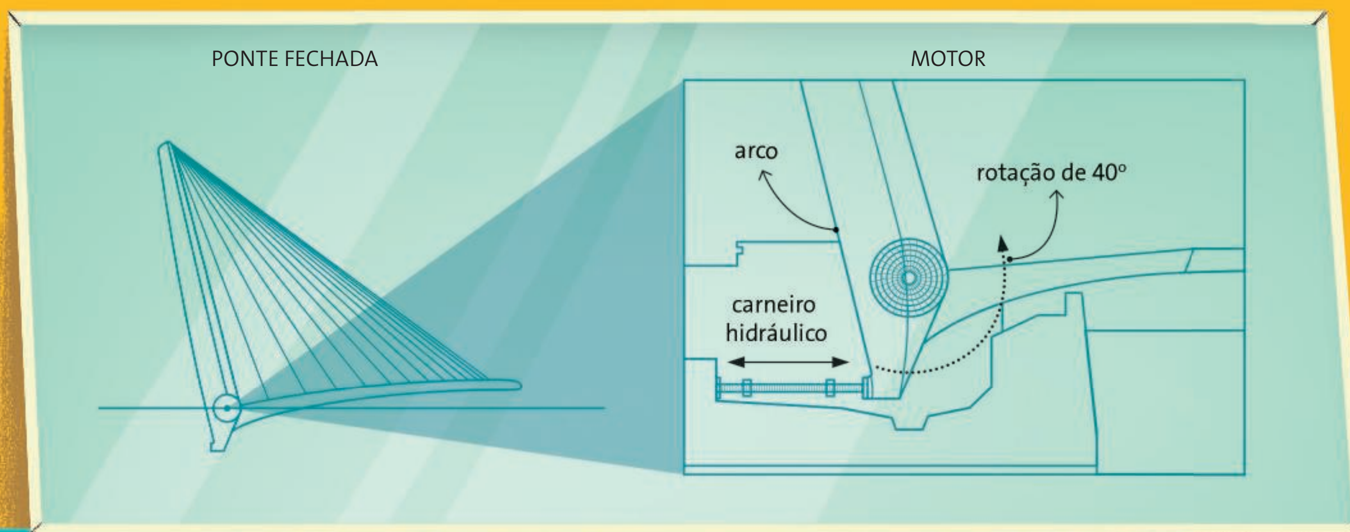
Conectando ideias

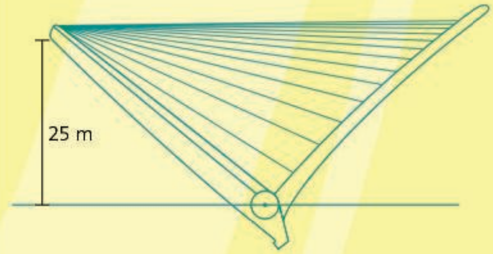
O olho que pisca

Em diversos lugares do mundo, podemos encontrar construções e monumentos famosos por sua arquitetura arrojada. Um exemplo é a ponte Gateshead Millennium, localizada sobre o rio Tyne, entre Gateshead e Newcastle, na Inglaterra. Construída exclusivamente para pedestres e ciclistas, foi aberta ao público em setembro de 2001 e é a primeira ponte basculante do mundo constituída por um par de arcos que giram em torno de um ponto em comum.

O movimento da ponte se assemelha ao fechamento de uma pálpebra humana, o que lhe conferiu o apelido de *blinking eye*, "o olho que pisca".

Veja comentários e sugestões nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.





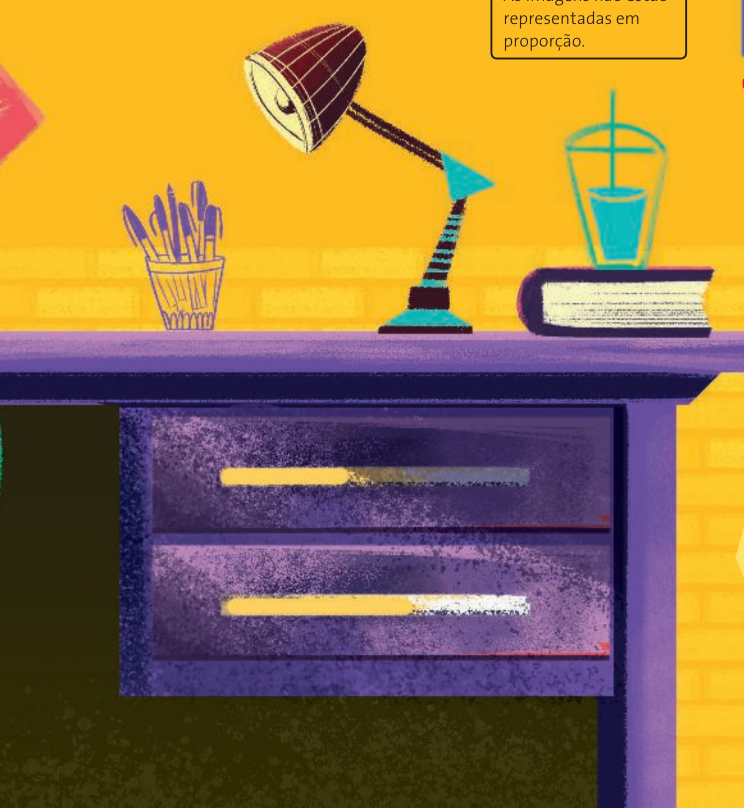
Para atingir sua elevação máxima, a ponte gira 40°.

Fonte de pesquisa: GATESHEAD COUNCIL. *Fatos da ponte Gateshead Millennium*. Disponível em: <https://www.gateshead.gov.uk/article/4596/Gateshead-Millennium-Bridge-facts>. Acesso em: 30 maio 2020.

Iordanis/Shutterstock.com

Ponte Gateshead Millennium, em junho de 2019, totalmente fechada. Na imagem, podemos visualizar alguns pedestres realizando a travessia.

As imagens não estão representadas em proporção.



Rogério Casagrande

Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que foram usadas relações, equações e transformações trigonométricas na elaboração do projeto.

a) Durante o processo de elaboração da ponte, engenheiros e arquitetos efetuaram cálculos e simulações envolvendo as dimensões, o funcionamento, entre outros aspectos. De que maneira esse processo está relacionado com o que foi estudado neste capítulo?

b) Os conceitos abordados neste capítulo foram úteis para compreender o processo de abertura e fechamento da ponte? Justifique sua resposta.

Resposta pessoal. Espera-se que os alunos tenham compreendido que a ponte executa movimentos angulares no processo de sua abertura e fechamento.

CAPÍTULO 4

Introdução à lógica de programação

leungchopan/Shutterstock.com

O que você curte?

Muitas redes sociais, quando foram criadas, exibiam todas as publicações dos usuários em ordem cronológica, ou seja, as publicações mais recentes apareciam primeiro e as demais apareciam ao deslizar a tela. Atualmente, com o excesso de conexões e informações, seria muito difícil acompanhar o que todos os seus amigos publicam. A solução encontrada por muitas dessas redes foi criar algoritmos de computador com o objetivo de analisar as publicações e decidir o que vai ou não aparecer para cada usuário. Tais algoritmos analisam a todo momento o que você acessa, com quem você interage, o que você compartilha, os seus comentários e os assuntos que você tem contato. E com base nessa análise, o algoritmo prioriza e sugere conteúdos que possam ser de seu interesse.

Pode reparar! Se você é um usuário assíduo e costuma ver notícias sobre esportes, as redes sociais vão priorizar esse tipo de conteúdo para você. Já se você usa mais para fins de entretenimento, como vídeos engraçados, são eles que vão aparecer com maior frequência. Se você usa principalmente para interagir com amigos, as publicações deles ocuparão os primeiros lugares. Mas se você pesquisou na internet sobre aquele *smartphone* novo que deseja, vai receber anúncios de lojas virtuais.

Embora não se saiba exatamente como cada algoritmo funciona, supõe-se que as redes sociais determinam os conteúdos que serão apresentados com base em características como:

- relação entre o criador do conteúdo e o usuário;
- interação da comunidade com a publicação;
- tempo desde que o conteúdo foi publicado;
- afinidade entre o tipo do conteúdo e o histórico do usuário.

a Você usa redes sociais? Com qual objetivo? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos reflitam sobre o tempo que passam conectados nas redes sociais e relatem quais são os seus principais objetivos.

b O que você entende por **algoritmo**? Explique com suas palavras e dê exemplos de algoritmos, se possível. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que algoritmo é uma sequência de instruções para realizar uma tarefa. Alguns exemplos: algoritmo para somar dois números, trocar o pneu furado de um automóvel etc.

Você cidadão

c Que cuidados devemos ter ao usar as redes sociais? Possíveis respostas: manter o mínimo de informações em seu perfil, não divulgar endereços e outras informações importantes.

O relatório Global Digital Statshot 2019, feito pelas empresas americanas de dados Hootsuite e We Are Social confirma que, até julho de 2019, 3,5 bilhões de pessoas possuíam cadastro em alguma rede social. Dá quase metade de todas as pessoas do planeta naquela data. A maioria (3,4 bilhões) acessa as redes sociais usando celulares, sendo pessoas entre 16 e 34 anos a maior parte dos usuários.

1 Introdução

Hoje em dia qualquer pessoa pode criar jogos, aplicativos de celular, *sites*, entre outros, de maneira fácil e rápida. A tecnologia evoluiu a ponto de que existem *softwares* e plataformas específicas para isso, que não exigem conhecimento prévio de linguagens de programação tradicionais, bastando que o usuário conheça um pouco sobre **algoritmos** e **lógica de programação**, assuntos que iremos estudar neste capítulo.

O *software* Scratch, por exemplo, utiliza uma linguagem gráfica com blocos lógicos e itens de som e imagem que se encaixam como peças de um quebra-cabeça. É ideal para pessoas a partir de 8 anos que queiram aprender a criar jogos, simulações, animações interativas, histórias e músicas, e tudo de maneira lúdica e criativa. Ele é disponibilizado gratuitamente para os principais sistemas operacionais disponíveis atualmente, e suas criações podem ser compartilhadas *on-line*.

Veja uma reprodução de tela do jogo *Missão Espacial*, criado pelos alunos Felipe e Yuri, de 12 anos, no curso "Desenvolvendo Jogos com Scratch", fornecido pela iniciativa Scratch Brasil.

BNCC

- CG 1
- CG 4
- CG 5
- CEMT 3
- CEMT 4
- EM13MAT315
- EM13MAT405

murat irfan yalcin/Shutterstock.com

Reprodução/Scratch/MIT

O objetivo do jogo Missão Espacial é escapar dos meteoros que voam pelo espaço e chegar até o buraco negro. Para isso, o jogador deve movimentar a nave do ET com as setas de direita e esquerda do teclado, e tentar chegar até o buraco negro sem ser atingido pelos meteoros.

Reprodução/Scratch/MIT

Vários outros usuários do Scratch estão usando o *software* para recriar jogos clássicos, como o Pac-man. Nele, o jogador utiliza as quatro setas do teclado para percorrer um labirinto, comendo todos os pontos, pontos energizantes e frutas, enquanto foge de quatro fantasmas.

Emiliano Cavalcante

Plataforma de financiamento coletivo para um jogo independente.

Os jogos criados por uma pessoa ou por pequenas equipes sem apoio financeiro pertencem a um nicho de jogos independentes, chamado de jogos *Indie*. Esse nicho está crescendo cada vez mais no Brasil e no mundo, movimentando bilhões de reais todo ano.

Conversando

b) Resposta pessoal. Possíveis respostas: buscas na internet, calculadoras e outros dispositivos eletrônicos, sistemas de lojas.

a) Você costuma se divertir com jogos eletrônicos? Em caso afirmativo, conhece algum dos jogos citados no texto? Resposta pessoal.

b) Dê outros exemplos de situações envolvendo programação.

c) Você usa programas de computador ou aplicativos de celular? Se sim, com qual objetivo? Resposta pessoal.

d) Em sua opinião, é necessário o uso de computadores e *softwares* para o ensino de lógica de programação? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que é importante, porque os conceitos devem ser aplicados de imediato.

e) Pesquise na internet outras informações e jogos feitos com o Scratch. Resposta pessoal.

2 Algoritmos

Um algoritmo representa uma sequência finita de passos estruturados para resolver um determinado problema ou automatizar uma tarefa. Geralmente, algoritmos contêm pontos de decisão e de repetição.

Veja dois algoritmos para a troca de uma lâmpada queimada: à esquerda, sem repetições, e à direita, com repetições. Note que um mesmo problema (trocar uma lâmpada queimada) pode ser resolvido de diferentes maneiras, isto é, podem existir vários algoritmos para resolver o mesmo problema.

Exemplos

Troca de uma lâmpada queimada
1. pegue uma escada
2. posicione a escada
3. busque uma lâmpada nova
4. suba na escada
5. troque a lâmpada
6. desça da escada
7. acione o interruptor para testar
8. guarde a escada
9. descarte a lâmpada queimada

Troca de uma lâmpada queimada
1. pegue uma escada
2. posicione a escada
3. enquanto a lâmpada não acender, faça
4. busque uma lâmpada nova
5. suba na escada
6. troque a lâmpada
7. desça da escada
8. acione o interruptor para testar
9. fim enquanto
10. guarde a escada

Observação
As estruturas de repetição enquanto <condição> faça serão estudadas mais detalhadamente nos últimos tópicos desse capítulo.

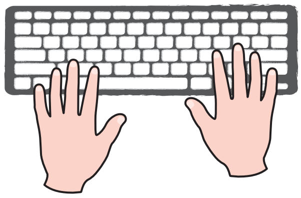
Partes de um algoritmo

Para ser programado num computador, o algoritmo precisa de três partes: **entrada**, **processamento** e **saída de dados**.

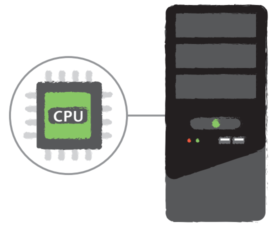
ENTRADA → PROCESSAMENTO → SAÍDA

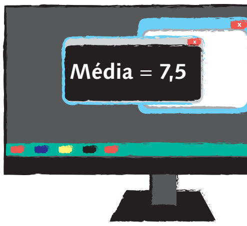
- As informações necessárias para executar o algoritmo entram por meio de dispositivos de entrada (teclado, mouse, câmera, escâner, microfone, leitor de código de barras, *joystick* e monitores *touch-screen* etc).
- São avaliadas as expressões algébricas, de relação e lógicas, assim como as estruturas de condição e de repetição que estudaremos nos próximos tópicos.
- Os resultados do processamento são enviados para o usuário por meio de um dispositivo de saída (monitores, impressoras e caixas de som etc.).

Por conveniência, exceto quando dito o contrário, o dispositivo de entrada padrão será o teclado, enquanto o de saída será o monitor. Por exemplo, considere um algoritmo para calcular e exibir a média aritmética de três notas de um aluno em Matemática.



Rafael L. Gaion e Sergio L. Filho





Ilustrações: Rafael L. Gaion

Entrada:
Notas 1, 2 e 3, informadas pelo usuário, por meio de um teclado, por exemplo.

Processamento:
$$\frac{\text{nota 1} + \text{nota 2} + \text{nota 3}}{3}$$
Calculada na Unidade Central de Processamento (CPU) do computador.

Saída:
Média exibida no monitor, na janela de um programa, por exemplo.

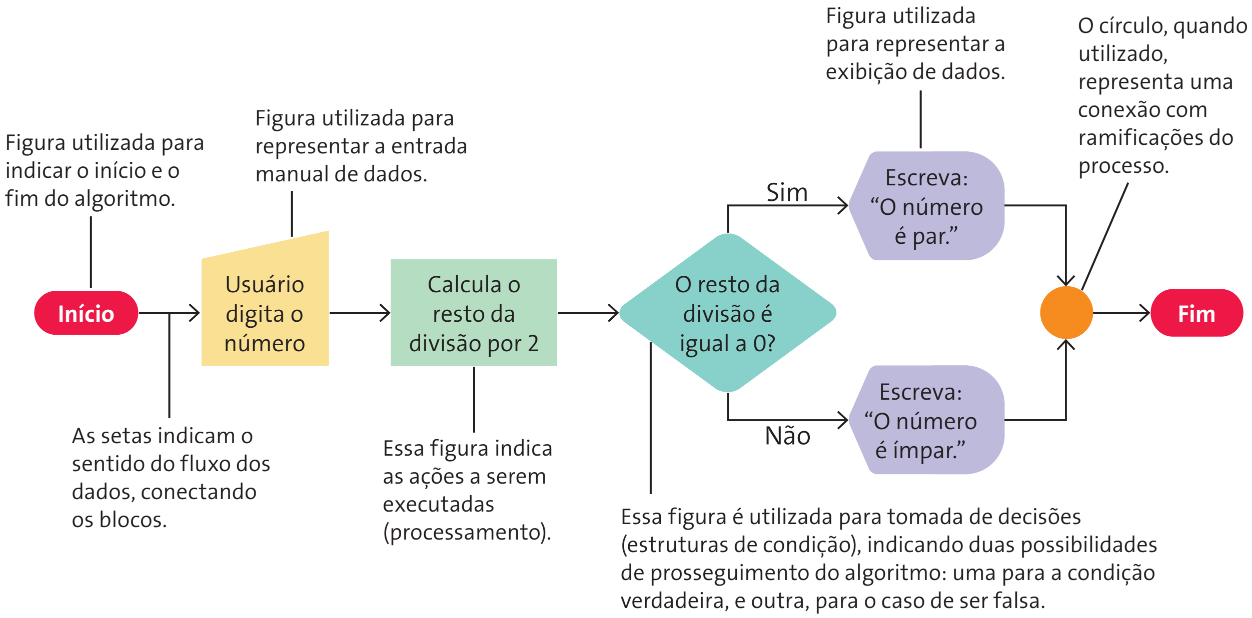
Fluxograma

Para o computador processar um algoritmo, é preciso utilizar linguagens de programação, que estudaremos nos próximos tópicos. No entanto, para representar esse algoritmo em formato gráfico, podemos utilizar um **fluxograma** (ou **diagrama de fluxo**).

Cada passo é representado por figuras interligadas por setas. São várias figuras geométricas que podem ser utilizadas. Veja o significado das figuras mais comuns no exemplo a seguir.

Exemplo

Fluxograma para determinar se um número é par ou ímpar.



Observação

As figuras fazem parte de um padrão que permite fácil compreensão das etapas, do início ao fim, o que permite efetuar possíveis correções e mudanças no algoritmo.

- Utilize o fluxograma do exemplo para verificar se o número 137 é par ou ímpar. O número 137 é ímpar.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

1. a 4. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

1. Escreva um algoritmo para:

a) escovar os dentes.

b) trocar o pneu de um automóvel.

c) tomar banho.

d) fritar um ovo.

Observação

Compare as suas respostas com as de um colega.

2. Considere uma tarefa da sua rotina diária e elabore um algoritmo com os passos que você normalmente utiliza nessa tarefa.

Observação

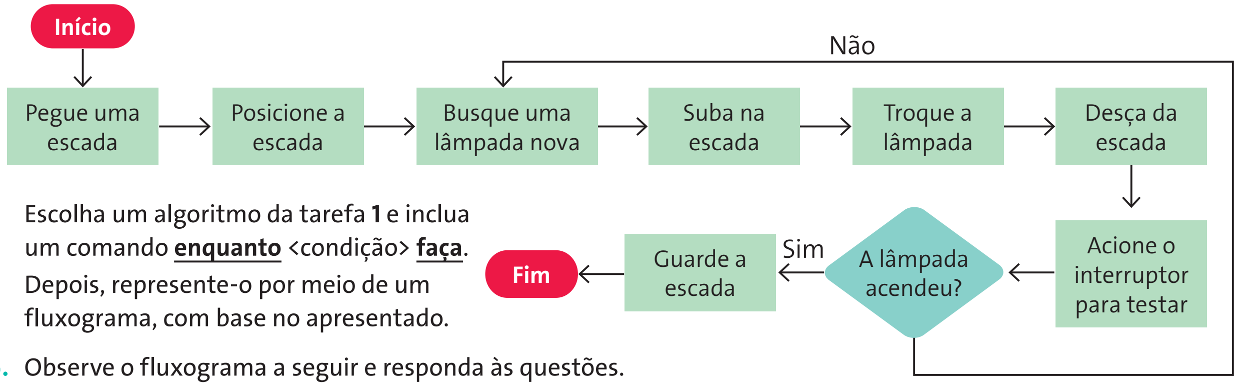
Para as tarefas **3** e **4**, utilize a figura adequada nas tomadas de decisão.

3. Represente um algoritmo por meio de fluxograma para possíveis atividades no fim de semana, em que você vê a previsão do tempo e, se estiver ensolarado, vai praticar esportes ao ar livre, senão, vai arrumar o quarto, ler notícias e depois praticar jogos de tabuleiro.

4. Elabore um fluxograma para classificar um triângulo quanto à medida do comprimento de seus lados, ou seja, em **escaleno**, **isósceles** ou **equilátero**. Compare com o fluxograma dos colegas.

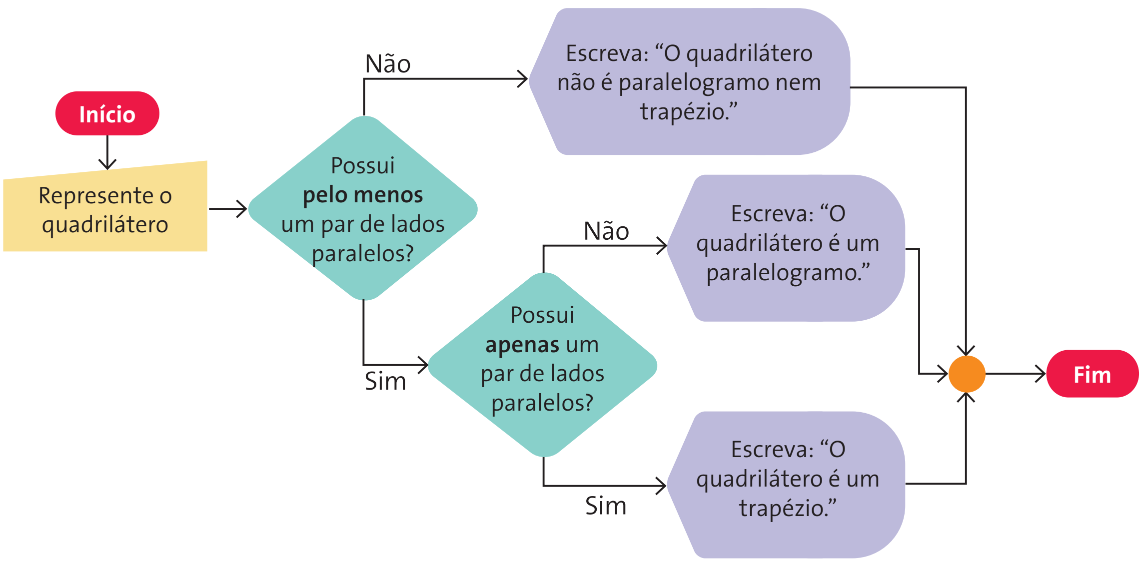
5. e 7. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

5. As setas de um fluxograma também podem indicar estruturas de repetição. Veja o algoritmo referente à troca de uma lâmpada, apresentado na página **125**.



Escolha um algoritmo da tarefa **1** e inclua um comando **enquanto** <condição> **faça**. Depois, represente-o por meio de um fluxograma, com base no apresentado.

6. Observe o fluxograma a seguir e responda às questões.



a) Esse fluxograma descreve qual processo? Classificar um quadrilátero entre paralelogramo, trapézio ou nenhum dos dois.

b) A afirmação "todo paralelogramo possui mais de um par de lados paralelos" é verdadeira? Sim, pois um paralelogramo possui 2 pares de lados paralelos.

c) Represente alguns quadriláteros em uma malha quadriculada e utilize o fluxograma para classificá-los. Resposta pessoal. Veja uma possível resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

7. Faça as adaptações necessárias no exemplo da página anterior e construa um fluxograma para determinar se:

a) uma pessoa é maior de idade ($\geqslant 18$ anos) ou menor de idade (< 18 anos).

b) um número real não nulo é positivo ou negativo.

c) a diferença entre um primeiro e um segundo número digitado é menor do que zero (< 0) ou maior ou igual a zero ($\geqslant 0$).

d) um retângulo é também um quadrado.

8. Você conhece os desafios de travessia de rio? Há variações trocando seus elementos, mas o objetivo é o mesmo: atravessar o rio com todos os objetos, animais e pessoas para o outro lado do rio. Escreva um algoritmo para resolver o problema fictício a seguir. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

A raposa, a galinha e o milho

Era uma vez um fazendeiro que foi ao mercado e comprou uma raposa, uma galinha e um saco de milho. Na volta para casa, o fazendeiro precisava atravessar o rio, sendo que seu pequeno barco só aguentava o peso dele e de mais uma única de suas compras: a raposa, a galinha ou o milho. Sabe-se que a raposa não pode ficar sozinha com a galinha em uma mesma margem, assim como a galinha e o milho.

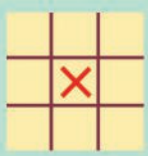
Saiba mais

Nunca perca no jogo da velha

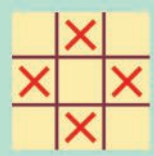
Você conhece o jogo da velha? É um passatempo bastante popular, com regras simples e que podem ser facilmente aprendidas. Sua origem não é conhecida, mas no Egito antigo foram encontrados tabuleiros, provavelmente feitos por escravos, de mais de 3 500 anos esculpidos na rocha.

O tabuleiro é um quadro de três linhas por três colunas. Cada jogador escolhe um símbolo, geralmente um círculo (O) ou um xis (X). Eles jogam alternadamente, marcando cada um o seu símbolo em uma casa vazia. Vence aquele que conseguir primeiro três marcações em linha horizontal, vertical ou diagonal. O empate (diz-se “deu velha”) ocorre quando os jogadores não conseguem as três marcações em linha.

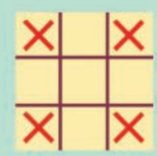
Existe uma sequência de passos para alcançar o melhor resultado no jogo e nunca perder, mas não necessariamente ganhar. Você pode usar os passos a seguir contra um adversário que desconhece essa técnica ou que cometeu um erro. Mas antes vamos definir as posições básicas:



Centro: casa do meio, rodeada pelas demais.



Borda: qualquer casa ao lado, acima ou abaixo do centro.



Canto: qualquer casa da extremidade.

Observação
O objetivo de considerar apenas as posições centro, borda ou canto em vez de cada uma das 9 posições é ignorar jogadas simétricas, ou seja, jogadas rotacionadas ou refletidas cujo resultado final seria o mesmo. Desse modo “jogar no canto”, por exemplo, significa jogar em qualquer uma das 4 casas da extremidade.

Vejamos o caso em que você começa a jogar. Siga o passo a passo e terá nove maneiras de vencer contra apenas duas de empatar.

Começando pelo centro

1 Nunca inicie por uma borda, pois dará vantagens ao adversário.

2 Se o adversário jogar em uma borda, vai ser fácil derrotá-lo, sem chance de empate. Qualquer que seja a jogada dele, escolha revidar em um dos cantos longe da marcação do adversário. Ao tentar te bloquear, ele vai favorecer a sua vitória.

3 Se o adversário jogar em um canto, você tem duas maneiras de vencer e apenas uma de empatar. Então, jogue no canto oposto, em diagonal.

4 5 Se o adversário cometer o erro de jogar em uma borda, vai permitir a você duas maneiras de vencer, dependendo da borda escolhida por ele.

6 Caso ele jogue em um canto, você deve bloqueá-lo para empatar.

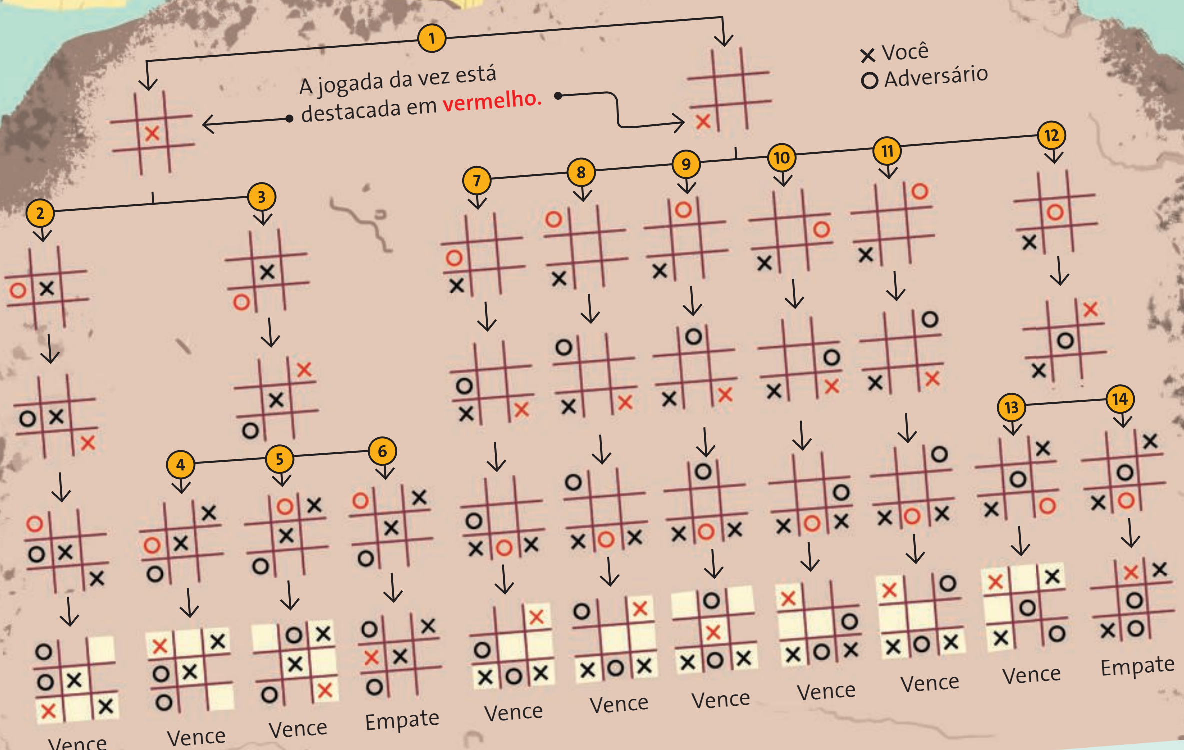
Começando pelo canto

7 8 9 10 11 Se o adversário não jogou no centro, você tem chances reais de vencer. Jogue em outro canto na mesma linha da primeira jogada. Em todos os casos, o adversário vai tentar bloquear a sua jogada pela borda e lhe dará oportunidade de vencer.

12 Se o adversário jogou no centro, forme uma diagonal.

13 Se o adversário jogar em um canto, bloqueie a jogada dele no canto que sobrou e crie a sua oportunidade de vencer.

14 Se o adversário escolher uma borda, você será forçado a bloqueá-lo e a empatar o jogo.



Bernardo França

Infelizmente, se o seu adversário for o primeiro a jogar e começar pelo centro ou pelo canto usando os passos acima, sem errar, não há maneiras de você vencer. Sua estratégia deverá ser a busca pelo empate. Para isso, você pode usar o esquema prevendo as próximas jogadas do adversário, a fim de bloqueá-lo.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos identifiquem a relação com o conteúdo estudado ao observar as tomadas de decisão de cada jogada e os caminhos que surgem conforme o jogo prossegue, representados em fluxograma no esquema desta página.

a) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que as estratégias facilitam a compreensão técnica do jogo, aumentando a possibilidade de vitória.

a) Em sua opinião, as estratégias apresentadas facilitam ou dificultam a compreensão técnica do jogo?

b) Em sua opinião, de que maneira os conceitos estudados neste capítulo estão relacionados com o jogo da velha e suas estratégias técnicas?

c) Construa um esquema para representar passo a passo uma maneira de vencer, caso a primeira jogada seja feita em uma borda.

Veja uma possível resposta nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.

3 Expressões matemáticas

Em linguagem de programação, assunto do próximo tópico, os comandos geralmente incluem operações entre valores do mesmo tipo. As operações aritméticas mais comuns são: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, divisão inteira e o resto (módulo).

Operação	Operador	Exemplos
Adição	+	3 + 5; 2 + 1
Subtração	–	3 – 5; x – 1
Multiplicação	*	Raiz * 2; 3 * x; 4 * 3
Divisão	/	1 / 2; x / y; Total / 100
Potenciação	^	4 ^ 2; a ^ 4; x ^ (1/2)
Divisão inteira	div	10 div 5, 56 div 10
Resto (módulo)	mod	10 mod 5, 41 mod 2

Explique aos alunos que outras sintaxes podem ser encontradas em outros livros, por exemplo:
Potenciação: **
Módulo: mod (x,y) ou %
Divisão inteira: //

Exemplo

Explique aos alunos que, nos exemplos, Pi, Raio e Delta são nomes dados pelo usuário às variáveis π, r e Δ, respectivamente. As constantes e variáveis são assuntos dos próximos tópicos.

Linguagem de programação	Expressão matemática
(Pi * (Raio) ^ 2) / 2	$\frac{\pi r^2}{2}$
2 * Pi * Raio	$2\pi r$
b ^ 2 – 4 * a * c	$b^2 - 4ac$
(– b – (Delta) ^ (1/2)) / (2 * a)	$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Observação

Algumas linguagens de programação trazem a função de radiciação, por exemplo, **Raiz**. No entanto, de modo alternativo, podemos escrever radicais por meio de potências de base positiva e expoentes fracionários usando a propriedade $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, sendo a um número real não negativo, m um número natural maior do que zero, e n um número natural maior do que 1.

Do mesmo modo como resolvemos expressões numéricas, na programação, resolve-se primeiro a potenciação, depois a multiplicação, a divisão, o resto e a divisão inteira, na ordem em que aparecem, e por último, a adição e a subtração, também na ordem em que aparecem. No caso de haver parênteses, os cálculos dentro deles são realizados primeiro e são executados a partir dos mais internos para os mais externos. Veja a ordem de resolução de uma expressão numérica.

Exemplo

Linguagem de programação:

9 + 3*(3 – 1) – 2^5/4 – 2
9 + 3*2 – 2^5/4 – 2
9 + 3*2 – 32/4 – 2
9 + 6 – 32/4 – 2
9 + 6 – 8 – 2
15 – 8 – 2
7 – 2
5

Expressão numérica:

$9 + 3 \cdot (3 - 1) - 2^5 : 4 - 2$
$9 + 3 \cdot 2 - 2^5 : 4 - 2$
$9 + 3 \cdot 2 - 32 : 4 - 2$
$9 + 6 - 32 : 4 - 2$
$9 + 6 - 8 - 2$
$15 - 8 - 2$
$7 - 2$
5

Agora, vamos analisar uma expressão que contém apenas variáveis sem seus valores, e três pares de parênteses.

(x + y) / (2 * y + (z – w) ^ 2)

A expressão matemática correspondente é $\frac{x+y}{2y+(z-w)^2}$, e a ordem em que as operações serão executadas é a seguinte:

1. (x + y)
2. (z – w)
3. O resultado da linha 2 elevado ao quadrado.
4. 2 * y
5. O resultado da linha 4 adicionado com o resultado da linha 3.
6. O resultado da linha 1 dividido pelo resultado da linha 5.

Uso dos parênteses

Conforme já apresentado, quando fazemos a transcrição de uma expressão matemática para a linguagem de programação, devemos dispor valores, operadores e variáveis em uma única linha. Para isso, é fundamental o uso correto de parênteses, inclusive acrescentando-os em posições que antes não eram necessárias.

Veja no quadro a seguir que, ao omitir um par de parênteses, a expressão matemática e, consequentemente, o resultado da expressão numérica pode mudar.

Linguagem de programação	Expressão matemática	Resultado para $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ e $w = 4$
(x + y) / (2 * y + (z – w) ^ 2)	$\frac{x+y}{2y+(z-w)^2}$	$\frac{1+2}{2 \cdot 2+(3-4)^2}=\frac{3}{5}$
x + y / (2 * y + (z – w) ^ 2)	$x+\frac{y}{2y+(z-w)^2}$	$1+\frac{2}{2 \cdot 2+(3-4)^2}=\frac{7}{5}$
(x + y) / 2 * y + (z – w) ^ 2	$\frac{x+y}{2}y+(z-w)^2$	$\frac{1+2}{2} \cdot 2+(3-4)^2=4$
(x + y) / (2 * y + z – w ^ 2)	$\frac{x+y}{2y+z-w^2}$	$\frac{1+2}{2 \cdot 2+3-4^2}=-\frac{1}{3}$

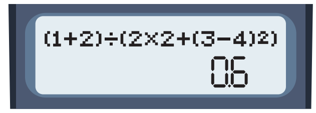
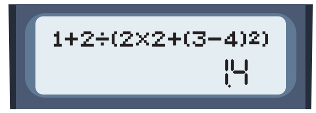
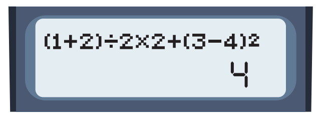
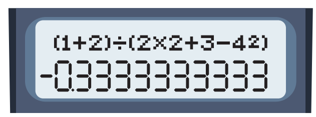
Observação

É importante parear todos os parênteses, pois a falta de "abrir" ou "fechar" um deles é um erro bastante comum. Um teste prático é verificar se a quantidade de parênteses esquerdos e direitos é a mesma.

- Atribua outros valores para as variáveis *x*, *y*, *z* e *w*, e verifique os resultados para cada expressão matemática do quadro anterior. Resposta pessoal. Veja uma possível resposta nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.

Expressões na calculadora científica

Na maioria das calculadoras científicas, as expressões também devem ser digitadas em uma única linha. É o mesmo caso da linguagem de programação, desse modo basta substituir os operadores +, –, *, / e ^ pelas respectivas teclas +, −, ×, ÷ e ^, mantendo os parênteses.

Linguagem de programação	Resultado para $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ e $w = 4$ na calculadora científica
(x + y) / (2 * y + (z – w) ^ 2)	
x + y / (2 * y + (z – w) ^ 2)	
(x + y) / 2 * y + (z – w) ^ 2	
(x + y) / (2 * y + z – w ^ 2)	

Ilustrações: Sergio L. Filho

Observação

Vale ressaltar que divisões de números pelo valor 0 (zero), ou raízes quadradas de números negativos (no conjunto dos números reais), por exemplo, não são executadas. Tente realizar um desses cálculos na calculadora científica e veja qual código irá aparecer no visor.

Operadores relacionais

Além dos operadores aritméticos e relacionais, há ainda os operadores lógicos **e** (conjunção), **ou** (disjunção) e **não** (negação), que não iremos estudar neste livro. Eles verificam se a composição de duas expressões lógicas é verdadeira ou falsa.

Os operadores relacionais são aqueles que usamos para comparar dois valores do mesmo tipo. Eles formam uma **expressão lógica**, cujo resultado só pode ser verdadeiro ou falso.

Operação	Operador	Exemplo
Igual a	=	1 = 2
Maior do que	>	3 > 2
Menor do que	<	Idade < 18
Maior ou igual a	>=	Valor >= 20
Menor ou igual a	<=	Total <= 20
Diferente de	<>	Média <> 7

Observações

- As expressões 1 = 2 e 3 > 2, por exemplo, dão como resultado falso e verdadeiro, respectivamente.
- Os operadores apresentados podem mudar, dependendo da linguagem de programação adotada.

9. e) 2*x – 1 >= (y + 3)/4 f) (x^2 / a^2+ y^2 / b^2) = 1

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

9. Reescreva as expressões matemáticas em linguagem de programação.

a) $-\dfrac{b}{2a}$ –b/(2*a)

b) $C(1 + i)^n$ C*((1 + i)^n)

c) $\dfrac{x^2 + ay^2 + bz}{abx^2}$ (x^2 + a*(y^2) + b*z)/(a*b*(x^2))

d) $\sqrt[3]{a^2} + (x - 1)^5$ a^(2/3) + (x – 1)^5

e) $2x - 1 \geqslant \dfrac{y + 3}{4}$

f) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

10. Calcule o resultado de cada expressão numérica.

a) 30 / (10 + (2 + 3)) 2

b) (4 * (9 / (7 + 3 – 9 + 2) * 5)) 60

c) 3 * 8 – (25 ^ (1 / 2)) + 3 ^ 3 46

d) 25 – (64 ^ (1 / 2) + (5 ^ 3) * (7 – (4 / 2))) –608

11. Qual é a ordem de execução da expressão a seguir?

(a + b) ^ 3 / ((c – 2 * d) + (a – b))

Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

12. Verifique se os pares de expressões a seguir retornam o mesmo resultado.

a) (8/2)+(6/3) e 8/2+6/3 retornam o mesmo resultado

b) 12/(1+5)/3 e 12/1+5/3 retornam resultados diferentes

c) (3+3)^2+1 e 3+3^(2+1) retornam resultados diferentes

Observação

Utilize uma calculadora científica para verificar suas respostas.

13. Considere a seguinte expressão.

(3 * x – y + 1) / (y + (5 * z + 1) ^ 2)

Construa um quadro com base nas informações da página **131**, omitindo um par de parênteses por vez na expressão acima, representando as expressões matemáticas e os resultados correspondentes para $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

4 Linguagens de programação

Uma linguagem de programação é um conjunto de regras **sintáticas** e **semânticas** utilizadas para transformar um algoritmo em um programa de computador. Elas são importantes para que programadores possam escrever os algoritmos de maneira mais organizada e com maior rapidez.

Ao criar programas de computador, os programadores utilizam compiladores que são programas responsáveis por traduzir algoritmos escritos em linguagem de programação para linguagem de máquina.

Algoritmo em linguagem de programação $\xrightarrow{\text{Compilador}}$ Algoritmo em linguagem de máquina

Sintática: que está relacionada com a estrutura e o formato
Semântica: que está relacionada com o significado

Um programa de computador ou um aplicativo de celular tem como parte fundamental um algoritmo escrito em linguagem de programação, com o passo a passo da execução dos comandos. Os *bugs* são erros na sua programação, que fazem o programa ou aplicativo agir de maneira não intencional.

National Physical Laboratory (c) Crown Copyright/SPL/Fotoarena

Augusta Ada Byron King (1815-1852).

Ada Lovelace, como ficou conhecida, foi uma matemática e escritora inglesa, reconhecida como a primeira programadora da história. Seus algoritmos permitiram à máquina computar os valores de funções matemáticas. A linguagem de programação ADA foi criada em homenagem a ela.

Fonte de pesquisa: WOOLEY, Benjamin. *The Bridge of Science*: Romance, Reason, and Byron's Daughter. New York: McGraw-Hill, 1999.

Bites e baites

Mas, então, por que já não escrevemos os algoritmos em linguagem de máquina? É possível, no entanto, seria uma tarefa muito complexa, pois os símbolos são compostos somente por números no formato binário (1 e 0), existindo apenas o "sim" e o "não", ou o "ligado" e o "desligado", sem um meio-termo. O **bite** é a menor unidade de informação que um computador pode armazenar. Eles são agrupados de 8 em 8, formando um caractere, chamado de **baite**, por exemplo, 01000001, que representa a letra maiúscula A.

Em resumo, escrever símbolos e operações em linguagem de máquina seria muito difícil para um ser humano, com alta probabilidade de erro. Por outro lado, a linguagem de programação é muito mais fácil de ser compreendida e modificada, pois é um meio-termo entre a linguagem de máquina e a nossa linguagem natural, contendo somente instruções abstratas do que se deve fazer.

Foram criadas várias linguagens de programação, algumas parecidas com a nossa linguagem natural, chamadas de linguagens de **alto nível**, outras mais parecidas com a linguagem de máquina, chamadas de linguagens de **baixo nível**.

Veja um exemplo de algoritmo na linguagem de programação **C**, de alto nível, que imprime a frase "Olá mundo!" no monitor.

Exemplo

"Olá mundo!" em linguagem C

```
#include <stdio.h>
int main (){
printf("Olá mundo!\n");
}
```

O comando #include inclui as bibliotecas <stdio.h> de funções necessárias.
O comando main representa a parte principal do programa, para executar o que estiver dentro das chaves { }.
O comando printf imprime o texto Olá mundo! no monitor.

Observação

Em um algoritmo implementado em uma linguagem de programação, a execução começa na primeira linha e vai avançando sequencialmente, executando o algoritmo linha após linha, até chegar ao final ou até que a execução seja interrompida.

Pseudolinguagem

A pseudolinguagem é uma linguagem de programação genérica, usada para escrever algoritmos de maneira livre e espontânea. Ela é utilizada na aprendizagem da lógica do algoritmo, com maior foco na semântica dos comandos. A estrutura básica de um algoritmo em pseudolinguagem é:

```
início
    <declaração de variáveis e constantes>
    <comandos a executar>
fim
```

Observação

Na pseudolinguagem não é preciso se preocupar com detalhes de sintaxe, como ponto final, ponto e vírgula, espaços etc. Um exemplo de pseudolinguagem é o Portugol (ou português estruturado).

Os algoritmos escritos daqui em diante serão em pseudolinguagem. Vamos comparar, em pseudolinguagem e em linguagem de programação **C**, um mesmo algoritmo para escrever o maior valor entre dois números *x* e *y*. Vejamos também a representação por fluxograma.

Exemplo

Comparar dois números em pseudolinguagem

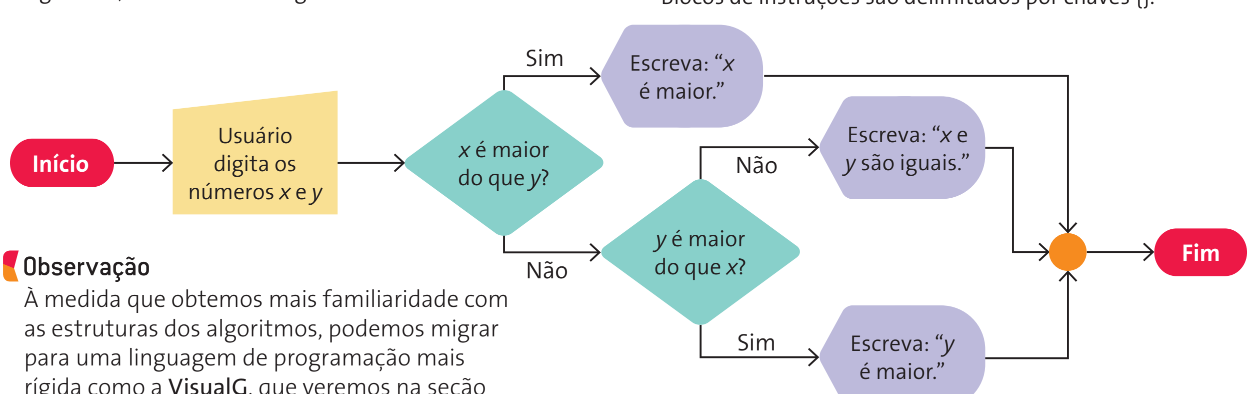
```
início
    leia (x, y)        {Esta frase é um comentário}
    se x > y então
        escreva ("x é maior")
    senão
        se y > x então
            escreva ("y é maior")
        senão
            escreva ("x e y são iguais")
        fim se
    fim se
fim
```

Os comandos em negrito e sublinhados (**início**, **leia**, **se**, **então**, **senão**, **escreva**, **fim se** e **fim**) representam, de maneira intuitiva, estruturas comuns em todas as linguagens de programação. O texto que aparece dentro de chaves { } representa um comentário, ou seja, um texto que será ignorado, servindo apenas para fazer anotações, como referência para o programador. A indentação (recuo esquerdo que antecede o comando em cada linha) é utilizada para ressaltar ou definir a hierarquia na estrutura do algoritmo, aumentando a legibilidade.

Comparar dois números em linguagem **C**

```
#include <stdio.h>
int main (){
    int x, y;        //Esta frase é um comentário
    printf("digite x:\n");
    scanf("%i",&x);
    printf("digite y:\n");
    scanf("%i",&y);
    if (x>y) {
        printf("x é maior\n");
    } else {
        if (y>x) {
            printf("y é maior\n");
        } else {
            printf("x e y são iguais\n");
        }
    }
}
```

Note que as estruturas são bem rígidas na linguagem **C** para o computador reconhecer os comandos:
- Todo programa inicia com o comando *main*.
- Linhas de comentários iniciam com duas barras (//).
- Linhas de comandos terminam com ponto e vírgula (;).
- Blocos de instruções são delimitados por chaves {}.



Observação

À medida que obtemos mais familiaridade com as estruturas dos algoritmos, podemos migrar para uma linguagem de programação mais rígida como a **VisualG**, que veremos na seção **Acesso digital** deste capítulo.

5 Constantes e variáveis

No estudo das pseudolinguagens, podemos considerar basicamente dois tipos de valores: constantes e variáveis. Por exemplo, para calcular a medida do comprimento de uma circunferência, dada por $C = 2\pi r$, é preciso saber os valores de π e da medida do comprimento do raio r da circunferência. O valor aproximado de π poderá ser definido como uma constante, enquanto o valor de r deve ser definido como uma variável, pois pode assumir diversos valores dependendo da circunferência cujo comprimento se quer calcular.

Explique aos alunos que, assim como na calculadora científica, no computador só podemos trabalhar com aproximações de números irracionais, por exemplo, a aproximação $\pi = 3{,}14$.

Declaração de variáveis e constantes

A primeira parte de um algoritmo, na **Entrada de dados**, consiste em nomear e identificar variáveis e constantes, processo chamado de **declaração** ou **definição**. Desse modo, o computador irá armazenar na memória e saberá operar com aquele valor. A seguir, veja os tipos mais comuns de variáveis e alguns exemplos de valores que elas podem assumir:

- **inteiro**: variáveis que assumem números inteiros. Exemplos: 0; 1; −50; 10; 2 350.
- **real**: variáveis que assumem números decimais. Exemplos: 1.5; 0.3; −15.8.
- **caractere**: variáveis que assumem caracteres alfanuméricos (numéricos, alfabéticos e especiais). Exemplos: "João Pedro"; "Hotel Alfa"; "Raiz"; "APROVADO".
- **lógico**: variáveis que assumem apenas os valores verdadeiro (1) ou falso (0).

Observação

Nos computadores e na calculadora científica, usamos o ponto (.) em vez da vírgula (,) como separador decimal.

As aspas duplas (") indicam o início e o fim da sequência de caracteres, mas não fazem parte do valor. O espaço em branco entre as palavras é um caractere.

Não podemos confundir o **valor** da variável (com aspas duplas e que pode incluir espaços e caracteres especiais) com o seu **nome**, que deve obedecer a algumas regras (que podem variar de acordo com a linguagem de programação):

- começar com uma letra ou com sublinhado "_", também chamado de *underline*;
- pode utilizar números;
- não utilizar caracteres especiais, acentos, nem espaços, com exceção do **sublinhado** "_";
- não utilizar palavras que representam comandos, como **se**, **então**, **leia**, **escreva** etc.

É comum utilizar palavras **mnemônicas**, ou seja, palavras que lembrem o conteúdo armazenado. Além disso, em diversas linguagens, letras maiúsculas e minúsculas são tratadas de maneira diferente, por exemplo, MEDIA, Media e media não representam a mesma variável.

Para o estudo das pseudolinguagens, vamos declarar as variáveis e constantes da seguinte maneira:

```
var <nome>: <tipo>
constante <nome> := <valor>
```

Se houver mais de uma variável (ou constante), a identificação pode ser agrupada pelo tipo (ou pelos valores), com os nomes separados por vírgulas e os tipos (ou valores) separados por linhas:

```
var <nome1>, <nome2>, ... :<tipo1>
    <nome3>, <nome4>, ... :<tipo2>
constante <nome1>, <nome2>, ... := <valor1>
          <nome3>, <nome4>, ... := <valor2>
```

Exemplo

```
var Nome, Escolaridade, Sexo: caractere
    Idade, NumFilhos: inteiro
    Salario, Peso: real
    Ligado: lógico
constante Pi := 3.14
          NumAlunos := 20
          Maximo := 100
```

Observação
Note que no exemplo ao lado não aparecem os comandos **início** e **fim**. Quando isso acontece, trata-se de um fragmento, ou seja, apenas uma parte do algoritmo em pseudolinguagem.

Atribuição de valores a uma variável

Diferente da constante, em que a atribuição do seu valor ocorre na declaração, uma variável não recebe valor no início do algoritmo. Quem pode manipular seus valores, em diferentes momentos da execução, é o usuário, pela entrada de valores via teclado, ou o próprio algoritmo, por meio de expressões matemáticas, assunto abordado anteriormente.

Para a atribuição de valores a uma variável utilizamos **<-**, que representa a seta $\leftarrow$.

```
<nome> <-  <novo valor do mesmo tipo>
<nome> <-  <operações aritméticas entre valores>
```

Exemplo

```
Nome <- "Roberto"
Escolaridade <- "Ensino médio"
Idade <- 37
Taxa <- Valor * 0.15              {A taxa é 15%}
AreaCirculo <- Pi * (Raio) ^ 2    {A = πr²}
Ligado <- Falso                   {Não está ligado }
```

Observação
Uma variável armazena um único valor por vez. Sendo assim, sempre que um novo valor é atribuído, o valor anterior é perdido. Se houver uma tentativa de atribuir um novo valor que pertence a um tipo diferente do que foi definido inicialmente, podem ocorrer erros de compilação. Já no caso das constantes, a atribuição é feita no momento de sua definição.

Veja o algoritmo em pseudolinguagem para calcular a medida do comprimento de uma circunferência, dada por $C = 2\pi r$, conforme citado no início da página anterior.

Exemplo

Medida do comprimento de uma circunferência

```
1. início                                                  {início}
2.   var Raio, Comprimento: real                           {definição das variáveis}
3.   constante Pi := 3.14                                  {definição da constante}
4.   escreva ("Digite a medida do comprimento do raio:")   {exibição em tela}
5.   leia (Raio)                                           {entrada de valores}
6.   Comprimento <-  2 * Pi * Raio                         {processamento}
7.   escreva ("A medida do comprimento é ", Comprimento)   {exibição em tela}
8. fim
```

Observação
O comando **escreva** da linha **7** exibe o texto "A medida do comprimento é" junto com o valor da variável *Comprimento*. Note que eles estão separados por vírgula no comando.

Veja como ocorre a execução do algoritmo do exemplo anterior na janela do programa.

1º O comando **escreva ( )** da linha **4** fez o programa exibir esse texto na tela. Em seguida, o comando **leia ( )** da linha **5** faz o programa ficar "esperando" o usuário digitar um número.

2º O usuário digitou "10". O comando **leia ( )** da linha **5** atribuiu esse valor à variável *Raio*. Depois, ele processou o cálculo $2\pi r$ da linha **6**, atribuindo o resultado à variável *Comprimento*.

```
Digite a medida do comprimento do raio: 10
A medida do comprimento é 62.8
```

Rafael L. Gaion

3º De acordo com o comando **escreva ( )** da linha **7**, o texto entre aspas duplas foi exibido antes do valor da variável.

4º O valor da variável *Comprimento* foi exibido logo depois do texto entre aspas duplas da linha **7**.

Problemas e exercícios resolvidos

R1. Escreva um algoritmo em pseudolinguagem para resolver uma equação do 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Resolução

Resolução de uma equação do 2º grau

```
1. início
2.    var a, b, c, Delta, x1, x2: real
3.    escreva ("Digite o coeficiente a não nulo: ")
4.    leia (a)
5.    escreva ("Digite o coeficiente b: ")
6.    leia (b)
7.    escreva ("Digite o coeficiente c: ")
8.    leia (c)
9.    Delta <- b ^ 2 – 4 * a * c                       {Δ = b² – 4ac}
10.   se Delta<0 então
11.       escreva ("Essa equação não tem raízes reais.")
12.   senão
13.       x1 <- (– b – (Delta) ^ (1/2)) / (2 * a)      {x₁ = (–b – √Δ)/2a}
14.       x2 <- (– b + (Delta) ^ (1/2)) / (2 * a)      {x₂ = (–b + √Δ)/2a}
15.       escreva ("As raízes da equação são x1 = ", x1, " e x2 = ", x2)
16.   fim se
17. fim
```

Observação

Veja alguns resultados deste algoritmo nas janelas do programa.

```
Digite o coeficiente a não nulo: 2
Digite o coeficiente b: –6
Digite o coeficiente c: 0
As raízes da equação são x1 = 1.5 e x2 = 0
```

```
Digite o coeficiente a não nulo: 1
Digite o coeficiente b: –4
Digite o coeficiente c: 4
As raízes da equação são x1 = 2 e x2 = 2
```

```
Digite o coeficiente a não nulo: 1
Digite o coeficiente b: 2
Digite o coeficiente c: 3
Essa equação não tem raízes reais.
```

Rafael L. Gaion

Neste capítulo, os algoritmos ou fragmentos de algoritmos devem ser escritos em pseudolinguagem.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

14. Vimos que o código binário 01000001 representa a letra maiúscula A. Realize uma pesquisa na internet sobre as demais letras do alfabeto em código binário ou utilize um conversor *on-line* e decodifique a palavra a seguir. MATEMATICA

01001101 01000001 01010100 01000101
01001101 01000001 01010100 01001001
01000011 01000001

15. Escreva um algoritmo em pseudolinguagem para calcular a área de uma região triangular, dada por $A = \frac{b \cdot h}{2}$, sendo que as medidas do comprimento da base (b) e do comprimento da altura (h) do triângulo são informadas pelo usuário.

Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Observação

Para resolver tarefas desse tipo, faça as adaptações necessárias no algoritmo que calcula a medida do comprimento de uma circunferência.

20. a 28. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

16. Aproveite a resolução da tarefa anterior fazendo adequações necessárias para calcular a medida da área de um círculo, dada pela fórmula $A = \pi r^2$, em que r indica a medida do comprimento do raio. Classifique os dados de entrada ou saída em constante ou variável. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

17. Para a lei de formação de cada função a seguir, escreva um algoritmo em pseudolinguagem que calcula e exibe o valor numérico da função para um valor de x informado pelo usuário.

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $g(x) = x^2 - 2x + 1$

c) $h(x) = \dfrac{2x^3}{3} - 5x^2$

d) $p(x) = 2x^5 - 5x^3$

18. Quais os valores de v1, v2 e v3 após a execução dos comandos abaixo? v1 = 0, v2 = 1 e v3 = 1

17. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

```
var v1, v2, v3: lógico
   v1 <-  8 > 9
   v2 <-  12 <= 15
   v3 <-  5 <> 0
```

19. Para cada item a seguir, escreva o que será impresso em cada linha da janela do programa após a execução dos comandos.

a)

```
A <-  5
B <-  10
escreva (A)
A <-  3
escreva (A, "e", B)
```

5
3 e 10

b)

```
x <-  0
y <-  3
z <-  x + y
x <-  5
y <-  10
escreva (x, ",", y ",", z)
```

5,10,3

c)

```
c <-  50
d <-  13
e <-  c - d
escreva (e)
c <-  8
escreva (c, ",", d)
d <-  c + e
escreva (d)
c <-  d
d <-  e
e <-  0
escreva (c, ",", d, ",", e)
```

37
8,13
45
45,37,0

20. Entre os itens abaixo, quais não poderiam ser utilizados como nomes de variáveis em linguagem de programação? Justifique sua resposta.

a) X1
b) constante
c) R$
d) Nota Prova1
e) NumeroAluno
f) 1nome

21. Ao executar um algoritmo, foram encontrados erros nos trechos a seguir. Identifique-os.

a)

```
var Media: real
   MEDIA <-  7.5
```

b)

```
var Num: lógico
   Num <-  10
```

22. Elabore um algoritmo em que sejam lidos os valores do saldo anterior, do depósito e do saque realizado, informados pelo usuário, e escreva na tela o saldo atual, resultante da operação:

saldo atual = saldo anterior + depósito – saque

23. Elabore um algoritmo em pseudolinguagem que leia um número inteiro e imprima seu sucessor e seu antecessor. Por exemplo, se o usuário digitou o número 10, o algoritmo deverá imprimir o texto "o antecessor é 9, e o sucessor é 11".

24. A relação entre uma temperatura C medida em graus Celsius (°C) e uma temperatura F medida em graus Fahrenheit (°F) é dada pela seguinte igualdade:

$$\frac{°C}{5} = \frac{F - 32}{9}$$

Escreva um algoritmo que leia a medida da temperatura em graus Fahrenheit e escreva a medida da temperatura correspondente em graus Celsius.

25. O que será exibido na tela do programa após a execução de cada linha de comando a seguir?

a) **escreva** ("O valor é nulo")

b) **escreva** (3 > 2, 8 * 5, "cinco")

c) **escreva** ("5 < 10", " = ", 5 < 10)

d) **escreva** (3 ^ 2 + 5, 4 ^(1 / 2))

26. Complemente o algoritmo da página anterior, referente ao cálculo das raízes de uma equação do 2º grau, para que o programa calcule e exiba o texto "a soma das raízes é <S>", em que <S> representa o valor correspondente para a soma das raízes. Faça o mesmo para o produto <P> delas.

Desafio

27. Escreva um algoritmo em pseudolinguagem para armazenar dois números em variáveis e, depois, trocar seus valores.

Observação
Utilize uma variável auxiliar.

28. O consumo médio de um automóvel é a quantidade de quilômetros que ele percorre com um litro de combustível. Dividindo a medida da distância total de uma viagem (em km) por esse valor, obtemos a quantidade de litros de combustível necessária nessa viagem. Multiplicando esse resultado pelo preço unitário de 1 L do combustível, obtemos o custo estimado da viagem com combustível.

Escreva um algoritmo em pseudolinguagem que calcule e mostre o custo estimado de uma viagem de automóvel com combustível. Considere as variáveis reais *kmPorLitro*, *DistanciaViagem* e *PrecoLitro*, cujos valores serão informados pelo usuário.

6 Estruturas de condição

Se então

Nos tópicos anteriores, vimos exemplos de algoritmos com os comandos **se** e **então**. Tais comandos fazem parte das estruturas de condição mais simples. De modo geral, as estruturas de condição possuem a seguinte maneira:

```
se <expressão lógica> então
    <bloco de comandos>
fim se
```

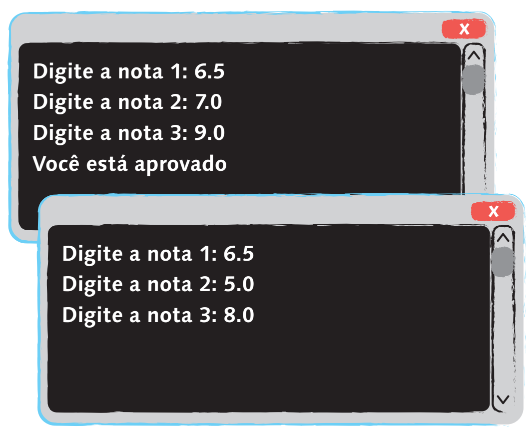
Em <expressão lógica>, conforme estudamos no tópico anterior, devemos utilizar uma expressão que retorna verdadeiro ou falso e, caso seja verdadeiro, serão executadas as linhas seguintes, representadas por <bloco de comandos>, delimitadas pelo comando **fim se**. Se for falso, a execução desconsidera as linhas em <bloco de comandos> e "pula" para a linha seguinte à do comando **fim se**.

Observação
As estruturas de condição também podem ser chamadas de estruturas de decisão.

Exemplo

Condição: APROVADO

```
início
    var Nota1, Nota2, Nota3, Media: real
    escreva ("Digite a nota 1: ")
    leia (Nota1)
    escreva ("Digite a nota 2: ")
    leia (Nota2)
    escreva ("Digite a nota 3: ")
    leia (Nota3)
    Media <- (Nota1 + Nota2 + Nota3) / 3
    se Media >= 7 então
        escreva ("Você está aprovado")
    fim se
fim
```

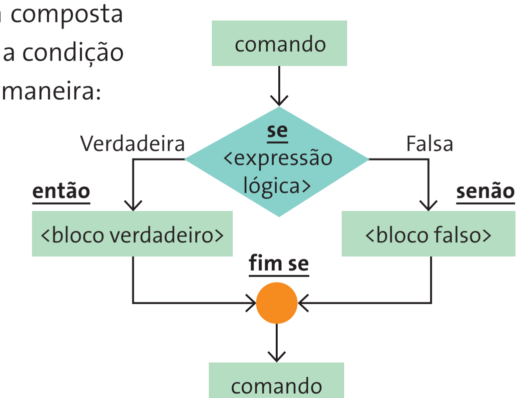


Rafael L. Gaion

Se então senão

O algoritmo do exemplo anterior exibe na janela do programa a mensagem "Você está aprovado", caso a média aritmética das três notas seja maior ou igual a 7. No entanto, a estrutura não prevê retorno quando a média for menor do que 7, ou seja, se está reprovado.

Em comparação com a estrutura simples **se então**, a estrutura composta **se então senão** oferece a possibilidade de executar uma ação caso a condição lógica seja falsa. De modo geral, ela pode ser utilizada da seguinte maneira:



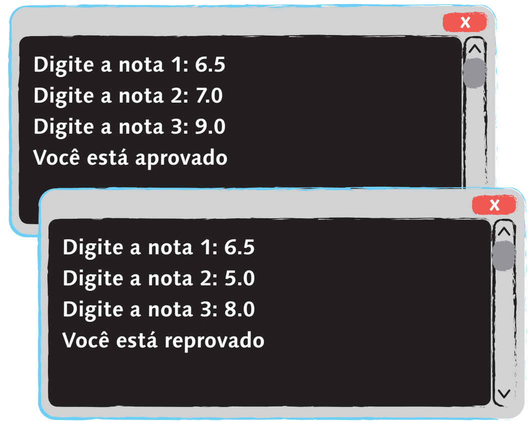

```
se <expressão lógica> então
    <bloco verdadeiro>
senão
    <bloco falso>
fim se
```

As linhas em <bloco verdadeiro> serão executadas se o valor de <expressão lógica> é verdadeiro. Já as linhas em <bloco falso> serão executadas se o valor de <expressão lógica> é falso. O comando **fim se** delimita o bloco de instruções.

Exemplo

Condição: APROVADO ou REPROVADO

```
início
    var Nota1, Nota2, Nota3, Media: real
    escreva ("Digite a nota 1: ")
    leia (Nota1)
    escreva ("Digite a nota 2: ")
    leia (Nota2)
    escreva ("Digite a nota 3: ")
    leia (Nota3)
    Media <- (Nota1 + Nota2 + Nota3) / 3
    se Media >=7 então
        escreva ("Você está aprovado")
    senão
        escreva ("Você está reprovado")
    fim se
fim
```



Rafael L. Gaion

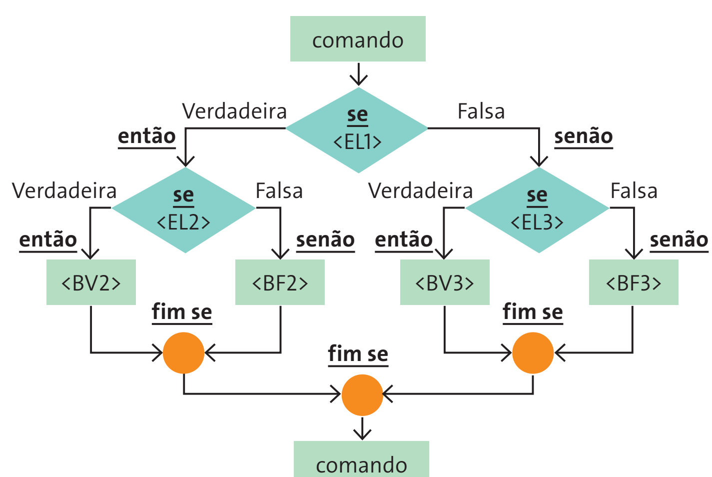
Estruturas de condições encadeadas

Existem situações em que é necessário utilizar mais de uma estrutura **se então senão**, sendo uma segunda estrutura inserida no <bloco verdadeiro> ou no <bloco falso> da primeira, formando diversas ramificações, assim como foi feito no algoritmo para comparar dois números *x* e *y*, da página **134**. De modo geral, esse encadeamento pode ser feito da seguinte maneira:

Diga aos alunos que estruturas encadeadas também são conhecidas como estruturas "aninhadas".

EL: Expressão Lógica   BV: Bloco Verdadeiro   BF: Bloco Falso

```
se <EL1> então          {início da estrutura 1}
    se <EL2> então      {início da estrutura 2}
        <BV2>
    senão               ..... <BV1>
        <BF2>
    fim se              {fim da estrutura 2}
senão
    se <EL3> então      {início da estrutura 3}
        <BV3>
    senão               ..... <BF1>
        <BF3>
    fim se              {fim da estrutura 3}
fim se                  {fim da estrutura 1}
```



Podemos representar as quatro ramificações desse caso no quadro de decisão a seguir.

EL1	EL2	EL3	Execução
V	V	-	BV2
V	F	-	BF2
F	-	V	BV3
F	-	F	BF3

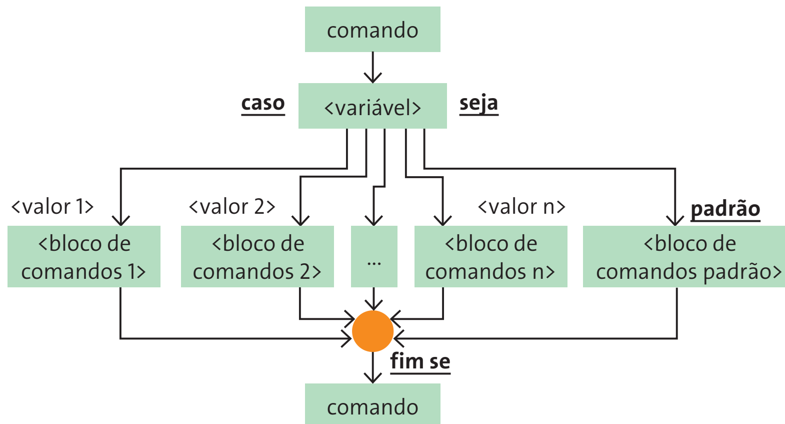
Observação

Assim como ocorre com os parênteses, é importante delimitar cada bloco de condição com o comando **fim se**, pois a falta deste é um erro bastante comum. Um teste prático é verificar se a quantidade de comandos **se então** e de **fim se** é a mesma.

Caso seja

Uma alternativa para trabalhar com estruturas encadeadas e condicionadas a determinado valor de uma variável é a estrutura **caso seja**. Nela, a variável é avaliada e, caso coincida com um valor preestabelecido, o bloco de comandos é executado. Ela pode ser utilizada da seguinte maneira:

```
caso <variável> seja
    <valor 1>
        <bloco de comandos 1>
    <valor 2>
        <bloco de comandos 2>
    ⋮
    <valor n>
        <bloco de comandos n>
    padrão
        <bloco de comandos padrão>
fim se
```

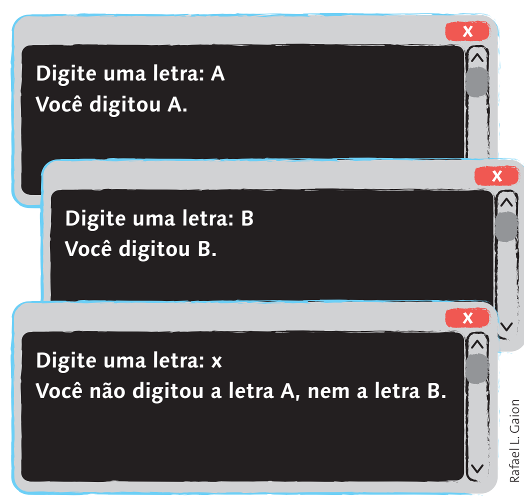


O comando **padrão** é parecido com o comando **senão** da estrutura **se então senão**, executando as linhas em <bloco de comandos padrão> quando as expressões anteriores não foram contempladas.

Exemplo

Mostra a letra digitada

```
início
    var Letra: caractere
    escreva ("Digite uma letra: ")
    leia (Letra)
    caso Letra seja
        A
            escreva ("Você digitou A. ")
        B
            escreva ("Você digitou B. ")
        padrão
            escreva ("Você não digitou a letra A, nem a letra B.")
    fim se
fim
```



Rafael L. Gaion

Problemas e exercícios resolvidos

R2. Escreva um algoritmo em pseudolinguagem para classificar um aluno com base na média $(\overline{x})$ e na frequência (f), de acordo com as seguintes condições:

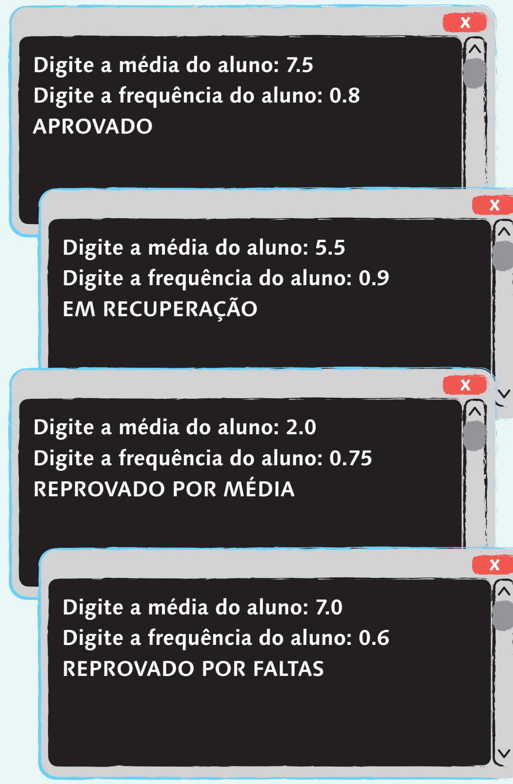
- Aprovado: se $\overline{x} \geqslant 7$ e $f \geqslant 0{,}75$;
- Em recuperação: se $3 \leqslant \overline{x} < 7$ e $f \geqslant 0{,}75$;
- Reprovado por faltas: se $f < 0{,}75$;
- Reprovado por média: se $\overline{x} < 3$ e $f \geqslant 0{,}75$.

Em seguida, represente esse algoritmo por meio de um fluxograma e suas ramificações por meio do quadro de decisão.

Resolução

Condição: APROVADO, EM RECUPERAÇÃO, REPROVADO POR FALTAS ou REPROVADO POR MÉDIA

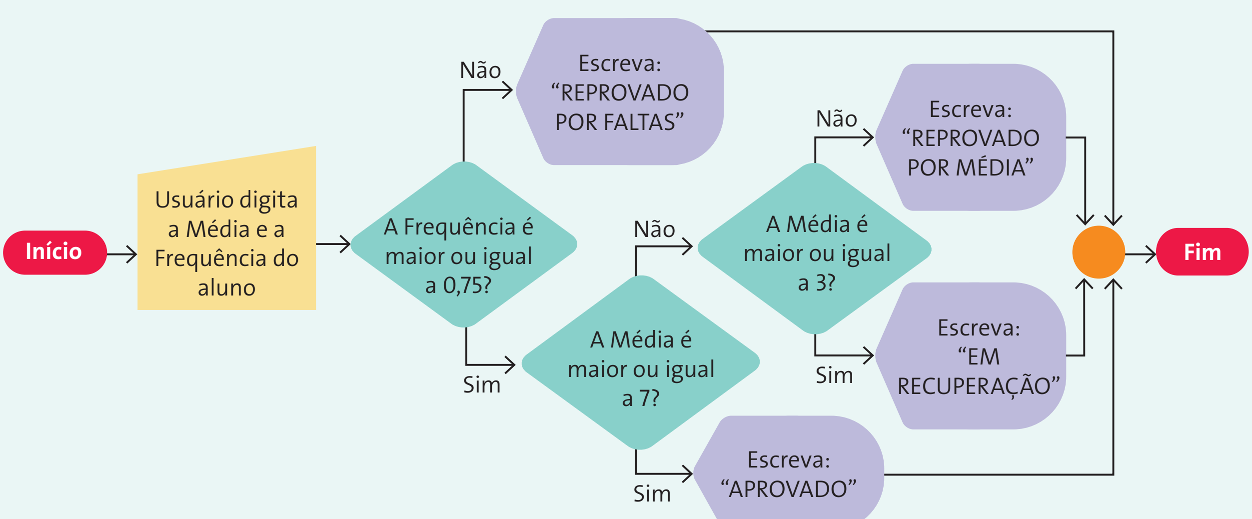
```
início
    var Media, Frequencia: real
    escreva ("Digite a média do aluno: ")
    leia (Media)
    escreva ("Digite a frequência do aluno: ")
    leia (Frequencia)
    se Frequencia >= 0.75 então
        se Media >=7 então
            escreva ("APROVADO")
        senão
            se Media >=3 então
                escreva ("EM RECUPERAÇÃO")
            senão
                escreva ("REPROVADO POR MÉDIA")
            fim se
        fim se
    senão
        escreva ("REPROVADO POR FALTAS")
    fim se
fim
```



Rafael L. Gaion

Começamos avaliando a frequência do aluno. Caso a frequência respeite o mínimo exigido, isto é, $f \geqslant 0{,}75$, continuamos o algoritmo para avaliar a sua média e saber se está APROVADO $(\bar{x} \geqslant 7)$, REPROVADO POR MÉDIA $(\bar{x} < 3)$ ou EM RECUPERAÇÃO $(3 \leqslant \bar{x} < 7)$. Caso contrário, ou seja, se $f < 0{,}75$, o aluno está imediatamente reprovado por faltas, independente da sua média.

Vejamos agora o fluxograma e o quadro de decisão com as quatro ramificações desse caso.



$f \geqslant 0{,}75$	$\bar{x} \geqslant 7$	$\bar{x} \geqslant 3$	Reultado exibido na tela
F	-	-	REPROVADO POR FALTAS
V	F	F	REPROVADO POR MÉDIA
V	F	V	EM RECUPERAÇÃO
V	V	-	APROVADO

Observação

Há mais de uma maneira de resolver essa tarefa, dependendo da ordem em que as duas variáveis são analisadas.

29. a 38. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

29. Escreva um algoritmo em pseudolinguagem para verificar se:

a) uma pessoa é maior de idade (⩾ 18 anos) ou menor de idade (< 18 anos).

b) um número real não nulo é positivo ou negativo.

c) a diferença entre um primeiro e um segundo número digitado é menor do que zero (< 0) ou maior ou igual a zero (⩾ 0).

d) um retângulo é também um quadrado.

Observação
Compare os algoritmos dessa tarefa com os fluxogramas da tarefa 7 da página 127.

30. Elabore um algoritmo que classifique um número inteiro informado pelo usuário em par ou ímpar.

31. Certo sistema de avaliação de um colégio é composto por três provas: a primeira com peso 2, a segunda com peso 3 e a terceira com peso 5. Escreva um algoritmo para calcular a média final de um aluno e classificá-lo em aprovado ou reprovado, considerando que a média para aprovação é 7,0.

Observação
Faça as adaptações necessárias para o cálculo da média aritmética ponderada no algoritmo que classifica o aluno em APROVADO ou REPROVADO, apresentado nas páginas anteriores.

*

32. O Índice de Massa Corporal (IMC) de uma pessoa adulta é calculado dividindo a massa (em kg) pelo quadrado da medida da altura (em m). Usando estruturas de condição encadeadas, escreva um algoritmo que exiba o IMC e a situação da pessoa, indicada no quadro abaixo, a partir das medidas da altura e da massa informadas pelo usuário.

IMC	Situação
18,5 ⩽ IMC < 25	Normal
25 ⩽ IMC < 30	Sobrepeso
30 ⩽ IMC < 35	Obesidade grau 1
35 ⩽ IMC < 40	Obesidade grau 2

Fonte de pesquisa: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA PARA O ESTUDO DA OBESIDADE E DA SÍNDROME METABÓLICA. *Calcule seu IMC*. Disponível em: <https://abeso.org.br/obesidade-e-sindrome-metabolica/calculadora-imc/>. Acesso em: 9 jul. 2020.

33. Elabore um algoritmo que classifique o valor informado pelo usuário em três ou quatro opções de acordo com certa expressão lógica, exibindo uma mensagem para cada opção. Depois, represente esse algoritmo por meio de um fluxograma, e suas ramificações por meio do quadro de decisão.

34. Usando estruturas de condição encadeadas, escreva um algoritmo para verificar se um número real é maior, menor ou igual a 3.

35. A maioria das escolas brasileiras usa a escala de 0 a 10 para atribuir notas às avaliações. Certa escola usa a classificação de A a E, igual ao sistema educativo dos Estados Unidos. Elabore um algoritmo que leia a nota de um aluno na escala de 0 a 10 e escreva a classificação de A a E correspondente, conforme o quadro a seguir.

Nota	Conceito
mais de 9,0	A
mais de 7,0 até 9,0	B
mais de 5,0 até 7,0	C
mais de 3,5 até 5,0	D
até 3,5	E

36. Escreva um algoritmo que determina se o dinheiro entregue pelo cliente é suficiente para pagar o valor total de uma compra e determine o troco a ser devolvido, caso seja necessário. O dinheiro entregue e o valor total da compra devem ser informados pelo usuário.

Observação
Utilize variáveis para os valores informados e compare-os diretamente.

37. Usando a estrutura **caso seja**, elabore um algoritmo que leia um número inteiro de 1 a 12, incluindo estes, e escreva o nome do mês correspondente. Caso seja digitado outro número, deve ser exibida uma mensagem informando que não existe um mês correspondente a esse número.

Desafio

38. Utilizando a estrutura **caso seja**, elabore um algoritmo que leia dois números inteiros não nulos informados pelo usuário e solicite a ele que informe qual operação deseja realizar com esses números. Caso o usuário digite o caractere:

- "+", exibe a soma dos dois números;
- "-", exibe diferença do segundo para o primeiro número informado;
- "*", exibe o produto dos dois números;
- "/", exibe o quociente da divisão entre o primeiro e o segundo número informado.

*Se necessário, relembre os alunos como é calculada a média aritmética ponderada, dizendo que é o quociente obtido ao dividir a soma dos produtos das frequências da variável por seus respectivos pesos pela soma dos pesos.

7 Estruturas de repetição

Uma das grandes vantagens em utilizar computadores na resolução de problemas envolvendo algoritmos é a capacidade deles de repetir blocos de comandos para grandes quantidades de dados com agilidade.

Assim como nas estruturas de condição, o <bloco de comandos> é executado de acordo com o resultado de uma <expressão lógica>. Enquanto nas estruturas de condição isso ocorre uma única vez, nas estruturas de repetição isso irá ocorrer até que certo objetivo seja atingido.

Observação
As estruturas de repetição também podem ser chamadas de estruturas de *loop* (do inglês "ciclo").

Enquanto faça

Na página **125** vimos o formato básico da estrutura **enquanto faça** no algoritmo para trocar uma lâmpada queimada. De modo geral, ela pode ser utilizada da seguinte maneira:

```
enquanto <expressão lógica> faça
        <bloco de comandos>
fim enquanto
```

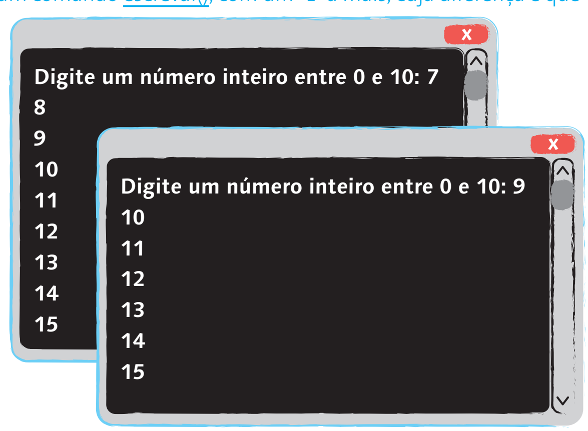
Nessa estrutura, as linhas em <bloco de comandos> serão executadas repetidamente enquanto o valor de <expressão lógica> for verdadeiro. A partir do momento em que esse valor for falso, a execução do algoritmo "pula" para a linha seguinte à do comando **fim enquanto**.

Explique aos alunos que, dependendo da linguagem de programação utilizada, é preciso adaptar o algoritmo para que os valores sejam exibidos na tela do programa em linhas separadas ao invés de todos na mesma linha. O *software* VisualG que será apresentado na página 148, por exemplo, possui um comando escreval(), com um "L" a mais, cuja diferença é que ele "pula" uma linha em cada execução.

Exemplo

Escrever os próximos números até 15

```
1. início
2.     var Numero: inteiro
3.     escreva ("Digite um número inteiro entre 0 e 10: ")
4.     leia (Numero)
5.     enquanto Numero < 15 faça
6.         Numero <- Numero + 1
7.         escreva (Numero)
8.     fim enquanto
9. fim
```



Rafael L. Gaion

- O que aconteceria se a condição lógica da linha 5 no exemplo anterior fosse *Numero <= 15*?
  Espera-se que os alunos respondam que, quando a variável *Numero* chegasse ao valor 15, o programa iria repetir o ciclo mais uma vez, atribuindo o valor 15 + 1 e escrevendo o novo valor da variável (16) na linha de baixo.

Repita até

A estrutura **repita até** difere da estrutura **faça enquanto** apenas por executar o bloco de comandos antes de testar a expressão lógica. De modo geral, ela pode ser utilizada da seguinte maneira:

```
repita
     <bloco de comandos>
até <expressão lógica>
```

As linhas em <bloco de comandos> serão executadas enquanto o valor da <expressão lógica> for falso. Além disso, haverá ao menos uma execução das linhas em <bloco de comandos> mesmo que esse valor seja verdadeiro.

Observação
Em outras palavras:

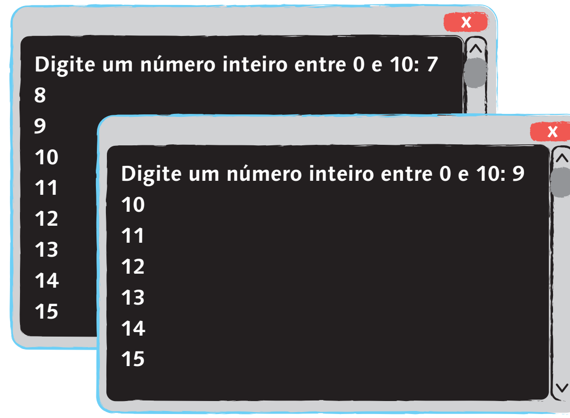
enquanto faça: executa as linhas em <bloco de comandos> enquanto o valor de <expressão lógica> é verdadeiro.

repita até: executa as linhas em <bloco de comandos> até que o valor de <expressão lógica> seja verdadeiro.

Exemplo

Escrever os próximos números até 15

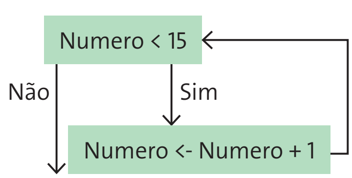
1. **início**
2. **var** Numero: **inteiro**
3. **escreva** (“Digite um número inteiro entre 0 e 10: ”)
4. **leia** (Numero)
5. **repita**
6. Numero <- Numero + 1
7. **escreva** (Numero)
8. **até** Numero = 15
9. **fim**



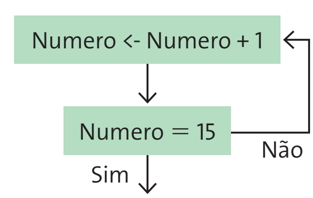
Na prática, os dois exemplos anteriores trazem o mesmo resultado. No entanto, vamos comparar a expressão lógica desses blocos, das linhas **5** a **8**.

5. **enquanto** Numero < 15 **faça**
6. Numero <- Numero + 1
7. **escreva** (Numero)
8. **fim enquanto**

5. **repita**
6. Numero <- Numero + 1
7. **escreva** (Numero)
8. **até** Numero = 15



A expressão lógica é *Numero < 15*. Até *Numero = 14*, o algoritmo irá adicionar 1 ao valor já armazenado na variável *Numero* e imprimir seu valor atualizado na tela.



A expressão lógica é *Numero = 15*. O algoritmo irá adicionar 1 ao valor já armazenado na variável *Numero* e imprimir o resultado atualizado na tela, até que o valor de *Numero* seja 15.

Para faça

Em algumas situações é mais conveniente controlar no próprio algoritmo quantas vezes a repetição deve ocorrer. Para essas situações, há a estrutura **para faça**. De modo geral, ela pode ser utilizada da seguinte maneira:

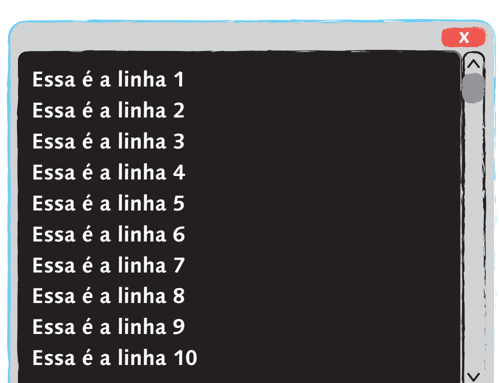
para <variável> **de** <início> **até** <fim> **passo** <incremento> **faça**
<bloco de comandos>
fim para

A quantidade de vezes que as linhas em <bloco de comandos> serão executadas é determinada pelos valores em <início>, <fim> e <incremento>. Este último é opcional e serve para definir o incremento, por exemplo, de 1 em 1 (padrão), de 2 em 2, de 3 em 3 etc. Por exemplo, a expressão **para** *i* **de** 0 **ate** 10 **passo** 2 implica a execução das linhas em <bloco de comandos> 6 vezes, sendo que na primeira a variável *i* terá valor 0, na segunda terá valor 2 e assim sucessivamente, até assumir o valor 10 na sexta vez que as linhas do <bloco de comandos> serão executadas.

Exemplo

Escrever 10 linhas

1. **início**
2. **var** i: **inteiro**
3. **para** i **de** 1 **até** 10 **passo** 1 **faça**
4. **escreva** (“Essa é a linha ”, i)
5. **fim para**
6. **fim**



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Exemplo

Escrever os 10 primeiros números ímpares

```
1. início
2.    var j: inteiro
3.    para j de 1 até 20 passo 2 faça
4.       escreva (j)
5.    fim para
6. fim
```

```
1
3
5
7
9
11
13
15
17
19
```

Rafael L. Gaion

Problemas e exercícios resolvidos

R3. Escreva um algoritmo em pseudolinguagem que exiba a soma e a média aritmética dos números informados pelo usuário. A quantidade de números também deve ser informada pelo usuário.

Resolução

> **Observação**
> Note que, por padrão, o próprio programa atribui o valor inicial 0 (zero) à variável *soma*.

Soma e média dos números

```
1. início
2.    var quantidade, numero, soma, n: inteiro
3.       media: real
4.    escreva ("Quantos números vai informar? ")
5.    leia (quantidade)
6.    para n de 1 até quantidade passo 1 faça
7.       escreva ("Digite o ", n ,"º número: ")
8.       leia (numero)
9.       soma <-  soma + numero
10.   fim para
11.   media <-  soma / quantidade
12.   escreva ("A soma é: ", soma)
13.   escreva ("A média é: ", media)
14. fim
```

Linhas 2 e 3: Definição das variáveis.

Linhas 4 e 5: Entrada da quantidade de números.

Linha 6: Essa linha define que *n* irá assumir os valores 1, 2, 3, 4, ..., até o valor da variável *quantidade*.

Linhas 7 a 9: Para cada ciclo, o usuário irá informar o número que será adicionado ao valor armazenado pela variável *soma*.

Linhas 10 e 11: O cálculo da média deve ocorrer somente depois que todos os valores forem informados e adicionados.

Linhas 12 e 13: Exibição dos resultados.

Veja os resultados de algumas execuções desse algoritmo.

> **Observação**
> Note que o valor de <fim> da estrutura **para faça** é exatamente o valor atribuído pelo usuário à variável *quantidade* na execução da linha 5.

```
Quantos números vai informar? 5
Digite o 1º número: 10
Digite o 2º número: 18
Digite o 3º número: 4
Digite o 4º número: 26
Digite o 5º número: 15
A soma é: 73
A média é: 14.6
```

```
Quantos números vai informar? 10
Digite o 1º número: 5
Digite o 2º número: 10
Digite o 3º número: 15
Digite o 4º número: 20
Digite o 5º número: 25
Digite o 6º número: 30
Digite o 7º número: 35
Digite o 8º número: 40
Digite o 9º número: 45
Digite o 10º número: 50
A soma é: 275
A média é: 27.5
```

```
Quantos números vai informar? 5
Digite o 1º número: 31
Digite o 2º número: 46
Digite o 3º número: 62
Digite o 4º número: 42
Digite o 5º número: 49
A soma é: 230
A média é: 46
```

Rafael L. Gaion

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

39. a 43. Veja as respostas na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

39. Usando a estrutura **enquanto faça**, elabore um algoritmo que escreva todos os números inteiros de:

a) 1 até 50.
b) 50 até 1.
c) 50 até 100.
d) -20 até 0.

40. Resolva novamente a tarefa anterior, desta vez usando a estrutura **repita até**.

41. Usando a estrutura **faça para**, elabore um algoritmo que escreva todos os números da sequência:

a) 2, 4, 6, ..., 16, 18, 20
b) 5, 10, 15, ..., 40, 45, 50
c) 10, 9, 8, ..., -8, -9, -10
d) 100, 90, 80, ..., 20, 10, 0

Observação

Para escrever uma sequência decrescente usando a estrutura **para faça**, basta definir um número negativo para o <incremento>. Por exemplo, a expressão **para** *i* **de** 0 **ate** -10 **passo** -2 resulta em 6 execuções do <bloco de comandos>, sendo a primeira delas com o valor da variável *i* igual a 0, a segunda com *i* valendo -2, e assim sucessivamente, até a sexta vez com *i* valendo -10.

42. Resolva novamente a tarefa anterior, desta vez usando as estruturas **enquanto faça** ou **repita até**. Qual estrutura de repetição você achou mais prática para escrever as sequências numéricas?

Observação

Atribua no próprio algoritmo o valor do primeiro termo da sequência.

43. Elabore um algoritmo para escrever os próximos 10 números a partir de um número inteiro informado pelo usuário.

44. Quais números serão exibidos após a execução de cada algoritmo a seguir?

a) 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100

Escrever alguns números

```
início
    var Numero: inteiro
    para Numero de 1 até 10 passo 1 faça
        escreva (Numero * Numero)
    fim para
fim
```

b) 3 9 27 81

Escrever alguns números

```
início
    var Numero: inteiro
    Numero <-  1
    enquanto Numero < 30 faça
        Numero <- Numero * 3
        escreva (Numero)
    fim enquanto
fim
```

c) 20 30 40 50

Escrever alguns números

```
início
    var Numero: inteiro
    Numero <-  10
    repita
        Numero <- Numero + 10
        escreva (Numero)
    até Numero = 50
fim
```

45. Elabore um algoritmo para determinar os 10 próximos números pares, a partir do primeiro número par informado pelo usuário. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Finalizando a conversa

a) O que você entendeu acerca dos algoritmos? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que algoritmo representa uma sequência finita de passos estruturados para resolver determinado problema ou automatizar uma tarefa.

b) Explique o que são linguagens e pseudolinguagens de programação. Dê um exemplo de comando em pseudolinguagem e o que ele executa.

b) Possível resposta: linguagens são regras sintáticas e semânticas para transformar um algoritmo em um programa de computador, e pseudolinguagens são regras para representar algoritmos sem transformar em um programa. Exemplo de comando: escreva(), que apresenta o conteúdo na tela.

c) Você considera importante o estudo deste capítulo? Por quê? Resposta pessoal.

d) O que são estruturas de condição? E de repetição? Dê exemplos.

e) Na seção **Conversando** da página **124**, havia uma questão sobre a necessidade de computadores e *softwares* para o ensino de lógica de programação. Sua opinião continua a mesma após estudar este capítulo? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos considerem a utilidade das pseudolinguagens ao expressar suas opiniões. É esperado que o aluno mude de opinião inicial, pois ele usou um livro (sem computadores e *softwares* na maioria dos tópicos) para aprender sobre lógica de programação.

d) Possível resposta: estruturas de condição definem se sequências de comandos serão executadas ou não; estruturas de repetição executam sequências de comandos até que os objetivos sejam atingidos. Exemplos: se então, para faça, repita até.

Acesso digital

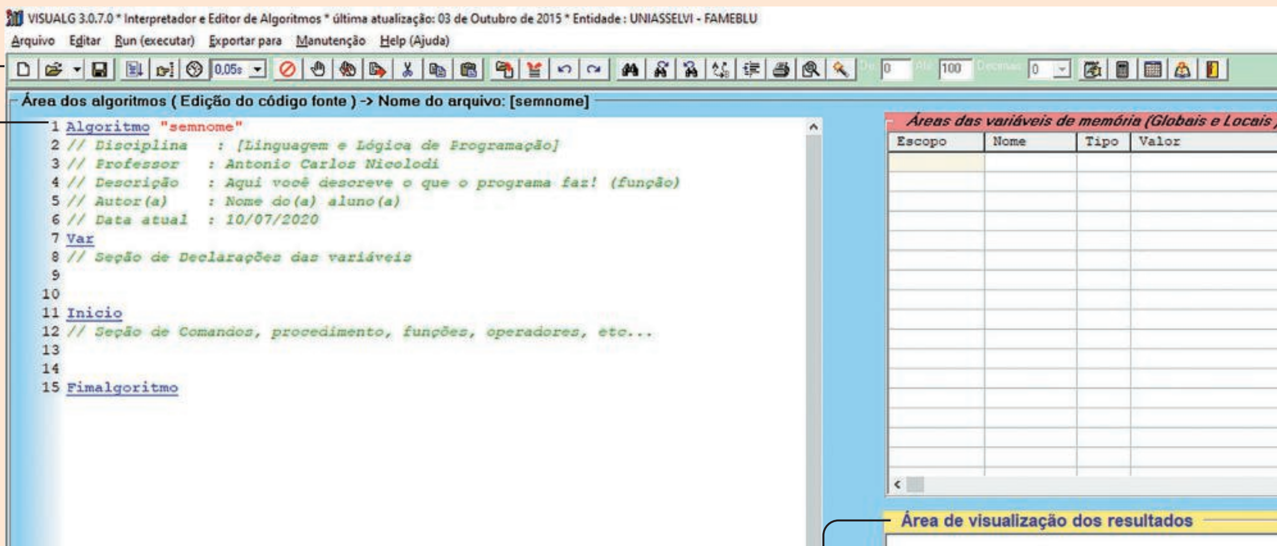
Algoritmo no VisualG

Neste tópico, vamos implementar um algoritmo no *software* VisualG. Siga as orientações do professor e o passo a passo a seguir para realizar a programação e visualização dos resultados.

A tela do VisualG exibe três áreas principais: Área dos programas, Área das variáveis de memória e Área de visualização dos resultados.

A **Barra de tarefas** contém os comandos mais utilizados.

Na **Área das variáveis** são mostrados o nome, o tipo e o valor corrente de cada variável.



A **Área dos programas** é onde os comandos são digitados. Quando o VisualG é carregado, já apresenta uma estrutura básica do algoritmo.

Na **Área de visualização dos resultados** ficam registrados os resultados já compilados.

A escrita dos comandos no VisualG se assemelha muito com a escrita dos comandos na pseudolinguagem que estudamos neste capítulo. E todos eles carregam a mesma funcionalidade dos comandos aprendidos em qualquer linguagem de programação. Porém, nesse *software*, a utilização de caracteres especais como letras acentuadas, cedilha, sinas de pontuação e espaços, podem gerar problemas na execução do programa. Veja como deve ficar a **Área dos programas** ao implementarmos o algoritmo para resolver uma equação do 2º grau da página **137**.

O comando **Algoritmo** indica onde informamos o nome do algoritmo, delimitado por aspas duplas.

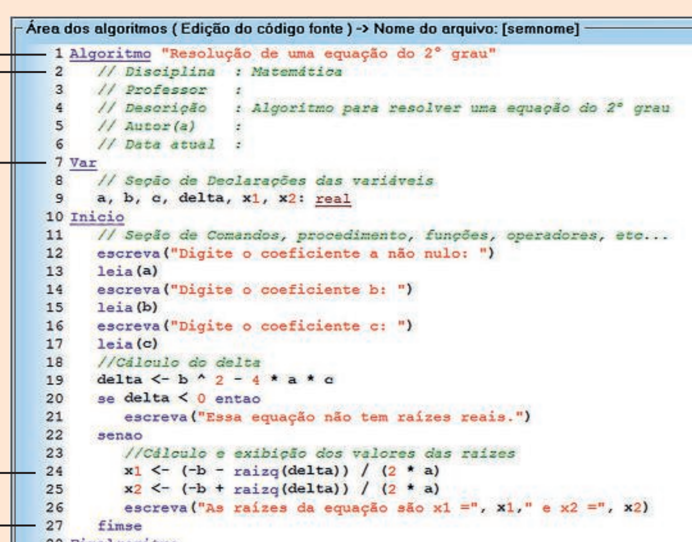
As linhas iniciadas com **//** representam comentários (em verde).

A seção que se segue é a de **declaração de variáveis** que termina na linha anterior à que contém o comando **Inicio** (sem acento).

O comando **raizq ( )** calcula a raiz quadrada, nesse caso, de *delta*. Mas também poderia ser utilizado (*delta*)^(1/2), como na página **137**.

No VisualG, não utilizamos espaços para o comando de **fimse**.

A seção de comandos começa na linha **Inicio** e vai até a linha **Fimalgoritmo**.


Área dos algoritmos (Edição do código fonte) -> Nome do arquivo: [semnome]

```
Algoritmo "Resolução de uma equação do 2° grau"
   // Disciplina  : Matemática
   // Professor   :
   // Descrição   : Algoritmo para resolver uma equação do 2° grau
   // Autor(a)    :
   // Data atual  :
Var
   // Seção de Declarações das variáveis
   a, b, c, delta, x1, x2: real
Inicio
   // Seção de Comandos, procedimento, funções, operadores, etc...
   escreva("Digite o coeficiente a não nulo: ")
   leia(a)
   escreva("Digite o coeficiente b: ")
   leia(b)
   escreva("Digite o coeficiente c: ")
   leia(c)
   //Cálculo do delta
   delta <- b ^ 2 - 4 * a * c
   se delta < 0 entao
      escreva("Essa equação não tem raízes reais.")
   senao
      //Cálculo e exibição dos valores das raízes
      x1 <- (-b - raizq(delta)) / (2 * a)
      x2 <- (-b + raizq(delta)) / (2 * a)
      escreva("As raízes da equação são x1 =", x1," e x2 =", x2)
   fimse
Fimalgoritmo
```

Imagens: Reprodução/VisualG/Cláudio Morgado de Souza

Observação

Além do comando **escreva ( )** há o comando **escreval ( )**, com um "L" a mais. A diferença é que ele "pula" uma linha em seguida.

Após digitar o algoritmo, clique em **Run (executar)**, depois em **Rodar o algoritmo**. Irá abrir uma nova janela com o mesmo padrão das janelas de programas ilustradas nos exemplos das páginas anteriores. Veja alguns resultados.

Console simulando o modo texto do MS-DOS

```
Digite o coeficiente a não nulo: 1
Digite o coeficiente b: -5
Digite o coeficiente c: 6
As raízes da equação são x1 = 2 e x2 = 3
>>> Fim da execução do programa !
```

Console simulando o modo texto do MS-DOS

```
Digite o coeficiente a não nulo: 3
Digite o coeficiente b: 5
Digite o coeficiente c: 9
Essa equação não tem raízes reais.
>>> Fim da execução do programa !
```

Console simulando o modo texto do MS-DOS

```
Digite o coeficiente a não nulo: 2
Digite o coeficiente b: -20
Digite o coeficiente c: 50
As raízes da equação são x1 = 5 e x2 = 5
>>> Fim da execução do programa !
```

Agora, veja o algoritmo da soma e média dos números, apresentado na página **146**.

Área dos algoritmos (Edição do código fonte) -> Nome do arquivo: [semnome]

```
Algoritmo "Soma e média de alguns números"
   // Disciplina  : Matemática
   // Professor   :
   // Descrição   : Algoritmo para somar e calcular a média de alguns números
   // Autor(a)    :
   // Data atual  :
Var
   // Seção de Declarações das variáveis
   quantidade, numero, soma, n: inteiro
   media: real
Inicio
   // Seção de Comandos, procedimento, funções, operadores, etc...
   escreva("Quantos números vai informar? ")
   leia(quantidade)
   para n de 1 ate quantidade passo 1 faca
      escreva("Digite o", n,"° número: ")
      leia(numero)
      soma <- soma + numero
   fimpara
   media <- soma / quantidade
   escreval("A soma é:", soma)
   escreval("A média é:", media)
Fimalgoritmo
```

Console simulando o modo texto do MS-DOS

```
Quantos números vai informar? 6
Digite o 1° número: 18
Digite o 2° número: 25
Digite o 3° número: 34
Digite o 4° número: 48
Digite o 5° número: 12
Digite o 6° número: 55
A soma é: 192
A média é: 32

>>> Fim da execução do programa !
```

Imagens: Reprodução/VisualG/Cláudio Morgado de Souza

Explique aos alunos que, no VisualG, o operador Resto (módulo) é indicado por %.

a Utilizando o algoritmo que resolve uma equação do 2º grau, determine, se possível, as raízes reais das equações a seguir.

- $x^2 + 4x - 5 = 0$ $x_1 = -5$ e $x_2 = 1$
- $x^2 - 2x + 5 = 0$ A equação não possui raízes reais.
- $x^2 - 4x + 4 = 0$ $x_1 = x_2 = 2$
- $2x^2 - 2 = 0$ $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$
- $-2x^2 + 4x = 0$ $x_1 = 2$ e $x_2 = 0$
- $x^2 + 2x - 3 = 0$ $x_1 = -3$ e $x_2 = 1$

b Implemente os algoritmos das seguintes tarefas deste capítulo:

- Tarefas **30**, **34** e **35** da página **143**.
- Tarefas **39** e **40** da página **147**.

Veja as respostas nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.

Conectando ideias

Filme ou jogo?

Os filmes interativos são produções em que o espectador interage tomando decisões sobre as ações dos personagens que influenciam as cenas seguintes e que podem determinar diretamente o desenvolvimento e o final da história.

Esse tipo de interação é utilizado também em diversos jogos eletrônicos, em que a habilidade do jogador em tomar as decisões corretas influencia na maneira de jogar e na capacidade de chegar ao final da história. Nesses jogos, as decisões podem ser tomadas em telas específicas que apresentam as opções, em diálogos com os personagens ou até mesmo em ações tomadas durante o jogo.

Como a escolha de decisões é determinante nos diferentes modos para completar uma história, o jogador deve considerar os possíveis impactos de cada uma das suas decisões. Muitas vezes, é possível e até necessário jogar novamente uma parte da história procurando por informações e detalhes que passaram despercebidos. Alguns jogos até mesmo registram as decisões tomadas e suas consequências, permitindo que os jogadores possam jogar novamente com o objetivo de descobrir outros finais e incentivando-os a descobrir todas as possibilidades de histórias.

Já para os filmes (e animações), a possibilidade de tomar decisões pelos personagens ainda está em seus primeiros passos. Os desafios são grandes, pois filmes interativos são muito mais complexos do que os comuns, com cenas a mais para serem gravadas, produzidas e distribuídas para os espectadores, e nem todas as maneiras de exibir um filme atualmente permitem que o espectador interaja com o conteúdo. No entanto, com o desenvolvimento de novas tecnologias, ideias estão surgindo e sendo testadas para que os filmes interativos estejam presentes no nosso cotidiano.

b) Espera-se que os alunos respondam que elas vão chegar ao mesmo final da história.

Além dos desafios tecnológicos, é necessário ainda compreender o interesse do público nesse tipo de filme. Uma história com poucas decisões e opções pode causar a sensação de que o filme leva o espectador a tomar certas decisões contra a sua vontade, o que impacta negativamente na experiência final. Por outro lado, uma história complexa e com muitas opções pode exigir maior comprometimento do espectador com as escolhas, tornando a experiência cansativa e desinteressante.

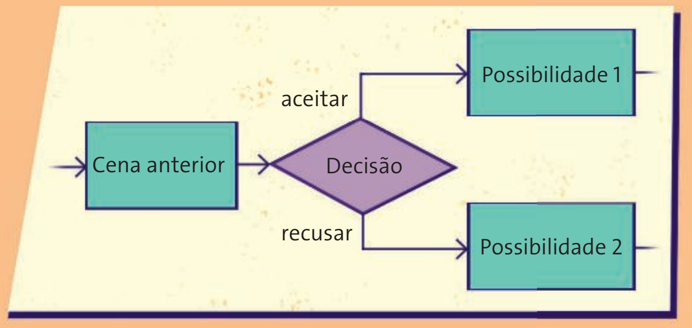
Tanto para os jogos quanto para os filmes interativos, cada sequência de escolhas leva a uma maneira diferente de ver a história. Em alguns casos, até mesmo a ordem em que as decisões são tomadas pode influenciar no final obtido. Podemos representar a sequência de decisões registrando os passos e organizando-as por meio de um fluxograma, para que seja possível compreender e até mesmo compartilhar informações sobre a história com outras pessoas.

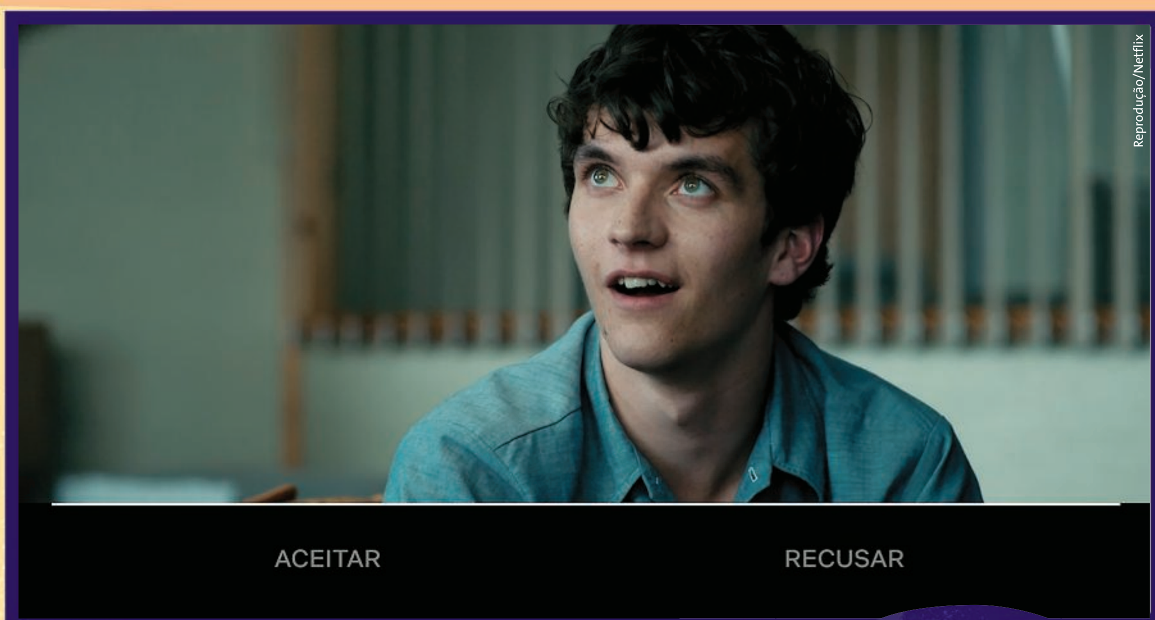
Possível resposta: as sequências de decisões podem ser representadas por meio de algoritmos e fluxogramas.

a) De que maneira os conceitos de algoritmo e fluxograma estão relacionados com os jogos e filmes interativos?

b) Em sua opinião, o que acontece se duas pessoas assistirem a um filme interativo e escolherem as mesmas opções?

c) Você já jogou um jogo parecido ou já assistiu a um filme interativo, em que as decisões mudam a história e os finais? Resposta pessoal.





Reprodução/Netflix

Black Mirror: Bandersnatch. Direção de David Slade. Reino Unido. House of Tomorrow/Netflix. No filme, diversas escolhas do protagonista são controladas pelo espectador, que define o rumo da história. Nessa cena, o espectador tem que decidir se o protagonista aceita ou recusa uma oferta feita a ele, e cada decisão gera uma sequência diferente na história.

Leandro Lassmar

Respostas

Capítulo 1 **Trigonometria no triângulo**

1. $AB = 12$ cm; $BC = 16$ cm
2. terreno **A**: 32 m; terreno **B**: 48 m
3. $x = 72$, $y = 60$ e $z = 36$
4. $AC = 6$ cm
5. $x = 20$ e $y = 40$
6. 240 cm
7. $CD = 48{,}75$ m
8. alternativa **c**
9. 620 m
10. Resposta pessoal.
11. **a)** $A = 96$ u.a.; $P = 48$ u.c. **b)** $A = 18$ u.a.; $P = 12\sqrt{2}$ u.c.
12. alternativa **c**
13. $\dfrac{8\,000\sqrt{3}}{9}$ cm^3
14. alternativa **a**
15. $6\sqrt{3}$ cm
16. $3\sqrt{2}$ u.c.
17. alternativa **d**
18. **a)** Resposta pessoal. **c)** Resposta pessoal.
    b) Resposta pessoal.
19. **a)** $x = 3{,}6$ cm, $y = 4{,}8$ cm, $z = 6{,}4$ cm
    b) $x = 15$ cm, $y = 17$ cm, $z = \dfrac{64}{17}$ cm
20. Resposta pessoal.
21. **a)** aproximadamente 55,9 m
    b) aproximadamente 22,4 m
22. $2\sqrt{5}$ cm
23. **a)** 10 m **b)** aproximadamente 14,14 m
24. 12 cm^2
25. Resposta pessoal.
26. **a)** 4; $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{4}{5}$; $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$; $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{4}{3}$
    b) 5; $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{12}{13}$; $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$; $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{12}{5}$
    c) $7\sqrt{2}$; $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg}\,\alpha = 1$
    d) $24\sqrt{3}$; $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$; $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{3}$
27. Resposta pessoal.
28. 12,5 m
29. alternativa **a**
30. Em cada triângulo, $\text{sen}\,\alpha = \cos\beta$ e $\text{sen}\,\beta = \cos\alpha$, pois α e β são complementares.
31. $\triangle ABC$: $x = 21$ e $y = 14\sqrt{3}$; $\triangle DEF$: $x = 3\sqrt{3}$ e $y = 6$
32. $x = 6\left(\sqrt{3} - 1\right)$
33. **a)** $4\sqrt{3}$ cm
    b) $x = y = z = 60°$
    c) $\text{sen}\,y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos y = \dfrac{1}{2}$; $\text{tg}\,y = \sqrt{3}$
34. **a)** Falso, pois $(CA)^2 = 21^2 + 28^2 \Rightarrow (CA)^2 = 1\,225 \Rightarrow$
    $\Rightarrow CA = \sqrt{1\,225} \Rightarrow CA = 35 \rightarrow 35$ m
    b) Verdadeiro, pois $\text{sen}\,\beta = \cos\alpha = \dfrac{21}{35}$.
    c) Verdadeiro. Seja h a altura desse triângulo em relação à hipotenusa, assim:
    $$\frac{21}{35} = \frac{h}{28} \Rightarrow 35h = 588 \Rightarrow h = \frac{84}{5} \rightarrow \frac{84}{5}\text{ m}$$
    d) Falso, pois $\text{tg}\,\beta = \dfrac{21}{28} = 0{,}75$.
    e) Verdadeiro, pois o perímetro é $21 + 28 + 35 = 84 \rightarrow 84$ m.
35. $y = 4\sqrt{3}$ m; $x = 8$ m
36. Maria: 721 s ou 12 min 1 s; Lucas: 769 s ou 12 min 49 s
37. Resposta pessoal.
38. $\triangle ABC$: $\alpha \simeq 51°$; $\triangle DEF$: $\alpha \simeq 50°$; $\triangle JLM$: $\alpha \simeq 79°$
39. $\text{tg}\,\alpha = 0{,}75$
40. $\triangle ABC$: $x \simeq 5{,}99$; $y \simeq 6{,}99$
    $\triangle DEF$: $x \simeq 4{,}38$; $y \simeq 4{,}38$
    $\triangle GHI$: $x \simeq 6{,}93$; $y = 8$
    $\triangle JLM$: $x \simeq 2{,}88$; $y \simeq 8{,}41$
41. $h \simeq 23{,}87$; $AC \simeq 27{,}04$
42. 37°; 53° e 90°
43. aproximadamente 10,24 m
44. aproximadamente 26,43 m
45. $x \simeq 2{,}75$
46. aproximadamente 58,14 cm
47. Resposta pessoal.
49. $\triangle ABC$: $x \simeq 9{,}90$
    $\triangle DEF$: $x \simeq 4{,}5$
    $\triangle GHI$: $x \simeq 0{,}77$

50. **a)** $\alpha \simeq 46°$
b) $\alpha \simeq 19°$
c) $\alpha \simeq 61°$
d) $\alpha \simeq 9°$

51. **a)** sen $150° = \frac{1}{2}$; cos $150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) sen $135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; cos $135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) sen $110° = 0{,}9397$; cos $110° = -0{,}3420$
d) sen $126° = 0{,}8090$; cos $126° = -0{,}5878$
e) sen $152° = 0{,}4695$; cos $152° = -0{,}8829$
f) sen $137° = 0{,}6820$; cos $137° = -0{,}7314$

52. $x = 3\sqrt{2}$

53. $\frac{20}{3}$

54. Resposta pessoal.

55. 24 cm

56. aproximadamente 34 m

57. 56 u.c.

58. $CF = 14$

59. $\frac{1}{2}$ cm

60. $AB = 4\sqrt{3}$

61. $\triangle ABC$: $x \simeq 37{,}59$ e $y \simeq 39{,}39$; $\triangle DEF$: $x \simeq 12{,}95$ e $y \simeq 9{,}63$

62. $x = \frac{45}{4}$

63. 45,96 m

64. sen $\hat{A} = \frac{1}{4}$

65. $x = 4$

66. Resposta pessoal.

67. **a)** 96 km
b) 64 km

68. **a)** 6 u.a.
b) aproximadamente 23,75 u.a.

69. perímetro: $(110 + 10\sqrt{31})$ m; área: $750\sqrt{3}$ m^2

70. alternativa **b**

71. 45° ou 135°

72. **a)** aproximadamente 4 915,2 m^2
b) aproximadamente 191,43 m
c) aproximadamente 3 411,5 m^2

73. **a)** sen $\hat{C} = \frac{2}{3}$
b) $\sqrt{5}$ cm
c) $2\sqrt{5}$ cm^2

74. aproximadamente 10 m

Capítulo 2 Funções trigonométricas

1. **a)** {a, d, e, r, s, t, u}; finito
b) {4, 8, 12, 16, ...}; infinito
c) {PR, SC, RS}; finito

2. corretas: **a**, **b**, **c**, **d**

3. verdadeiras: **a**, **d**; falsas: **b**, **c**, **e**

4. alternativas **a**, **b**, **d**

5. $N = 34$

6. verdadeira: **c**; falsas: **a**, **b**

7. **a)** $D(h) = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$
b) $CD(h) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
c) $Im(h) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

8. $Im(f) = \{-9, -5, -1, 3, 7, 11, 15\}$

9. 5

10. Resposta pessoal.

11. **a)** $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq -\frac{1}{2}\right\}$

b) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geqslant -1 \text{ e } x \neq 1\right\}$

c) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > -2\right\}$

12. **a)** $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = 3$
b) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}$
c) $D(f) = \{-5, 0, 1, 2, 3\}$;

$Im(f) = \left\{-1, -\frac{3}{2}, 2, \frac{11}{2}, 9\right\}$

13. 56,52 cm

14. 15 cm

15. Resposta pessoal.

16. 65,12 cm

17. πr

18. **a)** 180°
b) Porque a volta completa deixaria novamente a embarcação na posição inicial.

19. **a)** $\frac{\pi}{6}$ rad
b) $\frac{2\pi}{5}$ rad
c) $\frac{49\pi}{36}$ rad
d) $\frac{16\pi}{9}$ rad
e) $\frac{8\pi}{15}$ rad
f) $\frac{433\pi}{360}$ rad

20. a) 36° b) 80° c) 160°12'
• Resposta pessoal.

21. a) $\overset{\frown}{AB} \simeq 1{,}57$ cm c) $\overset{\frown}{CD} \simeq 2{,}09$ cm
b) $\overset{\frown}{EF} \simeq 18{,}84$ cm d) $\overset{\frown}{GH} \simeq 12{,}18$ cm

22. 51,81 u.c.

23. Resposta pessoal.

24. As posições de largada não estão alinhadas lado a lado, porque essa pista é formada por duas partes retas e duas semicircunferências. Como o comprimento de uma semicircunferência depende do seu comprimento de raio, as posições de largada estão dispostas de forma que os atletas percorram a mesma distância.

25. aproximadamente 2,01 m

26. verdadeiras: **a**, **d**; falsas: **b**, **c**

27. 96°; 72°

28. alternativa **c**

29. alternativa **d**

31. 762°, $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{4}$, 1 240°, 3 110°, $\frac{22\pi}{3}$, $\frac{17\pi}{5}$

32. a) 1º quadrante c) 1º quadrante e) 4º quadrante
b) 2º quadrante d) 2º quadrante f) 3º quadrante

33. alternativa **a**

34. 45°

35. aproximadamente 5 133,9 cm

36. alternativa **d**

37. a) $266° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$
b) $\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
c) $\frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
d) $\frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

38. alternativa **b**

39. a) 2 700°
b) 180°
c) 3 voltas

40. a) positivo d) negativo
b) positivo e) negativo
c) negativo f) positivo

41. a) 1º ou 2º quadrante
b) 2º ou 3º quadrante
c) 1º ou 3º quadrante
d) 3º ou 4º quadrante

42. a) −0,9511
b) −0,7547
c) 0,2679

43. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\sqrt{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
• Resposta pessoal.

44. a) $x = \frac{2\pi}{3}$ d) $x = \frac{11\pi}{6}$
b) $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{11\pi}{6}$ e) $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$
c) $x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

45. aproximadamente 0,9063

46. a) 1º movimento: 60°; 2º movimento: −120°; 3º movimento: 180°; 4º movimento: −240°; 5º movimento: 300°
b) $\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60° = \frac{1}{2}$; $\text{tg } 60° = \sqrt{3}$;
$\text{sen}(-120°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos(-120°) = -\frac{1}{2}$;
$\text{tg}(-120°) = \sqrt{3}$
$\text{sen } 180° = 0$; $\cos 180° = -1$; $\text{tg } 180° = 0$
$\text{sen}(-240°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos(-240°) = -\frac{1}{2}$;
$\text{tg}(-240°) = -\sqrt{3}$
$\text{sen } 300° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 300° = \frac{1}{2}$; $\text{tg } 300° = -\sqrt{3}$
c) 3º movimento: 120°
4º movimento: 120°
5º movimento: 180°

47. a) $\frac{\sqrt{2}}{12}$ b) 2

48. a) $D(f) = \mathbb{R}$ b) $D(g) = \mathbb{R}$

49. a) $x = 240°$
b) $x_1 = 45°, x_2 = 405°, x_3 = 135°$ e $x_4 = 495°$
c) $x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{9\pi}{4}, x_3 = \frac{3\pi}{4}$ e $x_4 = \frac{11\pi}{4}$
d) $x_1 = 60°$ e $x_2 = 300°$
e) $x_1 = 150°, x_2 = 510°$ e $x_3 = 210°$
f) $x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{7\pi}{3}, x_3 = \frac{13\pi}{3}, x_4 = \frac{5\pi}{3}, x_5 = \frac{11\pi}{3}$ e $x_6 = \frac{17\pi}{3}$

50. a) $2 \leqslant m \leqslant 3$ c) $-\frac{3}{4} \leqslant m \leqslant \frac{1}{4}$
b) $-\frac{4}{5} \leqslant m \leqslant -\frac{3}{5}$ d) $0 \leqslant m \leqslant 1$

51. a) $f(0) = 2, f(4\pi) = 2, g(0) = 3$ e $g(4\pi) = 3$
b) $\frac{4 - \sqrt{2}}{2}$
c) 2
d) 3

52. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant -\frac{2}{3} \text{ e } x \neq -1\right\}$

53. $x = \frac{3\pi}{2}$

54. $\frac{1}{2}$

55. alternativa **c**

56. **a)** aproximadamente 9,7912 m/s^2

b) 9,7804 m/s^2

c) aproximadamente 14°

57. **a)** $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 0\}$; Período: π

b) $Im(n) = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq 3\}$; Período: 2π

c) $Im(m) = \{y \in \mathbb{R} \mid -4 \leq y \leq 4\}$; Período: π

d) $Im(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\right\}$; Período: 8π

e) $Im(q) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2\}$; Período: 4π

58. $a = 3$; $b = 2$

59. $\frac{7}{6}$

60. **a)** $D(g) = \mathbb{R}$, $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 3\}$, $p = 2\pi$

b) $D(h) = \mathbb{R}$, $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid -4 \leq y \leq 2\}$, $p = 2\pi$

c) $D(m) = \mathbb{R}$, $Im(m) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 4\}$, $p = 4\pi$

d) $D(q) = \mathbb{R}$, $Im(q) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{7}{2}\right\}$, $p = 4\pi$

- Resposta pessoal.

61. $Im(f) = [-7; 7]$; período: aproximadamente 0,67 s

62. $Im(U) = [-5,3; 5,3]$; período: aproximadamente 0,07 s

63. **a)** $m = 5$ ou $m = -5$ **b)** $m = -\frac{3}{2}$ ou $m = \frac{3}{2}$

64. 24 horas

65. Resposta pessoal.

66. **b)** maior valor: 2 de abril; menor valor: 4 de abril

c) maior valor: R$ 5,50; menor valor: R$ 3,50

Capítulo 3 Relações, equações e transformações trigonométricas

1. **a)** $\frac{\sqrt{21}}{5}$ **b)** $-\frac{2\sqrt{21}}{21}$ **c)** $-\frac{5}{2}$ **d)** $\frac{5\sqrt{21}}{21}$ **e)** $-\frac{\sqrt{21}}{2}$

2. $-\frac{4}{5}$

3. aproximadamente 14,70 m

4. $\frac{125}{38}$

5. Resposta pessoal.

6. $\frac{193}{121}$

7. **a)** aproximadamente 6,21 m

b) aproximadamente 7,55 m

c) Resposta pessoal.

8. $\frac{13}{18}$

9. **a)** $\sec^2 x$ **b)** cossec x **c)** cossec x

10. alternativa **d**

11. alternativa **c**

12. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

13. alternativa **d**

14. aproximadamente 1 925 m^2

15. **a)**
- $\text{sen } 75° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
- $\cos 75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
- $\text{tg } 75° = 2 + \sqrt{3}$

b)
- $\text{sen } \frac{11\pi}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
- $\cos \frac{11\pi}{2} = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
- $\text{tg } \frac{11\pi}{2} = -2 + \sqrt{3}$

c)
- $\text{sen } 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
- $\cos 15° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
- $\text{tg } 15° = 2 - \sqrt{3}$

16. **a)** $\sqrt{3} - 2$ **b)** $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ **c)** $2 - \sqrt{3}$

17. **a)** $\frac{1}{12} - \frac{\sqrt{35}}{8}$ **b)** $\frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{7} + \frac{\sqrt{5}}{6}\right)$ **c)** $\frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{7} - \frac{\sqrt{5}}{6}\right)$ **d)** $\frac{27\sqrt{7} + 128\sqrt{5}}{247}$

18. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

19. alternativa **a**

20. **a)** $\frac{\sqrt{7}}{3}$ **b)** $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ **c)** $\frac{9 - 2\sqrt{14}}{5}$

21. **a)** $-\left(\frac{1 + \text{tg } x}{\text{tg } x - 1}\right)^2$ **b)** sen x

22. $-\frac{4}{3}$

23. $\frac{39}{8}$

24. 30°

25. **a)** $\frac{12 + \sqrt{3\,003}}{70}$

b) $\frac{3\sqrt{33} + 4\sqrt{91}}{70}$

c) $-\frac{400\sqrt{33} + 147\sqrt{91}}{1\,159}$

26. sen α − 2 cos α − cossec α

27. alternativa **d** **28.** alternativa **d** **29.** alternativa **e**

31. $-\frac{75 + 13\sqrt{6}}{106}$

34. $2 + \sqrt{2}$

35. **a)** sen 67° ≃ 0,92 **c)** cos 24° ≃ 0,91 **e)** tg 10° ≃ 0,18
b) sen 38° ≃ 0,61 **d)** cos 80° ≃ 0,17 **f)** tg 85° = 11,5

37. 38,4 cm^2

38. **b)** $S = \left\{m \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant m \leqslant 2\right\}$

39. Resposta pessoal.

40. $-\frac{3}{4}$

41. **a)** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = -\frac{2\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

h) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

44. **a)** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{3\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \pm\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \pm\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

h) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \pm\frac{\pi}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

45. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 \text{ ou } x = \pi \text{ ou } x = 2\pi\right\}$

46. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2}\right\}$

47. alternativa **d**

48. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6}\right\}$

49. **a)** $\alpha = 3$ **b)** maio e novembro
- Resposta pessoal.
- Resposta pessoal.

50. **a)** aproximadamente 12,78 m
b) 45°

51. Resposta pessoal.

52. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} \text{ ou } x = 2\pi\right\}$

53. alternativa **a**

54. **a)** $t = 12$ **b)** 20 °C; 15 horas

Capítulo 4 Introdução à lógica de programação

6. **a)** Classificar um quadrilátero entre paralelogramo, trapézio ou nenhum dos dois.
b) Sim, pois um paralelogramo possui 2 pares de lados paralelos.
c) Resposta pessoal.

9. **a)** −b/(2*a)
b) C*((1+i)^n)
c) (x^2+a*(y^2)+b*z)/(a*b*(x^2))
d) a^(2/3)+(x−1)^5
e) 2*x−1>=(y+3)/4
f) (x^2/a^2+y^2/b^2)=1

10. **a)** 2 **b)** 60 **c)** 46 **d)** −608

12. **a)** retornam o mesmo resultado
b) retornam resultados diferentes
c) retornam resultados diferentes

14. MATEMATICA

18. v1 = 0, v2 = 1 e v3 = 1

19. **a)** 5 3 e 10
b) 5,10,3
c) 37 8,13 45 45,37,0

20. **a)** X1 pode ser usado como nome de variável, pois não apresenta nenhum caractere especial.
b) quando não houver a declaração de constantes, a palavra constante pode ser usada como nome de variável.
c) R$ não pode ser usado como nome de variável, pois possui caractere especial ($).
d) Nota Prova1 não pode ser usado como nome de variável, pois possui espaço entre as palavras.
e) NumeroAluno pode ser usado como nome de variável, pois não possui espaço entre as palavras, nem acento.
f) 1nome não pode ser usado como nome de variável, pois começa com número.

21. **a)** Nesse caso, a variável declarada e o valor “MEDIA” não são os mesmos, pois a linguagem é sensível a letras maiúsculas e minúsculas.
b) Nesse caso, o valor atribuído para “Num” não é uma condição de verificação de verdadeiro ou falso.

25. **a)** O valor é nulo **c)** 5 < 10 = verdadeiro
b) verdadeiro, 40, cinco **d)** 14,2

44. **a)** 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100
b) 3 9 27 81
c) 20 30 40 50

Sugestões de leitura para o aluno

- ***21 teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo***
  SOUZA, Maria Helena. São Paulo: Planeta, 2018.
  Neste livro, a autora aborda teoremas importantes e que possuem destaque nos estudos realizados pela Matemática, como é o caso do teorema de Tales, apresentando um estudo histórico envolvendo esses resultados, inclusive a respeito dos estudiosos e matemáticos relacionados a seu desenvolvimento e a suas possíveis associações com outras áreas do conhecimento, além de aplicações na resolução de problemas.

- ***A rainha das ciências*: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**
  GARBI, Gilberto Geraldo. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
  Esta obra tem o objetivo de apresentar o desenvolvimento da Matemática ao longo da história, destacando as contribuições de diferentes civilizações e estudiosos nesse processo, com enfoque não apenas no caráter instrumental da Matemática, mas também em seu desenvolvimento enquanto campo de conhecimentos com objetivos próprios.

- ***Alex no país dos números*: uma viagem ao mundo maravilhoso da matemática**
  BELLOS, Alex. Rio de Janeiro: Companhia das Letras, 2011.
  Este livro apresenta uma aventura pelo País da Matemática, possibilitando ao leitor explorar diferentes temas, como as propriedades de jogos como o Sudoku, a matemática empregada por tribos indígenas e a informática, acompanhando os percursos seguidos por Alex no decorrer da história.

- ***Almanaque das curiosidades matemáticas***
  STEWART, Ian. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.
  Este livro desafia o leitor a investigar diversos problemas e enigmas matemáticos, envolvendo desde a contagem até teoremas de grande destaque na Matemática, como o teorema de Pitágoras, partindo tanto de situações comuns quanto de situações surreais.

- ***Desbravadores da matemática*: da alavanca de Arquimedes aos fractais de Mandelbrot**
  STEWART, Ian. Rio de Janeiro: Zahar, 2019.
  Este livro destaca as descobertas realizadas por grandes matemáticos e estudiosos ao longo da história, como as contribuições de Alan Turing para o desenvolvimento da criptografia e dos computadores.

- ***Dominados pelos números*: do Facebook e Google às *fake news* – os algoritmos que controlam nossa vida**
  SUMPTER, David. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019.
  Neste livro, o autor discute a respeito da presença e do papel dos algoritmos, e também da Matemática, em nossas vidas tendo em vista a expansão do acesso às mídias como o Facebook, por exemplo, e sua importância para as pessoas, possibilitando uma reflexão a respeito do uso da internet nos dias atuais e seus impactos na sociedade.

- ***Fundamentos de matemática elementar*: trigonometria**
  IEZZI, Gelson. 8. ed. São Paulo: Atual, 2019. v. 3.
  Este livro aborda o estudo mais aprofundado dos conteúdos de Trigonometria, com destaque para a trigonometria no triângulo retângulo e para o estudo do ciclo trigonométrico.

- ***Geometria plana e trigonometria***
  LEITE, Álvaro Emílio; CASTANHEIRA, Nelson Pereira. Curitiba: InterSaberes, 2014.
  Neste livro, os autores abordam conteúdos fundamentais envolvendo a geometria plana e a trigonometria, com destaque para o estudo dos elementos de um triângulo e suas classificações, bem como as razões trigonométricas definidas em um triângulo retângulo e em um triângulo qualquer.

- ***Programação para adolescentes*: pra leigos**
  MCCUE, Camille. São Paulo: Alta Books, 2016.
  Direcionado a adolescentes, este livro apresenta uma introdução ao estudo da programação, destacando sua aplicação na produção de jogos, entre outros, e propondo o desenvolvimento de projetos que permitem a construção de programas seguindo os conceitos e os passos apresentados ao longo do livro.

- ***Trigonometria e números complexos*: com aplicações**
  MOLTER, Alexandre; NACHTIGALL, Cícero; ZAHN, Maurício. São Paulo: Blucher, 2020.
  Este livro apresenta, entre outros temas, os principais conceitos envolvendo a trigonometria no triângulo retângulo, além das funções trigonométricas e equações trigonométricas, acompanhados de exemplos que ilustram cada um dos conceitos.

Trigonometria para leigos

STERLING, Mary Jane. 2. ed. Rio de Janeiro: Alta Books, 2017.

Neste livro, a autora propõe-se a ajudar quem tem dificuldade para entender a trigonometria, com exemplos de fácil compreensão, aplicações no dia a dia e uma boa dose de humor e diversão.

Sites

BIOE – Banco Internacional de Objetos Educacionais

Disponível em: <http://objetoseducacionais.mec.gov.br/#/inicio>.

Acesso em: 5 ago. 2020.

Este site *corresponde a um banco de objetos educacionais, abordando temas de todas as etapas de ensino e de todas as áreas do conhecimento, especialmente a Matemática, apresentando objetos na forma de imagens, simuladores, aplicativos, vídeos, áudios, hipertextos, entre outros.*

Code Combat

Disponível em: <https://br.codecombat.com/>.

Acesso em: 5 ago. 2020.

O Code Combat *consiste em um jogo* on-line *gratuito que permite ao participante, enquanto realiza as missões e tarefas propostas pelo jogo, aprender conceitos básicos envolvendo a programação.*

Enem

Disponível em: <www.enem.inep.gov.br>.

Acesso em: 5 ago. 2020.

O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), realizado pelo Inep desde 1998, avalia o desempenho escolar ao final do Ensino Médio e possibilita o acesso à educação superior por meio de programas como o Sisu e o Prouni. Os resultados também permitem o desenvolvimento de estudos e indicadores educacionais.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/>.

Acesso em: 5 ago. 2020.

O IBGE é a principal fonte de informações estatísticas e geocientíficas relacionadas ao Brasil. Essas informações apresentam diversas características de nossa sociedade, a fim de que possam ser realizados estudos que identifiquem as necessidades da população.

Khan Academy

Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/>.

Acesso em: 5 ago. 2020.

O site *disponibiliza gratuitamente cursos de Matemática, Ciências, Economia e Ciências da Computação, nos níveis Médio e Superior. Os cursos contêm videoaulas e atividades.*

Olimpíada Brasileira de Matemática

Disponível em: <https://www.obm.org.br/>.

Acesso em: 5 ago. 2020.

A OBM é uma prova que pode ser realizada por qualquer estudante das redes pública e privada a partir do 6º ano do Ensino Fundamental. Neste site*, é possível conferir materiais de estudo, como provas anteriores e suas resoluções, e uma revista direcionada à formação dos alunos participantes.*

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

Disponível em: <http://www.obmep.org.br/>.

Acesso em: 21 ago. 2020.

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é uma prova que pode ser realizada por qualquer estudante da rede pública matriculado do 6º ano do Ensino Fundamental ao final do Ensino Médio.

Scratch

Disponível em: <https://scratch.mit.edu/>.

Acesso em: 5 ago. 2020.

Scratch é uma plataforma gratuita associada ao Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT) e voltada ao aprendizado de programação por meio de atividades lúdicas, incluindo o desenvolvimento de jogos e de outros objetos.

WebEduc

Disponível em: <http://webeduc.mec.gov.br/>.

Acesso em: 5 ago. 2020.

Este site *consiste no portal de conteúdos educacionais do Ministério da Educação, contemplando diversos materiais de pesquisa, objetos de aprendizagem, portais de instituições públicas com conteúdos educacionais, biblioteca virtual de domínio público, entre outros recursos que podem contribuir para a aprendizagem.*

Bibliografia

ANÁLISE espectral de marés e suas aplicações. *Ocean Teacher Global Academy*, 3 jan. 2017. Disponível em: <https://classroom.oceanteacher.org/mod/book/view.php?id=10338&chapterid=1360>. Acesso em: 7 maio 2020.

O site *apresenta diversas informações sobre as marés nos oceanos e os movimentos que causam esse fenômeno.*

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA PARA O ESTUDO DA OBESIDADE E DA SÍNDROME METABÓLICA (Abeso). *Calculadora de IMC*. Disponível em: <https://abeso.org.br/obesidade-e-sindrome-metabolica/calculadora-imc/>. Acesso em: 9 jul. 2020.

Este site *aborda questões relacionadas à saúde, em particular, como combater a obesidade, informando sobre o cálculo do IMC no diagnóstico do problema.*

BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. 3. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 2012.

Este livro apresenta a brilhante história da relação da humanidade com os números. Nesse sentido, é possível aprender sobre a história da Matemática e conhecer os principais responsáveis por seu aprimoramento.

CONSELHO DE ARQUITETURA E URBANISMO DO PARÁ (CAU/PA). *Por que a Torre de Pisa é inclinada?* 10 nov. 2015. Disponível em: <https://www.caupa.gov.br/por-que-a-torre-de-pisa-e-inclinada/>. Acesso em: 11 ago. 2020.

O site *apresenta informações sobre a história da construção da torre de Pisa, o problema da inclinação e suas tentativas de correção.*

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. 4. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

Nesta obra, a história da Matemática é abordada desde a Antiguidade até a atualidade. Ao final de cada capítulo, o livro apresenta exercícios que permitem ao leitor avaliar seu conhecimento.

FELTRIM, Maria I. Z.; JARDIM, José R. B. Movimento toracoabdominal e exercícios respiratórios: revisão da literatura. *Fisioterapia e Pesquisa*, USP, v. 11, n. 2, p. 105-113, jul./dez. 2004. Disponível em: <https://www.revistas.usp.br/fpusp/article/download/77373/81220>. Acesso em: 7 maio 2020.

O artigo apresenta estudos sobre o movimento toracoabdominal e uma abordagem sobre os exercícios respiratórios.

GATESHEAD Millennium Bridge facts (Fatos da ponte Gateshead Millennium). *Gateshead Council*. Disponível em: <https://www.gateshead.gov.uk/article/4596/Gateshead-Millennium-Bridge-facts>. Acesso em: 30 maio 2020.

Neste site, *você encontra informações e curiosidades sobre a ponte Gateshead Millennium, que, além de sua utilidade prática, é um grande ponto turístico.*

INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO DA UFF. *Ultrassom*. Disponível em: <http://www.ic.uff.br/~aconci/Ultrasson.pdf>. Acesso em: 8 maio 2020.

O site *apresenta informações sobre a propagação das ondas de som e o funcionamento das imagens de ultrassom usadas na Medicina.*

INSTITUTO DE FÍSICA DA UFRGS. *Movimento de translação da Terra*. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/mpef/mef008/mef008_02/Angelisa/translacao.html>. Acesso em: 7 maio 2020.

A página apresenta informações sobre o movimento de translação da Terra, relacionando-o às estações do ano.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL (PUC-RS). Escola Politécnica. *Coberturas*. Disponível em: <https://www.politecnica.pucrs.br/professores/soares/Tecnicas_Materiais_e_Estruturas_II/Construcoes_-_Coberturas.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2020.

O documento contém informações técnicas e dicas sobre os tipos de estrutura usados em telhados e coberturas, os tipos de telha, o ângulo de inclinação, entre outras.

THE MOST tilted tower-world record set by Steeple church. *World Record Academy*. Disponível em: <https://www.worldrecordacademy.com/society/most_tilted_tower_world_record_set_by_Steeple_church_70921.htm>. Acesso em: 23 maio 2020.

O site *apresenta informações sobre a Igreja de Suurhusen e o recorde de torre mais inclinada do mundo.*

TORRES Kio (Puerta de Europa). *Bem-Vindo a Madrid*. Disponível em: <https://www.esmadrid.com/pt/informacao-turistica/torres-kio-puerta-europa>. Acesso em: 28 maio 2020.

Este site contém orientações para aqueles que desejam conhecer Madri e apresenta informações sobre as torres KIO, como as características da construção, a história e informações turísticas e de transporte, entre outras.

WOOLLEY, Benjamin. *The Bride of Science*: romance, reason, and Byron's daughter. New York: McGraw-Hill, 1999.

O livro conta a história de Ada Byron, uma importante matemática e escritora inglesa que desenvolveu algoritmos de cálculos complexos, rendendo a ela o título de primeira programadora da história.

Siglas

Enem: Exame Nacional do Ensino Médio

FGV-SP: Fundação Getulio Vargas (São Paulo)

Udesc: Universidade do Estado de Santa Catarina

Uece: Universidade Estadual do Ceará

UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina (Paraná)

UFBA: Universidade Federal da Bahia

UFC-CE: Universidade Federal do Ceará

Ufla-MG: Universidade Federal de Lavras (Minas Gerais)

UFMG: Universidade Federal de Minas Gerais

UFPE: Universidade Federal de Pernambuco

UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UFSCar-SP: Universidade Federal de São Carlos (São Paulo)

Unesp: Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (São Paulo)

Unir-RO: Universidade Federal de Rondônia

UPM-SP: Universidade Presbiteriana Mackenzie (São Paulo)

Vunesp: Fundação para o Vestibular da Unesp

Matemática

Trigonometria, fenômenos periódicos e programação

Assessoria pedagógica

Sumário

1 O Ensino Médio e esta coleção

Estrutura da obra

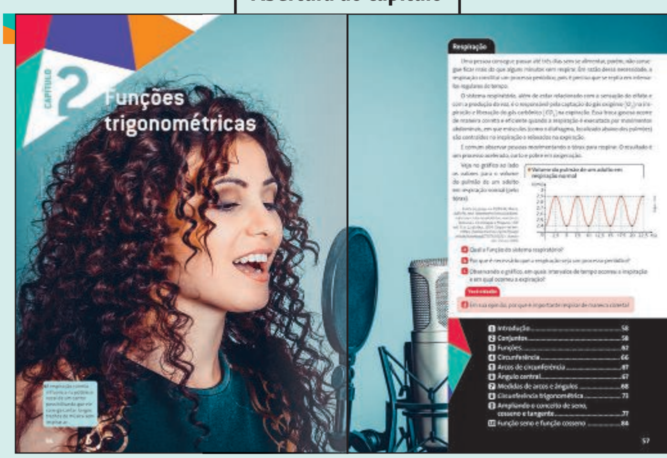
Esta obra está estruturada em seis volumes, sendo estes autocontidos e não sequenciais, ou seja, cada volume apresenta todos os conteúdos imprescindíveis para a compreensão dos alunos, de modo que não seja necessário retomar conteúdos abordados em outros volumes. Assim, esta seção tem por objetivo apresentar como os capítulos do Livro do Estudante estão estruturados, com fac-símiles, textos explicativos a respeito de cada tipo de seção e destaques que poderão aparecer nos capítulos.

Para promover uma aprendizagem enriquecedora e completa, são usados nesta obra, tanto no desenvolvimento dos conteúdos como em seções especiais e tarefas propostas, textos que possuem vários elementos, como imagens, desenhos e ícones. Por isso, o uso neste volume de aparentes publicidades ou marcas é justificado pelo Parecer CNE/CEB nº 15/2000, quando menciona que "[...] o uso didático de imagens comerciais identificadas pode ser pertinente desde que faça parte de um contexto pedagógico mais amplo, conducente à apropriação crítica das múltiplas formas de linguagens presentes em nossa sociedade, submetido às determinações gerais da legislação nacional e às específicas da educação brasileira, com comparecimento módico e variado [...]", tendo o único objetivo de auxiliar os alunos a compreender o conteúdo trabalhado.

- ***Estrutura do Livro do Estudante***

Abertura do capítulo

Nessas páginas, com base em um texto relacionado a diferentes assuntos e situações, os alunos são convidados a responder a algumas questões, que visam motivá-los a refletir sobre o conteúdo a ser trabalhado no decorrer do capítulo, além de explorar os conhecimentos prévios deles. Em geral, os assuntos abordados buscam estabelecer uma relação com outros componentes curriculares, como Biologia, Química e Física, por exemplo.



BNCC

Os códigos referentes a destaques da BNCC indicados no sumário estão sinalizados no início do capítulo correspondente, destacados neste quadro.

Introdução

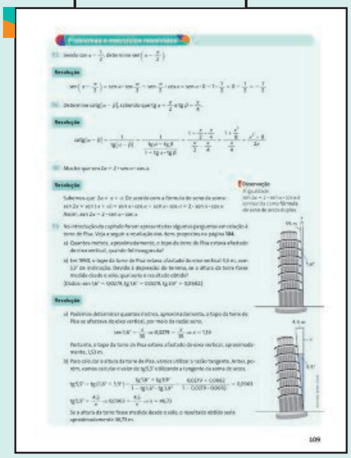
Todos os capítulos têm esse tópico inicial. Nele, há situações-problema, textos referentes à história da Matemática ou situações do cotidiano relacionadas ao conteúdo, explorando os conhecimentos prévios dos alunos e mostrando a necessidade de estudar o conceito abordado.

Conversando

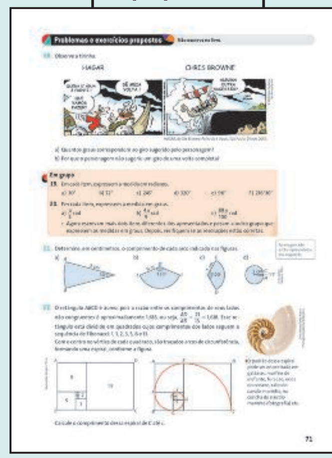
Seção no final da introdução, na qual são propostas questões que servem como diálogo inicial, a fim de incentivar a interlocução entre alunos e professor, bem como organizar e expor os argumentos individuais e a verbalização de ideias matemáticas.

Problemas e exercícios resolvidos

Nessa seção, são apresentadas tarefas resolvidas, que servem tanto de exemplo quanto complemento da teoria abordada. De modo geral, a seção vem logo após a teoria, a fim de contribuir no desenvolvimento de estratégias para a resolução de tarefas propostas nas demais seções do livro.

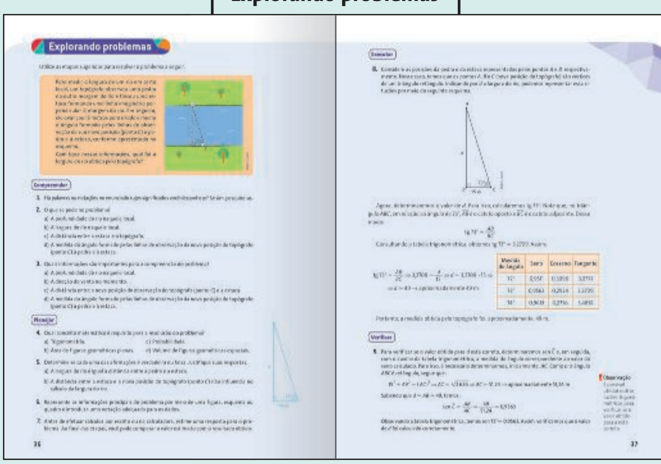


Problemas e exercícios propostos



Propõe tarefas referentes ao conteúdo em estudo, que permitem aos alunos colocar em prática o que estão aprendendo, desenvolvendo assim o aprendizado por meio de situações desafiadoras e também utilizando diferentes estratégias de resolução.

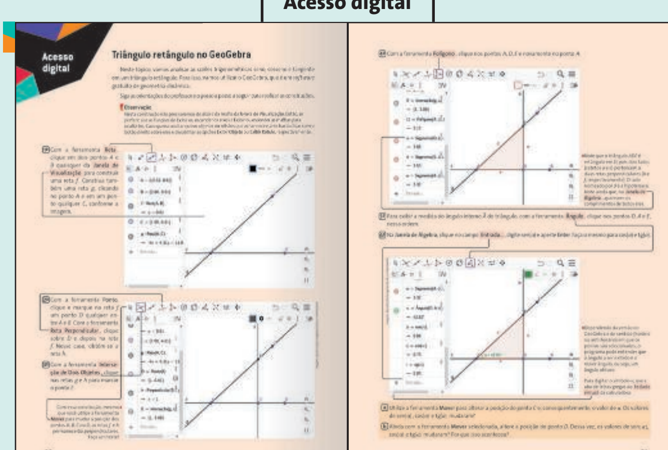
Explorando problemas



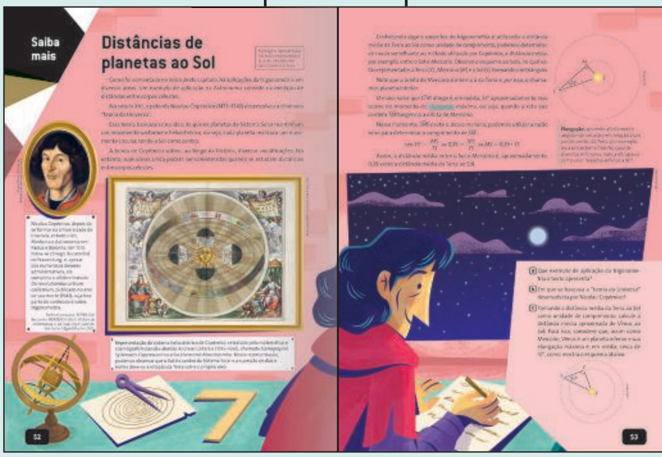
Seção que mostra maneiras de organizar o pensamento para resolver um problema por meio de raciocínio, representação, comunicação e argumentação. Nela, será apresentada cada etapa da resolução, em que se faz necessário mobilizar conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução.

Acesso digital

Apresentada em alguns capítulos, essa seção contém recursos digitais, como *softwares* e *sites*, e várias ferramentas tecnológicas computacionais, que possibilitam o desenvolvimento de atividades relacionadas ao conteúdo em estudo, a fim de incentivar os alunos a utilizar o computador no estudo da Matemática. Ao final da seção, são propostas algumas questões que visam familiarizá-los com o recurso apresentado e a verificação do que compreenderam a seu respeito.



Saiba mais

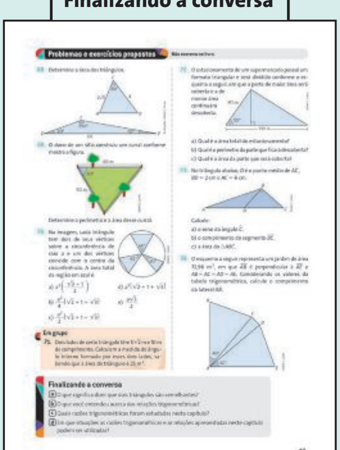


Essa seção apresenta informações complementares que vão além do conteúdo abordado, visando à formação dos alunos na construção da cidadania e mostrando as várias relações da **Matemática** com outras áreas do conhecimento, como **Ciências da Natureza** e **Ciências Humanas**, além de curiosidades ligadas ao conteúdo. Ao final, são propostas algumas questões para que eles possam refletir sobre o que foi estudado.

Conectando ideias

Seção em que os alunos são convidados a ler e interpretar informações apresentadas na forma de textos e infográficos, envolvendo diferentes temas e situações, e, com base nelas, a responder a algumas questões, as quais visam motivá-lo a refletir sobre o que foi estudado no capítulo e a perceber a relação desse conteúdo com situações cotidianas e outras áreas do conhecimento.

Finalizando a conversa



Encontrada ao final da última seção de problemas e exercícios propostos de cada capítulo, essa seção traz sugestões de questões cujo objetivo é levar os alunos a fazer uma análise sobre o que foi estudado, bem como expor o que foi compreendido por eles.

Desafio

Algumas tarefas são destacadas como **desafios**, pois envolvem resoluções que vão além da simples aplicação do conteúdo estudado.

Você produtor

Em algumas tarefas, é proposta a elaboração de problemas com base em imagens ou informações ou, então, a realização de algumas construções. Nesses casos, o destaque aparecerá para os alunos.

Vocabulário

Nesse quadro, encontram-se os significados de algumas palavras em destaque no texto, provavelmente desconhecidas dos alunos.

Em grupo

Pensando na formação mais ampla dos alunos, em algumas tarefas propostas, eles são convidados a resolvê-las em grupos com dois ou mais integrantes.

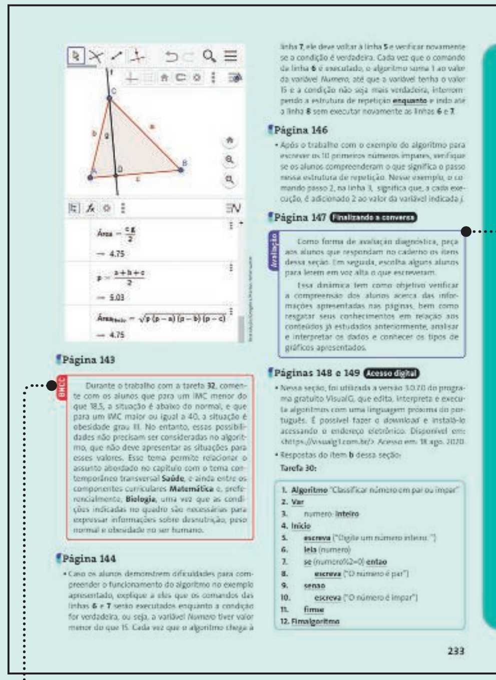
Você cidadão

No decorrer do capítulo, os alunos vão responder a questões que contribuem para a formação cidadã, refletindo a respeito do que está sendo questionado, tanto no seu cotidiano quanto na sociedade em que está inserido.

Observação

Quadro com informações complementares sobre a teoria abordada.

• ***Destaques da Assessoria pedagógica***



Avaliação

Apresenta diferentes modos para que você avalie os alunos, mapeando os conhecimentos (prévios e posteriores) deles, destacando tanto o caráter formativo quanto a preparação para exames de larga escala.

Boxe informativo

Apresenta informações para complementar o tema estudado na página do livro do aluno ou na própria Assessoria pedagógica.

BNCC

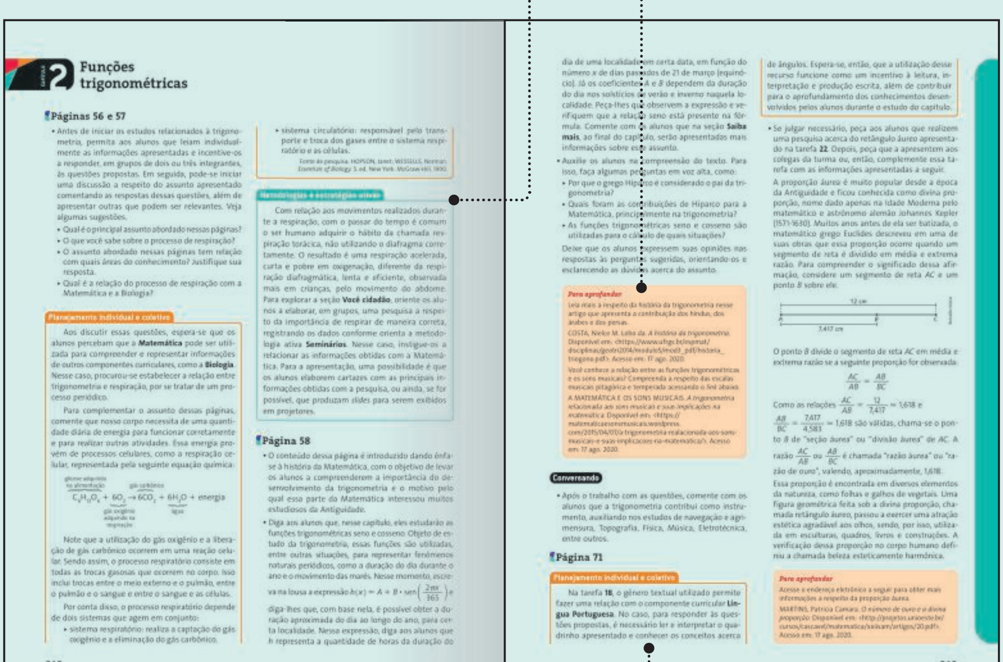
Apresenta as implicações no trabalho com a BNCC no Ensino Médio referentes ao trabalho com competências, habilidades, temas contemporâneos transversais, atitudes e vivências.

Metodologias e estratégias ativas

Apresenta possibilidades de trabalho no desenvolvimento dos conteúdos com diferentes metodologias e estratégias ativas.

Para aprofundar

Traz sugestões de livros e *sites* para complementar o trabalho com o tema que está sendo estudado na página do livro do aluno ou na própria Assessoria pedagógica.



Planejamento individual e coletivo

Apresenta subsídios para o planejamento individual e coletivo, podendo propor trabalho com outros professores do mesmo componente curricular ou com professores de diferentes componentes curriculares.

A Matemática no Ensino Médio

No cenário nacional, especificamente em relação à Educação Básica, é possível observar mudanças significativas nos últimos anos. Entre elas, pode-se destacar a elaboração e a aprovação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para todas as etapas da Educação Básica, além da reestruturação do Ensino Médio, o qual passou a ser referenciado como “novo Ensino Médio”.

Conforme indicam os marcos legais, principalmente as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – parecer CNE/CEB nº 3/2018 –, no “novo Ensino Médio”, é proposto que o aluno desenvolva o protagonismo juvenil, de tal modo que ele possa tomar decisões e assumir a responsabilidade por elas, além de garantir aprendizagens essenciais e comuns a todos os alunos, mas sem desconsiderar especificidades locais, culturais, sociais, entre outras. Assim, o ensino nessa etapa passa a ser organizado com base em itinerários formativos, os quais devem ser organizados considerando os objetivos, os projetos de vida e as escolhas realizadas pelos alunos diante das possibilidades estabelecidas em concordância com a BNCC, entre outros documentos.

Independentemente do itinerário formativo no qual o aluno será inserido, a Matemática é uma unidade curricular presente ao longo dos três anos do Ensino Médio, de modo que seu objetivo ultrapassa a simples memorização de fórmulas e a realização de cálculos. Conforme as orientações da BNCC (BRASIL, 2018), o ensino de Matemática deve ser organizado de modo a possibilitar a construção de uma visão mais integrada a essa ciência e condizente à sua aplicabilidade em contextos reais e ao seu papel na construção cidadã.

Diante do exposto, o ensino de Matemática deve ser organizado de tal modo que possibilite aos alunos

> *[...] desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.*
>
> *[...] (BRASIL, 2018, p. 529).*

A BNCC é estruturada, em cada unidade curricular, com base em competências específicas e habilidades esperadas. Sendo assim, a escolha dos conteúdos a serem abordados em cada ano do Ensino Médio deve ser orientada baseando-se tanto no desenvolvimento delas quanto no das competências gerais estabelecidas para o Ensino Médio como um todo, considerando as aprendizagens mínimas esperadas para os alunos dessa etapa de ensino, conforme descreve o texto desse documento (BRASIL, 2018).

Sendo assim, é essencial a organização do trabalho pedagógico no sentido de possibilitar ao aluno seu desenvolvimento, objetivando alcançar sua inserção e vivência em sociedade. Nesse sentido, é necessário atribuir a ele parte da responsabilidade diante de suas próprias aprendizagens, incentivando-o a desenvolver a autonomia e o protagonismo juvenil, o que pode ser realizado por meio do emprego de diferentes propostas e metodologias, visando contribuir para sua formação integral.

Conforme aponta Carbonell (2002, p. 16),

> *[...] não se pode olhar para trás em direção à escola ancorada no passado em que se limitava ler, escrever, contar e receber passivamente um banho de cultura geral. A nova cidadania que é preciso formar exige, desde os primeiros anos de escolarização, outro tipo de conhecimento e uma participação mais ativa [...].*

Nesse sentido, a mudança nas práticas e a criação de novas estratégias podem contribuir para o desenvolvimento de novas propostas que visam uma participação mais ativa dos alunos, de modo a propiciar um aprendizado mais efetivo e ancorado em ações colaborativas, permitindo estabelecer relações mais específicas com situações da realidade com as quais o aluno poderá deparar-se ao longo de sua vida.

Além dos objetivos citados, o Ensino Médio também deve proporcionar aos alunos a formação necessária para que possam obter resultados satisfatórios nos exames de larga escala relativos a essa etapa, como é o caso do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), o qual é essencial, por exemplo, para que os alunos deem continuidade à sua formação com o ingresso em cursos de Ensino Superior. Considerando que esse exame tem por objetivo avaliar o desempenho individual ao fim da escolaridade básica, o ensino de Matemática nessa etapa da Educação Básica deve favorecer o desenvolvimento das competências e habilidades necessárias para que obtenham um desempenho adequado nos exames de larga escala, contribuindo para que possam prosseguir com os estudos de acordo com seu projeto de vida.

Porém, muito além de uma etapa preparatória para exames de larga escala, o Ensino Médio deve ser organizado de modo a proporcionar aos alunos uma formação ampla e integral e possibilitar sua inserção na sociedade e no mercado de trabalho, desenvolvendo competências e habilidades que os auxiliarão no acompanhamento das transformações pelas quais a sociedade é submetida e na busca de formação continuada a fim de se atualizarem de acordo com essas transformações.

O estudante e o Ensino Médio

Conforme apresentado pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2011 *apud* BRASIL, 2018, p. 463), a juventude deve ser considerada não apenas como uma etapa de transição entre infância e maturidade, mas como uma

> *[...] condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes.*
>
> *[...] (BRASIL, Parecer CNE/CEB nº 5/2011).*

De acordo com Dayrell e Carrano (2014, p.112), a juventude

> *[...] constitui um momento determinado, mas que não se reduz a uma passagem. Ela assume uma importância em si mesma como um momento de exercício de inserção social. Nesse, o indivíduo vai se descobrindo e descortinando as possibilidades em todas as instâncias de sua vida, desde a dimensão afetiva até a profissional. Essa realidade ganha contornos próprios em contextos históricos, sociais e culturais distintos. As distintas condições sociais (origem de classe e cor da pele, por exemplo), a diversidade cultural (as identidades culturais e religiosas, os diferentes valores familiares etc.), a diversidade de gênero (a heterossexualidade, a homossexualidade, a transexualidade, por exemplo) e até mesmo as DIFERENÇAS TERRITORIAIS se articulam para a constituição dos DIFERENTES MODOS DE VIVENCIAR A JUVENTUDE.*
>
> *[...]*

O perfil do aluno que está inserido no Ensino Médio sofreu muitas modificações nos últimos anos, principalmente por influência de mudanças sociais e culturais vivenciadas pela sociedade, motivadas tanto pelas evoluções tecnológicas ocorridas nos últimos tempos quanto pela expansão do acesso dos alunos a essa etapa de ensino em todo o Brasil. No entanto, ainda que as tecnologias e outras inovações estejam presentes na vida de muitos jovens, considerando a extensão territorial do país e sua diversidade cultural, não é possível traçar um perfil único para o jovem matriculado no Ensino Médio devido à pluralidade de indivíduos, com diferentes características e interesses, sendo possível tratar apenas a respeito "das juventudes" presentes nas salas de aula de Ensino Médio do país.

Assim, apesar de existirem diferenças em relação a aspectos sociais, culturais e econômicos, entre outros, os jovens que integram o Ensino Médio devem ser considerados em sua totalidade, para que a escola possa acolher essa pluralidade de indivíduos, garantindo a eles a possibilidade de expandirem o protagonismo juvenil e de definirem seus projetos de vida (BRASIL, 2018), proporcionando-lhes um desenvolvimento integral, que perpassa a formação de caráter conteudista, e contribuindo para sua formação no sentido de integração e participação em sociedade.

Diante dessa pluralidade, é importante que a escola e o professor considerem, na organização do trabalho pedagógico, diferentes aspectos e busquem proporcionar a todos, independentemente de suas características, as oportunidades equivalentes de aprendizagem e de acesso a recursos, inclusive os tecnológicos, os quais estão presentes em diferentes setores da sociedade e farão parte do cotidiano de muitos alunos ao longo de sua vida.

Assim, é importante que o professor garanta a todos os alunos o acesso aos diferentes recursos tecnológicos disponíveis na escola, tanto aos que têm contato diário com esses equipamentos quanto aos que não têm acesso a eles, de maneira que tenham, no contexto escolar, as mesmas oportunidades de aprendizagem e preparação para os desafios que surgirem no ambiente escolar, em seu futuro profissional e no convívio em sociedade.

Nesse sentido, além de preocupar-se com os conteúdos matemáticos que devem ser trabalhados, é importante que o professor esteja atento às características dos jovens que integram as diferentes turmas, observando suas especificidades e considerando-as no momento de organizar seu trabalho, pois, se forem consideradas, por exemplo, duas turmas formadas por indivíduos da mesma faixa etária, observa-se que elas podem apresentar características completamente diferentes, conforme os sujeitos que as compõem. Por isso, esse é um fator essencial a ser considerado na organização dos trabalhos desenvolvidos pela escola e por seus professores.

O papel do professor

Atualmente, a interação de alguns alunos com a tecnologia incorporou mudanças de comportamento em sala de aula, e essa "geração digital" passou a exigir do professor a mesma alteração, como o professor utilizar essa tecnologia em suas aulas, para se manter atualizado e para se comunicar com outras pessoas. Além disso, há alunos que, por falta de acesso a algumas tecnologias, depositam na escola as esperanças de poder vivenciar experiências importantes de convívio social e que podem ser essenciais para seu futuro profissional. Fatores como esses indicam que o papel do professor precisa ser repensado e redimensionado significativamente, pois influenciam diretamente o ambiente escolar.

Na perspectiva do ensino tradicional, o conteúdo era transmitido por meio de aulas expositivas e pressupunha-se o aprendizado pelo acúmulo de informações. Assim, caberia ao aluno reter essas informações mediante a reprodução de atividades exploratórias, que, se realizadas de maneira correta, constatariam a aprendizagem. No entanto, a mera repetição não comprova o aprendizado, mas a capacidade de memorização e de aplicação dos conhecimentos. Reter grande quantidade de informações também não parece suficiente em uma sociedade dinâmica e complexa que requer cada vez mais habilidades e competências associadas à criatividade e à produção de conhecimento, entre muitas outras.

No entanto, diante dos objetivos formativos apresentados pela BNCC (BRASIL, 2018), em consonância com os demais marcos legais que regem a organização do Ensino Médio no Brasil, a mera transmissão de informações não é suficiente para a formação dos sujeitos. Devido às competências e às habilidades esperadas para esses indivíduos, as práticas pedagógicas precisam ser aprimoradas e construídas de modo a possibilitarem aos alunos esse tipo de formação, considerando suas características individuais.

Dessa maneira, devido às transformações ocorridas na sociedade, tanto a escola quanto o aluno sofreram modificações em seus papéis. Por esse motivo, na atualidade, é esperado que o ensino seja organizado de modo que o aluno passe a ter participação ativa no processo de aprendizagem, ou seja, torne-se agente da construção do próprio conhecimento. Nesse sentido, o professor deve se posicionar como um mediador e como um avaliador de processos, isto é, aquele que ajuda a fornecer as informações necessárias e faz intervenções que auxiliam o aluno a ter condições de construir seu conhecimento, reestruturando o processo quando necessário.

Para Santaló (1996, p. 11),

> *A missão dos educadores é preparar as novas gerações para o mundo em que terão que viver. Isto quer dizer proporcionar-lhes o ensino necessário para que adquiram as destrezas e habilidades que vão necessitar para seu desempenho, com comodidade e eficiência, no seio da sociedade que enfrentarão ao concluir sua escolaridade.*
>
> *[...]*

Sendo assim, o professor deve assumir, entre outros, os seguintes papéis.

- Provedor: aquele que torna os conceitos e os conteúdos matemáticos passíveis de serem aprendidos, fornecendo as informações necessárias, as quais os alunos ainda não têm condições de obter sozinhos, o que exige do professor o domínio do conteúdo e conhecimentos pedagógicos, tecnológicos e outros.
- Orientador: aquele que conduz e organiza o trabalho em sala de aula, buscando desenvolver a autonomia dos alunos e contribuir para o desenvolvimento das competências e habilidades esperadas para essa etapa de ensino.
- Incentivador: aquele que incentiva continuamente os alunos, motivando-os a refletir, investigar, levantar questões e debatê-las com os colegas.

Diante dessas novas perspectivas, é importante que o professor conheça as condições socioculturais, as expectativas e as competências cognitivas dos alunos, refletindo a respeito de como pode organizar seu trabalho no sentido de proporcionar a eles aprendizagens significativas, considerando as orientações e os objetivos estabelecidos para o ensino de Matemática no Ensino Médio. Assim, o professor terá condições de selecionar ou produzir situações-problema relacionadas ao cotidiano de sua turma. É relevante também o trabalho de determinado conteúdo em diversos contextos, a fim de que os alunos desenvolvam a capacidade de generalização. Além disso, o professor precisa ter conhecimento das mudanças que ocorrem dentro e fora da escola, repensando seu trabalho diante das transformações às quais a escola e a sociedade estão sujeitas.

Nesse aspecto, a formação do professor é fundamental, não se resumindo apenas à graduação ou à especialização, mas também à formação continuada, a fim de acompanhar o desenvolvimento de estudos e os progressos que ocorrem no âmbito educacional. É desejável, por exemplo, que um professor de Matemática saiba o conteúdo da área; é necessário que ele tenha algum conhecimento sobre psicologia, pedagogia, linguagem, sexualidade, infância, adolescência, sonho, afeto, vida etc., para que possa, no cotidiano da sala de aula, lidar com problemas e situações referentes a esses e a outros campos, os quais afetam os alunos e podem influenciar diretamente em suas aprendizagens.

Para se informar sobre as mudanças que ocorrem fora da escola, o professor precisa estar atento às constantes transformações e evoluções sociais, a fim de verificar se seu trabalho está contribuindo para a construção do conhecimento do estudante como cidadão.

De acordo com Brousseau (1996, p. 71),

> *[...] o professor é uma espécie de ator. Atua segundo um texto escrito em outro contexto e segundo determinada tradição. Podemos imaginá-lo como um ator da Commedia dell'arte: improvisa na hora, em função de um argumento ou uma trama.*
>
> *[...]*

No entanto, para que o professor possa organizar seu trabalho visando às aprendizagens essenciais aos alunos no Ensino Médio, é necessário considerar que, em todo trabalho pedagógico, a relação entre professor, aluno e saber está pautada em um conjunto de regras nem sempre explícitas. Essas regras emergem exatamente quando há a infração de uma delas, tanto por parte do professor quanto do aluno.

Por isso, há a necessidade de, inicialmente, estabelecer um acordo entre ambas as partes de maneira que tenham direitos e deveres e verifiquem também as responsabilidades de cada uma. A esse acordo, dá-se o nome de contrato didático.

Segundo Brousseau (2008, p. 9),

> *[...] Numa situação de ensino preparada e realizada pelo professor, o aluno em geral tem a tarefa de resolver o problema que lhe é apresentado, por meio da interpretação das questões colocadas, das informações fornecidas, das exigências impostas, que são a maneira de ensinar do professor. Esses hábitos específicos do professor, esperados pelo aluno, e os comportamentos deste, esperados pelo professor, constituem o contrato didático.*
>
> *[...]*

O contrato didático, portanto, pode ser entendido como um instrumento de análise da relação professor, aluno e saber.

Acerca do saber, com base nas ideias de Brousseau, Moretti e Flores (2002), destacam-se quatro elementos importantes:

- A ideia de divisão de responsabilidades: para que se efetive uma relação didática, é necessário que o professor esteja disposto a ensinar e que o aluno também cumpra seu papel no envolvimento com o aprendizado, manifestando seu desejo de aprender.
- A tomada de consciência do implícito: a manutenção das regras implícitas é fundamental para o processo de ensino-aprendizagem. Tomar consciência dessas regras propicia conflitos e espaços para trocas entre os parceiros, porém não é conveniente transformar tudo o que está implícito em explícito.
- A relação com o saber: a característica fundamental de uma relação didática reside na existência de assimetria entre as relações que professor e aluno mantêm com os saberes.
- A construção da comunicação didática: mediante o contrato didático, busca-se descobrir o que favorece ou impede o acesso dos alunos ao conhecimento e o que pode estar bloqueando ou não a entrada destes no processo de aprendizagem.

A quebra das regras contratuais sugere mudanças na relação e, consequentemente, novas configurações, considerando a ação e a reflexão do professor, bem como uma participação mais decisiva dos alunos. De acordo com Silva (1999), a conscientização da normatização contratual, sua explicitação e eventuais rupturas deveriam ser desenvolvidas sempre em consonância com uma ênfase segundo a qual professor e alunos tivessem papel ativo no processo.

Além disso, é necessário que o contrato didático esteja em consonância com a perspectiva pedagógica adotada, visto que é preciso adaptá-lo ao contexto em que está inserido. Se a relação didática se dá em um ambiente de aulas expositivas, o conjunto de regras, explícitas ou não, é diferente, por exemplo, daquele em que o aluno tem participação efetiva no processo de aprendizagem, realizando trabalhos, pesquisas, entre outras ações. Nesse sentido, considerando as orientações quanto ao uso de estratégias que possibilitem ao aluno assumir um papel de protagonista, sendo um sujeito ativo e responsável por sua aprendizagem, é importante que o contrato didático se alinhe a ações e posturas que considerem e favoreçam trocas entre professor e alunos, bem como ajude a manter um ambiente propício ao desenvolvimento.

Segundo o que foi apontado por algumas pesquisas e experiências, a presença do contrato didático tem se mostrado relevante na relação didática. Os bons resultados aparecem à medida que os alunos se sentem responsáveis por seus objetivos e pelos meios de alcançá-los, o que contribui para a prática do professor, que passa a valorizar o uso desse instrumento no processo de aprendizagem.

Assim como o professor tem autonomia para organizar o contrato didático, em conjunto com seus alunos, a organização dos conteúdos também pode ser estabelecida pelo professor, considerando sua formação e sua experiência com o componente curricular Matemática. Dessa maneira, com base em conceitos teóricos e em sua formação, o professor pode determinar qual é a melhor distribuição para os conteúdos ao longo do Ensino Médio, tendo em vista o conjunto de aprendizagens mínimas estabelecidas pela BNCC (BRASIL, 2018) para os alunos do Ensino Médio.

Nesse sentido, desde que considere todas as competências e as habilidades esperadas dos alunos ao concluírem o Ensino Médio, o professor tem autonomia para distribuir os conteúdos ao longo dessa etapa de ensino, ordenando-os e articulando-os da forma que julgar mais adequada, considerando as possíveis relações multidisciplinares e interdisciplinares que podem ser estabelecidas entre os diferentes componentes curriculares. Assim, o planejamento e a organização dos conteúdos podem ser feitos tanto individualmente quanto coletivamente, no contexto da escola, considerando os professores que atuam com o componente curricular de Matemática no Ensino Médio e também os professores de outras áreas do conhecimento. Desse modo, há a contribuição para uma abordagem contextualizada dos conceitos matemáticos e para o desenvolvimento de uma visão integral a respeito da Matemática, de sua aplicabilidade em situações presentes no cotidiano e de seu potencial para leitura, interpretação e transformação do mundo.

Para concluir, o professor deve ser um aliado na formação do aluno/cidadão, e não apenas um transmissor de conteúdo. Além disso, é importante que ele esteja preparado para as contínuas mudanças do cotidiano. Diante de todas as transformações que influenciam a sociedade e o espaço escolar, o professor precisa repensar continuamente seu papel e sua postura em sala de aula, para que possa contribuir para a aprendizagem dos alunos, deixando de ser apenas um transmissor de conteúdos e assumindo uma postura de provedor, orientador e incentivador. Com isso, o professor proporciona aos alunos um ambiente no qual são incentivados a assumir um papel ativo e a desenvolver as competências e as habilidades esperadas para o convívio em sociedade, além de estarem preparados a se adaptarem às mudanças que poderão influenciá-los ao longo da vida.

Cultura de paz, combate à violência e promoção da saúde mental

O ensino de Matemática no Ensino Médio não envolve apenas questões teóricas e conteudistas. Ele é permeado pelo cotidiano dos alunos e pelas relações interpessoais presentes no ambiente escolar, em relação ao professor, aos alunos e aos demais integrantes desse ambiente. Assim, de acordo com Vygotsky (*apud* MOREIRA, 2011), não é possível analisar o ensino e a aprendizagem sem considerar os contextos históricos, culturais e sociais nos quais os alunos estão inseridos. Nesse sentido, a organização do trabalho pedagógico deve considerar os fatores externos e internos que podem integrar o contexto da sala de aula e influenciar as aprendizagens.

Os alunos estão inseridos em uma sociedade na qual prevalece a coletividade, de modo que todos precisam cooperar e respeitar uns aos outros para que seja possível estabelecer uma relação de convivência com vistas a um bem comum. Além disso, ao concluírem o Ensino Médio, eles devem ter desenvolvido diversas competências e habilidades que permitam, entre outras ações, exercer a cidadania e integrar-se ao mercado de trabalho, o que exige o estabelecimento de relações por meio, principalmente, do diálogo, que deve estar presente também no contexto escolar.

Conforme destacado por Freire (1972 *apud* ALRO; SKOVSMOSE, 2010, p. 120-121), o diálogo "[...] é uma forma humilde e respeitosa de cooperar com o outro numa relação de confiança mútua. [...]". Sendo assim, o diálogo consiste em um elemento fundamental para que ocorram as aprendizagens no contexto escolar e o desenvolvimento das competências e das habilidades relacionadas ao aprimoramento do aluno como cidadão. Além disso, com o exercício do diálogo, os alunos podem desenvolver a empatia e o respeito aos demais, contribuindo para inibir e evitar situações de violência no contexto escolar, como é o caso, por exemplo, da intimidação sistemática, conhecida como *bullying*.

De acordo com Fernandes, Yunes e Taschetto (2017, p. 144-145), o "*bullying* é definido como a prática violenta e intencional que causa dor, angústia e sofrimento às vítimas [...] O *bullying* pode causar problemas sérios para quem sofre, pratica ou testemunha. [...]". Francisco e Libório (2009, p. 201) afirmam que, se,

> *[...] por um lado, as vítimas sofrem uma deterioração da sua autoestima, e do conceito que têm de si, por outro, os agressores também precisam de auxílio, visto que sofrem grave deterioração de sua escala de valores [...].*

Para lidar com esse tipo de situação, é importante que o professor busque informações a respeito da temática e converse com os demais atores do processo educativo, como coordenadores pedagógicos e diretores, de modo que todos possam trabalhar em conjunto para enfrentar situações de violência como o *bullying*. É imprescindível que o professor busque informações que lhe permitam identificar situações de violência em sala de aula e lidar com elas, evitando a exposição dos alunos e exercitando a escuta acolhedora, além de contribuir para a resolução dos problemas e a superação das situações de crise. Desse modo, o professor evita intimidações entre os alunos, caso existam, uma vez que episódios desse tipo, além de serem prejudiciais aos envolvidos, podem influenciar negativamente na aprendizagem e no convívio escolar.

Durante o ensino da Matemática, é possível desenvolver atividades que incentivem a cultura de paz, o combate à violência e a promoção da saúde mental por meio de algumas estratégias metodológicas que contribuem para evitar situações de conflito e violência, pois são criados espaços nos quais é incentivado o desenvolvimento da empatia, do respeito, dos valores humanos e da reflexão sobre os conflitos.

O desenvolvimento de atividades – como a realização de trabalhos cooperativos baseados na resolução de problemas, investigações, modelagem matemática, desenvolvimento de projetos, dinâmicas de grupos, entre outras – pode ser um importante aliado do combate às situações de violência. Tais atividades, além de serem empregadas em diferentes momentos e no trabalho com os mais variados conteúdos, mantendo o foco na aprendizagem dos conceitos matemáticos essenciais para o Ensino Médio, podem favorecer a construção de um ambiente no qual prevaleça o respeito mútuo, por meio da realização de trabalhos em grupos e pela participação ativa de todos os alunos, que se tornam atores principais no desenvolvimento das atividades.

Assim, é possível aliar o estudo dos conhecimentos teóricos com o desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas ao convívio social, contribuindo para a formação de indivíduos capazes de se relacionarem socialmente e de manterem o respeito em relação aos demais integrantes da sociedade e aos contextos nos quais estão inseridos.

As situações de violência não ocorrem somente em relação a terceiros, mas podem também ser autoprovocadas, principalmente no que se refere às tentativas de suicídio e automutilação. Por esse motivo, é importante que o professor busque acompanhar, a todo o momento, o comportamento dos alunos e sua interação com professores e colegas, observando se houve alguma mudança de comportamento e estando atento às situações, como o distanciamento social de algum aluno em sala de aula, que pode representar um problema de relacionamento ou, em situações mais graves, pensamentos de violência autoprovocada.

Por isso, além de organizar o trabalho pedagógico no que se refere a conceitos matemáticos, é importante que o professor proponha situações de aprendizagem que o aproximem dos alunos e que lhe permitam conhecê-los melhor, a fim de identificar possíveis situações críticas e tentar evitá-las, pois, além de formação técnica, o Ensino Médio deve ser orientado à formação de um indivíduo em todos os seus aspectos (BRASIL, 2018), especialmente nos sentidos social e emocional.

Conforme indica Costa, Figueiredo e Ribeiro (2013 *apud* SILVA *et al*., 2019, p. 135), a escola não deve objetivar

> *[...] ser apenas um lugar onde se produz educação e conhecimento de forma eficaz, mas um lugar onde exista interesse e que haja saúde de todos os seus membros. A educação em saúde na escola dá-se mediante o processo onde se busca colaborar para a formação de um pensamento crítico do estudante, que tenha como resultado a aquisição de práticas que visem promover, manter e recuperar a própria saúde.*
>
> *[...]*

Quando se discute a respeito de saúde, é necessário considerar tanto os fatores físicos quanto os psicológicos. Sendo assim, é preciso que no Ensino Médio sejam desenvolvidas atividades que promovam a saúde mental dos alunos, e não apenas a aprendizagem dos conceitos essenciais. A articulação entre saúde mental e desenvolvimento cognitivo é um aspecto importante a ser considerado, visto que não é possível pensar em aprendizagem se não houver, entre outros elementos, uma predisposição do aluno em aprender, além de seu envolvimento com as atividades propostas.

No contexto da Matemática, considerando a necessidade da promoção da saúde mental, é importante articular várias estratégias metodológicas, propor tipos distintos de atividade, pois cada aluno tem um ritmo de aprendizagem diferente, e procurar sempre valorizar as produções realizadas mostrando a eles que o erro pode ser utilizado não como um fator negativo, mas como um mecanismo de autorregulação capaz de contribuir para a aprendizagem.

A fase da adolescência e a transição para a vida adulta são momentos delicados na vida e resultam em experiências diferentes para cada pessoa. Além de ser uma etapa na qual os indivíduos vivenciam novas experiências, esses períodos revelam possíveis vulnerabilidades, em que as pessoas precisam lidar com situações conflituosas (SILVA *et al*., 2019), pois estão formando sua personalidade e precisam fazer escolhas importantes em relação ao futuro, como a escolha de uma profissão e a participação em exames de larga escala, como é o caso do Enem e das provas de vestibulares. Dessa maneira, na organização do trabalho pedagógico, é importante que o professor também considere esse tipo de situação e organize propostas que considerem o momento de vida dos alunos em conjunto com a formação mínima necessária, buscando contribuir para a aprendizagem deles e, ao mesmo tempo, considerando a promoção de sua saúde mental.

O ensino de Matemática no Ensino Médio deve oferecer aos alunos as condições necessárias para se tornarem indivíduos capazes de assumir seus papéis na sociedade de maneira adequada, utilizando seus conhecimentos teóricos a fim de contribuir, por exemplo, para a resolução dos problemas que podem surgir e para o exercício da profissão escolhida, e que possam promover uma cultura de paz e de respeito ao próximo, em sua família, em sua comunidade, em seu trabalho e em todos os contextos nos quais ele se insira.

Para que essa formação possa ser efetivada, é essencial que a escola se torne um ambiente de promoção da cultura de paz, nas mais variadas atividades realizadas e entre todas as pessoas envolvidas: alunos, professores, diretores, supervisores, entre outros. Desse modo, vivenciando um ambiente no qual as relações humanas sejam respeitadas, em que situações críticas sejam resolvidas por meio do diálogo e da reflexão e onde a violência não seja promovida, os alunos poderão desenvolver as competências e as habilidades que lhes permitirão contribuir para que a cultura de paz se propague também fora do ambiente escolar, ou seja, em sociedade e na própria vida.

Pensamento computacional

A evolução tecnológica impactou significativamente nossa sociedade nos últimos anos. O uso da tecnologia, mediado pela internet, tem tomado cada vez mais espaço na rotina dos jovens, seja para comunicação pelas redes sociais, seja para se atualizarem por meio de notícias e informações publicadas na *web*. O desenvolvimento do pensamento computacional ganhou destaque nesse processo, pois está associado ao uso adequado e direcionado das tecnologias, de modo a incentivar as capacidades criativa, crítica e estratégica, contribuindo para desenvolver habilidades relativas aos fundamentos da computação, aplicando-os nas mais diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de resolver problemas de maneira individual e colaborativa (OLÍMPIO JUNIOR; VILLA-OCHOA, 2013; SILVA, 2019).

Em outras palavras, o pensamento computacional está relacionado ao pensamento analítico e ao raciocínio dedutivo, que envolvem a Lógica e a Matemática. Podemos ainda mencionar que o pensamento computacional pode contribuir com a resolução de problemas, bem como tornar os alunos hábeis a fazer uma representação geométrica ou, ainda, solucionar sistemas aplicando corretamente as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDICs), o que vai ao encontro da **Competência específica 4** da área de **Matemática e suas Tecnologias** (BRASIL, 2018). Dessa maneira, é necessário incentivá-los a fazer uso dessas tecnologias como uma alternativa para a aprendizagem, com o intuito de transformar problemas e/ou situações considerados de difícil resolução em um processo compreensível e que possam ser resolvidos com mais facilidade.

O pensamento computacional tem como base quatro pilares – decomposição, reconhecimento de padrões, abstração, algoritmo (LIUKAS, 2015) – que orientam o processo de solução de problemas. Assim, quando nos deparamos com um problema, sua solução pode ser pensada computacionalmente. Em outras palavras, é preciso analisar o problema e dividi-lo em partes menores, por meio da **decomposição**, aumentando a atenção aos detalhes. Na sequência, ocorre o **reconhecimento de padrões** nos problemas decompostos, identificando similaridades em diferentes processos para solucioná-los de maneira mais eficiente e rápida. Já pela **abstração**, buscamos uma solução que possa ser válida em mais de um problema e o que pode ser ignorado. Por fim, verificamos os procedimentos necessários para solucionar o problema, pensando assim no **algoritmo**.

No universo da Educação Básica, o uso do computador pode consolidar e aprofundar conhecimentos, habilidades, atitudes e valores desenvolvidos no ensino que estejam relacionados à área de **Matemática e suas tecnologias**. Nesse viés, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 474) menciona que o

> *pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos.*
>
> [...]

O pensamento computacional no cotidiano escolar

O mundo digital engloba métodos para a solução de problemas baseados nos fundamentos e técnicas computacionais, consistindo em uma forma de incentivar o raciocínio lógico. Desse modo, no âmbito da educação, os alunos podem desenvolver o pensamento computacional conforme a afinidade que tenham com a tecnologia, aprimorando assim técnicas como a abstração e a organização. Em relação a essa afinidade, Prensky (2010) aponta duas gerações distintas: os nativos digitais e os imigrantes digitais. Os primeiros são a geração que já nasceu em uma cultura digital, ou seja, há compatibilidade tecnológica de maneira intuitiva e orgânica. Já os imigrantes digitais, embora façam uso dos aparatos tecnológicos, não têm a mesma aptidão dos nativos, pois precisam se adaptar a esse uso.

O uso da tecnologia tem modificado a maneira de pensar e de viver em sociedade, isso porque não há espaço para um ensino desconectado da realidade, pois vivemos a era da informação. As gerações mais novas, desde muito cedo, já estão em contato com a tecnologia, realizando atividades complexas de maneira muito simples.

> *[...] com o avanço das tecnologias digitais e a consequente facilidade de acesso à informação, a escola já não é a única fonte de conhecimento disponível para as pessoas. Por meio do desenvolvimento dos computadores, smartphones, tablets e internet, pode-se aprender em qualquer lugar e a qualquer hora. Contudo, o papel da escola não termina, mas se expande, e cabe a ela direcionar e capacitar os alunos a explorar responsavelmente esses novos caminhos.*
>
> *[...] (SUNAGA; CARVALHO, 2015, p. 141).*

Nessa perspectiva, torna-se importante propor aulas com o uso de tecnologias digitais de informação e comunicação, incentivando os alunos a desenvolver diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático (indução, dedução, abdução e raciocínio por analogia) por meio de diversos problemas, atividades e vivências, especialmente para promover práticas (orais e escritas) de argumentação e inferência. Um dos desafios do processo educativo, mediado pelo uso dessas tecnologias, consiste em construir respostas às demandas colocadas por um contexto social, econômico e cultural, ou seja, reconhecer suas potencialidades para propor e/ou implementar soluções (BRASIL, 2018).

Para garantir a aprendizagem, além de desenvolver as habilidades cognitivas (ler, escrever e fazer operações matemáticas), no intuito de atingir bons resultados, é necessário incentivar e proporcionar o conhecimento para o exercício da cidadania, fazendo uso do pensamento computacional. Nesse viés, consideramos aliados do processo de ensino a alfabetização e o letramento digital, assegurando o desenvolvimento, do ponto de vista matemático e computacional, da análise crítica, criativa e propositiva de temas relacionados aos princípios éticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social.

Para explorar e promover ainda mais o contato dos alunos com o pensamento computacional ao longo da Educação Básica, é possível fazer uso de alguns recursos, que podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico e incentivar o desenvolvimento de noções gerais de programas de computador. Nesta coleção são utilizados alguns desses recursos, como o VisualG, a planilha eletrônica Calc da LibreOffice e o GeoGebra, todos gratuitos e desenvolvidos na seção **Acesso digital**. Tais recursos, assim como tarefas específicas e a seção **Explorando problemas**, que são trabalhadas ao longo da coleção, possibilitam construir e analisar planilhas, gráficos, algoritmos e fluxogramas.

O VisualG, por exemplo, permite criar, editar, interpretar e executar algoritmos. Além disso, incentiva os alunos a desenvolver a lógica e a programação, pois é elaborado especialmente para iniciantes. Na coleção, são dadas instruções para utilizá-lo e tarefas para colocar em prática a aprendizagem.

Já a seção **Explorando problemas** e algumas tarefas específicas da seção **Problemas e exercícios resolvidos** e **Problemas e exercícios propostos** são organizadas de modo que não há necessidade de utilizar recursos tecnológicos, pois nelas é preciso que os alunos as resolvam por meio do raciocínio – representando, comunicando e argumentando. Além disso, em **Explorando problemas** são apresentadas cada etapa da resolução, mobilizando conhecimentos e habilidades com o objetivo de identificar conceitos e conceber um processo de resolução, desenvolvendo, assim, o pensamento computacional.

Para concluir, propomos a necessidade de praticar o pensamento computacional, com o intuito de mostrar que os meios tecnológicos têm desempenhado um papel importante ao atender algumas das necessidades dos professores e alunos, dando continuidade nos processos de ensino e aprendizagem. Além disso, é possível desenvolver esse pensamento por meio de tipos de abordagens diferentes. Por fim, torna-se importante compreender que o pensamento computacional pode ser mobilizado dentro e fora do ambiente escolar.

Metodologias e estratégias ativas

A atual sociedade globalizada e informatizada tem exigido mudanças significativas na educação, destacando-se a importância da aprendizagem ativa, que considera os alunos como protagonistas dessa ação, que exige responsabilidade, pois é algo compartilhado com o professor. Esse modelo de aprendizagem baseia-se na participação ativa dos alunos em um conjunto de atividades, como resolver problemas, desenvolver projetos, conjecturar, modelar situações, ler, escrever, perguntar, discutir e participar de seminários. Portanto, faz-se necessário que o professor torne-se mediador, orientador e supervisor, promovendo um ambiente que possibilite aos alunos desenvolver a autonomia e assumir o protagonismo nos processos de sua aprendizagem. Para isso, pesquisadores sugerem o uso de diferentes estratégias, que têm como objetivo envolver e engajar os alunos ativamente em todas as etapas. Entre os benefícios do uso dessas estratégias, estão:

> *[...] o protagonismo estudantil, a apreensão das informações mediadas, habilidades comunicacionais, habilidades de raciocínio avançadas, trabalho em equipe, motivação, novos recursos de aprendizagem e respeito aos vários estilos de aprendizagem. [...] (MOREIRA; RIBEIRO, 2016, p. 97).*

Esta coleção possibilita que o professor desenvolva experiências definidas por um conjunto de atividades, levando os alunos a realizar algo e a refletir sobre o que estão fazendo, interagindo com o assunto em estudo, de modo dinâmico, e não apenas recebendo a informação do professor de maneira passiva.

Entre as diferentes estratégias de aprendizagem, elencamos algumas possibilidades, como **Sala de aula invertida**, **Rotação por estações** e **estação laboral**, **Seminários**, **Fishbowl**, **Gallery Walk**, **Modelagem matemática** e **Tecnologias digitais de informação e comunicação** (TDICs).

A seguir, destacamos características dessas metodologias ativas e sugerimos seções do livro que apresentam potencialidades para desenvolvê-las.

Sala de aula invertida

Nessa metodologia, também conhecida como **Flipped classroom**, os alunos são desafiados a estudar os conteúdos básicos em casa, por meio de vídeos, textos, pesquisas, entre outros suportes, para que posteriormente, em sala de aula, o professor esclareça dúvidas, problematize e complemente o conteúdo com discussões e atividades práticas. A **Sala de aula invertida** também permite trabalhar as dificuldades dos alunos, não apenas apresentar meramente o conteúdo a ser estudado. Segundo Valente (2014, p. 86), ao usar essa estratégia, o professor tem que cumprir algumas regras, a saber:

> *[...] 1) as atividades em sala de aula envolvem uma quantidade significativa de questionamento, resolução de problemas e outras atividades de aprendizagem ativa, obrigando os alunos a recuperar, aplicar e ampliar o material aprendido [....];*
>
> *2) os alunos recebem* feedback *imediatamente após a realização das atividades presenciais. [...].*

O uso dessa metodologia em sala de aula requer que o professor tenha em mente seus objetivos e planeje com antecedência as tarefas que serão realizadas pelos alunos. Ainda com base em Valente (2014), o fato de os alunos terem contato com o material antes da aula permite a eles que trabalhem no próprio ritmo e tentem desenvolver ao máximo a compreensão em torno do que estão estudando. Além disso, esse primeiro contato dá a eles motivação antecipada para a aula,

> *[...] com isso, o aluno pode entender o que precisa ser mais bem assimilado, captar as dúvidas que podem ser esclarecidas em sala de aula e planejar como aproveitar o momento presencial, com os colegas e com o professor. [...] (VALENTE, 2014, p. 92).*

O planejamento deve ser feito com base nos conteúdos propostos no volume, mas de maneira criativa, com o intuito de incentivar os alunos a buscar conhecimento e descobrir caminhos para seu aprendizado. Nesse sentido, a **Sala de aula invertida** torna a aprendizagem mais significativa e permite que os alunos se tornem protagonistas de sua aprendizagem.

Uma dúvida que pode ocorrer ao professor é a possibilidade de desenvolver essa estratégia tendo como base o livro didático. Isso pode ser feito utilizando os contextos das páginas de abertura, das seções **Explorando problemas**, **Saiba mais** e **Conectando ideias**. Na abertura de cada um dos capítulos, são tratados assuntos contextualizados relacionados aos conceitos trabalhados no capítulo. Utilizando a **Sala de aula invertida**, o professor pode solicitar aos alunos que leiam o material disponibilizado na seção, além de sugerir vídeos introdutórios sobre o tema problematizado, o que vai ajudá-los a responder às perguntas propostas. Também pode pedir a eles que anotem as principais ideias e o que entenderam sobre os vídeos e a leitura, uma vez que essa atividade deve ser realizada antecipadamente pelos alunos em casa. Outra possibilidade é que eles tragam para a sala de aula questões sobre o tema e que estas sejam apresentadas à turma, pois assim estão assumindo o papel de debatedores durante a discussão. Na aula, pode-se discutir os pontos e as anotações realizadas pelos alunos, promovendo uma reflexão em torno da relação entre esse tema e o conceito. Tal discussão deve ser orientada de maneira que, ao final, eles consigam responder às questões propostas e tenham um conhecimento preliminar sobre o conceito, mas, naturalmente, o resultado da discussão poderá abarcar outras questões trazidas por eles e não constantes no livro. Dessa maneira, é importante ressaltar que se trata apenas de uma possibilidade, pois a **Sala de aula invertida** pode ser utilizada no momento que o professor julgar conveniente e utilizar as seções ou boxes do livro que melhor se alinhem a seus objetivos.

Rotação por estações e estação laboral

Metodologia que consiste em organizar os alunos em grupos que se revezam dentro do espaço preparado pelo professor (estações), podendo ser em sala de aula ou não, ou seja, dá oportunidade para que sejam utilizados outros espaços.

Essa estratégia requer do professor organização prévia do ambiente, com estações específicas de trabalho e programação fixa, para que os alunos façam um rodízio nessas estações, de acordo com o tempo fixo preestabelecido. Um desses pontos específicos deve incluir uma tecnologia digital e os outros podem inserir atividades, como instruções para pequenos grupos ou para todos os alunos a um só tempo, projetos em grupo, tutoria individual ou, ainda, tarefas escritas (SOUZA; ANDRADE, 2016). Cada estação deve conter uma atividade diferente e que não dependa uma da outra, mas ainda assim com um objetivo central e que se refira ao mesmo conteúdo.

A quantidade de estações que o professor vai formar está relacionada ao total de alunos da turma. Sugere-se que quanto maior a turma mais estações sejam formadas, de maneira que os grupos não tenham uma quantidade grande de alunos. O uso dessa estratégia permite que o professor identifique e analise o desempenho individual e do grupo sobre o que foi apresentado em cada uma das estações. Para tal, é preciso definir os objetivos de cada estação, de acordo com os resultados que se deseja alcançar e com a atividade proposta na estação. Soares *et al.* (2019) destacam que a **Rotação por estação laboral** é parecida com a **Rotação por estação**, a diferença é que a primeira inclui o laboratório de informática.

Além disso, os estudantes que forem direcionados ao laboratório trabalham de modo autônomo, cumprindo os objetivos que o professor propuser, com sua orientação ou por meio de um tutor.

Diante do exposto, pode-se afirmar que ambas as metodologias permitem que os alunos se tornem ativos no processo de aprendizagem. Visando a essa aprendizagem ativa, como podemos desenvolver tal estratégia utilizando o livro didático? Entre as possibilidades, o professor pode usar, por exemplo, a seção **Acesso digital**, que propõe o uso de *softwares* de Geometria dinâmica, planilhas, linguagem de programação, entre outros suportes, para desenvolver certas potencialidades de conceito. Desse modo, pode-se utilizar essa seção e empregar a metodologia **Rotação laboral** fazendo uso do laboratório de informática. Por exemplo: o professor pode criar uma estação em que os alunos façam uma tarefa por escrito sobre determinado conteúdo; outra estação em que é proposta a eles a mesma tarefa, mas utilizando materiais diversos, como malhas quadriculadas e réguas; outra, contendo um jogo matemático sobre o conteúdo da tarefa; e, por último, uma estação no laboratório de informática, onde os alunos poderão praticar o conceito trabalhado nas estações anteriores e que está sugerido na seção **Acesso digital**.

Caso utilize a **Rotação por estação laboral**, é necessário verificar se a escola possui um laboratório de informática que contenha computadores com o *software* desejado instalado. Caso não o tenha, *smartphones* podem ser usados, pois alguns *softwares*, como o GeoGebra, também estão disponíveis para esses dispositivos gratuitamente, porém com algumas diferenças em determinadas funcionalidades.

Seminários

Os **Seminários**, como metodologia ativa de aprendizagem, pressupõem o uso de técnicas, geralmente uma dinâmica em grupo, para estudar determinado assunto. Envolvem, além de uma pesquisa por parte dos alunos, discussões e debates sobre o tema escolhido. O professor pode optar por realizar um seminário individual ou em grupo, sendo este o mais comum. Por isso, é importante criar um ambiente propício às discussões.

Marconi e Lakatos (2017) destacam que, além de desenvolver habilidades de pesquisa, essa estratégia proporciona aos alunos a reflexão sobre o assunto estudado, pois eles ficam responsáveis por pesquisar e organizar e expor suas ideias para a turma, o que contribui para o desenvolvimento da autonomia e da habilidade de argumentação. Dessa maneira, os seminários em aulas de Matemática podem levar os alunos a procurar relações entre os conceitos matemáticos e as situações do cotidiano, e boxes como **Conversando** e **Finalizando a conversa** ajudam no estabelecimento dessa relação. Por exemplo, pode ser proposto um seminário sobre determinado conteúdo a ser abordado no capítulo e cada grupo fica responsável por apresentar informações elencando características, diferenças e situações do dia a dia em que esses conceitos estão presentes.

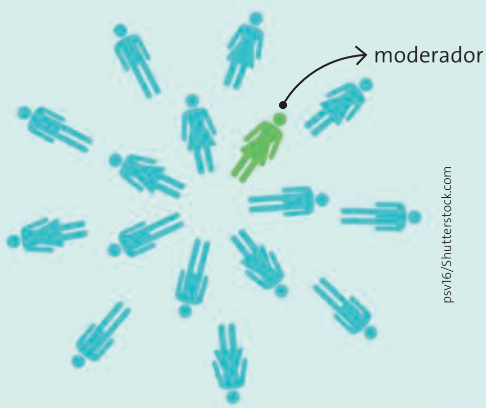
Outra possibilidade é sugerir aos alunos que se dividam em grupos, pesquisem as perguntas propostas nos boxes já mencionados e, posteriormente, apresentem os resultados à turma. Nesse sentido, o professor sugere um seminário sobre o conteúdo das questões e, para a apresentação, fica combinado que eles podem usar recursos como cartazes ou apresentações mais elaboradas em ferramentas virtuais, como a construção de uma apresentação em *slides*, com as principais informações da pesquisa. Esta última opção é válida se a escola disponibilizar projetores. Outra sugestão é que os alunos produzam vídeos sobre as questões trabalhadas. É importante ressaltar que tal estratégia pode ser utilizada com base em outras seções ou boxes dessa coleção.

Fishbowl

A metodologia **Fishbowl**, conhecida como "método aquário", é uma estratégia de aprendizagem interativa, que tem como objetivo apoiar a discussão em grupo e possibilitar que os alunos exponham suas opiniões a respeito de determinado assunto. Além disso, permite a troca de experiência entre os participantes e que os alunos revisem o conteúdo, propiciando o protagonismo deles e a aprendizagem colaborativa. Segundo Graminha (2019, p. 86), essa estratégia requer a organização do ambiente

> *[...] de modo que alguns estudantes ocupem um círculo central dentro de um círculo externo [...] onde discutem temas relacionados ao seu aprendizado, previamente proposto pelo professor. A discussão é iniciada pelos alunos que ocupam o círculo central e observada pelos alunos do círculo externo, que caso queiram participar da discussão podem ocupar o espaço do círculo central substituindo um participante. [...].*

É necessário ainda ter um moderador, no caso o professor, para instigar e direcionar a discussão proposta.



psv16/Shutterstock.com

Nessa coleção, uma possibilidade é que o professor use os questionamentos propostos nos boxes **Você cidadão** e **Conversando**, pois ambos contêm questões que favorecem a discussão sobre diversos temas da atualidade, especialmente o **Você cidadão**.

Como sugestão, o professor pode solicitar aos alunos que conversem com seus familiares sobre o tema em questão e, na aula, expressem essas informações posicionando-se criticamente. Para esse momento, os alunos devem ser divididos em dois grupos – sendo um grupo menor, que vai ocupar o círculo central, e outro ocupando os lugares do círculo maior. É necessário deixar uma cadeira vazia no círculo central e, se algum aluno do círculo maior quiser contribuir com o debate, deve levantar-se em silêncio e sentar na cadeira vazia. Para isso, um integrante do círculo central precisa voluntariar-se e ir para o círculo maior, pois é necessário que sempre haja uma cadeira vazia para aqueles que queiram contribuir com a discussão. Para utilizar essa estratégia, o professor precisa de espaço onde as cadeiras consigam ficar dispostas em dois círculos.

Situações que envolvem temas como os propostos no boxe **Você cidadão** contribuem para o desenvolvimento da **Competência geral 10** ao levar os alunos a agir pessoal e coletivamente, com autonomia e responsabilidade, tomando decisões com base em princípios éticos e democráticos.

Gallery walk

Gallery walk, também traduzida como "A caminhada na galeria", é uma metodologia cooperativa, em que os alunos têm papel ativo no processo de aprendizagem, permitindo que eles discutam variados assuntos com os colegas, o que favorece o desenvolvimento de habilidades como investigação, avaliação, síntese, colaboração e trabalho cooperativo.

Para o desenvolvimento dessa metodologia, o professor pode dividir a turma em grupos, que receberão um tema previamente escolhido para discutirem e/ou pesquisarem. Após isso,

> *[...] cada grupo elabora um cartaz acerca do tema e, em seguida, são redistribuídos em novos grupos com um integrante de cada grupo anterior. Os cartazes são colocados nas paredes e os novos grupos irão se deslocar pela sala de aula visitando os cartazes, e cada estudante que parar em frente do cartaz que ajudou a elaborar deve apresentá-lo, ensinando os seus colegas. [...] (REIS* et al.*, 2019, p. 108).*

Diante das potencialidades dessa estratégia, como podemos desenvolvê-la tendo como base o livro didático? Entre as várias possibilidades, o professor pode utilizar as seções **Saiba mais** ou **Conectando ideias**. Na primeira, por exemplo, são apresentados textos e imagens envolvendo o conteúdo em estudo, relacionados a outras áreas do conhecimento, como Química, Física e Biologia, que podem servir como base para a realização da pesquisa e/ou discussão. Uma sugestão de trabalho é que o professor organize os alunos em grupos e solicite que cada um interprete as informações fornecidas na seção, relacionando o contexto com a Matemática. Além disso, pode-se solicitar que eles façam uma pesquisa sobre os assuntos envolvidos na seção e, em seguida, elaborem cartazes para mostrar os resultados de suas pesquisas e os exponham na sala de aula.

Por fim, o professor também pode solicitar aos alunos que anotem anonimamente, em um pequeno pedaço de papel, suas opiniões sobre a pesquisa realizada em cada grupo. Ao final da exposição, é importante que seja efetuada uma discussão entre professor e alunos sobre os pontos mais relevantes de cada cartaz.

Modelagem matemática

Podemos afirmar que a **Modelagem matemática** implica em criar um modelo, sendo este um padrão ou uma fórmula, para explicar, compreender ou interpretar um fenômeno natural, tornando o processo de aprendizagem mais significativo, pois os conteúdos estudados são aplicados no dia a dia dos alunos em fenômenos que podem ser de qualquer área do conhecimento.

Bassanezi (2002, p. 18) menciona o uso da Matemática em uma colocação sobre a Modelagem matemática:

> *O objetivo fundamental do "uso" de Matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camuflados num emaranhado de variáveis de menor importância.*

A **Modelagem matemática**, como metodologia, apresenta uma proposta de ensino na qual os alunos são levados a relacionar determinadas situações reais com a Matemática. Nesse sentido, eles são incentivados a problematizar ou investigar situações do cotidiano que geram reflexões sobre a presença da Matemática e usá-la para explicar tais situações.

Ao utilizar a Modelagem matemática durante as aulas, o professor as torna mais motivadoras, despertando nos alunos o interesse e a criatividade, bem como proporciona a eles o avanço na aprendizagem.

Com esse trabalho, é possível mostrar aos alunos a utilidade diária da Matemática e também relacioná-la com outras áreas do conhecimento, por exemplo, na produção de alimentos, na descrição de um fenômeno natural, em uma situação que envolva a Medicina, na aplicabilidade na criação de animais, no comércio, na construção civil, tudo por meio de observação de padrões e obtenção de fórmulas auxiliares.

O papel do professor que faz uso dessa metodologia de ensino é o de orientador, podendo, por exemplo, sugerir alguns temas aos alunos, que estarão organizados em grupos e farão pesquisas, coleta de dados, investigações, levantamento de hipóteses, análise das soluções encontradas e, por fim, validarão o modelo construído de acordo com o tema proposto. Durante o processo de trabalho, o professor esclarece dúvidas, orienta, faz sugestões e apontamentos para nortear os alunos quanto ao desenvolvimento do processo.

Um exemplo prático é propor à turma a análise de vários tipos de embalagens usadas no comércio local, e pesquisar e relatar qual delas têm o maior volume e o menor custo de matéria-prima.

Em outro exemplo, pode-se buscar a medida da altura de determinada caixa (base de formato retangular, circular, quadrado etc.) para que o volume seja o máximo. A partir dos resultados, o respectivo gráfico é construído e também é definido o formato ideal de determinada embalagem.

Diante das potencialidades dessa estratégia, como podemos desenvolvê-la tendo como base o livro didático? Entre as várias opções, o professor pode utilizar as seções **Explorando problemas, Conectando ideias** e até mesmo por meio de problemas contextualizados, que são apresentados na seção **Problemas e exercícios propostos**. Cabe a ele, então, avaliar a situação e adequá-la à realidade em que se encontra para desenvolver o trabalho com a Modelagem matemática. Desse modo, o processo de aprendizagem se torna mais motivador e desafiador para os alunos.

Tecnologias digitais de informação e comunicação (TDICs)

A cada dia o uso das tecnologias digitais da informação e da comunicação se torna mais presente no processo de ensino e aprendizagem. Segundo a BNCC (BRASIL, 2018, p. 528), no Ensino Médio, o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos alunos do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos e pela potencialidade das mídias sociais. Nesse contexto, destaca-se a importância de fazer uso dos recursos das tecnologias digitais e aplicativos, tanto para a investigação matemática como para o desenvolvimento do pensamento computacional. Destaca-se também que é mais importante saber usar os recursos digitais do que deixar de usá-los. Para isso, torna-se fundamental que os alunos usem adequadamente computadores, calculadoras científicas, *softwares*, aparelhos celulares e aplicativos. Esses alunos, como instrumentos de aprendizagem escolar, precisam se familiarizar e se atualizar com as novas tecnologias digitais, munindo-se dos conhecimentos tecnológicos para as demandas sociais presentes e futuras. Contudo, é necessário que qualquer recurso didático seja integrado a situações que os levem ao exercício da análise e da reflexão. Não basta visar à capacitação dos alunos para futuras habilitações em termos das especializações tradicionais, mas também formá-los para que possam desenvolver novas competências, em função da constante evolução que se espera de um novo profissional, capaz de lidar com novas tecnologias e linguagens e responder satisfatoriamente a novos ritmos, processos e desafios.

O uso adequado de tecnologias digitais na sala de aula favorece o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas de ordem mais complexa, em determinadas situações, possibilitando que os alunos explorem a aplicabilidade do conhecimento adquirido. Nesta coleção, o professor pode explorar as tecnologias digitais, por exemplo, na seção **Acesso digital**, na qual eles têm a oportunidade de lidar com alguns procedimentos digitais em conjunto com tarefas relacionadas aos conteúdos trabalhados no capítulo. O objetivo é levá-los à familiaridade com o uso das tecnologias e tornar presentes diferentes *softwares*, de planilhas e de linguagem da programação, no desenvolvimento das aulas, contribuindo de maneira efetiva com a construção do conhecimento matemático dos alunos. Uma sugestão para trabalhar com essa seção é realizar uma aula no laboratório de informática ou, em alguns casos, com aplicativo nos *smartphones*, caso o professor julgue conveniente. Em um primeiro momento, ele explica aos alunos as funcionalidades da ferramenta e depois permite que eles a explorem e a conheçam. Depois, pode propor aos alunos que desenvolvam as tarefas presentes na seção, além de preparar outras que julgar necessário. Ao final da aula, é importante realizar uma sistematização dos conceitos vistos durante o uso da tecnologia envolvida.

Essa metodologia, alinhada com essa seção, contempla a **Competência geral 7**, pois possibilita a produção do conhecimento e a resolução de problemas utilizando tecnologias digitais.

Ao utilizar esses recursos em sala de aula, é importante verificar com antecedência a disponibilidade do laboratório de informática e se os *softwares* que serão usados estão disponíveis nas máquinas ou, ainda, avaliar a possibilidade de usar *smartphones* e se há aparelhos em quantidade suficiente. Em caso negativo, é necessário organizar os alunos em grupos ou duplas para fazer a atividade.

Algumas considerações

O professor pode utilizar outras metodologias ativas de ensino em que o aluno se torna o protagonista do processo de aprendizagem, aqui não destacadas. Independentemente de qual seja utilizada, é importante que se planeje e estruture as propostas que serão desenvolvidas com antecedência, deixando claro aos alunos a maneira de cada metodologia ser trabalhada, estabelecendo algumas regras entre professor e alunos. Nesses tópicos, foram apresentadas algumas possibilidades, sugestões de seções e alguns boxes, que favorecem o desenvolvimento das tarefas e estratégias. Outro ponto importante é que elas podem ser utilizadas no momento em que o professor julgar mais conveniente e aplicadas em associação a outras seções ou boxes do livro. Devemos lembrar que os recursos digitais e as metodologias ativas são ferramentas auxiliares na personalização da aprendizagem, permitindo que os alunos aprendam no seu ritmo, de acordo com os conhecimentos que já tenham, facilitando o avanço na aprendizagem.

Avaliação

Quando pensamos em avaliação, podemos partir do pressuposto de que avaliar consiste em algo essencial às atividades humanas, isto é, em diferentes situações, independentemente da posição que ocupe, o ser humano terá de definir critérios, estabelecer relações e tomar decisões. Em razão disso, é fato que a avaliação está presente em toda proposta educacional. Contudo, ainda assim, consiste em algo complexo e polêmico, passível de críticas e controvérsias.

No âmbito da Educação Matemática, a avaliação pensada como algo isolado, estanque, como um fim em si mesmo, sem considerar os processos de ensino e aprendizagem desenvolvidos, é encarada como insatisfatória. Nessa modalidade de avaliação, um dos instrumentos, e às vezes o único, é a prova mensal ou bimestral, utilizada para quantificar o conhecimento dos alunos. Nelas, de modo geral, eles são levados a resolver problemas e questões semelhantes aos propostos durante as aulas. Em razão de sua forma, tal instrumento não consegue a abrangência necessária dos elementos a serem avaliados – conhecimentos, habilidades, atitudes, valores etc. Consequentemente, terá mais sucesso o aluno que coincidentemente tiver estudado os conteúdos correspondentes aos propostos na prova, enquanto será baixa a nota daquele que optou por se dedicar mais a outros conteúdos.

A avaliação que assume essas características é denominada somativa, a qual está relacionada prioritariamente à identificação de um desempenho pontual dos alunos. Quando observamos os processos ocorridos no ambiente escolar, muitas vezes identificamos que a escola e seus professores reforçam, no processo avaliativo, alguns aspectos negativos, como

> *[...] foco na classificação, caráter de exclusão, autoritarismo, avaliação de perspectiva individual, destaque para a memorização, valorização do quantitativo e busca por apenas um bom resultado na prova. [...]. (PAIXÃO, 2016, p. 5).*

Essas são algumas características da avaliação somativa e que reforçam sua preocupação em gerar resultados, como “aprovado” ou “reprovado”, ou, ainda, de valores numéricos correspondentes ao desempenho dos alunos, ou seja, notas.

Esse tipo de avaliação não é suficiente quando o interesse do professor vai além da atribuição de notas e classificação dos alunos. Considerando que a proposta do Ensino Médio esteja relacionada à construção de conhecimentos, desenvolvimento de habilidades, atitudes e valores, de acordo com o conjunto de aprendizagens mínimas estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), é importante que a avaliação integre o trabalho pedagógico, não sendo exclusiva apenas para desenvolvimento em momentos pontuais, como fechamentos de bimestres e semestres, mas coerente com os objetivos estabelecidos pelo professor.

No entanto, ao longo de sua formação, principalmente no Ensino Médio e após sua conclusão, os alunos serão colocados diante de avaliações de caráter somativo, como os exames de larga escala, entre eles as provas de vestibular e do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Esses exames têm relação direta com a avaliação somativa, por estarem alinhados a seu objetivo principal de classificar os alunos para o ingresso em cursos superiores. Assim, apesar de não ser suficiente para acompanhá-los no Ensino Médio, a avaliação somativa será vivenciada pelos alunos ao longo de seu percurso nessa etapa de ensino. Por isso, também precisa estar presente nos ambientes escolares, não exclusiva mas integrada aos demais tipos de avaliação.

Em contraposição a essa forma de avaliar, prioritariamente pontual, na Educação Matemática são valorizadas as abordagens voltadas à avaliação contínua, mediante a valorização daquilo que os alunos sabem do todo, algo que é visto como parte do processo de ensino e aprendizagem, vinculada a um projeto pedagógico coerente em relação a suas finalidades. Segundo Rabelo (1998, p. 11), a "[...] avaliação é inerente e imprescindível, durante todo o processo educativo que se realize em um constante trabalho de ação-reflexão-ação [...]".

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Básica, nº 9394/1996, em seu art. 24, inciso V, destaca que a avaliação escolar deve atender ao critério de ser

> *[...] contínua e cumulativa do desempenho do aluno, com prevalência dos aspectos qualitativos sobre os quantitativos e dos resultados ao longo do período sobre os de eventuais provas finais. [...].*

Sendo assim, no Ensino Médio a avaliação deve ser organizada de modo a perpassar todo o ano letivo, não se restringindo às provas bimestrais ou semestrais, mas sendo constante, acompanhando os alunos em todo seu desenvolvimento ao longo do ano letivo e em cada disciplina, especialmente em Matemática.

Além de contínua, a avaliação deve ser desenvolvida de maneira a integrar os processos de ensino e aprendizagem, não sendo mero instrumento de identificação de desempenho pontual, mas contribuindo para o desenvolvimento dos alunos, particularmente para o ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio.

A avaliação formativa objetiva fornecer informações que permitam ao professor acompanhar a aprendizagem dos alunos e reorganizar seu trabalho com o intuito de atender às diferenças individuais observadas, isto é, a avaliação precisa ser associada a um processo de intervenção pedagógica, o qual deve contribuir com as aprendizagens dos alunos e auxiliar na superação das dificuldades manifestadas por eles (VILLAS BOAS, 2019). Assim, na avaliação formativa, o objetivo não é exclusivo para atribuição de nota, mas consiste em um acompanhamento dos alunos ao longo dos processos de ensino e aprendizagem, visando à promoção da aprendizagem a eles.

Popham (2008 *apud* VILLAS BOAS, 2019, p. 18) apresenta, em consonância com sua visão de avaliação formativa como processo planejado, em que professores e alunos utilizam as informações coletadas para ajustar o trabalho pedagógico, as seguintes características para esse tipo de avaliação:

> *[...]*
>
> *É um processo, não um teste em particular; é um processo planejado, que envolve diferentes atividades; é usada não apenas por professores, mas também por estudantes; ocorre durante o desenvolvimento do trabalho pedagógico; fornece* feedback *a professores e estudantes; a função do* feedback *é ajudar professores e estudantes a promover ajustes que atendam aos propósitos curriculares almejados.*
>
> *[...]*

Sendo assim, tanto professores quanto alunos devem utilizar-se das informações obtidas a partir da avaliação formativa para que seja possível promover a aprendizagem, contribuindo para a reorganização do trabalho pedagógico, a superação de dificuldades e o desenvolvimento dos alunos.

Vista por esta perspectiva, isto é, como parte de um projeto pedagógico, a avaliação corresponde a uma forma de verificação da eficácia do método didático-pedagógico desenvolvido pelo professor. Com base nos resultados das avaliações, o docente tem como conferir se os elementos de sua prática estão adequados aos objetivos que pretende atingir e se favorecem a aprendizagem dos alunos, de modo que possa reorientar sua prática pedagógica quando necessário. Sendo assim,

> *[...] a avaliação formativa existe para promover as aprendizagens. Isso só pode ocorrer se o professor aprimorar o trabalho pedagógico. Portanto, um dos componentes dessa avaliação é a possibilidade de o professor ajustar as atividades que desenvolve com seus alunos. [...]. (VILLAS BOAS, 2019, p. 19).*

Assim, a reorganização da prática pedagógica a partir dos resultados obtidos por meio da avaliação formativa é uma etapa indispensável do trabalho do professor.

Porém, para que isso ocorra, é necessário que o professor organize seu trabalho no sentido de desenvolver um processo avaliativo de modo simultâneo aos processos de ensino e aprendizagem, além de ser contínuo durante todo o ano letivo. Além disso, é preciso articular as avaliações formativa e somativa, de modo que ambas possam contribuir com a aprendizagem dos alunos. Conforme destaca Paixão (2016, p. 7),

> *[...]*
>
> *Em ambientes em que o processo avaliativo segue seu curso ideal, com a avaliação formativa e a somativa trabalhando conjuntamente em prol da aprendizagem [...] o que se vê é uma parceria entre professor e aluno, que faz a avaliação deixar de ser uma prova comprobatória e passe a ser um instrumento para verificação do progresso. [...]. Ao avaliar o aluno desse modo, a escola não apenas o valoriza, destacando suas habilidades e conquistas, mas também assume responsabilidade direta por seu desempenho – o fato de um aluno não alcançar os objetivos de aprendizagem passa a ser um problema conjunto, e não isolado, o que reforça a parceria. [...].*

Além disso, no processo avaliativo, uma etapa importante consiste em mapear os conhecimentos, habilidades, atitudes e valores que os alunos já possuem para que, a partir disso, seja possível organizar um trabalho pedagógico significativo e que permita a eles se desenvolverem. Uma estratégia que pode contribuir nesse sentido é utilizar a avaliação diagnóstica.

De acordo com Castillo Arredondo (2013), a finalidade da avaliação diagnóstica é dar início ao processo educativo conhecendo as reais características dos alunos, em relação aos aspectos pessoais e acadêmicos, sendo esse conhecimento essencial para que o professor consiga organizar sua prática em concordância com a realidade de sala de aula, partindo do que os alunos já sabem e já desenvolveram, e não de um aluno ideal e que nem sempre corresponde à realidade.

Com base no diagnóstico obtido para cada aluno, identificado por diferentes instrumentos, como provas, testes, atividades de resolução de problemas, discussões em grupo, entre outros, considerando as especificidades dos conceitos matemáticos, o professor pode organizar seu trabalho considerando os conhecimentos prévios dos alunos e construir propostas adequadas a eles e coerentes com os conhecimentos, habilidades, atitudes e valores esperados para a etapa em questão. Para a preparação dos instrumentos de avaliação diagnóstica, as premissas podem ser as orientações da Base Nacional Comum Curricular, verificando se os alunos atingiram os conhecimentos mínimos esperados para as etapas anteriores, seja em relação aos anos finais do Ensino Fundamental, seja em séries anteriores do Ensino Médio.

No processo avaliativo, no que diz respeito aos alunos, é preciso dar a eles a oportunidade de verificar suas dificuldades e necessidades na construção do conhecimento. Por meio do processo de avaliação, eles poderão tomar consciência dos conteúdos que já aprenderam e, também, identificar a necessidade de uma dedicação maior em relação a alguns assuntos. Dessa forma, para que a avaliação possa contribuir significativamente para a aprendizagem dos alunos, é necessário que ela "[...] deixe de ser utilizada como recurso de autoridade, que decide sobre os destinos do educando, e que assuma o papel de auxiliar o crescimento. [...]" (LUCKESI, 2006, p. 166).

Outro instrumento eficiente para que professores e alunos possam verificar, respectivamente, seu trabalho e sua aprendizagem, é a autoavaliação. Conforme Villas Boas (2008, p. 51), esta corresponde

> *[...] ao processo pelo qual o próprio aluno analisa continuamente as atividades desenvolvidas e em desenvolvimento, registra suas percepções e seus sentimentos e identifica futuras ações, para que haja avanço na aprendizagem [...].*

Dessa forma, a avaliação é direcionada para a aprendizagem, sendo um importante processo associado à avaliação formativa. Nesse sentido, os alunos poderão refletir sobre a própria aprendizagem, assumindo um papel ativo, enquanto o docente pensará mais a respeito de seu trabalho e o reorganizará de modo a potencializar as aprendizagens dos alunos.

Diante dessas possibilidades, considerando a articulação entre as avaliações diagnóstica, formativa e somativa, em conjunto com a autoavaliação, o processo avaliativo, portanto, passa a ter um caráter de formação, e não de punição. O foco, agora, está na compreensão dos conteúdos e procedimentos avaliados, e os erros cometidos pelos alunos não têm mais caráter punitivo, antes se converteram em elementos de investigação, discussão e produção de novos saberes. Desse modo, é importante que o professor aborde a questão do erro de maneira que os alunos compreendam sua importância como indicativo de possíveis dificuldades que podem ser superadas mediante o direcionamento dos estudos, o que pode ser realizado pelo professor por meio de mudanças nas metodologias, atividades ou abordagens, conforme as observações realizadas por ele durante a avaliação.

Por isso, o processo avaliativo deve ser praticado diariamente no ambiente escolar. Nesse contexto, a avaliação consiste em uma maneira de o professor estar consciente das conquistas da turma e, desse modo, manter-se atento às falhas que podem ocorrer nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática, sendo configurada como parte desses processos. Uma maneira de desenvolver um trabalho contínuo de avaliação com seus alunos é utilizar diversos recursos, como listas de atividades, apresentação de seminários, relatórios e provas escritas e elaboração de portfólios, mediante a utilização de instrumentos que envolvam a produção escrita. De posse dessas ferramentas avaliativas, é possível obter informações sobre a apreensão e o registro das ideias que os alunos levantaram com base na situação apresentada. De acordo com Buriasco e Soares (2008), essas informações constituem um material valioso para o repertório de planejamento das aulas e das suas escolhas didáticas. Além disso, fornece subsídios comunicativos entre professor e alunos.

O documento PCN+ Ensino Médio – Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, em relação às Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 2002, p. 131), indica que ao

> *[...] professor são oferecidas incessantemente muitas oportunidades de observação e avaliação no desenrolar de seu trabalho com os alunos. Muitas vezes, usamos as informações, mas não mantemos nenhum registro delas, outras vezes recolhemos informações que já possuíamos, de que não necessitamos ou das quais nunca faremos uso. Pontuar, registrar e relatar são procedimentos comuns numa avaliação que se integra ao ensino.*
>
> *[...]*

Assim, é importante que o docente aproveite as diferentes oportunidades para acompanhar o desenvolvimento dos alunos e procure utilizar-se de registros para que possa, com base neles, reorganizar sua prática conforme julgue necessário. Além dos registros elaborados por ele, é importante que sejam utilizados os que foram feitos pelos próprios alunos, como parte da avaliação, já que uma das habilidades a ser desenvolvida no Ensino Médio, na área de Matemática, é a comunicação de ideias, por escrito e de forma oral, utilizando linguagem matemática e a língua materna.

Em relação aos recursos que possibilitam a comunicação oral, professor e alunos poderão negociar significados e ideias matemáticas associados a conceitos, além de trabalhar estratégias e procedimentos para a resolução de problemas. O objetivo é auxiliar no processo de aprendizagem de Matemática, sendo a avaliação um instrumento de mediação, permitindo aos alunos a compreensão e o desenvolvimento das habilidades, assim como a produção de conhecimento sobre os conceitos envolvidos.

Os instrumentos de avaliação escolhidos pelo professor devem ser coerentes com seus objetivos e com as estratégias metodológicas adotadas. Considerando uma integração entre as avalições diagnóstica, formativa e somativa, em conjunto com a autoavaliação, os mais variados instrumentos podem ser utilizados, desde que sejam estabelecidos objetivos claros para a utilização de cada um deles.

Em relação ao trabalho com grandes grupos de alunos, que apresentam suas características individuais e níveis de desenvolvimento próprios, o processo avaliativo tem um papel indispensável para que o professor possa conhecer cada aluno e organizar seu trabalho no sentido de atender às dificuldades manifestadas. Nesse caso, a diversificação das metodologias adotadas e dos instrumentos de avaliação, com destaque para observação, análise dos registros escritos, acompanhamento de discussões realizadas em pequenos grupos ou com a turma, entre outros procedimentos, são indispensáveis para que, além de dirigir seu olhar a todos os alunos, o professor atenda às necessidades individuais deles, promovendo um espaço onde haja cooperação entre os pares e ocorra a promoção da aprendizagem significativa a todos.

Nesta coleção, o professor tem a oportunidade de verificar as aprendizagens dos alunos e analisar seu método didático-pedagógico. Ao longo de cada capítulo, são propostas várias tarefas, por meio das quais ele poderá seguir o processo de aprendizagem dos alunos aula a aula, sem precisar reservar sua avaliação para um único momento. Além disso, mediante as informações que tiver, poderá refazer, se necessário, seus planos de aula, a fim de adequá-los para cada turma.

Nesta coleção, temos a presença das seções **Conversando** e **Finalizando a conversa**, cujo objetivo é contribuir com a organização das temáticas e dos conteúdos abordados. A respeito da primeira seção, esta visa introduzir os temas que serão discutidos na unidade, sendo importante o professor realizar um trabalho no sentido de introduzir os conteúdos que serão estudados, bem como suas possíveis aplicações práticas, para que os alunos percebam a presença da Matemática na realidade. Além disso, em associação com essa seção, o professor pode desenvolver outras atividades com o objetivo de identificar os conhecimentos prévios dos alunos a respeito da temática que será discutida, aproveitando o momento para aplicação de avaliação diagnóstica que lhe permita refletir e organizar seu trabalho considerando os conhecimentos deles e suas dificuldades, a fim de tornar o aprendizado significativo e direcionado às características da turma.

Já em relação à seção **Finalizando a conversa**, o professor pode, além de propor as atividades e discussões apresentadas nesta coleção, utilizar outros instrumentos para contribuir com a avaliação dos alunos e com identificação de possíveis lacunas de aprendizagem, as quais podem ser sanadas mediante um trabalho em articulação com essa última seção, e em cada unidade. Nesse momento, caso seja necessário e conveniente, o professor pode também utilizar-se de elementos da avaliação somativa, em concordância com o sistema de avaliação adotado pela instituição escolar em que atua.

Cabe ressaltar que os alunos poderão ser submetidos, ao longo do Ensino Médio, a diferentes exames de larga escala, como o já citado Enem. Assim, a avaliação do tipo somativa também precisa estar presente no sistema adotado, para que eles se preparem para esse tipo de prova. Nesse sentido, o professor pode fazer uso de instrumentos como provas objetivas e/ou dissertativas, simulados envolvendo questões desses exames, entre outros, para que, além de acompanhar o desempenho dos alunos, possa prepará-los para uma participação em provas desse tipo. Porém, não se pode esquecer que a avaliação somativa não deve ser a única forma de avaliar, e sim mais uma maneira de acompanhar o desenvolvimento dos alunos, além das já citadas avaliações diagnóstica e formativa.

Diante desses temas, na organização do trabalho pedagógico, um dos elementos indispensáveis é a avaliação que corresponde a um processo indissociável do ensino e da aprendizagem de Matemática. Por isso, essa avaliação deve ser integrada ao trabalho pedagógico, assumindo um caráter contínuo e prioritariamente formativo, por meio da articulação entre as características das avaliações diagnóstica, formativa e somativa, em conjunto com a autoavaliação, contribuindo para que a ação docente seja voltada à organização e à proposição de atividades que sejam significativas aos alunos e que contribuam com a aprendizagem de conceitos matemáticos, bem como para o desenvolvimento das habilidades, das atitudes e dos valores esperados para esses alunos na conclusão dessa etapa de ensino.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Ensino Médio

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo, que tem como objetivo definir o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais para todos os alunos e que devem ser desenvolvidas em todas as etapas da Educação Básica (Educação Infantil; Ensino Fundamental e Ensino Médio). Por se tratar de um documento normativo, a BNCC é referência nacional para a formulação dos currículos das redes públicas municipal e estadual das escolas e para as propostas pedagógicas tanto das instituições escolares da rede pública quanto da rede privada. Além disso, o documento visa contribuir para o alinhamento de ações em âmbito federal, estadual e municipal no que se refere à formação de professores e à avaliação. A BNCC foi elaborada a fim de garantir que todos os alunos, independentemente da rede de ensino e do estado onde moram, tenham um patamar comum de aprendizagem.

As aprendizagens comuns aos alunos devem assegurar o desenvolvimento de competências, isto é

> *[...] a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. [...] (BRASIL, 2018, p. 8).*

Nesse sentido, a BNCC define dois tipos de competência, a saber: gerais, que possuem uma interlocução e desdobram-se no tratamento didático proposto para as três etapas da Educação Básica durante a construção de conhecimento, atitudes e valores; e específicas, ou seja, de cada área do conhecimento.

As competências gerais devem ser desenvolvidas durante todas as etapas da Educação Básica, a fim de capacitar os alunos a resolver problemas complexos do cotidiano e exercer uma cidadania consciente. São competências gerais:

> **1** *Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.*
>
> **2** *Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.*
>
> **3** *Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.*
>
> **4** *Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artísticas, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.*
>
> **5** *Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.*
>
> **6** *Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.*
>
> **7** *Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.*
>
> **8** *Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.*
>
> **9** *Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.*
>
> **10** *Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários. (BRASIL, 2018, p. 9-10).*

Os conteúdos abordados ao longo da coleção levam os alunos a desenvolver as competências citadas anteriormente. Também nesta coleção é disposta a seção intitulada **Acesso digital**, que propõe ao professor trabalhar com *softwares* matemáticos e de programação com intuito de que os alunos resolvam problemas e produzam conhecimentos matemáticos e de outras áreas do conhecimento, contemplando assim a **Competência geral 5**.

Além disso, alguns temas da coleção realizam uma abordagem histórica do conteúdo ou, ainda, estão relacionados com diferentes culturas étnicas e raciais, o que contempla a **Competência geral 3**.

As páginas temáticas iniciais de cada capítulo abordam conteúdos relacionados ao dia a dia, como energia elétrica, armazenamento de dados na medicina, entre outros. Esses conteúdos favorecem o exercício da curiosidade intelectual, a investigação científica, o trabalho coletivo, a utilização de diferentes tipos de linguagem (verbal, geométrica, algébrica, entre outras), contemplando assim diferentes competências gerais.

Conforme a BNCC, o Ensino Médio está dividido em áreas de conhecimento (Linguagens e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Ciências Humanas e Sociais Aplicadas). Para cada uma dessas áreas, são definidas competências específicas, que fazem uma inter-relação com as respectivas competências do Ensino Fundamental, realizando adequações de acordo com as especificidades do Ensino Médio. Relacionadas a cada uma delas são descritas habilidades, que devem ser desenvolvidas ao longo dessa etapa da Educação Básica.

No que diz respeito à área do conhecimento Matemática e suas Tecnologias, a BNCC aponta as unidades temáticas, os objetos de conhecimentos e as habilidades que os alunos devem consolidar no Ensino Fundamental, e propõe que as aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental sejam ampliadas e aprofundadas no Ensino Médio. Propõe também recursos e estratégias para resolver problemas mais complexos com que os alunos vão se deparar na vida acadêmica e social. De acordo com a BNCC, o Ensino Médio tem como objetivo desenvolver a construção de uma visão integrada da Matemática aplicada à realidade, de tal modo que os alunos sejam capazes de utilizar conhecimentos matemáticos para analisar, interpretar e resolver problemas do cotidiano e de diferentes áreas do conhecimento. Para isso é necessário que as aulas considerem as vivências dos alunos, que são impactados de modos diferentes pelos avanços tecnológicos e pelas exigências do mercado de trabalho. Nesse contexto, é importante destacar o papel dos recursos de tecnologias digitais e aplicativos.

Ainda segundo a BNCC, para que os objetivos do Ensino Médio se concretizem na área de conhecimento da Matemática, é necessário que os alunos desenvolvam

> *[...] habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. [...] (BRASIL, 2018, p. 529).*

A primeira competência específica da área de Matemática e suas Tecnologias refere-se à utilização de

> *[...] estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral" (BRASIL, 2018, p. 531).*

Essa competência é ampla e permite que o professor realize propostas e práticas que favoreçam o desenvolvimento de habilidades referentes à interpretação e à compreensão da realidade utilizando conceitos matemáticos. Além disso, possibilita que o aluno utilize conceitos, estratégias e procedimentos matemáticos para a tomada de decisões não só em problemas matemáticos, mas em atividades de diferentes áreas. Nesta coleção, as páginas que iniciam cada tema, bem como a seção **Problemas e exercícios propostos**, dão ao professor a oportunidade de utilizar estratégias de trabalho que colocam os alunos como o centro do processo de aprendizagem, permitindo assim que ele possa abordar os conceitos estudados em cada tema para resolver problemas cotidianos e de outras áreas do conhecimento, como Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Essa seção engloba não só exercícios matemáticos, mas problemas que fazem parte do dia a dia dos alunos, a fim de que eles possam aplicar os conceitos matemáticos em situações reais.

> *Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática (BRASIL, 2018, p. 534).*

Esta é a segunda competência específica da área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias, que amplia a primeira de maneira a colocar os alunos para investigar situações e desafios que tenham impactos social e ambiental. Além desses aspectos, essa competência prevê que eles sejam capazes de identificar aspectos consensuais ou não em discussões que envolvem problemas éticos, sustentáveis e com base em princípios solidários. A segunda competência específica também propicia a interação colaborativa entre os alunos, a fim de que possam aprender e ensinar Matemática de modo significativo. A seção **Saiba mais** e as páginas iniciais permitem que eles tenham contato com situações sociais e ambientais, como o consumo consciente de energia elétrica, tratado no tema sobre cálculo de área e volume.

A terceira competência específica refere-se à utilização de

> *[...] estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2018, p. 535).*

Essa competência mobiliza habilidades relacionadas a resolução, interpretação, formulação e construção de problemas e modelos matemáticos que envolvem conceitos algébricos, geométricos, estatísticos, entre outros. O texto da BNCC destaca que os alunos do Ensino Médio devem mobilizar habilidades que podem ser necessárias para resolver problemas ao longo da vida, assim é preciso que os problemas elaborados e resolvidos sejam de diferentes contextos. Os temas relacionados a funções, de modo geral, oferecem ao professor exercícios que envolvem a solução de problemas cotidianos em que os conceitos podem ser aplicados diretamente para sua resolução ou, ainda, situações em que os alunos precisem fazer adaptações de seu uso a fim de resolver um problema ou construir um modelo matemático que descreva a situação em estudo. Ao trabalhar funções trigonométricas, por exemplo, por meio da análise das marés, os alunos têm a oportunidade de descrever o movimento das marés por meio de uma função seno ou cosseno, criando assim um modelo matemático que auxilia a interpretar a situação. Nesse caso, o uso de tecnologias digitais facilita o desenvolvimento de modelos e a formulação e resolução de problemas, o que possibilita a eles terem acesso às alternativas de experiências variadas e que facilitam a aprendizagem de conceitos matemáticos e a capacidade de raciocinar logicamente, testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações. A seção **Acesso digital** possibilita a realização de um trabalho em que *softwares* podem ser aplicados na construção de modelos e/ou na resolução de problemas. Já na seção **Problemas e exercícios propostos** algumas tarefas requerem dos alunos a formulação de problemas que envolvem assuntos cotidianos, destacados no **Você cidadão**.

A quarta competência específica relaciona-se à compreensão e utilização,

> *[...] com flexibilidade e precisão, [de] diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas (BRASIL, 2018, p. 538).*

Ser capaz de utilizar diferentes tipos de representação para um mesmo objeto matemático na resolução de problemas de diferentes contextos é uma das habilidades vinculadas a essa competência. O texto da BNCC destaca que

> *[...] ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de modo significativo sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente [...]. (BRASIL, 2018, p. 538).*

Assim, é importante que eles tenham domínio dos conceitos matemáticos a fim de realizar conversões entre os diferentes tipos de representação, como do registro algébrico para o registro gráfico, e vice-versa. Na seção **Problemas e exercícios propostos**, os alunos necessitam de conhecimentos sobre essas representações para que possam aplicá-las da melhor maneira possível na resolução de problemas matemáticos e problemas de diferentes contextos.

> *Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 540).*

Esta é a quinta e última competência específica da área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias. O desenvolvimento dessa competência requer um conjunto de habilidades relacionadas às capacidades de investigação e formulação de explicações e argumentações a respeito de problemas decorrentes de experiências empíricas.

Ao propor tarefas que permitem o desenvolvimento das competências gerais para o Ensino Médio e competências específicas para a área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias, o professor contribui para que os alunos desenvolvam o senso crítico, possibilitando analisar, refletir e construir argumentos sobre questões socioambientais. Além disso, o desenvolvimento das habilidades que constituem todas as competências específicas contribui para que eles se tornem cidadãos conscientes. Por exemplo, ao trabalhar sobre unidades de medida de volume e área, pode-se abordar o assunto sobre consumo de energia elétrica, discutindo com os alunos, além dos conceitos matemáticos, maneiras de economizar energia. O trabalho que sugere a investigação e a leitura e interpretação de textos científicos divulgados em diferentes mídias propicia a eles o desenvolvimento de habilidades necessárias à formação crítica e reflexiva.

Vale ressaltar que os temas da coleção foram pensados de modo a propiciar ao professor possibilidades de desenvolver as diferentes competências e habilidades propostas na BNCC.

Ao longo da coleção é possível que alunos e professor identifiquem quais competências e habilidades serão desenvolvidas nos temas trabalhados. No que se refere aos primeiros, eles podem identificar as habilidades que o tema propicia desenvolver em boxes denominados "BNCC". As habilidades são escritas em códigos, permitindo identificar a qual competência específica refere-se o número da habilidade e a qual área do conhecimento pertence. Por exemplo, na habilidade **EM13MAT104** temos primeiro um par de letras (**EM**), que indica a etapa de Ensino Médio. O primeiro par de números (**13**) mostra que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio. A segunda sequência de letras aponta a área (três letras) ou o componente curricular (duas letras), nesse caso **MAT**, que significa Matemática e suas Tecnologias. Já os números finais indicam a competência específica à qual se relaciona a habilidade (1º número) e sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência (dois últimos números).

Além das páginas disponíveis para os alunos, na Assessoria pedagógica são mostradas ao professor as competências gerais e específicas e as habilidades da BNCC desenvolvidas em determinados problemas, exercícios ou seções especiais. Ao propor e explicitar os assuntos em cada tema, sempre que pertinente é composto o boxe **BNCC**. Nesse boxe, é apresentada a maneira pela qual determinado conteúdo propicia o desenvolvimento de certa competência e habilidade.

Além de estabelecer as competências gerais e específicas de cada área do conhecimento, a BNCC propõe os chamados Temas Contemporâneos Transversais, que buscam contextualizar o que é ensinado relacionando-os com temas que sejam de interesse dos alunos e que contribuam para sua formação cidadã.

> *[...] O grande objetivo é que o estudante não termine sua educação formal tendo visto apenas conteúdos abstratos e descontextualizados, mas que também reconheça e aprenda sobre os temas que são relevantes para sua atuação na sociedade. [...] (BRASIL, 2019, p. 7).*

Além disso, com base nesses temas, espera-se que os alunos compreendam melhor aspectos de seu dia a dia, como utilizar o dinheiro, cuidar da saúde, usar novas tecnologias digitais, entre outros. A BNCC engloba seis áreas temáticas, que são: cidadania e civismo; ciência e tecnologia; economia; meio ambiente; multiculturalismo; e saúde. Essas englobam quinze temas contemporâneos: ciência e tecnologia; direitos da criança e do adolescente; diversidade cultural; educação alimentar e nutricional; educação ambiental; educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras; educação em direitos humanos; educação financeira; educação fiscal; educação para o consumo; educação para o trânsito; processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso; saúde; trabalho; e vida familiar e social, conforme ilustra a imagem a seguir.

Governo Federal/Ministério da Educação

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2020.

Há distintas maneiras e concepções de trabalhar esses temas na escola, sendo positiva essa diversidade de abordagens, pois garante a autonomia das redes de ensino e dos professores.

A BNCC propõe que esses temas sejam trabalhados em conjunto com outras áreas do conhecimento, podendo fazer uso de diferentes metodologias ativas, em que os alunos tornam-se o centro do processo de aprendizagem. Ao longo dos temas desta coleção, em cada página inicial, é possível contemplar esse tipo de trabalho em conjunto com professores de componentes curriculares como Física, Ciências Biológicas, Arte, História, entre outros. Além disso, ao estudar temas que propiciam aos alunos discutir assuntos relacionados à saúde, ao meio ambiente e à educação física, por exemplo, eles desenvolvem a reflexão e a interpretação crítica desses assuntos por meio de conceitos tanto matemáticos quanto de outras áreas do conhecimento. Isso é visto na seção **Você cidadão**, na qual são explorados assuntos que permitem ao professor trabalhar os temas contemporâneos transversais também em conjunto com outros professores.

O trabalho com os temas contemporâneos transversais promove o desenvolvimento de competências gerais e específicas propostas na BNCC.

A assessoria pedagógica apresenta em quais ocasiões da coleção é possível realizar um trabalho em conjunto com outros professores, bem como qual tema contemporâneo transversal abordar, oferecendo sugestões ao professor.

O trabalho com os pressupostos da BNCC e com os temas contemporâneos transversais permite que o professor desenvolva com os alunos habilidades, atitudes e valores que os auxiliarão na formação – tanto no âmbito acadêmico como fora dele.

Nesse sentido, sempre que possível e conveniente, é importante promover situações que favoreçam o desenvolvimento dessas habilidades, desses valores e atitudes por meio de reflexões, discussões, debates, trabalho em grupo, uso adequado das tecnologias e pesquisas.

Abordagem teórico-metodológica

Esta obra tem como proposta oferecer subsídios para possibilitar o desenvolvimento acadêmico e pessoal dos alunos, apresentando conteúdos por meio de situações-problema advindas da realidade, favorecendo assim a compreensão do conceito tanto no âmbito da Matemática quanto em suas aplicações em situações de diferentes áreas. Além disso, a obra se alinha à teoria sociointeracionista, valorizando aspectos históricos e culturais e posicionando os alunos no centro do processo de aprendizagem.

Os conteúdos são abordados de maneira direta e propiciam o uso de metodologias ativas, permitindo o protagonismo dos alunos em seu processo de aprendizagem. Já as situações-problema consideram o protagonismo juvenil, bem como contribuem para que eles reflitam criticamente sobre essas situações, entendam as relações próprias do mundo do trabalho e façam escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e a seu projeto de vida.

Quando se trata da aprendizagem, seja no âmbito da Matemática, seja em questões relacionadas aos projetos pessoais, é importante considerar o conhecimento prévio e as experiências de vida dos alunos, que servirão de suporte para introduzir novos conceitos e tomar decisões diante de questões que envolvam conceitos matemáticos e situações nos âmbitos social, ambiental, financeiro, no mundo do trabalho, entre outras. Nesse sentido, o conteúdo desta obra considera tais conhecimentos prévios necessários e, sempre que possível, a apresentação é feita de maneira gradativa, até chegar à formalização.

Ao longo da obra também são propostos recursos, como o uso de tecnologias digitais que proporcionam a visualização de conceitos mais abstratos, de modo a facilitar a compreensão desses conceitos, contribuindo assim para a construção do saber, do trabalho interativo e colaborativo, de processos de descobertas de modo dinâmico, utilizando a teoria e a prática. Além disso, os conteúdos favorecem o desenvolvimento de trabalho interdisciplinar com professores de diferentes componentes curriculares. De modo geral, essa interdisciplinaridade tem sido entendida como uma maneira de articular dois ou mais componentes por meio da exploração de determinados assuntos, visando analisar, discutir e compreender os diferentes pontos de vista apresentados em cada uma das áreas de conhecimento, o que pode auxiliar os alunos na construção de seus conhecimentos em uma perspectiva mais ampla e múltipla.

> *[...] Nesse sentido, o ensino de Matemática deve engajar-se na crescente preocupação com a formação integral do aluno como cidadão da sociedade contemporânea [...] [em que] "cada vez mais é obrigado a tomar decisões políticas complexas. Introduz-se, assim, definitivamente, na agenda da Matemática escolar, o ensino voltado para a formação de cidadãos críticos e responsáveis. [...]." (TOMAZ; DAVID, 2008, p. 15).*

Um modo de viabilizar o trabalho integrado com outras áreas do conhecimento é por meio do desenvolvimento de projetos. Vale ressaltar, contudo, que um projeto desse tipo, para ser bem-sucedido, precisa de mais do que integração entre as áreas do conhecimento, ou seja, é necessário envolvimento e empenho entre os participantes, tanto professores quanto alunos. Para Nogueira (1998, p. 33), tal integração "[...] pretende atingir como complementaridade das diferentes disciplinas, já que demonstra aos alunos possíveis inter-relações nelas existentes. [...]". Ainda segundo o autor, outro fator importante para a execução de projetos interdisciplinares é a possibilidade de acesso à pesquisa. Com isso, espera-se que os alunos, ao perceberem as relações entre as áreas do conhecimento, sejam motivados a

> *[...] buscar novos conhecimentos sobre um tema, problema ou questão, pois agora o projeto apresenta perspectivas múltiplas, em que todas as disciplinas contribuem de uma certa forma, e, por consequência, [...] receber orientações e desafios para a pesquisa de vários professores em prol de um tema único (NOGUEIRA, 1998, p. 33).*

Nesta obra, o caráter interdisciplinar da Matemática é explorado por meio de tarefas, apresentação de informações e contextos diversificados. Nas tarefas, por exemplo, a Matemática atua como instrumento de apoio para a resolução de problemas, em geral, vinculados a situações envolvendo medições, cálculos e interpretações de informações relacionadas a várias áreas do conhecimento. Por meio dessas situações, os conceitos trabalhados nos capítulos são resgatados e utilizados para compreender informações e conceitos abordados em outras áreas do conhecimento, estabelecendo uma relação entre elas. Assim, espera-se que os alunos percebam essa interação, a fim de construir o conhecimento de modo mais amplo e significativo.

A interdisciplinaridade também pode ser um modo de relacionar a Matemática com temas contemporâneos transversais, permitindo assim que os alunos interpretem criticamente situações que contribuam para uma formação cidadã. Ao longo da obra, tarefas e seções, como as páginas de abertura, as seções **Saiba mais** e **Conectando ideias**, bem como o destaque **Você cidadão**, permitem o trabalho com esses temas contemporâneos transversais, favorecendo assim a discussão sobre situações que levam os alunos a pensar em que medida as atividades feitas na escola ou fora dela estão associadas ao planejamento e às decisões de seus projetos de vida. Outra seção que merece ser comentada é **Explorando problemas**, que possibilita a formulação de hipóteses, a validação de resultados para a elaboração de conceitos, a autonomia da comunicação e a organização do raciocínio.

Por meio das tarefas propostas e dos possíveis encaminhamentos, os alunos expressam suas ideias, seja escrevendo, seja dialogando com o professor e os colegas. Nesse sentido, eles têm a oportunidade de se comunicar e de desenvolver a capacidade de organizar o raciocínio, construir argumentos bem fundamentados e ouvir seus colegas, contribuindo assim para o desenvolvimento de atitudes de respeito mútuo, cooperação e senso crítico que são essenciais para a formação deles como indivíduos, e que são obtidas por meio do trabalho em grupo, proposto em alguns momentos da obra. Isso favorece a interação e a consequente participação de todos os alunos no processo. Com isso, apresentam-se mais possibilidades para expor ideias, argumentar sobre seus pontos de vista e discutir diferentes estratégias e soluções. Por causa desses fatores, o trabalho em pequenos grupos tem sido frequentemente sugerido nas aulas de Matemática. Apesar de muitos professores o rejeitarem

> *[...] sob alegação de que os alunos fazem muito barulho e não sabem trabalhar coletivamente, essa modalidade de trabalho é valiosa para várias das competências que se deseja desenvolver. Outro aspecto que se deve enfatizar é a importância da comunicação em Matemática, por ser uma competência valiosa como relato, registro e expressão. [...]. (BRASIL, 2002, p. 129).*

Ao realizar o trabalho em grupo é fundamental que o professor esteja atento para como os alunos se organizam em determinada atividade, visto que essa deve permitir a eles que atinjam satisfatoriamente os objetivos estabelecidos. Iniciar o trabalho em equipe com os alunos desde a Educação Básica torna-se cada vez mais importante, visto que

> *[...] pode ajudar a promover o desenvolvimento profissional dos indivíduos nele envolvidos, podendo proporcionar momentos de aprendizagem mútua e potenciar reflexões individuais. [...] (HARGREAVES, 1998, apud DIAS, 2008, p. 236).*

Contudo, ao desenvolver o trabalho em grupo, é preciso que o professor considere certos aspectos ao orientar os alunos (WASSERMANN, 1990), conforme descrito a seguir.

- O professor precisa conversar com os alunos acerca de como espera que eles trabalhem em grupo, sobre o que significa trabalhar em grupo e sobre os materiais que eles irão utilizar.
- É importante que se dê aos alunos oportunidade para levantarem questões relativas aos pontos que os preocupam.
- É importante conversar com os alunos, também, sobre as possibilidades, as opções, e sobre o modo como as escolhas podem ser feitas. Se possível, mostrar como isso é feito.
- O professor precisa mostrar entusiasmo pelo trabalho em grupo e conversar com os alunos sobre o quanto acredita que esta seja uma boa maneira de aprender.

- É preciso demonstrar confiança na capacidade de os alunos cooperarem com o trabalho.
- É importante discutir com os alunos acerca do conjunto de requisitos essenciais para o trabalho em grupo: cada um esperar sua vez, partilhar, conversar, ter respeito pelos outros e cuidado com os materiais.
- Solicite aos alunos que expressem suas ideias e façam sugestões para tornar tudo mais eficaz. Dê-lhes oportunidades para decidirem sobre o funcionamento dos grupos durante um trabalho na sala de aula.

Também é importante que o professor planeje cada atividade e auxilie os alunos quando necessário, orientando-os a registrar as conclusões a que chegarem.

Além disso, nas **Orientações sobre os capítulos**, presentes nesta Assessoria pedagógica, são propostas sugestões de trabalhos em grupo em momentos pertinentes, como **Conversando**, **Saiba mais**, **Você cidadão** e **Explorando problemas**, ou em situações especiais – durante as tarefas das seções **Problemas e exercícios propostos** – e, quando pertinente, nas tarefas em destaque de **Você produtor** ou **Em grupo**.

Outro fator importante é o professor procurar estratégias para o desenvolvimento dos conceitos das tarefas. Algo que tem conquistado um papel de destaque, em virtude dos mais variados benefícios que pode oferecer ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento, independentemente do nível de ensino, é a resolução de problemas.

De acordo com os PCN (BRASIL, 2000, p. 52),

> *[...] os alunos, confrontados com situações-problema, novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação.*
>
> *[...]*

Do mesmo modo, segundo os PCN+ (BRASIL, 2002, p. 112-113),

> *[...]*
>
> *A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas.*
>
> *[...] [No processo de resolução], o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido.*
>
> *[...]*

Para que o trabalho com a resolução de problemas possa ser viabilizado, é necessário que o professor promova situações em sala de aula que possibilitem aos alunos vivenciar experiências nas quais estejam presentes, dando a eles a oportunidade de resolver problemas em contexto prático. Além disso, é preciso oferecer experiências com problemas cujas resoluções não sejam únicas, isto é, que permitam várias respostas. Tudo isso pode contribuir para que os alunos deixem de ser meros espectadores e tornem-se agentes ativos no processo de aprendizagem em Matemática.

As páginas de abertura introduzem os conteúdos de maneira contextualizada, o que favorece o estabelecimento de uma relação entre conceitos matemáticos e suas aplicações. Além disso, na seção **Problemas e exercícios propostos**, são apresentadas outras situações que permitem aos alunos, por exemplo, ampliar seus conhecimentos sobre os conceitos e procedimento matemáticos relacionados à resolução de problemas, bem como elaborar e resolver esses problemas.

Toda a obra foi pensada e construída de modo que atenda às necessidades dos jovens da atual sociedade, considerando as culturas juvenis. A escola deve sempre levar em consideração a presença de um jovem que enfrenta vários conflitos na construção de sua identidade. Eles buscam fazer parte de um grupo de amigos para partilhar sua vida, daí nasce a cultura juvenil, grupo caracterizado por apresentar uma cultura com valores, símbolos, ídolos, gostos pela música, características, mitos e linguagem próprios, entre outros aspectos. A cultura juvenil é dotada de uma sintonia de ideias, comportamentos e interesses dos adolescentes.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as competências gerais explicitam o compromisso da educação brasileira com a “[...] formação humana integral e com a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. [...].” (BRASIL, 2018, p. 25). Nesse sentido, o professor exerce um papel fundamental no Ensino Médio, pois deve priorizar o desenvolvimento das competências e habilidades propostas pela BNCC, levando em consideração e tendo como base as culturas juvenis, de modo a realizar um trabalho diferenciado para conquistar os jovens, preparando-os para o futuro, com o objetivo de formar cidadãos críticos, capazes de atuar em uma sociedade justa.

De acordo com Viana (2014, p. 258), "[...] os estudantes do Ensino Médio, em maioria jovens, são portadores de experiências, sensibilidades e saberes que, muitas vezes, não cabem nos padrões ou cânones culturais e nas propostas curriculares escolares. [...]". Portanto, é necessário que haja o diálogo entre as culturas juvenis e a cultura escolar e que esse diálogo conduza à construção do saber.

> *As experiências culturais juvenis estão, muitas vezes, presentes, mas nem sempre são valorizadas e potencializadas nas escolas. Essas experiências juvenis carregam conhecimentos sensíveis e cognitivos intrínsecos que podem ser expandidos na medida em que se mesclam com outras áreas do conhecimento ou são reconhecidas em seus sentidos próprios*
>
> *[...] (VIANA, 2014, p. 259).*

Para tornar isso possível, o professor deve olhar para os jovens enxergando suas características comuns e também as específicas, valorizando as diferenças entre eles. Para conquistá-los, é importante ouvi-los e torná-los sujeitos de sua aprendizagem. O professor precisa demonstrar esse interesse em conhecê-los e conhecer suas experiências, incluindo-os em um processo colaborativo e interdisciplinar e promovendo o protagonismo juvenil, bem como contribuir para a construção de seu projeto de vida, isto é, que pensem sobre aspectos profissionais, escolares, entre outros. O projeto de vida, segundo Leão *et al.* (2011, p. 1071),

> *[...] seria uma ação do indivíduo de escolher um, entre os futuros possíveis, transformando os desejos e as fantasias que lhe dão substância em objetivos passíveis de serem perseguidos, representando, assim, uma orientação, um rumo de vida. Nesse sentido, o projeto não deve ser entendido como resultado de um cálculo matemático, estrategicamente elaborado, ou de um processo linear, como está presente no senso comum.*
>
> *[...]*

Assim, os temas propostos na obra levam os alunos a refletir sobre aspectos financeiros, trabalhistas, sociais, ambientais, entre outros, o que contribui para sua formação como cidadãos e para que tomem decisões futuras conscientes, auxiliando na construção de seus projetos pessoais. Com as propostas de práticas inovadoras, como desenvolvimento de projetos integrados articulando diferentes áreas do conhecimento, contidas nesta obra, bem como por meio do desenvolvimento de metodologias diferenciadas, é possível desenvolver um trabalho significativo para os alunos, tornando-os protagonistas do processo de aprendizado.

Leitura e Matemática no Ensino Médio

A leitura é uma atividade essencial para o estudo do componente curricular Matemática, além de ser condição básica para a aprendizagem e para a apropriação de conceitos. Em decorrência dessa importância, o professor dessa disciplina é, também, um professor de leitura. De fato, ele é, em geral, o leitor que atua como modelo na interpretação dos textos matemáticos. Se considerarmos a leitura como uma prática social – que se difere de acordo com quem e o que lê, para quem lê e com que propósitos se lê –, a exatidão e a precisão na leitura de um problema por um matemático são mais bem interpretadas por aquele que tem essa prática social – o professor de Matemática, de acordo com Kleiman (1998).

Há, no entanto, outra faceta da relação entre a leitura e a Matemática que inverte tal relação: a Matemática é essencial para a leitura e a interpretação de muitos dos textos com os quais nos deparamos na vida social. Ela está na vida de todos e consiste em instrumento essencial para uma leitura crítica dos textos do cotidiano, pois saber como realizar uma leitura que envolve dados matemáticos deve fazer parte do repertório de um leitor. Por isso, ensiná-lo a fazer essa leitura pode contribuir de forma essencial em sua formação.

Se o jovem ou adolescente ainda tem dificuldades de leitura quando chega ao Ensino Médio, reduzem-se as possibilidades de aprendizagem de alguns conceitos básicos que lhe permitem mobilizar suas capacidades de raciocínio matemático. Resolver equações é uma importante habilidade matemática, e é com base nesse raciocínio que os alunos acompanham a leitura do problema e podem decidir como escrever a equação, que dados ignorar e quais serão os dados desconhecidos. Portanto, para escrever uma equação, eles precisam do raciocínio matemático, mas antes, para raciocinar, precisam ler e interpretar enunciados.

Tanto a linguagem matemática como a língua natural são essenciais no cotidiano das pessoas. Estudos confirmam, com base na observação da prática docente, que se os alunos não conseguem interpretar a linguagem natural, dificilmente chegarão a entender a linguagem matemática e contextualizar conceitos. Por isso, fica difícil para o professor preocupado com a aprendizagem de seus alunos ignorar os problemas de leitura.

As dificuldades encontradas por jovens e adolescentes para aprender conhecimentos e conceitos matemáticos não estão totalmente fora do âmbito da educação matemática. Limitar-se a apontar que eles não aprendem o conteúdo de Matemática porque têm problemas de leitura não é suficiente, mesmo que a leitura seja apenas um recurso, nunca o "essencial da aula", como propõem os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 2000).

De fato, o ensino de Matemática deve ter, como os PCNEM sugerem, uma função formativa, podendo auxiliar os alunos a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, transcendendo seu papel instrumental e assim

> *[...] gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. [...] (BRASIL, 2000, p. 40).*

Com esses argumentos, é difícil pensar em alguma prática formativa que venha a ser mais enriquecedora e viabilizadora para essa formação do que a leitura. Nesse contexto, assim como outros recursos tecnológicos são explorados pelo professor, como o uso da calculadora, constituem-se de caráter fundamental o ensino e o uso da língua escrita – especificamente a leitura – como uma tecnologia, um recurso, um instrumento central para a aprendizagem contínua.

É importante lembrar que o professor de Matemática não foi formado para ensinar a ler. Todavia, ele pode atuar modelando os modos de leitura nas práticas matemáticas. Isso pode ser feito com base em uma reflexão sobre seus hábitos e estratégias de leitura aliados a uma compreensão das dificuldades características do leitor escolar no Ensino Médio.

Levando essas restrições em consideração, é possível encontrar pelo menos três áreas de atuação do professor de Matemática para contribuir na formação de leitores de textos matemáticos: desenvolvimento da leitura crítica, do vocabulário e de estratégias de estudo.

Desenvolvimento da leitura crítica

A Matemática está relacionada intimamente com o desenvolvimento das capacidades de interpretar, analisar, sintetizar, abstrair e projetar, e todas estas se apoiam no uso da linguagem natural, ou seja, verbal. Se tomamos como exemplo uma das competências matemáticas exigidas nas provas do Enem, como a competência de

> *[...] Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação (INEP, 2015, p. 6),*

e retiramos a especificidade do texto matemático (ou seja, gráficos e tabelas), vemos que esse trecho poderia descrever uma competência de leitura, pois prever, extrapolar, interpolar e interpretar são também absolutamente indispensáveis para a leitura de qualquer texto. Além disso, as habilidades necessárias para demonstrar a competência de interpretar informações de natureza científica e social são, de fato, habilidades de leitura. Se, novamente, retiramos as referências aos gráficos e tabelas, devemos utilizar informações para fazer inferências; resolver problemas com dados; e analisar informações como recurso para a construção de argumentos.

Um dos importantes atributos da Matemática consiste em sua natureza abstrata, e tal abstração está baseada nas capacidades de deduzir, inferir, prever e extrapolar, ou seja, na capacidade de pensamento crítico. Por isso, quando o jovem ou adolescente consegue transformar um enunciado (uma história, uma descrição em palavras) em um problema matemático, ele está, de fato, retirando o contexto, ou abstraindo dele a Matemática, de tal modo que o problema básico passa a ser entendido independentemente da situação em que foi apresentado, isto é, de sua aplicação.

A extração de um problema matemático com base em um enunciado em linguagem natural é um processo complexo. Para ensinar esse processo, o professor pode iniciar com problemas simples, aumentando aos poucos a complexidade. Novos conceitos e novas habilidades podem ser desenvolvidos em problemas de complexidade crescente, aumentando gradativamente a maneira de traduzir a linguagem natural em linguagem matemática, uma forma de raciocínio crítico. Dessa forma, ao engajar os alunos com suas perguntas, na resolução desses problemas, do mais simples aos mais complexos, o professor propicia a mobilização do pensamento crítico, exigindo habilidades usadas na leitura de outros textos e em outras situações da vida cotidiana que demandam o engajamento intelectual do indivíduo. Portanto, está ensinando a ler criticamente os textos de sua área de especialização.

Saber posicionar-se social e politicamente é fundamental para o jovem em formação. Por isso é importante que o professor desenvolva nos alunos a competência comunicativa, para que eles sejam capazes de utilizar com segurança os recursos comunicativos que forem necessários para determinados contextos, sabendo argumentar e defender suas opiniões com coerência, criticando, se necessário, no sentido de discordar daquilo que lhes é apresentado, mas sem recorrer a discussões sem fundamento ou concordar simplesmente por não saber argumentar.

Aprendizagem de vocabulário especializado

O conhecimento e o uso preciso de termos, operações e símbolos são essenciais para o domínio da matéria (assim como em toda disciplina). Nesse contexto, a Matemática é precisa: os significados de termos e os conceitos devem ser completamente unívocos, sem ambiguidades, sob a pena de, na falta desse conhecimento, o jovem ou o adolescente falhar na comunicação e na resolução de problemas. Por isso, professor e alunos devem estar completamente de acordo sobre os significados das palavras que usam para se comunicarem.

Existem termos matemáticos utilizados na linguagem cotidiana com sentidos diferentes. Estudos realizados sobre a apropriação de vocabulário mostram que uma criança, ao se deparar com uma palavra já conhecida, mas com sentido diferente, o primeiro significado se impõe a ela, mesmo que não faça sentido no contexto. Com os jovens, essa dificuldade de descartar o significado primário também pode acontecer. De acordo com alguns estudos, há uma probabilidade maior de os alunos perceberem os dois sentidos quando sua atenção é dirigida para o fato. Em uma pesquisa sobre conhecimentos matemáticos, Oliveira e Lopes (2012) destacam que, em um primeiro contato com o tema, os alunos não conseguem entender o significado matemático de um termo da linguagem natural.

Uma atividade proposta nesse mesmo estudo consistia na elaboração de um glossário pelos alunos, com base em um levantamento dos termos que eles consideravam mais importantes. Nesse trabalho, os alunos apresentavam a definição com as próprias palavras, fornecendo um exemplo, uma aplicação ou uma relação com outro termo. Quando os termos tinham significados diferentes na Matemática e na linguagem cotidiana, ambos eram registrados. Certamente, o conhecimento vocabular é essencial para a aprendizagem de novos conceitos apresentados aos alunos. Essa pesquisa mostra que a focalização no termo, no decorrer da aula, por exemplo, leva-os a procurar as diferenças com a linguagem cotidiana e a construir uma nova definição, dessa vez matemática, para o termo em questão.

Desse modo, a prática de leitura e escrita nas aulas de Matemática no Ensino Médio pode ser um caminho que propicia a relação professor/aluno e aluno/alunos mais interativa e, consequentemente, mais efetiva. Isso não apenas para a construção do conhecimento matemático, mas para o conhecimento em geral, contribuindo, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), para uma estratégia que repense os processos de ensino e aprendizagem, possibilitando aos alunos não apenas a aquisição de conhecimentos e competências, mas também convivência e realização individual, por meio de experiências inovadoras.

Desenvolvimento de estratégias de estudo

No Ensino Médio, é possível que alguns alunos ainda não tenham desenvolvido as estratégias de estudo independentes, esperadas nessa etapa da Educação Básica, na qual já deviam ter desenvolvido práticas de leitura (e de escrita, ou seja, práticas de letramento) mais autônomas. Em relação a qualquer leitura, mais ainda em relação a textos matemáticos, os alunos parecem depender do auxílio contínuo do professor. Pesquisadores (RIBEIRO; KAIBER, 2012) têm observado que a tendência é solicitar ajuda diante da primeira dificuldade na leitura do problema, sem ao menos tentar resolvê-la relendo, anotando e sublinhando. Entretanto, esses estudos também destacam que basta o professor orientá-los a fazer uma segunda leitura, que a superação das dificuldades já passa a ser notada. Essas práticas mostram que boa parte dos alunos não tem repertório de leitura adequado e, com isso, não desenvolveu estratégias de estudo que permitam um aprendizado autônomo.

Uma maneira de orientar o jovem ou adolescente a desenvolver estratégias próprias de estudo é ensiná-lo a utilizar o livro didático, pois este, se bem utilizado, fornece aos alunos uma oportunidade de revisar o conteúdo estudado e refletir sobre os conceitos abordados. Desse modo, o livro didático de Matemática auxilia na consulta e no esclarecimento de conceitos. Com o livro, os alunos determinam seus ritmos de leitura e de aprendizagem (eles podem até solicitar ajuda a algum membro da família e este pode ajudar, desde que seja um leitor e o material esteja apresentado de modo explícito).

Para que os alunos estudem de maneira independente, eles devem entender como o texto está estruturado. Saber usar a estrutura textual é uma habilidade que precisa ser desenvolvida, e os alunos precisam de estratégias que os ajudem a explorar todo o capítulo, a lê-lo de modo global, para entender que parte da informação é importante, que informações dependem de outras e o que é detalhe. Esse conteúdo pode fazer parte de uma aula cujo objetivo é conhecer o livro didático: ler o sumário; analisar como são sinalizados os títulos e os subtítulos (tamanho das letras, cores, uso de números); descobrir partes do texto e suas relações, o que os subtítulos indicam; verificar hierarquias entre seções e subseções; e elaborar um diagrama mostrando essas relações. Também, com o objetivo de adquirir estratégias de leitura e estudo independentes, eles podem ser orientados a fazer um resumo do capítulo contendo os conceitos mais importantes abordados, com exemplos ou aplicações.

Os documentos oficiais defendem que a Matemática no Ensino Médio tem valores formativo e instrumental. O foco na leitura, por um lado, desenvolve o raciocínio e o pensamento crítico; por outro, constitui-se em ferramenta indispensável para interpretar e resolver problemas corriqueiros.

O professor de Matemática tem a oportunidade de formar cidadãos que sejam capazes de expressarem suas ideias adequadamente e de modo competente, oralmente e por escrito, para que possam se inserir de pleno direito na sociedade e ajudar na construção e na transformação da sociedade em que atuam. Portanto, é preciso reconhecer que a linguagem matemática é de suma importância, não apenas para os estudiosos da área, mas para qualquer cidadão que necessita utilizá-la com criticidade e autonomia.

Bibliografia consultada

- ALRO, Helle; SKOVSMOSE, Ole. *Diálogo e aprendizagem em educação matemática*. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.
  Este livro argumenta que o bom diálogo em sala de aula está relacionado diretamente com a aprendizagem, relatando sua importância.
- BASSANEZI, Rodney C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.
  Este livro motiva o professor a usar a metodologia Modelagem Matemática no encaminhamento das aulas, partindo da ideia de que é possível articular atividades de modelagem e resolução de situações-problema, permitindo a análise de resultados, a interpretação de gráficos e tabelas, entre outras ações.
- BRASIL. Ministério da Educação. Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF: MEC, 1996. p. 27833. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 15 jun. 2020.
  Este site apresenta a lei de diretrizes e bases da Educação Nacional.
- ________. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2020.
  Este site apresenta a versão final completa da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que norteia o trabalho do professor atendendo às demandas dos alunos desta época e preparando-os para o futuro.
- ________. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. *Parecer CNE/CEB nº 3/2018*. Brasília, DF: 8 nov. 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=102311-pceb003-18&category_slug=novembro-2018-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 16 jun. 2020.
  Este documento apresenta o parecer homologado do Ministério da Educação e a atualização das Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, observadas as alterações introduzidas pela LDB por meio da Lei nº 13.415/2017.
- ________. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. *Parecer CNE/CEB nº 5/2011*. Distrito Federal, DF: Ministério da Educação, 4 maio 2011. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=9915-pceb005-11-1-1&Itemid=30192>. Acesso em: 15 jun. 2020.
  Este documento apresenta o parecer homologado do Ministério da Educação sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.
- ________. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2020.
  Este documento visa a um detalhamento esclarecedor de como os Temas Contemporâneos Transversais podem ser inseridos no contexto da Educação Básica e como articular esses temas com os conteúdos escolares.
- ________. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Ensino Médio. Brasília, 2000. p. 53.
  Este documento apresenta as diretrizes curriculares em âmbito nacional, que precedeu a Base Nacional Comum Curricular.
- ________. *PCN+ Ensino Médio*: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2002.
  A finalidade deste documento é delimitar a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias apresentando orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM).
- BROUSSEAU, Guy. *Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas*: conteúdos e métodos de ensino. Tradução de Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008.
  O documento apresenta uma teoria das situações didáticas, criada e aperfeiçoada ao longo de quatro décadas, incluindo os alunos, o meio que os cerca e o professor. O autor desenvolve esta teoria pautado na relação que se estabelece entre aluno, professor e conhecimento e no fato de que a relação existente entre eles necessita de regras e negociações, que o autor denomina como "contrato didático".
- ________. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, Cecília; IRMA, Saiz (Org.). *Didática da matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996. p. 48-72.
  Este livro é uma coleção com sete trabalhos escritos por profissionais diferentes. Os assuntos abordados nos trabalhos são voltados à educação matemática, com reflexões, análises e propostas didáticas.
- BURIASCO, Regina L. C.; SOARES, Maria T. C. Avaliação de sistemas escolares: da classificação dos alunos à perspectiva de análise de sua produção

matemática. In: VALENTE, Wagner R. (Org.). *Avaliação em matemática*: história e perspectivas atuais. Campinas: Papirus, 2008.

Este livro contém resultados de pesquisas que mostram as modificações que a avaliação escolar sofreu desde os tempos do Brasil Império até os dias atuais.

- CARBONELL, Jaume. *A aventura de inovar a mudança na escola.* Rio de Janeiro: Artmed, 2002.

  Este livro apresenta ao leitor práticas modernas que podem tornar a escola um espaço inovador.

- CASTILLO ARREDONDO, Santiago. *Avaliação educacional e promoção escolar.* Curitiba: InterSaberes, 2013.

  Este livro apresenta discussões sobre a avaliação educacional e formas como os professores podem aplicá-la. O autor desenvolve a prática avaliadora baseada não somente em conteúdos curriculares, mas em valores e atitudes essenciais para a formação cidadã.

- DAYRELL, Juarez; CARRANO, Paulo; MAIA, Carla L. (Org.). *Juventude* e en*sino médio*: sujeitos e currículos em diálogo. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2014.

  Este livro apresenta reflexões a respeito do jovem no Brasil e de seus desdobramentos e relações com o currículo do Ensino Médio.

- DIAS, Paulo. Pontos de partida para uma dinâmica de trabalho colaborativo. In: GTI (Eds.). *O professor de matemática e os projectos de escola*. Lisboa: APM, 2008, p. 233-256.

  Este artigo apresenta o relato do trabalho de professores de Matemática de uma escola em condições precárias. Porém, a escola conta com o comprometimento de uma equipe de professores na realização de projetos que envolvem recursos tecnológicos.

- FRANCISCO, Vinicius Marcos; LIBÓRIO, Renata Maria Coimbra. Um estudo sobre o *bullying* entre escolares do Ensino Fundamental. *Psicologia*: Reflexão e Crítica, Porto Alegre, v. 22, n. 2, p. 200-207, 2009. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/prc/v22n2/a05v22n2.pdf>. Acesso em: 11 jul. 2020.

  O artigo levanta reflexões sobre o bullying *no ambiente escolar e apresenta um projeto de intervenção motivado por um relato escrito das experiências negativas de um aluno que sofria com práticas violentas.*

- FERNANDES, Grazielli; YUNES, Maria Angela Mattar; TASCHETTO, Leonidas Roberto. *Bullying* no ambiente escolar: o papel do professor e da escola como promotores de resiliência. *Revista Sociais e Humanas*, Santa Maria, v. 30, n. 3, p. 141-154, 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufsm.br/sociaisehumanas/article/download/27701/pdf>. Acesso em: 15 jun. 2020.

  Este artigo esclarece o que vem a ser o bullying *e relata a experiência de uma professora que realizou um projeto depois que descobriu o sofrimento de um de seus alunos ao voltar às aulas.*

- GRAMINHA, Cristiano V. Aplicação do método *fishbowl* na discussão do tratamento fisioterapêutico da artrite reumatoide no curso de graduação em fisioterapia. In: GARCÊS, Bruno Pereira (Org.). *Aprendizagem centrada nos estudantes em sala de aula*. Uberlândia: Edibrás, 2019.

  Este livro apresenta relatos da aplicação das diferentes metodologias ativas em sala de aula, que podem tornar o processo de ensino-aprendizagem mais significativo, despertando o interesse dos alunos.

- INEP. *Matrizes de Referência*. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/matriz-de-referencia>. Acesso em: 10 jul. 2020.

  Este documento visa indicar as habilidades a serem avaliadas em cada etapa da escolarização, além de orientar a elaboração de itens de testes e provas, que servem de referência na elaboração do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem).

- KLEIMAN, Angela B.; MORAES, Silvia E. *Leitura e interdisciplinaridade*. Campinas: Mercado de Letras, 1998.

  Este livro contém sugestões de práticas de organização do planejamento para que se realizem trabalhos interdisciplinares no ambiente escolar articulando diferentes áreas do conhecimento, a fim de ir além do modo tradicional de ensino.

- LEÃO, Geraldo *et al*. Juventude, projetos de vida e ensino médio. *Educação & Sociedade*, v. 32, n. 117, p. 1067-1084, 2011.

  O artigo relata parte de uma pesquisa feita com jovens que cursavam o Ensino Médio objetivando mostrar a visão deles em relação às contribuições da escola em suas vidas.

- LIUKAS, Linda. *Hello Ruby:* Adventures in Coding. New York: Feiwel & Friends, 2015.

  Este livro tem o objetivo de iniciar a linguagem de programação ensinando primeiro seus conceitos, sem que seja necessário ter um computador. A autora conta a história de uma menina que tem muita imaginação e interesse para resolver quebra-cabeças.

- LUCKESI, Cipriano C. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. São Paulo: Cortez, 2006.

  Este livro apresenta estudos específicos sobre temas da avaliação da aprendizagem de maneira crítica e propõe novos caminhos e possibilidades nessa área da prática educativa escolar.

- MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. *Fundamentos de metodologia científica*. 8. ed. São Paulo: Atlas, 2017.

  O conteúdo deste livro serve de embasamento para o trabalho profissional, apresentando procedimentos *didáticos, fundamentos para trabalhos escolares, orientações de análises de textos, relatórios, memorandos, entre outros aspectos inerentes à educação.*

- MOREIRA, Marco Antonio. ***Teorias de aprendizagem***. 2. ed. São Paulo: EPU, 2011.

  A obra apresenta de maneira acessível teorias de aprendizagem importantes e significativas para a Educação, como o construtivismo, o humanismo, o behaviorismo, entre outras abordagens.

- MOREIRA, Jonathan Rosa; RIBEIRO, Jefferson Bruno Pereira. Prática pedagógica baseada em metodologia ativa: aprendizagem sob a perspectiva do letramento informacional para o ensino na educação profissional. Periódico Científico *Outras palavras*, v. 12, n. 2, 2016, p. 93. Disponível em: <http://revista.faculdadeprojecao.edu.br/index.php/Projecao5/article/download/722/608>. Acesso em: 29 jun. 2020.

  Artigo que relata a análise de um estudo feito para apresentar um modelo de prática pedagógica baseado na metodologia ativa de aprendizagem para a educação profissional.

- MORETTI, Méricles Thadeu.; FLORES, Cláudia Regina. ***Elementos do contrato didático***. (Ensaio). Mimeo. UFSC, 2002.

  Neste trabalho, os autores fazem uma estruturação da noção de contrato didático e discutem suas implicações na prática escolar.

- NOGUEIRA, Nilbo R. ***Interdisciplinaridade aplicada***. 3. ed. São Paulo: Érica, 1998.

  O livro tem como objetivo definir as diferenças entre multidisciplinaridade, pluridisciplinaridade, interdisciplinaridade e transdisciplinaridade e relacionar a pedagogia dos projetos com a interdisciplinaridade.

- PAIXÃO, Claudiane Reis da (org.). ***Avaliação***. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.

  Esse livro apresenta diversos temas relacionados à avaliação, mostrando na prática seu funcionamento e propiciando ao leitor mais subsídios para o estudo sobre a avaliação.

- RABELO, Edmar Henrique. ***Avaliação***: novos tempos, novas práticas. Petrópolis: Vozes, 1998.

  O autor apresenta uma proposta de avaliação, baseada em pesquisas, que leva em consideração discussões sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a nova LDB.

- OLIVEIRA, Roberto Alves de; LOPES, Celi Espasandin. O ler e o escrever na construção do conhecimento matemático no Ensino Médio. *Bolema*, Rio Claro, v. 26, n. 42b, p. 513-534, abr. 2012. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2012000200006&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 16 jul. 2020.

  O artigo apresenta uma pesquisa qualitativa que investigou as estratégias de leitura e escrita no ensino de Matemática analisando as atividades propostas e organizando-as em um portfólio.

- OLIMPIO JUNIOR, Antonio; VILLA-OCHOA, Jhony A. Coletivos pensantes e compreensão conceitual no cálculo diferencial e integral: uma composição de olhares. In: BORBA, Marcelo. C.; CHIARI, Aparecida S. S. (Org.). ***Tecnologias digitais e educação matemática***. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013. p. 141-174.

  Este livro é uma reunião de vários trabalhos, de diferentes pesquisadores, voltados às tecnologias digitais para a educação.

- PRENSKY, Marc. O papel da tecnologia no ensino e na sala de aula. Tradução de Cristina M. Pescador. *Conjectura*, Caxias do Sul, v. 15, n. 2, p. 201-204, maio/ago. 2010. Disponível em: <http://www.ucs.br/etc/revistas/index.php/conjectura/article/view/335>. Acesso em: 30 jun. 2020.

  O autor deste artigo argumenta que uma das principais metas a serem atingidas no século XXI pelos professores é saber com qual pedagogia devemos ensinar nossos alunos. O papel da tecnologia, nas salas de aula, deveria ser o de oferecer suporte ao novo paradigma de ensino. Assim, é proposta uma discussão: será que as tecnologias estão cumprindo esse papel?

- REIS, Francislene Glória de Freitas et al. Gallery walk: o uso da aprendizagem colaborativa no ensino de bioquímica. In: GARCÊS, Bruno Pereira (Org.). ***Aprendizagem centrada nos estudantes em sala de aula***. Uberlândia: Edibrás, 2019.

  A obra apresenta relatos da aplicação de diferentes metodologias ativas em sala de aula. O artigo em questão descreve o método Gallery walk e oferece exemplos que podem tornar o processo de ensino-aprendizagem mais significativo e motivador.

- RIBEIRO, Vânia G. da Silva; KAIBER, Carmen T. ***Leitura e interpretação de textos matemáticos***: construindo competências no Ensino Médio. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/cc/PDF/CC4.pdf>. Acesso em: 13 maio 2020.

  O texto apresenta um estudo com o objetivo de identificar as dificuldades na interpretação e na produção de textos matemáticos por alunos do Ensino Médio por meio de coleta e análise de dados, de acordo com as competências e as habilidades preconizadas pelo Enem e pelos PCN.

- SANTALÓ, Luis A. Matemática para não matemáticos. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Org.). ***Didática da matemática***: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

  Por meio do processo didático de ensino da Matemática, o professor deve levar os alunos ao desenvolvi-

mento constante. A didática da Matemática deve ser uma ferramenta que auxilia o trabalho do professor, mas que seja voltada ao entendimento dos processos de aprendizagem dos alunos, de modo que, cada vez mais, proporcione seus avanços.

- SUNAGA, Alexsandro; CARVALHO, Camila Sanches. As tecnologias digitais no ensino híbrido. In: BACICH, Lilian; NETO, Adolfo Tanzi; TREVISANI, Fernando de Mello (Org.). *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

  Baseado em pesquisas, este livro aborda o uso da tecnologia na sala de aula, fazendo uma ligação entre o padrão atual de ensino e a estruturação de um novo currículo escolar. O artigo apresenta análises da educação híbrida com base em experiências vividas por um grupo de professores das redes pública e privada.

- SILVA, Benedito A. da. Contrato didático. In: FRANCHI, Anna et al. *Educação matemática*: uma introdução. São Paulo: Educ, 1999.

  O artigo apresenta conceitos relacionados à didática da Matemática. Com o objetivo de contribuir para pesquisas voltadas a esse tema, o autor expressa a necessidade de mostrar ao alunos uma matemática contextualizada, tornando a aprendizagem mais significativa.

- SILVA, Gabriel Veloso da et al. *Promoção de saúde mental para adolescente em uma escola de Ensino Médio*: um relato de experiência. Rev. NUFEN, Belém, v. 11, n. 2, p. 133-148, maio/ago. 2019. Disponível em: <http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2175-25912019000200009&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 30 abr. 2020.

  O texto apresenta um relato de experiência de acadêmicos que realizaram uma atividade de intervenção sobre educação e saúde com estudantes do Ensino Médio, envolvendo relações interpessoais, bullying *e suicídio.*

- SILVA, Rodrigo Tavares da. *Atividades para estudo de integrais em um ambiente de ensino híbrido*. 2019. 128 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2019.

  Essa dissertação apresenta reflexões sobre o estudo de integrais e o uso da tecnologia em uma perspectiva de ensino híbrido, apresentando discussões pertinentes a respeito desse tipo de ensino nas aulas de Matemática.

- SOUZA, Priscila R.; ANDRADE, Maria do Carmo F. Modelos de rotação do ensino híbrido: estações de trabalho e sala de aula invertida. *E-Tech*: Tecnologias para Competitividade Industrial, Florianópolis, v. 9, n. 1, p. 3-16, 2016.

  Este artigo trata de estudos de caso que utilizaram o modelo de Rotação por estações de trabalho e também o modelo de Sala de aula invertida. As autoras relatam experiências e apresentam sugestões de sites *para o aprofundamento do estudo de ambos os modelos de ensino, oferecendo um valioso conteúdo para quem quer implementar essas metodologias em suas aulas.*

- TOMAZ, Vanessa S.; DAVID, Maria Manuela M. S. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

  Neste livro, as autoras refletem sobre como lidar com a interdisciplinaridade no ensino da Matemática e apresentam situações práticas em sala de aula que possibilitam várias aprendizagens.

- VALENTE, José Armando. *Blended learning* e as mudanças no ensino superior: a proposta da sala de aula invertida. *Educar em Revista*, Curitiba, Ed. Especial, n. 4, p. 79-97, 2014.

  Este texto aborda reflexões sobre a necessidade de tornar presentes práticas inovadoras na sala de aula, destacando a postura do professor diante disso. Ele apresenta também detalhes sobre a metodologia Sala de aula invertida.

- VIANA, Maria Luiza. Estéticas, experiências e saberes: artes, culturas juvenis e o Ensino Médio. In: DAYRELL, Juarez; CARRANO, Paulo; MAIA, Carla L. (Org.). *Juventude e Ensino Médio*: sujeitos e currículos em diálogo. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2014.

  O artigo trata de assuntos relacionados aos desafios do Ensino Médio e à necessidade de levar aos alunos saberes que os ajudarão em seus projetos de vida e em suas escolhas para o futuro.

- VILLAS BOAS, Benigna Maria de Freitas. *Conversas sobre avaliação*. Campinas: Papirus, 2019.

  Este livro aborda temas que comumente geram dúvidas sobre o assunto avaliação, apresentando reflexões e apontamentos para o dia a dia em sala de aula.

- ________. *Virando a escola do avesso por meio da avaliação*. Campinas: Papirus, 2008.

  Este livro analisa duas problemáticas da escola brasileira: repetência e evasão escolar, além de discutir o uso da avaliação formativa e abordar a autoavaliação.

- WASSERMANN, Selma. *Brincadeiras sérias na Escola Primária*. Lisboa: Instituto Piaget, 1990.

  Neste livro, a autora demonstra que as atividades lúdicas, no âmbito da sala de aula, podem contribuir para o desenvolvimento emocional, social e intelectual das crianças.

2 Sugestões de cronogramas

A seguir, apresentamos duas sugestões de cronogramas para o trabalho com esta coleção, **Opção 1** e **Opção 2**, nas quais os conteúdos estão distribuídos em seis volumes, com seus respectivos capítulos.

Tanto uma quanto a outra dão sugestões para o professor elaborar o planejamento de modo **bimestral**, **trimestral** ou **semestral**. Ainda assim, ele tem autonomia pedagógica para elaborar outro cronograma para esta coleção, baseando-se em suas necessidades e na realidade que o cerca, como a grade curricular, a quantidade de aulas e horas destinadas à Matemática e as condições de cada turma.

Neste quadro, chamaremos de:

- F.A.Q.E.L. o volume de Funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica;
- T.F.P.P. o volume de Trigonometria, fenômenos periódicos e programação;
- G.S.M.F. o volume de Grandezas, sequências e matemática financeira;
- M.S.L.G.A. o volume de Matrizes, sistemas lineares e geometria analítica;
- E.A.C.P. o volume de Estatística, análise combinatória e probabilidade;
- G.E.P. o volume de Geometria espacial e plana.

Bimestre	
1º	Volume **F.A.Q.E.L.** Capítulos **1** e **2**
2º	Volume **F.A.Q.E.L.** Capítulos **3**, **4** e **5**
3º	Volume **T.F.P.P.** Capítulos **1** e **2**
4º	Volume **T.F.P.P.** Capítulos **3** e **4**
5º	Volume **G.S.M.F.** Capítulo **1**
6º	Volume **G.S.M.F.** Capítulos **2** e **3**
7º	Volume **M.S.L.G.A.** Capítulos **1, 2** e **3**
8º	Volume **M.S.L.G.A.** Capítulos **4** e **5**
9º	Volume **E.A.C.P.** Capítulos **1** e **2**
10º	Volume **E.A.C.P.** Capítulo **3**
11º	Volume **G.E.P.** Capítulos **1** e **2**
12º	Volume **G.E.P.** Capítulo **3**

Trimestre	
1º	Volume **F.A.Q.E.L.** Capítulos **1**, **2** e **3**
2º	Volume **F.A.Q.E.L.** Capítulos **4** e **5**
3º	Volume **G.S.M.F.** Capítulos **1**, **2** e **3**
4º	Volume **E.A.C.P.** Capítulos **1, 2** e **3**
5º	Volume **M.S.L.G.A.** Capítulos **1** e **2**
6º	Volume **M.S.L.G.A.** Capítulos **3**, **4** e **5**
7º	Volume **T.F.P.P.** Capítulos **1** e **2**
8º	Volume **T.F.P.P.** Capítulos **3** e **4**
9º	Volume **G.E.P.** Capítulos **1**, **2** e **3**

Semestre	
1º	Volume **F.A.Q.E.L.** Capítulos **1**, **2**, **3**, **4** e **5**
2º	Volume **T.F.P.P.** Capítulos **1**, **2**, **3** e **4**
3º	Volume **G.S.M.F.** Capítulos **1**, **2** e **3**
4º	Volume **M.S.L.G.A.** Capítulos **1**, **2**, **3**, **4** e **5**
5º	Volume **E.A.C.P.** Capítulos **1**, **2** e **3**
6º	Volume **G.E.P.** Capítulos **1**, **2** e **3**

3 Painel do volume

Nesta coleção, cada volume procura trabalhar os conhecimentos da área de Matemática de maneira dinâmica, buscando, sempre que possível, articular conteúdos multimodais e manifestações plurais de cultura e propondo o desenvolvimento de ações que levem os alunos a serem protagonistas de sua aprendizagem de modo significativo, conforme a realidade deles.

Desse modo, para facilitar o trabalho do professor durante o planejamento de suas aulas, apresentamos a lista de competências e de habilidades cujo desenvolvimento é propiciado neste volume e um painel geral de conteúdos e objetivos.

Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias e Habilidades relacionadas a elas

CEMT 3

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

EM13MAT306

- Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

EM13MAT308

- Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT315

- Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

CEMT 4

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

EM13MAT405

- Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias

CECNT 2

Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

Painel geral

O painel geral de conteúdos e objetivos está organizado com as seguintes colunas:

- **Capítulo**: identifica o número do capítulo deste volume.
- **Conteúdo/conceitos principais**: apresenta conteúdos e/ou conceitos principais por capítulo.
- **Objetivos específicos**: indica os objetivos específicos a serem obtidos no estudo de cada capítulo.
- **BNCC**: apresenta o código das Competências gerais (CG), das Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias (CEMT), das Competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias (CECNT) e das Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias (EM13MATxxx), da BNCC, cujo trabalho é favorecido no volume conforme o capítulo.
- **Integrações possíveis entre componentes curriculares**: indica a possibilidade de integração com componentes curriculares, conforme o capítulo.
- **Temas contemporâneos transversais**: indica os temas contemporâneos explorados em cada capítulo.

	Conteúdos/conceitos principais	Objetivos específicos	BNCC	Integrações possíveis entre componentes curriculares	Temas contemporâneos transversais
Capítulo 1	• Feixe de retas paralelas • Teorema de Tales • Semelhança de triângulos • Teorema de Pitágoras • Relações métricas no triângulo retângulo • Seno, cosseno e tangente • Relações entre seno, cosseno e tangente • Ângulos complementares • Valores do seno, do cosseno e da tangente de ângulos (30°, 60° e 45°) • Uso da calculadora cientifica na trigonometria • Seno e cosseno de ângulos obtusos • Lei dos cossenos e lei dos senos • Área de um triângulo qualquer	• Reconhecer segmentos proporcionais a partir de um feixe de retas paralelas e retas transversais. • Compreender e utilizar adequadamente o teorema de Tales para resolver situações-problema. • Compreender e utilizar os conceitos do teorema de Pitágoras para resolver situações-problema. • Utilizar a semelhança de triângulos na resolução de situações-problema. • Compreender o conceito de razões trigonométricas no triângulo retângulo. • Resolver situações-problema por meio das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. • Obter adequadamente o valor do seno, do cosseno e da tangente de um ângulo mediante o uso da tabela trigonométrica. • Utilizar a calculadora científica no cálculo do valor de seno, cosseno e tangente. • Analisar e aplicar adequadamente a lei dos cossenos e dos senos em situações-problema. • Utilizar a lei dos cossenos e a lei dos senos na resolução de situações envolvendo medidas de um triângulo qualquer. • Reconhecer que a área de qualquer triângulo corresponde ao semiproduto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo por eles formado. • Calcular a área de um triângulo qualquer em situação-problema.	• CG 4 • CEMT 3 • EM13MAT308	• Física	
Capítulo 2	• Conjuntos • Função • Gráfico de uma função	• Compreender o conceito de conjuntos. • Identificar e representar conjuntos por meio de chaves, diagramas, intervalos e lei de formação.	• CG 2 • CEMT 3 • CECNT 2 • EM13MAT306	• Biologia • Física • Língua Portuguesa	

	Conteúdos/conceitos principais	Objetivos específicos	BNCC	Integrações possíveis entre componentes curriculares	Temas contemporâneos transversais
Capítulo 2	• Domínio e conjunto imagem de uma função a partir do gráfico • Valor máximo e valor mínimo de uma função • Circunferência, arcos de circunferência e ângulo central • Medidas de arcos e ângulos • Ciclo trigonométrico • Arcos trigonométricos e arcos côngruos • Seno, cosseno e tangente de um arco • Redução ao 1º quadrante • Função seno e função cosseno • Gráfico da função seno e da função cosseno • Estudo da função do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{trig}(cx + d)$	• Reconhecer e identificar os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais e suas propriedades. • Compreender e reconhecer a definição de função. • Construir, ler e interpretar gráficos de funções. • Analisar e determinar o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de uma função a partir do gráfico. • Analisar o gráfico para determinar o valor máximo e valor mínimo de uma função. • Resolver problemas que envolvam o conceito de função. • Calcular o comprimento de uma circunferência com base na medida do raio. • Compreender os conceitos de arcos de circunferência e ângulo central. • Reconhecer o radiano como a medida do arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco. • Converter a medida de um ângulo de grau para radiano, e vice-versa. • Compreender o conceito de ciclo trigonométrico. • Compreender o conceito de arco trigonométrico e arcos côngruos. • Compreender o conceito de seno, cosseno e tangente de um arco. • Reduzir arcos do seno, do cosseno e da tangente ao 1º quadrante. • Associar as funções seno e cosseno a fenômenos periódicos. • Analisar e interpretar gráficos das funções seno e cosseno. • Associar os parâmetros da f, definida por $f(x) = a + b \cdot \text{trig}(cx + d)$ ao comportamento do gráfico de uma função trigonométrica.			

Capítulo 3	• Relações trigonométricas fundamentais • Fórmulas de transformação • Equações trigonométricas	• Reconhecer as relações trigonométricas fundamentais. • Utilizar relações fundamentais na resolução de problemas e na simplificação de expressões trigonométricas. • Aplicar fórmulas que possibilitem calcular o seno, o cosseno e a tangente da soma e da diferença de arcos. • Compreender e resolver equações trigonométricas. • Resolver problemas que envolvam equações trigonométricas.	• CEMT 3 • EM13MAT306	• Arte • Biologia	• Saúde
Capítulo 4	• Algoritmos • Fluxograma • Expressões matemáticas • Expressões na calculadora científica • Operadores relacionais • Linguagem de programação • Bites e baites • Pseudolinguagem • Declaração de variáveis e constantes • Estruturas de condição: “se então”, “se então senão” • Estruturas de condição encadeadas • Estrutura de repetição: “enquanto faça”, “repita até”, “para faça”	• Compreender o conceito de algoritmo e fluxograma. • Utilizar o conceito de algoritmo e fluxograma na resolução de problemas. • Compreender e reconhecer o conceito de expressões matemáticas na linguagem de programação. • Utilizar a linguagem de programação na resolução de problemas. • Reconhecer o conceito de pseudolinguagem. • Utilizar o conceito de pseudolinguagem para escrever algoritmo para resolução de problemas. • Identificar e reconhecer as estruturas de condição: “se então”, “se então senão”. • Escrever algoritmo utilizando a estrutura de condição. • Identificar e reconhecer a estrutura de repetição: “enquanto faça”, “repita até”, “para faça”. • Escrever algoritmo utilizando a estrutura de repetição.	• CG 1 • CG 4 • CG 5 • CEMT 3 • CEMT 4 • EM13MAT315 • EM13MAT405	• Biologia • Geografia • História	• Saúde

4 Sugestões para aprofundamento

Essa seção tem como objetivo oferecer ao professor subsídios para aprofundar seus estudos e pesquisas, visto que é um profissional sempre em busca de novas reflexões e que acompanha as mudanças no processo educativo. A seguir, apresentamos referências e sugestões comentadas de livros, *sites*, vídeos e *podcasts* para pesquisa ou consulta. Cabe ressaltar que o professor também pode realizar suas pesquisas em referências que não foram citadas nesta coleção.

Sugestões de leitura para o professor

Metodologia de ensino de Matemática

- ***Ensino da matemática: concepções, metodologias, tendências e organização do trabalho pedagógico***

  GÓES, Anderson R. T.; GÓES, Heliza C. Curitiba: InterSaberes, 2015.

  Propõe maneiras de melhorar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática em sala de aula dos ensinos Fundamental e Médio, contemplando as novas tendências dessa área. Apresenta o histórico da Matemática no Brasil, bem como recursos e materiais didáticos relevantes para o ensino da Matemática, como planejamento, elaboração e avaliação de atividades e o uso de livros didáticos e paradidáticos.

- ***Modelagem matemática no ensino***

  BIEMBENGUT, Maria S.; HEIN, Nelson. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2018.

  Neste livro, a modelagem matemática é mostrada no cotidiano da sala de aula em suas várias possibilidades de trabalho, dando opções ao professor de tornar suas aulas mais significativas e motivadoras.

- ***Resolver problemas e pensar a matemática***

  CONTI, Keli C.; LONGO, Conceição A. C. (Org.). Campinas: Mercado de Letras, 2017.

  Livro que apresenta um conjunto de textos sobre o tema "resolução de problemas", indicando etapas importantes a serem trabalhadas nas aulas de Matemática, além de mostrar como é possível tornar a sala de aula um lugar para questionar, contextualizar e formular problemas, e não apenas propor questões com respostas previsíveis.

- ***Sala de aula invertida: uma metodologia ativa de aprendizagem***

  BERGMANN, Jonathan; SAMS, Aaron. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

  Nesta obra, o autor explica como utilizar a metodologia ativa sala de aula invertida *e as tecnologias a ela associadas, visando obter dos alunos mais motivação, desempenho e autonomia.*

Formação de professores

- ***A fascinante história da matemática: da pré-história aos dias de hoje***

  LAUNAY, Mickaël. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019.

  Neste livro, a Matemática é apresentada de um modo belo, poético e cativante. Com suas histórias, curiosidades e teoremas, está além de apenas fórmulas que necessitam ser decoradas. Com uma linguagem simples e acessível, leva o leitor a conhecer o início da contagem, da geometria e da álgebra e vai até os estudos de vanguarda na área da robótica atual.

- ***Aprender e ensinar geometria***

  LORENZATO, Sergio. Campinas: Mercado de Letras, 2015.

  Propõe o ensino de Geometria levando os alunos a ser participativos, tornando assim as aulas motivadoras e significativas.

- ***Cálculo das funções de uma variável***

  ÁVILA, Geraldo. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003. v. 1.

  O livro motiva o interesse do leitor pela Matemática ao mesmo tempo que oferece uma visão mais completa do papel do cálculo nos contextos científico, histórico e cultural dos últimos quatro séculos.

- ***Constituição do saber matemático: reflexões filosóficas e históricas***

  MENEGHETTI, Renata C. G. Londrina: Eduel, 2010.

  Este livro apresenta elementos para discutir o processo de constituição do saber matemático. Propõe, ainda, um exame das concepções de conhecimento matemático em algumas correntes filosóficas, desde o tempo de Platão, que foram significativas para o desenvolvimento da Matemática.

- ***Culturas juvenis: múltiplos olhares***

  CATANI, Afrânio M.; GILIOLI, Renato S. P. São Paulo: Editora Unesp, 2008.

  Livro que mostra como as manifestações das culturas juvenis têm aumentado cada vez mais, configurando-se como um panorama cultural variado e de tendências de maneiras de expressão em relação aos jovens.

- ***Descobrindo a geometria fractal: para a sala de aula***

  BARBOSA, Ruy Madsen. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

  Neste livro é apresentado um estudo sobre os fractais, voltado para o uso em sala de aula, buscando introduzi-lo na Educação Matemática brasileira. Contém capítulos específicos, como os de criação e exploração de fractais, de manipulação de materiais concretos e de relacionamento com o triângulo de Pascal, sobretudo um, com recursos computacionais – softwares educacionais em uso no Brasil.

- ***Didática da matemática: uma análise da influência francesa***

  PAIS, Luiz Carlos. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

  Este livro aborda conceitos principais da tendência conhecida como "didática francesa" e também temas como transposição didática, contrato didático, obstáculos epistemológicos e engenharia didática. Além disso, essa tendência é adotada ao trabalhar as concepções dos alunos e a formação de professores.

- ***História e tecnologia no ensino da matemática***

  CARVALHO, Luiz M. et al. (Org.). Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. v. 2.

  Coletânea relevante de trabalhos que discutem a qualidade da Educação Básica no Brasil, com modelos de ensino visando a uma qualidade melhor na formação dos alunos.

- ***Introdução à sociologia da juventude***

  GROPPO, Luís A. Jundiaí: Paco Editorial, 2017.

  Este livro apresenta contribuições fundamentais da Sociologia para conhecer melhor as juventudes nas sociedades atuais.

- ***Jovens e cotidiano: trânsitos pelas culturas juvenis e pela escola da vida***

  STECANELA, Nilda. Caxias do Sul: EdUCS, 2010.

  O livro trabalha temas que vão desde a abordagem histórico-sociológica da categoria "juventude", passando pela questão educacional, até a problemática das identidades na sociedade moderna, além de discussões a respeito da territorialidade e seus significados.

- ***Matemática básica interdisciplinar***

  AVERSI-FERREIRA, Tales A. Campinas: Átomo, 2018.

  Esta obra aborda a Matemática básica de modo prático e interdisciplinar com as áreas de Física, Química e Biologia. Apresenta discussões teóricas e exercícios, tendo o objetivo de levar os alunos ao domínio das operações matemáticas e sua aplicabilidade nessas diferentes áreas, bem como às metodologias científicas aplicadas a cada caso.

- ***O processo de avaliação nas aulas de matemática***

  LOPES, Celi E.; MUNIZ, Maria I. S. (Org.). Campinas: Mercado de Letras, 2010.

  Relata uma prática avaliativa que resulta da dissertação de mestrado **A prática avaliativa nas aulas de Matemática: uma ação compartilhada com os alunos***. Também apresenta instrumentos avaliativos e a maneira de colocá-los em prática, bem como a formação contínua de professores de Matemática que atuam em diferentes níveis da Educação Básica.*

Educação Matemática

- ***Álgebra linear***

  BOLDRINI, José L. et al. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

  Enfatiza o uso dos conceitos de Álgebra no decorrer de todos os textos. Os pré-requisitos para a utilização deste livro são os tópicos de Matemática normalmente estudados no Ensino Médio.

- ***Da etnomatemática a arte-*design *e matrizes cíclicas***

  GERDES, Paulus. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

  Este livro discute e também dá exemplos de como a Matemática se relaciona com outras atividades humanas, quebrando barreiras entre áreas que muitas vezes são vistas de modo estanque no Ensino Médio ou no Ensino Superior.

- ***Educação matemática: da teoria à prática***

  D'AMBROSIO, Ubiratan. 23. ed. Campinas: Papirus, 2019.

  Neste livro são abordados aspectos da cognição de natureza matemática e questões teóricas da educação. Além disso, apresenta discussões sobre temas diretamente ligados à sala de aula e às inovações da prática docente, propondo reflexões sobre o assunto.

- ***Informática e educação matemática***

  BORBA, Marcelo de C.; PENTEADO, Miriam G. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

  Traz o resultado de um trabalho sobre informática educativa e exemplos do uso da informática com alunos e professores relacionados à utilização de computadores e calculadoras gráficas em Educação Matemática.

- ***Relações de gênero, educação matemática e discurso: enunciados sobre mulheres, homens e matemática***

  SOUZA, Maria Celeste R. F.; FONSECA, Maria da Conceição F. R. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

  Este livro proporciona uma reflexão sobre o modo como as relações de gênero permeiam as práticas educativas, em particular as que se constituem no âmbito da Educação Matemática. Propõe uma análise que mostra como os discursos sobre relações de gênero e Matemática repercutem e produzem desigualdades, abrangendo aspectos que envolvem vida doméstica, relações de trabalho, o cotidiano escolar, entre outros.

- ***Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica: sobre linguagens e práticas culturais***

  FLORES, Cláudia R.; CASSIANI, Suzani. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

  Contribui para a propagação dos diferentes modos de pensar e pesquisar os problemas da educação, abordando questões tanto matemáticas quanto científicas.

Sites, vídeos e *podcasts*

- ***Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática***

  Disponível em: <https://www.ime.usp.br/caem/index.php>. Acesso em: 24 jun. 2020.

  Trata-se de um órgão que presta assessoria e formação continuada referente ao aperfeiçoamento e extensão científico-cultural para professores e estudantes de Matemática. Entre as várias atividades, oferece cursos, oficinas e palestras e promove eventos para os diferentes níveis de ensino.

- ***Matemática Humanista***
  Disponível em: <https://www.matematicahumanista.com.br/podcast>. Acesso em: 25 jun. 2020.
  Primeiro **podcast** *sobre Educação Matemática e Matemática Humanista do Brasil, com entrevistas,* **reviews** *de livros e eventos, humor e arte, tudo com o clima típico das rádios. Além disso, apresenta posicionamentos diante do ensino e da aprendizagem de Matemática bastante diferentes dos mais usualmente vividos em escolas e universidades.*
- ***Ministério da Educação (MEC)***
  Disponível em: <https://www.youtube.com/ministeriodaeducacao_MEC/>. Acesso em: 24 jun. 2020.
  Disponibiliza vídeos institucionais desenvolvidos pelo MEC e as últimas notícias sobre educação no país.
- ***Minuto IBGE***
  Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/minuto-ibge.html>. Acesso em: 25 jun. 2020.
  Podcast que apresenta fatos, curiosidades, relatos e dados relevantes que estão presentes no cotidiano dos brasileiros. Consiste em um programa de rádio semanal disponibilizado gratuitamente, para emissoras de todo o país, por meio da Rede Nacional de Rádio.
- ***Nova Escola***
  Disponível em: <https://novaescola.org.br/>. Acesso em: 25 jun. 2020.
  Edição on-line *que dá aos alunos a oportunidade de acessar diversas informações sobre educação, em várias áreas do conhecimento, pesquisar artigos publicados e consultar o acervo da revista.*
- ***Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas***
  Disponível em: <http://www.obmep.org.br/>. Acesso em: 24 jun. 2020.
  O site contém várias informações sobre o evento e possibilita às escolas que se inscrevam on-line. *Apresenta também informações sobre provas, gabaritos, datas, escolas inscritas, entre outras.*
- ***O Quadro Negro***
  Disponível em: <http://www.central3.com.br/category/podcasts/o-quadro-negro/>. Acesso em: 25 jun. 2020.
  Traz informações, trocas de experiências, análises e discussões pontuais sobre assuntos variados da educação, tornando o podcast *um espaço aberto para que educandos, educadores e todos os interessados participem do tema proposto.*
- ***Portal Aprendiz***
  Disponível em: <https://portal.aprendiz.uol.com.br/>. Acesso em: 24 jun. 2020.
  Tem como maior objetivo mostrar que é possível tornar as cidades espaços educativos, onde se pode aprender, criar, pensar e transformar. Assim, as oportunidades educativas que as cidades oferecem constituem o principal foco das reportagens publicadas no site, *fazendo dos territórios lugares mais educadores, inteligentes, sustentáveis, criativos, inclusivos e democráticos.*
- ***Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos (RBEP)***
  Disponível em: <http://rbep.inep.gov.br/ojs3/index.php/rbep/issue/view/423>. Acesso em: 24 jun. 2020.
  No site é possível encontrar edições anteriores da revista, além da opção de pesquisar por artigos, que podem ser baixados. Trata-se de um periódico quadrimestral, publicado em formatos impresso e eletrônico. A RBEP publica artigos inéditos, resultantes de pesquisas que apresentem consistência, rigor e originalidade na abordagem do tema e que contribuem para a construção do conhecimento na área da educação.

Cursos e instituições

- ***Ucsal – Universidade Católica de Salvador***
  Especialização em Docência em Matemática
  Disponível em: <https://www.ucsal.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***Uece – Universidade Estadual do Ceará***
  Especialização em Ensino de Matemática
  Mestrado Profissional em Matemática
  Disponível em: <http://www.uece.br/ced/cursos/lato-sensu/presencial/metodologia-do-ensino-de-matematica/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UEFS – Universidade Estadual de Feira de Santana***
  Especialização em Matemática
  Mestrado Profissional em Matemática
  Disponível em: <http://www.uefs.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UEG – Universidade Estadual de Goiás***
  Especialização em Matemática e Educação Matemática
  Especialização em Matemática para a Educação Básica e Superior
  Especialização em Matemática Pura e Aplicada
  Especialização em Ensino da Matemática
  Disponível em: <http://www.prp.ueg.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UEL – Universidade Estadual de Londrina***
  Especialização em Estatística com Ênfase em Pesquisa Quantitativa
  Disponível em: <http://www.uel.br/pos/estatistica-quantitativa/portal/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
  Mestrado e Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática
  Disponível em: <http://www.uel.br/pos/mecem/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
  Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional
  Disponível em: <http://www.uel.br/pos/pgmac/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
  Mestrado Profissional em Matemática
  Disponível em: <http://www.uel.br/pos/profmat/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UEM – Universidade Estadual de Maringá***
  Mestrado e Doutorado em Educação para a Ciência e Matemática
  Disponível em: <http://www.pcm.uem.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.

Mestrado e Doutorado em Matemática
Disponível em: <http://www.pma.uem.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
Mestrado Profissional em Matemática
Disponível em: <http://www.profmat.uem.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.

- ***UEMG – Universidade do Estado de Minas Gerais***
  Especialização em Ensino de Ciências e Matemática
  Disponível em: <http://www.uemg.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***Ufal – Universidade Federal de Alagoas***
  Mestrado e Doutorado em Matemática
  Mestrado Profissional em Matemática
  Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
  Disponível em: <http://www.ufal.edu.br/unidadeacademica/im/pt-br/pos-graduacao/matematica>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***Ufam – Universidade Federal do Amazonas***
  Mestrado e Doutorado em Matemática
  Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática
  Mestrado Profissional em Matemática
  Disponível em: <https://www.ufam.edu.br/pos-graduacao.html>. Acesso em: 25 jun. 2020.
- ***Ufes – Universidade Federal do Espírito Santo***
  Mestrado em Matemática
  Mestrado Profissional em Matemática
  Disponível em: <http://www.matematica.ufes.br/pt-br/pos-graduacao/PPGMAT/linhas-de-pesquisa>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFMS – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul***
  Mestrado e Doutorado em Educação Matemática
  Mestrado Profissional em Matemática
  Disponível em: <http://posgraduacao.ufms.br/portal/cursos/buscar>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFPB – Universidade Federal da Paraíba***
  Pós-Graduação em Matemática – Mestrado e Doutorado
  Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional
  Mestrado Profissional em Matemática
  Disponível em: <http://www.mat.ufpb.br/posgrad/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFPE – Universidade Federal de Pernambuco***
  Mestrado em Educação em Ciências e Matemática
  Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Mestrado
  Programa de Pós-Graduação em Estatística – Mestrado e Doutorado
  Programa de Pós-Graduação em Matemática – Mestrado e Doutorado
  Programa de Pós-Graduação em Matemática Computacional – Doutorado
  Disponível em: <https://www.ufpe.br/cursos>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul***
  Mestrado e Doutorado Acadêmico em Matemática
  Mestrado e Doutorado Acadêmico em Matemática Aplicada
  Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
  Disponível em: <http://www.ufrgs.br/ufrgs/ensino/pos-graduacao>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro***
  Especialização em Ensino de Matemática
  Mestrado Profissional em Matemática
  Mestrado e Doutorado em Matemática
  Disponível em: <http://app.pr2.ufrj.br/listarStrictoMestreDoutor>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte***
  Mestrado e Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática
  Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática
  Mestrado em Matemática Aplicada e Estatística
  Mestrado Profissional em Matemática
  Disponível em: <https://sigaa.ufrn.br/sigaa/public/curso/lista.jsf?nivel=S&aba=p-stricto>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina***
  Mestrado e Doutorado em Matemática
  Mestrado Profissional
  Disponível em: <https://ppgmtm.posgrad.ufsc.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFV – Universidade Federal de Viçosa***
  Mestrado em Matemática
  Matemática em Rede Nacional
  Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática
  Disponível em: <http://www.ppg.ufv.br/?page_id=383>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFPI – Universidade Federal do Piauí***
  Mestrado e Doutorado em Matemática
  Mestrado Profissional em Matemática
  Disponível em: <https://sigaa.ufpi.br/sigaa/public/curso/lista.jsf?nivel=S&aba=p-ensino>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UnB – Universidade de Brasília***
  Mestrado e Doutorado em Educação – Linha de pesquisa de Educação em Ciências e Matemática
  Disponível em: <https://www.mat.unb.br/pagina/pesquisa-projetos>. Acesso em: 26 jun. 2020.
  Mestrado Profissional de Matemática
  Disponível em: <http://www.fe.unb.br/index.php?option=com_content&view=article&id=153&Itemid=1392>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***USP – Universidade de São Paulo***
  Mestrado e Doutorado em Estatística
  Mestrado e Doutorado em Matemática
  Mestrado e Doutorado em Matemática Aplicada
  Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria
  Disponível em: <https://www5.usp.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.

5 Orientações sobre os capítulos

CAPÍTULO 1 Trigonometria no triângulo

Páginas 10 e 11

- Para iniciar o trabalho com essas páginas, peça aos alunos que leiam as informações apresentadas, analisem as imagens e respondam às questões propostas. Em seguida, inicie uma discussão com algumas questões:
  - Qual é o principal assunto abordado nessa página?
  - O que vocês sabem ou já ouviram falar sobre esportes radicais?
- Prossiga lendo a pergunta do item **a** em voz alta e deixe os alunos dizerem quais esportes radicais citaram como resposta. Pergunte se alguém já praticou algum dos esportes citados e se algum aluno já praticou tirolesa. Deixe que relatem suas experiências e, em seguida, discutam estratégias para calcular a altura entre as extremidades do cabo (item **b**). Verifique se foram citados conceitos de trigonometria como resposta. Com relação ao item **c**, incentive os alunos a considerar as vantagens de praticar esportes radicais sozinhos e em grupo, e verificar que muitas delas são comuns às duas maneiras.

Planejamento individual e coletivo

Além disso, leve os alunos a relacionar a prática da tirolesa com outras áreas do conhecimento. Pergunte, por exemplo:

- O assunto abordado nessas páginas tem relação com qual(is) área(s) do conhecimento? Justifique sua resposta.
- Qual é a relação da tirolesa com a Matemática? E com a **Física**?

Com isso, espera-se que os alunos percebam que a montagem e o funcionamento de uma tirolesa envolvem conhecimentos de trigonometria e conceitos de movimentos inclinados sob ação da força peso, abordados, preferencialmente, pelo componente curricular **Física**.

Se possível, convide um professor de **Física** para conversar com eles sobre essa temática. Pode-se dizer aos alunos que a queda livre é um movimento vertical que ocorre em razão da ação exclusiva da força peso que atrai os corpos em direção à Terra. O movimento descrito será uniformemente variado, com a aceleração igual à aceleração da gravidade local. Quando um corpo desce deslizando por um plano inclinado, a ação da sua massa corporal se dividirá entre gerar o movimento e pressionar o plano. Logo, a aceleração do movimento será menor do que a aceleração da gravidade. Algo similar ocorre com um corpo descendo por uma tirolesa em que a massa corporal gera o movimento e pressiona o cabo. Além disso, deve existir um desnível entre as extremidades do cabo para que a força peso possa gerar algum efeito. Porém, quanto mais próximo da vertical estiver o cabo, mais rápido a pessoa vai descer. Quanto mais longo o cabo, maior o intervalo de tempo de movimento, o que pode ocasionar uma velocidade final maior.

Complemente o assunto dizendo que a prática de tirolesa teve origem em uma região chamada Tirol, localizada na fronteira da Áustria com o norte da Itália. Para a prática da tirolesa são necessários equipamentos fixos e móveis. Os equipamentos fixos são os cabos de aço e os fixadores metálicos dos cabos, que, em geral, são instalados em troncos de árvores. Já os equipamentos móveis são as roldanas e uma cadeirinha de cordas de *nylon*, chamada arnês. As roldanas, que deslizam sobre os cabos, sustentam hastes presas ao arnês.

Além disso, a extremidade de uma pequena corda é presa ao arnês com um mosquetão (anel metálico de fixação), e a outra extremidade é presa a uma roldana que deslizará sobre o cabo, que suporta a massa da pessoa, permitindo, assim, deslocar-se com segurança entre os pontos de partida e de chegada.

Página 12

- Após trabalhar o infográfico dessa página com os alunos, explore o conhecimento prévio deles perguntando-lhes qual é a relação entre a famosa frase “dai-me uma alavanca e um ponto de apoio e levantarei o mundo”, atribuída a Arquimedes de Siracusa, com as informações lidas até o momento. Deixe que eles expressem livremente suas opiniões e, em seguida, auxilie-os na obtenção da resposta, dizendo que, por meio de rampas e alavancas, foi possível construir as pirâmides do Egito.

Para aprofundar

Você já imaginou explorar um modelo em 3D por meio do qual podemos fazer um passeio virtual às pirâmides do Egito?! Acesse a plataforma (em inglês) a seguir para realizar esse passeio.

DIGITAL GIZA. *3D model of the Giza Plateau*. Disponível em: <http://giza.fas.harvard.edu/3dmodels/71017/full/>. Acesso em: 9 ago. 2020.

Página 13 Conversando

- Ao abordar as questões proposta nessa seção, peça aos alunos que deem sua opinião em voz alta a fim de compartilhá-la com os demais. Em relação ao item **c**, procure conversar com os alunos a fim de resgatar o conhecimento prévio que eles têm acerca de proporcionalidade e segmentos proporcionais, assuntos já abordados em anos anteriores. Se necessário, desenhe na lousa um esquema representando a situação descrita na página e procure fazer a associação, com os alunos, entre ela e tais assuntos.

Página 14

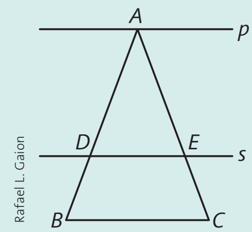
BNCC

O objetivo do trabalho com essa página, junto com os conteúdos que virão a seguir, é contemplar a habilidade **EM13MAT308**, abordando conceitos de semelhança e congruência de triângulos, e as relações métricas, como a lei dos senos e a lei dos cossenos.

- A fim de complementar as informações acerca do conteúdo proposto nessa página, caso necessário, revise com os alunos a congruência de triângulos. Se julgar conveniente, leia para eles os casos de congruência de triângulos, que são:
  - Se dois triângulos têm os três lados respectivamente congruentes, esses triângulos são congruentes. Esse é o caso de congruência lado, lado e lado (LLL).
  - Se dois triângulos têm dois lados e o ângulo compreendido entre eles respectivamente congruentes, esses triângulos são congruentes. Esse é o caso de congruência lado, ângulo e lado (LAL).
  - Se dois triângulos têm um lado e dois ângulos adjacentes respectivamente congruentes, esses triângulos são congruentes. Esse é o caso de congruência ângulo, lado e ângulo (ALA).
  - Se dois triângulos têm um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes, esses triângulos são congruentes. Esse é o caso de congruência lado, ângulo e ângulo oposto (LAAo).

Página 16

- Durante a resolução da tarefa resolvida **R2**, se julgar necessário, apresente aos alunos a justificativa citada no quadro **Observação**. Para isso, considere um triângulo *ABC* qualquer. Traçando uma reta *s* paralela ao lado *BC* que cruza os lados *AB* e *AC*, determinamos os pontos *D* e *E*. Traçando uma reta *p* paralela a *s* passando pelo vértice *A*, temos um feixe de retas paralelas, que corta duas transversais.



Pelo teorema de Tales, $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$.

Assim, toda reta paralela a um dos lados de um triângulo, e que cruza os outros dois lados, divide esses dois lados em segmentos de reta proporcionais.

Página 19

- Veja uma maneira de demonstrar o 1º caso de semelhança (ângulo e ângulo) utilizando o teorema fundamental da semelhança, apresentada a seguir, que responde à questão teoria dessa página.

  Sejam dois triângulos *ABC* e *A'B'C'* não congruentes, com $B\hat{A}C \cong B'\widehat{A'}C'$ e $A\hat{B}C \cong A'\widehat{B'}C'$. Além disso, considere que $\text{med}\left(\overline{AB}\right) > \text{med}\left(\overline{A'B'}\right)$. Seja *D* um ponto de $\overline{AB}$ tal que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$. Seja *E* um ponto de $\overline{AC}$ vértice do triângulo *ADE* em que $A\hat{D}E \cong A\hat{B}C$. Assim, temos:

  $D\hat{A}E \cong B'\widehat{A'}C'$, pois $D\hat{A}E \cong B\hat{A}C$ e $B'\widehat{A'}C' \cong B\hat{A}C$;

  $A\hat{D}E \cong A'\widehat{B'}C'$, pois $A\hat{D}E \cong A\hat{B}C$ e $A'\widehat{B'}C' \cong A\hat{B}C$;

  $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$, por construção.

  Assim, pelo caso de congruência ângulo, lado e ângulo (ALA), $\triangle ADE \sim \triangle A'B'C'$.

  Além disso, como $A\hat{D}E \cong A\hat{B}C$, então $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Portanto, pelo teorema fundamental da semelhança, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, e assim $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Página 21

- O trabalho com a tarefa **18** possibilita aos alunos que analisem um texto publicado em um *blog* que apresenta fragilidade argumentativa. Ao responderem ao item **a**, incentive-os a mostrar contraexemplos que refutam a afirmação feita pelo autor de triângulos não retângulos cujas somas dos quadrados dos comprimentos dos dois lados menores não sejam iguais ao quadrado do comprimento dos lados maiores. Desse modo, os alunos estarão desenvolvendo a capacidade argumentativa e inferencial por meio de contraexemplos.

  Em relação ao item **b**, é importante ressaltar que, na Matemática, as generalizações não podem ser feitas apenas por meio de exemplos, mas sim por meio de demonstrações que provam conjecturas.

Por fim, explique aos alunos que, ao pesquisar determinado tema, sempre é necessário verificar se a fonte é confiável, pois isso traz segurança para se basear nas informações obtidas.

Página 24

BNCC

Durante o trabalho com a tarefa **20**, e em outros momentos no capítulo, os alunos são levados a elaborar problemas e trocá-los com os colegas para resolvê-los. Esses momentos oportunizam a eles melhorar a capacidade de comunicação, bem como exercitar o respeito à diversidade de opiniões, desenvolvendo a **Competência geral 4** da BNCC.

Página 25

- Ao introduzir o conteúdo dessa página, enfatize com os alunos a importância das relações trigonométricas na prática de profissionais de diversas áreas, pois essa compreensão pode contribuir para que os alunos construam significados em relação ao conteúdo abordado. Comente que na Topografia, por exemplo, para determinar a medida de ângulos que possibilitem a obtenção de informações detalhadas, como área e inclinação, sobre um terreno ou outro local que está sendo avaliado, são usados um instrumento chamado teodolito e algumas relações trigonométricas.

Página 29

- Após trabalhar a relação $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$ com os alunos, comente que não existe o valor da tangente para o ângulo de 90°, pois, nesse caso, teríamos $\text{tg}\,(90°) = \dfrac{\text{sen}\,(90°)}{\cos\,(90°)} = \dfrac{1}{0}$, o que é uma indefinição na Matemática. Caso os alunos se interessem por casos de soluções indefinidas, é possível ampliar a discussão e mostrar exemplos generalizados. Nesse caso, considerando dois números a e b, dizer que $\dfrac{a}{b} = c$ significa que vale $a = \dfrac{c}{b}$. Mas é sabido que não existe nenhum número que multiplicado por zero resulte no número 1. Quando isso acontece, dizemos que o fato é indefinido ou impossível.

Página 36 Explorando problemas

BNCC

A seção **Explorando problemas** tem por objetivo incentivar os alunos a relacionar os conceitos de trigonometria estudados a uma situação contextualizada, levando-os a interpretar a situação e a utilizar estratégias e conceitos necessários para a solução do problema, contemplando aspectos da **Competência específica 3** da área **Matemática e suas Tecnologias.**

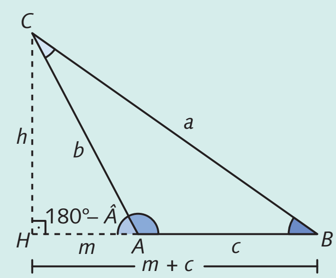
- O trabalho com essa seção permite o desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos ao resolver o problema proposto diante das etapas de compreender o problema, planejar uma possível estratégia de resolução, executar a resolução e, por último, verificar o resultado.

Página 42

- Ao desenvolver o conteúdo dessa página, se julgar conveniente, apresente aos alunos a demonstração da lei dos cossenos para triângulos obtusângulos e retângulos.

Triângulo obtusângulo

No triângulo a seguir está traçada a altura h relativa ao lado AB, formando dois triângulos retângulos, HBC e HAC.



Do triângulo retângulo HBC, temos:

$$a^2 = h^2 + (m + c)^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + m^2 + 2mc + c^2 \quad \text{(I)}$$

Do triângulo retângulo HAC, temos:

$$b^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - m^2 \quad \text{(II)}$$

$$\cos(180° - \hat{A}) = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos(180° - \hat{A}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = -b \cdot \cos\hat{A} \quad \text{(III)}$$

Substituindo II em I:

$$a^2 = \underbrace{b^2 - m^2}_{h^2} + m^2 + 2mc + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2mc$$

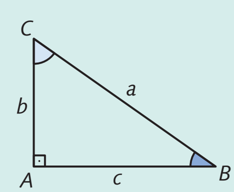
De III, segue que:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c\Big(\underbrace{-b \cdot \cos\hat{A}}_{m}\Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}}$$

Triângulo retângulo

No triângulo retângulo ABC abaixo, o ângulo $\hat{A}$ mede 90°.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Como $\cos 90° = 0$, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - \overbrace{2bc \cdot \underbrace{\cos\hat{A}}_{\cos(90° - 0°)}}^{0}$$

Logo, para o triângulo retângulo também vale a relação:

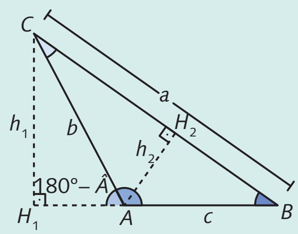
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}}$$

Página 44

- Para complementar o conteúdo dessa página, pode-se dizer aos alunos que, assim como a esteira elevatória, outras máquinas facilitam o trabalho humano. A máquina de colher algodão, por exemplo, realiza de maneira mais rápida o processo de colheita, reduz os custos e melhora a qualidade do produto colhido. São necessários cerca de 25 homens por dia para colher 1 hectare, enquanto na colheita mecânica a mesma quantidade é colhida em 1,5 h ou 3 h, dependendo da máquina.
- Ao abordar o conteúdo dessa página, se julgar conveniente, apresente aos alunos a demonstração da lei dos senos para triângulos obtusângulos e retângulos.

Triângulo obtusângulo

Consideremos o triângulo obtusângulo *ABC* abaixo, no qual $\hat{A}$ é o ângulo obtuso e CH_1 e AH_2 são, respectivamente, as alturas relativas aos lados *AB* e *BC*.



- No triângulo retângulo ACH_1, temos:

$$\text{sen}\left(180° - \hat{A}\right) = \frac{h_1}{b} \Rightarrow h_1 = b \cdot \text{sen}\left(180° - \hat{A}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h_1 = b \cdot \text{sen}\ \hat{A}$$

- No triângulo retângulo H_1BC, temos:

$$\text{sen}\ \hat{B} = \frac{h_1}{a} \Rightarrow h_1 = a \cdot \text{sen}\ \hat{B}$$

Dessa maneira, temos:

$$a \cdot \text{sen}\ \hat{B} = b \cdot \text{sen}\ \hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}\ \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\ \hat{B}} \quad (\text{I})$$

- No triângulo AH_2C, temos:

$$\text{sen}\ \hat{C} = \frac{h_2}{b} \Rightarrow h_2 = b \cdot \text{sen}\ \hat{C}$$

- No triângulo ABH_2, temos:

$$\text{sen}\ \hat{B} = \frac{h_2}{c} \Rightarrow h_2 = c \cdot \text{sen}\ \hat{B}$$

Dessa maneira, temos:

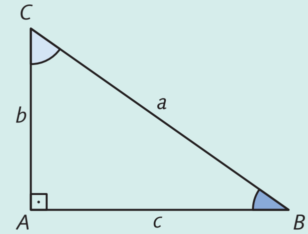
$$b \cdot \text{sen}\ \hat{C} = c \cdot \text{sen}\ \hat{B} \Rightarrow \frac{b}{\text{sen}\ \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\ \hat{C}} \quad (\text{II})$$

Comparando I e II, concluímos que:

$$\frac{a}{\text{sen}\ \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\ \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\ \hat{C}}$$

Triângulo retângulo

- No triângulo retângulo *ABC* a seguir, $\text{sen}\ \hat{A} = \text{sen}\ 90° = 1$.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Nesse caso, temos:

$$\text{sen}\ \hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\text{sen}\ \hat{B}} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{\text{sen}\ \hat{B}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{a}{\text{sen}\ \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\ \hat{B}} \quad (\text{I})$$

$$\text{sen}\ \hat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\text{sen}\ \hat{C}} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{c}{\text{sen}\ \hat{C}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{a}{\text{sen}\ \hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\ \hat{C}} \quad (\text{II})$$

Comparando I e II, concluímos que:

$$\frac{a}{\text{sen}\ \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\ \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\ \hat{C}}$$

Páginas 50 e 51 **Acesso digital**

- Nessa seção, foi utilizada a versão 6.0.851.0 do GeoGebra, um programa computacional dinâmico e gratuito de Matemática que combina recursos de construções geométricas, algébricas, gráficos, tabelas, entre outros. Sua interface é simples e exibe comandos para diferentes tipos de construção. É possível acessá-lo diretamente do navegador, sem necessidade de instalá-lo. Porém, alguns passos podem ser diferentes da versão apresentada nesta coleção. Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic>. Acesso em: 2 jul. 2020. Há também a opção de fazer o *download* e instalá-lo. Além disso, o *site* também contém informações e materiais de apoio para a utilização do programa. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download>. Acesso em: 2 jul. 2020.
- Durante a realização dessa construção com os alunos, reforce com eles sobre a importância de clicar nos objetos na ordem em que seus nomes aparecem no texto, respeitando a palavra "respectivamente".
- Ao utilizar a ferramenta **Reta perpendicular** no **2º** passo, o objetivo é obter um ângulo reto, de modo que o triângulo seja retângulo. Assim, verifique se os alunos percebem que mesmo ao mover a posição dos pontos *A*, *B*, *C* ou *D*, as retas *f* e *h* permanecem perpendiculares. Desse modo, após a realização de toda a construção, se julgar conveniente, oriente-os a mover alguns desses pontos para que possam verificar na prática essa situação.
- O objetivo dessa seção é que os alunos utilizem o *software* GeoGebra para construir um triângulo retângulo e analisar as medidas dos ângulos dos ângulos do triângulo, construído inicialmente. Outra possibilidade, ainda, seria utilizar os comandos próprios

do *software* GeoGebra para analisar os valores dos ângulos, digitando-os na **Janela de Álgebra**. Como o ângulo em questão foi denotado por α, basta digitar **sen(α)**, **cos(α)** e **tg(α)** para obter os valores do seno, do cosseno e da tangente, respectivamente.

Avaliação

Se julgar oportuno, após trabalhar a construção dessas páginas com os alunos, escolha alguns valores de ângulos diferentes para que eles obtenham seus valores por meio do *software* GeoGebra. Para verificar se a resposta obtida está correta, oriente-os a consultar a página **33**, na qual encontramos a Tabela trigonométrica.

- No item **a**, uma possibilidade é alterar a posição do ponto C e a medida do ângulo $\hat{A}$ para que os alunos verifiquem que os valores do cateto a e da hipotenusa d do triângulo retângulo também alteram as razões trigonométricas que envolvem essas medidas.
- Se julgar conveniente, aproveite essa construção para fazer, com base nela, outras verificações e construções com os alunos, conforme indicado a seguir.

Semelhança de triângulos

Conforme estudado na página **19**, se traçarmos uma reta paralela a um dos lados de um triângulo, cruzando os dois outros lados, obtemos um novo triângulo que é semelhante ao anterior.

Para verificar isso a partir da construção anterior, oriente os alunos a selecionar a ferramenta **Ponto** e a marcar um ponto D qualquer sobre o segmento b, por exemplo. Depois, com a ferramenta **Reta Paralela**, basta clicar no ponto D e no segmento c. Então, oriente os alunos a arrastar o ponto D sobre o segmento b para observar o triângulo formado. Outra possibilidade seria clicar com o botão direito do *mouse* sobre o ponto D e selecionar a opção **Animação** para que ele se movimente sozinho. Se julgar conveniente e quiser se aprofundar mais sobre o assunto, oriente os alunos a marcar a interseção E entre a reta paralela construída e o segmento a. Então, para verificar a relação de semelhança entre os triângulos ABC e DEC, uma possibilidade é digitar **CD/DA** e **CE/EB** na **Janela de Álgebra** e observar que esses valores são iguais e chamados constante de proporcionalidade, conforme já estudado. Outra verificação possível é marcar, com a ferramenta **Ângulo**, os ângulos $E\hat{D}C$, $D\hat{E}C$ e $A\hat{B}C$. Com isso, observamos que os dois triângulos são semelhantes, pois seus três ângulos internos são congruentes.

Teorema de Pitágoras

Para verificar o teorema de Pitágoras, estudado na página **20**, para o caso dessa construção, basta digitarmos c^2 em uma linha da **Janela de Álgebra**, correspondente ao comando **c^2**, e, em outra linha, $a^2 + b^2$, ou seja, **a^2 + b^2**. Com isso, verificamos que os valores correspondentes a essas duas linhas são iguais, pois, do teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$, nesse caso. Como a hipotenusa c do triângulo foi construída medindo 1, temos a relação $1 = 1$. Se julgar conveniente, oriente os alunos a arrastar o ponto B e verificar que o teorema ainda vale.

Relações métricas no triângulo retângulo

Para verificar a relação métrica $h^2 = m \cdot n$, por exemplo, estudada na página **22**, basta selecionar a ferramenta **Reta Perpendicular**, clicar no ponto C e no segmento c. Depois, marque a interseção F entre essa reta e o segmento c. Como queremos verificar que $FC^2 = AF \cdot FB$, basta digitarmos **FC^2** e **AF*FB** em linhas diferentes da **Janela de Álgebra** e observar que os valores correspondentes são iguais.

Relações entre seno, cosseno e tangente

A relação $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, com $\alpha = m$, nesse caso, pode ser verificada digitando **(sen(m))^2** e **(cos(m))^2**, em linhas diferentes da **Janela de Álgebra**, e observar que a soma desses valores é 1, independentemente do valor de m. Quanto à relação $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha}$, basta digitar **(sen(m))/(cos(m))** na **Janela de Álgebra** e comparar seu resultado com a linha correspondente ao valor da tangente, já inserida anteriormente.

Lei dos cossenos e dos senos

Para verificar a relação $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}$, com $\hat{A} = m$, digite **a^2** e **b^2 + c^2 − 2*b*c*(cos(m))**, em linhas diferentes da **Janela de Álgebra**, e observar que os valores correspondentes são iguais. Após essa inserção, oriente os alunos a alterar o valor de m ou a posição do ponto B para verificar que a relação permanece verdadeira. Já para verificar a lei dos senos, basta digitar **a/(sen(m))**, **b/sen(Ângulo(C,B,A))** e **c/sen(Ângulo(A,C,B))**, em linhas diferentes da **Janela de Álgebra**. Note que, para inserir ou se referir ao ângulo interno $\hat{B}$ do triângulo, basta digitarmos **Ângulo(C,B,A)**, com os pontos C, B e A em ordem correspondente ao sentido horário.

Área de um triângulo

Para calcular a área desse triângulo por meio da fórmula $S = \dfrac{a \cdot b \cdot \text{sen}\ \hat{C}}{2}$, por exemplo, basta digitar **S = (a*b*sen(Ângulo(A,C,B)))/2**. Depois, oriente os alunos a selecionar a ferramenta **Área**, clicar na região interna do triângulo e comparar os resultados. Outras maneiras de calcular a área desse triângulo consistem em digitar **S = (a*c*sen(Ângulo(C,B,A)))/2** e **S = (b*c*sen(Ângulo(B,A,C)))/2** na **Janela de Álgebra**.

- Se julgar conveniente, trabalhe *on-line* com os alunos a tarefa de alterar as medidas de dois triângulos que compartilham do mesmo ângulo para verificar o que acontece com os valores do seno, cosseno e tangente. Disponível em: <https://www.geogebra.

org/m/GPnb5U5Z>. Acesso em: 17 ago. 2020. Nessa tarefa, por meio dos questionamentos feitos no próprio *site*, os alunos são levados a efetuar as mudanças indicadas e verificar os valores obtidos.

Páginas 52 e 53 **Saiba mais**

Planejamento individual e coletivo

A abordagem de temas contextualizados, como o escolhido para essa seção, visa integrar conceitos estudados no capítulo com aqueles explorados em outras áreas do conhecimento, nesse caso, preferencialmente, com o componente curricular **Física**. Partindo de informações históricas acerca das pesquisas e descobertas relacionadas ao Sistema Solar, mais especificamente sobre a teoria heliocêntrica proposta por Nicolau Copérnico, chegou-se a uma maneira de calcular a distância entre Mercúrio e o Sol em função da distância entre a Terra e o Sol, utilizando um triângulo retângulo de referência e a razão trigonométrica seno.

- Como sugestão de trabalho com essa seção, uma possibilidade é escolher alguns alunos e pedir a cada um deles que, na sua vez, leia em voz alta um parágrafo do texto. Durante a leitura, procure sanar as dúvidas que porventura surgirem e, ao término, realize em voz alta algumas perguntas. Veja algumas sugestões.
  - De acordo com a teoria do Universo apresentada por Copérnico, é possível determinar a distância entre o Sol e qualquer outro planeta?
  - Quais outros planetas do Universo vocês conhecem?
  - A mesma teoria poderia ser aplicada para determinar a distância entre esse planeta e sua estrela correspondente?

Para aprofundar

Por falar no Sistema Solar, você já imaginou navegar por ele em um modelo interativo, 3D e *on-line*? No endereço eletrônico (em inglês) abaixo, arraste e aproxime a tela para visualizar o Sol, a Lua e os planetas em órbita.

SOLAR SYSTEM SCOPE. Disponível em: <https://www.solarsystemscope.com/>. Acesso em: 9 ago. 2020.

Por falar em Astronomia, navegue pela superfície da Lua em outro modelo interativo e 3D, visualizando, por exemplo, a verdadeira aparência do Sol. Acesse o endereço eletrônico a seguir e navegue pela superfície da Lua.

SUPERVIZ. *Superfície Lunar*. Disponível em: <https://web.superviz.com/projects/207c9489-ae3a-4ac0-bdae-06ac73a43d6d>. Acesso em: 9 ago. 2020.

Qual é a importância de se realizar medidas? O texto indicado a seguir traz várias situações contextualizadas, tarefas e curiosidades a respeito do tema.

GOMES, Nerli Aparecida. *Medir para quê?* Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/668-2.pdf>. Acesso em: 9 abr. 2020.

Páginas 54 e 55 **Conectando ideias**

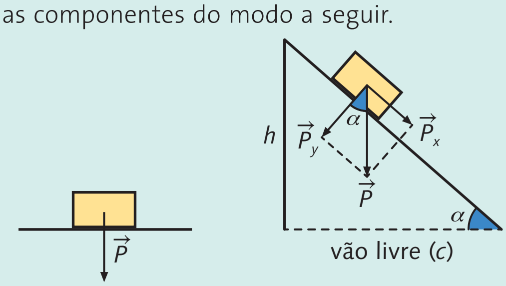
- Nessa seção, encontram-se informações sobre ajustes na construção de um telhado, relacionados à sua inclinação e ao tipo de telha a ser utilizado. Nesse caso, são necessários cálculos envolvendo trigonometria no momento da construção, pois deve-se avaliar a massa que a estrutura vai suportar, considerando a massa das telhas e de outros materiais que possam ser adicionados, como água ou neve.

  Peça aos alunos que leiam as informações e que respondam individualmente às questões propostas. Ao terminarem, promova uma discussão com base nas respostas dadas por eles.

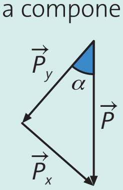
  Veja, a seguir, algumas perguntas que podem ser feitas para complementar o trabalho com a seção.
  - A que assunto se refere as informações apresentadas?
  - De acordo com a tabela com diferentes tipos de inclinação, que tipo de telha você aconselharia uma pessoa a comprar, sabendo que ela mora em um lugar onde neva?

Planejamento individual e coletivo

Comente com os alunos que, quanto mais inclinada a estrutura, menos peso ela vai suportar. Para compreender essa situação, deve-se recorrer ao estudo da decomposição de vetores, realizado mais especificamente pelo componente curricular **Física**. Utilizando o peso P de uma telha, por exemplo, o vetor relacionado pode ser decomposto em duas componentes do modo a seguir.



Quando um vetor é decomposto, ele e suas componentes sempre vão formar um triângulo retângulo. Logo, o valor de cada componente pode ser dado por:



Ilustrações: Rafael L. Gaion

$$\text{sen } \alpha = \frac{P_x}{P} \Rightarrow P_x = P \cdot \text{sen } \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{P_y}{P} \Rightarrow P_y = P \cdot \cos \alpha$$

Note que, aumentando o vão livre e a medida h, maior será a porcentagem de inclinação, aumentando, assim, o valor da componente $\vec{P}_x$.

CAPÍTULO 2

Funções trigonométricas

Páginas 56 e 57

- Antes de iniciar os estudos relacionados à trigonometria, permita aos alunos que leiam individualmente as informações apresentadas e incentive-os a responder, em grupos de dois ou três integrantes, às questões propostas. Em seguida, pode-se iniciar uma discussão a respeito do assunto apresentado comentando as respostas dessas questões, além de apresentar outras que podem ser relevantes. Veja algumas sugestões.
  - Qual é o principal assunto abordado nessas páginas?
  - O que você sabe sobre o processo de respiração?
  - O assunto abordado nessas páginas tem relação com quais áreas do conhecimento? Justifique sua resposta.
  - Qual é a relação do processo de respiração com a Matemática e a Biologia?

Planejamento individual e coletivo

Aos discutir essas questões, espera-se que os alunos percebam que a **Matemática** pode ser utilizada para compreender e representar informações de outros componentes curriculares, como a **Biologia**. Nesse caso, procurou-se estabelecer a relação entre trigonometria e respiração, por se tratar de um processo periódico.

Para complementar o assunto dessas páginas, comente que nosso corpo necessita de uma quantidade diária de energia para funcionar corretamente e para realizar outras atividades. Essa energia provém de processos celulares, como a respiração celular, representada pela seguinte equação química:

$$\overbrace{C_6H_{12}O_6}^{\text{glicose adquirida na alimentação}} + \underbrace{6O_2}_{\text{gás oxigênio adquirido na respiração}} \rightarrow \overbrace{6CO_2}^{\text{gás carbônico}} + \underbrace{6H_2O}_{\text{água}} + \text{energia}$$

Note que a utilização do gás oxigênio e a liberação de gás carbônico ocorrem em uma reação celular. Sendo assim, o processo respiratório consiste em todas as trocas gasosas que ocorrem no corpo. Isso inclui trocas entre o meio externo e o pulmão, entre o pulmão e o sangue e entre o sangue e as células.

Por conta disso, o processo respiratório depende de dois sistemas que agem em conjunto:

- sistema respiratório: realiza a captação do gás oxigênio e a eliminação do gás carbônico.
- sistema circulatório: responsável pelo transporte e troca dos gases entre o sistema respiratório e as células.

Fonte de pesquisa: HOPSON, Janet; WESSELLS, Norman. *Essentials of Biology*. 5. ed. New York: McGraw-Hill, 1990.

Metodologias e estratégias ativas

Com relação aos movimentos realizados durante a respiração, com o passar do tempo é comum o ser humano adquirir o hábito da chamada respiração torácica, não utilizando o diafragma corretamente. O resultado é uma respiração acelerada, curta e pobre em oxigenação, diferente da respiração diafragmática, lenta e eficiente, observada mais em crianças, pelo movimento do abdome. Para explorar a seção **Você cidadão**, oriente os alunos a elaborar, em grupos, uma pesquisa a respeito da importância de respirar de maneira correta, registrando os dados conforme orienta a metodologia ativa **Seminários**. Nesse caso, instigue-os a relacionar as informações obtidas com a Matemática. Para a apresentação, uma possibilidade é que os alunos elaborem cartazes com as principais informações obtidas com a pesquisa, ou ainda, se for possível, que produzam *slides* para serem exibidos em projetores.

Página 58

- O conteúdo dessa página é introduzido dando ênfase à história da Matemática, com o objetivo de levar os alunos a compreenderem a importância do desenvolvimento da trigonometria e o motivo pelo qual essa parte da Matemática interessou muitos estudiosos da Antiguidade.
- Diga aos alunos que, nesse capítulo, eles estudarão as funções trigonométricas seno e cosseno. Objeto de estudo da trigonometria, essas funções são utilizadas, entre outras situações, para representar fenômenos naturais periódicos, como a duração do dia durante o ano e o movimento das marés. Nesse momento, escreva na lousa a expressão $h(x) = A + B \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{365}\right)$ e diga-lhes que, com base nela, é possível obter a duração aproximada do dia ao longo do ano, para certa localidade. Nessa expressão, diga aos alunos que h representa a quantidade de horas da duração do

dia de uma localidade em certa data, em função do número x de dias passados de 21 de março (equinócio). Já os coeficientes A e B dependem da duração do dia nos solstícios de verão e inverno naquela localidade. Peça-lhes que observem a expressão e verifiquem que a relação seno está presente na fórmula. Comente com os alunos que na seção **Saiba mais**, ao final do capítulo, serão apresentadas mais informações sobre esse assunto.

- Auxilie os alunos na compreensão do texto. Para isso, faça algumas perguntas em voz alta, como:
  - Por que o grego Hiparco é considerado o pai da trigonometria?
  - Quais foram as contribuições de Hiparco para a Matemática, principalmente na trigonometria?
  - As funções trigonométricas seno e cosseno são utilizadas para o cálculo de quais situações?

Deixe que os alunos expressem suas opiniões nas respostas às perguntas sugeridas, orientando-os e esclarecendo as dúvidas acerca do assunto.

Para aprofundar

Leia mais a respeito da história da trigonometria nesse artigo que apresenta a contribuição dos hindus, dos árabes e dos persas.

COSTA, Nielce M. Lobo da. *A história da trigonometria*. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/modulo5/mod3_pdf/historia_triogono.pdf>. Acesso em: 17 ago. 2020.

Você conhece a relação entre as funções trigonométricas e os sons musicais? Compreenda a respeito das escalas musicais pitagórica e temperada acessando o *link* abaixo.

A MATEMÁTICA E OS SONS MUSICAIS. *A trigonometria relacionada aos sons musicais e suas implicações na matemática*. Disponível em: <https://matematicaesonsmusicais.wordpress.com/2015/04/07/a-trigonometria-realacionada-aos-sons-musicais-e-suas-implicacoes-na-matematica/>. Acesso em: 17 ago. 2020.

Conversando

- Após o trabalho com as questões, comente com os alunos que a trigonometria contribui como instrumento, auxiliando nos estudos de navegação e agrimensura, Topografia, Física, Música, Eletrotécnica, entre outros.

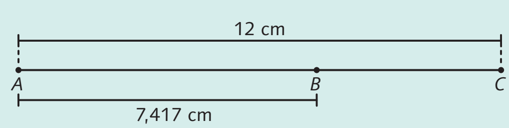
Página 71

Planejamento individual e coletivo

Na tarefa **18**, o gênero textual utilizado permite fazer uma relação com o componente curricular **Língua Portuguesa**. No caso, para responder às questões propostas, é necessário ler e interpretar o quadrinho apresentado e conhecer os conceitos acerca de ângulos. Espera-se, então, que a utilização desse recurso funcione como um incentivo à leitura, interpretação e produção escrita, além de contribuir para o aprofundamento dos conhecimentos desenvolvidos pelos alunos durante o estudo do capítulo.

- Se julgar necessário, peça aos alunos que realizem uma pesquisa acerca do retângulo áureo apresentado na tarefa **22**. Depois, peça que a apresentem aos colegas da turma ou, então, complemente essa tarefa com as informações apresentadas a seguir.

A proporção áurea é muito popular desde a época da Antiguidade e ficou conhecida como divina proporção, nome dado apenas na Idade Moderna pelo matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630). Muitos anos antes de ela ser batizada, o matemático grego Euclides descreveu em uma de suas obras que essa proporção ocorre quando um segmento de reta é dividido em média e extrema razão. Para compreender o significado dessa afirmação, considere um segmento de reta AC e um ponto B sobre ele.



Ronaldo Inácio

O ponto B divide o segmento de reta AC em média e extrema razão se a seguinte proporção for observada:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

Como as relações $\frac{AC}{AB} = \frac{12}{7{,}417} \simeq 1{,}618$ e $\frac{AB}{BC} = \frac{7{,}417}{4{,}583} \simeq 1{,}618$ são válidas, chama-se o ponto B de "seção áurea" ou "divisão áurea" de AC. A razão $\frac{AC}{AB}$ ou $\frac{AB}{BC}$ é chamada "razão áurea" ou "razão de ouro", valendo, aproximadamente, 1,618.

Essa proporção é encontrada em diversos elementos da natureza, como folhas e galhos de vegetais. Uma figura geométrica feita sob a divina proporção, chamada retângulo áureo, passou a exercer uma atração estética agradável aos olhos, sendo, por isso, utilizada em esculturas, quadros, livros e construções. A verificação dessa proporção no corpo humano definiu a chamada beleza esteticamente harmônica.

Para aprofundar

Acesse o endereço eletrônico a seguir para obter mais informações a respeito da proporção áurea.

MARTINS, Patricia Camara. *O número de ouro e a divina proporção*. Disponível em: <http://projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxiisam/artigos/20.pdf>. Acesso em: 17 ago. 2020.

Página 75

- Veja a seguir outra maneira de resolver o item **b** da tarefa **R9**.

  Convertemos em graus a medida em radianos:

  $$-\frac{10\pi}{3} = -\frac{10 \cdot 180°}{3} = -600°$$

  Dividindo 600° por 360°, obtemos:

  $$600 = 360 \cdot 1 + 240$$

  Sendo assim:

  $$-600° = -240° - \underset{k}{1} \cdot 360°$$

  A 1ª determinação positiva é dada por:

  $$-240° + 360° = 120°$$

  Convertendo 120° em radianos, obtemos $\frac{2\pi}{3}$ rad. Portanto, o arco tem uma volta completa em sentido horário, 1ª determinação positiva $\frac{2\pi}{3}$ e a expressão geral é $\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Página 76

- Durante a realização da tarefa **33**, aproveite a oportunidade e pergunte aos alunos o que significa um polígono inscrito e um polígono circunscrito em uma circunferência.

  Se algum aluno souber e quiser explicar, sugira que demonstre com desenhos na lousa. Caso ninguém saiba, desenhe na lousa um polígono inscrito e outro circunscrito e faça as perguntas a seguir.

  - Qual desses polígonos está inscrito e qual está circunscrito à circunferência?
  - Quais são as diferenças entre eles?

  Com essa abordagem, os alunos terão a oportunidade de perceber que um polígono está inscrito em uma circunferência se cada vértice é um ponto da circunferência, e que um polígono está circunscrito a uma circunferência quando possui seus lados tangentes à circunferência.

  Peça aos alunos que formem duplas e resolvam a tarefa e, se julgar conveniente, peça-lhes que resolvam também, em grupo, a tarefa **39**.

Página 82

Avaliação

Ao final da seção **Problemas e exercícios resolvidos**, se julgar necessário, utilize a tarefa a seguir para avaliar o conhecimento desenvolvido até o momento pelos alunos.

Simplifique a expressão:

$$\frac{\text{sen}\,\frac{8\pi}{6} + \text{tg}\,\frac{21\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{3}}{\cos\frac{2\pi}{3}}$$

Resolução

Inicialmente, calculamos o valor da razão trigonométrica reduzindo cada arco da expressão ao 1º quadrante.

Como $\frac{8\pi}{6}$ está no 3º quadrante, temos:

$$\text{sen}\,\frac{8\pi}{6} = -\text{sen}\left(\frac{8\pi}{6} - \pi\right) = -\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $\frac{21\pi}{12}$ está no 4º quadrante, temos:

$$\text{tg}\,\frac{21\pi}{12} = -\text{tg}\left(2\pi - \frac{21\pi}{12}\right) = -\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = -1$$

Como $\frac{5\pi}{3}$ está no 4º quadrante, temos:

$$\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Como $\frac{2\pi}{3}$ está no 2º quadrante, temos:

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Agora, substituímos os valores na expressão e obtemos o resultado:

$$\frac{\text{sen}\,\frac{8\pi}{6} + \text{tg}\,\frac{21\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{3}}{\cos\frac{2\pi}{3}} =$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} + 3$$

Página 83

- Ao trabalhar a tarefa **46** com os alunos, alerte-os para que fiquem atentos aos sentidos horário e anti-horário dos giros que podem ser realizados no disco do cofre e pergunte se eles entenderam a observação apresentada na tarefa. Se necessário, explique dizendo que, girando o disco no sentido horário, por exemplo, da posição I até a II, o ângulo correspondente terá a mesma medida do ângulo correspondente ao giro do disco no sentido horário da posição II até a III, da mesma maneira que da posição III até a IV nesse mesmo sentido, e assim por diante.

  Ao terminarem de resolver a tarefa, se julgar conveniente, peça a cada um deles que escolha cinco movimentos diferentes dos apresentados no item **c** e, depois, dê para algum colega resolver os itens **a** e **b** relativos aos novos movimentos escolhidos. Em seguida, eles devem verificar se as resoluções estão corretas.

Página 84

BNCC

O assunto dessa página permite desenvolver nos alunos a habilidade **EM13MAT306** no que diz respeito ao trabalho com problemas envolvendo o contexto das fases da Lua, nesse caso relacionado ao movimento das marés, na Terra. Nesse momento, verifique se os alunos reconhecem fenômenos desse tipo como periódicos, ou seja, contendo movimentos cíclicos, os quais podem ser descritos por meio de funções trigonométricas.

O trabalho com esse e outros contextos colabora para o desenvolvimento da **Competência geral 2**. Ao associar a ocorrência das marés com as posições relativas entre a Terra, a Lua e o Sol, e descrever o movimento de uma maré por meio de uma função trigonométrica, os alunos podem desenvolver curiosidade e interesse na compreensão desses movimentos na natureza e em suas análises matemáticas.

- Se julgar conveniente, combine uma visita guiada a um planetário da cidade ou região. Se não houver um planetário na região ou se não for possível realizar a visita, proponha aos alunos que pesquisem na internet informações sobre os movimentos periódicos dos astros.

Página 90

Planejamento individual e coletivo

A tarefa **56** permite estabelecer relação entre os conceitos de função do tipo trigonométrica estudados no capítulo e assuntos relacionados à gravitação universal, os quais são, preferencialmente, abordados pelo componente curricular **Física**. Nesse caso, a função *g* foi necessária para compreender e representar a variação periódica do valor da aceleração da gravidade devido à variação da latitude do local. Com isso, espera-se que os alunos usem os conhecimentos matemáticos desenvolvidos, relacionando-os com a interação gravitacional e o movimento de queda livre.

Diga-lhes que a teoria da gravitação universal foi sistematizada pelo inglês Isaac Newton (1642-1727) e apresenta a força de atração entre corpos devido às suas massas, chamada interação gravitacional. Como exemplo, cite a maré alta e a maré baixa, assuntos apresentados na página **84**, efeitos resultantes dessa atração.

Desprezando as forças de resistência, essa interação faz com que um objeto em queda, próximo à superfície de um planeta, execute um movimento uniformemente variado, com aceleração constante igual à aceleração da gravidade no local.

O valor dessa aceleração em determinado local depende da constante gravitacional, da massa do planeta e da distância desse local ao centro do planeta, considerando-o com formato esférico, o que não é o caso da tarefa **56**, pois a dependência do valor da gravidade com a latitude ocorre devido ao formato irregular do planeta.

Página 94

- Se julgar conveniente, para a tarefa **57**, reproduza e entregue aos alunos os planos cartesianos que se encontram nas páginas para reprodução desta Assessoria pedagógica.

Páginas 96 e 97 Acesso digital

- Nessa seção, foi utilizada a versão 6.0.851.0 do GeoGebra, o mesmo apresentado na página **209**.

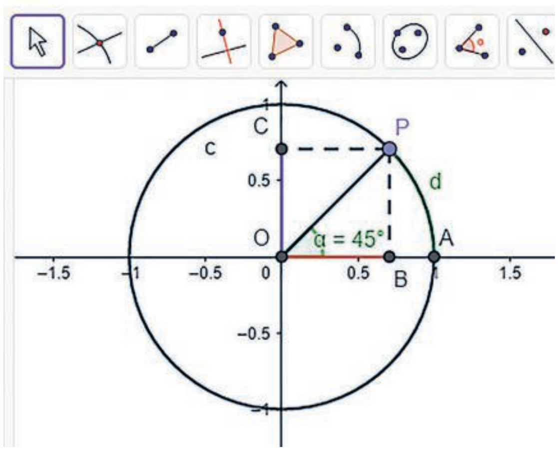
Após trabalhar com os alunos os passos apresentados, oriente-os a clicar com o botão direito do *mouse* sobre algum(ns) do(s) controle(s) deslizante(s) e marcar a opção **Animação** para verificar o que acontece. Com isso, os valores correspondentes se alteram automaticamente, criando uma animação. Uma possibilidade interessante é instigar os alunos a elaborar uma animação que simule os movimentos de uma onda do mar, escolhendo alguns valores correspondentes para os coeficientes e animando alguns deles. Nesse caso, para colorir de azul a região abaixo do gráfico da função, oriente os alunos a digitar a expressão **y < f(x)** na **Janela de Álgebra** e, após isso, clicar com o botão direito do *mouse* na região demarcada para abrir as **Configurações** e selecionar a cor desejada.

Outra maneira de determinar os valores de máximo e mínimo de uma função é utilizar os comandos **Máximo(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)** e **Mínimo(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)**, digitando as expressões correspondentes na **Janela de Álgebra**. No caso dessa construção, basta digitarmos, por exemplo, **Máximo(f, 0, 10)** e **Mínimo(f, 0, 10)**. Note que o intervalo correspondente aos valores de *x* inicial e final deve corresponder a um intervalo maior do que o período da função.

Para determinar o período de uma função inserida no GeoGebra, uma possibilidade é utilizar a ferramenta **Interseção de Dois Objetos** e clicar nas regiões correspondentes a duas interseções consecutivas entre o gráfico da função e o eixo *x*, marcando os pontos *A* e *B*, por exemplo. Após isso, basta utilizarmos a ferramenta **Distância**, **Comprimento** ou **Perímetro** e clicar sobre esses dois pontos ou, ainda, por meio da ferramenta **Segmento**, para verificar o comprimento AB correspondente ao período da função. Para verificar o resultado obtido, oriente os alunos a digitar a expressão **p = (2*pi)/abs(c)** na **Janela de Álgebra**, correspondente à fórmula $p = \frac{2\pi}{|c|}$, com "pi" representando o número π e "abs" o comando do GeoGebra para calcular o módulo de alguma expressão.

- Se julgar conveniente, aproveite a oportunidade para realizar outras construções no GeoGebra com os alunos, como a construção que sugerimos a seguir.

A circunferência trigonométrica



Com a construção no GeoGebra da circunferência trigonométrica, será possível calcular, por meio dele, os valores de seno, cosseno e tangente e diversos ângulos em graus. Para isso, oriente os alunos a seguir os seguintes passos.

- Com a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**, marque o ponto $(0, 0)$, correspondente à interseção entre os eixos x e y, e o renomeie para O.
- Com a ferramenta **Círculo dados Centro e Raio**, clique em O e, na janela que vai aparecer, insira o valor 1 no campo correspondente ao **Raio**. Com isso, será construída uma circunferência de nome c.
- Novamente com a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**, clique sobre a região correspondente ao ponto $(1, 0)$ para marcar um ponto A.
- Agora, com a ferramenta **Ponto**, marque um ponto qualquer, de nome P, sobre a circunferência c.
- Selecione a ferramenta **Ângulo** e marque o ângulo $A\hat{O}P$, de medida α. Depois, marque o segmento OP com a ferramenta **Segmento**.
- Com a ferramenta **Arco Circular**, clique em O, A e P, nessa ordem, marcando um arco d. Em seguida, clique com o botão direito do *mouse* nesse arco, acesse as **Configurações** e, nas abas **Estilo** e **Cor**, altere a espessura e a cor desse arco para destacá-lo sobre a circunferência.
- Agora, iniciaremos a construção dos segmentos correspondentes ao seno e ao cosseno do ângulo α. Para isso, selecione a ferramenta **Reta Perpendicular**, clique sobre P e o eixo x e, em seguida, sobre P e o eixo y.
- Com a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**, marque a interseção B entre uma das retas e o eixo x, e a interseção C entre a outra reta e o eixo y. Após isso, clique com o botão direito do *mouse* em cada uma dessas retas e desmarque a opção **Exibir Objeto**, para que a imagem final não fique poluída.
- Com a ferramenta **Segmento**, construa os segmentos OB e OC, clicando, respectivamente, em O e B e, depois, em O e C. Após isso, altere a espessura e a cor deles conforme já orientado, a fim de destacá-los.
- Ainda com a ferramenta **Segmento**, construa os segmentos PB e PC, deixando-os, após isso, no estilo tracejado. Para isso, acesse a aba **Estilo** nas **Configurações**.
- Depois, basta movimentar o ponto P ao longo da circunferência para verificar os valores de seno (OC) e cosseno (OB) do ângulo α. Para verificar os sinais de seno e cosseno em cada quadrante, conforme estudado, clique com o botão direito do *mouse* sobre o ponto P e marque a opção **Animação**.

Páginas 98 e 99 Saiba mais

BNCC

O tema abordado nessa seção permite estabelecer uma relação entre os componentes curriculares **Matemática** e, preferencialmente, **Física**, uma vez que aborda os conceitos de funções do tipo trigonométricas e assuntos relacionados à Terra e ao Sistema Solar. Nesse caso, uma função seno foi necessária para compreender e representar a quantidade de horas em que um dia é iluminado pela luz do Sol, o que ocorre dependendo das fases da Lua. Esse contexto contempla parte da habilidade **EM13MAT306** da BNCC pois há relação com as fases da Lua. Com isso, os alunos devem fazer uso de conhecimentos desenvolvidos durante o estudo do capítulo e integrá-los com conceitos relacionados à duração do dia e da noite, com estações do ano e com as datas em que elas ocorrem.

Aproveite esse tema para estabelecer uma relação com a **Competência específica 2** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**: "Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis", e, mais especificamente, com a habilidade **EM13CNT204**: "Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros)”.

Uma sugestão para explorar esse tema é reunir os alunos em grupos de três integrantes, orientando-os a ler o texto e, posteriormente, anotar as dúvidas que porventura surgirem. Ao término da leitura, verifique se eles compreenderam o infográfico. Veja a seguir algumas sugestões de perguntas que podem ser feitas nesse momento.

- O que significa solstício? E equinócio?
- Qual é o intervalo aproximado de dias entre o solstício de 21 de junho e o equinócio de 23 de setembro?
- O equinócio de 21 de março dá início a qual estação do ano no Hemisfério Sul?
- O verão no Hemisfério Sul tem início a partir de qual data do ano, aproximadamente?

Essa seção também está relacionada com a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, pois permite que os alunos utilizem conceitos e definições para resolver problemas de seu cotidiano, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

- Como sugestão para complementar o item **c** dessa seção, considere a mesma cidade do texto e peça aos alunos que obtenham a duração do dia correspondente a alguma outra data.

Páginas 100 e 101 **Conectando ideias**

BNCC

Nessa seção, procurou-se fazer uma relação entre os componentes curriculares **Matemática** e, preferencialmente, **Física**, abordando o conceito de gráficos de funções do tipo trigonométricas, estudados no capítulo, e assuntos relacionados ao som, imagens e informações obtidas com base neles. Nesse caso, esses gráficos representam a forma de propagação das ondas ultrassônicas, contemplando a habilidade **EM13MAT306** com relação ao contexto envolvendo ondas sonoras. Com isso, espera-se que os alunos se familiarizem com a utilização dessas ondas em exames médicos com formação de imagens enquanto fazem uso dos conhecimentos desenvolvidos durante o estudo do capítulo.

- Nessa seção, é explorada a propagação ultrassônica, mais especificamente a emissão de ultrassons em um equipamento de ultrassonografia. A fim de verificar a compreensão dos alunos acerca das informações apresentadas, peça-lhes que, antes de responderem às perguntas propostas, respondam, no caderno, às questões a seguir.
  - Do que tratam as informações apresentadas?
  - Explique o funcionamento da ultrassonografia.
  - Por que o texto alega que a ultrassonografia permite fazer investigações no interior do corpo humano de maneira não invasiva?
  - O que é transdutor? Como ele funciona?
  - Para que é utilizado gel/vaselina?
  - Como a imagem é formada na tela da máquina?
  - Que tipo de função representa a propagação de uma onda sonora?
- Quando os alunos terminarem de responder, promova um debate com base nas respostas dadas. Caso tenham dúvidas, procure saná-las usando trechos da própria seção, como o trecho em que está escrito que parte dos ultrassons é refratada, ou seja, desviada de sua direção inicial.

  Espera-se que os alunos respondam que o tipo de função associada aos gráficos é a do tipo trigonométrica, e que a relação entre o assunto e o conteúdo está no fato de que o som se propaga por meio de vibrações periódicas, podendo ser representadas por funções do tipo trigonométricas.
- Diga aos alunos que a ultrassonografia vem passando por inúmeras modernizações, tornando-se um exame cada vez mais abrangente e rico em resultados.

  O ultrassom tradicional, chamado obstétrico, é o mais comum, realizado várias vezes durante uma gestação. Por meio dele, avalia-se o crescimento do feto, a placenta, a quantidade de líquido amniótico, entre outros fatores. Existem outros exames, entre eles o chamado ultrassom morfológico, realizado em períodos específicos, capaz de fornecer informações detalhadas com relação a síndromes, malformações e outros tipos de doenças ou problemas. Esses exames transformaram o feto em um verdadeiro paciente, pois, além de serem capazes de detectar 96% dos problemas congênitos, inclusive a Síndrome de Down e problemas cardíacos, tornam possível tratar muitos deles ainda na fase de gestação, em alguns casos, até mesmo submetendo a criança a uma intervenção cirúrgica intrauterina.

  Outra importante evolução desse exame foi o surgimento do ultrassom 3D. Nele, é formada uma imagem tridimensional que permite observar a face e as expressões do feto, ou até mesmo assistir aos movimentos realizados por ele em tempo real, nos exames em 4D. Dependendo da época em que o exame é realizado e da posição do bebê, é possível formar uma imagem de muita qualidade.

CAPÍTULO 3

Relações, equações e transformações trigonométricas

Páginas 102 e 103

- Antes de introduzir o estudo das relações, equações e transformações trigonométricas, leia com os alunos as informações apresentadas nessas páginas e solicite a eles que analisem as imagens e respondam às questões propostas. Após a leitura, promova uma discussão sobre o que entenderam do tema. Em seguida, dialogue com eles sobre os itens **a** e **b** e peça que resolvam o item **c** no caderno. Durante essa resolução, aproveite para retomar, se necessário, as relações métricas no triângulo retângulo.
- Sobre os itens **a** e **b**, comente com os alunos que existem outras construções no mundo que se tornaram conhecidas por apresentarem uma inclinação em sua estrutura, fugindo, assim, do padrão tradicional: perpendicular ao solo. Em alguns casos, essa inclinação surgiu devido a problemas durante a construção ou ao solo não favorável (úmido, arenoso, argiloso, por exemplo); em outros, trata-se de uma opção inovadora de engenheiros e arquitetos.

Metodologias e estratégias ativas

Solicite aos alunos que pesquisem na internet alguns casos de construções que apresentam inclinação em sua estrutura, registrando os dados em cartazes contendo imagens e as principais informações obtidas. Para isso, utilize a metodologia ativa **Seminários** e oriente os alunos a formarem grupos de três a quatro integrantes para a realização da pesquisa. Peça-lhes que, ao registrar os dados da pesquisa, se atentem e deem destaque para as informações matemáticas que descrevem a construção e sua inclinação. Veja a seguir alguns exemplos de construções que podem ser pesquisadas por eles.

- Torre de Nevyansk (Rússia): existem inúmeras lendas sobre essa torre, pois não se sabe ao certo se ela foi construída dessa maneira propositalmente ou se ocorreu algum defeito. Atualmente, ela tem uma inclinação de 2,2 m.
- Torre de Torún (Polônia): a instabilidade do solo e o fato de ter sido construída inicialmente sem uma de suas quatro paredes facilitaram a inclinação, que nos dias atuais é 1,46 m.
- Prédios na praia de Santos (São Paulo): vários edifícios construídos na orla da praia de Santos, no estado de São Paulo, adquiriram inclinações que variam de 0,5 m a aproximadamente 2 m, devido, principalmente, às camadas de areia e argila que compõem o solo e também ao excesso de construções.
- Torres Puerta de Europa (Madri, Espanha): projeto pós-moderno composto por duas torres gêmeas com cerca de 15° de inclinação.
- Edifício Strandkanten (Tromso, Noruega): edifício residencial com um inovador projeto inclinado.

Página 104

- Ao introduzir o conteúdo desse capítulo, auxilie os alunos a interpretar a imagem que apresenta informações sobre a torre de Pisa. Uma sugestão de trabalho é pedir a eles que, em duplas, leiam e conversem sobre as informações apresentadas, anotando as dúvidas que surgirem. Ao término da leitura, promova uma conversa envolvendo toda a turma, procurando sanar com eles as possíveis dúvidas.

  Em seguida, apresente a eles as questões do final da página, destacando que elas serão respondidas à medida que forem avançando os estudos do capítulo.

Página 107

- Para complementar o assunto abordado na tarefa **7**, diga aos alunos que o aeromodelismo é uma prática realizada por várias pessoas e consiste em manipular ou manobrar aeromodelos (modelos ou miniaturas de aeronaves) para fins experimentais, esportivos ou recreativos. Uma das categorias do aeromodelismo consiste na manipulação de um aeromodelo por meio de um rádio de controle remoto.
- No item **c** dessa tarefa, os alunos devem determinar a altura atingida pelo avião com base na posição indicada. Assim, eles precisam ficar atentos ao determinar uma altura que satisfaça às condições da tarefa, lembrando que, na imagem, o avião já está a certa altura do solo.

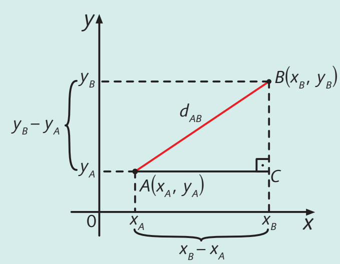
  Ao final, pergunte aos alunos se as resoluções obtidas pelos colegas estão corretas. Caso não estejam, verifique com eles quais foram os erros cometidos, anotando os dados na lousa. Nos casos em que a resolução estiver correta, solicite aos alunos que apresentem algumas delas na lousa.

> ***Para aprofundar***
>
> Para obter mais informações sobre o aeromodelismo, bem como dicas e truques a respeito dessa prática, acesse o seguinte endereço eletrônico.
>
> COBRA. *Confederação Brasileira de Aeromodelismo*. Dicas e truques. Disponível em: <https://www.cobra.org.br/dicas-e-truques>. Acesso em: 21 ago. 2020.

Página 108

- Para deduzir as fórmulas que permitem calcular o seno, o cosseno e a tangente da soma e da diferença de arcos, é necessário, inicialmente, deduzir a fórmula que permite calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano.

Considere no plano cartesiano abaixo os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, de modo que $\overline{AB}$ não seja paralelo a nenhum dos eixos.



Note que a distância entre os pontos A e B corresponde ao comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo ABC.

De acordo com o teorema de Pitágoras, temos:

$$(d_{AB})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Utilizando essa fórmula, podemos calcular, por exemplo, a distância entre os pontos $A(1, 3)$ e $B(4, 9)$.

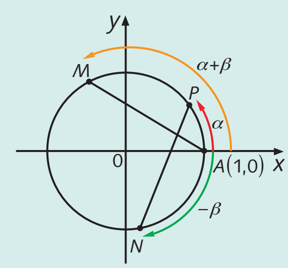
$$d_{AB} = \sqrt{(4-1)^2 + (9-3)^2} =$$

$$= \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

- Agora, veja como podemos deduzir a fórmula para calcular o seno, o cosseno e a tangente da soma e da diferença de arcos.

Cosseno da soma e da diferença

Sejam P, M e N extremidades de arcos associados, respectivamente, aos números α, $\alpha + \beta$ e $-\beta$.



Ilustrações: Ronaldo Inácio

São coordenadas desses pontos: $P(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, $M(\cos(\alpha+\beta), \operatorname{sen}(\alpha+\beta))$ e $N(\cos\beta, -\operatorname{sen}\beta)$.

Nesse ciclo, os arcos $\overset{\frown}{AM}$ e $\overset{\frown}{NP}$ têm o mesmo comprimento. Portanto, as cordas $\overline{AM}$ e $\overline{NP}$ têm comprimentos iguais, ou seja, $d_{AM} = d_{NP}$.

Utilizando a fórmula da distância entre dois pontos, temos:

$$d_{AM} = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{\left[1 - \cos(\alpha+\beta)\right]^2 + \left[0 - \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\right]^2} =$$

$$= \sqrt{1^2 - 2 \cdot \cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)} = \sqrt{2 - 2 \cdot \cos(\alpha+\beta)}$$

$$d_{NP} = \sqrt{(x_P - x_N)^2 + (y_P - y_N)^2} =$$

$$= \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + \left[\operatorname{sen}\alpha - (-\operatorname{sen}\beta)\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\cos^2\alpha - 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha + 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta} =$$

$$= \sqrt{2 - 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}$$

de $d_{AM} = d_{NP}$, segue que:

$$\sqrt{2 - 2 \cdot \cos(\alpha+\beta)} = \sqrt{2 - 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2 - 2 \cdot \cos(\alpha+\beta)}\right)^2 = \left(\sqrt{2 - 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2} - 2 \cdot \cos(\alpha+\beta) = \cancel{2} - 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Portanto, para o cálculo do **cosseno da soma de dois arcos**, vale a fórmula:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Podemos utilizar esse resultado para deduzir a fórmula do **cosseno da diferença entre dois arcos**.

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\left[\alpha + (-\beta)\right] =$

$= \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) - \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,(-\beta)$

Como a função cosseno é par e a função seno é ímpar, temos:

$\cos(-\beta) = \cos\beta$ e $\text{sen}(-\beta) = -\text{sen}\beta$

Portanto:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$$

Seno da soma e da diferença

Sabemos que:

$\text{sen}\,\alpha = \cos(90° - \alpha)$, ou seja, o seno de um ângulo é igual ao cosseno de seu complemento.

$\cos\alpha = \text{sen}(90° - \alpha)$, ou seja, o cosseno de um ângulo é igual ao seno de seu complemento.

Utilizando esses e outros resultados obtidos até o momento, podemos deduzir a fórmula que permite calcular o **seno da soma de dois arcos**.

$\text{sen}(\alpha + \beta) = \cos\left[90° - (\alpha + \beta)\right] =$

$= \cos\left[(90° - \alpha) - \beta\right] =$

$= \underbrace{\cos(90° - \alpha)}_{\text{sen}\,\alpha} \cdot \cos\beta + \underbrace{\text{sen}(90° - \alpha)}_{\cos\alpha} \cdot \text{sen}\beta =$

$= \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha$

Portanto:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha$$

Veja a seguir como deduzir a fórmula do **seno da diferença entre dois arcos**, aproveitando esse resultado.

$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\left[\alpha + (-\beta)\right] =$

$= \text{sen}\,\alpha \cdot \underbrace{\cos(-\beta)}_{\cos\beta} + \underbrace{\text{sen}(-\beta)}_{-\text{sen}\,\beta} \cdot \cos\alpha =$

$= \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha$

Portanto:

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha$$

Tangente da soma e da diferença

Vamos deduzir agora a fórmula da **tangente da soma de dois arcos**.

Sejam $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

$\text{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} =$

$= \dfrac{\text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta}$

Dividindo o numerador e o denominador por $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, temos:

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \dfrac{\text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \dfrac{\text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}} =$$

$$= \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}$$

Portanto:

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}$$

Com base nessa fórmula, podemos deduzir aquela que permite calcular a **tangente da diferença entre dois arcos**.

Sejam $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

$\text{tg}(\alpha - \beta) = \text{tg}\left[\alpha + (-\beta)\right] = \dfrac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}(-\beta)}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}(-\beta)}$

Como $\text{tg}(-\beta) = -\text{tg}\,\beta$, segue que:

$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}$$

Página 111

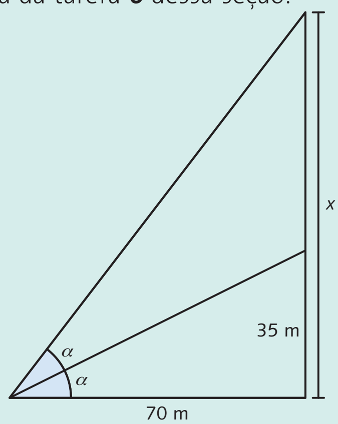
Planejamento individual e coletivo

O tema da tarefa **39** permite uma relação entre os conceitos de relações trigonométricas e assuntos relacionados às Artes visuais, abordados pelo componente curricular **Arte**. Nesse caso, as relações trigonométricas fundamentais e as fórmulas de transformação foram necessárias para compreender e representar informações acerca das inclinações de algumas construções. Assim, ao mesmo tempo que os alunos fazem uso dos conhecimentos desenvolvidos durante o estudo do capítulo, eles têm a oportunidade de criar familiaridade com a Arquitetura, uma das formas de manifestação da Arte na cultura.

Páginas 112 e 113 **Explorando problemas**

- O trabalho com essa seção permite o desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos ao resolver o problema proposto diante das etapas de compreender o problema, planejar uma possível estratégia de resolução, executar a resolução e, por último, verificar o resultado.

- Resposta da tarefa **6** dessa seção:



Página 114

- Para complementar o assunto abordado nessa página, diga aos alunos que o Sol da meia-noite é o nome dado a um fenômeno natural em que o Sol fica visível durante as 24 horas do dia. Ocorre no verão em regiões localizadas além dos círculos polares, tanto no Hemisfério Sul como no Norte. Ele é causado devido à inclinação do eixo da Terra em relação ao plano orbital em torno do Sol, o mesmo motivo que define as estações do ano, fazendo com que a região dos polos fique exposta ao Sol por 24 horas.

Página 117

Avaliação

Ao final da seção **Problemas e exercícios resolvidos**, se julgar necessário, utilize as seguintes tarefas para avaliar a compreensão dos alunos até o momento.

a Calcule o valor de x na equação $\text{tg}^2 x + 1 = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos x}$, com $x \in [0, 2\pi]$.

b Determine os valores de x para que ocorra $\text{tg}(2x) = \text{tg}\,\dfrac{\pi}{6}$, com $x \in \mathbb{R}$.

c Resolva as equações trigonométricas $\text{cossec}(3x) = 2\text{cotg}(3x)$ e $\sec x = 2$.

Resoluções

a Da relação trigonométrica $\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$, temos:

$$\text{tg}^2 x + 1 = \frac{\sqrt{2}}{\cos x} \Rightarrow \sec^2 x = \frac{\sqrt{2}}{\cos x} \Rightarrow$$

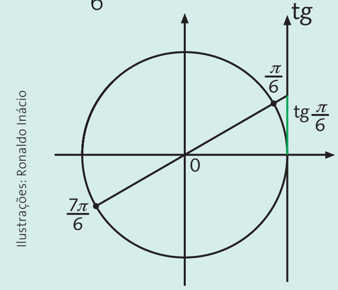
$$\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \sqrt{2} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para que $\cos x$ seja igual a $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, x deve ser igual a $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Como $x \in [0, 2\pi]$, temos $S = \left\{\dfrac{\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}\right\}$.

b Para que ocorra $\text{tg}(2x) = \text{tg}\,\dfrac{\pi}{6}$, é necessário que $2x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.



Assim:

$2x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}$ Portanto,

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c Para resolver a equação $\text{cossec}(3x) = 2\text{cotg}(3x)$, fazemos:

$$\text{cossec}(3x) = 2 \cdot \text{cotg}(3x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\text{sen}\,3x} = \frac{2 \cdot \cos 3x}{\text{sen}\,3x} \Rightarrow \cos 3x = \frac{1}{2}$$

Para que $\cos 3x$ seja igual a $\dfrac{1}{2}$, $3x$ deve ser igual a $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Segue que $3x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}$.

Portanto,

$S = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x = \pm\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Para resolver a equação $\sec x = 2$, fazemos:

$\sec x = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} = 2 \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}$

Para que ocorra $\cos x = \dfrac{1}{2}$, devemos ter $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Portanto,

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Página 118

BNCC

O assunto abordado na tarefa **49** permite uma relação com o tema contemporâneo transversal **Saúde**. Nesse momento, podem ser abordadas questões relacionadas à qualidade de vida e à conscientização das populações, tratadas, preferencialmente, pelo componente curricular **Biologia**. Nesse caso, as funções e as equações trigonométricas foram necessárias para compreender e representar informações relacionadas à variação periódica na quantidade de doadores de sangue em determinado local. Tarefas como essa, que envolvem situações relacionadas a fenômenos periódicos, procuram desenvolver a habilidade **EM13MAT306** e aspectos da **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, associando determinados fenômenos cíclicos às relações trigonométricas estudadas até o momento. Com isso, espera-se que os alunos façam uso dos conhecimentos desenvolvidos durante o capítulo na medida em que analisam as informações sobre doação de sangue.

- Após trabalhar com a tarefa **49**, explique aos alunos que uma pessoa deve respeitar o limite anual de doações de sangue em razão do intervalo de tempo necessário para o corpo executar a reposição. O sangue é formado de uma porção líquida e outra sólida.
  - Porção líquida (plasma): composta de 90% de água e de outros nutrientes dissolvidos, como proteínas, gases, enzimas, hormônios, dentre outros.
  - Porção sólida: composta por hemácias (glóbulos vermelhos; realizam o transporte dos gases pelo corpo), leucócitos (glóbulos brancos; auxiliam na defesa do corpo contra microrganismos) e plaquetas (fragmentos de células; participam da coagulação). Essas células sanguíneas são produzidas principalmente na medula óssea, presente no interior de alguns ossos do corpo humano.

  Quando uma quantidade de sangue é retirada no processo de doação, o corpo vai trabalhar na reposição exata dessa quantidade. O plasma sanguíneo é reposto em 24 horas. Por esse motivo, deve-se ingerir muita água após a doação. Já a porção sólida é reposta entre 4 e 6 semanas. Porém, o ferro que compõe a hemoglobina, pigmento presente nas hemácias, é retirado das reservas do corpo. Assim, para o estoque de ferro retornar ao nível anterior à doação, são necessários de 40 a 60 dias para os homens e de 50 a 90 dias para as mulheres.
- Ainda com relação à tarefa **49**, se julgar conveniente, peça aos alunos que pesquisem sobre os fatores que impedem definitivamente a doação de sangue, perguntando previamente se eles sabem quais são esses fatores ou quais eles acham que poderiam ser.

  Depois, diga a eles que não poderá doar sangue uma pessoa que, por exemplo:
  - colocou *piercing*, fez tatuagem, maquiagem definitiva ou tratamento com acupuntura nos últimos 12 meses;
  - é portadora do vírus da aids, HBV (vírus da hepatite B), HCV (vírus da hepatite C) ou HTLV (vírus que infecta os glóbulos brancos ligados ao sistema imunológico);
  - já viveu situações sexuais de alto risco;
  - possui histórico de doença hematológica (relacionada ao sangue), cardíaca, renal, pulmonar ou hepática;
  - apresente diabetes, hipertireoidismo, hanseníase, tuberculose, câncer, sangramento anormal, convulsão após os 2 anos de idade ou epilepsia, sífilis, doença de Chagas ou malária;
  - é usuária de drogas;
  - utiliza medicamentos contraindicados para doação de sangue;
  - tem anemia;
  - está grávida.

Fonte de pesquisa: MINISTÉRIO DA SAÚDE. *Doação de sangue*: como doar, quem pode doar, impedimentos. Disponível em: <http:// www.saude.gov.br/saude-de-a-z/doacao-de-sangue>. Acesso em: 21 ago. 2020.

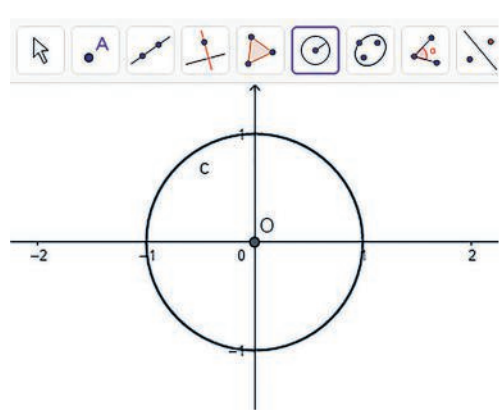
Página 119

- Após trabalhar as tarefas desse capítulo com os alunos, se julgar conveniente, leve-os ao laboratório de informática do colégio, caso haja algum disponível, para realizar as tarefas sugeridas a seguir por meio do *software* GeoGebra, envolvendo as relações trigonométricas estudadas até o momento.
- Para a elaboração das tarefas a seguir, foi utilizada a versão 6.0.851.0 do GeoGebra, vista na página **209**.

Construir ângulos genéricos

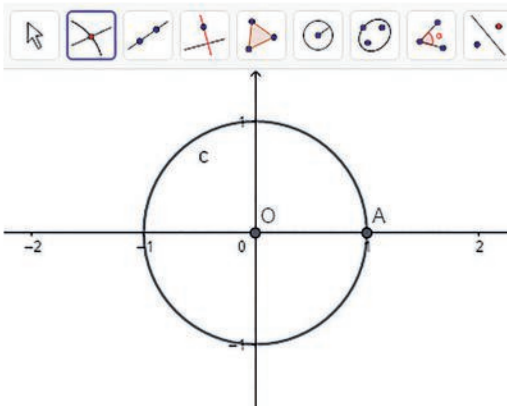
Ao longo do capítulo, foram utilizados vários ângulos escritos de maneira genérica para representar soluções de equações e, também, para representar exceções para algumas regras. Para a definição de cotangente, por exemplo, expressa por $\text{cotg}\ \alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\ \alpha}$, é dado que $\alpha \neq \dfrac{k\pi}{2}$, com k inteiro, ou seja, α é diferente de $\dfrac{\pi}{2}$ (ou seja, 90°) e de seus múltiplos, pois a tangente não existe nesses casos. Para verificar que a expressão $\alpha = \dfrac{k\pi}{2}$ corresponde aos ângulos múltiplos de 90°, oriente os alunos a realizar os passos a seguir.

1. Com a ferramenta **Círculo dados Centro e Raio**, construa uma circunferência de centro $O\ (\ 0, 0\ )$ e raio 1.



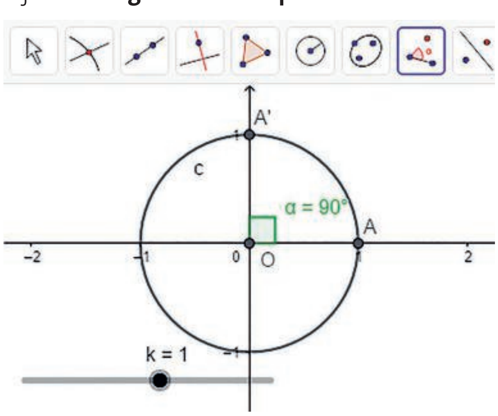
Reprodução/Geogebra/Markus Hohenwarter

2. Selecione a ferramenta **Interseção de Dois Objetos** e marque a interseção A entre a circunferência e o eixo x, no ponto $(1, 0)$.

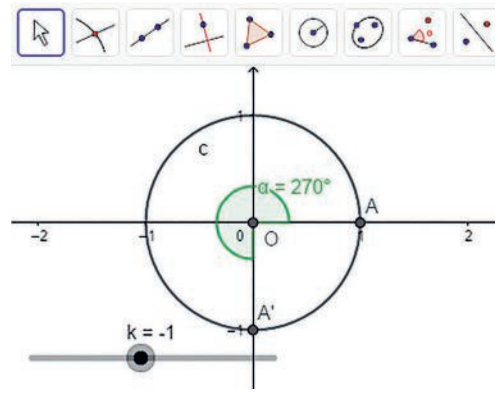


3. Utilize a ferramenta **Controle Deslizante** de nome k. Para isso, clique na **Janela de Visualização** e digite a letra k no campo **Nome**. Depois, clique nos intervalos mínimo e máximo e ajuste-os para -10 e 10, respectivamente. E, para configurar o incremento igual a 1, basta digitar **1** no campo **Passo**. Por fim, clique em **OK**.

4. Com a ferramenta **Ângulo com Amplitude Fixa**, clique em A e O, nessa ordem, e insira a expressão **(k*pi)/2**, correspondente a $\frac{k\pi}{2}$, na janela **Ângulo com Amplitude Fixa**.



5. Movimente o controle deslizante k e verifique que, independentemente de seu valor, que é um número inteiro, o ângulo construído é um múltiplo de 90°.

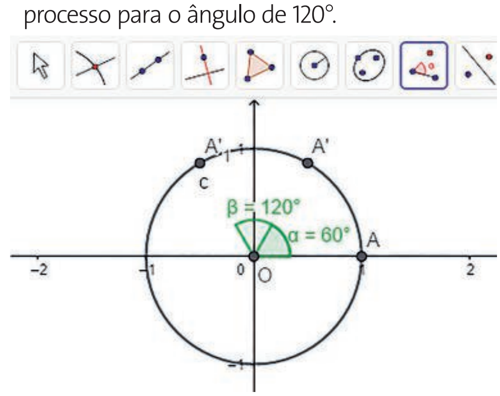


Calcular seno e cosseno dos ângulos 120°, 135° e 150° por meio da circunferência trigonométrica

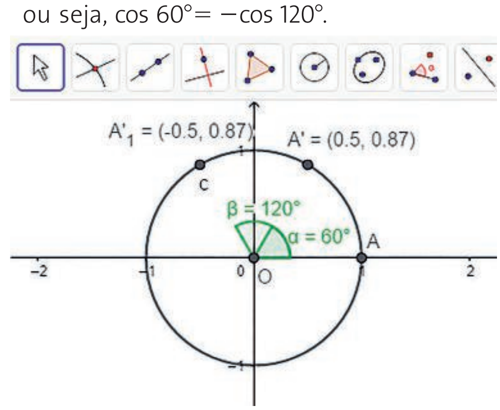
Nessa tarefa, o objetivo é verificar, por exemplo, que sen $60° =$ sen $120°$ e cos $60° = -$cos $120°$.

1. Repita os dois primeiros passos da tarefa anterior.

2. Com a ferramenta **Ângulo com Amplitude Fixa**, clique em A e O, nessa ordem, e insira 60°. Depois, repita esse processo para o ângulo de 120°.



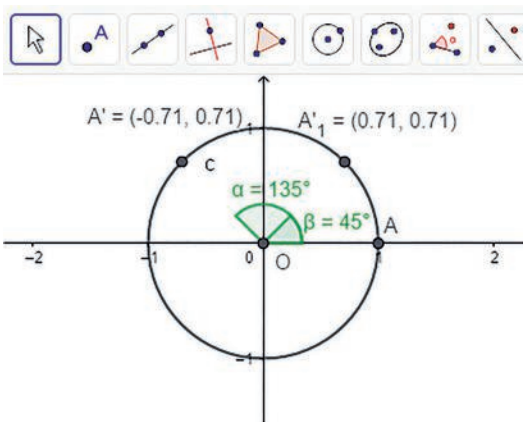
3. Verifique que as ordenadas dos pontos A' e A'_1, correspondentes aos dois ângulos, são iguais, ou seja, sen $60° =$ sen $120°$. E as abscissas dos pontos A' e A'_1 são opostas e iguais em módulo, ou seja, cos $60° = -$cos $120°$.



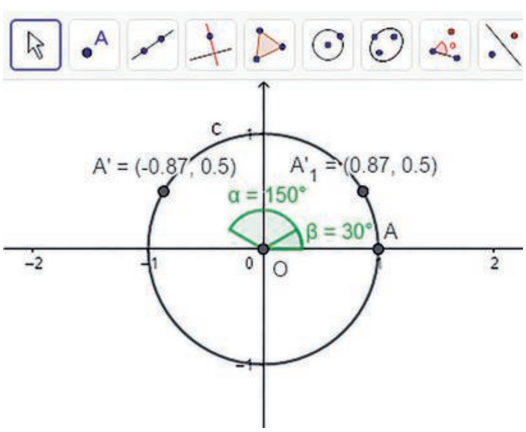
Imagens: Reprodução/Geogebra/Markus Hohenwarter

4. Repita esse processo para os ângulos de 135° e 150°, determinando, inicialmente, o ângulo notável que permite calcular os valores de seno e cosseno, em cada caso.

- 135°

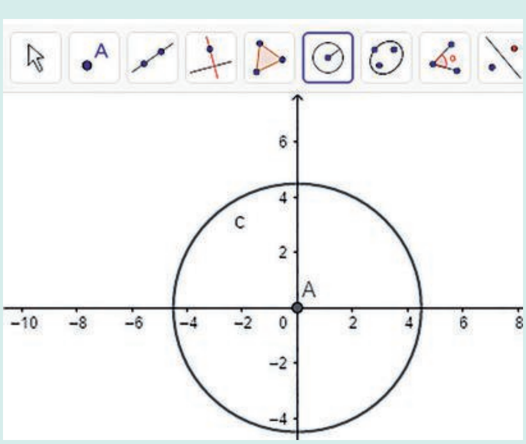


- 150°

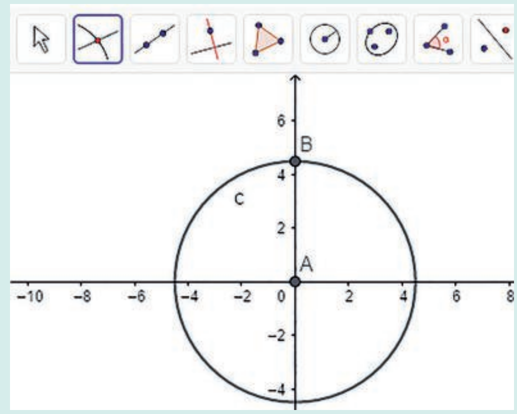


- Sugere-se também selecionar antecipadamente algumas tarefas do capítulo e resolvê-las com o GeoGebra. Veja a seguir, por exemplo, os passos necessários para a resolução do item **a** da tarefa **7**.

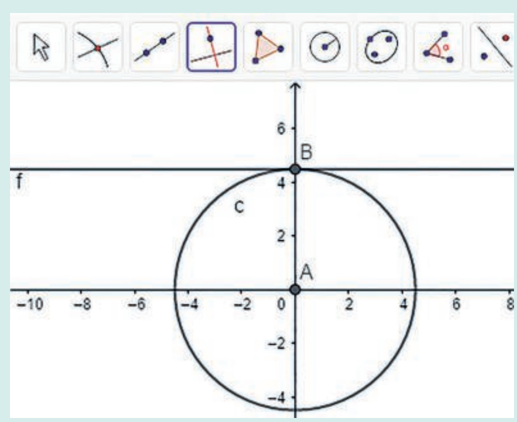
1º Com a ferramenta **Círculo dados Centro e Raio**, construa uma circunferência com centro $A(0, 0)$ e raio 4,5.



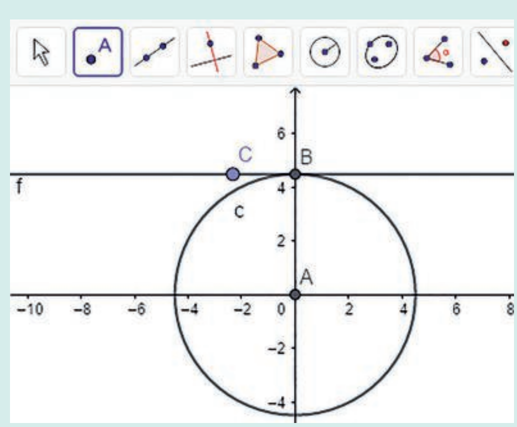
2º Marque a interseção *B*, entre a circunferência *c* construída e o eixo *y*, utilizando a ferramenta **Interseção de Dois Objetos** no ponto $(0; 4,5)$.



3º Para construir uma reta paralela ao eixo *x*, ou seja, perpendicular ao eixo *y*, e que passa pelo ponto *B*, selecione a ferramenta **Reta Perpendicular**, clique primeiro no ponto *B* e em seguida no eixo *y*.

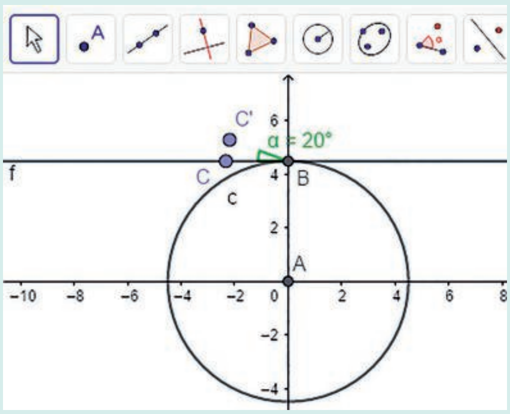


4º Com a ferramenta **Ponto**, marque um ponto *C* sobre a reta construída, no segundo quadrante, ou seja, à esquerda do ponto *B*.

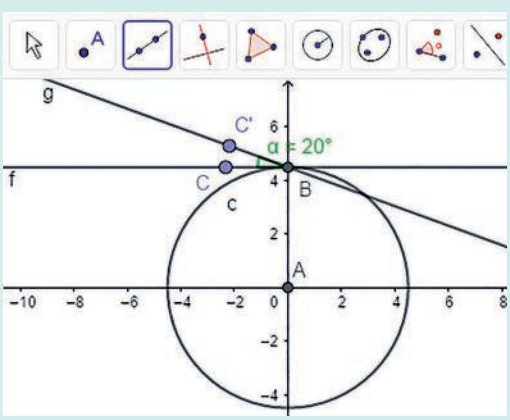


Imagens: Reprodução/Geogebra/Markus Hohenwarter

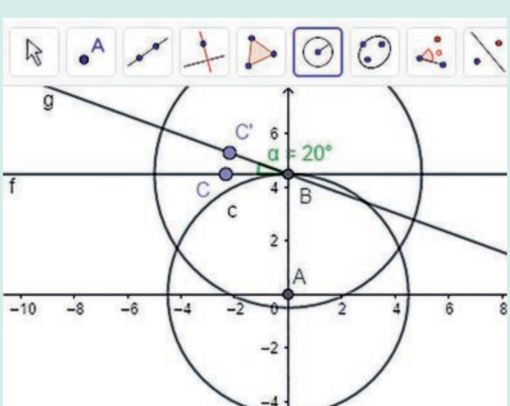
5º Para construir o ângulo de 20°, selecione a ferramenta **Ângulo com Amplitude Fixa**, clique em *C* e *B*, nessa ordem, insira 20° na janela **Ângulo com Amplitude Fixa**, e selecione a opção **Sentido horário**, marcando um ponto *C'*.



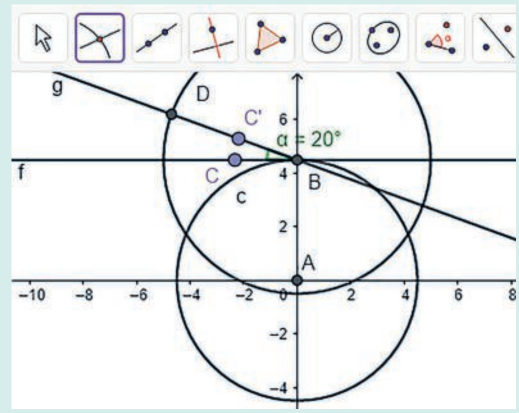
6º Com a ferramenta **Reta**, clique em *B e C'* para indicar a trajetória do avião.



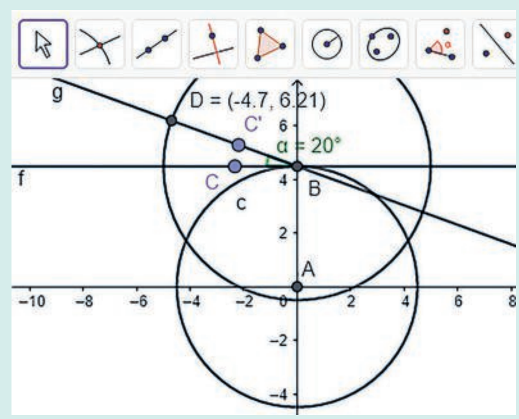
7º Selecione a ferramenta **Círculo dados Centro e Raio** para construir uma circunferência com centro em *B* e raio 5, correspondente à distância percorrida pelo avião.



8º Marque a interseção, que será nomeada por *D*, entre a circunferência do passo anterior e a reta correspondente à trajetória do avião, por meio da ferramenta **Interseção de Dois Objetos**.

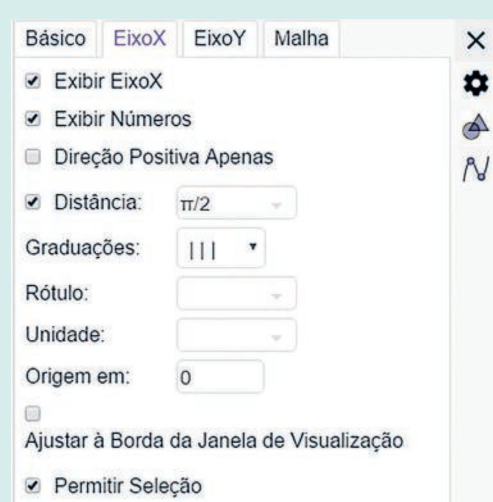


9º A ordenada do ponto *D* corresponde à resposta da tarefa: aproximadamente 6,21 m.



- Veja a seguir uma sugestão de resolução da tarefa **45** no GeoGebra.

Antes de iniciar essa construção, acesse as **Configurações** do GeoGebra e, na aba **EixoX**, marque a opção **Distância** e selecione a opção **π/2** para que o eixo *x* fique graduado de $\frac{\pi}{2}$ em $\frac{\pi}{2}$.



Imagens: Reprodução/Geogebra/Markus Hohenwarter

1º Insira, na **Janela de Álgebra**, as expressões **y = (cos(2x))^2 + 6** e **y = 7*cos(2x)**, em linhas diferentes, pressionando **Enter** após digitar cada expressão. Com isso, observe, na **Janela de Visualização**, os gráficos correspondentes a essas duas expressões e suas interseções.

2º Para analisar o intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, digite **x = 2*pi** na **Janela de Álgebra** para inserir uma reta vertical, passando pelo ponto $(2\pi, 0)$.

Imagens: Reprodução/Geogebra/Markus Hohenwarter

Observando os gráficos construídos, verifica-se que eles se intersectam, no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, nos pontos $(0, 7)$, $(\pi, 7)$ e $(2\pi, 7)$, ou seja, os valores de x que representam a solução para essa tarefa são $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$.

Páginas 120 e 121 Conectando ideias

Para aprofundar

O artigo a seguir expõe conceitos arquitetônicos relacionados às grandes obras e suas estruturas, descrevendo, inclusive, a estrutura da ponte Gateshead Millennium.

MECANISMOS de reorientação de forças aplicados em grandes obras arquitetônicas. Disponível em: <http://www.prac.ufpb.br/anais/IXEnex/iniciacao/documentos/anais/7.TECNOLOGIA/7CTDAMT01.pdf>. Acesso em: 21 ago. 2020.

Planejamento individual e coletivo

O tema abordado nessa seção permite estabelecer uma relação entre os conceitos de trigonometria estudados no capítulo e assuntos relacionados às Artes visuais, abordados pelo componente curricular **Arte**. Trata-se de um exemplo de como as relações, equações e transformações trigonométricas são necessárias na elaboração de projetos arquitetônicos inovadores, como no caso da ponte Gateshead Millennium, cuja estrutura executa deslocamentos angulares. Assim, ao mesmo tempo que os alunos conhecem importantes aplicações dos conceitos estudados, eles se familiarizam com a diversidade de manifestações artísticas que existem pelo mundo, resultantes da criação humana e ligadas ao desenvolvimento tecnológico, científico e turístico de um local.

Peça aos alunos que leiam individualmente as informações do infográfico e escrevam um resumo no caderno sobre o que entenderam.

Se necessário, faça algumas perguntas a fim de contribuir para a interpretação das informações apresentadas. Veja, a seguir, algumas delas.

- Do que tratam as informações apresentadas no infográfico?
- Qual é o formato da parte por onde passam os pedestres e bicicletas? E do suporte?
- Como funciona a estrutura da ponte?
- O que essa ponte permite, de acordo com sua estrutura?
- Os arcos são elementos estruturais ou decorativos?
- Quais são as vantagens desse tipo de estrutura?

Verifique se os alunos têm alguma dúvida em relação às informações. Caso eles não saibam o significado de ponte basculante, diga-lhes que é uma ponte que opera com movimento de contrapeso, geralmente utilizada para permitir a passagem de embarcações.

- Caso seja conveniente, pergunte aos alunos se eles conhecem outras pontes ou construções que utilizam arcos em suas estruturas. Diga a eles que os arcos podem ser usados nas construções como maneira de obter uma estrutura reforçada e resistente, mas também podem ser usados como elementos decorativos.

CAPÍTULO 4 Introdução à lógica de programação

Páginas 122 e 123

- Durante o trabalho com as páginas de abertura, os algoritmos são relacionados com as redes sociais, contexto presente na realidade de muitas pessoas, sobretudo na cultura juvenil. Os indivíduos encontram nas redes sociais um ambiente em que têm contato com diferentes pessoas e assuntos, proporcionando o fortalecimento e até mesmo o surgimento de diferentes culturas juvenis. Ao compreender o conceito dos algoritmos que definem o conteúdo apresentado para os usuários, é possível aprimorar o uso das redes sociais como ferramentas de comunicação entre os indivíduos com interesses em comum, e principalmente divulgar as ideias, preocupações e necessidades de seus grupos para diferentes públicos que dificilmente seriam atingidos sem o uso das redes sociais.
- Para trabalhar essas páginas com os alunos, verifique a possibilidade de organizá-los em grupos de três ou quatro integrantes para que leiam o texto e discutam entre si, anotando as dúvidas que surgirem. Após essa etapa, se algum grupo apresentar dúvidas, peça a um dos integrantes que as leiam em voz alta, de modo que todos possam ouvi-las e, talvez, esclarecê-las. Em seguida, inicie uma discussão com algumas perguntas.
  - Vocês costumam acompanhar o *feed* de notícias em alguma rede social? Se sim, o que geralmente costuma aparecer nele?
  - Vocês acham que a maneira como age o algoritmo relacionado à seleção de conteúdo é conveniente e satisfatória? Por quê?
  - Vocês mudariam ou acrescentariam alguma ação, ou mesmo uma condição, ao algoritmo de alguma rede social? Se sim, quais seriam as mudanças ou os acréscimos?
  - Na opinião de vocês, os algoritmos elaborados e que agem em diferentes redes sociais são iguais, parecidos ou diferentes? Por quê?
- Se julgar conveniente, comente com os alunos a respeito das preferências de conteúdo que algumas redes sociais oferecem, que podem incluir categorias como humor, culinária, moda, animais, beleza, saúde, entre outras. Ao serem escolhidas, essas preferências passam a fazer parte do algoritmo que seleciona os conteúdos que serão exibidos para determinado indivíduo. Além disso, existem outras maneiras de definir prioridades para determinados conteúdos ou perfis de pessoas e páginas em específico: ao adicionar ou seguir um perfil; ao curtir ou reagir a publicações de uma página, um perfil ou grupo; ao se integrar a um grupo de usuários; ao selecionar opções de prioridades ou preferências dos conteúdos que devem aparecer nas configurações da rede social; entre outras.

Metodologias e estratégias ativas

Para aproveitar o tema das páginas de abertura, uma possibilidade é promover, entre os alunos, uma discussão que envolva assuntos interessantes relacionados às redes sociais, por meio da metodologia ativa **Fishbowl**. Para isso, organize os alunos em duas rodas, uma externa e outra interna, e leia em voz alta algumas questões que devem ser respondidas pelos alunos integrantes da roda interna. Inicialmente, solicite que, para ter permissão de responder, cada um levante a mão, respeitando a vez dos demais colegas. Além disso, os alunos que estiverem na roda interna devem ter bom senso e ceder sua cadeira nos momentos em que julgar adequados. A seguir, são apresentadas algumas possibilidades de questionamentos que podem ser feitos para promover essa discussão, tendo como objetivo estabelecer relação com os componentes curriculares **História** e **Geografia** no que diz respeito ao impacto das redes sociais na nossa sociedade de um modo geral, na democracia, nas relações humanas e nos direitos humanos.

- Nas redes sociais de maneira geral, quais são os assuntos mais publicados, compartilhados ou apoiados? Você tem preferência por algum deles? Algum o incomoda? Por quê?
- De que maneira as redes sociais podem ser usadas pelo bem da sociedade de um modo geral? E quais tipos de publicações causam o efeito contrário? Por quê?
- Você já parou para pensar a respeito dos efeitos, tanto bons quanto ruins, que as redes sociais têm sobre a democracia? Se sim, quais são esses efeitos?
- O que podemos esperar das redes sociais em relação ao futuro? Você acredita que um mundo mais conectado pode ser mais democrático? De que maneira?

No momento da discussão, complementando as opiniões dos alunos, ou depois, comente a respeito de alguns pontos relativos ao impacto das redes sociais que não podem passar despercebidos, ampliando, assim, a discussão da questão com o destaque **Você cidadão**. Algumas redes sociais, que originalmente foram criadas para conectar amigos e familiares, são muito utilizadas para expressar opiniões, causando repercussões sociais difíceis de imaginar antes de sua criação. Entre esses efeitos, podemos destacar o enorme poder influenciador, relativo a questões políticas e outras, das redes sociais na vida de muitas pessoas; o *bullying* digital, conhecido como *cyberbullying*, que acontece no Brasil com frequência e afeta diversas pessoas, acarretando doenças como depressão e transtorno de ansiedade; a maior facilidade de organizar mobilizações, manifestações e reivindicações; a grande disseminação de notícias falsas, as chamadas *fake news*; o aparecimento de discursos de ódio, demonstrando preconceitos e profunda ignorância; a possibilidade de distorção da percepção das autoridades com relação à opinião pública; o surgimento das chamadas câmaras de eco, ou efeito bolha, em que os usuários das redes sociais só leem as publicações e notícias com as quais eles concordam, separando-nos ainda mais. Essas consequências na sociedade devem ser conhecidas pelos alunos para que eles possam formular suas opiniões, tirar dúvidas e, juntos, promover a cultura de paz na sociedade em geral, desenvolvendo aspectos da **Competência geral 5**.

A metodologia **Fishbowl** e as questões propostas para o trabalho com ela possibilitam uma discussão em que os alunos possam exercitar sua capacidade de argumentação com base em fatos e dados já conhecidos por eles, a respeito das redes sociais. Além disso, essa metodologia exercita a empatia e o diálogo dos alunos diante de questões que envolvem os direitos humanos e os grupos sociais de nossa sociedade. Se julgar conveniente, comente com os alunos a respeito da importância de desenvolver a empatia e o diálogo com nossos colegas, familiares e pessoas da nossa convivência de um modo geral, dizendo-lhes que esse exercício contribui para que não nos interessemos apenas pelas opiniões iguais ou parecidas com as nossas, ou seja, não nos limitando às câmaras de eco ou ao efeito bolha, formados constantemente pelas redes sociais.

Para aprofundar

Para compreender melhor a respeito dos impactos das redes sociais na vida dos jovens na nossa sociedade, assista à entrevista com uma pesquisadora da área de Teoria da Comunicação, doutora em Filosofia, no endereço eletrônico a seguir.

MULTIRIO. *Redes sociais e relações humanas*. Disponível em: <http://www.multirio.rj.gov.br/index.php/assista/tv/1419-redes-sociais-e-rela%C3%A7%C3%B5es-humanas>. Acesso em: 31 jul. 2020.

Você conhece as redes sociais que podem ser utilizadas como recursos de educação? No endereço eletrônico a seguir, há informações sobre algumas redes que podem ser utilizadas para esse fim.

APPAI. *Recursos tecnológicos e educação:* plataformas e ambientes virtuais de aprendizagem. Disponível em: <https://www.appai.org.br/recursos-tecnologicos-e-educacao-plataformas-e-ambientes-virtuais-de-aprendizagem/>. Acesso em: 31 jul. 2020.

Página 124

- O Scratch é um projeto do grupo Lifelong Kindergarten do Media Laboratory do Massachusetts Institute of Technology (MIT), disponibilizado gratuitamente no endereço eletrônico <https://scratch.mit.edu/>. Acesso em: 31 jul. 2020. Por meio dele, os alunos podem desenvolver o pensamento computacional por meio de animações, jogos e músicas, elaborando-os ou acessando os projetos criados por outros usuários. Além disso, ele desafia a imaginação dos alunos e conecta suas ideias à linguagem de programação.

O Scratch na sala de aula: o uso da programação com vista à resolução de problemas

O Scratch, sendo um software *de linguagem gráfica de programação, desenvolvido com fins educacionais e em consonância com as ideias construtivistas de Papert (1994), é uma ferramenta gratuita e é considerada de fácil usabilidade. Tal característica se dá pelo fato de possuir uma IDE (do inglês* Integrated Development Environment*) a qual integra as várias ferramentas necessárias para o desenvolvimento das atividades, não precisando instalar arquivos complementares ou até mesmo digitar funções ou endereços, pois é uma linguagem de programação visual. Mélo (2011) considera o Scratch uma ferramenta que auxilia o ensino de conceitos de Lógica de Programação por possuir uma interface visual amigável e simples levando, de maneira intuitiva, as principais estruturas de uma linguagem como: variáveis, operadores, estruturas de tomada de decisão e de repetição, e outros.*

O software*, além de potencializar a introdução da programação na educação, proporciona ao estudante a resolução de situações-problema que envolvem a matemática (por exemplo geometria plana e espacial). Segundo Prensky (2013), uma das maneiras mais acertadas de resolver problemas em Matemática é por meio da tecnologia. Contudo, ao planejar as atividades, deve-se ter objetivos preestabelecidos para buscar programas que levem os estudantes a pensar sobre as diferentes maneiras de estruturar o problema e como realizar os cálculos, possibilitando aos alunos a programar e a construir conhecimento sobre os conceitos matemáticos. São momentos que os estudantes, e até mesmo professor/mediador, passam a ser desafiados, desenvolvendo o pensamento criativo, o raciocínio sistemático e o trabalho colaborativo* (PEREIRA, 2012).

Thompson e Lamshed (2006) ressaltam que o crescimento de ferramentas gratuitas e livres, como Scratch, contribui para que os professores criem seus próprios materiais educacionais, mais adequados ao contexto escolar.

Com a facilidade de acesso aos smartphones *e* tablets*, atualmente contamos com o aplicativo Scratch Jr, desenvolvido a partir do Scratch, devido à necessidade do ensino de programação para crianças que estão ainda no jardim de infância* (FLANNERY et al., 2013). *O aplicativo disponibiliza recursos que viabilizam a utilização por crianças, como juntar os blocos de programação gráfica para fazer os personagens se moverem, pularem, dançarem e cantarem. Também é possível modificar os personagens no editor de pintura, adicionar suas próprias vozes e sons, até mesmo inserir fotografias de si mesmos.*

MACHADO R. N.; GAUTERIO, V. L. B.; PIÑEIRO, M. B.; CRIZEL, R. T. *O Scratch na sala de aula*: o uso da programação com vista à resolução de problemas. *RELACult.* v. 5. p. 1–19. Disponível em: <http://periodicos.claec.org/index.php/relacult/article/view/1248/819>. Acesso em: 31 jul. 2020.

- No Scratch, os comandos são feitos por meio de blocos de outros comandos, como reconhecer ações do usuário, realizar ações com um personagem, operações lógicas e matemáticas, atribuições de valores, estruturas de condição e de repetição. Esses comandos serão apresentados com mais detalhes durante o capítulo. Porém, devido à estrutura simples dos blocos, é possível fazer, por exemplo, movimentos simples com um personagem na tela. Os blocos são organizados por cores de acordo com os comandos, e podem ser arrastados e encaixados, e seus comandos, executados na sequência indicada.

  Veja a seguir um exemplo de uma sequência de comandos que faz o personagem girar no sentido horário e em seguida no sentido anti-horário.

Reprodução/Scratch/MIT

- Se julgar conveniente, leve os alunos ao laboratório de informática do colégio, caso haja, a fim de fazer a pesquisa solicitada no item **e**. Para isso, oriente-os a abrir a página do Scratch, no endereço eletrônico a seguir, clicar no menu **Explorar** e categoria **Jogos** para navegar por eles. Disponível em: <https://scratch.mit.edu/>. Acesso em: 31 jul. 2020. Após isso, questione-os a respeito das regras e dos comandos que eles imaginam que foram utilizados para a elaboração dos jogos que jogaram. Aproveite a oportunidade para deixar que os alunos joguem os jogos disponíveis e leiam os comentários feitos neles.
- Para mais tarefas no Scratch com os alunos, oriente-os a clicar no menu **Ideias** e a escolher alguma das possibilidades que aparecem na tela. Depois, será aberta uma janela de construção com um tutorial em que eles podem navegar, para aprender a respeito de construções relacionadas ao tema que podem ser elaboradas, e realizá-las na mesma janela.

Página 126

BNCC

O conteúdo dessa página e das páginas **127** a **129**, que envolve fluxogramas, estabelece uma relação entre esse tipo de gráfico e um algoritmo que resolve o problema associado, conforme orienta a habilidade **EM13MAT315**. Além disso, o trabalho com fluxograma desenvolve o pensamento computacional e contempla parcialmente a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Ao trabalhar com os alunos o texto e o exemplo de fluxograma apresentado, verifique se eles compreendem a relação entre os variados formatos das figuras do fluxograma e os tipos de dados que elas carregam, conforme as indicações da página. Essas figuras são baseadas na norma internacional ISO 5807, que estabeleceu um padrão para o uso delas em fluxogramas.

- Uma maneira prática, *on-line* e gratuita de construir fluxogramas é usar o Draw.io, uma página na internet que apresenta diversas ferramentas e desenho. Disponível em: <http://draw.io>. Acesso em: 31 jul. 2020.

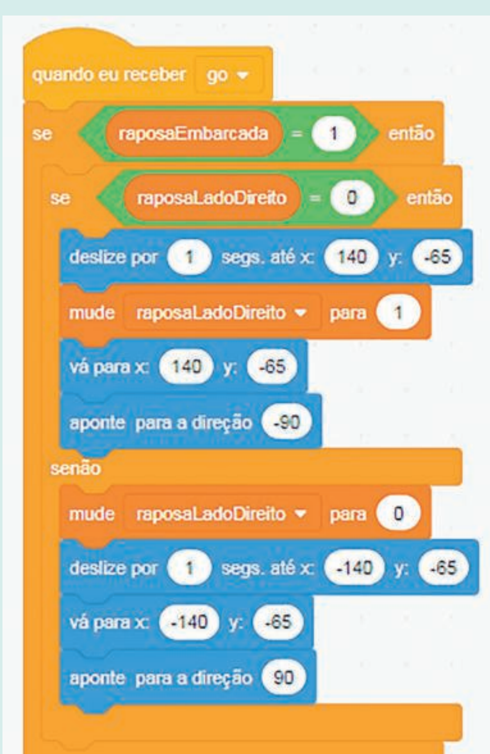
  Ao acessar essa página e clicar em **File** (Arquivo) e em seguida em **New** (Novo), somos direcionados a um menu com diversas estruturas de diagramas que podem ser formados. Na categoria **Flowchart** (Fluxograma), existem alguns exemplos de estruturas que podem ser utilizadas para a elaboração de fluxogramas e, depois, editadas. Outra possibilidade, mais básica, é selecionar a opção **Fluxograma** na categoria **Basic** (Básico). Se julgar conveniente, solicite previamente aos alunos que resolvam as tarefas **3** e **4** em casa, utilizando o Draw.io. Eles podem imprimir seus fluxogramas para mostrar aos demais alunos ou então enviá-los por *e-mail* para que os trabalhos sejam exibidos para todos.

Página 127

Metodologias e estratégias ativas

Para trabalhar a tarefa **8** com os alunos, verifique a possibilidade de levá-los ao laboratório de informática do colégio, caso haja um, para lhes apresentar o projeto de um jogo no Scratch para essa situação, disponível no endereço eletrônico <https://scratch.mit.edu/projects/172362460/>. Acesso em: 31 jul. 2020. Para isso, oriente-os a disputar o jogo e, depois, a clicar na opção **Ver interior** para ter acesso aos comandos do Scratch que criaram esse jogo. Solicite então que leiam os comandos e procurem entendê-los, alterando os valores dos comandos, se necessário, para descobrir o que acontece. Veja a seguir uma imagem da interface do jogo e outra que apresenta parte dos comandos desse jogo.

Reprodução/Scratch/MIT



Reprodução/Scratch/MIT

Se julgar conveniente, utilize a metodologia ativa **Rotação por estação laboral** para trabalhar essa situação com os alunos. Nesse caso, organize-os em grupos para que cada grupo, na sua vez, procure compreender alguma das partes que compõem o código desse jogo. Para isso, estabeleça previamente as estações que vão compor a dinâmica, selecionando quais comandos deverão ser analisados em cada estação. Essa divisão pode ser feita considerando as cores dos comandos, por exemplo, ou então os blocos de comandos que já estão separados. Então, durante a dinâmica, oriente cada grupo a procurar compreender os comandos selecionados para sua estação, lendo-os e modificando os valores correspondentes para verificar quais alterações acontecem no jogo. As hipóteses ou conclusões obtidas devem ser registradas em um arquivo do computador ou em uma folha de papel, para que o grupo seguinte, ao trabalhar com a mesma estação, possa ler as conclusões e acrescentar as suas próprias. Faça algumas trocas entre os grupos pelas estações até que eles demonstrem ter compreendido o código do jogo e registrado suas conclusões. Após isso, promova uma discussão entre eles para verificar se compreenderam os comandos de programação utilizados.

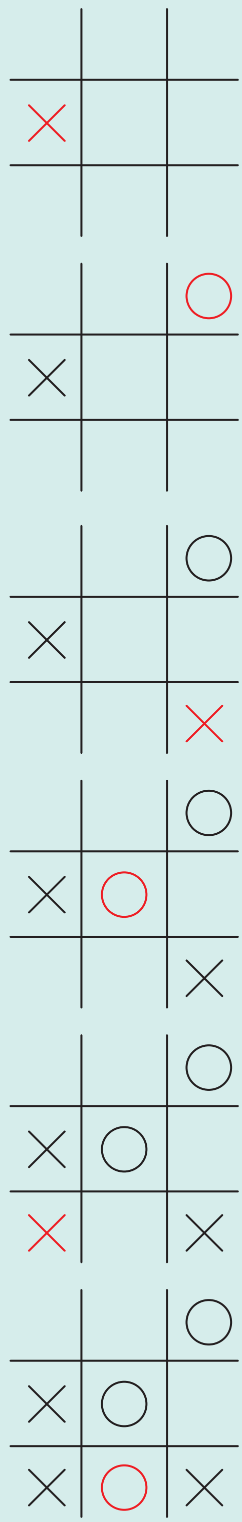
Páginas 128 e 129 **Saiba mais**

- O tema abordado nessa seção permite estabelecer uma relação entre os conceitos de programação estudados no capítulo. Uma sugestão de trabalho é reunir os alunos em grupos de até três integrantes para que leiam o texto apresentado e respondam às questões propostas no caderno. Depois, comente com os alunos que os passos que foram detalhados nessas páginas poderiam ser utilizados para a criação de um jogo em que o computador nunca perde ao jogar contra alguém, e a chance de ele vencer é maior do que a chance de empatar, caso ele seja o primeiro a jogar.
- Se julgar conveniente, solicite aos alunos que calculem a probabilidade de vencer ou de empatar nos casos apresentados nessas páginas. Após apresentarem suas respostas, diga-lhes que a probabilidade de vencer é $\frac{9}{11}$, ou aproximadamente 82%, e a probabilidade de empate é $\frac{2}{11}$, ou aproximadamente 18%, apenas.
- Utilize o laboratório de informática do colégio, caso seja possível, para que os alunos joguem o jogo da velha *on-line*, ou então que joguem entre si, na sala de aula, utilizando as técnicas apresentadas. Caso joguem contra o computador, uma possibilidade é digitar "jogo da velha" no buscador do Google e jogar o jogo que apa-

rece na própria página de pesquisa. Reforce aos alunos previamente que eles devem utilizar as regras apresentadas nessas páginas e, se possível, nunca perder. Ao final, se julgar conveniente, promova uma discussão entre eles para que relatem como foram as partidas e se conseguiram aplicar as técnicas aprendidas.

- Possível resposta do item **c** dessa seção:

A jogada da vez está em vermelho.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

vence

- Ao resolver esse item, peça aos alunos que considerem que o adversário esteja tentando impedir a vitória deles e tentando vencer também.

Página 130

BNCC

Nessa página, são introduzidos alguns exemplos de expressões matemáticas escritas em linguagem de programação que servem de base para que os alunos, posteriormente, sejam capazes de utilizar essa linguagem na implementação de algoritmos, conforme orienta a habilidade **EM13MAT405**. Nas tarefas das páginas seguintes, eles precisarão dessa base, inclusive, para desenvolver a **Competência específica 4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, utilizando diferentes registros de representação matemáticos, entre eles o computacional.

- Diga aos alunos que as operações **resto (módulo)** e **divisão inteira** são importantes em programação, pois permitem ao sistema que faça operações e comparações, como verificar se um número é divisível por outro, o que pode ser bastante útil em alguns algoritmos. Quanto à operação resto (módulo), por exemplo, ela foi usada no fluxograma da página **126** para determinar se um número é par ou ímpar. Ao calcular o resto da divisão do número inserido por 2, é possível verificar se o resto é igual a zero e determinar se o número é par. A operação divisão inteira descarta a parte fracionária da divisão, obtendo um número inteiro. Por exemplo, ao calcular "5 div 3", em um computador, o valor obtido seria 1.

Página 131

- Possível resposta para a questão teoria dessa página.

Expressão matemática	Resultado para $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$ e $w = 3$
$\dfrac{x+y}{2y+(z-w)^2}$	$\dfrac{0+1}{2 \cdot 1+(2-3)^2} = \dfrac{1}{3}$
$x + \dfrac{y}{2y+(z-w)^2}$	$0 + \dfrac{1}{2 \cdot 1+(2-3)^2} = \dfrac{1}{3}$
$\dfrac{x+y}{2}y+(z-w)^2$	$\dfrac{0+1}{2} \cdot 1+(2-3)^2 = \dfrac{3}{2}$
$\dfrac{x+y}{2y+z-w^2}$	$\dfrac{0+1}{2 \cdot 1+2-3^2} = -\dfrac{1}{5}$

Página 132

- Após trabalhar as tarefas propostas nessa página com os alunos, se julgar conveniente, leve-os ao laboratório de informática do colégio, caso haja um, para que eles possam operar algumas expressões matemáticas por meio do *software* GeoGebra, em linguagem de programação, conforme as sugestões a seguir. Se possível, separe-os em grupos de três a quatro alunos e reproduza as tarefas em uma folha de papel, para que cada grupo receba uma.

- Essas tarefas foram elaboradas com base na versão 6.0.851.0 do GeoGebra, a mesma apresentada na página **209** desta Assessoria pedagógica.

1 Calcule, utilizando o GeoGebra, alguns valores para a expressão apresentada na tarefa **11** dessa página. Para isso, insira na **Janela de Álgebra**, inicialmente, as seguintes variáveis: **a**, digitando a letra “a” e pressionando **Enter**, **b**, digitando a letra “b” e pressionando **Enter**, e assim sucessivamente, até a variável **d**, uma em cada linha. Com isso, o GeoGebra cria os chamados **Controles deslizantes**, que se referem a uma variável que pode assumir determinado valor que, depois, podemos modificar. Após isso, insira a expressão $(a+b)$^3/$((c-2*d)+(a-b))$ em outra linha, digitando essa expressão e pressionando **Enter**. Depois, clique na bolinha correspondente a cada valor e arraste-a de modo a obter o valor numérico, se for possível, da expressão para:

a) $a=5$, $b=0$, $c=-4$ e $d=-2$.

b) $a=2$, $b=2$, $c=4$ e $d=2$.

c) $a=-3$, $b=2$, $c=-1$ e $d=0$.

2 Os **Controles deslizantes** são ferramentas muito úteis no GeoGebra para a criação de animações. Construa os **Controles deslizantes** a e b na **Janela de Álgebra** e, em seguida, insira um ponto $P=(a, b)$. Então, construa um triângulo, por meio da ferramenta **Polígono Rígido**, clicando em P e em mais dois pontos, que serão os vértices desse triângulo. Clique sobre um dos **Controles deslizantes** criados com o botão direito do *mouse* e selecione a opção **Animação**, repetindo o processo com o outro **Controle deslizante** em um segundo momento. O que você pôde observar?

Respostas

1 a) 25

b) Não é possível realizar a divisão.

c) Aproximadamente 0,17.

2 Resposta pessoal. Espera-se que os alunos observem que os Controles deslizantes a e b movimentam o triângulo no sentido horizontal e vertical, respectivamente, e que a animação dos dois Controles faz com que o triângulo se mova na diagonal, alternadamente.

- No caso do item **b** da tarefa **1** proposta anteriormente, é possível que o GeoGebra apresente ∞ (infinito) como resposta. Nesse caso, comente com os alunos que o *software* considera a divisão de um número (64) dividido por outro número muito próximo de zero, o que resulta em um número grande, pois $\lim_{x \to 0^+} \frac{64}{x} = \infty$.

Página 133

BNCC

Nessa página, há um texto sobre Ada Lovelace, que explora a história da Matemática como recurso didático, além de valorizar o desenvolvimento das linguagens de programação e valorizar a importância das mulheres na Ciência. Esse boxe favorece o desenvolvimento da **Competência geral 1**.

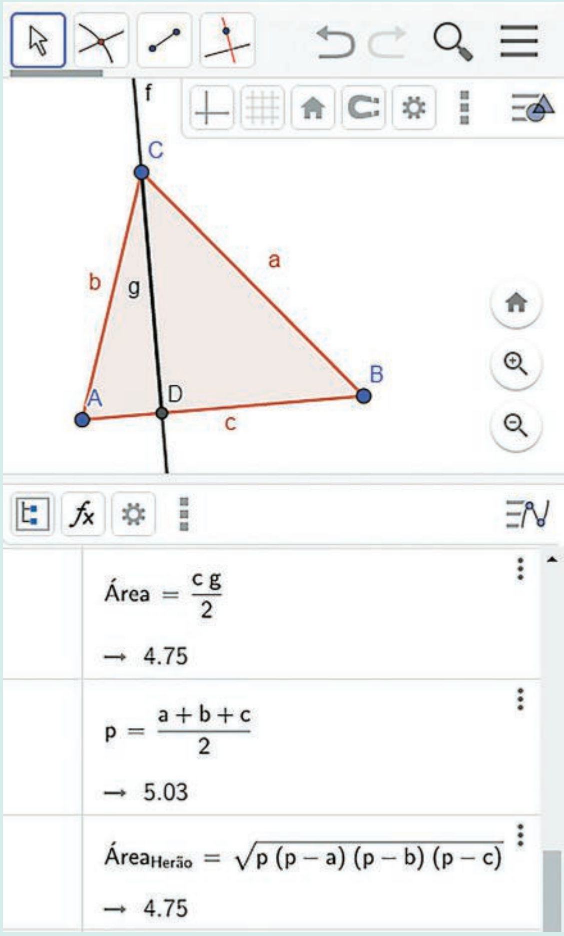
Página 134

BNCC

Esse capítulo apresenta regras sintáticas e semânticas em comparação às outras maneiras de registros familiares aos alunos, como as expressões matemáticas. Essa é uma oportunidade de desenvolver a **Competência geral 4** e transitar entre as diferentes linguagens e representações, bem como de enriquecer o pensamento lógico.

Página 137

- Se julgar conveniente, apresente aos alunos uma maneira de inserir, no GeoGebra, o algoritmo solicitado na tarefa **15**. Para isso, construímos uma região triangular qualquer, por meio da ferramenta **Polígono**, clicando em três pontos A, B e C não colineares. Considerando o lado $\overline{AB}$, cujo comprimento é c, como a base do triângulo, podemos construir a altura do triângulo relativa a essa base selecionando a ferramenta **Reta Perpendicular**, clicando no lado $\overline{AB}$ e, em seguida, no ponto C. Então, com a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**, marcamos a interseção D entre a reta e o lado $\overline{AB}$ e, com a ferramenta **Segmento**, clicamos nos pontos C e D para traçar a altura $\overline{CD}$, cujo comprimento é g. Então, para que o GeoGebra calcule a área dessa região, com base na fórmula $A=\frac{b \cdot h}{2}$, basta digitarmos **Área = (*c**g*)/2** na **Janela de Álgebra**. Outra possibilidade, ainda, seria utilizar a fórmula de Herão para o cálculo da área, inserindo a expressão correspondente ao semiperímetro na **Janela de Álgebra**, **p = (a + b + c)/2** e, em seguida, a expressão **Área_Herão = sqrt(p*(p − a)*(p − b)*(p − c))**, com base na fórmula $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.



Reprodução/Geogebra/Markus Hohenwarter

Página 143

BNCC

Durante o trabalho com a tarefa **32**, comente com os alunos que para um IMC menor do que 18,5, a situação é abaixo do normal, e que para um IMC maior ou igual a 40, a situação é obesidade grau III. No entanto, essas possibilidades não precisam ser consideradas no algoritmo, que não deve apresentar as situações para esses valores. Esse tema permite relacionar o assunto abordado no capítulo com o tema contemporâneo transversal **Saúde**, e ainda entre os componentes curriculares **Matemática** e, preferencialmente, **Biologia**, uma vez que as condições indicadas no quadro são necessárias para expressar informações sobre desnutrição, peso normal e obesidade no ser humano.

Página 144

- Caso os alunos demonstrem dificuldades para compreender o funcionamento do algoritmo no exemplo apresentado, explique a eles que os comandos das linhas **6** e **7** serão executados enquanto a condição for verdadeira, ou seja, a variável *Numero* tiver valor menor do que 15. Cada vez que o algoritmo chega à linha **7**, ele deve voltar à linha **5** e verificar novamente se a condição é verdadeira. Cada vez que o comando da linha **6** é executado, o algoritmo soma 1 ao valor da variável *Numero*, até que a variável tenha o valor 15 e a condição não seja mais verdadeira, interrompendo a estrutura de repetição **enquanto** e indo até a linha **8** sem executar novamente as linhas **6** e **7**.

Página 146

- Após o trabalho com o exemplo do algoritmo para escrever os 10 primeiros números ímpares, verifique se os alunos compreenderam o que significa o passo nessa estrutura de repetição. Nesse exemplo, o comando passo 2, na linha 3, significa que, a cada execução, é adicionado 2 ao valor da variável indicada *j*.

Página 147 Finalizando a conversa

Avaliação

Como forma de avaliação diagnóstica, peça aos alunos que respondam no caderno os itens dessa seção. Em seguida, escolha alguns alunos para lerem em voz alta o que escreveram.

Essa dinâmica tem como objetivo verificar a compreensão dos alunos acerca das informações apresentadas nas páginas, bem como resgatar seus conhecimentos em relação aos conteúdos já estudados anteriormente, analisar e interpretar os dados e conhecer os tipos de gráficos apresentados.

Páginas 148 e 149 Acesso digital

- Nessa seção, foi utilizada a versão 3.0.7.0 do programa gratuito VisualG, que edita, interpreta e executa algoritmos com uma linguagem próxima do português. É possível fazer o *download* e instalá-lo acessando o endereço eletrônico. Disponível em: <https://visualg3.com.br/>. Acesso em: 18 ago. 2020.
- Respostas do item **b** dessa seção:

Tarefa 30:

```
1.  Algoritmo "Classificar número em par ou ímpar"
2.  Var
3.      numero: inteiro
4.  Inicio
5.      escreva ("Digite um número inteiro: ")
6.      leia (numero)
7.      se (numero%2=0) entao
8.          escreva ("O número é par")
9.      senao
10.         escreva ("O número é ímpar")
11.     fimse
12. Fimalgoritmo
```

Tarefa 34:

```
Algoritmo "Verificar se o número informado é menor, maior ou igual a 3"
Var
      numero: real
Inicio
      escreva ("Digite um número: ")
      leia (numero)
      se (numero<3) entao
          escreva ("O número é menor do que 3")
      senao
          se (numero>3) entao
             escreva ("O número é maior do que 3")
          senao
             escreva ("O número é igual a 3")
          fimse
      fimse
Fimalgoritmo
```

Tarefa 35:

```
Algoritmo "Atribuir conceito à nota do aluno"
Var
   nota: real
Inicio
   escreva ("Digite a nota do aluno: ")
   leia (nota)
   se (nota<=3.5) entao
      escreva ("A nota corresponde ao conceito E")
   senao
      se (nota<=5) entao
         escreva ("A nota corresponde ao conceito D")
      senao
         se (nota<=7) entao
            escreva ("A nota corresponde ao conceito C")
         senao
            se (nota<=9) entao
                     escreva ("A nota corresponde ao conceito B")
            senao
                     escreva ("A nota corresponde ao conceito A")
            fimse
         fimse
      fimse
   fimse
Fimalgoritmo
```

Tarefa 39:

```
Algoritmo "Escrever os números inteiros de 1 até 50"
Var
      numero: inteiro
Inicio
      numero <- 1
      enquanto numero <= 50 faca
            escreval (numero)
            numero <- numero + 1
      fimenquanto
Fimalgoritmo
```

```
Algoritmo "Escrever os números inteiros de 50 até 1"
Var
      numero: inteiro
Inicio
      numero <- 50
      enquanto numero >= 1 faca
            escreval (numero)
            numero <- numero - 1
      fimenquanto
Fimalgoritmo
```

```
Algoritmo "Escrever os números inteiros de 50 até 100"
Var
      numero: inteiro
Inicio
      numero <- 50
      enquanto numero <= 100 faca
            escreval (numero)
            numero <- numero + 1
      fimenquanto
Fimalgoritmo
```

```
Algoritmo "Escrever os números inteiros de -20 até 0"
Var
      numero: inteiro
Inicio
      numero <-  -20
      enquanto numero <= 0 faca
            escreval (numero)
            numero <- numero + 1
      fimenquanto
Fimalgoritmo
```

Tarefa 40:

```
Algoritmo "Escrever os números inteiros de 1 até 50"
Var
    numero: inteiro
Inicio
    numero <- 1
    repita
        escreval (numero)
        numero <- numero + 1
    ate numero > 50
Fimalgoritmo
```

```
Algoritmo "Escrever os números inteiros de 50 até 1"
Var
    numero: inteiro
Inicio
    numero <- 50
    repita
        escreval (numero)
        numero <- numero - 1
    ate numero < 1
Fimalgoritmo
```

```
Algoritmo "Escrever os números inteiros de 50 até 100"
Var
    numero: inteiro
Inicio
    numero <- 50
    repita
        escreval (numero)
        numero <- numero + 1
    ate numero > 100
Fimalgoritmo
```

```
Algoritmo "Escrever os números inteiros de -20 até 0"
Var
    numero: inteiro
Inicio
    numero <-  -20
    repita
        escreval (numero)
        numero <- numero + 1
    ate numero > 0
Fimalgoritmo
```

Páginas 150 e 151 Conectando ideias

- Nessa seção, são apresentadas informações a respeito de filmes interativos em que o espectador decide os rumos que tomarão os acontecimentos, obtendo um resultado da história a partir de suas decisões, com grandes ou pequenas transformações. Cada vez mais a interatividade promete estar mais presente em filmes, jogos e séries.
- Se julgar conveniente, solicite aos alunos que formem grupos de três ou quatro integrantes para ler o texto e responder às questões propostas nessa seção.
- Caso seja possível, peça aos alunos que assistam ao filme Black Mirror: Bandersnatch, em casa, e oriente-os a construir um fluxograma com base nas decisões deles ao assisti-lo, registrando as consequências com poucas palavras. Após isso, uma possibilidade é organizar os alunos em grupos de acordo com as primeiras decisões, separando os que selecionaram determinada opção de outra, por exemplo. Por fim, solicite aos alunos que registrem os fluxogramas obtidos em um ou mais cartazes para, depois, apresentarem aos outros colegas.

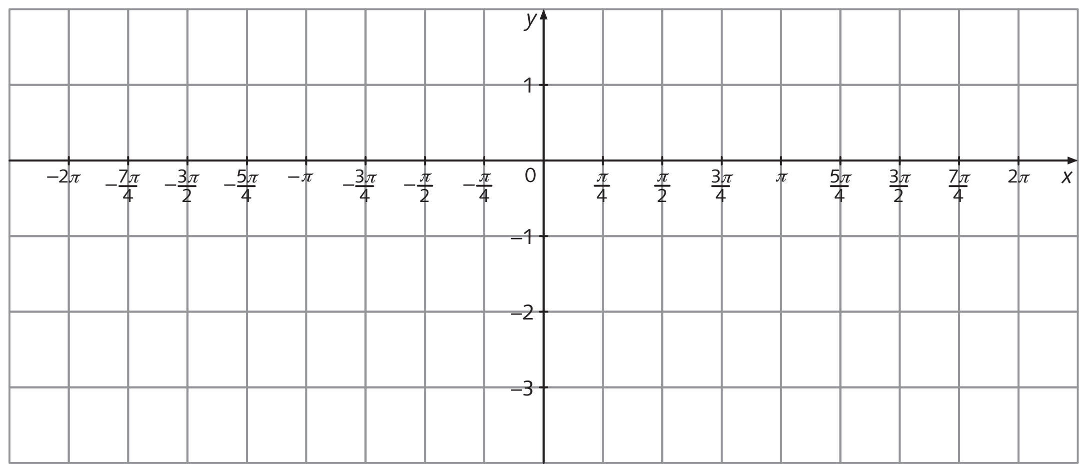
Para aprofundar

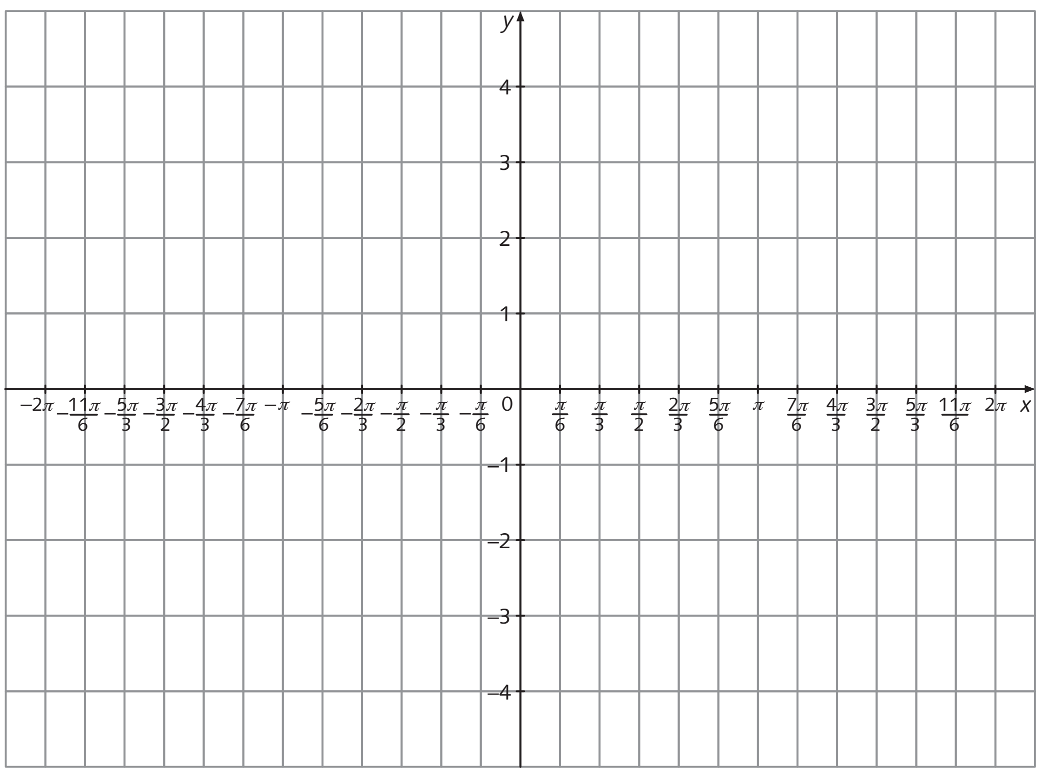
Obtenha mais informações sobre filmes interativos acessando o endereço eletrônico a seguir, que conta com vários exemplos de filmes e jogos que se encaixam nessa categoria.

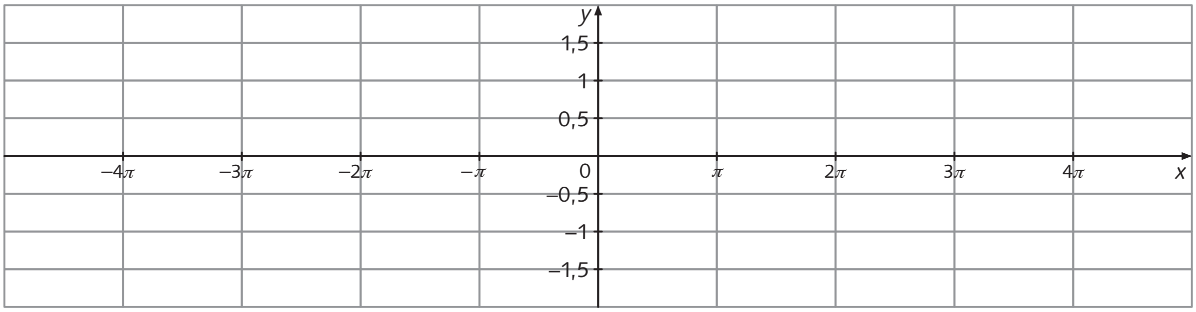
SBC – PROCEEDINGS OF SBGAMES 2012. *Jogos cinematográficos ou filmes interativos?* A semiótica e a interatividade da linguagem cinematográfica nos jogos eletrônicos. Disponível em: <https://www.sbgames.org/sbgames2012/proceedings/papers/artedesign/AD_Full21.pdf>. Acesso em: 3 ago. 2020.

6 Páginas para reprodução

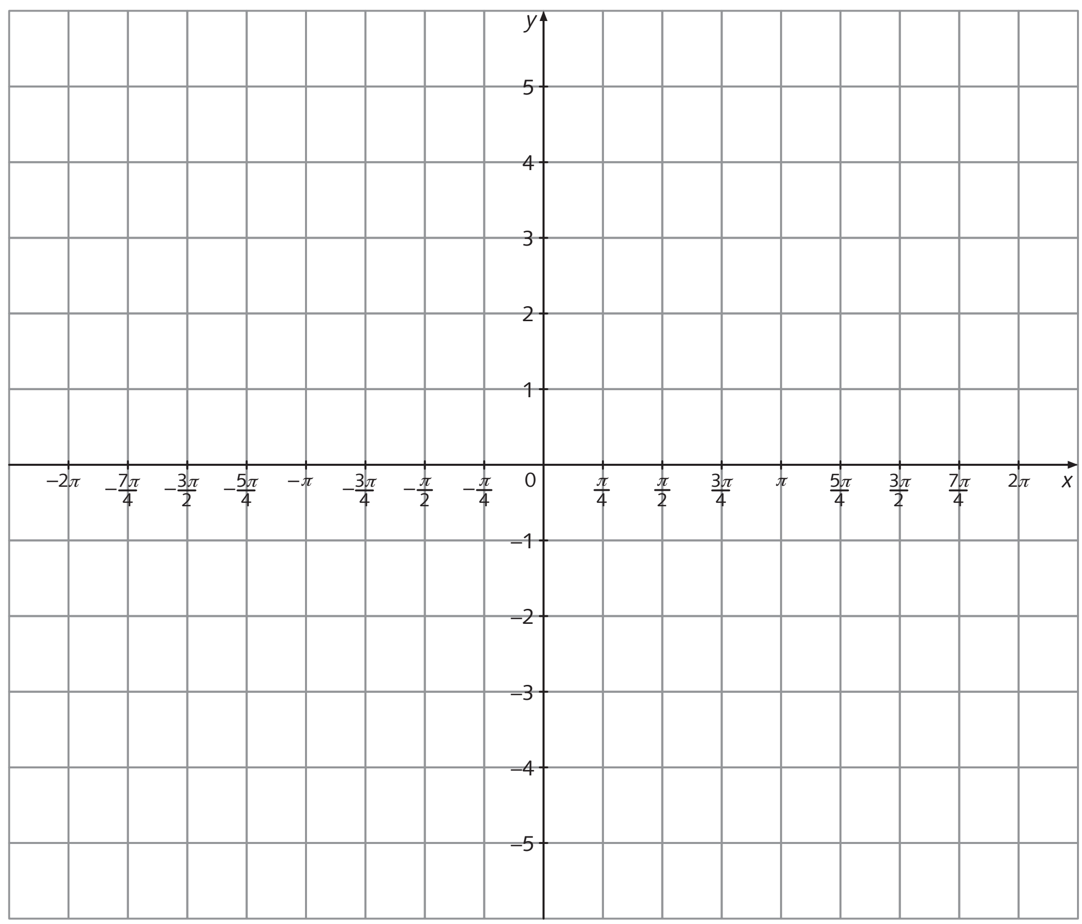
Planos cartesianos

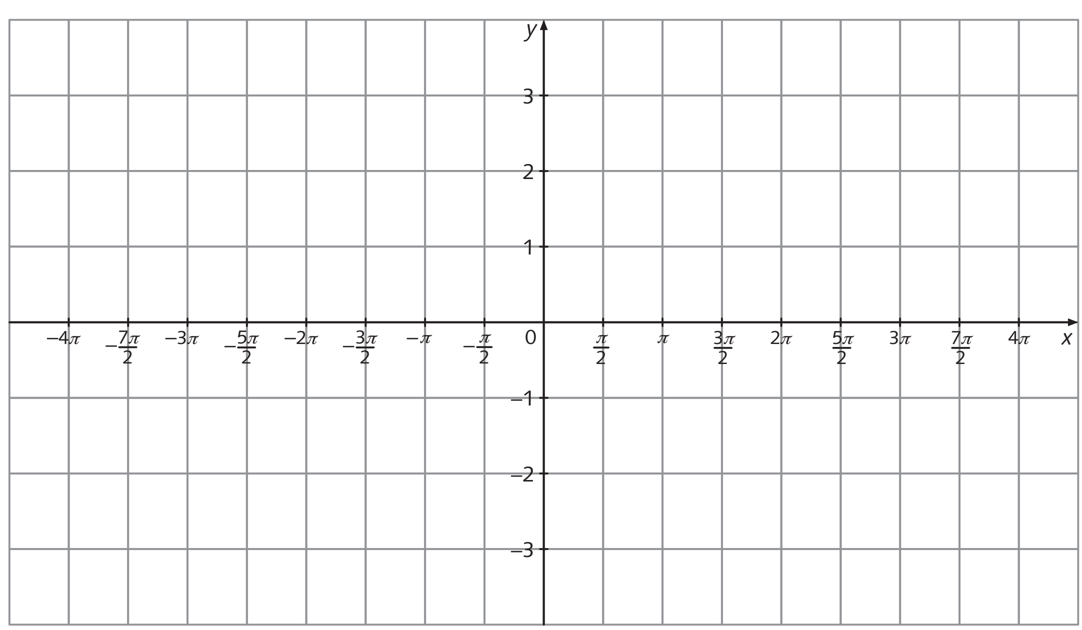






Ilustrações: Sergio L. Filho





Ilustrações: Sergio L. Filho

7 Resolução dos problemas e exercícios

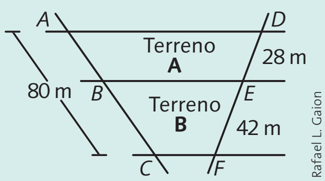
Capítulo 1 Trigonometria no triângulo

1. $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \Rightarrow \frac{2x-2}{x+9} = \frac{9}{12} \Rightarrow 24x - 24 = 9x + 81 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 7$

- $AB = 2 \cdot 7 - 2 = 12 \rightarrow 12$ cm
- $BC = 7 + 9 = 16 \rightarrow 16$ cm

2.



$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} \Rightarrow \frac{28}{AB} = \frac{\overbrace{70}^{28+42}}{80} \Rightarrow 70 \cdot AB = 2\,240 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 32 \rightarrow 32$ m

$AC = AB + BC \Rightarrow 80 = 32 + BC \Rightarrow BC = 48 \rightarrow 48$ m

O comprimento dos lados dos terrenos **A** e **B** que ficam de frente à rua Goiânia são, respectivamente, 32 m e 48 m.

3. $\frac{x}{60} = \frac{y}{50} = \frac{z}{30} = \frac{x+y+z}{60+50+30} = \frac{168}{140} = \frac{6}{5}$

- $\frac{x}{60} = \frac{6}{5} \Rightarrow 5x = 360 \Rightarrow x = 72$
- $\frac{y}{50} = \frac{6}{5} \Rightarrow 5y = 300 \Rightarrow y = 60$
- $\frac{z}{30} = \frac{6}{5} \Rightarrow 5z = 180 \Rightarrow z = 36$

4. $\frac{AC}{CD} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow \frac{AC}{9} = \frac{14}{21} \Rightarrow 21 \cdot AC = 9 \cdot 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = 6 \rightarrow 6$ cm

5.
- $\frac{12}{9} = \frac{x}{15} \Rightarrow 9x = 180 \Rightarrow x = 20$
- $\frac{12}{9} = \frac{y}{30} \Rightarrow 9y = 360 \Rightarrow y = 40$

6. Considerando os raios de luz solar como um feixe de retas paralelas e a placa e sua sombra como retas transversais intersectando o feixe, temos:

$\frac{h}{40} = \frac{150}{25} \Rightarrow 25 \cdot h = 40 \cdot 150 \Rightarrow h = 240$

Portanto, a altura da placa é de 240 cm.

7. Como a velocidade de cada veículo é constante, temos:

$\frac{4}{3} = \frac{6}{t_{CD}} \Rightarrow t_{CD} = \frac{18}{4} = 4{,}5 \rightarrow 4{,}5$ s

Assim, segue que:

distância percorrida (m)	tempo (s)
39 000	3 600
CD	4,5

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{39\,000}{CD} = \frac{3\,600}{4{,}5} \Rightarrow CD = 48{,}75 \rightarrow 48{,}75$ m

8. alternativa **c**

Os triângulos ABD e AFE são semelhantes pelo 1º caso (AA). Assim, chamando x o comprimento da haste $\overline{EF}$, podemos estabelecer a relação:

$\frac{AB}{AF} = \frac{BD}{EF} \Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{6}{x} \Rightarrow 6 \cdot AF = x \cdot AB \Rightarrow$

$\Rightarrow AF = \frac{x \cdot AB}{6}$ (I)

Os triângulos ABC e BFE são semelhantes pelo 1º caso (AA), então podemos construir a seguinte relação:

$\frac{AB}{BF} = \frac{AC}{EF} \Rightarrow \frac{AB}{BF} = \frac{4}{x} \Rightarrow 4 \cdot BF = x \cdot AB$

Como $BF = AB - AF$, então:

$4 \cdot BF = x \cdot AB \Rightarrow 4 \cdot (AB - AF) = x \cdot AB \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \cdot AB - 4 \cdot AF = x \cdot AB$ (II)

Substituindo I em II, obtemos:

$4 \cdot AB - 4 \cdot \left(\frac{x \cdot AB}{6}\right) = x \cdot AB \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \cdot AB - \frac{2}{3} \cdot (x \cdot AB) = x \cdot AB \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 - \frac{2}{3}x = x \Rightarrow x = \frac{12}{5} = 2{,}4$

Portanto, o comprimento da haste $\overline{EF}$ deve ser 2,4 m.

9. O ponto B se encontra 200 m mais alto do que o ponto A. Então, chamando x a diferença entre a altura do ponto A e a altura do ponto T, temos:

$\frac{700}{200} = \frac{70}{x} \Rightarrow 700x = 14\,000 \Rightarrow x = 20 \rightarrow 20$ m

Somando 20 m à altura do ponto A, obtemos 620 m, que é a altura em que o teleférico se encontra.

10. Resposta pessoal. Possível resposta: Em um mesmo momento, um prédio projeta uma sombra de 20 m de comprimento, enquanto uma pessoa de 1,7 m de altura projeta uma sombra de 85 cm de comprimento. Qual é a altura do prédio?

11. a) triângulo ABC

$20^2 = 12^2 + (AB)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 256 \Rightarrow AB = 16 \rightarrow 16$ u.c.

área: $A = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96 \rightarrow 96$ u.a.

perímetro: $P = 20 + 12 + 16 = 48 \rightarrow 48$ u.c.

b) quadrado $HIJL$

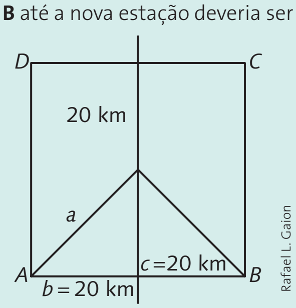
$(JL)^2 = 3^2 + 3^2 \Rightarrow (JL)^2 = 18 \Rightarrow JL = 3\sqrt{2} \rightarrow 3\sqrt{2}$ u.c.

área: $A = \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18 \rightarrow 18$ u.a.

perímetro: $P = 4 \cdot 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \rightarrow 12\sqrt{2}$ u.c.

12. alternativa **c**

a) Incorreta. Se a estação fosse localizada no centro do quadrado, a distância da estação **A** até a nova estação e da estação **B** até a nova estação deveria ser 20 km.

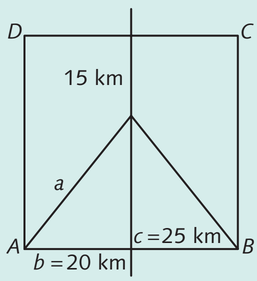


Mas:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 20^2 + 20^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = 800 \begin{cases} a_1 = -20\sqrt{2} \text{ (não convém)} \\ a_2 = 20\sqrt{2} \text{ (não convém, pois } a_2 \neq 20\text{)} \end{cases}$

b) Incorreta. Se a estação estiver a 15 km da estrada, então a distância de **A** até a nova estação e de **B** até a nova estação deveria ser também de 15 km. E nesse caso, a distância da estação até a estrada que liga **A** a **B** seria 25 km.

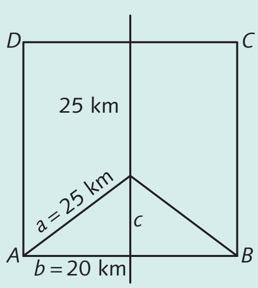


Mas:

$a^2 = 20^2 + 25^2 \Rightarrow a^2 = 400 + 625 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = 1025 \begin{cases} a_1 = -5\sqrt{41} \text{ (não convém)} \\ a_2 = 5\sqrt{41} \text{ (não convém, pois } a_2 \neq 25\text{)} \end{cases}$

c) Correta.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25^2 = 20^2 + c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2 = 225 \begin{cases} c_1 = -15 \text{ (não convém)} \\ c_2 = 15 \end{cases}$

d) Incorreta. Se o triângulo for equilátero, a distância de **A** até a nova estação e de **B** até a nova estação será 40 km. Nesse caso:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 40^2 = 20^2 + c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2 = 1600 - 400$

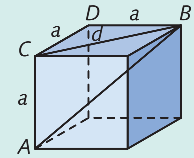
$\Rightarrow c^2 = 1200 \begin{cases} c_1 = -20\sqrt{3} \text{ (não convém)} \\ c_2 = 20\sqrt{3} \end{cases}$

Mas $c_2 = 20\sqrt{3}$ km também não convém, pois:

$40 - 20\sqrt{3} \simeq 5{,}36 < 40.$

e) Incorreta. O ponto médio entre **A** e **B** fica a 20 km de **A**. Sendo assim, a distância entre a nova estação e a estrada que liga **C** e **D** será 40 km, que é diferente de 20 km.

13.



Rafael L. Gaion

Inicialmente, obtemos d, no triângulo retângulo BCD, em função do comprimento a das arestas.

$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow d = \sqrt{2a^2} \Rightarrow d = a\sqrt{2} \rightarrow a\sqrt{2}$ cm

Do triângulo retângulo ABC, segue que:

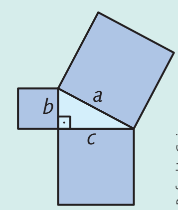
$20^2 = d^2 + a^2 \Rightarrow 400 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow 400 = 2a^2 + a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3a^2 = 400 \Rightarrow a = \dfrac{20\sqrt{3}}{3} \rightarrow \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ cm

Assim:

$V = a^3 \Rightarrow V = \left(\dfrac{20\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \dfrac{8\,000\sqrt{3}}{9} \rightarrow \dfrac{8\,000\sqrt{3}}{9}$ cm^3

14. alternativa **a**



Rafael L. Gaion

Do teorema de Pitágoras, segue que: $a^2 = b^2 + c^2$ (I)

Como a soma das áreas dos quadrados é 18, temos:

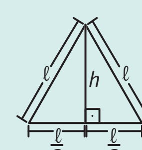
$a^2 + b^2 + c^2 = 18 \Rightarrow b^2 + c^2 = 18 - a^2$ (II)

A área do quadrado maior é dada por a^2. Substituindo II em I, temos:

$a^2 = \underbrace{b^2 + c^2}_{18 - a^2} \Rightarrow a^2 = 18 - a^2 \Rightarrow 2a^2 = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = \dfrac{18}{2} = 9 \rightarrow 9$ u.a.

15.



Rafael L. Gaion

$P = 3\ell \Rightarrow 36 = 3\ell \Rightarrow \ell = \dfrac{36}{3} \Rightarrow \ell = 12 \rightarrow 12$ cm

Segue que:

$\ell^2 = \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow 12^2 = \left(\dfrac{12}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 108 \Rightarrow h = 6\sqrt{3} \rightarrow 6\sqrt{3}$ cm

16. $2x^2 - 13x + 18 = 0 \begin{cases} x_1 = \dfrac{9}{2} \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Assim, a área A do quadrado é dada por:

$A = x_1 \cdot x_2 \Rightarrow A = \dfrac{9}{2} \cdot 2 \Rightarrow A = 9 \rightarrow 9$ u.a.

Como $A = \ell^2$, segue que: $A = \ell^2 \Rightarrow 9 = \ell^2 \Rightarrow \ell = 3.$

Dessa forma, temos:

$d^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow d^2 = 3^2 + 3^2 \Rightarrow d = 3\sqrt{2} \rightarrow 3\sqrt{2}$ u.c.

17. alternativa **d**

Se a TV é de 20 polegadas, então o comprimento de sua diagonal corresponde a $20 \cdot 2{,}54 = 50{,}8$ cm. Pelo teorema de Pitágoras, sendo A a altura de sua tela e C o comprimento da tela, temos:

$50{,}8^2 = A^2 + C^2 \quad (\mathrm{I})$

A razão entre o comprimento e da altura da tela dessa TV é 4 : 3, o que indica:

$\frac{C}{A} = \frac{4}{3} \Rightarrow 4A = 3C \Rightarrow A = \frac{3}{4}C \quad (\mathrm{II})$

Substituindo II em I, obtemos:

$50{,}8^2 = \left(\frac{3}{4}C\right)^2 + C \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\,580{,}64 = \frac{9}{16}C^2 + C^2 \Rightarrow 2\,580{,}64 = \frac{25}{16}C^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow C^2 = 1\,651{,}6096 \begin{cases} C_1 = -40{,}64 \text{ (não convém)} \\ C_2 = 40{,}64 \end{cases}$

Portanto, o comprimento da tela dessa TV é 40,64 cm.

18. a) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que não, pois essa relação é válida apenas para triângulos retângulos. Eles podem apresentar inclusive um contraexemplo de um triângulo não retângulo para justificar que a afirmação não está correta.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que os exemplos são úteis para facilitar a compreensão de conceitos e relações, porém não são suficientes para generalizar uma relação ou propriedade matemática, pois o que é válido em alguns casos pode não ser válido em outros. Assim, para generalizar, é necessário que se faça uma demonstração matemática.

c) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos citem ações como verificar e tentar demonstrar as generalizações feitas, procurar por incoerências e verificar as fontes e referências presentes no *blog*.

19. a) $(x + z)^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow (x + z)^2 = 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + z) = 10 \rightarrow 10$ cm

$10x = 6^2 \Rightarrow 10x = 36 \Rightarrow x = 3{,}6 \rightarrow 3{,}6$ cm

$10y = 6 \cdot 8 \Rightarrow 10y = 48 \Rightarrow y = 4{,}8 \rightarrow 4{,}8$ cm

$10z = 8^2 \Rightarrow 10z = 64 \Rightarrow z = 6{,}4 \rightarrow 6{,}4$ cm

b) $8^2 = \left(\frac{120}{17}\right)^2 + z^2 \Rightarrow 64 = \frac{14\,400}{289} + z^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow z^2 = \frac{4\,096}{289} \Rightarrow z = \frac{64}{17} \rightarrow \frac{64}{17}$ cm

$\frac{64}{17}y = 8^2 \Rightarrow \frac{64}{17}y = 64 \Rightarrow y = 17 \rightarrow 17$ cm

$17^2 = 8^2 + x^2 \Rightarrow 289 = 64 + x^2 \Rightarrow x^2 = 225 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 15 \rightarrow 15$ cm

20. Resposta pessoal. Possível resposta: o esquema a seguir mostra a posição em que está situada a casa de Carlos (no ponto C) e de alguns de seus colegas. Sabendo que Diogo mora na casa em que está situada no ponto D, determine a menor distância entre as casas de Diogo e de Carlos.

21. a) Sendo ℓ a hipotenusa do triângulo, temos:

$\ell^2 = 25^2 + 50^2 \Rightarrow \ell^2 = 3\,125 \Rightarrow \ell = 25\sqrt{5}$, pois $\ell > 0$.

Logo, o comprimento do lado maior da praça é $25\sqrt{5}$ m, ou aproximadamente 55,9 m.

b) Indicando por c o caminho, segue que:

$25\sqrt{5} \cdot c = 25 \cdot 50 \Rightarrow 25\sqrt{5} \cdot c = 1250 \Rightarrow c = 10\sqrt{5}$, pois $c > 0$.

Portanto, o comprimento do caminho que será construído é $10\sqrt{5}$ m ou aproximadamente 22,4 m.

22. Os comprimentos dos lados descritos na tarefa podem corresponder a dois catetos ou a um cateto e a hipotenusa. Assim, devemos analisar as duas situações.

- Supondo catetos cujos comprimentos são 4 cm e 6 cm, pelo teorema de Pitágoras, o comprimento x da hipotenusa será dado por:

$$x^2 = 4^2 + 6^2 \Rightarrow x^2 = 52 \Rightarrow x = 2\sqrt{13}, \text{ pois } x > 0$$

- Com base nesses dados, o comprimento da altura relativa à hipotenusa, denotado por h, será dada por:

$$2\sqrt{13} \cdot h = 4 \cdot 6 \Rightarrow 2\sqrt{13} \cdot h = 24 \Rightarrow h = \frac{12\sqrt{13}}{13}$$

Esse resultado não corresponde ao valor indicado no enunciado. Logo, essa situação não é possível.

- Supondo um cateto com 4 cm de comprimento e a hipotenusa de 6 cm de comprimento, pelo teorema de Pitágoras, o comprimento y do segundo cateto será dado por:

$$6^2 = 4^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 20 \Rightarrow y = 2\sqrt{5}$$

- Com base nesses dados, o comprimento da altura relativa à hipotenusa, denotado por h, será dada por:

$$6h = 4 \cdot 2\sqrt{5} \Rightarrow 6h = 8\sqrt{5} \Rightarrow h = \frac{4\sqrt{5}}{3}$$

Esse resultado corresponde ao valor indicado no enunciado. Portanto, o comprimento do terceiro lado do triângulo é $2\sqrt{5}$ cm, o qual corresponde a um dos catetos do triângulo retângulo.

23. a) Indicando por h a altura do chão ao local que os cabos foram fixados no poste, temos:

$h^2 = 10 \cdot 10 \Rightarrow h^2 = 100 \Rightarrow h = 10 \rightarrow 10$ m

b) Sendo c o comprimento de cada cabo, temos:

$c^2 = 10^2 + 10^2 \Rightarrow c^2 = 200 \Rightarrow c = 10\sqrt{2} \rightarrow 10\sqrt{2}$ m

Portanto, o comprimento de cada cabo é aproximadamente 14,14 m.

24. Indicando por a a hipotenusa do triângulo e h, a altura do triângulo relativa a hipotenusa, temos:

$\frac{8\sqrt{13}}{13} \cdot a = 4^2 \Rightarrow \frac{8\sqrt{13}}{13} \cdot a = 16 \Rightarrow a = 2\sqrt{13}$

$h^2 = \frac{8\sqrt{13}}{13} \cdot \left(2\sqrt{13} - \frac{8\sqrt{13}}{13}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = \frac{8\sqrt{13}}{13} \cdot \frac{18\sqrt{13}}{13} \Rightarrow h^2 = \frac{144}{13} \Rightarrow h = \frac{12\sqrt{13}}{13}$

Área: $A = \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{2\sqrt{13} \cdot \frac{12\sqrt{13}}{13}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 12 \rightarrow 12\ \text{cm}^2$

25. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos verifiquem se as medidas apresentadas são suficientes para que as outras medidas possam ser determinadas pelo colega.

26. a) • $5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \sqrt{16} = 4$

• $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$ • $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ • $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$

b) • $13^2 = 12^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25} = 5$

• $\operatorname{sen}\alpha = \frac{12}{13}$ • $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ • $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$

c) • $x^2 = 7^2 + 7^2 = 98 \Rightarrow x = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$

• $\operatorname{sen}\alpha = \frac{7}{7\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ • $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{7} = 1$

• $\cos\alpha = \frac{7}{7\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $x^2 = 36^2 + \left(12\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 1\,296 + 432 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 1728 \Rightarrow x = 24\sqrt{3}$

- $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{36}{24\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos \alpha = \dfrac{12\sqrt{3}}{24\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$
- $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{36}{12\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

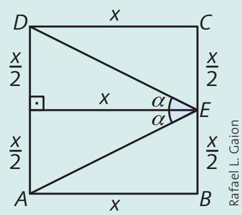
27. Resposta pessoal. Possível resposta: no triângulo retângulo *ABC* a seguir, o ângulo β mede 60° e o lado $\overline{AC}$ tem 15 cm de comprimento.

28. $\operatorname{sen} 14° = \dfrac{3}{d} \Rightarrow 0{,}24 = \dfrac{3}{d} \Rightarrow d = \dfrac{3}{0{,}24} \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 12{,}5 \rightarrow 12{,}5$ m

29. alternativa **a**

Chamando o comprimento do lado do quadrado de x e traçando uma reta paralela a $\overline{AB}$ passando por E, temos a seguinte figura:



Assim, temos: $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\frac{x}{2}}{x} = \dfrac{1}{2}$

30.
- $(AC)^2 = \left(\dfrac{9}{4}\right)^2 + 3^2 = \dfrac{225}{16} \Rightarrow AC = \sqrt{\dfrac{225}{16}} = \dfrac{15}{4}$

$\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{3}{\frac{15}{4}} = \dfrac{4}{5}$ $\qquad$ $\operatorname{sen} \beta = \dfrac{\frac{9}{4}}{\frac{15}{4}} = \dfrac{3}{5}$

$\cos \alpha = \dfrac{\frac{9}{4}}{\frac{15}{4}} = \dfrac{3}{5}$ $\qquad$ $\cos \beta = \dfrac{3}{\frac{15}{4}} = \dfrac{4}{5}$

$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{3}{\frac{9}{4}} = \dfrac{4}{3}$ $\qquad$ $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{\frac{9}{4}}{3} = \dfrac{3}{4}$

- $(DF)^2 = 6^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 44 \Rightarrow DF = 2\sqrt{11}$

$\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{11}} = \dfrac{\sqrt{22}}{11}$ $\qquad$ $\operatorname{sen} \beta = \dfrac{6}{2\sqrt{11}} = \dfrac{3\sqrt{11}}{11}$

$\cos \alpha = \dfrac{6}{2\sqrt{11}} = \dfrac{3\sqrt{11}}{11}$ $\qquad$ $\cos \beta = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{11}} = \dfrac{\sqrt{22}}{11}$

$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{6} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ $\qquad$ $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{6}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

- $(HI)^2 = 2^2 + \left(\sqrt{32}\right)^2 = 36 \Rightarrow HI = \sqrt{36} = 6$

$\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ $\qquad$ $\operatorname{sen} \beta = \dfrac{\sqrt{32}}{6} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{32}}{6} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ $\qquad$ $\cos \beta = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2}{\sqrt{32}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ $\qquad$ $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{\sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2}$

Em cada triângulo, $\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$ e $\operatorname{sen} \beta = \cos \alpha$, pois α e β são complementares.

31.
- $\triangle ABC$

$\operatorname{tg} 30° = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{7\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = 21$

$\operatorname{sen} 30° = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{7\sqrt{3}}{y} \Rightarrow y = 14\sqrt{3}$

- $\triangle DEF$

$\operatorname{tg} 60° = \dfrac{DE}{EF} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{x}{3} \Rightarrow x = 3\sqrt{3}$

$\cos 60° = \dfrac{EF}{DF} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{y} \Rightarrow y = 6$

32. $\operatorname{tg} 60° = \dfrac{AC}{6} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{AC}{6} \Rightarrow AC = 6\sqrt{3}$

$\operatorname{tg} 45° = \dfrac{6\sqrt{3}}{x+6} \Rightarrow 1 = \dfrac{6\sqrt{3}}{x+6} \Rightarrow x + 6 = 6\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 6\left(\sqrt{3} - 1\right)$

33. a) $AB + \overbrace{BC}^{AB} + \overbrace{AC}^{AB} = 24 \Rightarrow 3AB = 24 \Rightarrow AB = 8$

altura: $\dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \rightarrow 4\sqrt{3}$ cm

b) $x + \overbrace{y}^{x} + \overbrace{z}^{x} = 180° \Rightarrow 3x = 180° \Rightarrow x = 60°$

Portanto, $x = y = z = 60°$.

c)
- $\operatorname{sen} y = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos y = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$
- $\operatorname{tg} y = \dfrac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

34. a) Falso, pois $(CA)^2 = 21^2 + 28^2 \Rightarrow (CA)^2 = 1\,225 \Rightarrow$

$\Rightarrow CA = \sqrt{1\,225} \Rightarrow CA = 35 \rightarrow 35$ m

b) Verdadeiro, pois $\operatorname{sen} \beta = \dfrac{\text{comp. cateto oposto a } \beta}{\text{comp. da hipotenusa}} =$

$= \dfrac{21}{35}$ e $\cos \alpha = \dfrac{\text{comp. cateto adjacente a } \alpha}{\text{comp. da hipotenusa}} = \dfrac{21}{35}$.

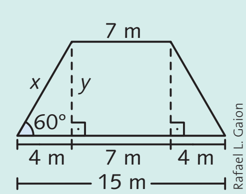
c) Verdadeiro, pois se h é o comprimento da altura desse triângulo em relação à hipotenusa, temos:

$\dfrac{21}{35} = \dfrac{h}{28} \Rightarrow 35h = 588 \Rightarrow h = \dfrac{84}{5} \rightarrow \dfrac{84}{5}$ m

d) Falso, pois $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{21}{28} = 0{,}75$.

e) Verdadeiro, pois o perímetro é $21 + 28 + 35 = 84 \rightarrow 84$ m

35.

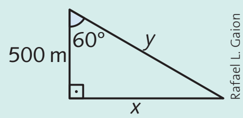


$\operatorname{tg} 60° = \dfrac{y}{4} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{y}{4} \Rightarrow y = 4\sqrt{3}$

$\operatorname{sen} 60° = \dfrac{4\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \Rightarrow x = 8$

36.



- Maria

$\text{tg } 60° = \dfrac{x}{500} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{x}{500} \Rightarrow x = 500\sqrt{3}$

$\dfrac{500\sqrt{3}}{1{,}2} \simeq 721 \rightarrow$ aproximadamente 721 s ou 12 min 1 s

- Lucas

$\cos 60° = \dfrac{500}{y} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{500}{y} \Rightarrow y = 1\,000$

$\dfrac{1\,000}{1{,}3} \simeq 769 \rightarrow$ aproximadamente 769 s ou 12 min 49 s

37. Resposta pessoal. Possível resposta: um engenheiro agrimensor realizou o levantamento topográfico de um terreno em formato de triângulo retângulo *ABC*. Sabendo que o lado $\overline{AB}$ desse terreno tem 25 m de comprimento e que as medidas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são 90° e 30°, respectivamente, determine os valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos agudos.

38.
- $\triangle ABC$

  $\text{sen } \alpha = \dfrac{7}{9} \simeq 0{,}7778;\ \alpha \simeq 51°$

- $\triangle DEF$

  $\text{tg } \alpha = \dfrac{3{,}5}{2{,}9} \simeq 1{,}2069;\ \alpha \simeq 50°$

- $\triangle JLM$

  $\text{tg } \alpha = \dfrac{11{,}7}{2{,}2} \simeq 5{,}3182;\ \alpha \simeq 79°$

39. $\cos \alpha = \dfrac{4}{5}$, ou seja, o cateto adjacente é 4 e a hipotenusa é 5. Considerando *x* o cateto oposto, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$5^2 = 4^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$

Assim, a $\text{tg } \alpha = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \text{tg } \alpha = 0{,}75$

40.
- $\triangle ABC$

  $\text{tg } 31° = \dfrac{3{,}6}{x} \Rightarrow 0{,}6009 \simeq \dfrac{3{,}6}{x} \Rightarrow x \simeq \dfrac{3{,}6}{0{,}6009} \simeq 5{,}99$

  $\text{sen } 31° = \dfrac{3{,}6}{y} \Rightarrow 0{,}5150 \simeq \dfrac{3{,}6}{y} \Rightarrow y \simeq \dfrac{3{,}6}{0{,}5150} \simeq 6{,}99$

- $\triangle DEF$

  $\cos 45° = \dfrac{x}{6{,}2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{x}{6{,}2} \Rightarrow x \simeq 4{,}38$

  $\text{sen } 45° = \dfrac{y}{6{,}2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{y}{6{,}2} \Rightarrow y \simeq 4{,}38$

- $\triangle GHI$

  $\text{tg } 60° = \dfrac{x}{4} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{x}{4} \Rightarrow x \simeq 6{,}93$

  $\cos 60° = \dfrac{4}{y} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{y} \Rightarrow y = 8$

- $\triangle JLM$

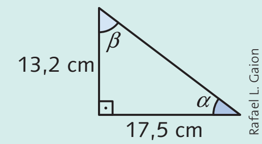
  $\text{tg } 20° = \dfrac{x}{7{,}9} \Rightarrow 0{,}3640 \simeq \dfrac{x}{7{,}9} \Rightarrow x \simeq 2{,}88$

  $\cos 20° = \dfrac{7{,}9}{y} \Rightarrow 0{,}9397 \simeq \dfrac{7{,}9}{y} \Rightarrow y \simeq 8{,}41$

41.
- $\text{sen } 43° = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow 0{,}6820 \simeq \dfrac{h}{35} \Rightarrow h \simeq 23{,}87$

- $\cos 28° = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow 0{,}8829 = \dfrac{23{,}87}{AC} \Rightarrow AC \simeq 27{,}04$

42.

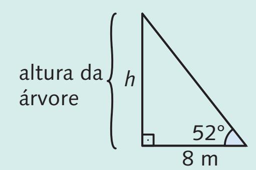


- $\text{tg } \alpha = \dfrac{13{,}2}{17{,}5} \Rightarrow \text{tg } \alpha \simeq 0{,}7543 \Rightarrow \alpha \simeq 37°$

- $\text{tg } \beta = \dfrac{17{,}5}{13{,}2} \Rightarrow \text{tg } \beta \simeq 1{,}3258 \Rightarrow \beta \simeq 53°$

  Portanto, as medidas aproximadas dos ângulos internos do triângulo são 37°, 53° e 90°.

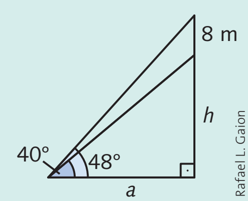
43.



$\text{tg } 52° = \dfrac{h}{8} \Rightarrow 1{,}2799 \simeq \dfrac{h}{8} \Rightarrow h \simeq 10{,}24 \rightarrow$

$\rightarrow$ aproximadamente 10,24 m

44.



$\text{tg } 40° = \dfrac{h}{a} \Rightarrow 0{,}8391 \simeq \dfrac{h}{a} \Rightarrow h \simeq 0{,}8391 \cdot a$

$\text{tg } 48° = \dfrac{\overbrace{h}^{0{,}8391 \cdot a} + 8}{a} \Rightarrow 1{,}1106 \simeq \dfrac{0{,}8391a + 8}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow a \simeq 29{,}47$

Portanto, a altura do prédio é:

$h + 1{,}7 \simeq 0{,}8391 \cdot 29{,}47 + 1{,}7 \simeq 26{,}43 \rightarrow$

$\rightarrow$ aproximadamente 26,43 m

45. $\text{tg } 40° = \dfrac{x}{BD} \Rightarrow 0{,}8391 \simeq \dfrac{x}{BD} \Rightarrow x = 0{,}8391 \cdot BD$

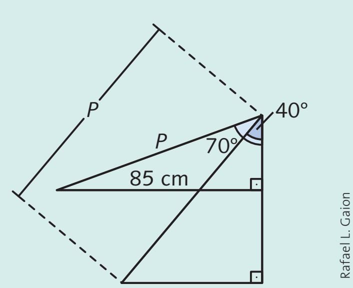
$\text{tg } 15° = \dfrac{x}{7 + BD} \Rightarrow 0{,}2679 \simeq \dfrac{x}{7 + BD} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}8753 + 0{,}2679 \cdot BD \simeq x \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}8753 + 0{,}2679 \cdot BD \simeq 0{,}8391 \cdot BD \Rightarrow BD \simeq 3{,}28$

Logo, $x \simeq 0{,}8391 \cdot 3{,}28 \simeq 2{,}75$.

46.



$\text{sen } 70° = \dfrac{85}{p} \Rightarrow 0{,}9397 \simeq \dfrac{85}{p} \Rightarrow p \simeq 90{,}45$

$\text{sen } 40° \simeq \dfrac{x}{90{,}45} \Rightarrow 0{,}6428 \simeq \dfrac{x}{90{,}45} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \simeq 58{,}14 \rightarrow$ aproximadamente 58,14 cm

47. Resposta pessoal. Possível resposta: para auxiliar na sustentação de um poste perpendicular ao solo, foi fixado um cabo de aço, em seu topo, formando com o solo um ângulo de 30°. Sabendo que, no solo, o cabo de aço foi fixado a 10 m da base do poste, determine a altura desse poste.

48. a) $\text{sen } 12° \simeq 0{,}2079$

$\cos 12° \simeq 0{,}9781$

$\text{tg } 12° \simeq 0{,}2126$

b) $\text{sen } 63° \simeq 0{,}8910$

$\cos 63° \simeq 0{,}4540$

$\text{tg } 63° \simeq 1{,}9626$

c) $\text{sen } 2° \simeq 0{,}0349$

$\cos 2° \simeq 0{,}9994$

$\text{tg } 2° \simeq 0{,}0349$

d) $\text{sen } 88° \simeq 0{,}9994$

$\cos 88° \simeq 0{,}0349$

$\text{tg } 88° \simeq 28{,}6363$

e) $\text{sen } 72° \simeq 0{,}9511$

$\cos 72° \simeq 0{,}3090$

$\text{tg } 72° \simeq 3{,}0777$

f) $\text{sen } 70{,}5° \simeq 0{,}9426$

$\cos 70{,}5° \simeq 0{,}3338$

$\text{tg } 70{,}5° \simeq 2{,}8239$

49.
- $\triangle ABC$

$\text{tg } 22° = \frac{4}{x} \Rightarrow 0{,}4040 \simeq \frac{4}{x} \Rightarrow x \simeq 9{,}90$

- $\triangle DEF$

$\text{sen } 13° = \frac{x}{20} \Rightarrow 0{,}2250 \simeq \frac{x}{20} \Rightarrow x \simeq 4{,}5$

- $\triangle GHI$

$\cos 71° = \frac{x}{2{,}37} \Rightarrow 0{,}3256 \simeq \frac{x}{2{,}37} \Rightarrow x \simeq 0{,}77$

50. a) $\alpha \simeq 46°$ c) $\alpha \simeq 61°$

b) $\alpha \simeq 19°$ d) $\alpha \simeq 9°$

51. a)
- $\text{sen } 150° = \text{sen}(180° - 150°) = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$
- $\cos 150° = -\cos(180° - 150°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b)
- $\text{sen } 135° = \text{sen}(180° - 135°) = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 135° = -\cos(180° - 135°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c)
- $\text{sen } 110° = \text{sen}(180° - 110°) = \text{sen } 70° \simeq 0{,}9397$
- $\cos 110° = -\cos(180° - 110°) = -\cos 70° \simeq -0{,}3420$

d)
- $\text{sen } 126° = \text{sen}(180° - 126°) = \text{sen } 54° \simeq 0{,}8090$
- $\cos 126° = -\cos(180° - 126°) = -\cos 54° \simeq -0{,}5878$

e)
- $\text{sen } 152° = \text{sen}(180° - 152°) = \text{sen } 28° \simeq 0{,}4695$
- $\cos 152° = -\cos(180° - 152°) = -\cos 28° \simeq -0{,}8829$

f)
- $\text{sen } 137° = \text{sen}(180° - 137°) = \text{sen } 43° \simeq 0{,}6820$
- $\cos 137° = -\cos(180° - 137°) = -\cos 43° \simeq -0{,}7314$

52. $x^2 = 6^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 36 + 18 - 36\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = \sqrt{18} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3\sqrt{2}$

53. $8^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos\alpha \Rightarrow 64 = 2r^2 - 2r^2 \cdot \frac{7}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = \frac{400}{9} \Rightarrow r = \frac{20}{3}$

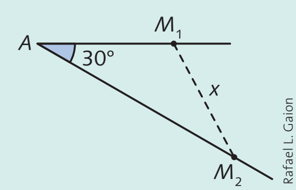
54. Resposta pessoal. Possível resposta: uma possibilidade é que se desenhe um triângulo com lados $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm e $BC = 5{,}8$ cm e solicite que se calcule o $\cos \hat{B}$.

55. $\left(4\sqrt{7}\right)^2 = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \overbrace{\cos 120°}^{-\cos(180° - 120°)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 112 = x^2 + 4x^2 - 4x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

perímetro: $x + 2x + x + 2x = 4 + 8 + 4 + 8 = 24 \rightarrow 24$ cm

56.



$AM_1 = 3 \cdot 12 = 36 \rightarrow 36$ m
$AM_2 = 5 \cdot 12 = 60 \rightarrow 60$ m

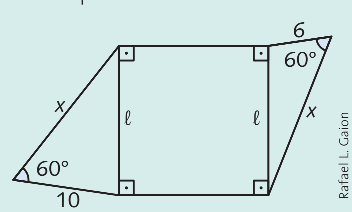
$x^2 = 60^2 + 36^2 - 2 \cdot 60 \cdot 36 \cdot \cos 30° =$

$= 3\,600 + 1\,296 - 4\,320 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= 4\,896 - 2\,160\sqrt{3} \Rightarrow x \simeq 34$

Portanto, a distância aproximada entre os móveis após 12 segundos é aproximadamente 34 m.

57.



De acordo com o esquema, podemos determinar as seguintes equações:

- $\ell^2 = 10^2 + x^2 - 2 \cdot 10 \cdot x \cdot \cos 60° \Rightarrow$

  $\Rightarrow \ell^2 = 100 + x^2 - 20 \cdot x \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \ell^2 = 100 + x^2 - 10x$

- $\ell^2 = 6^2 + x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x \cdot \cos 60° \Rightarrow$

  $\Rightarrow \ell^2 = 36 + x^2 - 12 \cdot x \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \ell^2 = 36 + x^2 - 6x$

Assim, segue que:

$$\begin{cases} \ell^2 = 100 + x^2 - 10x \\ \ell^2 = 36 + x^2 - 6x \quad (-1) \end{cases}$$
$$\overline{0 = 64 - 4x} \quad \Rightarrow x = 16$$

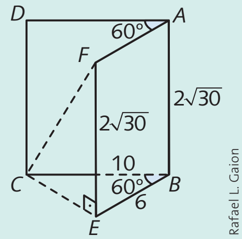
$\ell^2 = 100 + x^2 - 10x \Rightarrow \ell^2 = 100 + 16^2 - 10 \cdot 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell^2 = 196 \Rightarrow \ell = 14$

$P = 4 \cdot \ell = 4 \cdot 14 = 56$

Portanto, o perímetro do quadrado $ABCD$ é 56 u.c.

58.



- △*BCE*

$(CE)^2 = (BC)^2 + (BE)^2 - 2 \cdot BC \cdot BE \cdot \cos C\hat{B}E \Rightarrow$

$\Rightarrow (CE)^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow (CE)^2 = 76 \Rightarrow CE = \sqrt{76}$

- △*CEF*

$(CF)^2 = (CE)^2 + (EF)^2 \Rightarrow (CF)^2 = \left(\sqrt{76}\right)^2 + \left(2\sqrt{30}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (CF)^2 = 196 \Rightarrow CF = 14$

59. $6^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{8}$

$\cos\alpha = \dfrac{BD}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{8} = \dfrac{BD}{4} \Rightarrow BD = \dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{2}$ cm

60. $\dfrac{4\sqrt{2}}{\text{sen } 45°} = \dfrac{AB}{\underbrace{\text{sen } 120°}_{\text{sen}(180° - 120°)}} \Rightarrow \dfrac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 4\sqrt{3}$

61.
- △*ABC*

$\dfrac{20}{\text{sen } 30°} = \dfrac{x}{\text{sen } 70°} \Rightarrow \dfrac{20}{\frac{1}{2}} \simeq \dfrac{x}{0{,}9397} \Rightarrow x \simeq 37{,}59$

$70° + \hat{B} + 30° = 180° \Rightarrow \hat{B} = 80°$

$\dfrac{y}{\text{sen } 80°} = \dfrac{20}{\text{sen } 30°} \Rightarrow \dfrac{y}{0{,}9848} \simeq \dfrac{20}{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow y \simeq 39{,}39$

- △*DEF*

$54° + 37° + \hat{F} = 180° \Rightarrow \hat{F} = 89°$

$\dfrac{16}{\text{sen } 89°} = \dfrac{x}{\text{sen } 54°} \Rightarrow \dfrac{16}{0{,}9998} \simeq \dfrac{x}{0{,}8090} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \simeq 12{,}95$

$\dfrac{16}{\text{sen } 89°} = \dfrac{y}{\text{sen } 37°} \Rightarrow \dfrac{16}{0{,}9998} \simeq \dfrac{y}{0{,}6018} \Rightarrow y \simeq 9{,}63$

62. $\dfrac{x}{\text{sen } 60°} = \dfrac{5\sqrt{3}}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \dfrac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \dfrac{45}{4}$

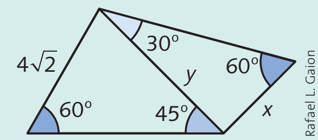
63. $50° + 100° + \hat{A} = 180° \Rightarrow \hat{A} = 30°$

$\dfrac{30}{\text{sen } 30°} = \dfrac{AB}{\text{sen } 50°} \Rightarrow \dfrac{30}{\frac{1}{2}} \simeq \dfrac{AB}{0{,}7660} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB \simeq 45{,}96 \to 45{,}96$ m

64. $\dfrac{10\sqrt{2}}{\text{sen } 45°} = \dfrac{5}{\text{sen } \hat{A}} \Rightarrow \dfrac{10\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{5}{\text{sen } \hat{A}} \Rightarrow \text{sen } \hat{A} = \dfrac{1}{4}$

65.



$\dfrac{y}{\text{sen } 60°} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\text{sen } 45°} \Rightarrow \dfrac{y}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow y = 4\sqrt{3}$

$\dfrac{x}{\text{sen } 30°} = \dfrac{y}{\text{sen } 60°} \Rightarrow \dfrac{x}{\frac{1}{2}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow x = 4$

66. Resposta pessoal. Possível resposta: no esquema, estão representadas as medições feitas por um topógrafo de certa cidade a fim de realizar um projeto de melhoria na pavimentação desse local. De acordo com o esquema, determine os comprimentos de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ obtidos pelo topógrafo.

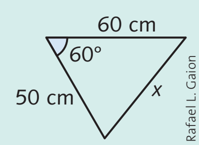
67. a) $\dfrac{BC}{\text{sen } \alpha} = \dfrac{75}{\text{sen } \beta} \Rightarrow \dfrac{BC}{\frac{4}{5}} = \dfrac{75}{\frac{5}{8}} \Rightarrow BC = 96 \to 96$ km

b) Como *DE* e *BC* são paralelas, temos: $A\hat{E}D = \beta$.
Assim:

$\dfrac{50}{\text{sen } \beta} = \dfrac{DE}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \dfrac{50}{\frac{5}{8}} = \dfrac{DE}{\frac{4}{5}} \Rightarrow DE = 64 \to 64$ km

68. Resolução na página **268**.

69.



$A = \dfrac{50 \cdot 60 \cdot \text{sen } 60°}{2} = 1\,500 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} =$

$= 750\sqrt{3} \to 750\sqrt{3}\ \text{m}^2$

$x^2 = 50^2 + 60^2 - 2 \cdot 50 \cdot 60 \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 2\,500 + 3\,600 - 6\,000 \cdot \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 3\,100 \Rightarrow x = 10\sqrt{31}$ m $\to 10\sqrt{31}$ m

Assim, $P = 50 + 60 + 10\sqrt{31} =$

$= \left(110 + 10\sqrt{31}\right) \to \left(110 + 10\sqrt{31}\right)$ m.

70. alternativa **b**

$S_1 = \dfrac{a \cdot a \cdot \text{sen } 30°}{2} = \dfrac{a^2 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}a^2$

$S_2 = \dfrac{a \cdot a \cdot \text{sen } 45°}{2} = \dfrac{a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}a^2$

$S_3 = \dfrac{a \cdot a \cdot \text{sen } 60°}{2} = \dfrac{a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$S = S_1 + S_2 + S_3 = \dfrac{1}{4}a^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{4}a^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 =$

$= \dfrac{a^2}{4}\left(\sqrt{2} + 1 + \sqrt{3}\right)$

71. $25 = \dfrac{5\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 25 = 25\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$

ou $\alpha = 135°$

72. Resolução na página **268**.

73. a) $\operatorname{sen}\hat{C} = \dfrac{BD}{CD} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{C} = \dfrac{2}{\frac{6}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{C} = \dfrac{2}{3}$

b) $(CD)^2 = (BD)^2 + (BC)^2 \Rightarrow 3^2 = 2^2 + (BC)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (BC)^2 = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = \sqrt{5} \rightarrow \sqrt{5}$ cm.

c) $S = \dfrac{AC \cdot BC \cdot \operatorname{sen}\hat{C}}{2} \Rightarrow S = \dfrac{6 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{2}{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = 2\sqrt{5} \rightarrow 2\sqrt{5}$ cm^2.

74. Resolução na página **269**.

Capítulo 2 Funções trigonométricas

Em algumas situações, considerou-se $\pi = 3{,}14$ nas resoluções. Nesses casos, a medida obtida não será exata, pois utilizamos uma aproximação para o número irracional π.

1. a) $\{a, d, e, r, s, t, u\}$; finito

b) $\{4, 8, 12, 16, \dots\}$; infinito

c) $\{$PR, SC, RS$\}$; finito

2. a) Correta, pois $2 \in A$.

b) Correta, pois $3 \in A$.

c) Correta, pois $5 \notin A$.

d) Correta, pois $\{2\}$ é subconjunto de A, logo $\{2\} \subset A$.

e) Incorreta, pois $\{0, 3\}$ é subconjunto de A, logo $\{0, 3\} \subset A$.

f) Incorreta, pois $\{2, 5\}$ não é subconjunto de A, logo $\{2, 5\} \not\subset A$.

3. a) Verdadeira.

b) Falsa, pois $0 \notin \mathbb{R}^*$.

c) Falsa, pois $3 \notin \left]3, 10\right[$.

d) Verdadeira.

e) Falsa, pois $-5 \notin \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 5\}$.

4. alternativas **a**, **b** e **d**

a) Correta, pois $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

b) Correta, pois $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

c) Incorreta, pois $1 \in \mathbb{N}$ e $1 \notin \mathbb{I}$.

d) Correta, pois $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

e) Incorreta, pois $\sqrt{3} \in \mathbb{I}$ e $\sqrt{3} \notin \mathbb{N}$.

5. $-\dfrac{N}{9} > -\dfrac{19}{5} \Rightarrow -N > -34{,}2 \Rightarrow N < 34{,}2$

Assim, o maior número natural que torna a desigualdade verdadeira é $N = 34$.

6. a) Falsa, pois o domínio e o contradomínio de uma função podem ser iguais.

b) Falsa, pois o conjunto imagem de uma função nem sempre é diferente do contradomínio.

c) Verdadeira.

7. a) $D(h) = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$

b) $CD(h) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

c) $Im(h) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

8. $f(-2) = 4 \cdot (-2) - 1 = -9$

$f(-1) = 4 \cdot (-1) - 1 = -5$

$f(0) = 4 \cdot 0 - 1 = -1$

$f(1) = 4 \cdot 1 - 1 = 3$

$f(2) = 4 \cdot 2 - 1 = 7$

$f(3) = 4 \cdot 3 - 1 = 11$

$f(4) = 4 \cdot 4 - 1 = 15$

Portanto, $Im(f) = \{-9, -5, -1, 3, 7, 11, 15\}$.

9. $f(x) = \dfrac{3x + 1}{2} = 8 \Rightarrow 3x + 1 = 16 \Rightarrow x = 5$

Portanto, o elemento do domínio de f, cuja imagem é 8 é o 5.

10. Resposta pessoal. Possível resposta: Considere a função definida por $f(x) = x^2 + 1$, determine:

a) se há restrição no domínio.

b) o conjunto imagem.

c) o valor máximo (se houver) e o valor mínimo (se houver).

11. a) Para $f(x) = \dfrac{5}{2x + 1}$ ser definido no domínio, o denominador da fração precisa ser diferente de zero, assim:

$2x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\dfrac{1}{2}$

Portanto, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\dfrac{1}{2}\right\}$.

b) Para $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{x - 1}$ ser definido no domínio, a raiz precisa ser não negativa, assim:

$\sqrt{x + 1} \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -1$

Além disso, o denominador da fração precisa ser diferente de zero, assim:

$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1 \text{ e } x \neq 1\}$.

c) Para $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x + 4}}$ ser definida no domínio, a raiz precisa ser não negativa e o denominador da fração precisa ser diferente de zero. Assim:

$\sqrt{2x + 4} > 0 \Rightarrow x > -2$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$.

12. a) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = 3$.

b) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}$.

c) $D(f) = \{-5, 0, 1, 2, 3\}$; $Im(f) = \left\{-1, -\dfrac{3}{2}, 2, \dfrac{11}{2}, 9\right\}$.

13. $D = 2r \Rightarrow 18 = 2r \Rightarrow r = 9 \rightarrow 9$ cm

Assim:

$C = 2\pi \cdot 9 \Rightarrow C \simeq 56{,}52$

Portanto, o comprimento aproximado da circunferência é 56,52 cm.

14. $C = 2\pi r \Rightarrow 94{,}2 = 2\pi r \Rightarrow r \simeq 15$, ou seja, aproximadamente 15 cm.

15. Resposta pessoal. Possíveis respostas:
- Qual é o comprimento do diâmetro dessa circunferência?
- Qual é o comprimento do raio dessa circunferência?
- Qual é o comprimento dessa circunferência?

16. O comprimento da correia é dado por:
$\frac{1}{2}C + 20 + 20 + \frac{1}{2}C = C + 40 =$
$= 2\pi \cdot 4 + 40 \simeq 65{,}12 \rightarrow$ aproximadamente 65,12 cm

17. $C_1 - C_2 = 2\pi \cdot r - 2\pi \cdot \frac{r}{2} \Rightarrow 2\pi r - \pi r = \pi r$
Portanto, a diferença entre os comprimentos dessas circunferências é πr.

18. a) O giro corresponde a 180°.
b) Porque a volta completa deixaria novamente a embarcação na posição inicial.

19. a) $\frac{180}{30} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow x = \frac{30\pi}{180} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ rad

b) $\frac{180}{72} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow x = \frac{72\pi}{180} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{5}$ rad

c) $\frac{180}{245} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow x = \frac{245\pi}{180} \Rightarrow x = \frac{49\pi}{36}$ rad

d) $\frac{180}{320} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow x = \frac{320\pi}{180} \Rightarrow x = \frac{16\pi}{9}$ rad

e) $\frac{180}{96} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow x = \frac{96\pi}{180} \Rightarrow x = \frac{8\pi}{15}$ rad

f) Como 1° = 60', então 30' = 0,5°.
Logo, 216° 30' = 216,5°
$\frac{180}{216{,}5} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow x = \frac{216{,}5\pi}{180} \Rightarrow x = \frac{433\pi}{360}$ rad

20. a) $\frac{\pi}{5}$ rad $\Rightarrow \frac{180°}{5} = 36°$

b) $\frac{4\pi}{9}$ rad $\Rightarrow \frac{4 \cdot 180°}{9} = 80°$

c) $\frac{89\pi}{100}$ rad $\Rightarrow \frac{89 \cdot 180°}{100} = 160{,}2°$
Como 0,2° = 0,2 • 60' = 12', então:
$\frac{89\pi}{100}$ rad = 160°12'
- Resposta pessoal. Possível resposta: $\frac{35\pi}{8}$ rad e $\frac{7\pi}{3}$ rad.

21. a) • $\widehat{AB}$
$\frac{180°}{30°} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 30\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ rad
$\alpha = \frac{\ell}{r} \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{\ell}{3} \Rightarrow 6\ell = 3\pi \Rightarrow \ell \simeq 1{,}57 \rightarrow 1{,}57$ cm

b) • $\widehat{EF}$
$\frac{180°}{135°} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 135\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ rad
$\alpha = \frac{\ell}{r} \Rightarrow \frac{3\pi}{4} = \frac{\ell}{8} \Rightarrow \ell = 6\pi \Rightarrow \ell \simeq 18{,}84 \rightarrow 18{,}84$ cm

c) • $\widehat{CD}$
$\frac{180°}{120°} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 120\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ rad
$\alpha = \frac{\ell}{r} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{\ell}{1} \Rightarrow \ell \simeq 2{,}09 \rightarrow 2{,}09$ cm

d) • $\widehat{GH}$
$\frac{180°}{\underbrace{349°}_{360°-11°}} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 349\pi \Rightarrow x = \frac{349\pi}{180}$ rad
$\alpha = \frac{\ell}{r} \Rightarrow \frac{349\pi}{180} = \frac{\ell}{2} \Rightarrow 180\ell = 2 \cdot 349 \cdot \pi \Rightarrow$
$\Rightarrow \ell \simeq 12{,}18 \rightarrow 12{,}18$ cm

22. $C_{CE} + C_{EF} + C_{FG} + C_{GH} + C_{HI} + C_{IJ} + C_{JL} =$
$= \frac{2\pi \cdot 13}{4} + \frac{2\pi \cdot 8}{4} + \frac{2\pi \cdot 5}{4} + \frac{2\pi \cdot 3}{4} +$
$+ \frac{2\pi \cdot 2}{4} + \frac{2\pi \cdot 1}{4} + \frac{2\pi \cdot 1}{4} =$
$= \frac{2\pi}{4}(13 + 8 + 5 + 3 + 2 + 1 + 1) \simeq 51{,}81$
Portanto, o comprimento aproximado da espiral de C até L é 51,81 u.c.

23. Resposta pessoal. Possível resposta: $\widehat{AB} = 9$ cm; $r = 5$ cm.

24. As posições de largada não estão alinhadas lado a lado porque essa pista é formada por duas partes retas e duas semicircunferências. Como o comprimento de uma semicircunferência depende do comprimento de seu raio, as posições de largada estão dispostas de maneira que os atletas percorram a mesma distância.

25. Temos 6 pétalas e cada uma corresponde a medida do arco dada por 120° e 16 cm de raio. Desse modo:
$\frac{180}{120} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow x = \frac{120\pi}{180} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ rad
Segue que:
$6\alpha = \frac{\ell}{r} \Rightarrow 6 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\ell}{16} \Rightarrow \ell = 64\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow \ell \simeq 201 \rightarrow$ aproximadamente 201 cm
Portanto, serão necessários, no mínimo, aproximadamente 2,01 metros de arame.

26. Para C_1, temos $\alpha = \frac{\ell_1}{3} \Rightarrow \ell_1 = 3\alpha$ e, para C_2, temos:
$\alpha = \frac{\ell_2}{6} \Rightarrow \ell_2 = 6\alpha \Rightarrow \ell_2 = 2 \cdot 3\alpha \Rightarrow \ell_2 = 2 \cdot \ell_1$
a) Verdadeira.
b) Falsa, pois $\ell_1 = \frac{\ell_2}{2}$.
c) Falsa, pois $\ell_1 = 3\alpha$ e $\ell_2 = 6\alpha$.
d) Verdadeira.

27. 1 hora corresponde a 60 minutos, assim:
$\frac{12}{60} = 0{,}2 \rightarrow 0{,}2$ h
Logo, 3 h 12 min correspondem a 3,2 h.
Temos para o ponteiro das horas a seguinte equivalência:
$\frac{360}{x} = \frac{12}{3{,}2} \Rightarrow x = 96°$
Para o ponteiro dos minutos, temos:
$\frac{360}{x} = \frac{60}{12} \Rightarrow x = 72°$

28. alternativa **c**
$A\hat{O}C = \frac{\frac{5\pi}{3}}{\underbrace{5}_{\frac{10}{2}}} = \frac{\pi}{3}$ rad
$\frac{\pi}{3} + B\hat{O}C = \pi \Rightarrow B\hat{O}C = \frac{2\pi}{3}$ rad
$\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{8\,000}{y} \Rightarrow y \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \cdot 8\,000 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 16\,000 \rightarrow 16\,000$ eleitores

29. alternativa **d**

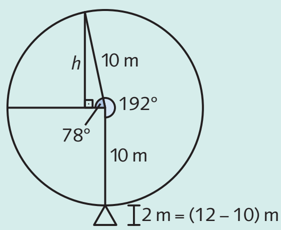
O comprimento da circunferência da roda gigante é dado por:

$$C = 2\pi \cdot 10 \Rightarrow 20\pi$$

Assim:

$$\frac{20\pi}{\frac{32\pi}{3}} = \frac{360°}{x} \Rightarrow x = 192°$$

Podemos ilustrar a posição que o celular caiu da seguinte forma:



Ronaldo Inácio

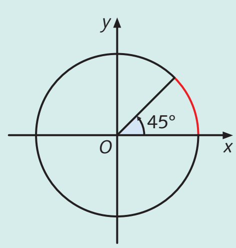
Logo, a altura até o chão será dada por $h + 12$. Calculando h, temos:

$$\text{sen } 78° = \frac{h}{10} \Rightarrow h \simeq 9{,}78$$

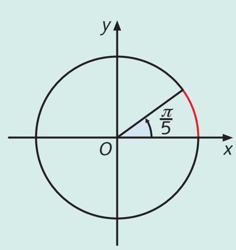
Assim, $9{,}78 + 12 = 21{,}78$.

Portanto, o celular caiu de uma altura de aproximadamente 22 metros.

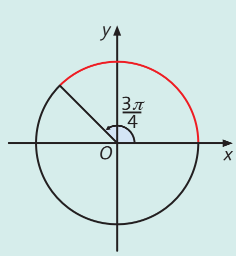
30. a)



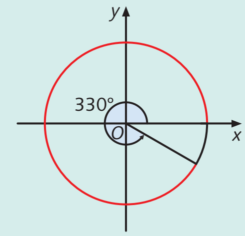
b)



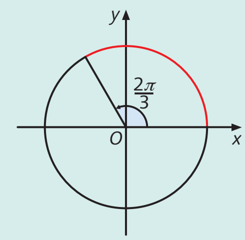
c)



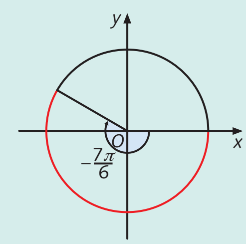
d)



e)



f)



Ilustrações: Ronaldo Inácio

31. α: 1ª determinação positiva

- $\frac{8\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow$
  $\Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} = 120°$
- $\frac{22\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 3 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{3} \Rightarrow$
  $\Rightarrow \alpha = \frac{4\pi}{3} = 240°$
- $\frac{11\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$
  $\Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4} = 135°$
- $\frac{17\pi}{5} = \frac{10\pi}{5} + \frac{7\pi}{5} = 2\pi + \frac{7\pi}{5} \Rightarrow$
  $\Rightarrow \alpha = \frac{7\pi}{5} = 252°$
- $1\,240° = 3 \cdot 360° + 160° \Rightarrow \alpha = 160°$
- $3\,110° = 8 \cdot 360° + 230° \Rightarrow \alpha = 230°$
- $762° = 2 \cdot 360° + 42° \Rightarrow \alpha = 42°$
- $762°, \frac{8\pi}{3}, \frac{11\pi}{4}, 1\,240°, 3\,110°, \frac{22\pi}{3}, \frac{17\pi}{5}$

32. a) $\frac{2\pi}{5}$; 1º quadrante

b) $-\frac{10\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - 2 \cdot 2\pi$; 2º quadrante

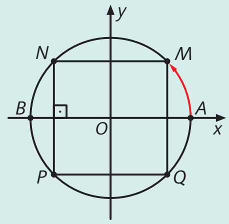
c) $\frac{19\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 3 \cdot 2\pi$; 1º quadrante

d) $2\,625° = 105° + 7 \cdot 360°$; 2º quadrante

e) $\frac{29\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + 4 \cdot 2\pi$; 4º quadrante

f) $1\,330° = 250° + 3 \cdot 360°$; 3º quadrante

33. alternativa **a**



Ronaldo Inácio

- med $(\widehat{AM}) = \text{med}(\widehat{BN}) = \text{med}(\widehat{BP}) =$

$= \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4}\text{rad}$

- med$(\widehat{AN}) = \text{med}(\widehat{AB}) - \text{med}(\widehat{BN}) = \pi - \frac{\pi}{4} =$

$= \frac{3\pi}{4} \rightarrow \frac{3\pi}{4}\text{rad}$

- med$(\widehat{AP}) = \text{med}(\widehat{AB}) + \text{med}(\widehat{BP}) = \pi + \frac{\pi}{4} =$

$= \frac{5\pi}{4} \rightarrow \frac{5\pi}{4}\text{rad}$

34. Determinamos a diferença entre a posição inicial e a posição final da chave calculando a primeira determinação de 4 365°.

$4\,365° = 45° + 12 \cdot 360°$

Portanto, a diferença será 45°.

35. $6\,540° = 60° + 18 \cdot 360°$

A distância percorrida pela roda é dada por:

$\frac{1}{6}C + 18C = \frac{109}{6}C = \frac{109}{6} \cdot (2\pi \cdot 45) \simeq 5\,133{,}9$

Portanto, o pneu percorre aproximadamente 5 133,9 cm.

36. alternativa **d**

$\frac{29\pi}{7} = \frac{\pi}{7} + 2 \cdot 2\pi$

Assim, é um arco côngruo ao arco trigonométrico de $\frac{\pi}{7}$ rad.

37. a) $626° = 266° + 360°$; 1ª determinação positiva: 266°

expressão geral: $266° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{14\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$; 1ª determinação positiva: $\frac{2\pi}{3}$

expressão geral: $\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) Nesse caso, $0 \leqslant \frac{5\pi}{3} < 2\pi$. Sendo assim, sua 1ª determinação positiva é $\frac{5\pi}{3}$.

expressão geral: $\frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $\frac{15\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} + 2\pi$; 1ª determinação positiva: $\frac{7\pi}{4}$

expressão geral: $\frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

38. alternativa **b**

$135° = \frac{3\pi}{4}$

Assim, a expressão geral é dada por:

$\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

39. a) $\frac{45}{6} = 7\frac{1}{2}$

$7 \cdot 360° + \frac{1}{2} \cdot 360° = 2\,520° + 180° = 2\,700°$

Portanto, o ângulo do arco é 2 700°.

b) Como são 7 voltas completas mais meia volta, o menor arco é de 180°.

c) $3\,780° - 2\,700° = 1\,080°$

$1\,080° = 3 \cdot 360°$

Portanto, 3 voltas a mais.

40. a) $390° = 360° + 30°$

Como $\text{sen}\,390° = \text{sen}30°$ e $0 < 30° < 180°$,

$\text{sen}\,390° > 0$. Logo, o sinal é positivo.

b) $2\pi - \frac{7\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Como $\text{sen}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \text{sen}\frac{5\pi}{6}$ e $0 < \frac{5\pi}{6} < \pi$,

então $\text{sen}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) > 0$. Logo, o sinal é positivo.

c) Como $\frac{\pi}{2} < \frac{9\pi}{12} < \pi$, então $\cos\frac{9\pi}{12} < 0$. Logo, o sinal é negativo.

d) $360° - 150° = 210°$

Como $\cos(-150°) = \cos 210°$ e $180° < 210° < 270°$, então $\cos(-150°) < 0$. Logo, o sinal é negativo.

e) $2 \cdot 360° - 600° = 120°$

Como $\text{tg}(-600°) = \text{tg}\,120°$ e $90° < 120° < 180°$, segue que $\text{tg}(-600°) < 0$. Logo, o sinal é negativo.

f) $2 \cdot 2\pi - \frac{8\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

Como $\text{tg}\left(-\frac{8\pi}{3}\right) = \text{tg}\frac{4\pi}{3}$ e $\pi < \frac{4\pi}{3} < \frac{3\pi}{2}$,

então $\text{tg}\left(-\frac{8\pi}{3}\right) > 0$. Logo, o sinal é positivo.

41. a) Como sen α é positivo, concluímos que ele está localizado no 1º ou 2º quadrante.

b) Como cos α é negativo, concluímos que ele está localizado no 2º ou 3º quadrante.

c) Como tg α é positivo, concluímos que ele está localizado no 1º ou 3º quadrante.

d) Como sen α é negativo, concluímos que ele está localizado no 3º ou 4º quadrante.

42. a) $\text{sen}\,\frac{7\pi}{5} = -\text{sen}\left(\frac{7\pi}{5} - \pi\right) = -\text{sen}\underbrace{\frac{2\pi}{5}}_{72°} = -0{,}9511$

b) 1ª determinação positiva: $581° = 360° + \underbrace{221°}_{\text{arco do 3º quadrante}}$

$\cos 581° = -\cos(221° - 180°) = -\cos 41° = -0{,}7547$

c) Calculando a 1ª determinação positiva, temos:

$-\frac{35\pi}{12} = -\frac{24\pi}{12} - \frac{11\pi}{12} = -\frac{11\pi}{12} - 2\pi$

Então:

$-\frac{11\pi}{12} + 2\pi = \frac{13\pi}{12}$

Logo:

$\text{tg}\left(-\frac{35\pi}{12}\right) = \text{tg}\left(\frac{13\pi}{12} - \pi\right) = \text{tg}\left(\underbrace{\frac{\pi}{12}}_{15°}\right) = 0{,}2679$

43. a) $\text{sen } 120° = \text{sen}(180° - 120°) = \text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 315° = \cos(360° - 315°) = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{tg } 120° = -\text{tg}(180° - 120°) = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$

d) $\text{sen}\dfrac{7\pi}{6} = -\text{sen}\left(\dfrac{7\pi}{6} - \pi\right) = -\text{sen}\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$

e) $\cos\dfrac{11\pi}{6} = \cos\left(2\pi - \dfrac{11\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\text{tg}\dfrac{7\pi}{6} = \text{tg}\left(\dfrac{7\pi}{6} - \pi\right) = \text{tg}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

- Resposta pessoal. Possível resposta: 235°, $\dfrac{14\pi}{6}$ e $-\dfrac{8\pi}{3}$.

44. a) Como $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, concluímos que ele está localizado no 2º quadrante. Logo:

$\text{sen } x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}$

b) Como $x \in [0, 2\pi]$, concluímos que ele está localizado no 1º ou 4º quadrante. Logo:

$\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{11\pi}{6}$

c) Como $x \in [0, 2\pi]$, concluímos que ele está localizado no 2º ou 3º quadrante. Logo:

$\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4}$

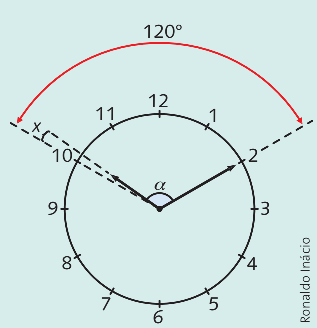
d) Como $x \in \left]\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, concluímos que ele está localizado no 4º quadrante. Logo:

$\text{tg } x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \dfrac{11\pi}{6}$

e) Como $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$, concluímos que ele está localizado no 2º ou 3º quadrante. Logo:

$\text{tg } x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3}$

45.



Ronaldo Inácio

- ponteiro das horas

tempo (min)		deslocamento (grau)
60	——	30
10	——	x

$\Rightarrow \dfrac{60}{10} = \dfrac{30}{x} \Rightarrow x = 5$

$\alpha = 120° - 5° = 115°$

$\text{sen } \alpha = \text{sen } 115° = \text{sen } 65° \simeq 0{,}9063$

46. a) 1º movimento: 60°; 2º movimento: −120°; 3º movimento: 180°; 4º movimento: −240°; 5º movimento: 300°

b) $\text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$; $\text{tg } 60° = \sqrt{3}$;

$\text{sen}(-120°) = -\text{sen } 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos(-120°) = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$;

$\text{tg}(-120°) = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$;

$\text{sen } 180° = 0$; $\cos 180° = -1$; $\text{tg } 180° = 0$;

$\text{sen}(-240°) = \text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos(-240°) = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$;

$\text{tg}(-240°) = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$;

$\text{sen } 300° = -\text{sen } 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 300° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$;

$\text{tg } 300° = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$

c)
- 3º movimento: 120°
- 4º movimento: 120°
- 5º movimento: 180°

47. a) $\text{tg } 510° + \dfrac{\text{sen } 405° \cdot \cos 780°}{3 \cdot \text{tg } 585°} + \text{tg } 750° =$

$= \text{tg } 150° + \dfrac{\text{sen } 45° \cdot \cos 60°}{3 \cdot \text{tg } 225°} + \text{tg } 30° =$

$= -\text{tg } 30° + \dfrac{\text{sen } 45° \cdot \cos 60°}{3 \cdot \text{tg } 45°} + \text{tg } 30° =$

$= -\dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2}}{3 \cdot 1} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$

b) $\text{sen}\dfrac{17\pi}{6} + \cos\dfrac{11\pi}{3} + \cos\dfrac{25\pi}{6} \cdot \text{sen}\dfrac{10\pi}{3} +$

$+ \text{tg}\dfrac{13\pi}{3} \cdot \cos\dfrac{35\pi}{6} + \dfrac{\text{tg}\dfrac{13\pi}{4}}{4} =$

$= \text{sen}\dfrac{5\pi}{6} + \cos\dfrac{5\pi}{3} + \cos\dfrac{\pi}{6} \cdot \text{sen}\dfrac{4\pi}{3} +$

$+ \text{tg}\dfrac{\pi}{3} \cdot \cos\dfrac{11\pi}{6} + \dfrac{\text{tg}\dfrac{5\pi}{4}}{4} =$

$= \text{sen}\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{3} - \cos\dfrac{\pi}{6} \cdot \text{sen}\dfrac{\pi}{3} + \text{tg}\dfrac{\pi}{3} \cdot \cos\dfrac{\pi}{6} +$

$+ \dfrac{\text{tg}\dfrac{\pi}{4}}{4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} +$

$+ \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4} = 2$

48. a) Para a função dada por $f(x) = 1 + \text{sen}\left(3x - \dfrac{2\pi}{3}\right)$, não há restrições. Assim, $D(f) = \mathbb{R}$.

b) Para a função dada por $g(x) = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{\pi}{2}\right)$, não há restrições. Assim, $D(g) = \mathbb{R}$.

49. a) Como $\text{sen } x < 0$ e $0° \leqslant x \leqslant 270°$, então x está no 3º quadrante.

$\text{sen} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow -\text{sen}(x - 180°) = -\text{sen } 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 180° = 60° \Rightarrow x = 240°$

b) Como sen $x > 0$, x está no 1º ou 2º quadrante.

- 1º quadrante

  $\text{sen}\, x_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{sen}\, x_1 = \text{sen}45° \Rightarrow x_1 = 45°$

  arco côngruo: $x_2 = 405°$

- 2º quadrante

  $\text{sen}\, x_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{sen}(180° - x_3) = \text{sen}\, 45° \Rightarrow$

  $\Rightarrow 180° - x_3 = 45° \Rightarrow x_3 = 135°$

  arco côngruo: $x_4 = 495°$

c) Como sen $x > 0$, x está no 1º ou 2º quadrante.

- 1º quadrante

  $\text{sen}\, x_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{sen}\, x_1 = \text{sen}\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow x_1 = \dfrac{\pi}{4}$

  arco côngruo: $x_2 = \dfrac{9\pi}{4}$

- 2º quadrante

  $\text{sen}\, x_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{sen}(\pi - x_3) = \text{sen}\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \pi - x_3 = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow x_3 = \dfrac{3\pi}{4}$

  arco côngruo: $x_4 = \dfrac{11\pi}{4}$

d) Como cos $x > 0$, x está no 1º ou 4º quadrante.

- 1º quadrante

  $\cos x_1 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 60°$

- 4º quadrante

  $\cos x_2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos(360° - x_2) = \cos 60° \Rightarrow$

  $\Rightarrow 360° - x_2 = 60° \Rightarrow x_2 = 300°$

e) Como cos $x < 0$, x está no 2º ou 3º quadrante.

- 2º quadrante

  $\cos x_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow -\cos(180° - x_1) = -\cos 30° \Rightarrow$

  $\Rightarrow 180° - x_1 = 30° \Rightarrow x_1 = 150°$

  arco côngruo: $x_2 = 510°$

- 3º quadrante

  $\cos x_3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow -\cos(x_3 - 180°) = -\cos 30° \Rightarrow$

  $\Rightarrow x_3 - 180° = 30° \Rightarrow x_3 = 210°$

f) Como cos $x > 0$, x está no 1º ou 4º quadrante.

- 1º quadrante

  $\cos x_1 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \dfrac{\pi}{3}$

  arcos côngruos: $x_2 = \dfrac{7\pi}{3}$ e $x_3 = \dfrac{13\pi}{3}$

- 4º quadrante

  $\cos x_4 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos(2\pi - x_4) = \cos\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow$

  $\Rightarrow 2\pi - x_4 = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow x_4 = \dfrac{5\pi}{3}$

  arcos côngruos: $x_5 = \dfrac{11\pi}{3}$ e $x_6 = \dfrac{17\pi}{3}$

50. a) $0 \leqslant m - 2 \leqslant 1 \Rightarrow 2 \leqslant m \leqslant 3$

b) $0 \leqslant 5m + 4 \leqslant 1 \Rightarrow -\dfrac{4}{5} \leqslant m \leqslant -\dfrac{3}{5}$

c) $-1 \leqslant \dfrac{4m+1}{2} \leqslant 1 \Rightarrow -\dfrac{3}{4} \leqslant m \leqslant \dfrac{1}{4}$

d) $-1 \leqslant 2m - 1 \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant m \leqslant 1.$

51. a) $f(0) = 2 - \text{sen}\dfrac{0}{4} = 2$

$f(4\pi) = 2 - \text{sen}\dfrac{4\pi}{4} = 2$

$g(0) = 2 + \cos\dfrac{0}{2} = 3$

$g(4\pi) = 2 + \cos\dfrac{4\pi}{2} = 3$

b) $\dfrac{f(\pi)}{g(2\pi)} = \dfrac{2 - \text{sen}\dfrac{\pi}{4}}{2 + \cos\dfrac{2\pi}{2}} = \dfrac{2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2 - 1} = \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}$

c) $f(6\pi) - g(2\pi) = 2 - \text{sen}\dfrac{6\pi}{4} - \left(2 + \cos\dfrac{2\pi}{2}\right) =$

$= 2 + 1 - (2 - 1) = 2$

d) $f(2\pi) \cdot g(8\pi) = \left(2 - \text{sen}\dfrac{2\pi}{4}\right) \cdot \left(2 + \cos\dfrac{8\pi}{2}\right) =$

$= (2 - 1) \cdot (2 + 1) = 3$

52. O denominador precisa ser diferente de zero, assim:

$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

Segue que $\dfrac{-\cos\alpha}{x+1} = 3 \Rightarrow \cos\alpha = -3x - 3$

Logo, o conjunto solução é delimitado por:

$-1 \leqslant -3x - 3 \leqslant 1 \Rightarrow -\dfrac{4}{3} \leqslant x \leqslant -\dfrac{2}{3}$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{4}{3} \leqslant x \leqslant -\dfrac{2}{3} \text{ e } x \neq -1\right\}$.

53. $-1 \leqslant \text{sen}(-x) \leqslant 1 \Rightarrow 8 - 1 \leqslant 8 + \text{sen}(-x) \leqslant 8 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7 \leqslant 8 + \text{sen}(-x) \leqslant 9$

$8 + \text{sen}(-x) = 9 \Rightarrow \text{sen}(-x) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}(-x) = \text{sen}\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow -x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2}$

54. O valor máximo é para sen $\dfrac{\pi}{2} = 1$, assim:

$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3 + \dfrac{1}{4} \cdot \text{sen}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{13}{4}$

O valor mínimo é para sen $\dfrac{3\pi}{2} = -1$, assim:

$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3 + \dfrac{1}{4} \cdot \text{sen}\dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{11}{4}$

Calculando a diferença, obtemos:

$\dfrac{13}{4} - \dfrac{11}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

55. alternativa **c**

Calculando o custo, temos:

$C(3) = 2 - \cos\dfrac{3\pi}{6} = 2$

Calculando o valor de venda, obtemos:

$V(3) = 3\sqrt{2} \cdot \text{sen}\dfrac{3\pi}{12} = 3$

O lucro é dado pela diferença entre o custo e a venda. Como esses valores estão aproximados em milhares de reais, o lucro é R$ 1000,00.

56. a) $g = 9{,}7804 \cdot (1 + 0{,}0052 \cdot \text{sen}^2 27) \simeq 9{,}7912 \rightarrow 9{,}7912 \text{ m/s}^2$

b) $g = 9{,}7804 \cdot (1 + 0{,}0052 \cdot \text{sen}^2 0) = 9{,}7804 \rightarrow 9{,}7804 \text{ m/s}^2$

c) $9{,}7830 = 9{,}7804\,(1 + 0{,}0052 \cdot \text{sen}^2\alpha) \Rightarrow$

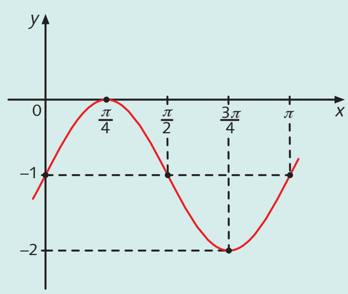
$\Rightarrow 1{,}0003 \simeq 1 + 0{,}0052 \cdot \text{sen}^2\alpha \Rightarrow \text{sen}^2\alpha \simeq 0{,}0577 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\,\alpha \simeq 0{,}2402 \Rightarrow \alpha \simeq 14°$

57. a) $f(x) = -1 + \text{sen}\,2x$

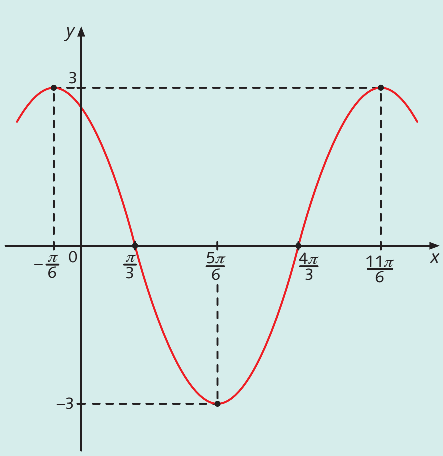
x	$f(x) = -1 + \text{sen}\,2x$	$(x, f(x))$
0	$f(0) = -1 + \text{sen}(2 \cdot 0) = -1$	$(0, -1)$
$\frac{\pi}{4}$	$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 + \text{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 0$	$\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + \text{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -1$	$\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$
$\frac{3\pi}{4}$	$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1 + \text{sen}\left(2 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) = -2$	$\left(\frac{3\pi}{4}, -2\right)$
π	$f(\pi) = -1 + \text{sen}(2\pi) = -1$	$(\pi, -1)$

$Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 0\right\}$; período: π



b) $n(x) = 3 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

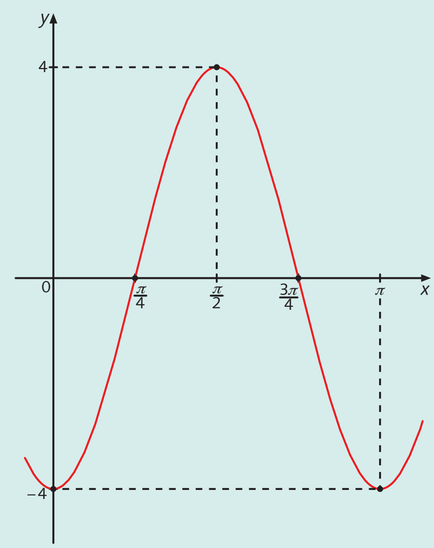
x	$n(x) = 3 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$	$(x, n(x))$
$-\frac{\pi}{6}$	$n\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 3 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = 3$	$\left(-\frac{\pi}{6}, 3\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$n\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 0$	$\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$
$\frac{5\pi}{6}$	$n\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = -3$	$\left(\frac{5\pi}{6}, -3\right)$
$\frac{4\pi}{3}$	$n\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 3 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 0$	$\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$
$\frac{11\pi}{6}$	$n\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 3 \cdot \cos\left(\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = 3$	$\left(\frac{11\pi}{6}, 3\right)$



$Im(n) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq 3\right\}$; período: 2π

c) $m(x) = 4 \cdot \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

x	$m(x) = 4 \cdot \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$	$(x, m(x))$
0	$m(0) = 4 \cdot \text{sen}\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) = -4$	$(0, -4)$
$\frac{\pi}{4}$	$m\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$	$\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$m\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 4$	$\left(\frac{\pi}{2}, 4\right)$
$\frac{3\pi}{4}$	$m\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 4 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$	$\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$
π	$m(\pi) = 4 \cdot \text{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -4$	$(\pi, -4)$

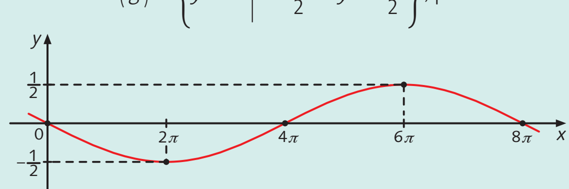


$Im(m) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid -4 \leq y \leq 4\right\}$; período: π

d) $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{4} + \pi\right)$

x	$g(x) = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{4} + \pi\right)$	$(x, g(x))$
0	$g(0) = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{0}{4} + \pi\right) = 0$	$(0, 0)$
2π	$g(2\pi) = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{4} + \pi\right) = -\frac{1}{2}$	$\left(2\pi, -\frac{1}{2}\right)$
4π	$g(4\pi) = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{4\pi}{4} + \pi\right) = 0$	$(4\pi, 0)$
6π	$g(6\pi) = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{6\pi}{4} + \pi\right) = \frac{1}{2}$	$\left(6\pi, \frac{1}{2}\right)$
8π	$g(8\pi) = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{8\pi}{4} + \pi\right) = 0$	$(8\pi, 0)$

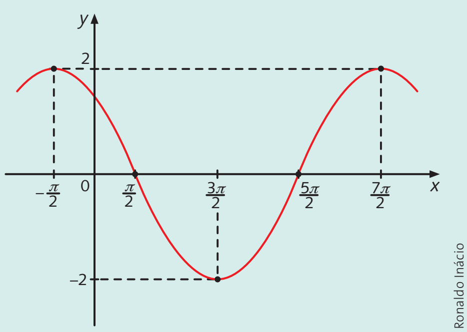
$Im(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\right\}$; período: 8π



Ilustrações: Ronaldo Inácio

e) $q(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

x	$q(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$	$(x, q(x))$
$-\frac{\pi}{2}$	$q\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 2$	$\left(-\frac{\pi}{2}, 2\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$q\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
$\frac{3\pi}{2}$	$q\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -2$	$\left(\frac{3\pi}{2}, -2\right)$
$\frac{5\pi}{2}$	$q\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\frac{5\pi}{2}}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$	$\left(\frac{5\pi}{2}, 0\right)$
$\frac{7\pi}{2}$	$q\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\frac{7\pi}{2}}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 2$	$\left(\frac{7\pi}{2}, 2\right)$



$Im(q) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2\}$; período: 4π

58. $a = 3$

$$\frac{p}{|b|} = \pi \Rightarrow 2\pi = \pi|b| \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ \text{ou} \\ b = -2 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

59. Ao analisar a amplitude do gráfico, determinamos o valor de $a = \frac{1}{2}$, ao analisarmos o período do gráfico, temos:

$$p = \frac{2\pi}{b} = 3\pi \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

Segue que:

$$a + b = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

60. a) $D(g) = \mathbb{R}$

$$-1 \leq \text{sen}(x + \pi) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\text{sen}(x + \pi) \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \leq 2 - \text{sen}(x + \pi) \leq 3 \Rightarrow 1 \leq g(x) \leq 3$$

$$Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 3\}$$

$$p = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$$

b) $D(h) = \mathbb{R}$

$$-1 \leq \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \cdot \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) \leq 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 \leq -1 + 3 \cdot \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) \leq 2 \Rightarrow -4 \leq h(x) \leq 2$$

$$Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid -4 \leq y \leq 2\}$$

$$p = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$$

c) $D(m) = \mathbb{R}$

$$-1 \leq \text{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 \leq 3 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \leq 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \leq 1 + 3 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \leq 4 \Rightarrow -2 \leq m(x) \leq 4$$

$$Im(m) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 4\}$$

$$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$$

d) $D(q) = \mathbb{R}$

$$-1 \leq \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{7\pi}{6}\right) \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \leq -2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{7\pi}{6}\right) \leq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} - 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{7\pi}{6}\right) \leq \frac{7}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq q(x) \leq \frac{7}{2}$$

$$Im(q) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{7}{2}\right\}$$

$$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$$

- Resposta pessoal. Possível resposta: $f(x) = 4 \cdot \text{sen}(x + 2)$ e $q(x) = -1 + 2 \cdot \cos(3x)$.

61. $Im(f) = [-7, 7]$ e $p = \frac{2\pi}{3\pi} \simeq 0{,}67$. Sendo assim, o período é de aproximadamente 0,67 segundo.

62. $Im(U) = [-5{,}3; 5{,}3]$ e $p = \frac{2\pi}{30\pi} \simeq 0{,}07$. Sendo assim, o período é de aproximadamente 0,07 segundo.

63. a) Utilizando a relação $p = \frac{2\pi}{|c|}$, temos:

$$5\pi = \frac{2\pi}{\left|\frac{2}{m}\right|} \Rightarrow 2\pi \cdot \frac{|m|}{2} = 5\pi \Rightarrow |m| = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 5 \text{ ou } m = -5$$

Logo, $m = 5$ ou $m = -5$.

b) Utilizando a relação $p = \frac{2\pi}{|c|}$, obtemos:

$$3\pi = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{m}\right|} \Rightarrow 2\pi \cdot |m| = 3\pi \Rightarrow |m| = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{3}{2} \text{ ou } m = -\frac{3}{2}$$

Logo, $m = -\frac{3}{2}$ ou $m = \frac{3}{2}$.

64. Segue que:

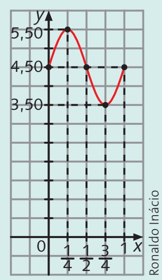
$$P = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$$

Portanto, o período é de 24 horas.

65. Resposta pessoal. Possível resposta: Um movimento de maré pode ser descrito pela função f definida por $f(t) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}\right)$, em que $f(t)$ é altura da maré em relação ao nível do mar (em metros) e t o tempo (em horas). Qual é o período dessa maré?

66. a)

x	$f(x) = 4{,}50 + \text{sen}(2\pi x)$	$(x, f(x))$
0	$f(0) = 4{,}50 + \text{sen}\,0 = 4{,}50$	$(0;\ 4{,}50)$
$\frac{1}{4}$	$f\left(\frac{1}{4}\right) = 4{,}50 + \text{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 5{,}50$	$\left(\frac{1}{4};\ 5{,}50\right)$
$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4{,}50 + \text{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 4{,}50$	$\left(\frac{1}{2};\ 4{,}50\right)$
$\frac{3}{4}$	$f\left(\frac{3}{4}\right) = 4{,}50 + \text{sen}\left(2 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) = 3{,}50$	$\left(\frac{3}{4};\ 3{,}50\right)$
1	$f(1) = 4{,}50 + \text{sen}(2\pi) = 4{,}50$	$(1;\ 4{,}50)$



b) maior valor: 2 de abril; menor valor: 4 de abril

c) maior valor: R$ 5,50; menor valor: R$ 3,50

Capítulo 3 Relações, equações e transformações trigonométricas

1. a) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{4}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{21}{25} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{21}}{5}$

Como $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, então $\cos x = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

b) $\text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \frac{-\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{21}}{5}} = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$

c) $\text{cossec}\,x = \frac{1}{\text{sen}\,x} = \frac{1}{-\frac{2}{5}} = -\frac{5}{2}$

d) $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{5\sqrt{21}}{21}$

e) $\text{cotg}\,x = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{-\frac{2}{5}} = -\frac{\sqrt{21}}{2}$

2. $-5\cos x = 3 \Rightarrow \cos x = -\frac{3}{5}$

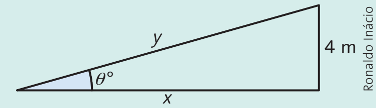
$\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{9}{25} + \text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{16}{25} \Rightarrow \text{sen}\,x = \pm\frac{4}{5}$

Como $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, $\text{sen}\,x = -\frac{4}{5}$.

3.



$\text{tg}\,\theta° = \frac{4}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 10\sqrt{2}$

$y^2 = 4^2 + (10\sqrt{2})^2 \Rightarrow y^2 = 16 + 200 \Rightarrow y^2 = 216 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \sqrt{216} \Rightarrow y = 6\sqrt{6} \simeq 14{,}70$

Portanto, o comprimento da rampa mede aproximadamente 14,70 m.

4. Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$, segue que $\text{cossec}\,x > 0$, $\text{sen}\,x > 0$ e $\sec x > 0$. Assim:

- $1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x \Rightarrow \text{cossec}^2 x = 1 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \text{cossec}^2 x = \frac{29}{4} \Rightarrow \text{cossec}\,x = \frac{\sqrt{29}}{2}$
- $\text{cossec}\,x = \frac{1}{\text{sen}\,x} \Rightarrow \frac{\sqrt{29}}{2} = \frac{1}{\text{sen}\,x} \Rightarrow \text{sen}\,x = \frac{2\sqrt{29}}{29}$
- $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \left(\frac{2\sqrt{29}}{29}\right)^2 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{4}{29} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \cos^2 x = \frac{25}{29} \Rightarrow \cos x = \frac{5\sqrt{29}}{29}$
- $\sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \sec x = \frac{1}{\frac{5\sqrt{29}}{29}} = \frac{\sqrt{29}}{5}$

Assim:

$$\frac{\text{cossec}\,x - \text{sen}\,x}{\sec x - \text{sen}\,x} = \frac{\frac{\sqrt{29}}{2} - \frac{2\sqrt{29}}{29}}{\frac{\sqrt{29}}{5} - \frac{2\sqrt{29}}{29}} = \frac{125}{38}$$

5. Resposta pessoal. Possível resposta: $\text{cossec}\,x = -\sqrt{2}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

6. $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x + \left(\frac{7}{11}\right)^2 = 1 \Rightarrow$

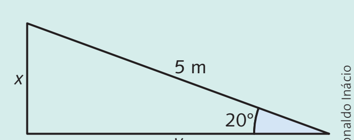
$\Rightarrow \cos^2 x + \frac{49}{121} = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{72}{121}$

$$\frac{\text{cossec}^2 x - \text{cotg}^2 x + \cos^2 x}{(\sec x + \text{tg}\,x)(\sec x - \text{tg}\,x)} =$$

$$= \frac{(1 + \text{cotg}^2 x) - \text{cotg}^2 x + \cos^2 x}{\sec^2 x - \text{tg}^2 x} = \frac{1 + \cos^2 x}{1} =$$

$= 1 + \frac{72}{121} = \frac{193}{121}$

7. a)



$\text{cossec}\,20° = \frac{1}{\text{sen}\,20°} \Rightarrow 2{,}92 = \frac{1}{\frac{x}{5}} \Rightarrow 2{,}92 = \frac{5}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2{,}92 \cdot x = 5 \Rightarrow x \simeq 1{,}71$

Assim: $1{,}71 + 4{,}5 = 6{,}21$

Portanto, a altura aproximada é 6,21 m.

b) $\sec 20° = \dfrac{1}{\cos 20°} \Rightarrow 1{,}06 = \dfrac{1}{\dfrac{y}{8}} \Rightarrow 1{,}06 = \dfrac{8}{y} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}06y = 8 \Rightarrow y \simeq 7{,}55$, ou seja, 7,55 m

c) Resposta pessoal. Possível resposta: considere que o avião atingiu 10 m de altura.

8. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{5}{9}$

Assim, $-\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + 1 = -\dfrac{\dfrac{5}{9}}{2} + 1 = \dfrac{13}{18}$.

9. a) $\operatorname{sen}^2 x + \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\underbrace{1 - \operatorname{sen}^2 x}_{\cos^2 x}} + \cos^2 x =$

$= \underbrace{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}_{\operatorname{tg}^2 x} + \underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} = \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$

b) $\dfrac{\operatorname{cossec}^2 x \cdot \sec x}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x} = \dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}}{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} =$

$= \dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos x}}{\dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x}} = \dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos x}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}} =$

$= \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos x} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{1} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cossec} x$

c) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{cossec} x =$

$= \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + (1 + \cos x)^2 - (1 + \cos x)\operatorname{sen} x \cdot \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}}{(1 + \cos x)\operatorname{sen} x} =$

$= \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2\cos x + 1 - 1 - \cos x}{(1 + \cos x)\operatorname{sen} x} =$

$= \dfrac{1 + \cos x}{(1 + \cos x)\operatorname{sen} x} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cossec} x$

10. alternativa **d**

$\dfrac{\sec^2 x - 1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{cossec}^2 x} = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} =$

$= \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} x)^2 = A^2$

11. alternativa **c**

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - \sec^2 x = -\operatorname{tg}^2 x$

Assim:

$\dfrac{1 - \sec^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{-\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{-\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{\operatorname{sen}^2 x} = -\dfrac{1}{\cos^2 x} = -\sec^2 x$

12. • $\operatorname{cossec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

• $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \dfrac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}$

Assim, $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

13. alternativa **d**

$a^2 - b^2 + 1 = (\operatorname{sen}^2 x)^2 - (\sqrt{2}\operatorname{sen} x)^2 + 1 =$

$= (1 - \cos^2 x)^2 - 2\operatorname{sen}^2 x + 1 =$

$= 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x - 2\operatorname{sen}^2 x + 1 =$

$= \cos^4 x + (-2\operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2 x + 2) =$

$= \cos^4 x + (-2(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) + 2) =$

$= \cos^4 x + (-2 \cdot 1 + 2) = \cos^4 x + 0 = \cos^4 x$

14. $\operatorname{sen}^2 70° + \cos^2 70° = 1 \Rightarrow (0{,}94)^2 + \cos^2 70° = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 70° = 1 - 0{,}8836 \Rightarrow \cos^2 70° = 0{,}1164 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 70° \simeq 0{,}34$

$\operatorname{tg} 70° = \dfrac{x}{20} \Rightarrow \dfrac{\operatorname{sen} 70°}{\cos 70°} = \dfrac{x}{20} \Rightarrow \dfrac{0{,}94}{0{,}34} = \dfrac{x}{20} \Rightarrow x \simeq 55$

Podemos decompor a representação desse terreno em um triângulo e um retângulo para calcular sua área. Assim:

$A_{\text{terreno}} = A_{\text{triângulo}} + A_{\text{retângulo}} \Rightarrow$

$\Rightarrow A \simeq \dfrac{55 \cdot 20}{2} + 55 \cdot 25 \simeq 550 + 1375 = 1925$

Portanto, a área do terreno é aproximadamente 1925 m ².

15. a) • $\operatorname{sen} 75° = \operatorname{sen}(45° + 30°) =$

$= \operatorname{sen} 45° \cdot \cos 30° + \operatorname{sen} 30° \cdot \cos 45° =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

• $\cos 75° = \cos(45° + 30°) =$

$= \cos 45° \cdot \cos 30° - \operatorname{sen} 45° \cdot \operatorname{sen} 30° =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

• $\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg}(45° + 30°) = \dfrac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg} 30°} =$

$= \dfrac{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}} = 2 + \sqrt{3}$

b) • $\operatorname{sen} \dfrac{11\pi}{12} = \operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) =$

$= \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{3} \cdot \cos \dfrac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4} \cdot \cos \dfrac{2\pi}{3} =$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

• $\cos \dfrac{11\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) =$

$= \cos \dfrac{2\pi}{3} \cdot \cos \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{3} \cdot \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4} =$

$= -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

• $\operatorname{tg} \dfrac{11\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\operatorname{tg} \dfrac{2\pi}{3} + \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} \dfrac{2\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{4}} =$

$= \dfrac{-\sqrt{3} + 1}{1 - (-\sqrt{3}) \cdot 1} = -2 + \sqrt{3}$

c) • $\operatorname{sen} 15° = \operatorname{sen}(60° - 45°) =$

$= \operatorname{sen} 60° \cdot \cos 45° - \operatorname{sen} 45° \cdot \cos 60° =$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

- $\cos 15° = \cos(60° - 45°) =$
  $= \cos 60° \cdot \cos 45° + \operatorname{sen} 60° \cdot \operatorname{sen} 45° =$
  $= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
- $\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(60° - 45°) = \frac{\operatorname{tg} 60° - \operatorname{tg} 45°}{1 + \operatorname{tg} 60° \cdot \operatorname{tg} 45°} =$
  $= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = 2 - \sqrt{3}$

16. a) $\operatorname{cotg} 105° = \frac{1}{\operatorname{tg} 105°} = \frac{1}{\operatorname{tg}(60° + 45°)} =$

$= \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} 60° + \operatorname{tg} 45°}{1 - \operatorname{tg} 60° \cdot \operatorname{tg} 45°}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1}} = \sqrt{3} - 2$

b) $\operatorname{cossec} \frac{29\pi}{12} = \operatorname{cossec} \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{5\pi}{12}} =$

$= \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)} =$

$= \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{6}} =$

$= \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

c) $\operatorname{cotg} \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)} =$

$= \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1}} = 2 - \sqrt{3}$

17. Inicialmente, calculamos $\operatorname{sen} \beta$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ e $\operatorname{tg} \beta$.

$\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \beta + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen} \beta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ (β no 4º quadrante: seno negativo)

$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ (α no 1º quadrante: cosseno positivo)

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3\sqrt{7}}{8}} = \frac{\sqrt{7}}{21}$

$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha =$

$= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{1}{12} - \frac{\sqrt{35}}{8}$

b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta =$

$= \frac{3\sqrt{7}}{8} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{7} + \frac{\sqrt{5}}{6}\right)$

c) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta =$

$= \frac{3\sqrt{7}}{8} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{7} - \frac{\sqrt{5}}{6}\right)$

d) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{21} - \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}{1 + \frac{\sqrt{7}}{21} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)} =$

$= \frac{2\sqrt{7} + 21\sqrt{5}}{42 - \sqrt{35}} \cdot \frac{42 + \sqrt{35}}{42 + \sqrt{35}} = \frac{189\sqrt{7} + 896\sqrt{5}}{1\,729} =$

$= \frac{27\sqrt{7} + 128\sqrt{5}}{247}$

18. $\operatorname{sen}(\alpha + \theta) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \theta + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$

19. alternativa **a**

$$3x^2 - 6x + 2 = 0 \begin{cases} x_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} =$

$= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = 6$

20. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x - \frac{7}{9} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ (3º quadrante: cosseno negativo)

a) $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cdot \cos x =$

$= \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 0 - 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3}$

b) $\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos x \cdot \cos \frac{3\pi}{2} + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} =$

$= -\frac{\sqrt{7}}{3} \cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot (-1) = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

c) $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{-\frac{\sqrt{7}}{3}} = -\frac{\sqrt{14}}{7}$

$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} =$

$= \frac{-\frac{\sqrt{14}}{7} + 1}{1 - \left(-\frac{\sqrt{14}}{7}\right) \cdot 1} = \frac{7 - \sqrt{14}}{7 + \sqrt{14}} \cdot \frac{7 - \sqrt{14}}{7 - \sqrt{14}} =$

$= \frac{63 - 14\sqrt{14}}{35} = \frac{9 - 2\sqrt{14}}{5}$

21. a) • $\text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} =$

$$= \frac{1}{\dfrac{\text{tg}\,x - \text{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \text{tg}\,x \cdot \text{tg}\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\dfrac{\text{tg}\,x - 1}{1 + \text{tg}\,x \cdot 1}} = \frac{1 + \text{tg}\,x}{\text{tg}\,x - 1}$$

• $\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\text{tg}\,x + \text{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \text{tg}\,x \cdot \text{tg}\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\text{tg}\,x + 1}{1 - \text{tg}\,x \cdot 1} =$

$$= \frac{\text{tg}\,x + 1}{1 - \text{tg}\,x}$$

• $\text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) =$

$$= \frac{1 + \text{tg}\,x}{\text{tg}\,x - 1} \cdot \frac{\text{tg}\,x + 1}{1 - \text{tg}\,x} = -\left(\frac{1 + \text{tg}\,x}{\text{tg}\,x - 1}\right)^2$$

b) • $\sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} =$

$$= \frac{1}{\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\frac{\pi}{2}} = \text{cossec}\,x$$

• $\text{sen}(x - \pi) = \text{sen}\,x \cdot \cos\pi - \text{sen}\,\pi \cdot \cos x = -\text{sen}\,x$

• $\text{cossec}(x + \pi) = \dfrac{1}{\text{sen}(x + \pi)} =$

$$= \frac{1}{\text{sen}\,x \cdot \cos\pi + \text{sen}\,\pi \cdot \cos x} = -\text{cossec}\,x$$

Assim, temos:

$$\frac{\sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{sen}(x - \pi)}{\text{cossec}(x + \pi)} =$$

$$= \frac{\text{cossec}\,x \cdot (-\text{sen}\,x)}{-\text{cossec}\,x} = \text{sen}\,x$$

22. $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{9}{25} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x = \pm\frac{4}{5}$$

Como $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, então $\cos x = \frac{4}{5}$.

Assim:

$$\text{cotg}\,x = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} \Rightarrow \text{cotg}\,x = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)}{\left(-\frac{3}{5}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{cotg}\,x = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \Rightarrow \text{cotg}\,x = -\frac{4}{3}$$

Como $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, então $\text{cotg}\,x = -\frac{4}{3}$.

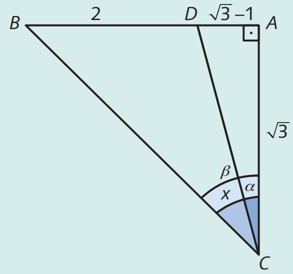
23. $\dfrac{\sec^2 x}{\text{cossec}\,x \cdot \cos x} \Rightarrow \dfrac{\text{tg}^2 x + 1}{\left(\frac{1}{\text{sen}\,x}\right) \cdot \cos x} \Rightarrow \dfrac{\text{tg}^2 x + 1}{\left(\frac{\cos x}{\text{sen}\,x}\right)} \Rightarrow$

$$(\text{tg}^2 x + 1) \cdot \left(\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\right) \Rightarrow (\text{tg}^2 x + 1) \cdot \text{tg}\,x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1\right] \cdot \text{tg}\,x \Rightarrow$$

$$\left(\frac{9}{4} + 1\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \frac{13}{4} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{39}{8}$$

24. Chamamos α e β as medidas dos ângulos $A\hat{C}D$ e $A\hat{C}B$, respectivamente.



Ronaldo Inácio

Calculando $\text{tg}\,\alpha$ e $\text{tg}\,\beta$, obtemos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} =$$

$$= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{tg}\,\beta = \frac{2 + (\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = 1$$

Podemos calcular x utilizando a tangente da diferença. Assim:

$$\text{tg}\,x = \text{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta} = \frac{1 - (2 - \sqrt{3})}{1 + 1 \cdot (2 - \sqrt{3})} =$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como $\text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $0° < x < 90°$, então $x = 30°$.

25. $\text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \beta + \left(\frac{3}{10}\right)^2 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{sen}^2 \beta - \frac{91}{100} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{sen}\,\beta = \frac{\sqrt{91}}{10}$ (1º quadrante: seno positivo)

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha - \frac{33}{49} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{33}}{7}$ (1º quadrante: cosseno positivo)

a) $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha =$

$$= \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{10} + \frac{\sqrt{91}}{10} \cdot \frac{\sqrt{33}}{7} = \frac{12 + \sqrt{3\,003}}{70}$$

b) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\beta \cdot \text{sen}\,\alpha =$

$$= \frac{\sqrt{33}}{7} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{7} \cdot \frac{\sqrt{91}}{10} = \frac{3\sqrt{33} + 4\sqrt{91}}{70}$$

c) $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{4}{7}}{\frac{\sqrt{33}}{7}} = \dfrac{4\sqrt{33}}{33}$

$$\text{tg}\,\beta = \frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{\sqrt{91}}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{\sqrt{91}}{3}$$

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta} = \frac{\frac{4\sqrt{33}}{33} + \frac{\sqrt{91}}{3}}{1 - \frac{4\sqrt{33}}{33} \cdot \frac{\sqrt{91}}{3}} =$$

$$= \frac{12\sqrt{33} + 33\sqrt{91}}{99 - 4\sqrt{3\,003}} = -\frac{400\sqrt{33} + 147\sqrt{91}}{1159}$$

26. $\text{sen}\,2\alpha \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen}^3\,\alpha + A \cdot \text{sen}^2\,\alpha + \text{sen}\,\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha \cdot (-\text{sen}\alpha) = -\text{sen}^3\,\alpha + A \cdot \text{sen}^2\,\alpha + \text{sen}\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \text{sen}\,\alpha - 2\cos\alpha - \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \text{sen}\,\alpha - 2\cos\alpha - \text{cossec}\,\alpha$

27. alternativa **d**

$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{2} - \text{sen}x \cdot \text{sen}\frac{\pi}{2} =$

$= \cos x \cdot 0 - \frac{3}{4} \cdot 1 = -\frac{3}{4}$

28. alternativa **d**

$\cos 72° - \cos^2 36° = \cos(36° + 36°) - \cos^2 36° =$

$= \cos^2 36° - \text{sen}^2 36° - \cos^2 36° = -\text{sen}^2 36°$

29. Resolução na página **269**.

30. Resolução na página **269**.

31. $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 a + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2 a - \frac{24}{25} = 0 \begin{cases} \text{sen}a = \frac{2\sqrt{6}}{5} \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ \text{sen}a = -\frac{2\sqrt{6}}{5} \end{cases}$

$\text{tg}a = \frac{\text{sen}a}{\cos a} = \frac{-\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} = -2\sqrt{6}$

$\text{tg}(b - a) = \frac{\text{tg}b - \text{tg}a}{1 + \text{tg}b \cdot \text{tg}a} =$

$= \frac{\frac{3}{2} - (-2\sqrt{6})}{1 + \frac{3}{2} \cdot (-2\sqrt{6})} = -\frac{75 + 13\sqrt{6}}{106}$

32. a) $\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}2x \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \text{sen}\frac{\pi}{2} \cdot \cos 2x =$

$= \text{sen}2x \cdot 0 + 1 \cdot \cos 2x = \cos 2x$

b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\frac{\pi}{4} =$

$= \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \text{sen}x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\cos x + \text{sen}\,x)}{2}$

c) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\text{tg}\frac{\pi}{4} + \text{tg}x}{1 - \text{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \text{tg}x} = \frac{1 + \text{tg}x}{1 - 1 \cdot \text{tg}x} =$

$= \frac{1 + \text{tg}x}{1 - \text{tg}x}$

33. a) Sabendo que $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha)$, temos:

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\alpha =$

$= \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$

Logo, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$.

b) Sabendo que $\text{tg}2\alpha = \text{tg}(\alpha + \alpha)$, temos:

$\text{tg}2\alpha = \text{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\alpha} = \frac{2 \cdot \text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$

Assim, $\text{tg}2\alpha = \frac{2 \cdot \text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$.

34. $y = (\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 =$

$= 2(1 + \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta) =$

$= 2 \cdot [1 + \cos(\alpha - \beta)] = 2(1 + \cos 45°) =$

$= 2 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + \sqrt{2}$

35. Resolução na página **269**.

36. $f(x) = \frac{\text{tg}x + \text{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \text{tg}x \cdot \text{tg}\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\text{tg}x - \text{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \text{tg}x \cdot \text{tg}\frac{\pi}{4}} =$

$= \frac{\text{tg}x + 1}{1 - \text{tg}x \cdot 1} \cdot \frac{\text{tg}x - 1}{1 + \text{tg}x \cdot 1} = \frac{-(1 - \text{tg}^2 x)}{1 - \text{tg}^2 x} = -1$

37. Como $\text{med}(B\hat{C}D) = \text{med}(A\hat{C}D) = \alpha$, então:

$\text{tg}2\alpha = \frac{2 \cdot \text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha} \Rightarrow \frac{3 + \overline{AD}}{12} = \frac{2 \cdot \frac{3}{12}}{1 - \left(\frac{3}{12}\right)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3 + \overline{AD}}{12} = \frac{8}{15} \Rightarrow 15\overline{AD} + 45 = 96 \Rightarrow \overline{AD} = 3{,}4$

Logo, AD tem comprimento igual a 3,4 m.

$A = \frac{(3 + 3{,}4) \cdot 12}{2} = 38{,}4 \to 38{,}4\text{ cm}^2$

38. a) $\sqrt{2} \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$

$= \sqrt{2}\left(\text{sen}\,x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \text{sen}\frac{\pi}{4} \cdot \cos x\right) =$

$= \sqrt{2}\left(\text{sen}\,x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x\right) = \text{sen}\,x - \cos x$

b) $\sqrt{2} \cdot (\text{sen}\,x - \cos x) = m^2 - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2} \cdot \left[\sqrt{2} \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] = m^2 - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = m^2 - 2$

$-1 \leqslant \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1 \Rightarrow -2 \leqslant 2\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2 \leqslant m^2 - 2 \leqslant 2 \Rightarrow 0 \leqslant m^2 \leqslant 4 \Rightarrow m^2 \leqslant 4 \Rightarrow m^2 - 4 \leqslant 0$

$m^2 - 4 = 0 \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = -2 \end{cases}$

$S = \{m \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant m \leqslant 2\}$

39. Resposta pessoal. Possíveis respostas:

a) Determine a medida da distância que o topo das torres estão afastados do eixo vertical.

b) Se a inclinação das torres fosse 5,19°, o topo da torre estaria afastado quantos metros do eixo vertical?

40. Como o triângulo ABC é isósceles e $\alpha > 90°$, então $\beta = \gamma$.

$2\text{tg}\,\beta + \text{tg}\,\alpha = -\frac{3}{4} \Rightarrow 2\text{tg}\gamma + \text{tg}\,\alpha = -\frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{tg}\,\alpha = -\frac{3}{4} - 2\text{tg}\gamma$

$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \alpha + \gamma + \gamma = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - 2\gamma$

$\text{tg}\,\alpha = \text{tg}(180° - 2\gamma) \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{tg}180° - \text{tg}2\gamma}{1 + \text{tg}180° \cdot \text{tg}2\gamma} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{0 - \text{tg}2\gamma}{1 + 0 \cdot \text{tg}2\gamma} \Rightarrow -\text{tg}\,\alpha = \text{tg}2\gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow -\text{tg}\,\alpha = \text{tg}(\gamma + \gamma) \Rightarrow -\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{tg}\gamma + \text{tg}\gamma}{1 - \text{tg}\gamma \cdot \text{tg}\gamma} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\text{tg}\,\alpha = \frac{2\text{tg}\gamma}{1 - \text{tg}^2\gamma} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{tg}^2\gamma \cdot \text{tg}\,\alpha = 2\text{tg}\gamma + \text{tg}\,\alpha \Rightarrow \text{tg}^2\gamma \cdot \text{tg}\,\alpha = -\frac{3}{4}$

41. a) $2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$

$2x = \underbrace{\frac{7\pi}{6}}_{\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\frac{1}{2} + \text{sen}x = 0 \Rightarrow \text{sen}x = -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \underbrace{\frac{7\pi}{6}}_{\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)} + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $3 \cdot \text{tg}x = 3\sqrt{3} \Rightarrow \text{tg}x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $x + \frac{2\pi}{5} = 0 + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{2\pi}{5} + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{2\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $4x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

g) $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$x - \frac{\pi}{6} = \underbrace{\frac{5\pi}{6}}_{\pi-\frac{\pi}{6}} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pi + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

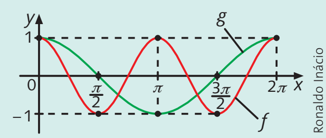
h) $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

42.

x	$f(x) = \cos 2x$	$(x, f(x))$
0	$f(0) = \cos 2 \cdot 0 = 1$	$(0, 1)$
$\frac{\pi}{2}$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -1$	$\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$
π	$f(\pi) = \cos 2\pi = 1$	$(\pi, 1)$
$\frac{3\pi}{2}$	$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{3\pi}{2}\right) = -1$	$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$
2π	$f(2\pi) = \cos(2 \cdot 2\pi) = 1$	$(2\pi, 1)$

x	$g(x) = \cos x$	$(x, g(x))$
0	$g(0) = \cos 0 = 1$	$(0, 1)$
$\frac{\pi}{2}$	$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
π	$g(\pi) = \cos\pi = -1$	$(\pi, -1)$
$\frac{3\pi}{2}$	$g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$
2π	$g(2\pi) = \cos 2\pi = 1$	$(2\pi, 1)$



Para determinar as abscissas dos pontos de interseção dos gráficos, devemos resolver a equação $\cos 2x = \cos x$.

$\cos 2x = \cos x \Rightarrow \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \cos x \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

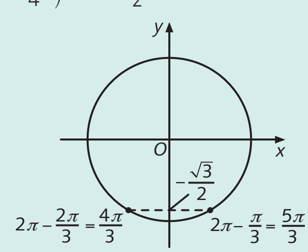
Fazendo $\cos x = m$ na equação, temos:

$2m^2 - m - 1 = 0 \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Assim: $\begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2\pi \\ \text{ou} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$

Portanto, $\cos 2x = \cos x$ para $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$ e $x = 2\pi$.

43. $\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

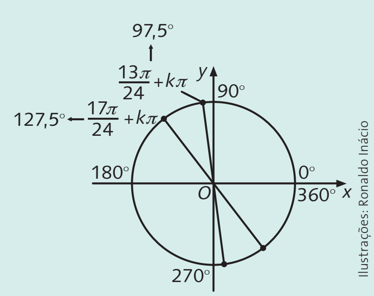


Nesse caso, $2x + \frac{\pi}{4}$ deve ser igual a $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$.

Assim:

- $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{13\pi}{24} + k\pi$
- $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{17\pi}{24} + k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{13\pi}{24} + k\pi \text{ ou } \frac{17\pi}{24} + k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$



44. a) $\text{cossec}\,x = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\text{sen}\,x} = 1 \Rightarrow \text{sen}\,x = 1$

$x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\dfrac{1}{\sec x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos x}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $x = \dfrac{3\pi}{5} + 2k\pi$ ou $x = \underbrace{\dfrac{2\pi}{5}}_{\pi - \frac{3\pi}{5}} + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{3\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{2\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $x = \pm\dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $\text{tg}^2 x = 1 \Rightarrow \text{tg}\,x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \text{tg}\,x = \pm 1$

- $\text{tg}\,x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$
- $\text{tg}\,x = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) Tomando $\text{sen}\,x = m$, obtemos:

$4m^2 - 4m - 3 = 0 \begin{cases} m_1 = \dfrac{3}{2} \\ m_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

- $\text{sen}\,x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$, pois $-1 \leqslant \text{sen}\,x \leqslant 1$
- $\text{sen}\,x = -\dfrac{1}{2}$

$x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \underbrace{\dfrac{7\pi}{6}}_{\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)} + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

g) $\cos x = \dfrac{1}{\text{cossec}\dfrac{5\pi}{3}} \Rightarrow \cos x = \text{sen}\dfrac{5\pi}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow \cos x = \cos\left(-\dfrac{7\pi}{6}\right)$

$x = \pm\dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

h) $\sec x = \text{cossec}\dfrac{3\pi}{8} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\text{sen}\dfrac{3\pi}{8}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\dfrac{3\pi}{8} = \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\pi}{8}\right) \Rightarrow \cos x = \cos\dfrac{\pi}{8}$

$x = \pm\dfrac{\pi}{8} + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\dfrac{\pi}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

45. $\cos^2 2x + 6 = 7 \cdot \cos 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 2x - 7 \cdot \cos 2x + 6 = 0 \begin{cases} \cos 2x = 6 \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ \cos 2x = 1 \end{cases}$

$\cos 2x = 1 \Rightarrow 2x = \pm 0 + 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 \text{ ou } x = \pi \text{ ou } x = 2\pi\}$

46. $2 \cdot \text{sen}^2 x + \text{sen}\,x - 1 = 0 \begin{cases} \text{sen}\,x = \dfrac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \text{sen}\,x = -1 \end{cases}$

- $\text{sen}\,x = \dfrac{1}{2}$

$x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \underbrace{\dfrac{5\pi}{6}}_{\pi - \frac{\pi}{6}} + 2k\pi$

- $\text{sen}\,x = -1$

$x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{6} \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{6} \text{ ou } x = \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

47. alternativa **d**

$\text{sen}\,2x = \cos x \Rightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos x$

$x = \dfrac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$ (I)

$x = -\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} - 2k\pi$ (II)

De I, temos:

$k = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} \in [0, 2\pi]$

$k = 1 \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{6} \in [0, 2\pi]$

$k = 2 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2} \in [0, 2\pi]$

$k < 0 \Rightarrow x \notin [0, 2\pi]$; $k > 2 \Rightarrow x \notin [0, 2\pi]$

De II, temos:

$k = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \in [0, 2\pi]$

$k \neq 0 \Rightarrow x \notin [0, 2\pi]$

Somando as soluções da equação, temos:

$\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = 3\pi$

48. $\text{tg}^2 x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \text{tg}\,x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}} \Rightarrow \text{tg}\,x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

- $\text{tg}\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$
- $\text{tg}\,x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{6} \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{6} \text{ ou } x = \dfrac{7\pi}{6} \text{ ou } x = \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

49. a) $Q(1) = 2 \Rightarrow 2 = \alpha - \cos\left[\dfrac{(1-1)\cdot\pi}{6}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 2 + 1 \Rightarrow \alpha = 3$

b) $Q(t) = 3 \Rightarrow 3 = 3 - \cos\left[\dfrac{(t-1)\cdot\pi}{6}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\left[\dfrac{(t-1)\cdot\pi}{6}\right] = 0 \begin{cases} \dfrac{(t-1)\cdot\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \dfrac{(t-1)\cdot\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

- $\dfrac{(t-1)\cdot\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow 4 + 12k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Como $0 \leqslant t \leqslant 11$, então:

$k = 0 \Rightarrow t = 4$

$k = 1 \Rightarrow t = 16$ (não convém)

- $\dfrac{(t-1)\cdot\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow 10 + 12k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Como $0 \leqslant t \leqslant 11$, então:

$k = 0 \Rightarrow t = 10$

$k = 1 \Rightarrow t = 22$ (não convém)

Portanto, houve 3 000 doações nos meses de maio ($t = 4$) e novembro ($t = 10$).

- Resposta pessoal.
- Resposta pessoal.

50. a) $s = \dfrac{v_0{}^2 \cdot \text{sen}2\alpha}{g} \Rightarrow$

$\Rightarrow s = \dfrac{(12)^2 \cdot 2 \cdot \text{sen } 60° \cdot \cos 60°}{9{,}8} \Rightarrow$

$\Rightarrow s = \dfrac{144 \cdot 2 \cdot (0{,}87) \cdot (0{,}5)}{9{,}8} \Rightarrow s = \dfrac{125{,}28}{9{,}8} \Rightarrow s \simeq 12{,}78$

Portanto, a bola percorreu uma distância horizontal de aproximadamente 12,78 m.

b) $s = \dfrac{v_0{}^2 \cdot \text{sen}2\alpha}{g} \Rightarrow 5{,}29 = \dfrac{(7{,}2)^2 \cdot \text{sen}2\alpha}{9{,}8} \Rightarrow$

$\Rightarrow 51{,}842 = 51{,}84 \cdot \text{sen}2\,\alpha \Rightarrow \text{sen}2\,\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

Portanto, $\alpha = \dfrac{\pi}{4} = 45°$.

51. Resposta pessoal. Possível resposta:

A partir da função dada por $h(x) = \dfrac{71}{6} - \dfrac{13}{6} \cdot \text{sen}\dfrac{2\pi x}{365}$, em que h expressa a quantidade de horas da duração do dia em determinada cidade e x o número de dias após 21 de março (equinócio), calcule a duração do dia, em horas, quando se passarem 92 dias do equinócio.

52. $f(x) \geqslant g(x) \Rightarrow \text{sen } 2x \geqslant \cos x \Rightarrow 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x \geqslant \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}x\left[2\cos(x) - 1\right] \geqslant 0$

Para que essa relação ocorra, uma das seguintes possibilidades deve ser verificada:

- $\text{sen } x \geqslant 0$ e $\cos(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$

Nesse caso, devemos ter $0 \leqslant x \leqslant \pi$ e, além disso, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}$ ou $\dfrac{5\pi}{3} \leqslant x \leqslant 2\pi$, de onde segue que $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}$.

- $\text{sen } x \leqslant 0$ e $\cos(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$

Nesse caso, devemos ter $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ e $\dfrac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{3}$, de onde segue que $\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{3}$.

Além disso, para $x = 2\pi$ a desigualdade também é verificada.

Portanto, a solução é dada por $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \pi \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{3} \text{ ou } x = 2\pi\right\}$.

53. alternativa **a**

$\cos x = \cos 2x \Rightarrow \cos x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x - \text{sen}^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x - 1 + \cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

Tomando $\cos x = y$, obtemos:

$2y^2 - y - 1 = 0 \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

- $y_1 = \cos x = 1$
  $x = 0$ ou $x = 2\pi$
- $y_2 = \cos x = -\dfrac{1}{2}$
  $x = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3}$

Portanto, possui uma solução no 3º quadrante $\left(x = \dfrac{4\pi}{3}\right)$.

54. a) $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{12} \cdot t + \dfrac{3\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \dfrac{\pi}{12} \cdot t + \dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

- $\dfrac{\pi}{12} \cdot t + \dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow t = -12 + 24k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Como $t \in [0, 24]$, então:

$k = 0 \Rightarrow t = -12$ (não convém)

$k = 1 \Rightarrow t = 12$

$k = 2 \Rightarrow t = 36$ (não convém)

Assim, $t = 12$.

b) Sabendo que a temperatura é máxima se $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{12} \cdot t + \dfrac{3\pi}{2}\right) = 1$, temos:

- $H(t) = H_{\text{máxima}} \Rightarrow H(t) = 15 + 5 \cdot \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{12} \cdot t + \dfrac{3\pi}{2}\right) =$
  $= 15 + 5 \cdot 1 = 20$ °C

Como a medição começou às 3 horas da manhã, a temperatura máxima de 20 °C ocorrida no primeiro dia foi observada 12 horas depois, ou seja, às 15 horas.

Capítulo 4 Introdução à lógica de programação

1. Possível resposta:

a)

1. Pegue a escova de dentes
2. Coloque a pasta de dente na escova
3. Escove os dentes
4. Enxágue os dentes
5. Limpe e guarde a escova de dentes

b)

1. Pegue o macaquinho
2. Levante o automóvel com o macaquinho
3. Tire o pneu velho
4. Coloque o pneu novo
5. Desça o automóvel com o macaquinho
6. Guarde o macaquinho

c)

1. Ligue o chuveiro
2. Molhe seu corpo
3. Desligue o chuveiro
4. Ensaboe seu corpo
5. Ligue o chuveiro
6. Enxágue seu corpo
7. Desligue o chuveiro

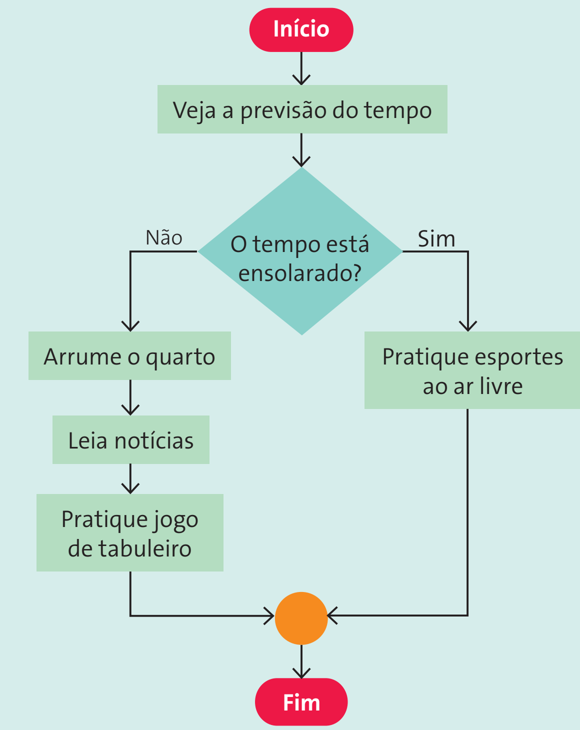
d)

1. Acenda o fogo do fogão
2. Coloque uma frigideira no fogo
3. Coloque óleo na frigideira
4. Quebre o ovo em um recipiente
5. Coloque o ovo na frigideira
6. Frite o ovo na frigideira
7. Desligue o fogo

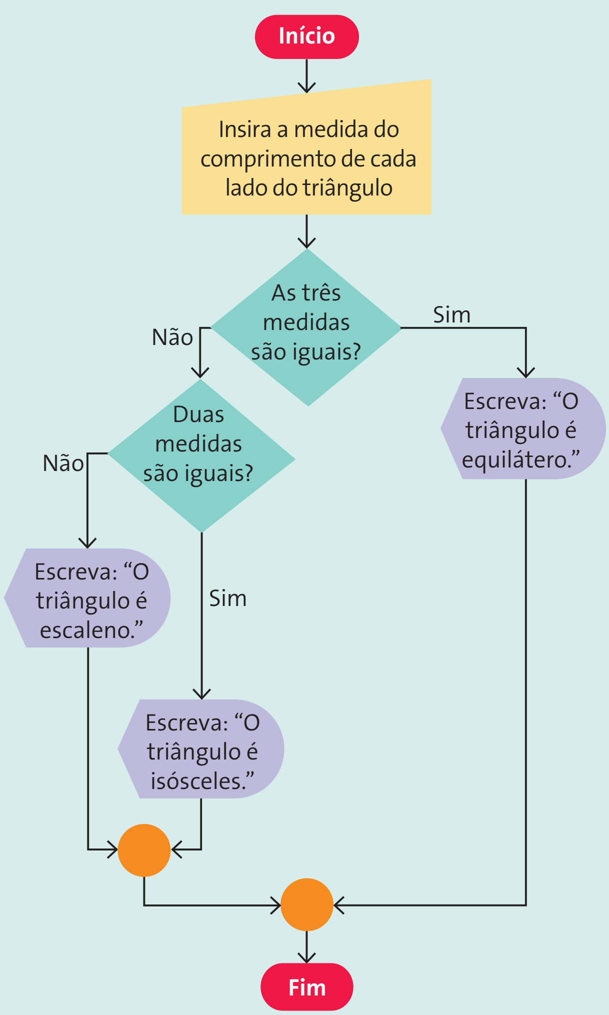
2. Possível resposta: Passear com o cachorro.

1. Coloque a coleira no cachorro
2. Saia de casa com o cachorro
3. Passeie com o cachorro
4. Volte para casa
5. Tire a coleira do cachorro

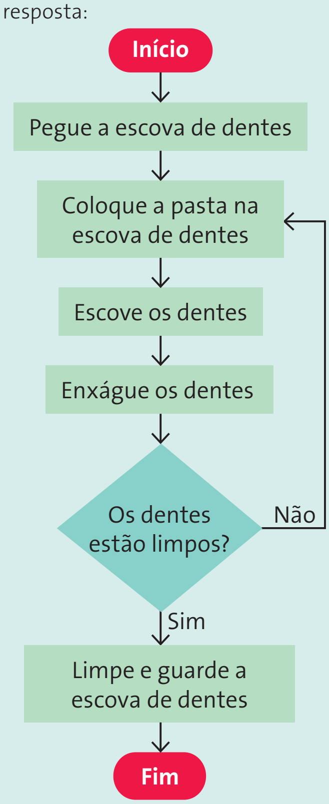
3.



4.



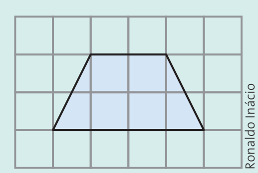
5. Possível resposta:



6. a) O fluxograma descreve o processo de classificar um quadrilátero entre paralelogramo, trapézio ou nenhum dos dois.

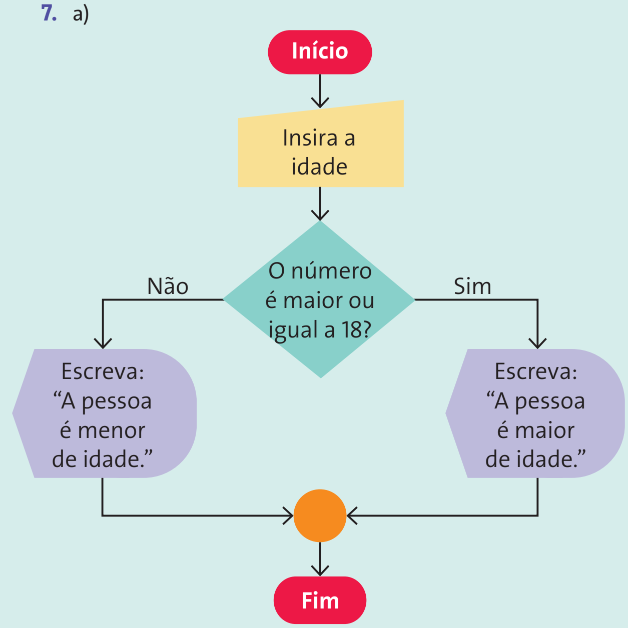
b) A afirmação é verdadeira, pois um paralelogramo possui 2 pares de lados paralelos.

c) Resposta pessoal. Possível resposta:

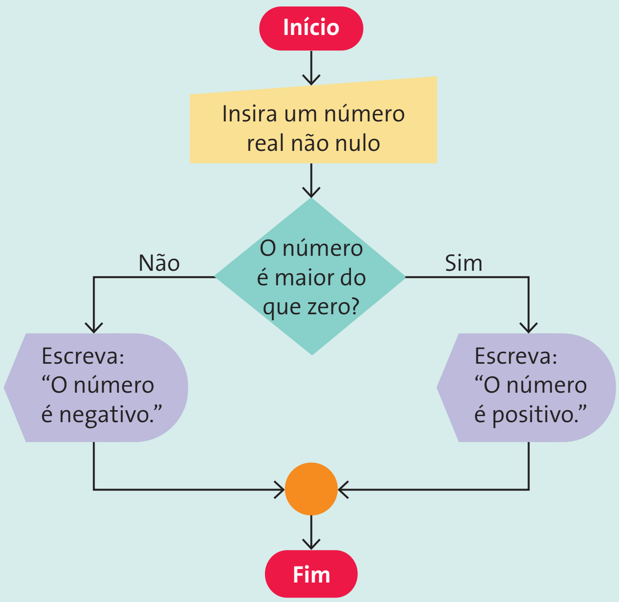


De acordo com o fluxograma, o quadrilátero é um trapézio.

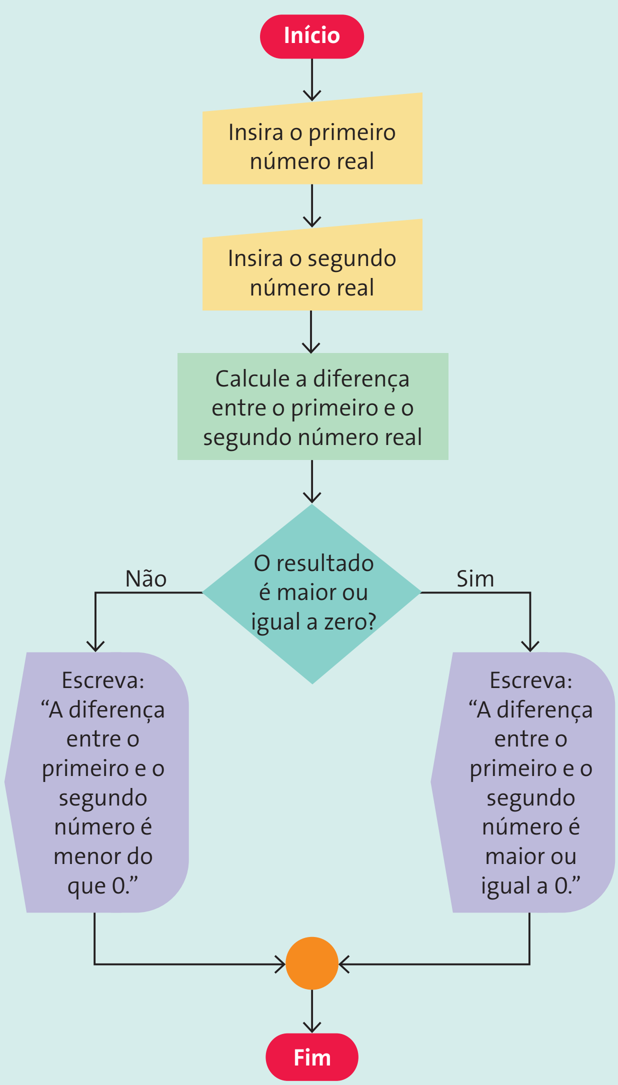
7. a)



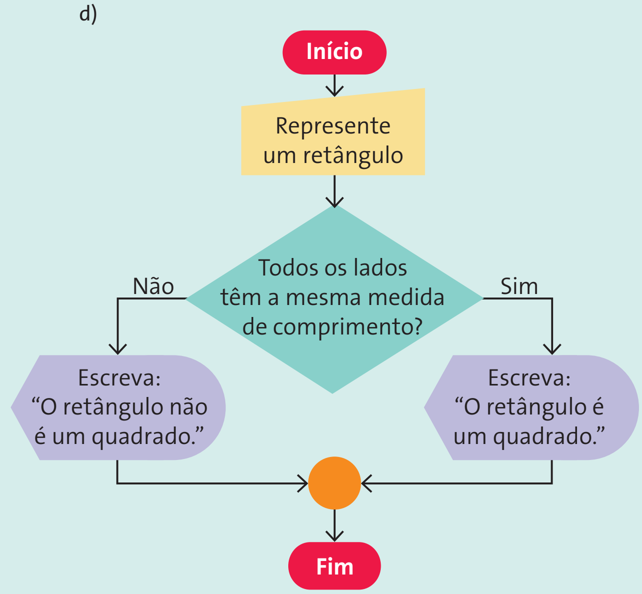
b)



c)



d)



8. Para construir o algoritmo desejado, é importante os alunos observarem que a única possibilidade de a travessia do rio dar certo é quando a raposa e o milho estiverem juntos. Possível resposta:

1. Coloque a galinha no barco
2. Atravesse o rio
3. Retire a galinha do barco
4. Atravesse o rio sozinho
5. Coloque o milho no barco
6. Atravesse o rio
7. Retire o milho do barco e coloque a galinha no barco
8. Atravesse o rio
9. Retire a galinha do barco e coloque a raposa no barco
10. Atravesse o rio
11. Retire a raposa do barco
12. Atravesse o rio sozinho
13. Coloque a galinha no barco
14. Atravesse o rio
15. Retire a galinha do barco
16. Desça do barco

9. a) −b/(2*a)
b) C*((1 + i)^n)
c) (x^2 + a*(y^2) + b*z)/(a*b*(x^2))
d) a^(2/3) + (x − 1)^5
e) 2*x − 1> = (y + 3)/4
f) (x^ 2/a ^2 + y^2 / b^2) = 1

10. a) $\dfrac{30}{(10+(2+3))} = \dfrac{30}{(10+5)} = \dfrac{30}{15} = 2$

b) $4 \cdot \left(\left(\dfrac{9}{(7+3-9+2)}\right) \cdot 5\right) = 4 \cdot \left(\left(\dfrac{9}{3}\right) \cdot 5\right) =$
$= 4 \cdot (3 \cdot 5) = 4 \cdot 15 = 60$

c) $3 \cdot 8 - \left(\sqrt{25}\right) + 3^3 = 3 \cdot 8 - 5 + 3^3 = 24 - 5 + 27 = 46$

d) $25 - \left(\sqrt{64} + (5^3) \cdot \left(7 - \dfrac{4}{2}\right)\right) =$
$= 25 - \left(\sqrt{64} + (125) \cdot (7-2)\right) =$
$= 25 - (8 + (125 \cdot 5)) =$
$= 25 - (8 + 625) =$
$= 25 - 633 =$
$= -608$

11. Resolução na página **270**.

12. a) Como a divisão é efetuada antes da adição, temos:

$(8/2) + (6/3) = 4 + 2 = 6$

$8/2 + 6/3 = 4 + 2 = 6$

Logo, as expressões retornam o mesmo resultado.

b) Usando a ordem de execução das operações, temos:

$12/((1 + 5)/3) = 12/(6/3) = 12/2 = 6$

$12/1 + 5/3 = 12 + 5/3 = (36 + 5)/3 = 41/3$

Logo, as expressões retornam resultados diferentes.

c) Usando a ordem de execução das operações, temos:

$(3 + 3)\hat{}2 + 1 = 6\hat{}2 + 1 = 36 + 1 = 37$

$3 + 3\hat{}(2 + 1) = 3 + 3\hat{}3 = 3 + 27 = 30$

Logo, as expressões retornam resultados diferentes.

13. Resolução na página **270**.

14. MATEMATICA

15. Para o cálculo da medida de área de uma região triangular, temos:

```
início
    var b, h, A: real
    escreva ("Digite a medida do comprimento da base b: ")
    leia (b)
    escreva ("Digite a medida do comprimento da altura h: ")
    leia (h)
    A <- b*h/2
    escreva ("A medida da área da região é A = ", A)
fim
```

16. Cálculo da medida da área de um círculo:

```
início
    var r, A: real
    constante Pi:= 3.14
    escreva ("Digite a medida do comprimento do raio r: ")
    leia (r)
    A <- Pi*r^2
    escreva ("A medida da área do círculo é A = ", A)
fim
```

17. a) Para o cálculo de $f(x)$, dado o ponto x, temos:

```
início
    var x, f: real
    escreva ("Digite o valor de x: ")
    leia (x)
    f <- 2*x + 1
    escreva ("O valor de f no ponto x é ", f)
fim
```

b) Para o cálculo de $g(x)$, dado o ponto x, temos:

```
início
    var x, g: real
    escreva ("Digite o valor de x: ")
    leia (x)
    g <- x^2 − 2*x + 1
    escreva ("O valor de g no ponto x é ", g)
fim
```

c) Para o cálculo de $h(x)$, dado o ponto x, temos:

```
início
    var x, h: real
    escreva ("Digite o valor de x:")
    leia (x)
    h <- (2*x^3)/3 − 5*x^2
    escreva ("O valor de h no ponto x é", h)
fim
```

d) Para o cálculo de $p(x)$, dado o ponto x, temos:

```
início
    var x, p: real
    escreva ("Digite o valor de x: ")
    leia (x)
    p <- 2*x^5 − 5*x^3
    escreva ("O valor de p no ponto x é", p)
fim
```

18. Como $8 < 9$, $12 \leq 15$ e $5 \neq 0$, então $v1 = 0$, $v2 = 1$ e $v3 = 1$, em que 0 (zero) representa "falso" e 1 (um) representa verdadeiro.

19. a) 5; 3 e 10

b) 5, 10, 3

c) 37; 8, 13; 45; 45, 37, 0

20. a) X1 pode ser usado como nome de variável, pois não apresenta nenhum caractere especial.

b) Quando não houver a declaração de constantes, a palavra constante pode ser usada como nome de variável.

c) R$ não pode ser usado como nome de variável, pois possui caractere especial ($).

d) Nota Prova1 não pode ser usado como nome de variável, pois possui espaço entre as palavras.

e) NumeroAluno pode ser usado como nome de variável, pois não possui espaço entre as palavras nem acento.

f) 1nome não pode ser usado como nome de variável, pois começa com número.

21. a) Nesse caso, a variável declarada e o valor "MEDIA" não são os mesmos, pois a linguagem é sensível a letras maiúsculas e minúsculas.

b) Nesse caso, o valor atribuído pra "Num" não é uma condição de verificação de verdadeiro ou falso.

22. Para o cálculo do saldo atual, temos o seguinte algoritmo:

```
início
    var SaldoAnterior, Deposito, Saque, SaldoAtual: real
    escreva ("Digite o valor do saldo anterior: ")
    leia (SaldoAnterior)
    escreva ("Digite o valor do depósito: ")
    leia (Deposito)
    escreva ("Digite o valor do saque: ")
    leia (Saque)
    SaldoAtual <- SaldoAnterior + Deposito − Saque
    escreva ("O valor do saldo atual é ", SaldoAtual)
fim
```

23. Para o cálculo do sucessor e o cálculo do antecessor de um número inteiro, temos:

```
início
    var numero, antecessor, sucessor: inteiro
    escreva ("Digite o número: ")
    leia (numero)
    antecessor <- numero – 1
    sucessor <- numero + 1
    escreva ("O antecessor é ", antecessor, ", e o sucessor é ", sucessor)
fim
```

24. Para a conversão da temperatura medida em graus Fahrenheit para a medida em graus Celsius, temos o seguinte algoritmo:

```
início
    var F, C: real
        escreva ("Digite a medida da temperatura em graus Fahrenheit: ")
    leia (F)
    C <- 5*(F – 32)/9
    escreva ("A medida da temperatura em graus Celsius é ", C)
fim
```

25. a) O valor é nulo.

b) verdadeiro, 40, cinco

c) $5 < 10 =$ verdadeiro

d) 14, 2

26. Para a soma das raízes de uma equação de 2º grau, temos:

```
início
    var a, b, c, Delta, x1, x2, Soma: real
    escreva ("Digite o coeficiente a não nulo: ")
    leia (a)
    escreva ("Digite o coeficiente b: ")
    leia (b)
    escreva ("Digite o coeficiente c: ")
    leia (c)
    Delta <- b^2 – 4*a*c
    se Delta<0 então
            escreva ("Essa equação não tem raízes reais.")
    senão
            x1 <- (–b – (Delta)^(1/2))/(2*a)
            x2 <- (–b + (Delta)^(1/2))/(2*a)
            escreva ("As raízes da equação são x1 =", x1, "e x2 = ", x2)
    fim se
    Soma <- x1+x2
    escreva ("A soma das raízes da equação é ", Soma)
fim
```

Para o produto das raízes de uma equação de 2º grau, temos:

```
início
    var a, b, c, Delta, x1, x2, Produto: real
    escreva ("Digite o coeficiente a não nulo: ")
    leia (a)
    escreva ("Digite o coeficiente b: ")
    leia (b)
    escreva ("Digite o coeficiente c: ")
    leia (c)
    Delta <- b^2 – 4*a*c
    se Delta<0 então
            escreva ("Essa equação não tem raízes reais.")
    senão
            x1 <- (–b – (Delta)^(1/2))/(2*a)
            x2 <- (–b + (Delta)^(1/2))/(2*a)
            escreva ("As raízes da equação são x1 =", x1, "e x2 = ", x2)
    fim se
    Produto <- x1*x2
    escreva ("O produto das raízes da equação é ", Produto)
fim
```

27. Possível resposta:

```
início
    var n1, n2, n3: real
    escreva ("Digite o primeiro número: ")
    leia (n1)
    escreva ("Digite o segundo número: ")
    leia (n2)
    n3 <- n2
    n2 <- n1
    escreva ("O valor do primeiro número é ", n3,
             "e o valor do segundo número é ", n2)
fim
```

28. Para o custo estimado de uma viagem de automóvel com combustível, temos:

```
início
    var kmPorLitro, DistanciaViagem, PrecoLitro, CustoEstimado: real
    escreva ("Digite a quilometragem percorrida com 1 litro de combustível: ")
    leia (kmPorLitro)
    escreva ("Digite a medida da distância total da viagem, em km: ")
    leia (DistanciaViagem)
    escreva ("Digite o preço de 1 litro de combustível: ")
    leia (PrecoLitro)
    CustoEstimado <- kmPorLitro/DistanciaViagem*PrecoLitro
    escreva ("O custo estimado da viagem é ", CustoEstimado)
fim
```

29. a) Condição: uma pessoa é maior de idade ou é menor de idade.

```
início
    var idade: real
    escreva ("Insira a idade da pessoa: ")
    leia (idade)
    se idade <18 então
        escreva ("Essa pessoa é menor de idade")
    senão
        escreva ("Essa pessoa é maior de idade")
    fim se
fim
```

b) Condição: um número real não nulo é positivo ou negativo.

```
início
    var numero: real
    escreva ("Insira o número real não nulo: ")
    leia (numero)
    se numero<0 então
        escreva ("O número é negativo")
    senão
        escreva ("O número é negativo")
    fim se
fim
```

c) Condição: a diferença entre um primeiro número e um segundo número é menor do que zero ou é maior ou igual a zero.

```
início
    var numero1, numero2: real
    escreva ("Insira o primeiro número: ")
    leia (numero1)
    escreva ("Insira o segundo número: ")
    leia (numero2)
    se numero1-numero2<0 então
        escreva ("A diferença entre o primeiro número digitado e o segundo número digitado é menor do que zero")
    senão
        escreva ("A diferença entre o primeiro número digitado e o segundo número digitado é maior ou igual que zero")
    fim se
fim
```

d) Condição: um retângulo é um quadrado ou não é um quadrado.

```
início
    var lado1, lado2: real
    escreva ("Digite a medida de comprimento de um lado do retângulo: ")
    leia (lado1)
    escreva ("Digite a medida de comprimento de um lado do retângulo que não é paralelo ao lado cuja a medida de comprimento foi inserida anteriormente:")
    leia (lado2)
    se lado1 = lado 2 então
        escreva ("O retângulo é um quadrado")
    senão
        escreva ("O retângulo não é um quadrado")
    fim se
fim
```

30. Possível resposta:

Condição: um número inteiro é par ou ímpar.

```
início
    var numero: inteiro
    escreva ("Insira o número inteiro: ")
    leia (numero)
    se numero mod 2 = 0 então
        escreva ("O número", numero, "é par")
    senão
        escreva ("O número", numero, "é ímpar")
    fim se
fim
```

31. Possível resposta:

Condição: aprovado ou reprovado.

```
início
    var nota1, nota2, nota3, media: real
    escreva ("Insira a nota da primeira prova: ")
    leia (nota1)
    escreva ("Insira a nota da segunda prova: ")
    leia (nota2)
    escreva ("Insira a nota da terceira prova: ")
    leia (nota3)
    media <- (2*nota1 + 3*nota2 + 5*nota3)/(2 + 3 + 5)
    se media>=7 então
        escreva ("O aluno está aprovado com média ", media)
    senão
        escreva ("O aluno está reprovado com média ", media)
    fim se
fim
```

32. Cálculo do IMC e classificação de acordo com o IMC.

```
início
    var massa, altura, IMC: real
    escreva ("Informe a medida da massa da pessoa: ")
    leia (massa)
    escreva ("Informe a medida da altura da pessoa: ")
    leia (altura)
    IMC <- massa/(altura)^2
    se IMC < 35 então
        se IMC < 25 então
            escreva ("O IMC é ", IMC,". A pessoa está com o IMC normal")
        senão
            se IMC < 30 então
                escreva ("O IMC é ", IMC,". A pessoa está com sobrepeso")
            senão
                escreva ("O IMC é ", IMC,". A pessoa está com obesidade de grau 1")
            fim se
        fim se
    senão
        escreva ("O IMC é ", IMC,". A pessoa está com obesidade de grau 2")
    fim se
fim
```

33. Resposta na página **270**.

34. Possível resposta:

Verificar se um número real é maior, menor ou igual a 3.

```
início
  var numero: real
  escreva ("Digite o número: ")
  leia (numero)
  se numero <> 3 então
    se numero < 3 então
      escreva ("O número é menor do que 3")
    senão
      escreva ("O número é maior do que 3")
    fim se
  senão
    escreva ("O número é igual a 3")
  fim se
fim
```

35. Possível resposta:

Conceitos em relação às notas de avaliações.

```
início
  var nota: real
  escreva ("Informe a nota: ")
  leia (nota)
  se nota <= 9.0 então
    se nota <= 3.5 então
      escreva ("O conceito é E")
    senão
      se nota <= 5.0 então
        escreva ("O conceito é D")
      senão
        se nota <= 7.0 então
          escreva ("O conceito é C")
        senão
          escreva ("O conceito é B")
        fim se
      fim se
    fim se
  senão
    escreva ("O conceito é A")
  fim se
fim
```

36. Possível resposta:

Determinar valor do troco.

```
início
  var Compra, Pago, Troco: real
  escreva ("Informe o valor da compra: ")
  leia (Compra)
  escreva ("Informe o valor pago pelo cliente: ")
  leia (Pago)
  se Compra > Pago então
    escreva ("O valor entregue pelo cliente não é suficiente
        para pagar a compra")
  senão
    se Pago > Compra então
      Troco <- Pago – Compra
      escreva ("O valor do troco a ser entregue para o
          cliente é ", Troco)
    senão
      escreva ("O valor entregue pelo cliente é suficiente
          para pagar a compra")
    fim se
  fim se
fim
```

37. Resolução na página **272**.

38. Resolução na página **272**.

39. Possível resposta:

a) Números inteiros de 1 até 50.

```
início
  var numero: inteiro
  numero <- 0
  enquanto numero < 50 faça
    numero <- numero + 1
    escreva (numero)
  fim enquanto
fim
```

b) Números inteiros de 50 até 1.

```
início
  var numero: inteiro
  numero <- 51
  enquanto numero > 1 faça
    numero <- numero – 1
    escreva (numero)
  fim enquanto
fim
```

c) Números inteiros de 50 até 100.

```
início
  var numero: inteiro
  numero <- 49
  enquanto numero < 100 faça
    numero <- numero + 1
    escreva (numero)
  fim enquanto
fim
```

d) Números inteiros de – 20 até 0.

```
início
  var numero: inteiro
  numero <- – 21
  enquanto numero < 0 faça
    numero <- numero + 1
    escreva (numero)
  fim enquanto
fim
```

40. Possível resposta:

a) Números inteiros de 1 até 50.

```
início
  var numero: inteiro
  numero <- 0
  repita
    numero <- numero + 1
    escreva (numero)
  até numero = 50
fim
```

b) Números inteiros de 50 até 1.

```
início
  var numero: inteiro
  numero <- 51
  repita
    numero <- numero – 1
    escreva (numero)
  até numero = 1
fim
```

c) Números inteiros de 50 até 100.

```
início
  var numero: inteiro
  numero <- 49
  repita
    numero <- numero + 1
    escreva (numero)
  até numero = 100
fim
```

d) Números inteiros de – 20 até 0.

```
início
  var numero: inteiro
  numero <- – 21
  repita
    numero <- numero + 1
    escreva (numero)
  até numero = 0
fim
```

41. Possível resposta:

a) Números pares entre 2 e 20.

```
início
  var i, numero: inteiro
  numero <- 2
  para i de 1 até 10 passo 1 faça
    escreva (numero * i)
  fim para
fim
```

b) Números múltiplos de 5 entre 5 e 50.

```
início
  var i, numero: inteiro
  numero <- 5
  para i de 1 até 10 passo 1 faça
    escreva (numero * i)
  fim para
fim
```

c) Números inteiros de 10 até – 10.

```
início
  var i, numero: inteiro
  numero <- 10
  para i de 0 até 20 passo 1 faça
    escreva (numero – i)
  fim para
fim
```

d) Números múltiplos de 10 entre 100 e 0.

```
início
  var i, numero: inteiro
  numero <- 100
  para i de 0 até 100 passo 10 faça
    escreva (numero – i)
  fim para
fim
```

42. Possível resposta:

a) Números pares entre 2 e 20.

```
início
  var numero: inteiro
  numero <- 0
  repita
    numero <- numero + 2
    escreva (numero)
  até numero = 20
fim
```

b) Números múltiplos de 5 entre 5 e 50.

```
início
    var numero: inteiro
    numero <- 0
    repita
      numero <- numero + 5
      escreva (numero)
    até numero = 50
fim
```

c) Números inteiros de 10 até –10.

```
início
    var numero: inteiro
    numero <- 11
    repita
      numero <- numero – 1
      escreva (numero)
    até numero = – 10
fim
```

d) Números múltiplos de 10 entre 100 e 0.

```
início
    var numero: inteiro
    numero <- 110
    repita
      numero <- numero – 10
      escreva (numero)
    até numero = 0
fim
```

- Resposta pessoal.

43. Possível resposta:

Os 10 próximos números inteiros a partir de um número inteiro dado.

```
início
    var i, numero: inteiro
    escreva ("Digite um número inteiro: ")
    leia (numero)
    para i de 1 até 10 passo 1 faça
       escreva (numero + i)
    fim para
fim
```

44. a) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

b) 3, 9, 27, 81

c) 20, 30, 40, 50

45. Possível resposta:

Os 10 próximos números pares.

```
início
    var i, numero: inteiro
    escreva ("Digite o primeiro número par: ")
    leia (numero)
    para i de 1 até 10 passo 1 faça
       escreva ( numero + 2 * i )
    fim para
fim
```

Resoluções do capítulo **1**

68. $\triangle ABC$

$$S = \frac{2\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \text{sen } 60°}{2} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \rightarrow 6 \text{ u.a.}$$

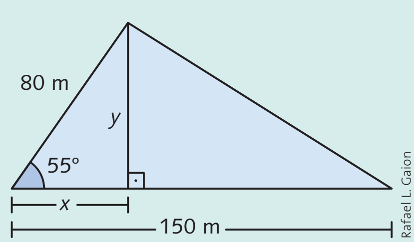
$\triangle DEF$

$$\frac{20}{\underbrace{\text{sen } 150°}_{\text{sen }(180° - 150°)}} = \frac{DF}{\text{sen } 10°} \Rightarrow \frac{20}{\frac{1}{2}} \simeq \frac{DF}{0{,}1736} \Rightarrow DF \simeq 6{,}944$$

Assim, $S \simeq \dfrac{20 \cdot 6{,}944 \cdot \text{sen } 20°}{2} \simeq 69{,}44 \cdot 0{,}3420 \simeq 23{,}75$ → aproximadamente 23,75 u.a.

72. a) $S_T = \dfrac{80 \cdot 150 \cdot \text{sen } 55°}{2} \simeq 6\,000 \cdot 0{,}8192 = 4\,915{,}2$ → aproximadamente 4 915,2 m^2

b)



$$\text{sen } 55° = \frac{y}{80} \Rightarrow 0{,}8192 \simeq \frac{y}{80} \Rightarrow y \simeq 65{,}54$$

$$\cos 55° = \frac{x}{80} \Rightarrow 0{,}5736 \simeq \frac{x}{80} \Rightarrow x \simeq 45{,}89$$

Perímetro: 80 + 65,54 + 45,89 ≃ 191,43 → aproximadamente 191,43 m.

c) Calculando a área da parte que continuará descoberta, obtemos:

$$S_D = \frac{45{,}89 \cdot 80 \cdot \text{sen } 55°}{2} \simeq 1\,835{,}6 \cdot 0{,}8192 \simeq 1\,503{,}7 \rightarrow \text{aproximadamente } 1\,503{,}7 \text{ m}^2$$

Sendo assim, a área S da parte coberta é dada por:

$$S = S_T - S_D \simeq 4\,915{,}2 - 1\,503{,}7 = 3\,411{,}5 \rightarrow \text{aproximadamente } 3\,411{,}5 \text{ m}^2$$

74. Como $B\hat{A}E = 90°$, então $C\hat{A}D = 10°$. Sendo assim, calculando a área total do jardim a partir dos três triângulos que o compõem, obtemos:

$$72{,}96 = \frac{AB \cdot AC \cdot \text{sen } 40°}{2} + \frac{AC \cdot AD \cdot \text{sen } 10°}{2} + \frac{AD \cdot AE \cdot \text{sen } 40°}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 72{,}96 = \frac{AB \cdot AB \cdot \text{sen } 40°}{2} + \frac{AB \cdot AB \cdot \text{sen } 10°}{2} + \frac{AB \cdot AB \cdot \text{sen } 40°}{2} \Rightarrow 145{,}92 = AB^2 \cdot \text{sen } 40° + AB^2 \cdot \text{sen } 10° + AB^2 \cdot \text{sen } 40° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 145{,}92 \simeq AB^2 \cdot 0{,}6428 + AB^2 \cdot 0{,}1736 + AB^2 \cdot 0{,}6428 \Rightarrow 145{,}92 \simeq 1{,}4592 \cdot AB^2 \Rightarrow AB^2 \simeq 100 \Rightarrow AB \simeq 10 \rightarrow \text{aproximadamente } 10 \text{ m}$$

Resoluções do capítulo **3**

29. alternativa **e**

a) $\text{sen}^2 26° + \cos^2 26° = 1 \Rightarrow 0{,}44^2 + \cos^2 26° = 1 \Rightarrow \cos^2 26° \simeq 0{,}81 \Rightarrow \cos 26° \simeq 0{,}90$

$\text{sen}^2 19° + \cos^2 19° = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 19° + 0{,}95^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 19° \simeq 1 - 0{,}9 \Rightarrow \text{sen} 19° \simeq 0{,}32$

Assim: $0{,}90 + 0{,}32 = 1{,}22 < 2$.

b) $\text{tg} 26° = \dfrac{\text{sen } 26°}{\cos 26°} \simeq \dfrac{0{,}44}{0{,}90} \simeq 0{,}49$

$\text{tg} 19° = \dfrac{\text{sen } 19°}{\cos 19°} \simeq \dfrac{0{,}32}{0{,}95} \simeq 0{,}34$

Em que, $0{,}49 + 0{,}34 = 0{,}83 < 2$.

c) $\cos 71° = \cos(26° + 45°) = \cos 26° \cdot \cos 45° - \text{sen } 26° \cdot \text{sen } 45° \simeq 0{,}90 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}44 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}32$

$\cos 41° = \cos(60° - 19°) = \cos 60° \cdot \cos 19° + \text{sen } 60° \cdot \text{sen } 19° = \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}95 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}32 \simeq 0{,}75$

Assim: $0{,}32 + 0{,}75 = 1{,}07 < 2$.

d) $\text{sen} 86° = \text{sen}(60° + 26°) = \text{sen} 60° \cdot \cos 26° + \text{sen} 26° \cdot \cos 60° \simeq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}90 + 0{,}44 \cdot \dfrac{1}{2} \simeq 1$

$\text{sen} 11° = \text{sen}(30° - 19°) = \text{sen} 30° \cdot \cos 19° - \text{sen} 19° \cdot \cos 30° = \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}95 - 0{,}32 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}2$

Assim: $1 + 0{,}2 = 1{,}2 < 2$.

e) $\text{tg } 56° = \text{tg}(30° + 26°) = \dfrac{\text{tg } 30° + \text{tg } 26°}{1 - \text{tg } 30° \cdot \text{tg } 26°} \simeq \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3} + 0{,}49}{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0{,}49} \simeq 1{,}49$

$\text{tg } 34° = \text{tg}(60° - 26°) = \dfrac{\text{tg } 60° - \text{tg } 26°}{1 + \text{tg } 60° \cdot \text{tg } 26°} \simeq \dfrac{\sqrt{3} - 0{,}49}{1 + \sqrt{3} \cdot 0{,}49} \simeq 0{,}67$

Assim, $1{,}49 + 0{,}67 = 2{,}16 > 2$.

30. a) $\text{sen}(30° + x) + \text{sen}(30° - x) = \text{sen} 30° \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot \cos 30° + \text{sen } 30° \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \cos 30° =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \cos x + \text{sen} x \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \cos x - \text{sen} x \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos x$

b) $\dfrac{\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)} = \dfrac{\text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\beta \cdot \cos\alpha + \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta} = \dfrac{2 \cdot \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta}{2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta} = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg } \alpha$

35. $\text{sen}^2 7° + \cos^2 7° = 1 \Rightarrow 0{,}12^2 + \cos^2 7° = 1 \Rightarrow \cos 7° \simeq 0{,}99$

$\text{sen}^2 50° + \cos^2 50° = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 50° + 0{,}64^2 = 1 \Rightarrow \text{sen } 50° \simeq 0{,}77$

$\text{sen}^2 26° + \cos^2 26° = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 26° + 0{,}90^2 = 1 \Rightarrow \text{sen } 26° \simeq 0{,}44$

a) $\text{sen } 67° = \text{sen}(60° + 7°) = \text{sen } 60° \cdot \cos 7° + \text{sen } 7° \cdot \cos 60° \simeq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}99 + 0{,}12 \cdot 0{,}5 \simeq 0{,}92$

b) $\text{sen } 38° = \text{sen}(45° - 7°) = \text{sen } 45° \cdot \cos 7° - \text{sen } 7° \cdot \cos 45° \simeq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0{,}99 - 0{,}12 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}61$

c) $\cos 24° = \cos(50° - 26°) = \cos 50° \cdot \cos 26° + \text{sen } 50° \cdot \text{sen } 26° \simeq 0{,}64 \cdot 0{,}90 + 0{,}77 \cdot 0{,}44 \simeq 0{,}91$

d) $\cos 80° = \cos(50° + 30°) = \cos 50° \cdot \cos 30° - \text{sen } 50° \cdot \text{sen } 30° \simeq 0{,}64 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}77 \cdot \dfrac{1}{2} \simeq 0{,}17$

e) $\operatorname{tg} 10° = \operatorname{tg}(40° - 30°) = \dfrac{\operatorname{tg} 40° - \operatorname{tg} 30°}{1 + \operatorname{tg} 40° \cdot \operatorname{tg} 30°} = \dfrac{0{,}84 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 0{,}84 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}} \simeq 0{,}18$

f) $\operatorname{tg} 85° = \operatorname{tg}(45° + 40°) = \dfrac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 40°}{1 - \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg} 40°} = \dfrac{1 + 0{,}84}{1 - 1 \cdot 0{,}84} = 11{,}5$

Resoluções do capítulo **4**

11. A ordem de execução da expressão a seguir será:

(a + b)^3/(((c − 2)*d) + (a − b))

(a + b)^3/(c − 2*d + (a − b))

((a + b)^3)/(c − 2*d + a − b)

(a^3 + ((a^2)*b) + (a*(b^2)) + b^3)/(((c − 2)*d) + a − b)

13.

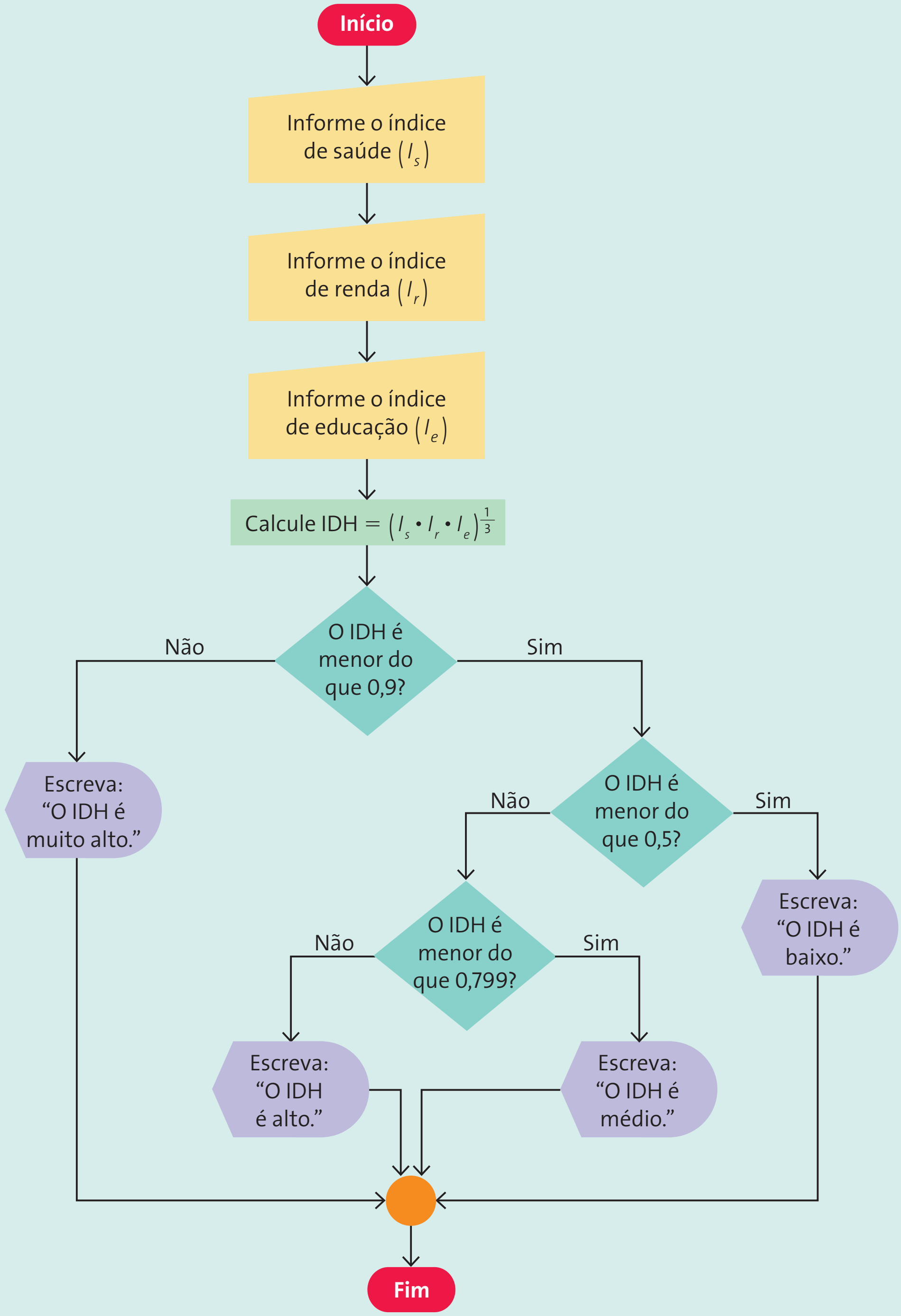
Linguagem de programação	Expressão matemática	Resultados para $x = 1, y = 2, z = 3$
(3*x − y + 1)/(y + (5*z + 1)^2)	$\dfrac{3x - y + 1}{y + (5z + 1)^2}$	$\dfrac{3 \cdot 1 - 2 + 1}{2 + (5 \cdot 3 + 1)^2} = \dfrac{2}{258} = \dfrac{1}{129}$
3*x − y + 1/(y + (5*z + 1)^2)	$3x - y + \dfrac{1}{y + (5z + 1)^2}$	$3 \cdot 1 - 2 + \dfrac{1}{2 + (5 \cdot 3 + 1)^2} = 1 + \dfrac{1}{258} = \dfrac{259}{258}$
(3*x − y + 1)/y + (5*z + 1)^2	$\dfrac{3x - y + 1}{y} + (5z + 1)^2$	$\dfrac{3 \cdot 1 - 2 + 1}{2} + (5 \cdot 3 + 1)^2 = 257$
(3*x − y + 1)/(y + 5*z + 1^2)	$\dfrac{3x - y + 1}{y + 5z + 1^2}$	$\dfrac{3 \cdot 1 - 2 + 1}{2 + 5 \cdot 3 + 1^2} = \dfrac{2}{18} = \dfrac{1}{9}$

33. Resposta pessoal. Para ilustrar, vamos criar um algoritmo que permita calcular o índice de desenvolvimento humano (IDH) de uma cidade, estado ou país. Para isso, devemos ter em mãos o índice de saúde (I_s), o índice de renda (I_r) e o índice de educação (I_e) de onde desejamos calcular o IDH. Assim, o IDH é dado pela fórmula:

$$\text{IDH} = (I_s \cdot I_r \cdot I_e)^{\frac{1}{3}}$$

Cálculo do IDH e classificação de acordo com o IDH de acordo com o Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (Pnud):

```
início
   var Is, Ir, Ie, IDH: real
   escreva ("Informe o índice de saúde: ")
   leia (Is)
   escreva ("Informe o índice de renda: ")
   leia (Ir)
   escreva ("Informe o índice de educação: ")
   leia (Ie)
   IDH < −(Is*Ir*Ie)^(1/3)
   se IDH < 0.9 então
      se IDH < 0.5 então
         escreva ("O IDH é", IDH,", o que é considerado baixo")
      senão
         se IDH < 0.799 então
            escreva ("O IDH é", IDH,", o que é considerado médio")
         senão
            escreva ("O IDH é", IDH,", o que é considerado alto")
         fim se
      fim se
   senão
      escreva ("O IDH é", IDH,", o que é considerado muito alto")
   fim se
fim
```



IDH $<$ 0,9	*IDH* $<$ 0,5	*IDH* $<$ 0,799	Resultado exibido na tela
F	–	–	O IDH é muito alto
V	V	–	O IDH é baixo
V	F	V	O IDH é médio
V	F	F	O IDH é alto

37. Possível resposta:
Mês correspondente ao número digitado.

```
início
    var Mes: real
    escreva ("Digite um número:")
    leia (Mes)
    caso Mes seja
        1
            escreva ("Janeiro")
        2
            escreva ("Fevereiro")
        3
            escreva ("Março")
        4
            escreva ("Abril")
        5
            escreva ("Maio")
        6
            escreva ("Junho")
        7
            escreva ("Julho")
        8
            escreva ("Agosto")
        9
            escreva ("Setembro")
        10
            escreva ("Outubro")
        11
            escreva ("Novembro")
        12
            escreva ("Dezembro")
      padrão
            escreva ("Não existe um mês correspondente a esse
                número")
    fim se
fim
```

38. Possível resposta:
Operação entre dois números inteiros não nulos.

```
início
    var numero1, numero2: inteiro
      operacao: caractere
      resultado: real
    escreva ("Digite um número inteiro não nulo:")
    leia (numero1)
    escreva ("Digite outro número inteiro não nulo:")
    leia (numero2)
    escreva ("Informe a operação que deseja realizar:")
    leia (operacao)
    caso operacao seja
      +
         resultado <- numero1 + numero2
         escreva (resultado)
      -
         resultado <- numero2 - numero1
         escreva (resultado)
      *
         resultado <- numero1*numero2
         escreva (resultado)
      /
         resultado <- numero1/numero2
         escreva (resultado)
    padrão
         escreva ("Informe operação novamente")
    fim se
fim
```

ISBN: 978-65-5763-027-3

9 786557 630273