ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS
ENSINO MÉDIO

MANUAL DO PROFESSOR

Matemática Interligada

Geometria espacial e plana

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO –
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO

CÓDIGO DA COLEÇÃO:
0182P21202

CÓDIGO DA COLEÇÃO:
0182P21202138

Editora responsável
Thais Marcelle de Andrade

editora scipione

ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS
ENSINO MÉDIO

Matemática Interligada

Geometria espacial e plana

MANUAL DO PROFESSOR

Editora responsável

Thais Marcelle de Andrade

Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR)

Especialista em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR)

Editora de materiais didáticos da área de Matemática, possui experiência como professora de Matemática em escolas públicas e particulares

1ª edição, São Paulo, 2020

editora scipione

editora scipione

Presidência: Paulo Serino
Direção editorial: Lauri Cericato
Gestão de projeto editorial: Heloisa Pimentel
Coordenação de área: Juliana Grassmann dos Santos, Marcela Maris
Projeto e produção editorial: Scriba Soluções Editoriais
Edição: Sheila C. Molina, Thais Marcelle de Andrade
Assistência editorial: Guilherme Francisco de Almeida, Henrique Gonçalves Menck, Tatiana Aleixo Bologna
Planejamento e controle de produção editorial: Camila Rumiko Minaki Hoshi (ger.), Priscilla de Freitas Cornelsen Rosa (superv.), Daiana Fernanda Leme de Melo (coord.)
Preparação e revisão: Equipe Scriba
Projeto gráfico e *design*: Marcela Pialarissi
Arte: André Leandro Silva (ger.), Tamires Rose Azevedo (coord.), Ingridhi Borges (edição de arte), Leandro Júnior Pimenta e Leda Teodorico (diagramação)
Iconografia e tratamento de imagens: Erick Lopes de Almeida (coord.), André Silva Rodrigues (pesquisa iconográfica), Johannes de Paulo (tratamento de imagens)
Licenciamento de conteúdos de terceiros: Erick Lopes de Almeida (coord.), Marissol Martins Maia
Capa: Luis Vassallo
Foto de capa: Photodisc/Getty Images

Avenida Paulista, 901, 4º andar
Jardins – São Paulo – SP – CEP 01310-200
Tel.: 4003-3061
www.edocente.com.br
atendimento@aticascipione.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Matemática interligada : geometria espacial e plana / obra coletiva ; editora responsável Thais Marcelle de Andrade. -- 1. ed. -- São Paulo : Scipione, 2020.

Suplementado pelo manual do professor
Bibliografia
ISBN 978-65-5763-034-1 (aluno)
ISBN 978-65-5763-035-8 (professor)

1. Matemática e suas tecnologias (Ensino Médio) 2. Matemática (Ensino Médio) 3. Geometria I. Andrade, Thais Marcelle de.

20-2804 CDD 510.7

Angélica Ilacqua CRB-8/7057

2020
Código da obra CL 719991
CAE 729684 (AL) / 729685 (PR)
1ª edição
1ª impressão
De acordo com a BNCC.

Impressão e acabamento

Elaboração de conteúdos

Thais Marcelle de Andrade
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).
Especialista em Educação Matemática pela UEL-PR.
Editora de materiais didáticos da área de Matemática, possui experiência como professora de Matemática em escolas públicas e particulares.

Victor Hugo dos Santos Gois
Licenciado em Matemática pela UEL-PR.
Especialista em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Editor de materiais didáticos da área de Matemática.

Elias Borges da Silva
Licenciado em Matemática pela UEL-PR.
Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela UEL-PR.
Possui experiência como professor de Matemática em escolas públicas.

Eduardo Henrique Gomes Tavares
Bacharel em Matemática pela UEL-PR.
Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela UEL-PR.
Editor e produtor de conteúdo de materiais didáticos da área de Matemática.

Keila Tatiana Boni
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP-PR).
Licenciada em Física pela Universidade Estadual de Maringá (UEM-PR).
Especialista em Educação Inclusiva pela Universidade Castelo Branco (UCB-RJ).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL-PR.
Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL-PR.
Possui experiência como professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental e do Ensino Superior.

Danielly Kaspary
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS).
Mestre em Educação Matemática pela UFMS.
Colabora em pesquisas do Grupo de Estudo em Didática da Matemática da UFMS e na produção de materiais didáticos da área de Matemática.

Apresentação

As situações cotidianas que demandam de nós alguma decisão, interpretação e análise crítica das informações, aliada ao rápido avanço da tecnologia presente em diferentes setores, evidencia a necessidade de dominarmos alguns conhecimentos específicos, sobretudo na área de Matemática e suas Tecnologias.

O estudo da Matemática contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico, incentiva a criatividade, o desenvolvimento de estratégias, entre outros aspectos. Por isso, oferecemos a você um livro que o leve a perceber as várias relações da Matemática com outras áreas do conhecimento e suas implicações na realidade.

Neste livro, há uma diversidade de assuntos relacionados a situações cotidianas envolvendo conteúdos de Matemática básicos e necessários para o Ensino Médio. Além disso, você encontrará tarefas em que terá a oportunidade de explorar, de maneira aprofundada, os conceitos estudados.

Por fim, é importante ressaltar que esta obra foi elaborada com o objetivo de contribuir para um melhor ensino da Matemática. Por isso, esperamos que você, ao utilizá-la, tenha um papel ativo na construção de seu conhecimento matemático e que ela contribua para sua formação cidadã.

Bons estudos.

Conheça seu livro

Os conteúdos de seu livro são apresentados em capítulos e nesses capítulos, você vai encontrar várias seções, algumas envolvendo tarefas, outras contendo textos, gráficos e infográficos com informações sobre diversos temas.

A seguir, é apresentada a descrição de cada uma dessas seções.

Abertura do capítulo

No início de cada capítulo são apresentadas duas páginas espelhadas que têm o papel de introduzir o conteúdo a ser estudado. Com base em um texto relacionado a diferentes assuntos e situações, você é convidado a responder a algumas questões que visam motivá-lo a refletir sobre os conteúdos a serem trabalhados no decorrer do capítulo, além de explorar seus conhecimentos prévios.

Você cidadão

Em alguns casos, você será convidado responder questões que contribuem para sua formação cidadã, refletindo sobre questões de seu cotidiano e de toda a sociedade. Por isso, essas tarefas recebem o destaque: Você cidadão.

Conversando

Nessa seção, você é convidado, por meio de algumas questões, a um diálogo inicial com seus colegas e seu professor sobre os conteúdos abordados e alguns temas e situações relacionados a eles.

Problemas e exercícios resolvidos

Você encontrará nessa seção resoluções de tarefas cujo objetivo é contribuir para o desenvolvimento do repertório individual de estratégias pessoais de resolução, tanto de tarefas propostas no decorrer do capítulo quanto nas questões da sociedade ou outras com as quais se depare no cotidiano particular.

Você produtor

Há tarefas em que você precisará elaborar um problema com base em imagens ou informações ou então realizar algumas construções. Essas tarefas receberão o destaque: Você produtor.

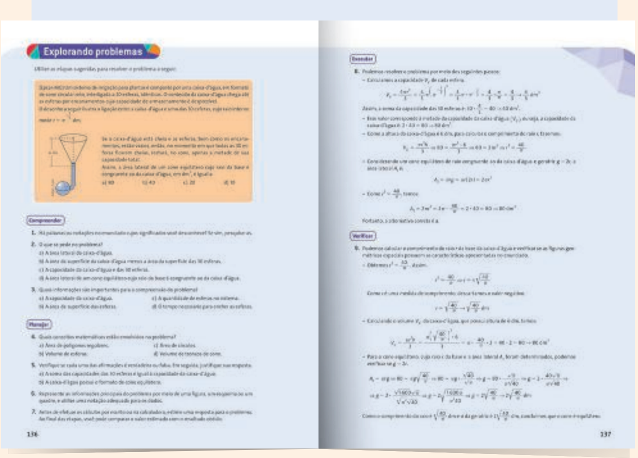
Em grupo

Em alguns momentos, você será convidado a resolver, com dois ou mais colegas, algumas tarefas propostas. Essas tarefas terão um destaque: Em grupo.

Explorando problemas

Nessa seção, são apresentadas maneiras de organizar o pensamento para resolver um problema por meio do raciocínio, representação, comunicação e argumentação.

Nela, serão apresentadas a resolução etapa por etapa de tarefas em que se faz necessário mobilizar conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução.



Problemas e exercícios propostos

Nessa seção, são apresentadas tarefas referentes ao conteúdo em estudo. Essas tarefas lhe permitirão pôr em prática o que está aprendendo, desenvolver novos conhecimentos mediante situações desafiadoras e, também, diferentes estratégias de resolução.

Desafio

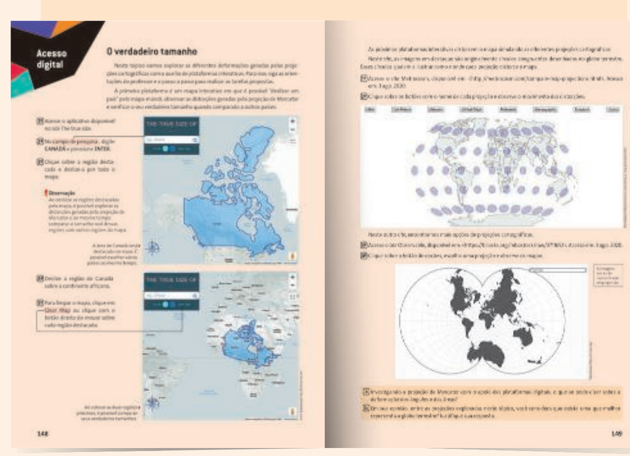
Algumas tarefas propostas envolvem resoluções que vão além da simples aplicação do conteúdo estudado. Por isso recebem um destaque: Desafio. Para resolver essas tarefas, você precisará desenvolver suas próprias estratégias.

Finalizando a conversa

Nessa seção, são apresentadas questões que o levarão a fazer uma análise sobre o que foi estudado no capítulo. Ao respondê-las, você poderá expor suas ideias sobre sua compreensão acerca do assunto.

Acesso digital

Apresentada em alguns capítulos, essa seção traz recursos como *softwares* e *sites*, que possibilitam o desenvolvimento de atividades relacionadas aos conteúdos trabalhados. Ao final da seção são propostas algumas questões com base nas informações apresentadas.

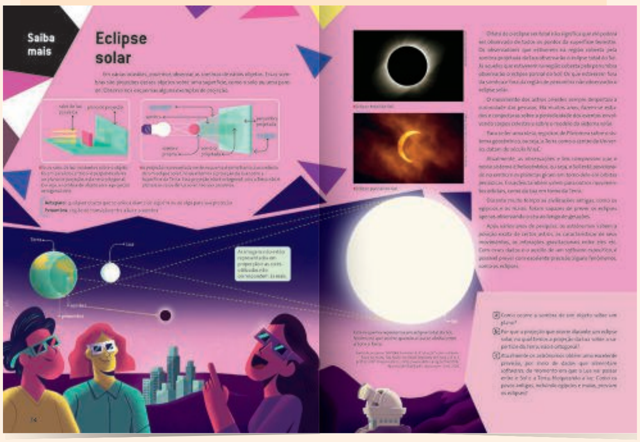


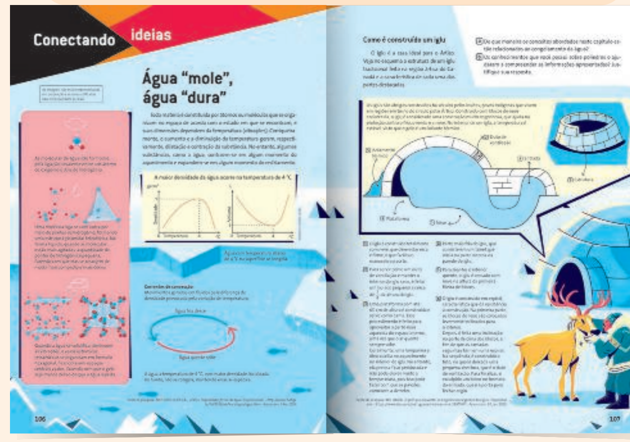
Saiba mais

Nessa seção são apresentados textos e imagens envolvendo o conteúdo em estudo, relacionados a outras áreas do conhecimento, além de curiosidades referentes ao conteúdo. No final, há algumas questões que você irá responder com base nas informações apresentadas.

Conectando ideias

Nessa seção, você é convidado a ler e interpretar infográficos envolvendo diferentes temas e situações, e, a partir daí, a responder algumas questões, motivando-o a refletir sobre o que estudou no decorrer do capítulo.





Objetivos e competências

Objetivos gerais

Este volume tem o compromisso de lhe proporcionar o desenvolvimento da autonomia, do pensamento crítico, da capacidade de tomar decisões com o intuito de que você seja o protagonista da construção de sua aprendizagem.

Sendo assim, os objetivos gerais deste volume são:

- Compreender os conceitos de ponto, reta e plano.
- Esboçar projeções ortogonais de ponto, figuras, retas e semirretas em um plano.
- Calcular a distâncias entre pontos, retas e planos.
- Compreender o conceito e as classificações do poliedro.
- Identificar os poliedros de Platão.
- Resolver problemas que envolvam áreas de figuras planas em contextos do dia a dia.
- Familiarizar com o ladrilhamento e suas características de formação.
- Compreender o conceito de prismas.
- Calcular a área e o volume de primas.
- Compreender o conceito de pirâmides.
- Familiarizar com o conceito de tronco de pirâmides e suas características.
- Compreender o conceito de corpos esféricos e seus elementos.
- Resolver problemas que envolvam corpos esféricos em situações do dia a dia.
- Identificar os tipos de projeções cartográficas e suas características.
- Resolver situações-problema que envolvam os conhecimentos matemáticos apresentados relacionados a situações do cotidiano e a outras áreas do conhecimento.

Justificativa

A geometria é um dos conhecimentos de Matemática mais difundidos no início das grandes civilizações e que apresenta, hoje em dia, uma quantidade abundante de aplicações no cotidiano, como a percepção de padrões e formas.

Como ponto de partida do estudo da geometria espacial, o capítulo de Geometria de posição apresenta os conceitos de ponto, reta, plano e um conjunto de definições e postulados que gera uma construção dedutiva de teoremas e propriedades. Assim, é possível que você desenvolva sua capacidade de argumentação, generalização e abstração.

O conteúdo de poliedros será apresentado inicialmente com uma visão geral desse conjunto de elementos, apresentando suas propriedades fundamentais. A ideia é mostrar que o conhecimento sobre o cálculo de áreas e volumes, por exemplo, são fundamentais em diferentes situações corriqueiras da vida, como determinar a quantidade de embalagens, em forma de prisma, que é possível de ser produzida a partir de certa quantidade de alumínio.

O conteúdo dos corpos redondos será divido no estudo dos cilindro circular, cone circular e esfera, e a sua influência nos estudos cartográficos e as representações do globo terrestre. Dessa maneira, a intenção é apresentar esse conteúdo de modo presente no nosso dia a dia, como em monumentos arquitetônicos e embalagens de produtos.

Competências

Para contemplar as necessidades de formação dos alunos toda esta coleção está centrada no desenvolvimento de Competências gerais da Educação Básica e específicas da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, assim como orienta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A seguir apresentamos as competências gerais, as competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias e da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, cujo desenvolvimento é favorecido neste volume.

Competências gerais da Educação Básica

CG 1 Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

CG 2 Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

CG 3 Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

CG 5 Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

Competências específicas de Matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio e Habilidades relacionadas

A seguir, foram organizadas as ocorrências, das Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias, discriminadas por cores. Para cada Competência específica, estão listadas as habilidades relacionadas a elas e que foram favorecidas neste volume.

CEMT 3 Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

CEMT 5 Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Competências específicas de Ciências da Natureza e suas tecnologias para o Ensino Médio

Além do compromisso com a área de Matemática, o trabalho com alguns conceitos ou tarefas desta coleção contribui para o desenvolvimento de aspectos de outras áreas do conhecimento, sobretudo com relação a Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Sendo assim, listamos a seguir a Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias cujo trabalho é favorecido neste volume.

CECNT 3 Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

CEMT 3	**EM13MAT309** • Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.	Capítulo 2 Capítulo 3
	EM13MAT315 • Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.	Capítulo 2
CEMT 5	**EM13MAT504** • Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.	Capítulo 2 Capítulo 3
	EM13MAT505 • Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.	Capítulo 2
	EM13MAT509 • Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.	Capítulo 1 Capítulo 3

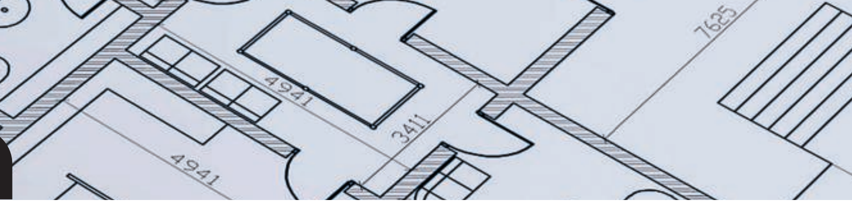
Sumário

CAPÍTULO 1

Geometria de posição

Na fotografia, vemos a representação do modelo tridimensional de uma residência.

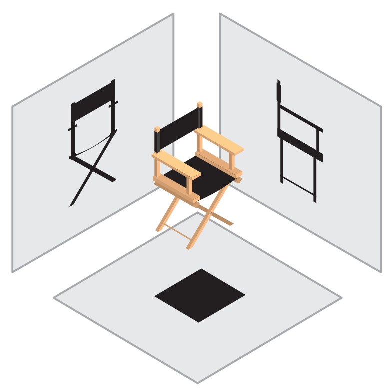
Nikonaft/Shutterstock.com



Projetando

Em muitas profissões, como a de desenhista projetista de arquitetura, automação, construção civil, elétrica e mecânica, os profissionais são responsáveis por desenvolver todos os detalhes do projeto. Uma das etapas é fazer um desenho técnico do objeto ou construção, elaborando perspectivas, escalas e outros tipos de informações que facilitem a interpretação do que está sendo projetado. Para isso, são utilizadas ferramentas computacionais e, para usá-las, esses profissionais devem ter boa noção de perspectiva e visão espacial.

Nessa visão espacial, podemos considerar cada vista do objeto como um desenho em um plano. Essa é a ideia de projeção ortogonal que estudaremos neste capítulo.



Rafael L. Gaion

É como se cada desenho fosse uma sombra gerada por um feixe de raios de luz paralelos entre si e perpendiculares a cada plano de incidência.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos percebam, por exemplo, que, dependendo da posição da lanterna, a sombra do objeto apresenta diferentes dimensões.

Você cidadão

a Converse com o professor e os colegas a respeito de como a tecnologia (*softwares* de modelagem, impressoras 3D, realidade virtual, entre outros) vem mudando a prática profissional na arquitetura e em outros ramos.

Resposta pessoal.

b No caso de uma sombra gerada por um feixe de raios de luz não paralelos, como a luz de uma lanterna, a sombra pode ser maior do que o objeto. Com o auxílio de uma lanterna, gere a sombra de alguns objetos a partir de diferentes posições. O que você observou? Converse com os colegas e professor.

c Considere uma figura geométrica espacial posicionada como na ilustração acima, tal que a sombra projetada em dois planos é uma região retangular. Com essas informações, é possível determinar qual é essa figura geométrica espacial?

Não, pois dois objetos diferentes podem apresentar duas de suas projeções iguais. Por exemplo, é possível que um prisma triangular e um paralelepípedo tenham duas de suas projeções iguais.

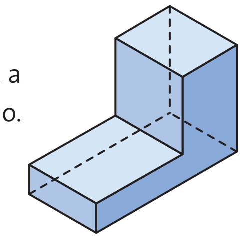
1 Introdução

Veja comentários e sugestões na Assessoria pedagógica.

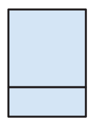
BNCC
- CG 3
- CECNT 3
- CEMT 5
- EM13MAT509

Neste capítulo, iremos retomar alguns conceitos que provavelmente já foram estudados no Ensino Fundamental, como ponto e reta, e introduzir outros, como os planos e suas propriedades.

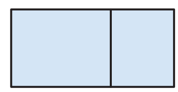
Antes de iniciar o nosso estudo, vamos analisar as imagens a seguir, que representam, a partir de certo ponto de referência, algumas das vistas ortogonais da figura espacial ao lado.



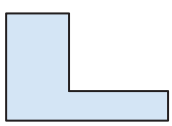
A



B

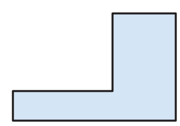


Tomando a imagem **A** como vista frontal, então a imagem **B** é a vista superior. Outras vistas podem ser representadas, como a vista lateral esquerda, a vista inferior e a vista lateral direita.



vista lateral esquerda

vista inferior



vista lateral direita

Ilustrações: Ronaldo Inácio

Observação

Note que para representar as vistas ao lado, considerou-se, ainda, a imagem A como vista frontal.

Os *Elementos*, de Euclides

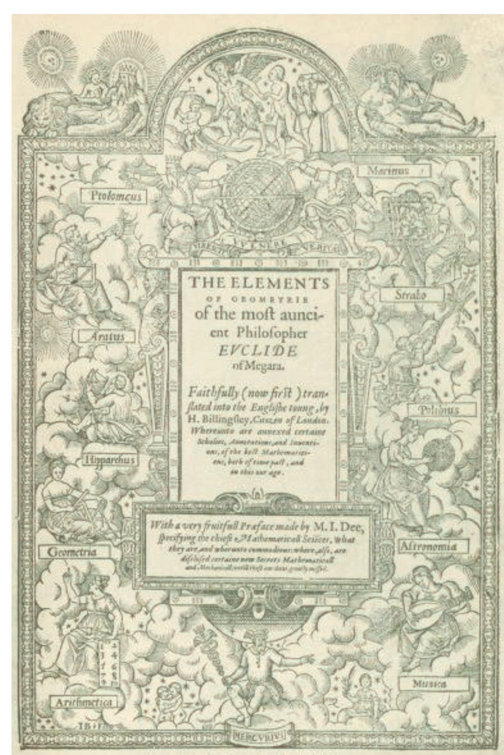
Desde a Antiguidade, diversos povos, entre eles os mesopotâmios, os babilônios e os egípcios, já usavam conhecimentos geométricos, mesmo que de maneira prática, em áreas como agrimensura, engenharia e arquitetura.

Porém, foi apenas a partir de aproximadamente 600 a.C. que Tales de Mileto começou a desenvolver a chamada geometria demonstrativa, que culminou, por volta de 300 a.C., na obra *Elementos*, de Euclides (c. 300 a.C.).

Composta de 13 livros, a obra *Elementos* busca axiomatizar e formalizar o que hoje denominamos geometria euclidiana, baseando-se em **axiomas** (ou postulados). Com mais de mil edições, é possível que essa seja a obra que mais tenha influenciado o pensamento científico na história. Os postulados dos *Elementos* são amplamente estudados até hoje.

Estudaremos alguns desses postulados neste capítulo.

Fonte de pesquisa: FETISSOV, Andrei. *A demonstração em geometria*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997. (Matematica: aprendendo e ensinando).



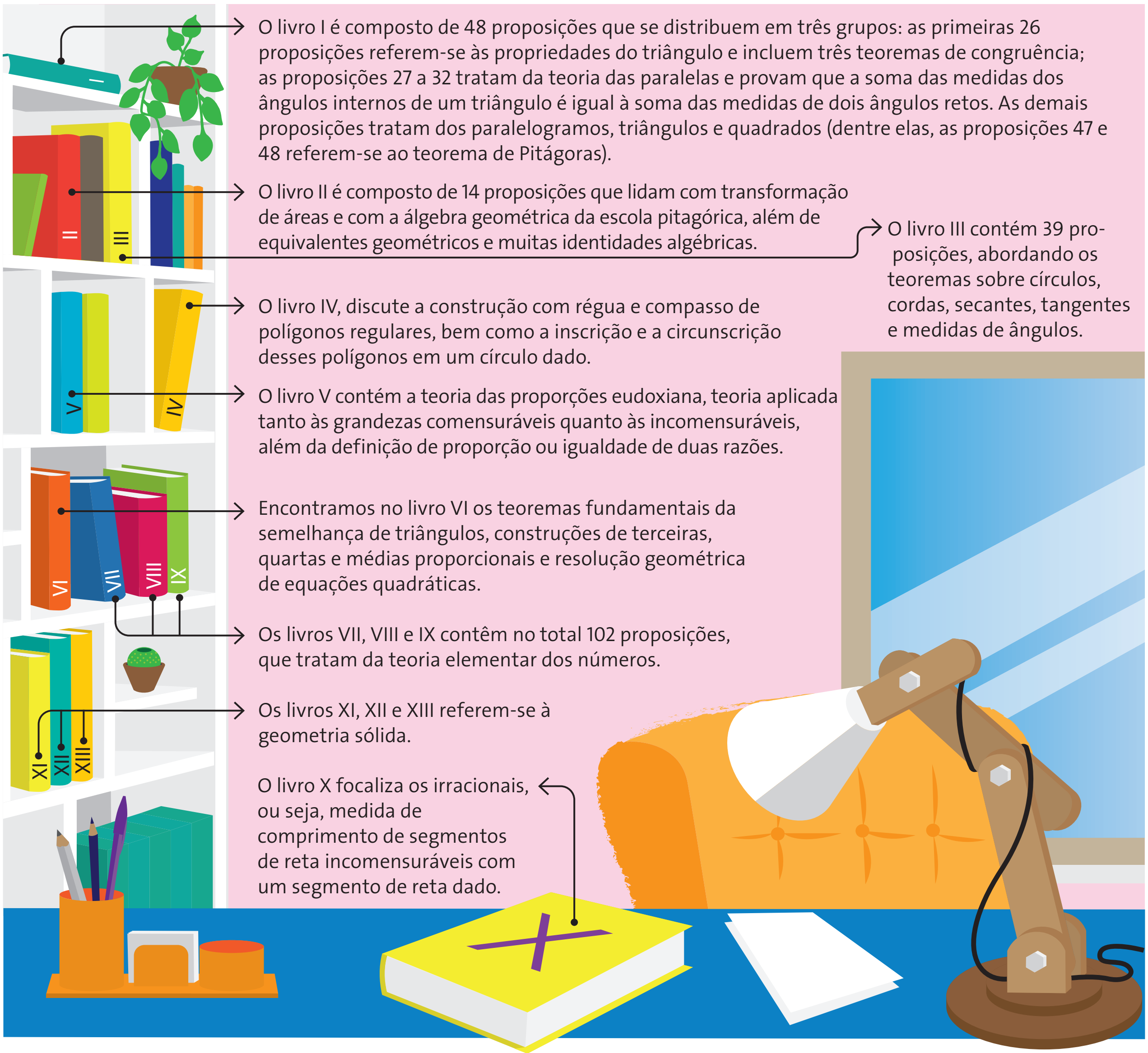
Página título da primeira edição da obra *Elementos*, de Euclides, de Sir Henry Billingsley (em inglês), 1570.

axioma: premissa considerada verdadeira sem a necessidade de demonstração, também denominada postulado

Os *Elementos* não tratam apenas de conteúdos que se referem à geometria. Alguns dos livros que os compõem também abordam assuntos relacionados à teoria dos números, à álgebra, entre outros. Veja a seguir o conteúdo existente nos 13 livros dessa obra.

Diga aos alunos que há várias traduções em português da obra *Elementos*, originadas de versões latinas, publicadas entre 1758 e 1855. Uma tradução direta do grego, aos cuidados do professor Irineu Bicudo, do Departamento de Matemática da Unesp, foi lançada em 2009.

Veja comentários e sugestões na Assessoria pedagógica.



O livro I é composto de 48 proposições que se distribuem em três grupos: as primeiras 26 proposições referem-se às propriedades do triângulo e incluem três teoremas de congruência; as proposições 27 a 32 tratam da teoria das paralelas e provam que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual à soma das medidas de dois ângulos retos. As demais proposições tratam dos paralelogramos, triângulos e quadrados (dentre elas, as proposições 47 e 48 referem-se ao teorema de Pitágoras).

O livro II é composto de 14 proposições que lidam com transformação de áreas e com a álgebra geométrica da escola pitagórica, além de equivalentes geométricos e muitas identidades algébricas.

O livro III contém 39 proposições, abordando os teoremas sobre círculos, cordas, secantes, tangentes e medidas de ângulos.

O livro IV, discute a construção com régua e compasso de polígonos regulares, bem como a inscrição e a circunscrição desses polígonos em um círculo dado.

O livro V contém a teoria das proporções eudoxiana, teoria aplicada tanto às grandezas comensuráveis quanto às incomensuráveis, além da definição de proporção ou igualdade de duas razões.

Encontramos no livro VI os teoremas fundamentais da semelhança de triângulos, construções de terceiras, quartas e médias proporcionais e resolução geométrica de equações quadráticas.

Os livros VII, VIII e IX contêm no total 102 proposições, que tratam da teoria elementar dos números.

Os livros XI, XII e XIII referem-se à geometria sólida.

O livro X focaliza os irracionais, ou seja, medida de comprimento de segmentos de reta incomensuráveis com um segmento de reta dado.

Emiliano Cavalcante

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. 4. ed. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

Conversando

a) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos se lembrem dos conteúdos básicos estudados em geometria no Ensino Fundamental.

a) Quais conteúdos de geometria você já estudou em anos anteriores?

b) O que você sabe sobre ponto, reta e plano?

Resposta pessoal. Espera-se que os alunos saibam explicar esses elementos utilizando vocabulário próprio.

c) Cite algumas situações do cotidiano que podem nos dar a ideia de ponto, de reta e de plano. Resposta pessoal. Possíveis respostas: ponto: vértice de um objeto poliédrico, pontuação no final de uma frase, algo muito distante no céu, um furo na parede; reta: as linhas da sinalização horizontal de uma rodovia; plano: o teto e a parede de um ambiente, o piso de uma quadra de tênis.

d) Alguns objetos, ao serem observados de diferentes pontos de referência, apresentam diferentes vistas ortogonais. Cite um objeto cujas vistas ortogonais são sempre iguais independentemente do referencial. Resposta pessoal. Possível resposta: um objeto que lembra a esfera, por exemplo, uma bola de futebol.

e) Dos 13 livros que compõem a obra *Elementos*, quais se referem à geometria?

I, II, III, IV, VI, XI, XII, XIII

2 Ponto, reta e plano

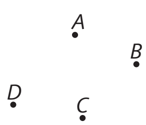
Algumas noções ou conceitos em geometria são aceitos sem demonstração. Eles são utilizados para estabelecer ideias que, embora nem sempre tenham ligação imediata com o nosso cotidiano, são fundamentais para entendermos a realidade.

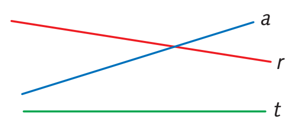
Em geometria euclidiana, esses conceitos, chamados **primitivos**, são: **ponto**, **reta** e **plano**. Em geral, utilizamos as seguintes notações para indicá-los.

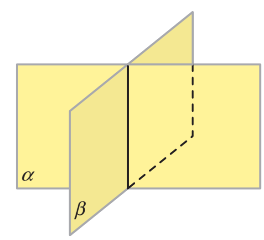
Observação

As representações de reta e plano são simplificadas, pois se estendem infinitamente e não têm espessura. Além disso, não existe dimensão para o ponto.

- Ponto: letras maiúsculas do nosso alfabeto.
- Reta: letras minúsculas do nosso alfabeto.
- Plano: letras minúsculas do alfabeto grego.







Observação

Conjunto é um conceito fundamental em todos os ramos da Matemática. Ao obter coleções quaisquer de objetos distintos, estamos formando conjuntos. Os objetos de um conjunto podem ser números, pessoas, letras etc. Cada objeto de um conjunto é chamado **elemento** do conjunto. Quando um objeto é elemento de um conjunto, dizemos que ele **pertence** ao conjunto. Caso contrário, dizemos que ele **não pertence** ao conjunto. Veja alguns exemplos de conjuntos.

- Conjunto dos números pares maiores do que 0 e menores do que 5: $A = \{2, 4\}$.
- Conjunto das vogais do nosso alfabeto: $B = \{a, e, i, o, u\}$.
- Conjunto dos divisores positivos de 12: $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

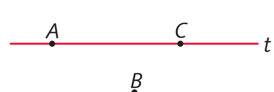
Quando todos os elementos de um conjunto *E* também forem elementos de um conjunto *D*, dizemos que *E* **está contido** em *D* ou que *E* é **subconjunto** de *D*.

Quando nem todo elemento de *E* é elemento de *D*, ou seja, quando existe pelo menos um objeto pertencente a *E* que não pertence a *D*, dizemos que *E* **não está contido** em *D* ou que *E* **não é subconjunto** de *D*.

Considerando os conjuntos *A*, *B* e *C* apresentados anteriormente, podemos dizer, por exemplo, que *A* está contido em *C* e que *A* não está contido em *B*.

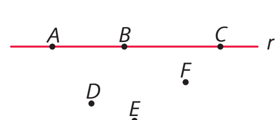
Antes de estudar alguns postulados, é necessário apresentar alguns conceitos importantes na geometria. Por exemplo, o conceito de posição relativa.

- Posição relativa entre ponto e reta



Os pontos *A* e *C* **pertencem** à reta *t* e o ponto *B* **não pertence** à reta *t*.

- Posição relativa entre pontos



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Os pontos *A*, *B* e *C* **pertencem** à reta *r*, por isso são denominados **colineares**, isto é, existe uma reta que passa pelos três pontos. Já os pontos *D*, *E* e *F* são **não colineares**.

Reprodução/Museu do Louvre, Paris, França

Na história da arte, o período entre os séculos XIV e XVII na Europa é identificado como Renascimento. Nessa época, os pintores começaram a desenvolver obras em perspectiva – representações tridimensionais com o uso de princípios da geometria. Esse tipo de representação possibilita a ilusão de espessura e profundidade das figuras, com base na projeção das linhas paralelas do primeiro plano para um chamado ponto de fuga, em segundo plano. Os principais nomes desse período são: Botticelli, Leonardo da Vinci e Michelangelo.

Fonte de pesquisa: BRASIL. Ministério da Cultura. *Mestres do Renascimento*: obras-primas italianas. Disponível em: <https://www.bb.com.br/docs/pub/inst/dwn/renascimento.pdf>. Acesso em: 2 jun. 2020.

Mona Lisa (La Gioconda), de Leonardo da Vinci, 1503-1505. Museu do Louvre, Paris.

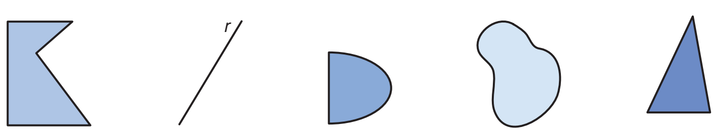
Espaço e figuras geométricas

Na geometria que estamos estudando neste capítulo, o ponto, a reta e o plano são elementos do **espaço**, que é o conjunto de todos os pontos.

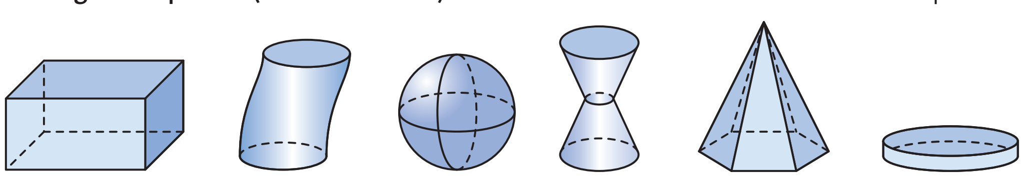
A reta, o plano, o losango, o retângulo, entre outros, são formados por pontos, que, por sua vez, podem ser considerados subconjuntos desse espaço.

Entre esses subconjuntos, destacamos as **figuras geométricas**, as quais podem ser classificadas da seguinte forma.

- **Figuras planas**: estão contidas totalmente em um só plano.



- **Figuras espaciais (tridimensionais)**: não estão contidas totalmente em um só plano.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Primeiros postulados

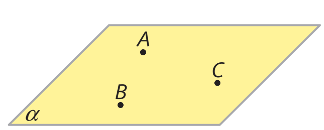
Postulado 1: Retas e planos são conjuntos de pontos.

Postulado 2: Em uma reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.

Postulado 3: Em um plano, bem como fora dele, existem infinitos pontos.

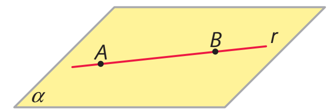
Postulado 4: Dois pontos distintos determinam uma única reta.

Postulado 5: Três pontos não colineares determinam um único plano.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Postulado 6: Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então a reta está contida nesse plano.



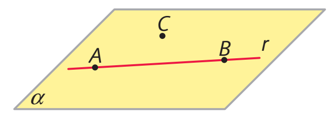
Considerando esses postulados, podemos demonstrar alguns **teoremas**. Para isso, utilizaremos como recurso o **método dedutivo** ou **sistema dedutivo**, o qual permite fazer demonstrações de forma lógica com base em conceitos primitivos e postulados.

Teorema: sentença matemática verdadeira que pode ser demonstrada por postulados ou outros teoremas

Teorema 1: Uma reta e um ponto não pertencentes a ela determinam um único plano.

Demonstração

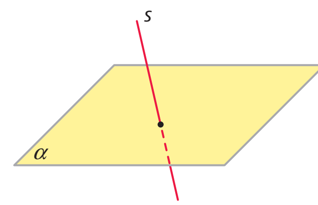
Sejam uma reta *r* e um ponto *C* não pertencente a *r*. Vamos mostrar que existe um único plano que os contém.



Considere os pontos distintos *A* e *B* pertencentes a *r*. Os pontos *A*, *B* e *C* são não colineares, e, pelo **postulado 5**, determinam um único plano α. Pelo fato de os pontos *A* e *B* pertencerem a *r*, segue, do **postulado 6**, que a reta *r* está contida em α.

Portanto, α é o único plano que contém a reta *r* e o ponto *C*.

Teorema 2: Se um plano α é cortado por uma reta *s* e essa reta não está contida nesse plano, a interseção da reta *s* com o plano α é um único ponto.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Demonstração

Se a interseção da reta *s* com o plano α tivesse mais de um ponto, haveria ao menos dois pontos, *P* e *Q*, pertencentes a *s* e a α. Pelo **postulado 6**, a reta *s* estaria contida no plano α, o que é falso, pois contraria a suposição inicial. Logo, a reta *s* corta o plano α em um único ponto.

Observação

Dados os conjuntos *A* e *B*, chamamos de **interseção** de *A* e *B* o conjunto formado pelos objetos que são elementos de *A* e de *B* simultaneamente.

Observação

Na demonstração do teorema **2** foi utilizada a dedução por absurdo, que consiste em considerar a **hipótese** e a negação da **tese** verdadeira. Com base em argumentos verdadeiros, deduz-se uma sentença absurda, demonstrando-se assim que a tese é verdadeira.

Hipótese: proposição ou conjunto de proposições admitidas como princípio, independentemente de serem verdadeiras ou falsas

Tese: proposição que se apresenta para ser defendida

Nos próximos tópicos, faremos uso dos postulados para enunciar outras propriedades relativas a pontos, retas e planos.

Problemas e exercícios resolvidos

R1. Verifique se cada uma das sentenças é verdadeira ou falsa. Em seguida, justifique sua resposta.

a) Três pontos não colineares determinam vários planos.

b) Quatro pontos, sendo quaisquer três deles não colineares, determinam seis retas distintas.

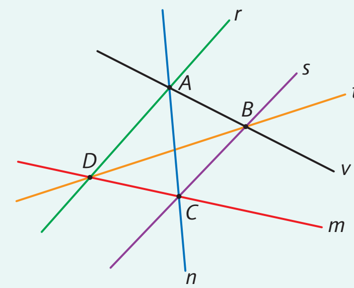
Resolução

a) Falsa. De acordo com o **postulado 5**, três pontos não colineares determinam um único plano.

b) Verdadeira. De acordo com o **postulado 4**, existe uma única reta que passa por dois pontos distintos. Considere os pontos A, B, C e D, sendo quaisquer três deles não colineares. Para cada um dos seguintes pares de pontos temos uma reta.

- A e B
- A e D
- B e D
- A e C
- B e C
- C e D

Sendo assim, podemos determinar seis retas distintas, cada uma passando por dois dos quatro pontos, sem passar duas retas por dois mesmos pontos.



Rafael L. Gaion

R2. Observe a figura ao lado e identifique:

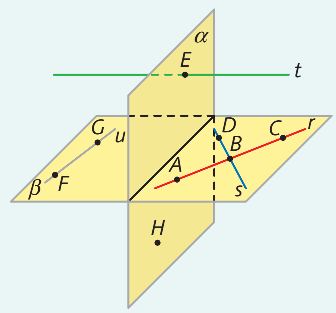
a) os pontos que pertencem ao plano α;

b) os pontos que pertencem ao plano β;

c) os pontos que pertencem à reta r;

d) os pontos que não pertencem à reta u;

e) as retas estão contidas no plano β.



Rafael L. Gaion

Resolução

a) Os pontos E e H pertencem a α.

b) Os pontos A, B, C, D, F e G pertencem a β.

c) Os pontos A, B e C pertencem à reta r.

d) Os pontos A, B, C, D, E e H não pertencem à reta u.

e) As retas r, s e u estão contidas em β.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

Em grupo

1. Considerem dois pontos distintos P e Q. Respondam cada item a seguir justificando suas respostas. Veja as respostas na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

a) P e Q são colineares?

b) A quantidade de retas que passa pelo ponto Q é infinita?

c) Quantos são os planos que contêm esses dois pontos?

2. Determine se cada uma das sentenças é verdadeira ou falsa. Depois, justifique sua resposta.

a) Por um único ponto passa uma única reta.

b) Três pontos não colineares determinam apenas três retas, de modo que cada uma delas contenha dois desses pontos.

c) Se uma reta contém dez pontos, estes são colineares.

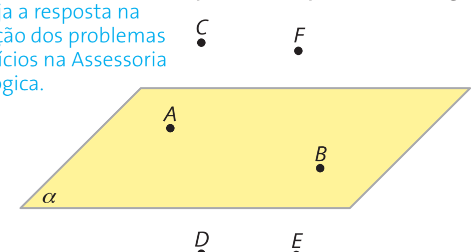
d) Em um plano existem infinitas retas.

e) Os pontos A, B e C distintos e colineares determinam um único plano.

2. Veja as respostas na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

3. Na imagem, os pontos A e B pertencem ao plano α, e os pontos C, D, E e F não pertencem a ele. Sabendo que quaisquer três desses pontos são não colineares, responda às questões a seguir.

3. a) Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.



Rafael L. Gaion

a) Quantas retas podem ser definidas considerando dois desses pontos? Quais são essas retas?

b) Das retas definidas no item **a**, qual possui infinitos pontos no plano α?

c) Quantos planos contendo três desses pontos é possível determinar? 20 planos

4. (Uece) O número máximo de planos que podem ser determinados por cinco pontos no espaço é: d

a) 20

b) 15

c) 12

d) 10

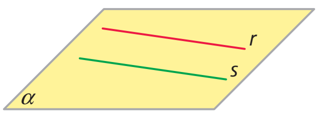
3. b) Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

3 Posições relativas entre duas retas

Vamos considerar duas retas, *r* e *s*, no espaço. Imaginemos que elas estejam em um mesmo plano α, isto é, sejam **coplanares**.

Nesse plano, elas podem ser **paralelas**, **concorrentes** ou **secantes** e **coincidentes**.

- **Paralelas**



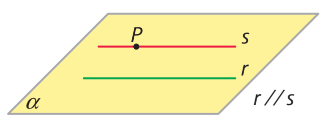
Duas retas, ***r*** e ***s***, são **paralelas** se, e somente se, são coplanares e não têm ponto comum. Indicamos essas retas por $r // s$.

Da definição de retas paralelas, segue o seguinte teorema.

Teorema 3: Duas retas paralelas determinam um único plano.

Demonstração

Dadas duas retas paralelas *r* e *s*, por definição, existe um plano α que as contém. Considere um ponto *P* qualquer de *s*, que não pertence à reta *r*. Logo, temos uma reta e um ponto fora dela, que, pelo **teorema 1**, determinam um único plano.



Portanto, duas retas paralelas determinam um único plano.

Por volta do século III a.C., o matemático grego Euclides enunciou o postulado a seguir, conhecido como postulado das paralelas ou postulado de Euclides.

Postulado 7: Dada uma reta *r* e um ponto *P* não pertencente a ela, existe uma única reta *s* que passa por *P* tal que $r // s$.

Esse postulado é de fundamental importância, pois caracteriza a geometria euclidiana, a qual estamos estudando.

Reprodução/Coleção Particular, Paris, França

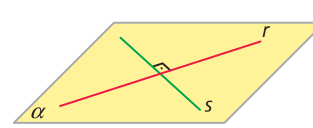
Euclides.

Pouco se sabe da vida e da personalidade de Euclides, mas é possível que sua formação matemática tenha se dado na escola platônica de Atenas. Apesar de ser autor de pelo menos dez trabalhos, sua fama repousa principalmente sobre seus *Elementos*. Nenhum trabalho, exceto a *Bíblia*, foi tão usado ou estudado. Desde 1482, foram mais de mil edições impressas da obra *Elementos*, cujo mais famoso dos postulados é o das paralelas.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. 4. ed. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

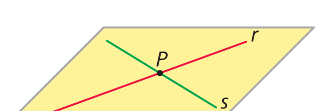
Observação

Se duas retas, *r* e *s*, são concorrentes e formam um ângulo reto, dizemos que elas são perpendiculares entre si e indicamos por $r \perp s$.



Quando duas retas concorrentes não são perpendiculares, dizemos que elas são **concorrentes oblíquas**.

- **Concorrentes ou secantes**



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Duas retas, ***r*** e ***s***, que estão no mesmo plano, são **concorrentes** ou **secantes** se, e somente se, têm um único ponto *P* em comum.

Da definição de retas concorrentes segue o seguinte teorema.

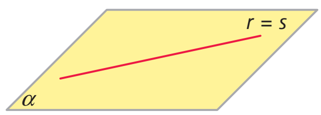
Teorema 4: Duas retas concorrentes determinam um único plano.

Demonstração

Sejam duas retas concorrentes, *r* e *s*, e *A* o único ponto em comum entre elas. Considere o ponto *B* pertencente à reta *s* e o ponto *C* pertencente à reta *r*, tal que *B* e *C* são distintos de *A*. Assim, esses três pontos são não colineares, e, pelo **postulado 5**, determinam um único plano. Como esse plano contém dois pontos de *r* e dois pontos de *s*, ele contém *r* e *s*.

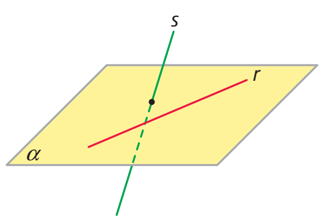
Portanto, duas retas concorrentes determinam um único plano.

- **Coincidentes**



Duas retas, r e s, são **coincidentes** se $r = s$, ou seja, r e s correspondem ao mesmo conjunto de pontos.

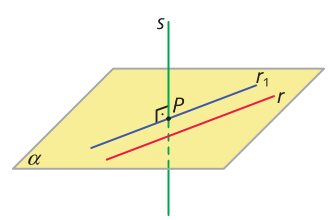
Agora, vamos considerar duas retas distintas, *r* e *s*, **não coplanares**. Dizemos que essas retas são **reversas**.



Duas retas, r e s, são **reversas** quando todo plano que contém uma delas não contém a outra.

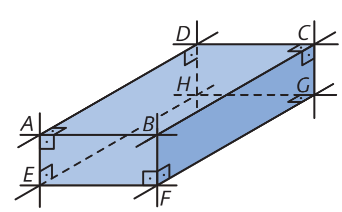
Observação

Dizemos que duas retas reversas, *r* e *s*, são **ortogonais** quando existe uma reta r_1, paralela à reta *r* e perpendicular à reta *s*.
Quando duas retas reversas não são ortogonais, dizemos que elas são **reversas oblíquas**.



A posição relativa de duas retas no espaço também pode ser observada no paralelepípedo reto retângulo ao lado.

Nele podemos notar:



Ilustrações: Rafael L. Gaion

- 12 arestas: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{EH}$, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$
- 6 faces retangulares: *ABCD*, *EFGH*, *AEFB*, *BFGC*, *DHGC* e *AEHD*

As arestas e as faces desse paralelepípedo estão contidas, respectivamente, em retas e em planos.

$\overleftrightarrow{AB}$, por exemplo, é a reta que contém a aresta $\overline{AB}$.

Podemos destacar nesse paralelepípedo os seguintes exemplos de:

- retas coplanares: $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.
- retas paralelas: $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$.
- retas perpendiculares: $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.
- retas reversas: $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{CG}$.
- retas ortogonais: $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BF}$.

Observação

Dados os pontos *A* e *B*. Indicaremos a reta que os contém por $\overleftrightarrow{AB}$ e o segmento de reta do qual eles são extremos por $\overline{AB}$.

Resumindo, podemos organizar as posições relativas entre duas retas por meio do esquema a seguir.

- Duas retas no espaço
  - Coplanares
    - Distintas
      - Paralelas
      - Concorrentes
        - Perpendiculares
        - Oblíquas
    - Coincidentes
  - Reversas
    - Ortogonais
    - Oblíquas

Problemas e exercícios resolvidos

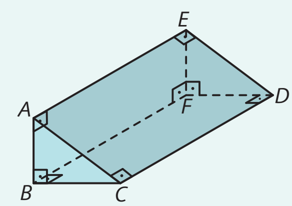
R3. Considerando as retas que contêm as arestas do prisma, determine quais são:

a) perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$.

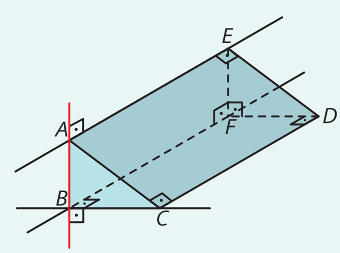
b) coplanares a $\overleftrightarrow{EF}$.

c) reversas a $\overleftrightarrow{DC}$.

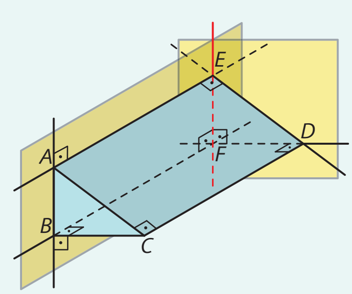
Observação
Nesse prisma, *ABFE*, *BCDF* e *ACDE* são retângulos.



Resolução

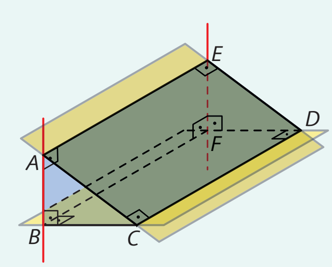


a) Para que duas retas sejam perpendiculares, devem ter um único ponto em comum e o ângulo formado entre elas deve ser reto. As retas $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BF}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ satisfazem essas condições em relação a $\overleftrightarrow{AB}$.



b) $\overleftrightarrow{EF}$ é a interseção do plano que contém a face *ABFE* e do plano que contém a face *DEF*. Logo, a reta está contida em ambos os planos. Assim, todas as outras retas contidas nesses planos são coplanares a $\overleftrightarrow{EF}$.

Portanto, $\overleftrightarrow{ED}$, $\overleftrightarrow{FD}$, $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BF}$ são coplanares a $\overleftrightarrow{EF}$.



c) Se duas retas são reversas, então todo plano que contém uma delas não contém a outra. Os planos que contêm $\overleftrightarrow{DC}$ são os planos que contêm as faces *ACDE* e *BCDF*. Assim, as únicas retas que não estão contidas nesses planos são $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EF}$.

Portanto, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ são reversas a $\overleftrightarrow{DC}$.

Ilustrações: Rafael L. Gaion

 Não escreva no livro.

5. Determine se cada sentença é verdadeira ou falsa. Em seguida, justifique sua resposta. Veja as respostas na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

a) Duas retas coincidentes também são concorrentes.

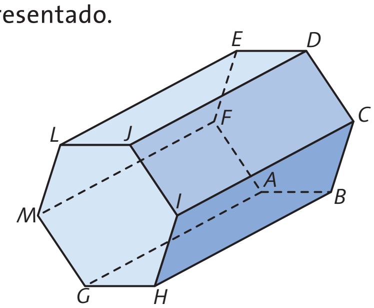
b) Retas que não se cruzam podem ser paralelas ou reversas.

c) Sejam as retas r, s e t. Sabendo que $r // s$ e $r \perp t$, pode-se afirmar que $s \perp t$.

d) Duas retas que têm dois pontos em comum são coincidentes.

e) Se as retas r e s são perpendiculares à reta t, então $r // s$.

6. Considere o prisma regular de base hexagonal representado.



Rafael L. Gaion

Sabendo que as faces laterais desse prisma são regiões retangulares, determine:

a) as retas perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$; $\overleftrightarrow{AG}$ e $\overleftrightarrow{BH}$

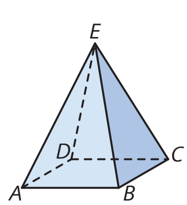
b) as retas coplanares a $\overleftrightarrow{GH}$. $\overleftrightarrow{HI}$, $\overleftrightarrow{IJ}$, $\overleftrightarrow{JL}$, $\overleftrightarrow{LM}$, $\overleftrightarrow{GM}$, $\overleftrightarrow{AG}$, $\overleftrightarrow{BH}$, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{ED}$

7. Sejam as retas não coincidentes r, s, t e u. Sabendo que todas passam pelo ponto P e que $r \perp s$, $r \perp t$ e $t \perp s$, responda às questões.

a) Quais são os pares de retas coplanares? r e s; r e t; r e u; s e t; s e u; t e u

b) As retas r, s e t estão contidas no mesmo plano? Não.

8. Considerando as retas que contêm as arestas da pirâmide de base quadrada representada, determine:



Rafael L. Gaion

a) as retas coplanares a $\overleftrightarrow{BE}$. $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{CE}$; $\overleftrightarrow{BA}$; $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{ED}$

b) os pares de retas paralelas. $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DC}$; $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AD}$

c) os pares de retas perpendiculares. $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{DA}$; $\overleftrightarrow{DA}$ e $\overleftrightarrow{AB}$

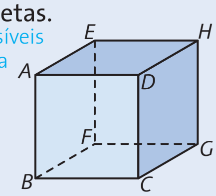
d) as retas concorrentes a $\overleftrightarrow{CD}$. $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{CE}$; $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{AD}$

e) as retas reversas a $\overleftrightarrow{AE}$. $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{DC}$

Você produtor

9. Considerando o cubo representado a seguir, elabore algumas questões e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se as respostas estão corretas.

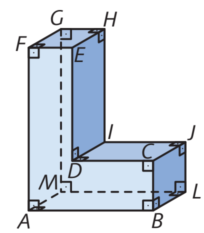
Resposta pessoal. Possíveis respostas: determine a posição relativa das retas $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{HD}$; determine as retas coplanares a $\overleftrightarrow{DC}$; determine as retas reversas a $\overleftrightarrow{AD}$.



Rafael L. Gaion

10. Considerando as retas que contêm as arestas da figura, determine:

Veja as respostas na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.



Rafael L. Gaion

a) dois trios de retas coplanares.

b) quatro pares de retas perpendiculares.

c) oito pares de retas secantes.

d) três pares de retas reversas.

11. Sejam r, s e t retas coplanares e não coincidentes. As retas s e t são perpendiculares e r e t são secantes. Considerando que não existe um ponto pelo qual passam as três retas, faça um possível esboço da figura geométrica representada por elas. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Em grupo

12. (FGV-SP) Duas retas distintas perpendiculares a uma terceira podem ser:

I. concorrentes entre si

II. perpendiculares entre si

III. paralelas

IV. reversas e não ortogonais

V. ortogonais

Associando V ou F a cada afirmação, conforme seja verdadeira ou falsa, tem-se: a

a) V, V, V, V, V

b) V, F, V, F, V

c) F, V, F, F, F

d) V, V, V, V, F

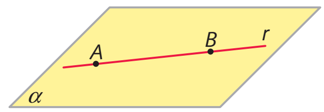
e) F, F, F, V, F

4 Posições relativas entre reta e plano

Vamos considerar uma reta r e um plano α no espaço.

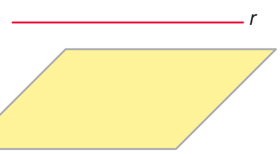
As posições relativas entre essa reta e esse plano podem ser:

- **reta contida no plano**



Se dois pontos distintos, A e B, de uma reta r pertencem a um plano α, então r está contida nesse plano.

- **reta paralela ao plano**

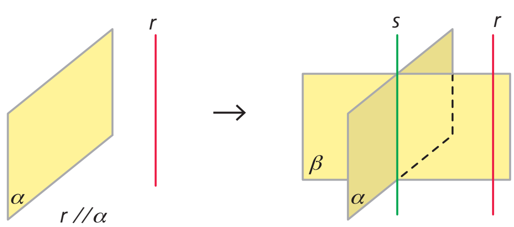


Se uma reta r não tem ponto comum com um plano α, então r é paralela a esse plano. Indicamos esse paralelismo por $r // \alpha$.

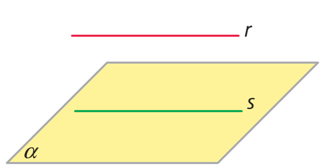
Em relação ao paralelismo entre reta e plano, destacamos as seguintes propriedades:

Observação
Essas propriedades podem ser demonstradas, porém, neste livro, apenas as enunciaremos.

1ª propriedade Se uma reta r é paralela a um plano α, então ela é paralela a pelo menos uma reta s desse plano.



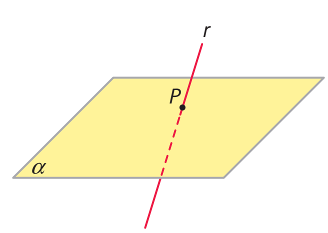
2ª propriedade Se uma reta r não está contida em um plano α, mas é paralela a uma reta s desse plano, então ela é paralela ao plano.



Veja comentários e sugestões nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.

- **reta concorrente ou secante ao plano**

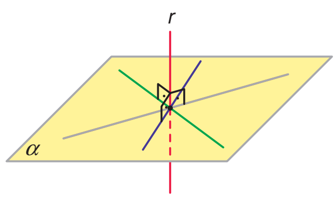
Se uma reta r tem um único ponto comum P com um plano α, então r e α são concorrentes.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Agora, veja um caso particular de reta concorrente ao plano.

- **reta perpendicular ao plano**

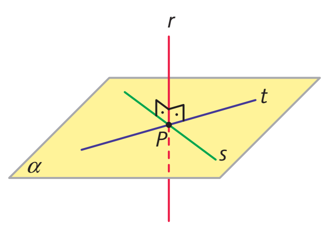


Uma reta r, concorrente a um plano α, é perpendicular a α se, e somente se, todas as retas desse plano que concorrem com r são perpendiculares a r. Indicamos essa perpendicularidade por $r \perp \alpha$.

Em relação à perpendicularidade entre reta e plano, podemos destacar as seguintes propriedades:

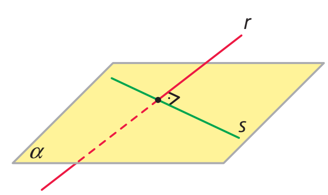
Observação
As propriedades apresentadas nesta e na próxima página podem ser demonstradas, porém, neste livro, apenas as enunciaremos.

1ª propriedade Considere as retas s e t contidas no plano α e concorrentes no ponto P. Para que uma reta r seja perpendicular a α, é necessário e suficiente que ela seja perpendicular a s e t.



Faça a seguinte pergunta aos alunos:
• Para que r seja perpendicular ao plano, por que é necessário que ela seja perpendicular a duas retas no plano α?

Na imagem ao lado, podemos observar que uma reta pode ser perpendicular a uma reta do plano, mas não ser perpendicular a ele.

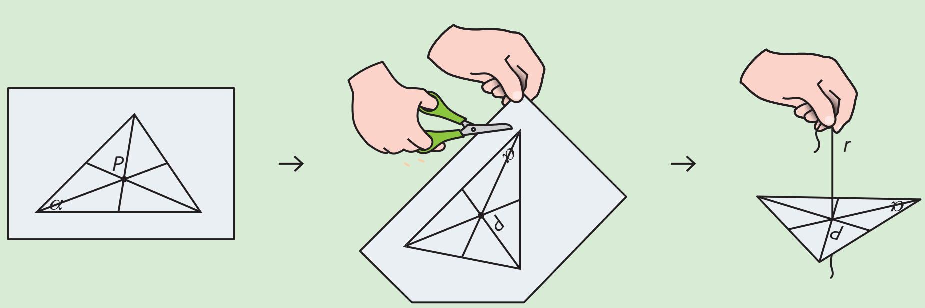


Ilustrações: Rafael L. Gaion

Daí a necessidade de ser perpendicular a pelo menos duas retas concorrentes do plano, visto que uma só não garante a perpendicularidade.

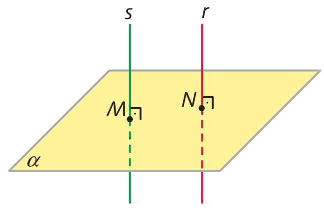
Veja comentários e sugestões na Assessoria pedagógica.

Um triângulo possui três medianas, e o encontro delas é um ponto chamado baricentro, que é o centro de equilíbrio desse triângulo. Podemos verificar isso desenhando um triângulo qualquer (plano α) em um papel, obtendo o seu baricentro (ponto P) e suspendendo o triângulo por esse ponto com um barbante (reta perpendicular r).



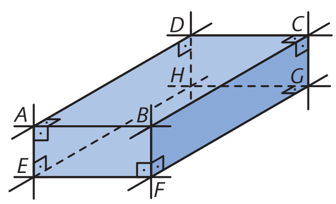
Sergio L. Filho

2ª propriedade Dada uma reta r perpendicular a um plano α, qualquer reta s paralela a r também é perpendicular ao plano.



Observação
Quando uma reta concorrente a um plano não é perpendicular a esse plano, dizemos que ela é **oblíqua** a esse plano.

A posição relativa de uma reta e um plano no espaço também pode ser observada no paralelepípedo reto retângulo representado a seguir.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

No paralelepípedo representado, podemos destacar alguns exemplos das relações entre reta e plano.

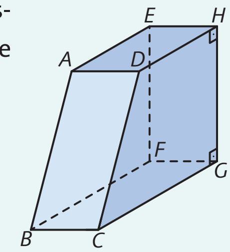
- reta contida no plano: $\overleftrightarrow{AB}$ está contida no plano que contém a face $ABCD$.
- reta paralela ao plano: $\overleftrightarrow{AD}$ é paralela ao plano que contém a face $CBFG$.
- reta perpendicular ao plano: $\overleftrightarrow{AE}$ é perpendicular ao plano que contém a face $EFGH$.

Resumindo, podemos organizar as posições relativas entre reta e plano no seguinte esquema:

- Uma reta e um plano no espaço
  - Reta contida no plano
  - Reta paralela ao plano
  - Reta concorrente ao plano
    - Reta perpendicular ao plano
    - Reta oblíqua ao plano

Problemas e exercícios resolvidos

R4. Na figura geométrica espacial representada, considere as retas que contêm suas arestas e os planos que contêm suas faces. Sabendo que nessa figura *ABCD*, *ADHE*, *FGHE* e *BCGF* são retângulos, responda às questões.



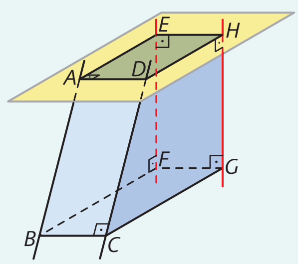
a) Quais retas são perpendiculares ao plano que contém a face *ADHE*?

b) Quais retas estão contidas no plano que contém a face *BCGF*?

c) Quais retas são paralelas ao plano que contém a face *ABCD*?

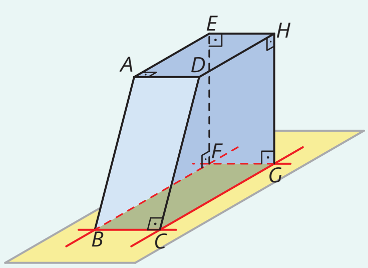
Resolução

a) Temos quatro retas que concorrem com o plano que contém a face *ADHE*; duas delas são oblíquas ao plano $\left(\overleftrightarrow{AB} \text{ e } \overleftrightarrow{DC}\right)$ e as outras duas, perpendiculares $\left(\overleftrightarrow{EF} \text{ e } \overleftrightarrow{HG}\right)$.

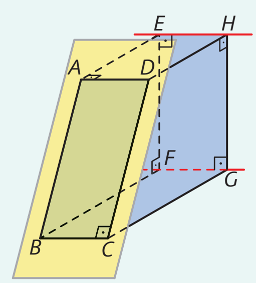


Portanto, $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{HG}$ são perpendiculares ao plano que contém a face *ADHE*.

b) São as retas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BF}$, $\overleftrightarrow{CG}$ e $\overleftrightarrow{FG}$.



c) São as retas $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{FG}$.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

13. Determine se cada sentença é verdadeira ou falsa. Em seguida, justifique sua resposta. verdadeira: a, c, d; falsa: b

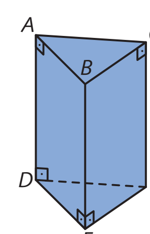
a) Se a reta *u* é perpendicular ao plano β, então *u* é perpendicular a todas as retas contidas nesse plano que passam pelo ponto comum a *u* e β.

b) Se *r* e *s* são retas perpendiculares e apenas *r* está contida no plano α, podemos afirmar que $s \perp \alpha$.

c) Se as retas *v* e *t* são paralelas e somente *v* está contida no plano β, então $t // \beta$.

d) Se *r* é uma reta perpendicular a duas outras retas contidas no plano α, a reta *s* paralela a α é perpendicular a *r* se, e somente se, *r* e *s* forem concorrentes.

14. Considere os planos e as retas que contêm as faces e as arestas, respectivamente, do prisma reto de base triangular.



Rafael L. Gaion

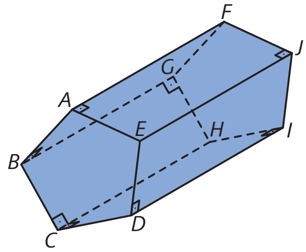
a) Quais são as retas perpendiculares ao plano que contém a face *ABC*? $\overleftrightarrow{AD}$; $\overleftrightarrow{BE}$ e $\overleftrightarrow{CF}$

b) Qual é a posição relativa do plano que contém a face *BEFC* em relação a $\overleftrightarrow{AD}$? paralela

c) Em relação ao plano que contém a face *ADFC*:

- quais são as retas concorrentes a ele? $\overleftrightarrow{AB}$; $\overleftrightarrow{CB}$; $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{FE}$
- quais são as retas contidas nele? $\overleftrightarrow{AD}$; $\overleftrightarrow{CF}$; $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{DF}$

15. Observe um prisma reto de base pentagonal.



Rafael L. Gaion

Considerando as retas que contêm suas arestas e os planos que contêm suas faces, responda às questões.

a) Quanto ao plano que contém a face:

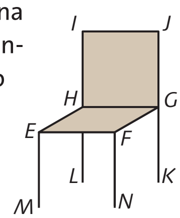
- *ABCDE*, qual é a posição relativa de $\overleftrightarrow{AF}$? perpendicular
- *AEJF*, qual é a posição relativa de $\overleftrightarrow{BG}$? paralela
- *FGHIJ*, qual é a posição relativa de $\overleftrightarrow{IJ}$? contida no plano

b) Quais retas são paralelas ao plano que contém a face *ABCDE*? $\overleftrightarrow{IJ}, \overleftrightarrow{JF}, \overleftrightarrow{FG}, \overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{HI}$

c) Quais retas estão contidas no plano que contém a face *ABCDE*? $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{AE}$

d) Quais retas são concorrentes ao plano que contém a face *BCHG*? $\overleftrightarrow{BA}, \overleftrightarrow{AE}, \overleftrightarrow{DE}, \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{GF}, \overleftrightarrow{FJ}, \overleftrightarrow{IJ}$ e $\overleftrightarrow{HI}$

16. (UFRN) Na cadeira representada na figura ao lado, o encosto é perpendicular ao assento e este é paralelo ao chão.



Rafael L. Gaion

Sendo assim: d

a) os planos determinados por *EFN* e *FGJ* são paralelos

b) $\overline{HG}$ é um segmento de reta comum aos planos determinados por *EFN* e *EFH*

c) os planos determinados por *HIJ* e *EGN* são paralelos

d) $\overline{EF}$ é um segmento de reta comum aos planos determinados por *EFN* e *EHG*

17. (UEL-PR) Considere uma reta *s*, contida em um plano α, e uma reta *r* perpendicular a *s*. Então, necessariamente: b

a) *r* é perpendicular a α

b) *r* e *s* são coplanares

c) *r* é paralela a α

d) *r* está contida em α

e) todas as retas paralelas a *r* cortam *s*

Em grupo

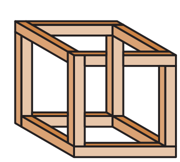
18. Suponham que uma reta *r* seja perpendicular a apenas uma reta contida em um plano α. Nessas condições, *r* será perpendicular a α? Justifiquem a resposta.

Não, pois para que uma reta *r* seja perpendicular a um plano α, é necessário e suficiente que ela seja perpendicular a pelo menos duas retas concorrentes contidas nesse plano.

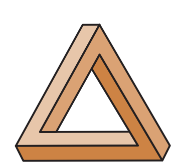
19. (Enem) Representar objetos tridimensionais em uma folha de papel nem sempre é tarefa fácil. O artista holandês Escher (1898-1972) explorou essa dificuldade criando várias figuras planas impossíveis de serem construídas como objetos tridimensionais, a exemplo da litografia Belvedere, reproduzida abaixo.

Considere que um marceneiro tenha encontrado algumas figuras supostamente desenhadas por Escher e deseje construir uma delas com ripas rígidas de madeira que tenham o mesmo tamanho. Qual dos desenhos a seguir ele poderia reproduzir em um modelo tridimensional real? e

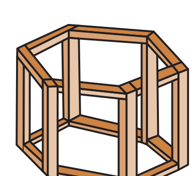
a)



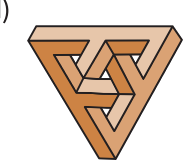
b)



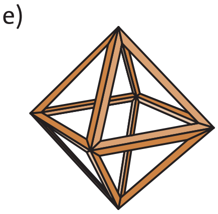
c)



d)



e)



Ilustrações: Sergio L. Filho

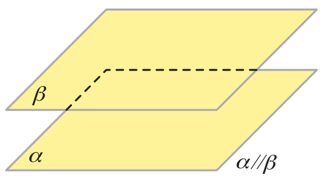
5 Posições relativas entre dois planos

Consideremos dois planos, α e β, no espaço. Esses planos podem ser:

- **coincidentes**

Dois planos, α e β, são **coincidentes** se correspondem ao mesmo conjunto de pontos, ou seja, se $\alpha = \beta$.

- **paralelos**



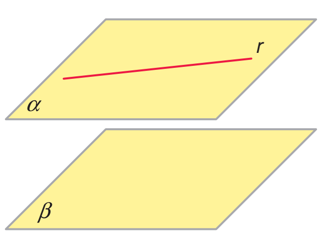
Dois planos, α e β, são **paralelos** se, e somente se, não têm pontos em comum. Indicamos esse paralelismo por $\alpha // \beta$.

Em relação ao paralelismo entre dois planos, podemos destacar as seguintes propriedades.

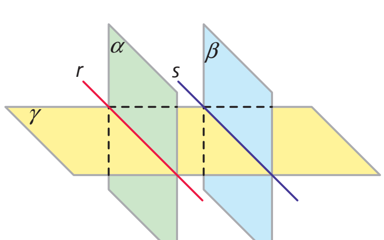
Observação

As propriedades apresentadas nesta e na próxima página podem ser demonstradas, porém, neste livro, apenas as enunciaremos.

1ª propriedade Se dois planos, α e β, são paralelos, qualquer reta r de um deles é paralela ao outro.



2ª propriedade Dados dois planos paralelos, α e β, se um outro plano γ os corta, as interseções são duas retas, r e s, paralelas.

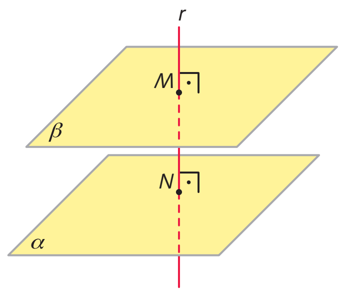


Ilustrações: Rafael L. Gaion

Bilanol/Shutterstock.com

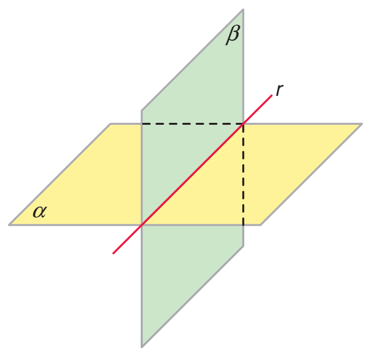
Quando se desenvolve um projeto de construção civil, os profissionais da área, desde arquitetos e engenheiros até operários da obra, devem estar atentos aos mais minuciosos detalhes. Na construção de um edifício, por exemplo, os pisos devem ser perfeitamente paralelos e, em geral, horizontais. Os pilares, por sua vez, são colocados em lugares estratégicos para produzirem uma boa sustentação. Nessas construções, o piso e o teto, por exemplo, podem ser representados por planos paralelos.

3ª propriedade Dados dois planos paralelos, α e β, toda reta r perpendicular a um deles também é perpendicular ao outro.



- **concorrentes ou secantes**

Dois planos, α e β, são **concorrentes** se, e somente se, têm uma única reta em comum.

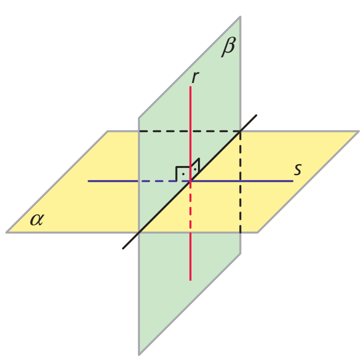


Assim, podemos enunciar o seguinte postulado.

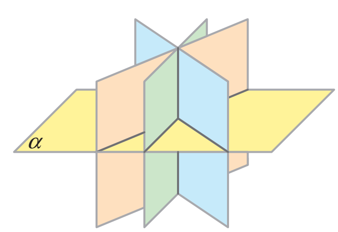
Postulado 8: Se dois planos distintos se cruzam, sua interseção é uma reta.

Agora, veja um caso particular de dois planos concorrentes.

- **planos perpendiculares**



Observação
Existem infinitos planos perpendiculares a um plano dado. Esses planos podem ser paralelos entre si ou concorrentes.



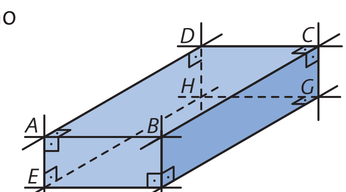
Dois planos, α e β, são **perpendiculares** se, e somente se, são concorrentes e um deles contém uma reta r perpendicular ao outro. Indicamos essa perpendicularidade por $\alpha \perp \beta$.

Observação
Quando dois planos concorrentes não são perpendiculares, dizemos que eles são **oblíquos**.

A posição relativa entre dois planos no espaço também pode ser observada no paralelepípedo reto retângulo representado ao lado.

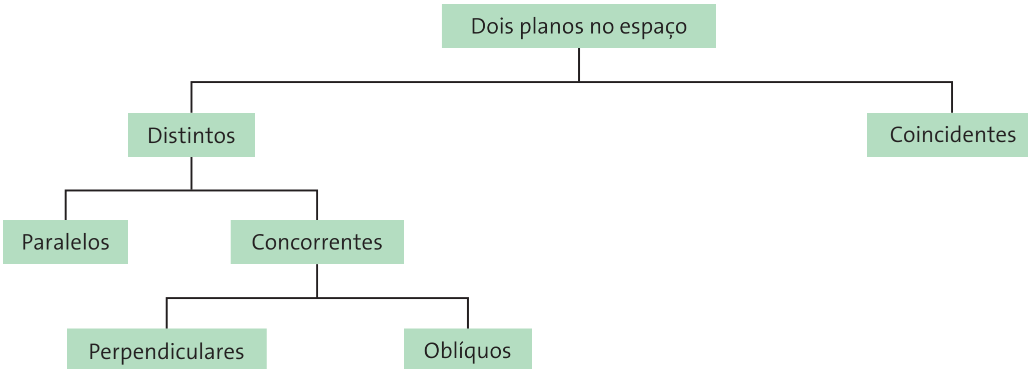
Nele, podemos destacar exemplos de:

- planos paralelos: planos que contêm as faces *ABCD* e *EFGH*;
- planos perpendiculares: planos que contêm as faces *BFGC* e *AEFB*.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Resumindo, podemos organizar as posições relativas entre dois planos no seguinte esquema:

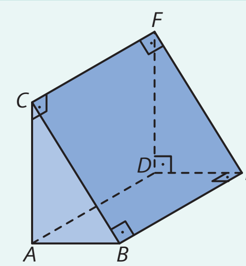


Problemas e exercícios resolvidos

R5. Considerando os planos que contêm as faces do prisma reto, determine:

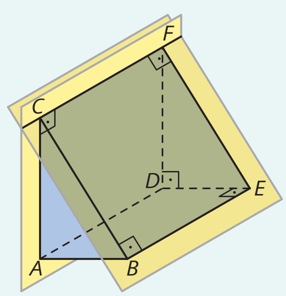
a) a posição relativa entre os planos que contêm as faces *ADFC* e *BEFC*.

b) os planos perpendiculares ao plano que contém a face *ADFC*.

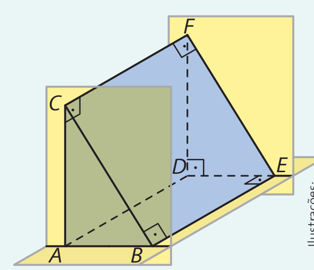


Resolução

a) Os planos que contêm as faces *ADFC* e *BEFC* são oblíquos.



b) No prisma, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ são perpendiculares ao plano que contém a face *ADFC*. Assim, os planos que contêm essas retas são perpendiculares ao plano que contém a face *ADFC*, ou seja, os planos que contêm as faces *ABC*, *DEF* e *ABED*.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

R6. (UEA-AM) Se *r* é uma reta oblíqua ao plano α, quantos são os planos que contêm *r* e são perpendiculares a α?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) infinitos

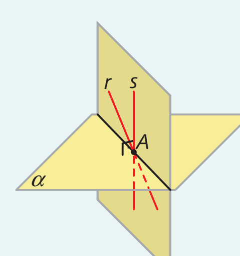
Resolução

Como *r* é oblíqua ao plano α, cruza-o em um único ponto. Logo, todo plano que contém a reta *r* concorre com α.

Seja *A* o ponto em que a reta *r* cruza o plano α. Fazendo a reta *s* perpendicular a α e passando por *A*, temos a figura ao lado.

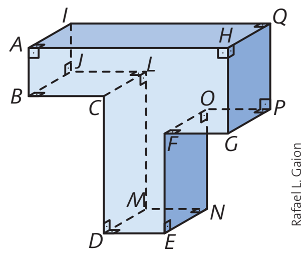
Como *r* e *s* são concorrentes, existe um único plano que as contém. Logo, existe um único plano que contém *r* e é perpendicular a α.

Portanto, a solução é a alternativa **b**.



Rafael L. Gaion

20. Observe a figura espacial representada.



De acordo com os planos e as retas que contêm as faces e as arestas, respectivamente, dessa figura e sabendo que *AHQI*, *HGPQ*, *GFOP*, *EFON*, *DMNE*, *DMLC*, *CLJB* e *ABJI* são retângulos, responda às questões.

a) Qual é a posição relativa entre o plano que contém a face *ABJI* e o plano que contém a face *AHQI*? são perpendiculares

b) As retas $\overleftrightarrow{CL}$ e $\overleftrightarrow{EN}$ são coplanares? Sim.

c) Quantos são os planos perpendiculares ao plano que contém a face *ABCDEFGH*? 8 planos

d) Quais são os planos concorrentes ao plano que contém a face *AHQI*? *ABJL*, *CDML*, *FENO*, *HGPQ*, *ABCDEFGH* e *IJLMNOPQ*

e) Qual é a posição relativa entre $\overleftrightarrow{AH}$ e o plano que contém a face *HGPQ*? são perpendiculares

21. Determine se cada sentença é verdadeira ou falsa. Em seguida, justifique sua resposta. verdadeiras: b, d; falsas: a, c, e

a) Se a reta r é paralela aos planos α e β, estes são paralelos.

b) Se uma reta está contida no plano α e $\alpha // \beta$, então a reta é paralela ao plano β.

c) Nem sempre dois planos perpendiculares são concorrentes.

d) A interseção de dois planos secantes é uma reta.

e) Se dois planos são concorrentes, não existe um terceiro plano que seja concorrente a apenas um deles.

22. (AFA-SP) Considere as proposições a seguir.

I. Se dois planos são paralelos, toda reta que é paralela a um deles é paralela ou está contida no outro.

II. Se uma reta é paralela a um plano, é paralela a todas as retas desse plano.

III. Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, ela está contida nesse plano.

IV. Se dois planos são secantes, toda reta de um sempre corta o outro.

Pode-se afirmar que as proposições verdadeiras são: c

a) I e IV b) II e III c) I e III d) II e IV

23. (IME-RJ) Considere as afirmações abaixo:

I. se três pontos são colineares, então eles são coplanares;

II. se uma reta tem um ponto sobre um plano, então ela está contida nesse plano;

III. se quatro pontos são não coplanares, então eles determinam 6 (seis) planos;

IV. duas retas não paralelas determinam um plano;

V. se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a sua interseção é uma reta.

Entre essas afirmações: b

a) apenas uma é verdadeira;

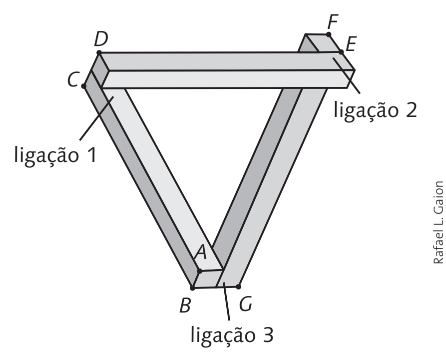
b) apenas duas são verdadeiras;

c) apenas três são verdadeiras;

d) apenas quatro são verdadeiras;

e) todas são verdadeiras.

24. (UEL-PR) A seguir está representado o “Triângulo Impossível” desenvolvido por Roger Penrose.



Essa construção consiste de traves retangulares que se sobrepõem perpendicularmente. Seguindo com os olhos todas as partes dessa construção, não se pode descobrir um único erro. No entanto, é um todo que só tem consistência como desenho. Os três ângulos retos são completamente normais, mas estão ligados uns aos outros de uma forma impossível, de modo a formarem uma espécie de triângulo, cuja soma dos ângulos perfaz 270°. Considerando possíveis apenas as ligações 1 e 2, e, portanto, impossível a ligação 3, considere que na figura anterior os pontos A, B e C pertençam a um plano α; C, D e E pertençam a um plano β; e que E, F e G pertençam a um plano λ. Em relação a esses planos, é correto afirmar que: a

a) α é paralelo a λ

b) α é perpendicular a λ

c) β é paralelo a α

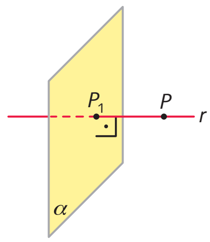
d) β é paralelo a λ

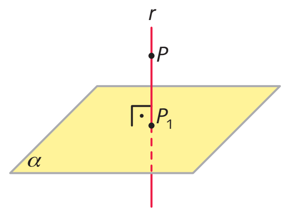
e) α e λ possuem uma reta em comum

6 Projeções ortogonais

Projeção de um ponto sobre um plano

Consideremos um plano α e um ponto P fora dele. Traçamos uma reta r perpendicular a α passando por P. O ponto P_1 correspondente à interseção entre a reta r e o plano α é a **projeção ortogonal** de P sobre esse plano.

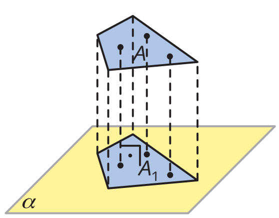


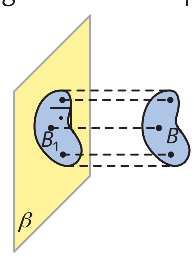


O plano α é o plano de projeção, e r é a reta projetante do ponto P.

Projeção de uma figura sobre um plano

A projeção ortogonal de uma figura sobre um plano corresponde ao conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos dessa figura sobre esse plano.

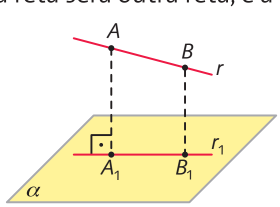




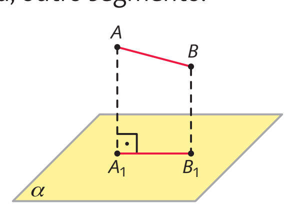
A figura A_1 é a projeção ortogonal da figura A sobre o plano α. Ela é formada pelas projeções ortogonais de todos os pontos de A. De maneira análoga, a figura B_1 é a projeção ortogonal da figura B sobre o plano β.

Projeção de uma reta ou de um segmento de reta sobre um plano

Considere uma reta r e um segmento de reta AB não perpendiculares ao plano α. A projeção ortogonal da reta será outra reta, e a do segmento de reta, outro segmento.

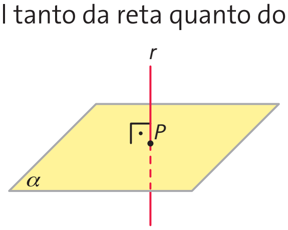


Se a reta r não é perpendicular ao plano α, então a projeção ortogonal de r sobre esse plano é a reta determinada pelas projeções ortogonais A_1 e B_1 dos pontos A e B, respectivamente, da reta r.

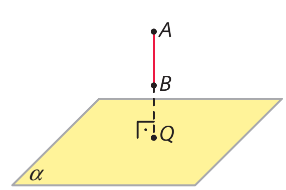


Se o segmento de reta AB não é perpendicular ao plano α, então a projeção do segmento AB sobre esse plano é o segmento A_1B_1.

Se a reta r ou o segmento de reta AB forem perpendiculares ao plano α, a projeção ortogonal tanto da reta quanto do segmento em α será um ponto.



Se a reta r é perpendicular ao plano α, então a projeção ortogonal de r nesse plano é o ponto P.



Se o segmento de reta AB é perpendicular ao plano α, então a projeção ortogonal do segmento AB nesse plano é o ponto Q.

Ilustrações: Rafael L. Gaion

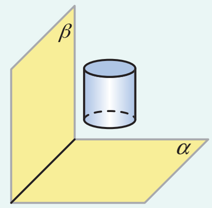
Observação

Como a reta e o segmento de reta são figuras:

- a projeção ortogonal de uma reta sobre um plano corresponde ao conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos dessa reta sobre esse plano;
- a projeção ortogonal de um segmento de reta sobre um plano corresponde ao conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos desse segmento sobre esse plano.

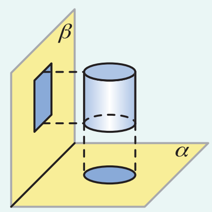
Problemas e exercícios resolvidos

R7. Desenhe a figura obtida na projeção ortogonal do cilindro reto sobre os planos perpendiculares α e β, sabendo que as bases do cilindro são paralelas a α. Depois, escreva o nome dessa figura.



Resolução

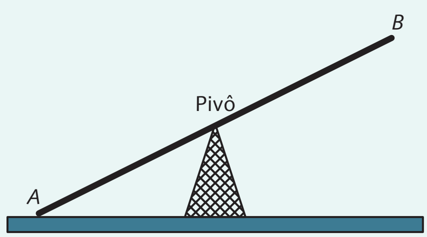
Sobre o plano α, a figura obtida será um círculo e, sobre β, um retângulo.



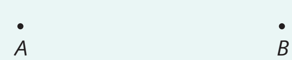
Ilustrações: Rafael L. Gaion

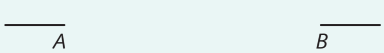
R8. (Enem) Gangorra é um brinquedo que consiste de uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternativamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra.

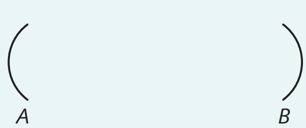
Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos *A* e *B* são equidistantes do pivô:

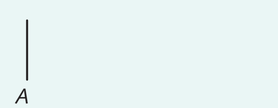


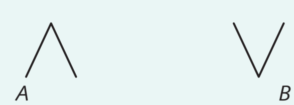
A projeção ortogonal da trajetória dos pontos *A* e *B*, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:

a) 

b) 

c) 

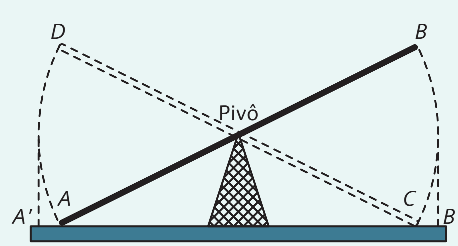
d) 

e) 

Resolução

O movimento completo realizado pela gangorra está representado na figura ao lado.

A projeção ortogonal da trajetória do ponto *A* ao ponto *D* sobre o plano do chão da gangorra é dada por $\overline{A'A}$. E a projeção ortogonal da trajetória do ponto *B'* ao ponto *B* sobre o plano do chão da gangorra é dada por $\overline{CB}$.

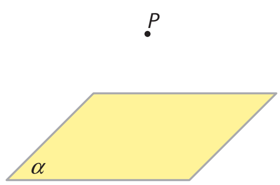


Ilustrações: Rafael L. Gaion

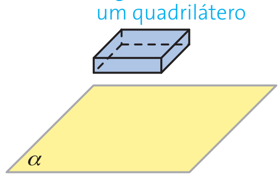
Portanto, a alternativa **b** é a que melhor representa essas projeções.

25. Para cada um dos itens, escreva qual é a projeção ortogonal das figuras sobre o plano. Em seguida, desenhe um esquema representando cada uma dessas projeções.

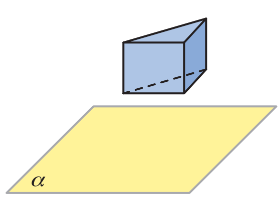
a) ponto



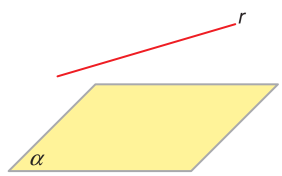
b) As bases do paralelepípedo reto retângulo são paralelas a α. região determinada por um quadrilátero



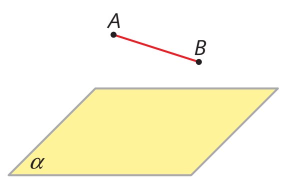
c) As bases do prisma reto são paralelas a α. região triangular



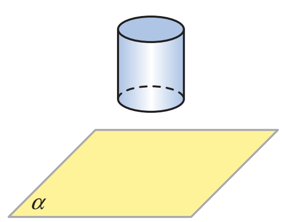
d) reta



e) segmento de reta



f) As bases do cilindro reto são paralelas a α. círculo



Ilustrações: Rafael L. Gaion

26. Determine se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta por meio de uma imagem. Veja as respostas na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

a) A figura determinada pela projeção ortogonal de uma esfera é uma circunferência.

b) Para que a medida do comprimento de um segmento de reta seja igual à do comprimento de sua projeção ortogonal sobre um plano, é necessário que esse segmento seja paralelo ao plano.

c) A projeção ortogonal de duas retas concorrentes sobre um plano pode ser uma reta e um ponto pertencente a essa reta.

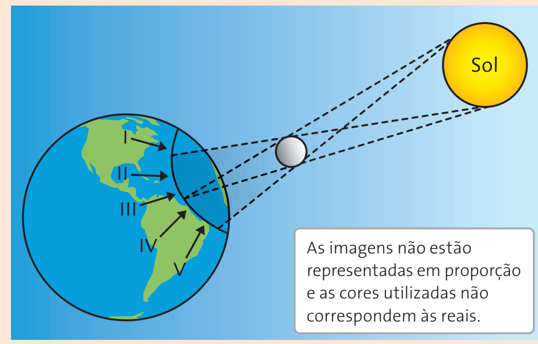
d) A projeção ortogonal de um cilindro sobre um plano é sempre uma circunferência.

e) Para que a projeção ortogonal de uma reta sobre um plano seja um único ponto, é necessário que essa reta seja paralela ao plano.

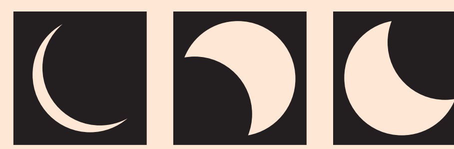
Em grupo

Veja comentários e sugestões na Assessoria pedagógica.

27. (Enem) A figura abaixo mostra um eclipse solar no instante em que é fotografado em cinco diferentes pontos do planeta.



Três dessas fotografias estão reproduzidas a seguir.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

As fotografias poderiam corresponder, respectivamente, aos pontos: a

a) III, V e II
b) II, III e V
c) II, IV e III
d) I, II e III
e) I, II e V

28. Um hexágono contido em um plano α será projetado sobre os planos β e λ.

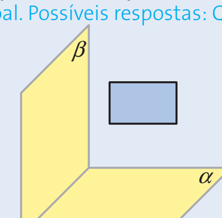
a) Sabendo que $\alpha // \beta$, qual será a projeção do hexágono no plano β? hexágono

b) Sabendo que $\alpha \perp \lambda$, qual será a projeção do hexágono no plano λ? segmento de reta

29. Sejam r e s retas paralelas. O que podemos concluir a respeito de suas projeções ortogonais sobre um plano?
Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Você produtor

30. De acordo com a imagem, elabore algumas questões e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se as respostas estão corretas.
Resposta pessoal. Possíveis respostas: Qual é a projeção ortogonal da região retangular sobre o plano α? E sobre o plano β?

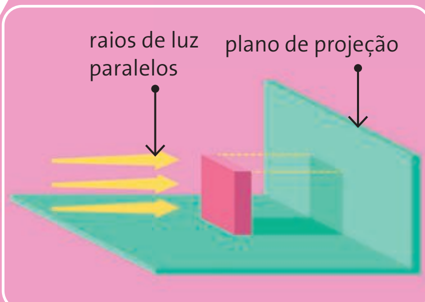


Rafael L. Gaion

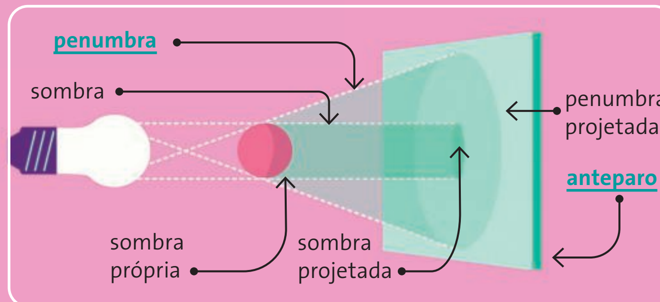
Saiba mais

Eclipse solar

Em várias ocasiões, podemos observar as sombras de vários objetos. Essas sombras são projeções desses objetos sobre uma superfície, como o solo ou uma parede. Observe nos esquemas alguns exemplos de projeção.



Se os raios de luz incidentes sobre o objeto forem paralelos entre si e perpendiculares ao plano de projeção, esta será ortogonal. Ou seja, a sombra do objeto será a projeção ortogonal dele.



A projeção representada neste esquema é semelhante à ocorrência de um eclipse solar, no qual temos a projeção da Lua sobre a superfície da Terra. Essa projeção não é ortogonal, pois a Terra não é plana e os raios de luz solar não são paralelos.

Anteparo: qualquer objeto que se coloca diante de alguém ou de algo para sua proteção
Penumbra: região de transição entre a luz e a sombra


abriendomundo/Shutterstock

Eclipse total do Sol.


Satyabrata Tripathy/Hindustan/Getty Images

Eclipse parcial do Sol.

O fato de o eclipse ser total não significa que ele poderá ser observado de todos os pontos da superfície terrestre. Os observadores que estiverem na região coberta pela sombra projetada da Lua observarão o eclipse total do Sol. Já aqueles que estiverem na região coberta pela penumbra observarão o eclipse parcial do Sol. Os que estiverem fora da sombra e fora da região de penumbra não observarão o eclipse solar.

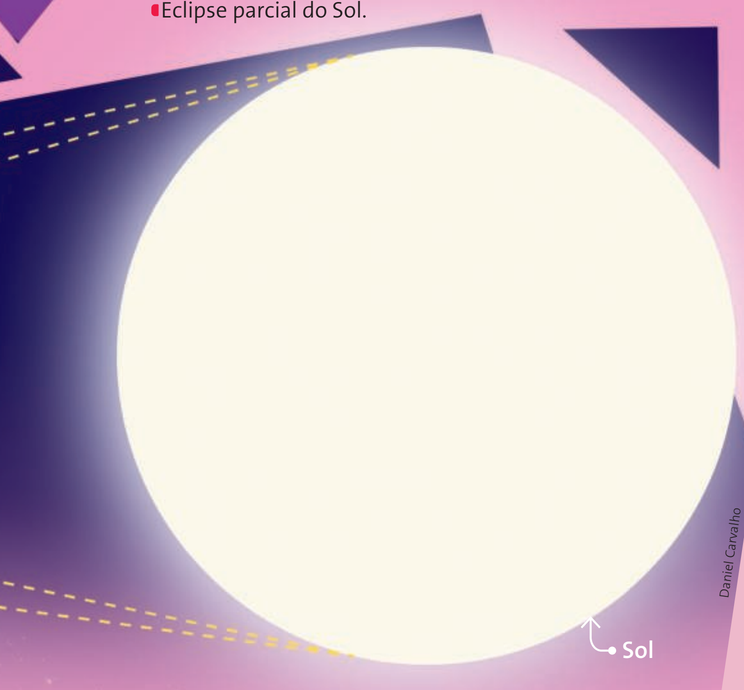
O movimento dos astros celestes sempre despertou a curiosidade das pessoas. Há muitos anos, fazem-se estudos e conjecturas sobre a periodicidade dos eventos envolvendo corpos celestes e sobre o modelo do sistema solar.

Para se ter uma ideia, registros de Ptolomeu sobre o sistema geocêntrico, ou seja, a Terra como o centro do Universo, datam do século IV a.C.

Atualmente, as observações e leis comprovam que o nosso sistema é heliocêntrico, ou seja, o Sol está posicionado no centro e os planetas giram em torno dele em órbitas periódicas. Essas leis também valem para outros movimentos orbitais, como da Lua em torno da Terra.

Durante muito tempo as civilizações antigas, como os egípcios e os maias, foram capazes de prever os eclipses apenas observando o céu ao longo de gerações.

Após vários anos de pesquisa, os astrônomos sabem a posição exata de certos astros, as características de seus movimentos, as interações gravitacionais entre eles etc. Com esses dados e o auxílio de um *software* específico, é possível prever com excelente precisão alguns fenômenos, como os eclipses.



Daniel Carvalho

Este esquema representa um eclipse total do Sol, fenômeno que ocorre quando a Lua se alinha entre o Sol e a Terra.

Fonte de pesquisa: SILVEIRA, Fernando L. A "atração" entre sombras. *Física na escola*, São Paulo, Sociedade Brasileira de Física, v. 8, n. 1, p. 17-21, 2007. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol8/Num1/v08n01a04.pdf>. Acesso em: 5 fev. 2020.

Esse esquema é uma representação artística que tem a intenção de mostrar o eclipse total do Sol. O tamanho do planeta Terra, da Lua e do Sol não estão proporcionais às medidas reais, assim como as distâncias entre eles.

a Como ocorre a sombra de um objeto sobre um plano? Os raios de luz incidem de modo paralelo sobre o objeto e perpendiculares ao plano de projeção.

b Por que a projeção que ocorre durante um eclipse solar, no qual temos a projeção da Lua sobre a superfície da Terra, não é ortogonal? Porque a Terra não é plana e os raios de luz solar não são paralelos.

c Atualmente os astrônomos obtêm uma excelente previsão, por meio de dados que alimentam *softwares*, do momento em que a Lua vai passar entre o Sol e a Terra, bloqueando a luz. Como os povos antigos, incluindo egípcios e maias, previam os eclipses? Eles observavam o céu ao longo de gerações.

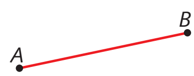
7 Distâncias

Antes de apresentar o conteúdo deste tópico, verifique se os alunos já conhecem o assunto relacionado a distâncias. Deixe que deem suas explicações e conversem entre si. Dessa forma, eles têm a oportunidade de resgatar o conhecimento prévio acerca do assunto e tornar o estudo mais significativo.

Distância entre dois pontos

Sejam dois pontos distintos A e B. A distância entre esses pontos é o comprimento de $\overline{AB}$ dada em certa unidade de comprimento.

Veja comentários e sugestões na Assessoria pedagógica.



Indicamos a distância entre esses pontos por $d(A, B)$ ou, simplesmente, AB.

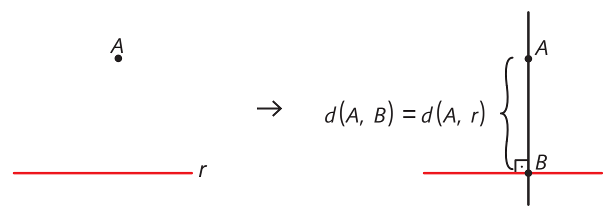
Caso os pontos A e B correspondam ao mesmo ponto, ou seja, sejam coincidentes $(A = B)$, a distância entre eles é nula.

Observação

Não faremos distinção entre grandezas e as respectivas medidas para simplificar a escrita. Então, quando mencionamos situações do tipo "comprimento do segmento de reta AB", estamos na realidade nos referindo à "medida do comprimento do segmento de reta AB", entre outras situações.

Distância entre ponto e reta

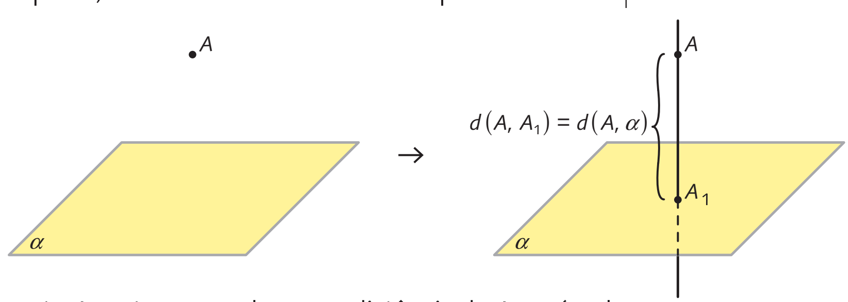
Sejam uma reta r e um ponto A fora dela. Traçamos uma reta perpendicular a r que passe por A, obtendo um ponto B em r. A distância do ponto A à reta r é a distância entre os pontos A e B. Indicamos essa distância por $d(A, r)$.



Caso o ponto A pertença à reta r, a distância de A a r é nula.

Distância entre ponto e plano

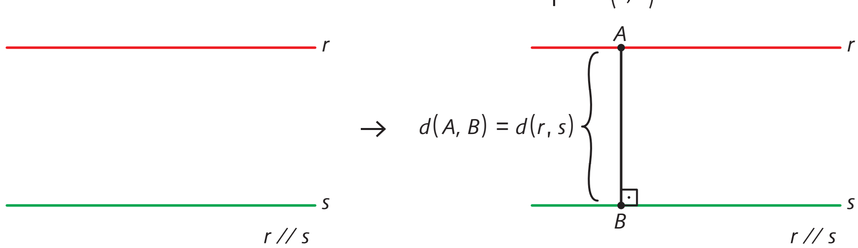
Sejam um plano α e um ponto A não pertencente a ele. Considerando a projeção ortogonal A_1 de A sobre o plano, a distância de A a α é o comprimento de $\overline{AA_1}$. Indicamos essa distância por $d(A, \alpha)$.



Caso o ponto A pertença ao plano α, a distância de A a α é nula.

Distância entre duas retas paralelas

Consideremos duas retas, r e s, paralelas. A distância entre essas retas é a distância de qualquer ponto de uma reta à outra. Indicamos essa distância por $d(r, s)$.

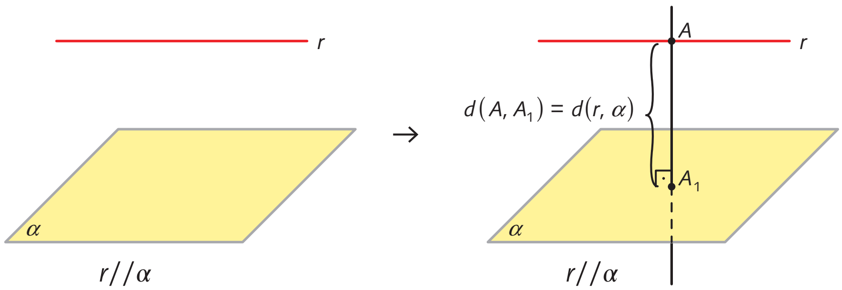


Ilustrações: Rafael L. Gaion

No caso de as retas serem coincidentes, a distância entre elas é nula. Caso elas sejam concorrentes, não definimos a distância entre elas.

Distância entre reta e plano paralelos

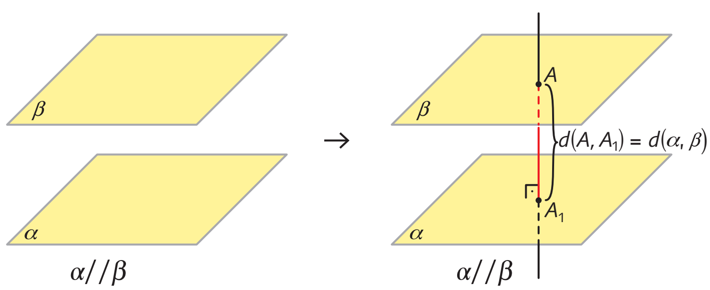
Consideremos uma reta r paralela a um plano α. A distância entre eles é a distância de um ponto qualquer de r a α. Indicamos essa distância por $d(r, \alpha)$.



No caso de a reta estar contida no plano, a distância entre eles será nula. Caso ela seja concorrente ao plano, não definimos a distância entre eles.

Distância entre dois planos paralelos

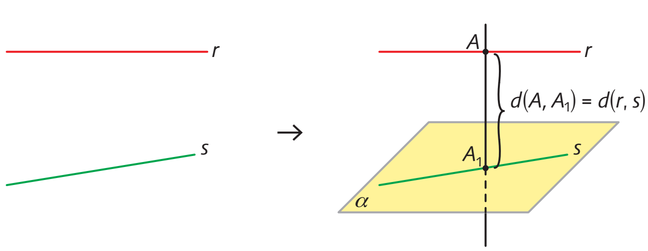
Sejam α e β dois planos paralelos. A distância entre eles é a distância de um ponto qualquer de um plano ao outro. Indicamos essa distância por $d(\alpha, \beta)$.



No caso de os planos serem coincidentes, a distância entre eles será nula. Caso eles sejam concorrentes, não definimos a distância entre eles.

Distância entre retas reversas

Dadas duas retas, r e s, reversas, a distância entre elas é a distância entre um ponto qualquer de r ao plano α paralelo a r que contém s. Indicamos essa distância por $d(r, s)$.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

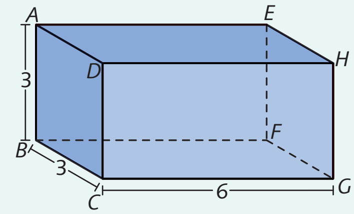
Peça aos alunos que exemplifiquem as diversas situações envolvendo distâncias utilizando os materiais que possuem, como régua, lápis, caneta, livro, entre outros.

Observação

A reta que passa pelos pontos A e A_1 é perpendicular às retas reversas r e s.

Problemas e exercícios resolvidos

R9. Considere o paralelepípedo reto retângulo ao lado e determine:



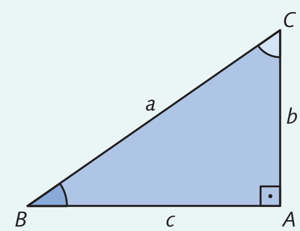
a) o segmento de reta cujo comprimento é a distância entre:

- o ponto *A* e a reta que contém os pontos *E* e *H*.
- $\overline{CD}$ e o plano que contém a face *EFGH*.

b) a distância entre os pontos *D* e *F*.

Observação

O teorema de Pitágoras é uma relação envolvendo os comprimentos da hipotenusa e dos catetos de um triângulo retângulo, assunto que você provavelmente já estudou. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa é o maior lado, oposto ao ângulo reto, e os catetos são os outros dois lados. De acordo com esse teorema, em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos é igual ao quadrado do comprimento da hipotenusa.

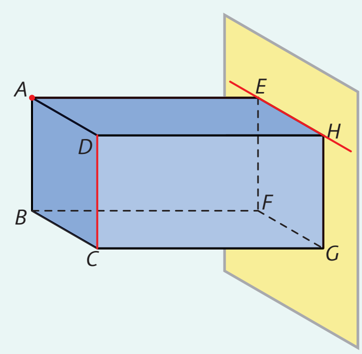


$a^2 = b^2 + c^2$

Resolução

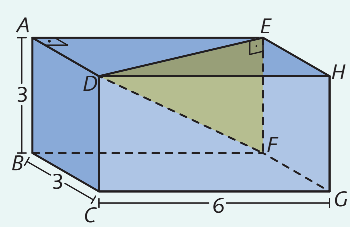
a) Na imagem ao lado estão destacados $\overline{CD}$, o ponto *A*, a reta que passa por *E* e *H* e o plano que contém a face *EFGH*. Assim, os segmentos são:

- $\overline{AE}$
- $\overline{CG}$ ou $\overline{DH}$



b) Note na imagem a seguir que a distância entre os pontos *D* e *F* é igual ao comprimento de $\overline{DF}$, que é a hipotenusa do triângulo retângulo *DEF*. Logo:

$$(DF)^2 = (DE)^2 + (EF)^2$$



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Calculando *DE* no triângulo retângulo *ADE*, temos:

$$(DE)^2 = (AD)^2 + (AE)^2 \Rightarrow (DE)^2 = 3^2 + 6^2 \Rightarrow DE = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Calculando *DF*, temos:

$$(DF)^2 = (DE)^2 + (EF)^2 \Rightarrow (DF)^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2 + 3^2 \Rightarrow DF = \sqrt{45 + 9} = 3\sqrt{6}$$

Portanto, a distância entre os pontos *D* e *F* é $3\sqrt{6}$ unidades de comprimento.

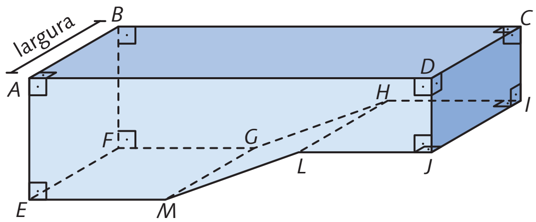
Observação

Note que $DE = 3\sqrt{5}$ e $DF = 3\sqrt{6}$, pois $DE > 0$ e $DF > 0$.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

31. Esta figura representa uma piscina.



Rafael L. Gaion

Sabendo que *ABCD*, *CDJI*, *IJLH*, *MLHG*, *MEFG* e *AEFB* são retângulos, resolva os itens.

a) Escreva os segmentos cujo comprimento é a distância entre:

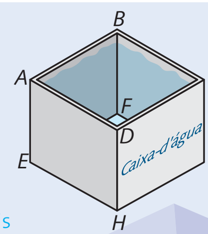
- o plano que contém a face *HIJL* e o ponto *D*. $\overline{DJ}$ e $\overline{CI}$
- o plano que contém a face *ABFE* e o que contém a face *CDJI*. $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$
- $\overleftrightarrow{MG}$ e $\overleftrightarrow{HL}$. $\overline{ML}$ e $\overline{GH}$

b) Quais são os segmentos de reta cujo comprimento é:

- a profundidade máxima da piscina? $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$
- a largura da piscina? $\overline{AB}$, $\overline{EF}$, $\overline{MG}$, $\overline{LH}$, $\overline{JI}$ e $\overline{CD}$

Você produtor

32. De acordo com a imagem, elabore algumas questões e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se as respostas estão corretas.
Resposta pessoal.
Possíveis respostas: Qual é o segmento cujo comprimento é a distância entre o ponto *A* e a reta que contém os pontos *B* e *C*?; quais são os segmentos cujo comprimento é a distância entre *F* e *G*?



Rafael L. Gaion

33. Observe as medidas indicadas no prisma reto.

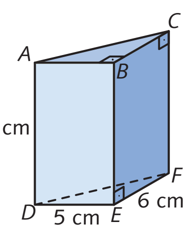
Qual é a distância entre:

a) $\overleftrightarrow{DE}$ e o ponto *A*? 8 cm

b) $\overleftrightarrow{CF}$ e o plano que contém a face *ABDE*? 6 cm

c) os pontos *C* e *E*? 10 cm

d) os planos que contêm as faces *ABC* e *DEF*? 8 cm



Rafael L. Gaion

34. Verifique se cada uma das sentenças é verdadeira ou falsa. Depois, justifique sua resposta.

a) A distância entre dois pontos coincidentes é igual a 1.
Falsa. Dois pontos coincidentes equivalem ao mesmo ponto, com distância nula entre si.

b) A distância entre um ponto e um plano é igual ao comprimento do segmento de reta determinado por esse ponto e a projeção ortogonal dele no plano.
Verdadeira. Essa é a definição da distância entre um ponto e um plano.

c) A distância entre um ponto e uma reta é determinada pelo comprimento de um segmento oblíquo à reta. Falsa. Por definição, a distância entre um ponto e uma reta é determinada pelo comprimento do segmento de reta perpendicular a essa reta.

d) Podemos obter a distância entre uma reta r e um plano α, com $r // \alpha$, calculando a média aritmética da distância de cinco pontos quaisquer da reta ao plano.
Verdadeira. A distância de cada um desses pontos ao plano será a mesma.

Finalizando a conversa

a) O que você entendeu acerca da geometria de posição? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos tenham compreendido os conceitos relacionados a ponto, reta e plano, bem como a identificação de propriedades relativas a paralelismo, perpendicularismo, interseção e composição de diferentes formas.

b) O que caracteriza as retas paralelas, concorrentes, perpendiculares, coincidentes e reversas? Paralelas: não possuem pontos em comum; concorrentes: possuem um único ponto em comum; perpendiculares: formam um ângulo reto entre si; coincidentes: correspondem ao mesmo conjunto de pontos; reversas: são não coplanares.

c) Em que situações do dia a dia é possível utilizar a distância entre dois pontos?
Resposta pessoal. Possíveis respostas: distância entre duas estrelas no céu; distância entre dois locais em um mapa.

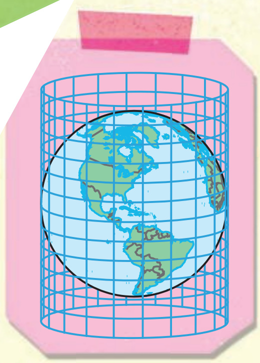
d) Você considerou importante o estudo deste capítulo? Por quê?
Resposta pessoal. Espera-se que o aluno tenha compreendido a importância dos conteúdos estudados e a presença de alguns aspectos no dia a dia, o que possibilita que eles desenvolvam habilidades de visualização na elaboração de desenhos, de argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para diversas situações.

Saiba mais

Todos os mapas-múndi estão errados

É possível representar a superfície de uma esfera em um plano? A superfície de uma esfera não pode ser representada em um plano sem que haja algum tipo de distorção. Por exemplo, nenhum mapa representa a superfície do globo terrestre sem que haja deformações nos ângulos, nas áreas, nas distâncias ou nas direções.

Imagine o globo terrestre envolvido em uma superfície cilíndrica e uma fonte de luz no centro do globo. Essa luz vai projetar uma sombra. Cada ponto do globo será projetado na superfície do cilindro que ao ser planificado, vai produzir um mapa retangular. Essa é a ideia de um tipo de **projeção cartográfica** chamada projeção cilíndrica, utilizada na construção de mapas-múndi.



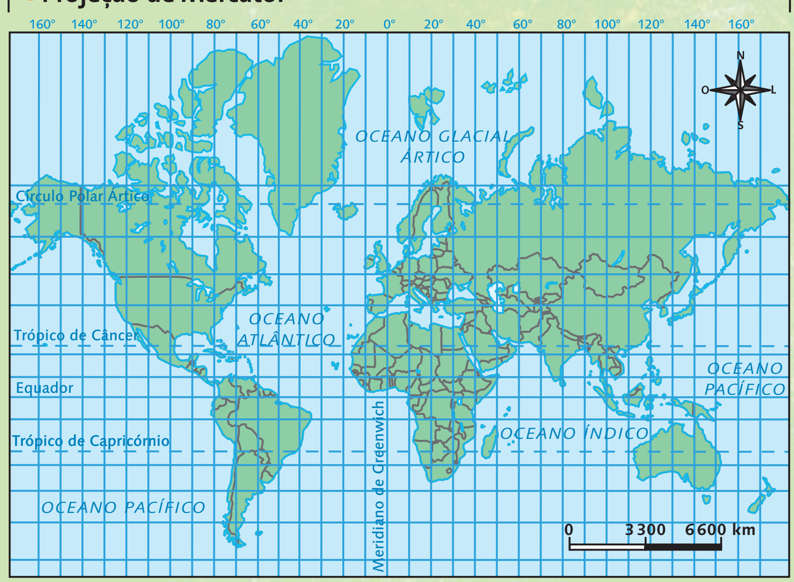
Os dois exemplos de mapas-múndi mais famosos e que utilizam projeções cilíndricas são conhecidos como projeções de Mercator e de Gall-Peters. Observe as diferenças entres esses dois mapas.

A importância da projeção de Mercator está no fato de ela preservar direções, ou seja, uma linha reta traçada entre dois pontos desse mapa fornece o mesmo ângulo a seguir em uma bússola para viajar entre esses dois pontos pelo oceano.

Projeção cartográfica: representação de uma superfície curva em um plano

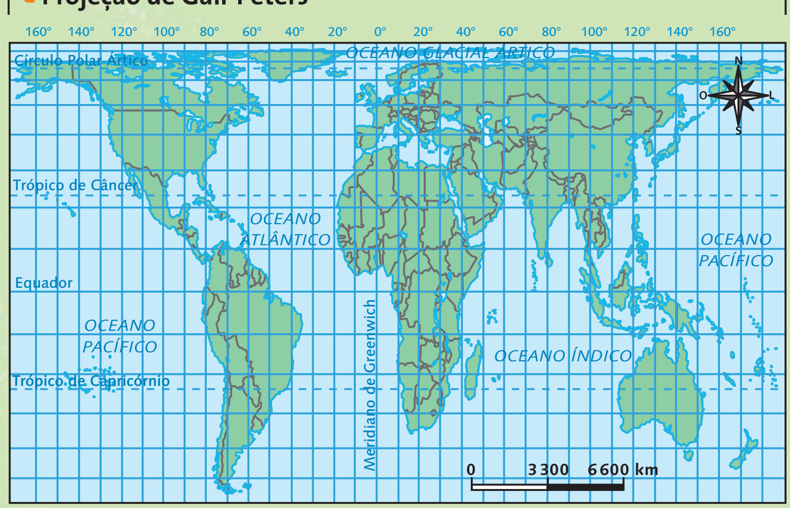
Observação
Não existe uma projeção melhor ou pior. Cada uma delas é utilizada de acordo com necessidades e objetivos específicos.

Projeção de Mercator



Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro, 2018.

Projeção de Gall-Peters



Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro, 2018.

Resposta pessoal. Possível resposta: a esfera seria envolvida por um cone que a intersecta em apenas um ou dois paralelos.

Analisando a projeção de Gall-Peters, percebemos que os continentes aparentam estar esticados. Isso ocorre porque o objetivo dessa projeção é preservar as áreas, e com isso as formas dos continentes sofrem distorções, ou seja, há deformação de ângulos.

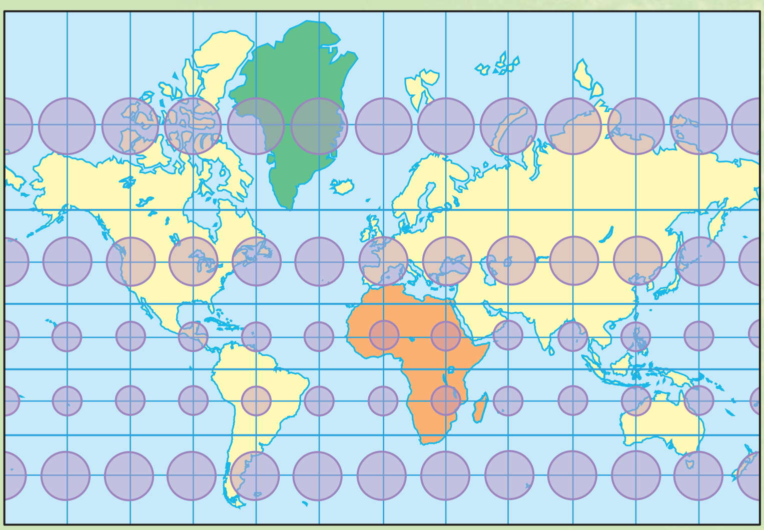
Por outro lado, a projeção de Mercator preserva a forma dos países, porém não preserva as áreas. A área da Groenlândia no mapa, por exemplo, tem aproximadamente a mesma área da África, mas na realidade essas duas áreas são muito diferentes.

Considere vários círculos congruentes representados no globo. Projetando esses círculos nos mapas de Mercator e de Gall-Peters, é possível ter uma ideia das distorções que ocorrem em diferentes regiões.

a Em sua opinião, de que maneira seria possível projetar a superfície de uma esfera em um cone?

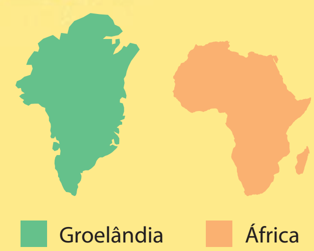
b Além da projeção cilíndrica, existem outros tipos de projeção cartográfica. Realize uma pesquisa e verifique quais são eles. Depois, compartilhe o resultado de sua pesquisa com os colegas de sala e o professor.
Resposta pessoal. Espera-se que, ao fazer a pesquisa, os alunos tenham um primeiro contato com as principais projeções cartográficas existentes.

Distorções nas projeções de Mercator e de Gall-Peters



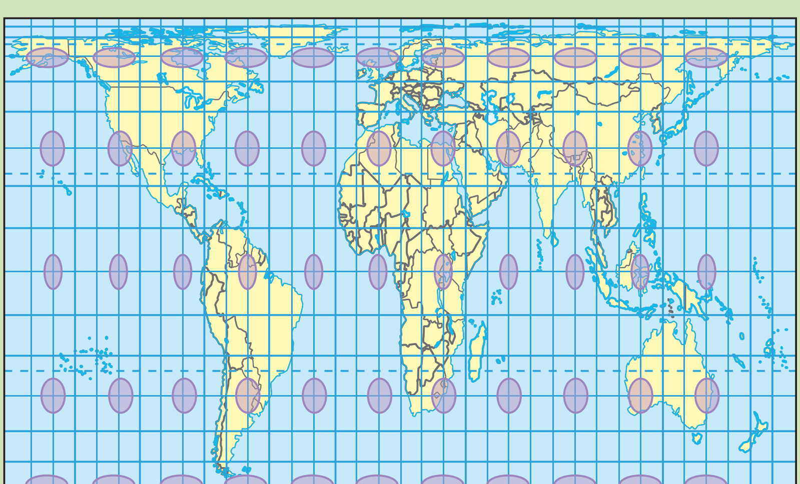
Projeção de Mercator.

Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro, 2018.



Na projeção de Mercator, a área da Groenlândia aparece 14 vezes maior do que realmente é.

Leandro Lassmar



Projeção de Gall-Peters.

Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro, 2018.

Ilustrações: Keithy Mostachi

O objetivo das imagens desta página é comparar as distorções que ocorrem nas projeções de Mercator e Gall-Peters. Por isso, não foram incluídos elementos cartográficos, tais como escala, rosa dos ventos, nomes de oceanos e as linhas dos trópicos e do Equador.

Conectando ideias

Veja comentários e sugestões na Assessoria pedagógica.

Imprimindo objetos

Aparelhos auditivos, partes de aeronaves, próteses dentárias e até mesmo carne vegetariana são apenas alguns exemplos de objetos que podem ser impressos por uma impressora 3D. Atualmente, as mais simples podem ser compradas por um preço inferior ao de *smartphones* de última geração.

Como funciona uma impressora 3D?

Existem vários tipos, mas a mais utilizada atualmente é a tecnologia chamada estereolitografia. Veja como é o seu funcionamento.

As imagens não estão representadas em proporção.

DIFERENTES TECNOLOGIAS DE IMPRESSORAS 3D

Extrusão

Um extrusor libera um material plástico aquecido construindo cada camada do objeto a ser impresso.

DLP

Similar às impressoras estereolitográficas, utiliza fonte de luz no lugar do *laser*.

SLS

Capaz de criar objetos de materiais diversos, como vidro, cerâmica, *nylon* e metal.

Fonte de pesquisa: TECHTUDO. *Entenda como funcionam os diferentes tipos de impressoras 3D*. Disponível em: <https://www.techtudo.com.br/listas/noticia/2016/02/entenda-como-funcionam-os-diferentes-tipos-de-impressoras-3d.html>. Acesso em: 4 jun. 2020.

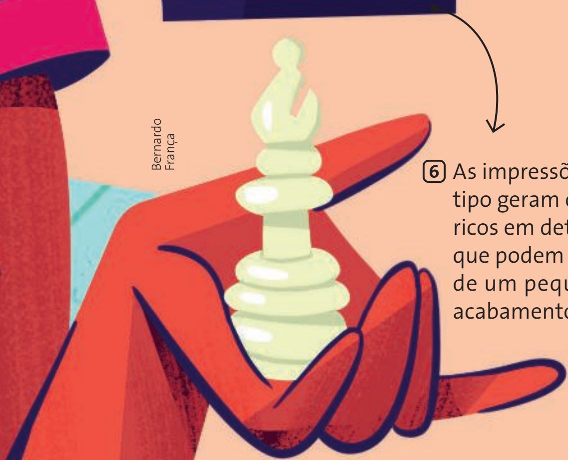
1 Um desenho em três dimensões do objeto que se quer construir, feito por um *software*, é enviado à impressora.

2 Para a impressão de um material de plástico, a resina líquida é colocada na cuba

3 A plataforma desce até a camada da resina.

4 O *laser* atinge a resina aplicando calor nos pontos da primeira camada de impressão. Esses pontos são endurecidos, gerando o formato da primeira camada do objeto a ser impresso.

5 O objeto é construído camada por camada, da base para o topo.



6 As impressões desse tipo geram objetos ricos em detalhes, mas que podem precisar de um pequeno acabamento ao final.

Bernardo França

a) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos associem a maneira como os objetos são impressos à ideia de planos, pois, à medida que esses planos são formados, a impressora os sobrepõe para que, ao final do processo, todo o objeto seja aquecido, juntando assim todos os planos.

b) Resposta pessoal. Possível resposta: vantagens: a possibilidade de construir os mais variados objetos para uso pessoal e entretenimento; desvantagens: alto custo de aquisição da impressora 3D, bem como a reposição dos plásticos e resinas para o funcionamento.

a De que maneira os conceitos abordados neste capítulo estão relacionados à impressão 3D?

b Realize uma pesquisa e cite uma vantagem e uma desvantagem de possuir uma impressora 3D em casa.

CAPÍTULO 2

Poliedros

Blackregis/Shutterstock.com

Ficha de habilidade de um jogo de RPG e os diferentes tipos de dados utilizados no decorrer do jogo.

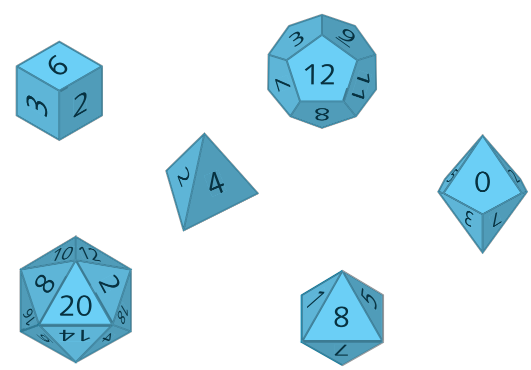
Jogos de RPG

O *role-playing game* (RPG) é um tipo de jogo em que os participantes assumem papéis de personagens e elaboram narrativas.

Atualmente chamado *Dungeons and Dragons*, o primeiro jogo de RPG de mesa surgiu em 1971, nos Estados Unidos, e é um dos mais conhecidos da categoria. Estudos sugerem que jogar RPG ajuda na aprendizagem por estimular a imaginação e a cooperatividade.

Para jogar uma partida de RPG de mesa, é necessário um grupo de pessoas. O jogo é uma história repleta de aventuras imaginadas em um cenário preestabelecido, como na era medieval, no espaço, em um período histórico específico etc. O jogo é narrado pelo mestre, que conduz a história, enquanto os outros participantes interpretam um personagem e cada um deles possui uma ficha de habilidades. As habilidades estão, geralmente, associadas a números. Quando um personagem executa uma ação, um dado é lançado e, com base nesses números, é determinado se a ação foi bem-sucedida ou não. Se a ação for um ataque, por exemplo, os dados determinam a quantidade de danos causados ao oponente.

Vários tipos de dados são utilizados no jogo. Eles têm vários formatos e diferentes quantidades de faces. É comum utilizar D4 para se referir a um dado de 4 faces, D6 para um dado de 6 faces, e assim por diante.



Rafael L. Gaion

a Você conhece ou já jogou alguma partida de RPG de mesa? Se sim, qual? Resposta pessoal.

b Segundo o texto, o dado D4 se assemelha a qual figura geométrica espacial? E o D6? pirâmide de base triangular ou tetraedro; cubo

c Em sua opinião, por que são usados diferentes dados para jogar uma partida de RPG? Resposta pessoal. Possível resposta: para determinar diferentes intensidades de danos em ataques.

1 Introdução

Veja comentários e sugestões nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.

BNCC
- CG 1
- CG 2
- CG 5
- CEMT 3
- CEMT 5
- EM13MAT309
- EM13MAT315
- EM13MAT504
- EM13MAT505

Desde os tempos mais remotos, o ser humano tem apresentado certo fascínio pelas obras arquitetônicas. Em uma busca incessante pela beleza e perfeição das construções, verdadeiras obras de arte foram edificadas no decorrer da História.

Das pirâmides egípcias, passando pelos monumentos da Idade Média, até chegar às modernníssimas construções de nosso tempo, a forma sempre obteve atenção especial dos arquitetos.

S. Vincent/Shutterstock.com

A grande pirâmide de Quéops (Gizé), localizada próximo à cidade do Cairo, Egito, foi construída por volta de 2600 a.C. É a maior e mais antiga das três pirâmides, situadas no deserto, com uma medida de altura de 147 m. Fotografia de dezembro de 2019.

O Castelo de Santa Maria da Feira, em Portugal, foi construído entre 1028 e 1037 e, por volta de 1117, passou a proteger uma feira muito importante para a economia da região, motivo pelo qual recebeu esse nome.
É um dos mais notáveis monumentos portugueses, visto que espelha a diversidade de recursos utilizados visando à proteção entre os séculos XI e XVI. Fotografia de outubro de 2017.

StockPhotosArt/Shutterstock.com

HenriqueWestin/Shutterstock.com

O Obelisco do Ibirapuera, inaugurado em São Paulo, em 1955, é um monumento com altura medindo 72 m que homenageia os heróis da Revolução Constitucionalista de 1932. Dentro dele, há um mausoléu que guarda as cinzas de quatro estudantes mortos durante um protesto contra o primeiro governo Vargas, além das cinzas de outros 713 ex-combatentes. Fotografia de dezembro de 2018.

Rafael Gallardo

Muitas dessas construções, como as apresentadas acima, têm o formato de poliedro. Neste capítulo, iremos estudar alguns poliedros, assim como suas características e propriedades.

As imagens não estão representadas em proporção.

Conversando

a) Você já viu ou conhece algum monumento ou construção cujas linhas e formatos são interessantes? Quais figuras geométricas espaciais elas lembram? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos mencionem edifícios, casas, mesquitas, pirâmides, torres etc.; lembram paralelepípedos, pirâmides, cubos etc.

b) As construções apresentadas ou partes delas lembram figuras geométricas espaciais que você provavelmente já estudou. Como se chamam essas figuras?
Possíveis respostas: pirâmide de base quadrada, cone, paralelepípedo, prisma.

c) Quais características essas figuras geométricas espaciais têm em comum?
Possível resposta: a pirâmide, o paralelepípedo e o prisma possuem todas as faces planas.

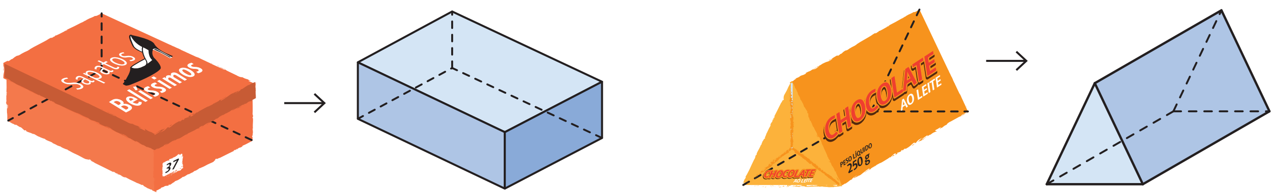
d) Cite alguns objetos que tenham formatos parecidos com os dos monumentos e construções apresentados anteriormente.

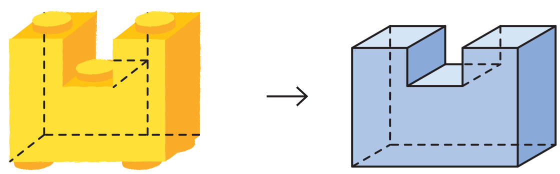
Possíveis respostas: paralelepípedos: caixa, potes, tijolos etc.; cone: chapéu de aniversário, casquinha de sorvete, cone de sinalização etc; pirâmide: objeto de decoração, pedra preciosa.

2 Poliedros

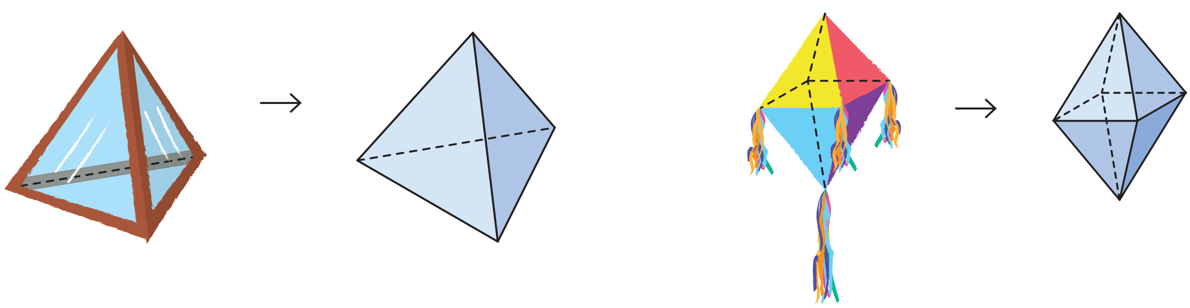
Se possível, reproduza e distribua aos alunos as planificações da superfície de alguns poliedros que se encontram nesta página, a fim de que possam montá-los e utilizá-los ao longo do capítulo.

Observe os seguintes objetos que lembram figuras geométricas espaciais.





As imagens não estão representadas em proporção.



Considere uma reunião finita de polígonos, em que:

- a interseção de dois polígonos é um lado comum ou um vértice comum ou é vazia;
- cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.

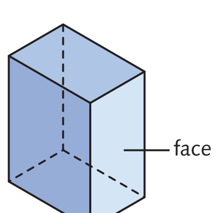
Nessas condições, os polígonos delimitam uma região do espaço. A reunião dos polígonos com essa região é chamada **poliedro**.

Observação

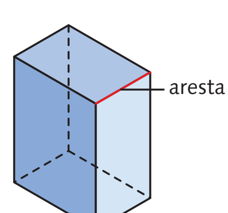
Região poligonal é a reunião de um polígono e todos os seus pontos interiores. Neste volume, vamos utilizar a palavra **polígono** para nos referir tanto aos polígonos quanto às regiões poligonais.

A origem da palavra poliedro é grega. Nela, "poli" significa muitos(as) e "edro", face, isto é, poliedro significa "muitas faces". Em um poliedro, podemos destacar os seguintes elementos:

- **faces**: são os polígonos que limitam os poliedros. Todo poliedro tem uma quantidade finita de faces.



- **aresta**: é o nome dado a cada lado de uma face do poliedro. Cada aresta de um poliedro é comum a somente duas faces.

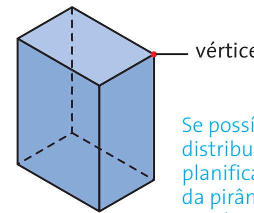


Ilustrações: Rafael L. Gaion

Observação

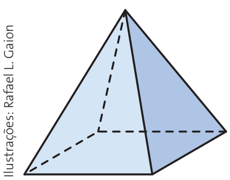
Dados os conjuntos *A* e *B*, chamamos de união (reunião) de *A* e *B* o conjunto formado pelos objetos que são elementos de *A* ou de *B*.

- **vértice**: é cada um dos pontos de interseção de três ou mais arestas. O vértice de cada face também é um vértice do poliedro.

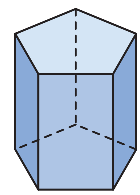


Veja a quantidade de faces, arestas e vértices dos poliedros representados a seguir.

Ilustrações: Rafael L. Gaion



5 faces
8 arestas
5 vértices



7 faces
15 arestas
10 vértices

Se possível, reproduza e distribua aos alunos as planificações da superfície da pirâmide de base quadrada e do prisma de base pentagonal apresentados nesta página, a fim de que possam montá-los e utilizá-los ao longo do capítulo.

De acordo com a quantidade de faces, podemos nomear os poliedros da seguinte maneira:

Quantidade de faces	Nome do poliedro	Quantidade de faces	Nome do poliedro
4	Tetraedro	10	Decaedro
5	Pentaedro	11	Undecaedro
6	Hexaedro	12	Dodecaedro
7	Heptaedro	13	Tridecaedro
8	Octaedro	...	...
9	Eneaedro	20	Icosaedro

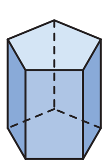
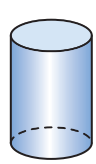
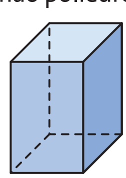
Veja na Assessoria pedagógica sugestões e comentários de trabalho com esta página.

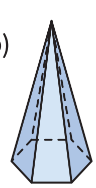
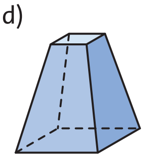
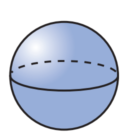
Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

1. poliedros: a, b, d e e; não poliedros: c e f.

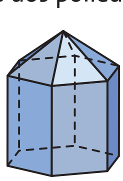
1. Observe as figuras geométricas espaciais e classifique cada uma delas em poliedro ou não poliedro.

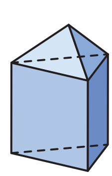
a) 
c) 
e) 

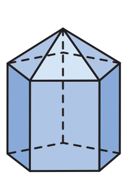
b) 
d) 
f) 

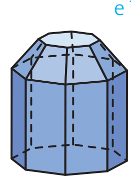
Ilustrações: Rafael L. Gaion

2. Determine a quantidade de faces, arestas e vértices dos poliedros.

a) 
13 faces, 24 arestas e 13 vértices

c) 
7 faces, 12 arestas e 7 vértices

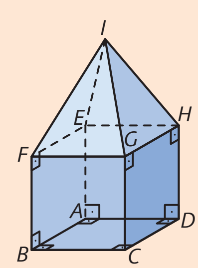
b) 
11 faces, 20 arestas e 11 vértices

d) 
18 faces, 40 arestas e 24 vértices

Ilustrações: Sergio L. Filho

Em grupo

3. Considerem o poliedro representado.



Rafael L. Gaion

a) Determinem a quantidade de faces, arestas e vértices desse poliedro. 9 faces, 16 arestas e 9 vértices

b) Classifiquem esse poliedro de acordo com a quantidade de faces. eneaedro

c) A face *IGH* tem o formato de qual figura geométrica plana? triângulo

d) Determinem a posição relativa entre as retas que contêm as arestas:

- $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ paralelas
- $\overline{EH}$ e $\overline{HI}$ concorrentes
- $\overline{FG}$ e $\overline{AB}$ reversas

e) Escrevam a quantidade de arestas comuns ao vértice:

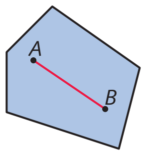
- *A* 3 arestas
- *E* 4 arestas
- *I* 4 arestas

Veja na Assessoria pedagógica sugestões e comentários de trabalho com esta página.

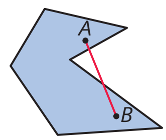
3 Poliedros convexos e não convexos

Polígonos convexos

Um polígono é dito **convexo** quando um segmento de reta que liga dois pontos quaisquer desse polígono está inteiramente contido nele.



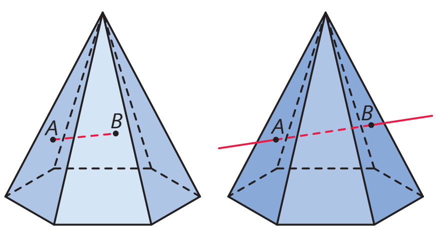
Esse polígono é convexo, pois o segmento de reta que liga quaisquer dois de seus pontos está contido nele.



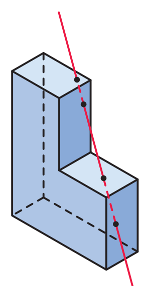
Esse polígono é não convexo, pois existe pelo menos um segmento de reta que liga dois de seus pontos que não está inteiramente contido nele.

Poliedros convexos

Dizemos que um poliedro é convexo quando um segmento de reta que liga quaisquer dois de seus pontos está inteiramente contido nele. Além disso, um poliedro é convexo se toda reta não paralela a nenhuma das faces corta suas faces em dois pontos no máximo.



poliedros convexos

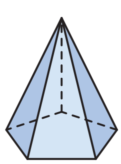


Este poliedro é não convexo, pois existe pelo menos uma reta não paralela a nenhuma de suas faces que corta suas faces em mais de dois pontos; nesse caso, quatro pontos.

Se possível, reproduza e distribua aos alunos a planificação da superfície da pirâmide de base hexagonal apresentada nesta página, a fim de que possam montá-la e utilizá-la ao longo do capítulo.

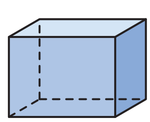
Relação de Euler

Observe a quantidade de vértices, faces e arestas de cada poliedro abaixo.



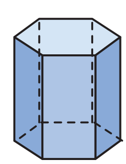
6 vértices
6 faces
10 arestas

poliedro I



8 vértices
6 faces
12 arestas

poliedro II



12 vértices
8 faces
18 arestas

poliedro III

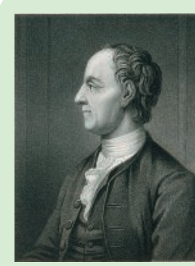
Em cada um desses poliedros, a quantidade de vértices *V* mais a quantidade de faces *F* é igual à quantidade de arestas *A* mais 2, isto é:

Poliedro I	$\underbrace{6}_{V} + \underbrace{6}_{F} = \underbrace{10}_{A} + 2 \Rightarrow 12 = 12$
Poliedro II	$\underbrace{8}_{V} + \underbrace{6}_{F} = \underbrace{12}_{A} + 2 \Rightarrow 14 = 14$
Poliedro III	$\underbrace{12}_{V} + \underbrace{8}_{F} = \underbrace{18}_{A} + 2 \Rightarrow 20 = 20$

Podemos escrever essa relação da seguinte maneira:

$$V + F = A + 2 \quad \text{ou} \quad V + F - A = 2$$

Essa relação, conhecida como **relação de Euler**, em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), pode ser demonstrada; no entanto, isso não será feito neste livro.



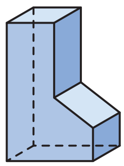
Leonhard Euler, no século XVIII.

Segundo a História, Euler foi o matemático mais prolífero de todos os tempos, ou seja, que mais produziu. Quando completou 59 anos, ficou completamente cego e, mesmo assim, produziu muitos trabalhos. Em vida, Euler teve cerca de quinhentos livros publicados.

Fonte de pesquisa: EVES, Horward. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

A relação de Euler é válida para todo poliedro convexo e também para alguns poliedros não convexos.

Veja a aplicação dessa relação no poliedro não convexo abaixo:


Sergio L. Filho

12 vértices
8 faces
18 arestas

$$V + F - A = 2 \Rightarrow \overbrace{12 + 8 - 18}^{2} = 2$$

(relação verdadeira)

Observação

Os poliedros para os quais vale a relação de Euler são chamados **poliedros eulerianos**.

Assim, podemos dizer que todos os poliedros convexos são eulerianos, mas nem todo poliedro euleriano é convexo.

Problemas e exercícios resolvidos

R1. Qual é a quantidade de faces de um poliedro convexo que tem 30 arestas e 12 vértices?

Resolução

Aplicando a relação de Euler, temos: $V + F - A = 2 \Rightarrow 12 + F - 30 = 2 \Rightarrow F = 20$

R2. Em um hexaedro convexo, 2 faces são triangulares e 4 faces são quadrangulares. Quantos vértices tem esse poliedro?

Resolução

Quantidade de arestas:

- 2 faces triangulares: $2 \cdot 3 = 6$
- 4 faces quadrangulares: $4 \cdot 4 = 16$

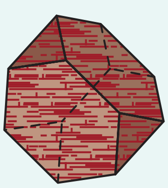
Como cada aresta é comum a 2 faces, a quantidade de arestas do hexaedro é dada por:

$$A = \frac{6 + 16}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

Aplicando a relação de Euler, obtemos o total de vértices do hexaedro.

$$V + F - A = 2 \Rightarrow V + 6 - 11 = 2 \Rightarrow V = 7$$

R3. Um artesão fez uma peça de madeira formada por 4 faces hexagonais e 4 triangulares, como mostra a figura ao lado. Quantos vértices e arestas tem essa peça?


Rafael L. Gaion

Resolução

Calculamos o total de faces e, depois, a quantidade de arestas de cada face.

Quantidade de faces:

$$F = 4 + 4 = 8$$

Quantidade de arestas das faces hexagonais:

$$\underbrace{4}_{\text{faces hexagonais}} \cdot 6 = 24$$

Quantidade de arestas das faces triangulares:

$$\underbrace{4}_{\text{faces triangulares}} \cdot 3 = 12$$

Como cada aresta é comum a duas faces, o total de arestas da peça é:

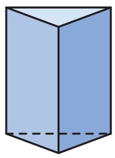
$$A = \frac{24 + 12}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

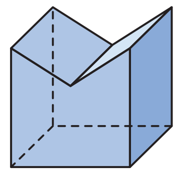
Substituindo o total de faces e o de arestas na relação de Euler, obtemos a quantidade de vértices.

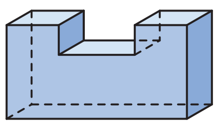
$$V + F - A = 2 \Rightarrow V + 8 - 18 = 2 \Rightarrow V = 12$$

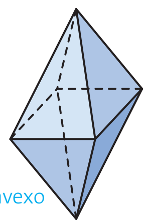
Portanto, a peça tem 18 arestas e 12 vértices.

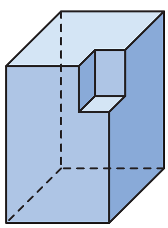
4. Classifique os poliedros em convexo ou não convexo.

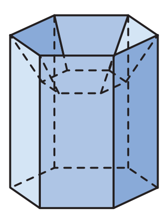
a) 
convexo

d) 
não convexo

b) 
não convexo

e) 
convexo

c) 
não convexo

f) 
não convexo

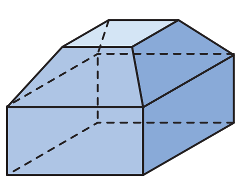
Ilustrações: Rafael L. Gaion

5. Em um poliedro convexo, a quantidade de arestas e a de faces são, respectivamente, 21 e 9. Qual é o total de vértices desse poliedro? 14

6. Determine a quantidade de faces de um poliedro convexo, sabendo que ele tem 12 arestas e 8 vértices. 6

7. Certo poliedro convexo tem 12 faces e 8 vértices. Quantas arestas tem esse poliedro? 18

8. Observe o poliedro.



Rafael L. Gaion

a) Qual é a quantidade de faces, arestas e vértices desse poliedro? 10 faces, 20 arestas e 12 vértices

b) A relação de Euler é válida para esse poliedro? Justifique sua resposta. Sim, pois, ao aplicar a relação de Euler, obtemos uma relação verdadeira.

9. (UFPI) Em um poliedro convexo, o número de arestas excede o de faces em 18. O número de vértices desse poliedro é: b

a) 10 b) 20 c) 24 d) 30 e) 32

10. Um poliedro convexo é composto por 10 faces triangulares. Qual é o total de vértices desse poliedro? 7

11. Certo poliedro convexo tem 20 faces, sendo 11 triangulares, 2 quadrangulares e 7 pentagonais. Determine a quantidade de arestas e vértices desse poliedro. 38; 20

Possível resposta: qual é a quantidade de faces, vértices e arestas do poliedro convexo com 6 faces? E do poliedro não convexo com 8 faces?

Você produtor

12. Desenhe um poliedro convexo de 6 faces e um não convexo de 8 faces. De acordo com os poliedros desenhados, elabore algumas questões e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se as resoluções estão corretas. Resposta pessoal.

13. (Ufpel-RS) No país do México, há mais de mil anos, o povo Asteca resolveu o problema da armazenagem da pós-colheita de grãos com um tipo de silo em forma de uma bola colocado sobre uma base circular de alvenaria. A forma desse silo é obtida juntando 20 placas hexagonais e mais 12 placas pentagonais. Veja na Assessoria pedagógica sugestão de trabalho com esta tarefa.

Emiliano Cavalcante

www.tibarose.com/port/boletim.htm, acessado em: 10/10/2007. [Adapt.]

Com base no texto, é correto afirmar que esse silo tem: a

a) 90 arestas e 60 vértices
b) 86 arestas e 56 vértices
c) 90 arestas e 56 vértices
d) 86 arestas e 60 vértices
e) 110 arestas e 60 vértices
f) I.R.

Diga aos alunos que a indicação I.R. no item f significa: "Ignoro a resposta". Nesse tipo de processo seletivo, o aluno tem a possibilidade dessa escolha por causa do método de pontuação, pois ao assinalá-la ele estará eliminando a possibilidade de ter pontos descontados, o que ocorrerá se uma das outras alternativas for marcada indevidamente.

14. Um poliedro convexo tem 16 arestas. Sabendo que o total de faces desse poliedro é igual ao de vértices, determine a quantidade de faces e vértices. 9

15. Determine a quantidade de arestas e de faces de um poliedro convexo, sabendo que este possui 12 vértices e que de cada vértice partem 3 arestas. 18; 8

16. Considere dois poliedros convexos, **A** e **B**, em que: a quantidade de faces de **B** é igual à quantidade de faces de **A** acrescido de 2 faces; o poliedro **A** tem somente faces quadradas, e **B**, somente faces triangulares; ambos têm a mesma quantidade de arestas. Determine a quantidade de arestas, vértices e faces de cada um desses poliedros.

17. Aline construiu o seguinte fluxograma para determinar a quantidade de faces, arestas e vértices de um poliedro convexo com 6 faces quadrangulares e 4 faces triangulares.

16. Poliedro **A**: 12 arestas, 8 vértices e 6 faces. Poliedro **B**: 12 arestas, 6 vértices e 8 faces.

Início

↓

Adicione as quantidades de faces quadrangulares e triangulares. O resultado é a quantidade de faces *F*.

↓

Multiplique a quantidade de faces triangulares por 3.

↓

Multiplique a quantidade de faces quadrangulares por 4 e adicione ao resultado do passo anterior.

↓

Divida o resultado obtido no passo anterior por 2. O resultado é a quantidade de arestas *A*.

↓

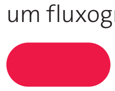
Adicione 2 ao valor de *A* e depois subtraia o valor de *F*. O resultado é a quantidade de vértices *V*.

↓

Fim

Observação

Veja alguns tipos de figuras utilizadas em um fluxograma e seus significados:



Indica o início e o fim do fluxograma.

Indica uma ação a ser executada.

Indica uma condição a ser verificada.

⟶ Indica o sentido do fluxo, conectando as figuras existentes.

O fluxograma que Aline construiu só é válido para poliedros que possuem faces triangulares e quadrangulares. Além disso, nesse caso, ele não indica uma condição a ser verificada, mas apenas ações a serem executadas. Seguindo os passos desse fluxograma, determine a quantidade de faces, arestas e vértices do poliedro descrito por Aline.
10 faces, 18 arestas e 10 vértices

18. Um **algoritmo** é uma sequência finita de passos ou instruções para resolver determinado problema. Para elaborar um algoritmo, devemos inicialmente ler o enunciado do problema, compreendendo e destacando as principais informações. Depois, devemos responder às seguintes questões:

- De acordo com o problema, quais são os dados de entrada?
- Qual ou quais serão os dados de saída, isto é, os dados que serão fornecidos após a realização das etapas do algoritmo?
- Tendo em mente os dados de entrada e de saída, quais são os procedimentos a serem executados?

Tendo em mente as respostas dessas perguntas, Paulo escreveu o seguinte algoritmo, que determina a quantidade de vértices de um poliedro convexo formado por 2 faces quadradas, 4 faces triangulares e 1 face hexagonal. Porém, uma das etapas desse algoritmo ficou oculta.

Início

1. Adicione as quantidades de faces quadrangulares, triangulares e hexagonais. O resultado é a quantidade de faces *F*.
2. Multiplique a quantidade de faces triangulares por 3.
3. Multiplique a quantidade de faces quadrangulares por 4 e adicione ao resultado do passo anterior.
4. Multiplique a quantidade de faces hexagonais por 6 e adicione ao resultado do passo anterior.
5. Divida o resultado obtido no passo anterior por 2. O resultado é a quantidade de ______.
6. Adicione 2 ao valor de *A* e depois subtraia o valor de *F*. O resultado é a quantidade de vértices *V*.

Fim

Observação

O algoritmo que Paulo escreveu só é válido para poliedros que possuem faces triangulares, quadrangulares e hexagonais.

a) Após a execução da etapa 5, qual resultado será fornecido? A quantidade de arestas *A*.

b) Utilizando o algoritmo que Paulo escreveu, determine a quantidade de vértices do poliedro descrito. 8 vértices

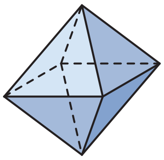
c) De acordo com o algoritmo apresentado, construa um fluxograma parecido com o da tarefa anterior. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

4 Poliedros de Platão

Um poliedro convexo é chamado **poliedro de Platão** se, e somente se, satisfaz as condições a seguir.

- Todas as faces têm a mesma quantidade n de arestas.
- De cada vértice do poliedro parte a mesma quantidade m de arestas.
- Vale a relação de Euler.

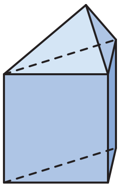
Exemplo



O poliedro ao lado é de Platão, pois:

- todas as faces têm 3 arestas, isto é, $n = 3$;
- de cada vértice partem 4 arestas, isto é, $m = 4$;
- a relação de Euler é válida:

$$V + F - A = 2 \Rightarrow 6 + 8 - 12 = 2$$



Ilustrações: Sergio L. Filho

Na imagem ao lado, o poliedro não é de Platão, pois há faces com quantidades diferentes de arestas: 3 faces com 4 arestas e 4 faces com 3 arestas. Além disso, a quantidade de arestas que partem de alguns vértices é diferente em relação aos demais.

Podemos destacar a seguinte propriedade dos poliedros de Platão:

Existem 5, e somente 5, classes de poliedros de Platão.

Seja um poliedro de Platão em que:

- n é a quantidade de arestas de cada face;
- m é a quantidade de arestas que partem de cada vértice;
- V, A e F representam a quantidade de vértices, arestas e faces, respectivamente.

Como cada uma das F faces tem n arestas, sendo $n \geqslant 3$, e como cada aresta é comum a 2 faces, temos:

$$A = \frac{n \cdot F}{2} \Rightarrow F = \frac{2 \cdot A}{n} \quad \text{(I)}$$

A quantidade de arestas que partem de cada vértice é m, sendo $m \geqslant 3$. No entanto, a cada aresta pertencem 2 vértices. Dessa maneira:

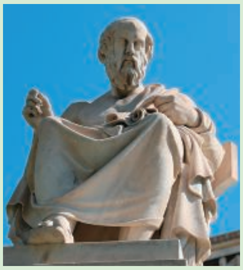
$$A = \frac{m \cdot V}{2} \Rightarrow V = \frac{2 \cdot A}{m} \quad \text{(II)}$$

Substituindo I e II na relação de Euler e dividindo os dois membros da igualdade por $2A$, temos:

$$V + F - A = 2 \Rightarrow \frac{2 \cdot A}{m} + \frac{2 \cdot A}{n} - A = 2 \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{A}$$

Como $A > 0$, então $\frac{1}{A} > 0$. Assim, segue que:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} > 0$$



Joyce Nelson/Shutterstock.com

Estátua de Platão, em Atenas, Grécia, em maio de 2019.

Platão (427-347 a.C.), de Atenas, na Grécia, foi um grande admirador da geometria, tanto que na fachada de sua instituição, a Academia, orientada por propósitos de investigação científica e filosófica, havia os dizeres: *Que aqui não adentrem aqueles não versados em geometria*. Em seus trabalhos, apresentou uma descrição mística de cinco poliedros, chamados de Poliedros de Platão (tetraedro, cubo, dodecaedro, octaedro e icosaedro), relacionando-os com elementos da natureza (fogo, terra, universo, ar e água, respectivamente).

Fonte de pesquisa: EVES, Horward. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

Observação

Temos $n \geqslant 3$ e $m \geqslant 3$, visto que, se n e m forem menores do que 3, não é possível obter um polígono e um poliedro respectivamente.

Supondo que as faces sejam triangulares, temos $n = 3$. Nesse caso:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{6} > 0 \Rightarrow m < 6$$

Assim, para $n = 3$, m pode ser 3, 4 ou 5, pois $m \geqslant 3$.

n	*m*
3	3
3	4
3	5

faces triangulares

Supondo que as faces sejam quadrangulares, temos $n = 4$. Nesse caso:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow m < 4$$

Assim, $m = 3$.

n	*m*
4	3

— faces quadrangulares

Supondo que as faces sejam pentagonais, temos $n = 5$. Nesse caso:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{3}{10} > 0 \Rightarrow m < \frac{10}{3} \simeq 3{,}33$$

Assim, $m = 3$.

n	*m*
5	3

— faces pentagonais

Arquimedes (287-212 a.C.), de Siracusa, na Grécia, figura entre os maiores matemáticos da Antiguidade e de todos os tempos. Explorou tanto a geometria, que desejou que em seu túmulo fosse gravada a figura de uma esfera inscrita em um cilindro circular reto. Uma das grandes aplicações das descobertas de Arquimedes foi o poliedro que inspirou o formato da bola de futebol, utilizada pela primeira vez na Copa do Mundo de 1970, no México. Ele é composto por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, todas regulares.

Alexapicso/Shutterstock.com

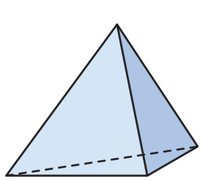
Bola de futebol inspirada no poliedro descoberto por Arquimedes.

Fonte de pesquisa: EVES, Horward. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

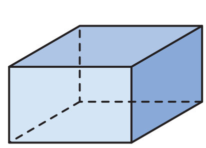
Para $n \geqslant 6$, sempre obtemos $m < 3$, o que é impossível, pois é necessário que $m \geqslant 3$.
Portanto, há ao todo 5 classes de poliedros de Platão.

n	*m*	*V*	*A*	*F*	Nome do poliedro de Platão
3	3	4	6	4	Tetraedro
3	4	6	12	8	Octaedro
3	5	12	30	20	Icosaedro
4	3	8	12	6	Hexaedro
5	3	20	30	12	Dodecaedro

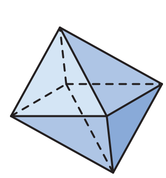
Veja a seguir exemplos de poliedros de Platão.



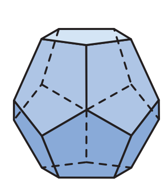
tetraedro



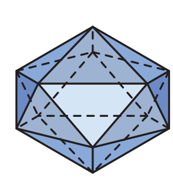
hexaedro



octaedro



dodecaedro



icosaedro

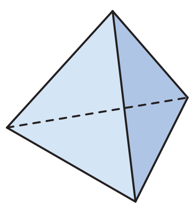
Ilustrações: Sergio L. Filho

Poliedros regulares

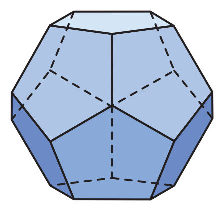
Um poliedro convexo é **regular** se suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si. Além disso, de cada vértice desse poliedro deve partir a mesma quantidade de arestas.

Exemplos

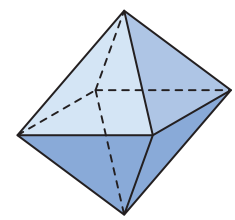
1.



tetraedro regular



dodecaedro regular

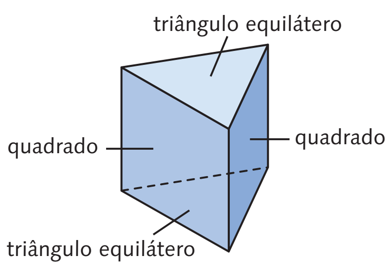


octaedro regular

Ilustrações: Sergio L. Filho

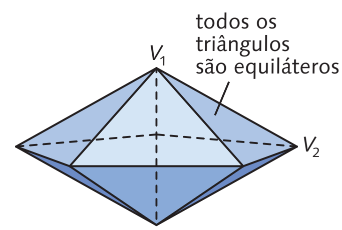
Os poliedros representados são regulares, pois as faces são polígonos regulares e congruentes entre si e, de cada vértice, parte a mesma quantidade de arestas.

2.



Esse poliedro é não regular, pois, apesar de as faces serem polígonos regulares, elas não são congruentes entre si.

3.

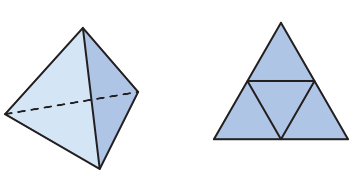


Ilustrações: Rafael L. Gaion

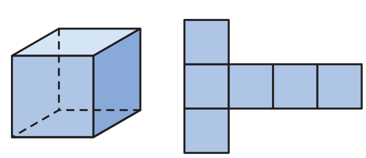
Esse poliedro também é não regular, pois, apesar de as faces serem polígonos regulares, a quantidade de arestas que partem do vértice V_1 é diferente da quantidade de arestas que partem de V_2.

Se possível, reproduza e distribua aos alunos as planificações das superfícies dos poliedros regulares, apresentados nesta página, a fim de que possam montá-los.

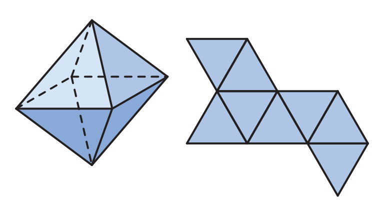
Nas imagens a seguir estão representados os cinco poliedros regulares possíveis e as planificações (reduzidas) das respectivas superfícies.



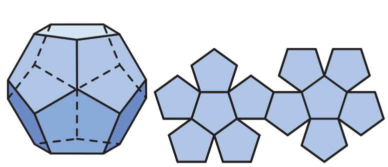
tetraedro regular



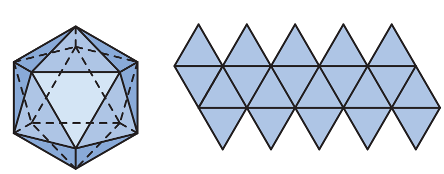
hexaedro regular (cubo)



octaedro regular



dodecaedro regular



icosaedro regular

Ilustrações: Sergio L. Filho

Observação

Todo poliedro regular é um poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é regular. Além disso, vale destacar que não é possível planificar um sólido. Em alguns casos, como os poliedros regulares apresentados, podemos planificar sua superfície.

Problemas e exercícios resolvidos

R4. Classifique em verdadeira ou falsa cada afirmação, justificando sua resposta em cada caso.

a) O octaedro regular é um poliedro de Platão.

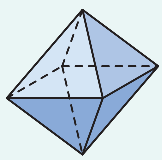
b) As faces de um dodecaedro regular são triângulos equiláteros.

c) Um poliedro convexo é regular quando suas faces são polígonos regulares e não congruentes entre si.

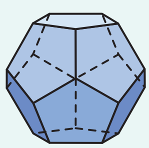
d) A relação de Euler é válida somente para poliedros convexos.

Resolução

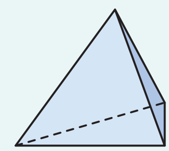
a) Verdadeira, pois o octaedro regular possui todas as faces com o mesmo número de arestas, de cada vértice parte o mesmo número de arestas e a relação de Euler é válida, ou seja, é um poliedro de Platão.



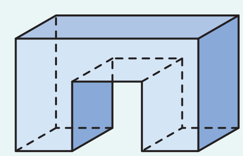
b) Falsa, pois o dodecaedro regular tem como faces 12 pentágonos regulares.



c) Falsa, pois um poliedro convexo é regular quando suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si.



d) Falsa, pois a relação de Euler é válida também para alguns poliedros não convexos, como o apresentado abaixo.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Nesse caso, a relação $V + F = A + 2$ é verdadeira.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

19. Qual poliedro de Platão tem o número de vértices igual ao número de faces? tetraedro

Em grupo

20. (UEL-PR) Todo poliedro convexo satisfaz o teorema de Euler, cuja expressão é $V + F - A = 2$, em que V, F e A representam, respectivamente, o número de vértices, de faces e de arestas. Então, é correto afirmar: d

a) Todo poliedro que satisfaz o teorema de Euler é regular.

b) Todo poliedro que satisfaz o teorema de Euler é poliedro de Platão.

c) Todo poliedro que satisfaz o teorema de Euler é convexo.

d) Todo poliedro regular satisfaz o teorema de Euler.

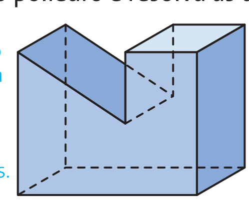
e) Todo poliedro convexo que satisfaz o teorema de Euler é regular.

21. Verifique a validade da relação de Euler para o dodecaedro regular. É válida.

22. A relação de Euler é válida para todo poliedro regular? Justifique sua resposta. Sim, pois todo poliedro regular é convexo, e para este a relação de Euler é válida.

23. Observe o poliedro e resolva as questões.

23. a) Não convexo. Existe uma reta não paralela a nenhuma de suas faces, que corta as faces em mais de 2 pontos, nesse caso, 4 pontos.



Rafael L. Gaion

a) Esse poliedro é convexo ou não convexo? Justifique sua resposta.

b) Determine o número de vértices, arestas e faces desse poliedro. vértices: 12; faces: 8; arestas: 18

c) Verifique se a relação de Euler é válida nesse poliedro. É válida.

Você produtor

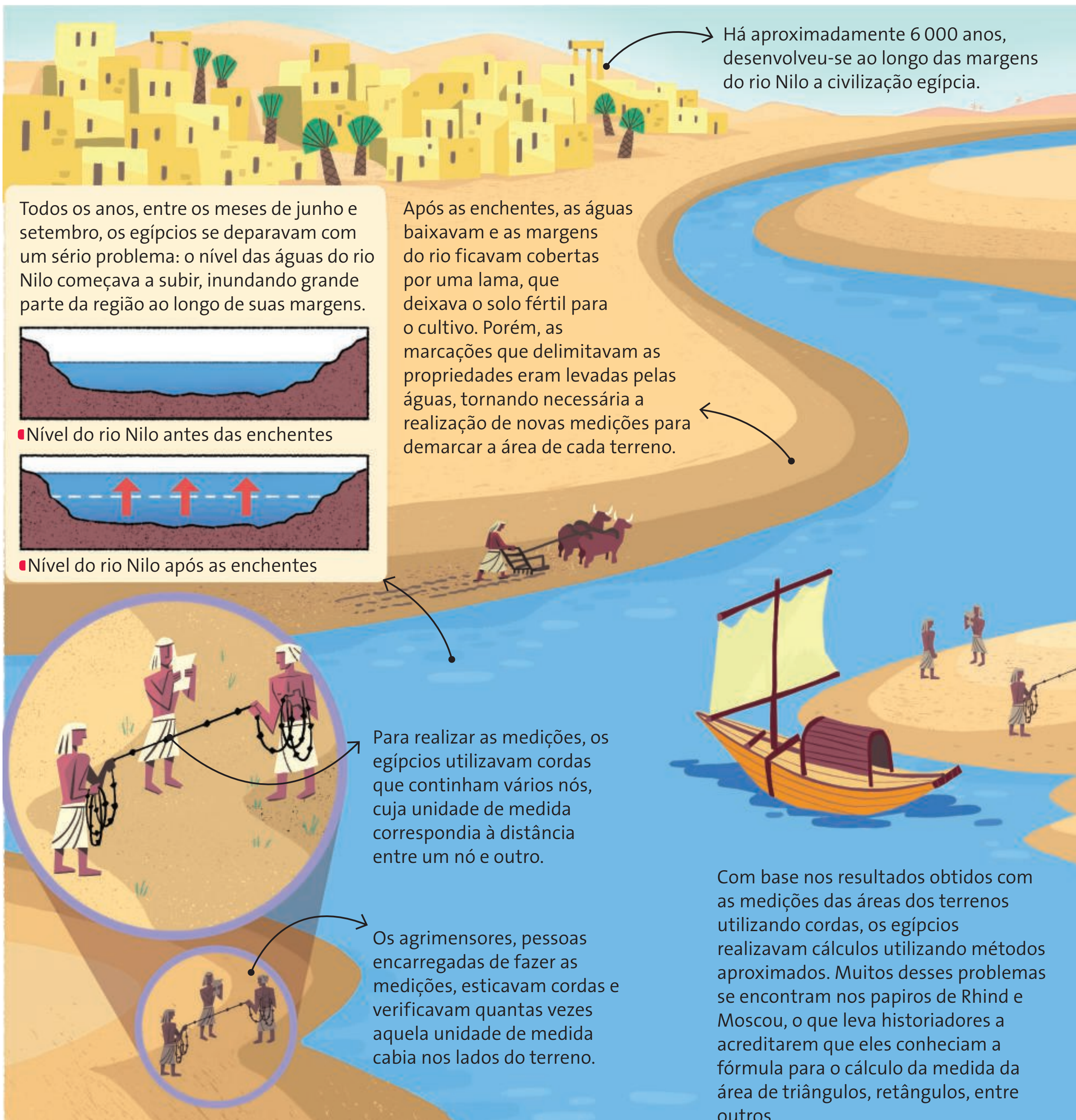
24. Elabore o enunciado de um problema envolvendo poliedros que tenha como resposta a frase.

O poliedro não é de Platão.

Resposta pessoal. Possível resposta: a bola de futebol inspirada no poliedro descoberto por Arquimedes pode ser representada por um poliedro formado por 20 faces hexagonais e 12 faces pentagonais. Esse poliedro pode ser considerado um poliedro de Platão?

5 Área de algumas figuras planas

Ao realizarmos medições, utilizamos a unidade de medida correspondente ao que estamos medindo. Por exemplo, quando desejamos medir a área de um salão, podemos expressar a medida obtida utilizando o metro quadrado (m^2). Os conceitos relacionados a área já eram utilizados há milhares de anos por vários povos, entre eles os egípcios. Veja a seguir como isso ocorria.

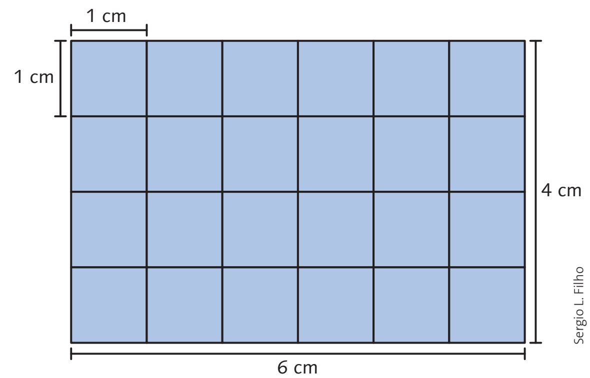


Bernardo França

Fonte de pesquisa: EVES, Horward. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

Neste tópico, vamos estudar como se calculam as medidas das áreas de alguns polígonos. Os resultados (relações) aqui obtidos serão utilizados em tópicos posteriores, nos quais abordaremos o cálculo da medida da área de superfície e de volume de figuras geométricas espaciais.

Área do quadrado e do retângulo



Na imagem ao lado, está representado um retângulo com 6 cm de comprimento e 4 cm de largura, dividido em quadradinhos cuja medida da área é 1 cm^2.

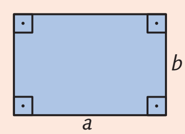
Para calcular o número de quadradinhos que compõem o retângulo, efetuamos o seguinte cálculo:

$$\underbrace{4}_{\text{quantidade de linhas}} \cdot \underbrace{6}_{\text{quadradinhos por linha}} = 24 \quad \text{ou} \quad \underbrace{6}_{\text{quantidade de colunas}} \cdot \underbrace{4}_{\text{quadradinhos por coluna}} = 24$$

Dessa maneira, são necessários 24 quadradinhos com área medindo 1 cm^2 para cobrir o retângulo. Portanto, a área desse retângulo mede 24 cm^2.

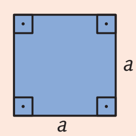
De modo geral:

Para calcular a área de um **retângulo**, basta multiplicar a medida de seu comprimento pela medida de sua largura.



$$A = a \cdot b$$

A área de um **quadrado** pode ser calculada de maneira semelhante. Como as dimensões do quadrado são iguais, temos:



$$A = a \cdot a \text{ ou } A = a^2$$

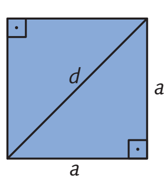
Observação

Para simplificar a escrita, neste capítulo:

- não faremos distinção entre grandezas e as respectivas medidas. Então, em situações do tipo "a área de um polígono", na verdade estamos nos referindo à "medida da área de um polígono".
- vamos dizer, em algumas situações, "segmento 10 cm" ou "10 cm de segmento" para nos referirmos ao segmento cujo comprimento mede 10 cm. Então, em vez de dizer "quadrado cuja medida do comprimento do lado é *a*" diremos simplesmente "quadrado de lado *a*", entre outras.

A área de um quadrado também pode ser calculada utilizando o comprimento de sua diagonal. Nesse caso, utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

Se necessário, relembre com os alunos o teorema de Pitágoras.



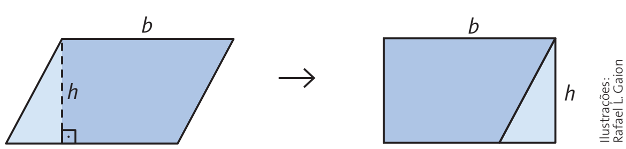
$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow \underbrace{a^2}_{A} = \frac{d^2}{2}$$

Portanto, a área de um quadrado de diagonal d é dada por $A = \dfrac{d^2}{2}$.

Para medir pequenas áreas, utilizamos o centímetro quadrado (cm^2), que corresponde a um quadrado com 1 cm de lado. Quando é necessário medir áreas maiores, utilizamos o quilômetro quadrado (km^2), que corresponde a área de um quadrado com 1 km de lado. Na fotografia, está destacado um quadrado com 1 km de lado, no qual, em seu interior encontra-se o estádio do Maracanã, no Rio de Janeiro (RJ), em abril de 2019.

Área do paralelogramo

Na imagem abaixo, temos um paralelogramo em que b corresponde ao comprimento da base e h, à medida da altura. Note que esse paralelogramo foi decomposto, e com suas partes foi formado um retângulo de mesma área.



Dessa maneira, temos:

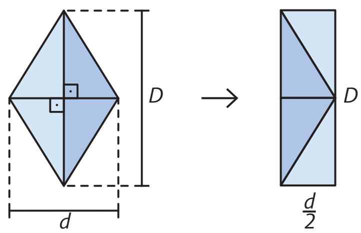
Se necessário, explique aos alunos que paralelogramo é todo quadrilátero que possui dois pares de lados paralelos, portanto, congruentes.

Para calcular a área do **paralelogramo**, basta multiplicar o comprimento de sua base pela medida de sua altura, isto é, $A = b \cdot h$.

Área do losango

Temos a seguir a representação de um losango em que D corresponde ao comprimento da diagonal maior e d, ao comprimento da diagonal menor. Note que esse losango foi decomposto, e com suas partes foi formado um retângulo de mesma área e com dimensões D e $\frac{d}{2}$.

Se necessário, explique aos alunos que losango é um quadrilátero convexo que possui os quatro lados com mesmo comprimento. Diga também que o quadrado é, ao mesmo tempo, retângulo e losango, pois possui todos os lados com o mesmo comprimento e todos os ângulos internos retos.



Área do retângulo: $A = D \cdot \frac{d}{2} = \frac{D \cdot d}{2}$

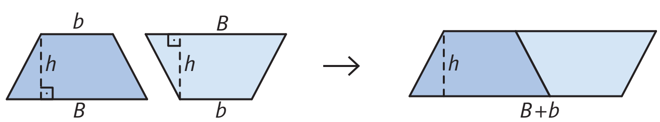
Em geral:

Para calcular a área do **losango**, basta multiplicar o comprimento de sua diagonal maior pelo comprimento de sua diagonal menor e dividir o resultado por 2, isto é, $A = \frac{D \cdot d}{2}$.

Área do trapézio

Na imagem temos um trapézio de altura h em que o comprimento da base maior é B e o comprimento da base menor é b. Com outro trapézio congruente a ele, podemos compor um paralelogramo de altura h e base com comprimento igual a $B + b$.

Se necessário, explique aos alunos que trapézio é todo quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Área do paralelogramo: $A_p = (B + b) \cdot h$

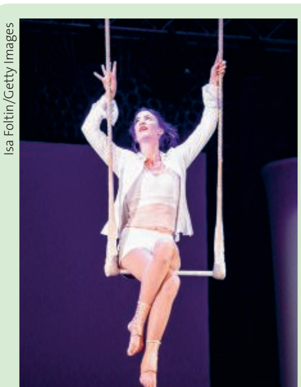
Para obtermos a área de um dos trapézios, dividimos a área do paralelogramo por 2, isto é:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Em geral:

Para calcular a área do **trapézio**, adicionamos o comprimento da base maior com o comprimento da base menor, multiplicamos a soma pela medida da altura e dividimos o resultado por 2, isto é, $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$.

Isa Foltin/Getty Images



Vários termos matemáticos estão presentes no cotidiano. O trapézio, por exemplo, está associado à arte circense, na qual os artistas realizam acrobacias em uma barra suspensa por dois cabos, fixados com uma abertura um pouco maior do que a da barra, cuja formação lembra o contorno de um trapézio. O corpo humano possui um músculo com esse nome, um dos responsáveis pelos movimentos dos membros superiores.

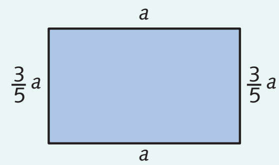
Artista em um trapézio.

Problemas e exercícios resolvidos

R5. O perímetro de um terreno retangular é 112 m e sua largura é $\frac{3}{5}$ de seu comprimento. Calcule a área desse terreno.

Resolução

Indicando por *a* o comprimento do terreno, podemos representá-lo da seguinte maneira:



Rafael L. Gaion

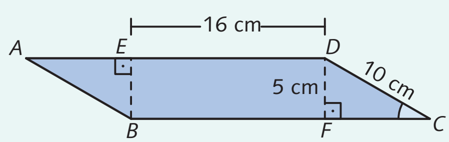
Como o perímetro do terreno é 112 m, temos:

$$a + a + \frac{3}{5}a + \frac{3}{5}a = 112 \Rightarrow \frac{5a + 5a + 3a + 3a}{5} = 112 \Rightarrow 16a = 560 \Rightarrow a = \frac{560}{16} = 35$$

Dessa maneira, o terreno tem 35 m de comprimento e largura igual a: $\frac{3}{5} \cdot 35 = 21 \rightarrow 21\ \text{m}$.

Assim, a área do terreno é dada por: $A = 35 \cdot 21 = 735 \rightarrow 735\ \text{m}^2$.

R6. Calcule a área do paralelogramo *ABCD* representado a seguir.



Rafael L. Gaion

Resolução

A base do paralelogramo é $\overline{BC}$, sendo $BC = FC + \underbrace{16}_{BF}$. Calculando *FC*, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(DC)^2 = (DF)^2 + (FC)^2 \Rightarrow 10^2 = 5^2 + (FC)^2 \Rightarrow 100 = 25 + (FC)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (FC)^2 = 100 - 25 \Rightarrow (FC)^2 = 75 \Rightarrow FC = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \rightarrow 5\sqrt{3}\ \text{cm}$$

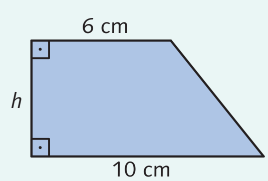
Observação

Note que $FC = 5\sqrt{3}$, pois $FC > 0$.

Assim, a área do paralelogramo é dada por:

$$A = b \cdot h = \underbrace{BC}_{5\sqrt{3}+16} \cdot h = \left(5\sqrt{3} + 16\right) \cdot 5 = \left(25\sqrt{3} + 80\right) \simeq 123{,}3 \rightarrow \text{aproximadamente } 123{,}3\ \text{cm}^2$$

R7. Determine a altura do trapézio, sabendo que sua área é igual à de um retângulo com 10 cm de comprimento e 4 cm de largura.



Rafael L. Gaion

Resolução

A área do retângulo é dada por: $A_r = a \cdot b = 10 \cdot 4 = 40 \rightarrow 40\ \text{cm}^2$

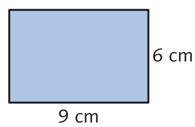
Como, nesse caso, a área do retângulo (A_r) e a do trapézio (A_t) são iguais, temos:

$$A_t = A_r \Rightarrow \frac{(B + b) \cdot h}{2} = 40 \Rightarrow \frac{(10 + 6) \cdot h}{2} = 40 \Rightarrow 16h = 80 \Rightarrow h = \frac{80}{16} = 5$$

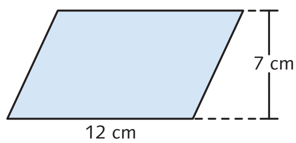
Portanto, a altura do trapézio é 5 cm.

25. Calcule a área das figuras.

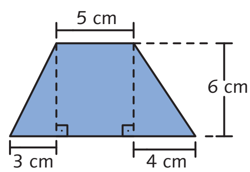
a) retângulo $54\ cm^2$



b) paralelogramo $84\ cm^2$



c) trapézio $51\ cm^2$



Ilustrações: Sergio L. Filho

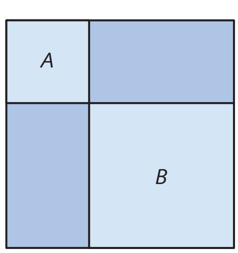
26. O piso de um salão de dança tem formato retangular. Ele é revestido por tacos retangulares de madeira com 10 cm de comprimento e 3 cm de largura. Sabendo que há nesse salão exatamente 150 000 tacos, qual é a sua área em metros quadrados? $450\ m^2$

27. Considere um retângulo cuja área é igual a $54\ cm^2$ e cujo perímetro é igual a 30 cm.

a) Quais são as dimensões desse retângulo? 9 cm e 6 cm

b) Calcule o comprimento da diagonal desse retângulo. $3\sqrt{13}\ cm$

28. Um terreno quadrado foi dividido em quatro lotes conforme a figura a seguir.



Rafael L. Gaion

Os lotes **A** e **B** são quadrados cujas áreas medem, respectivamente, $1\,600\ m^2$ e $4\,900\ m^2$. Calcule, em metros quadrados, a área total do terreno antes da divisão. $12\,100\ m^2$

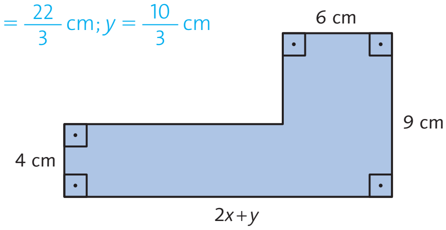
29. Mostre que:

a) ao duplicar a medida do lado *a* de um quadrado, sua área quadruplica.

b) ao duplicar a largura ℓ de um retângulo, mantendo constante seu comprimento *c*, sua área duplica. Veja as respostas na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

30. Determine os valores de *x* e *y* na figura, sabendo que sua área é igual a $102\ cm^2$ e $x - y = 4$.

$x = \frac{22}{3}\ cm$; $y = \frac{10}{3}\ cm$



Sergio L. Filho

Observação

Inicialmente, decomponha o polígono em outros cuja expressão de cálculo da área você já conhece.

31. Uma varanda com formato retangular tem dimensões 7 m e 8 m. Qual é a quantidade mínima de pisos retangulares medindo 25 cm de comprimento por 40 cm de largura necessária para cobrir toda a varanda? 560 pisos

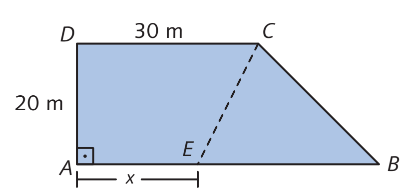
Observação

Desconsidere os desperdícios e o espaço de rejunte entre um piso e outro.

Em grupo

32. Para estimar o número de pessoas presentes em alguns eventos, calcula-se que cada metro quadrado é ocupado por, no máximo, 4 pessoas. Um *show* foi realizado em um centro de eventos cujo formato é um losango e os comprimentos de suas diagonais têm medidas 100 m e $100\sqrt{3}$ m. Se o palco tem $50\ m^2$ e o centro de eventos estava com sua capacidade máxima, qual foi a quantidade aproximada de pessoas presentes nesse *show*? aproximadamente 34 441 pessoas

33. (UFTM-MG) O trapézio retângulo *ABCD* representa um terreno, com área de $800\ m^2$, situado em certo condomínio. Uma das cláusulas que regulamentam as construções nesse condomínio exige que a área construída, indicada pelo trapézio *AECD* na figura, ocupe no mínimo 50% e no máximo 70% da área do terreno.



Rafael L. Gaion

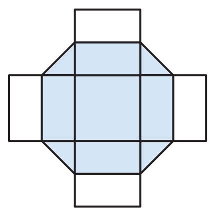
Desse modo, determine:

a) o intervalo de todos os possíveis valores que *x* pode assumir para atender à cláusula especificada. $10 \leqslant x \leqslant 26$

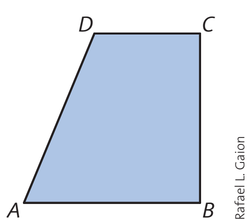
b) o valor de *x* se a área não construída ocupar $\frac{2}{5}$ da área total do terreno. 18 m

34. (Obmep) Na figura, os cinco quadrados são iguais, e os vértices do polígono sombreado são pontos médios dos lados dos quadrados. Se a área de cada quadrado é 1 cm², qual é a área do polígono sombreado? d

a) 2 cm²
b) 2,5 cm²
c) 3 cm²
d) 3,5 cm²
e) 4 cm²

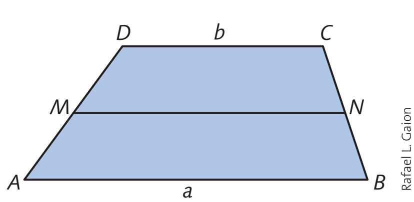


35. (Unicamp-SP) Um terreno tem a forma de um trapézio retângulo *ABCD*, conforme mostra a figura, e as seguintes dimensões: $AB = 25$ m, $BC = 24$ m e $CD = 15$ m.



a) Se cada metro quadrado desse terreno vale R$ 50,00, qual é o valor total do terreno?
R$ 24 000,00
b) Divida o trapézio *ABCD* em quatro partes de mesma área, por meio de três segmentos paralelos ao lado *BC*. Faça uma figura para ilustrar sua resposta, indicando nela as dimensões das divisões no lado. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

36. (UFG-GO) No trapézio *ABCD* abaixo, $\overline{AB}$ mede *a*, $\overline{DC}$ mede *b*, *M* é o ponto médio de $\overline{AD}$ e *N* é o ponto médio de $\overline{BC}$.



Nestas condições, a razão entre as áreas dos trapézios *MNCD* e *ABNM* é igual a: c

a) $\dfrac{a + 2b}{3a + b}$

b) $\dfrac{a + 3b}{2a + b}$

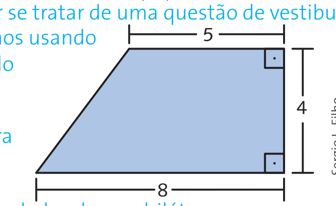
c) $\dfrac{a + 3b}{3a + b}$

d) $\dfrac{a + 2b}{2a + b}$

e) $\dfrac{3a + 2b}{2a + 3b}$

37. (UFRGS-RS) Os babilônios utilizavam a fórmula $A = \dfrac{(a + c)(b + d)}{4}$ para determinar aproximadamente a área de um quadrilátero com lados consecutivos de medidas *a*, *b*, *c* e *d*.

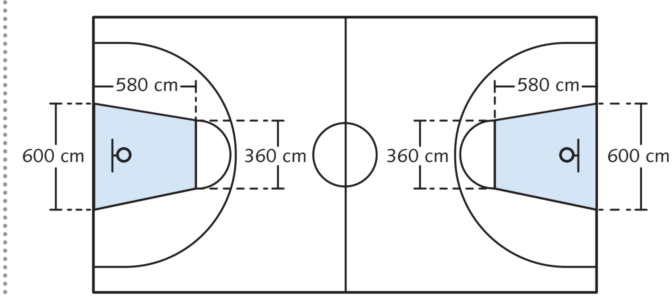
Na tarefa **37**, por se tratar de uma questão de vestibular, embora estejamos usando "comprimento do segmento", por exemplo, aparece a palavra "medidas" para indicar o comprimento dos lados do quadrilátero.



Para o quadrilátero da figura acima, a diferença entre o valor aproximado da área, obtido utilizando a fórmula dos babilônios, e o valor exato dela é: c

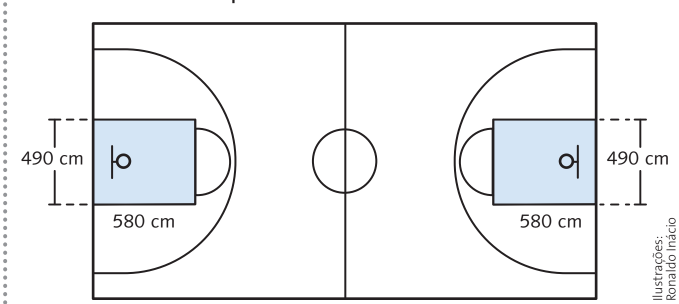
a) $\dfrac{11}{4}$ b) 3 c) $\dfrac{13}{4}$ d) 4 e) $\dfrac{21}{4}$

38. (Enem) O esquema **I** mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em azul, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema **I**: área restritiva antes de 2010.

Visando atender às orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema **II**.



Esquema **II**: área restritiva a partir de 2010.

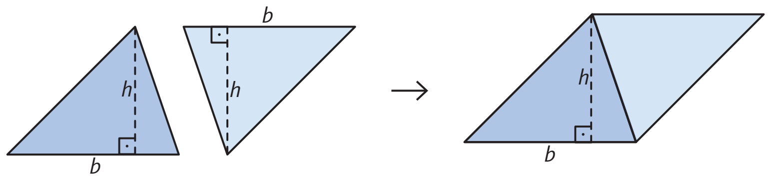
Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a): a

a) aumento de 5 800 cm².
b) aumento de 75 400 cm².
c) aumento de 214 600 cm².
d) diminuição de 63 800 cm².
e) diminuição de 272 600 cm².

Área do triângulo

A imagem a seguir representa um triângulo de altura h em que o comprimento da base tem medida b. Com outro triângulo congruente a ele, podemos compor um paralelogramo de altura h e base com comprimento b.

Se necessário, explique aos alunos que um triângulo é todo polígono que possui três lados e três ângulos internos. Veja alguns tipos de triângulos e suas características.
- triângulo retângulo: aquele em que um dos ângulos internos é reto;
- triângulo acutângulo: aquele que possui todos os ângulos internos agudos;
- triângulo obtusângulo: aquele que possui um ângulo interno obtuso;
- triângulo isósceles: aquele que possui pelo menos dois lados com comprimentos iguais;
- triângulo equilátero; aquele que possui todos os lados com comprimentos iguais;
- triângulo escaleno: aquele que possui todos os lados com comprimentos diferentes.



Área do paralelogramo: $A_p = b \cdot h$

Para obtermos a área de um dos triângulos, dividimos a área do paralelogramo por 2, isto é:

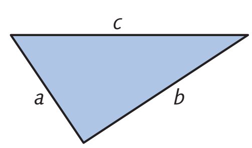
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Em geral:

Para calcular a área de um **triângulo**, multiplicamos a medida da base pelo comprimento da altura e dividimos o resultado por 2, isto é, $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

Veja a seguir outras maneiras de calcular a área de um triângulo.

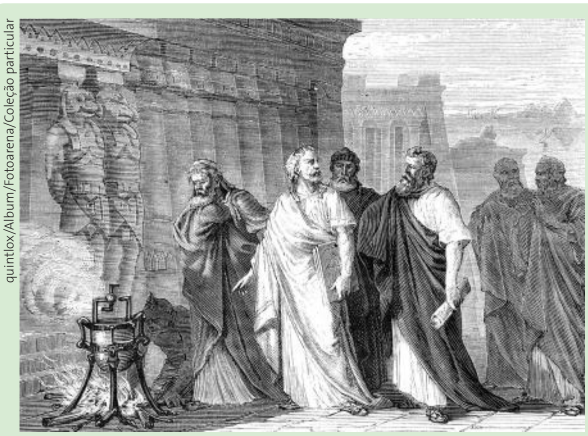
- Podemos calcular a área de um triângulo qualquer conhecendo o comprimento de seus 3 lados. Para isso, utilizamos o **semiperímetro**, que é dado por: $p = \frac{a + b + c}{2}$, em que a, b e c são os comprimentos dos lados do triângulo.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

A área desse triângulo é dada por: $A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$, em que p é o semiperímetro.

Observação
Note que o semiperímetro corresponde à metade da soma dos comprimentos de todos os lados de um polígono.



quintlox/Album/Fotoarena/Coleção particular

Gravura de 1896 retratando Herão realizando uma experiência para os estudiosos da Escola de Alexandria.

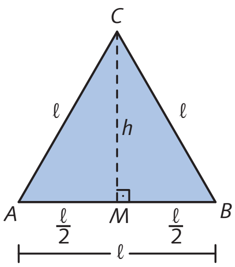
Credita-se a Herão a dedução da fórmula da área de um triângulo em função do comprimento dos três lados (apresentada acima). Ele era um egípcio com formação grega e não se sabe ao certo a época exata em que viveu, mas as estimativas indicam o período entre 150 a.C. e 250 d.C. Ele permeou a área da Matemática, da Física e da Engenharia. Dos trabalhos geométricos de Herão, o mais importante é *A métrica*, em que se encontra a dedução dessa fórmula.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. 2. ed. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004, p. 205.

Área do triângulo equilátero

Em um triângulo equilátero, todos os lados têm comprimentos iguais e cada ângulo interno mede 60°. Veja como podemos obter a área de um triângulo equilátero utilizando o comprimento de seus lados e de sua altura.

Inicialmente, determinamos o comprimento da altura desse triângulo em função do comprimento do lado. Para isso, utilizamos o teorema de Pitágoras no triângulo *CMB*, que é um triângulo retângulo em *M*.



$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} = \boxed{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

Observação
Em um triângulo equilátero, a altura também corresponde à mediatriz e à bissetriz.
Lembre aos alunos o que é mediatriz e bissetriz.

Substituindo a medida *h* na expressão $A = \frac{b \cdot h}{2}$, temos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} = \ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}}$$

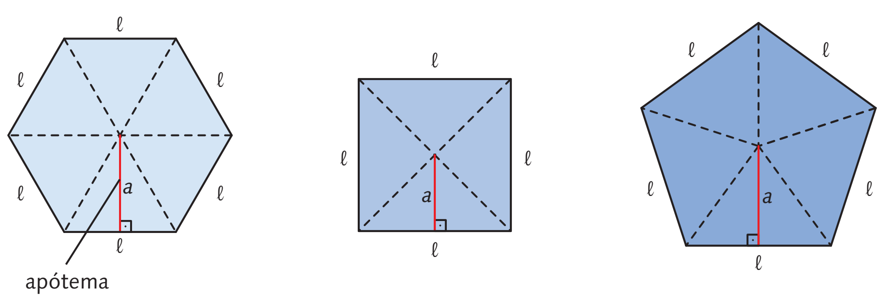
Observação
Com essa relação, para calcular a área de um triângulo equilátero basta conhecer o comprimento de seus lados.

De maneira geral:

> Para calcular a altura *h* e a área *A* de um triângulo equilátero de lado ℓ, utilizamos, respectivamente, as relações $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ e $A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$.

Área de polígonos regulares

Todo polígono regular pode ser decomposto em triângulos isósceles congruentes. Veja, por exemplo, como foram decompostos os seguintes polígonos.



Observação
Os **polígonos regulares** são aqueles cujos comprimentos de todos os lados são iguais e as medidas de todos os ângulos internos são iguais. Além disso, eles podem sempre ser inscritos em uma circunferência, cujo centro é considerado também centro do polígono regular.

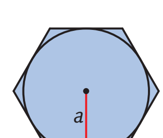
Note que o pentágono regular foi dividido em 5 triângulos. Dessa maneira, para obter a área de um pentágono regular, basta calcular a área de um triângulo e multiplicar o resultado por 5.

Como já vimos, para calcular a área de um triângulo, multiplicamos o comprimento da base pelo comprimento da altura e dividimos o resultado por 2. Nesse caso, a base é um dos lados do pentágono (ℓ), e a altura corresponde ao **apótema** do polígono (*a*).

- área de um triângulo: $A_t = \frac{\ell \cdot a}{2}$
- área do pentágono regular:

$$A = 5 \cdot \frac{\ell \cdot a}{2}$$

Observação
O **apótema** corresponde ao raio de uma circunferência inscrita em um polígono regular.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

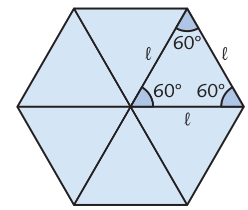
De maneira geral:

> Se um polígono regular tem *n* lados, este pode ser decomposto em *n* triângulos isósceles congruentes, nos quais a base é o lado ℓ do polígono e a altura é o apótema *a* do polígono. Para calcular a área de um polígono de *n* lados, multiplicamos o número de lados pela área de cada triângulo, isto é:
>
> $$A = n \cdot \frac{\ell \cdot a}{2}$$

Observação

No caso específico do hexágono regular, os seis triângulos isósceles são também equiláteros. Desse modo, a área do hexágono regular também pode ser calculada por:

$$A = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$



Ronaldo Inácio

Podemos, ainda, escrever essa expressão da seguinte maneira:

$$\boxed{A = \frac{n \cdot \ell}{2} \cdot a}$$

Nessa expressão, $\frac{n \cdot \ell}{2}$ é o semiperímetro (p) de um polígono regular, pois:

$$\frac{n \cdot \ell}{2} = \frac{\overbrace{\ell + \ell + \ell + \ldots + \ell}^{n \text{ vezes}}}{2} = p$$

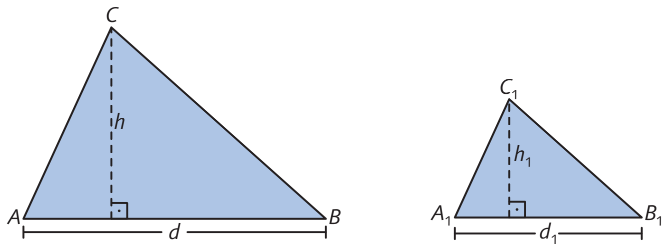
Assim:

$$A = n \cdot \frac{\ell \cdot a}{2} = \frac{n \cdot \ell}{2} \cdot a \Rightarrow \boxed{A = p \cdot a}$$

Razão entre áreas de figuras planas

Provavelmente você já estudou os polígonos semelhantes, ou seja, aqueles cujos lados correspondentes têm medidas proporcionais e cujos ângulos correspondentes têm medidas iguais.

Ao dividirmos os comprimentos dos lados correspondentes de dois polígonos semelhantes, obtemos o mesmo número, chamado **razão de semelhança**. Observe os seguintes triângulos semelhantes.



Rafael L. Gaion

Como os triângulos são semelhantes $\left(\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1\right)$, temos $\frac{d}{d_1} = \frac{h}{h_1} = \underbrace{k}_{\text{razão de semelhança}}$.

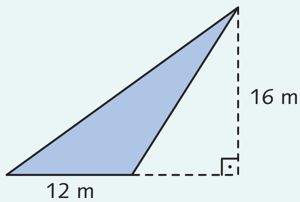
Calculando a razão entre as áreas desses triângulos, temos:

$$\frac{A_{ABC}}{A_{A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{d \cdot h}{2}}{\frac{d_1 \cdot h_1}{2}} = \frac{d \cdot h}{d_1 \cdot h_1} = \frac{d}{d_1} \cdot \frac{h}{h_1} = k \cdot k = k^2$$

A razão entre as áreas dos triângulos semelhantes $\left(k^2\right)$ é igual ao quadrado da razão de semelhança (k). Essa propriedade é válida para quaisquer duas superfícies semelhantes, e não somente para triângulos.

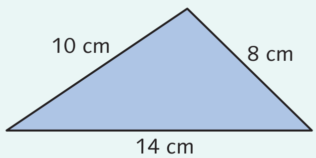
R8. Determine a área dos triângulos representados a seguir.

a)



As imagens não estão representadas em proporção.

b)



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Resolução

a) Como são conhecidos os comprimentos da base e da altura, temos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96 \rightarrow 96\ \text{m}^2$$

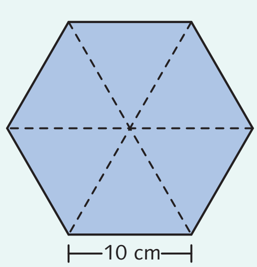
b) Como são conhecidos os comprimentos dos três lados do triângulo, calculamos seu semiperímetro p.

$$p = \frac{8 + 10 + 14}{2} = 16$$

Agora, calculamos a área do triângulo:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$
$$= \sqrt{16(16-8)(16-10)(16-14)} =$$
$$= \sqrt{1\,536} = \sqrt{256 \cdot 6} =$$
$$= 16\sqrt{6} \simeq 39{,}2 \rightarrow \text{aproximadamente } 39{,}2\ \text{cm}^2$$

R9. Calcule a área de um hexágono regular de lado 10 cm.



Rafael L. Gaion

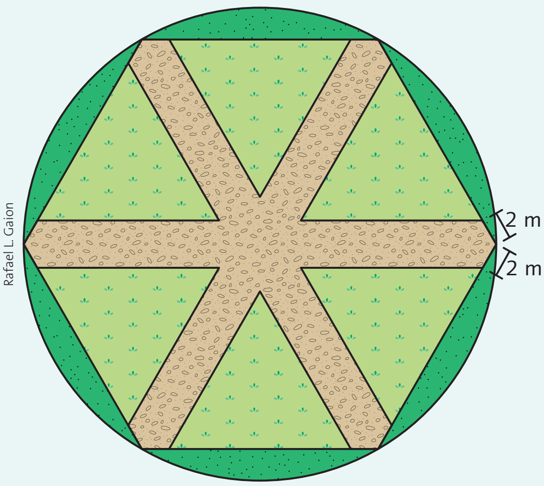
Resolução

Por ser decomposto em 6 triângulos equiláteros, a área de um hexágono regular de lado ℓ pode ser calculada pela fórmula: $A = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$.

Assim:

$$A = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot 10^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot \cancel{100}^{50}\sqrt{3}}{\cancel{2}_1} =$$
$$= 150\sqrt{3} \simeq 259{,}8 \rightarrow \text{aproximadamente } 259{,}8\ \text{cm}^2$$

R10. Em um jardim circular com 40 m de diâmetro, o jardineiro fez um canteiro no formato de hexágono regular. Ele dividiu esse canteiro em outros 6 canteiros menores, deixando entre eles um caminho, como mostra a figura.



Rafael L. Gaion

a) Qual seria a área do canteiro no formato de hexágono regular, antes de o jardineiro dividi-lo em outros 6 canteiros menores, deixando entre eles um caminho?

b) Qual é a área ocupada pelos canteiros menores?

Resolução

a) Inicialmente, determinamos o comprimento do raio r do jardim a partir do diâmetro d, que, nesse caso, corresponde ao comprimento do lado do hexágono regular. Como $d = 2r$, temos:

$$d = 40 \Rightarrow 2r = 40r \Rightarrow r = 20 \rightarrow 20\ \text{m}$$

Agora, calculamos a área do canteiro em formato de hexágono regular, antes de o jardineiro dividi-lo em outros 6 canteiros menores, deixando entre eles um caminho.

$$A = 6 \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{20^2\sqrt{3}}{4} =$$
$$= 600\sqrt{3} \rightarrow 600\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

b) Para calcular a área ocupada pelos canteiros menores, temos de calcular a área de um canteiro menor, cujo formato é um triângulo equilátero de lado $(20 - 2 \cdot 2)$ m, e multiplicar o resultado por 6.

$$A = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{(20 - 2 \cdot 2)^2\sqrt{3}}{4} =$$
$$= 384\sqrt{3} \simeq 665{,}1 \rightarrow 665{,}1\ \text{m}^2$$

Diga aos alunos que o único polígono regular com mais de três lados que pode ser dividido em triângulos equiláteros congruentes é o hexágono regular; os demais polígonos regulares só podem ser divididos em triângulos isósceles congruentes.

R11. (Enem) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

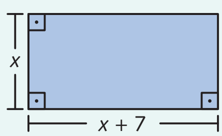


Figura A

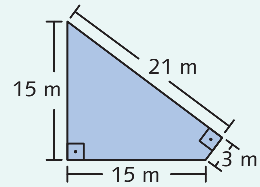


Figura B

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a:

a) 7,5 e 14,5
b) 9,0 e 16,0
c) 9,3 e 16,3
d) 10,0 e 17,0
e) 13,5 e 20,5

Resolução

A figura B pode ser decomposta em dois triângulos retângulos, um com os comprimentos da base e da altura iguais a 15 m e outro com a base e altura com 3 m e 21 m de comprimento, respectivamente. Como as áreas dos terrenos são iguais, temos:

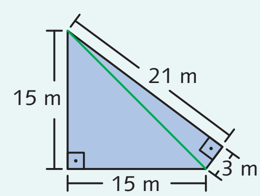


Figura B

Ilustrações: Rafael L. Gaion

$$b \cdot h = \frac{b_1 \cdot h_1}{2} + \frac{b_2 \cdot h_2}{2}$$

$$x(x+7) = \frac{15 \cdot 15}{2} + \frac{21 \cdot 3}{2}$$

$$x^2 + 7x = 112{,}5 + 31{,}5$$

$$x^2 + 7x = 144$$

$$x^2 + 7x - 144 = 0 \begin{cases} x = 9 \\ x = -16 \end{cases}$$

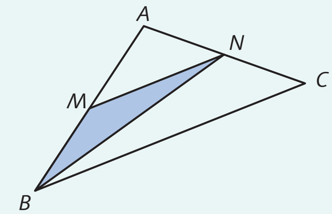
Como x representa uma medida, consideramos a resposta positiva, ou seja $x = 9$. Assim, temos:

$$x + 7 = 9 + 7 = 16$$

Portanto, as dimensões do terreno retangular devem ser iguais a 9 m e 16 m, ou seja, a alternativa é **b**.

R12. No triângulo ABC representado a seguir, M é o ponto médio do lado $\overline{AB}$ e N é o ponto médio do lado $\overline{AC}$. Se a área do triângulo MBN é igual a t, então a área do triângulo ABC é igual a:

a) $3t$
b) $2\sqrt{3}t$
c) $4t$
d) $3\sqrt{2}t$



Rafael L. Gaion

Resolução

Sabendo que M é o ponto médio de $\overline{AB}$, segue que $\triangle AMN$ e $\triangle BNM$ têm a mesma área, pois os comprimentos da base ($\overline{AM}$ e $\overline{MB}$) e da altura correspondente são iguais. Assim: $A_{\triangle AMN} = A_{\triangle BNM} = t$.

Analogamente, sendo N o ponto médio de $\overline{AC}$, tem-se $\triangle BCN$ e $\triangle BNA$ com áreas iguais, pelo mesmo motivo. Como a área do $\triangle BNA = 2t$, temos:

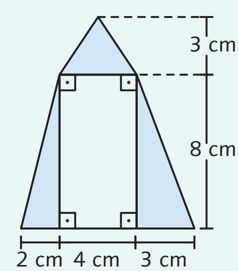
$$A_{\triangle ABC} = A_{\triangle BNA} + A_{\triangle BCN}$$

$$A_{\triangle ABC} = 2t + 2t$$

$$A_{\triangle ABC} = 4t$$

Portanto, a alternativa **c** está correta.

R13. Calcule a área da região pintada de azul na figura a seguir.



Rafael L. Gaion

Resolução

Para determinar a área da região azul, precisamos calcular as áreas do trapézio, do triângulo e do retângulo separadamente.

Área do trapézio:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{\left[(2+4+3)+4\right] \cdot 8}{2} =$$

$$= 52 \rightarrow 52 \text{ cm}^2$$

Área do triângulo:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \rightarrow 6 \text{ cm}^2$$

Área do retângulo:

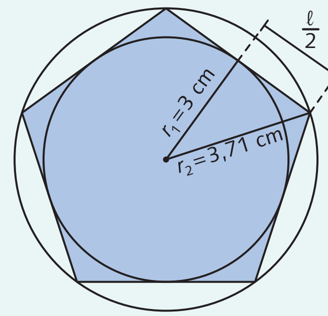
$$A_{\text{retângulo}} = b \cdot h = 4 \cdot 8 = 32 \rightarrow 32 \text{ cm}^2$$

Por fim, determinamos a área da região azul:

$$A_{\text{azul}} = A_{\text{trapézio}} + A_{\text{triângulo}} - A_{\text{retângulo}} =$$

$$= 52 + 6 - 32 = 26 \rightarrow 26 \text{ cm}^2$$

R14. Qual é a área de um pentágono regular inscrito em uma circunferência de raio 3,71 cm e circunscrito a uma circunferência de raio 3 cm?



Rafael L. Gaion

Resolução

Nessa situação, o raio r_1, da circunferência inscrita, fornece o comprimento a do apótema do pentágono de lado ℓ e o raio r_2, da circunferência circunscrita, o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo de catetos a e $\frac{\ell}{2}$.

Utilizando o teorema de Pitágoras, obtemos o comprimento do lado do pentágono:

$$3{,}71^2 = 3^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow 13{,}76 \simeq 9 + \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow \ell^2 \simeq 19{,}04 \Rightarrow \ell \simeq 4{,}36 \rightarrow \text{aproximadamente } 4{,}36 \text{ cm}$$

Substituindo os valores na fórmula, obtemos a área do pentágono:

$$A = n \cdot \frac{\ell \cdot a}{2} = 5 \cdot \frac{4{,}36 \cdot 3}{2} \simeq 32{,}7 \rightarrow \text{aproximadamente } 32{,}7 \text{ cm}^2$$

R15. Considere dois triângulos semelhantes cujas áreas são, respectivamente, 12 cm^2 e 3 cm^2. Sabendo que o maior lado do 1º triângulo tem 6 cm de comprimento, determine o comprimento do maior lado do 2º triângulo.

Resolução

Como a razão entre as áreas dos triângulos é igual ao quadrado da razão de semelhança (k), temos:

$$k^2 = \frac{12}{3} \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = 2$$

Assim:

$$k = \frac{6}{x} \Rightarrow 2 = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 3$$

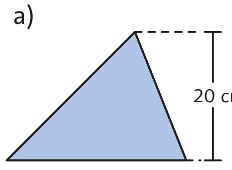
Portanto, o maior lado do 2º triângulo tem 3 cm de comprimento.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

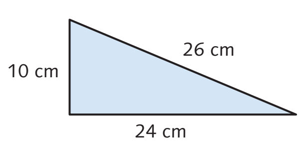
39. Determine a área de cada triângulo.

a)



280 cm^2

b)



120 cm^2

Ilustrações: Rafael L. Gaion

40. (UFPI) Dentre as alternativas a seguir, há uma única na qual constam as medidas dos lados de um triângulo cujo perímetro, medido em cm, é numericamente igual à sua área, medida em cm^2. Qual é essa alternativa? c

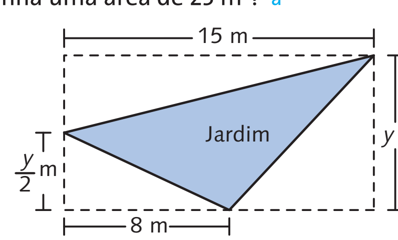
a) 14 cm, 11 cm e 6 cm
b) 13 cm, 10 cm e 5 cm
c) 13 cm, 12 cm e 5 cm
d) 14 cm, 12 cm e 6 cm
e) 13 cm, 11 cm e 6 cm

Na tarefa **40**, por se tratar de uma questão de vestibular, embora estejamos usando "comprimento do segmento", por exemplo, aparece a palavra "medidas" para indicar o comprimento dos lados do triângulo.

Você produtor

41. Determine a área de um triângulo equilátero e peça a um colega que calcule seu perímetro. Em seguida, verifique se a resolução está correta.

42. (Ufla-MG) Na reforma de uma casa, pretende-se fazer um jardim em forma de triângulo numa área retangular de dimensões 15 m $\times$ y m.
Qual deve ser o valor de y, de modo que o jardim tenha uma área de 23 m^2? a



Rafael L. Gaion

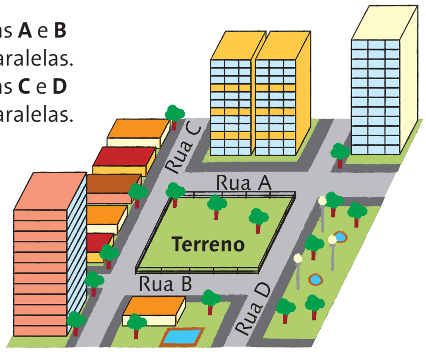
a) 4,0 m
b) 1,5 m
c) 3,0 m
d) 1,0 m
e) 3,5 m

41. Resposta pessoal. Possível resposta: um triângulo equilátero tem área medindo 43,25 cm^2. Calcule o perímetro desse triângulo.

Na tarefa **47**, por se tratar de uma questão do Enem, embora estejamos usando "comprimento do segmento", por exemplo, aparece as expressões "lado medindo 1 m" e "medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado" para indicar, respectivamente, que o comprimento do lado do quadrado é 1 m e que os comprimentos dos segmentos AP e QC são iguais a $\frac{1}{4}$ do comprimento do lado do quadrado.

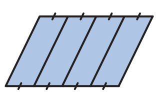
43. (Enem) Um terreno com o formato mostrado na figura foi herdado por quatro irmãos e deverá ser dividido em quatro lotes de mesma área.

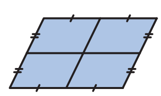
As ruas **A** e **B** são paralelas.
As ruas **C** e **D** são paralelas.

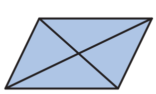


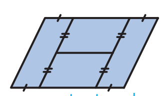
Um dos irmãos fez algumas propostas de divisão para que fossem analisadas pelos demais herdeiros.

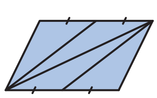
Dos esquemas abaixo, em que lados de mesma medida têm símbolos iguais, o único em que os quatro lotes não possuem, necessariamente, a mesma área é: e

a)


d)


b)


e)


c)


Ilustrações: Sergio L. Filho

Na tarefa **43**, por se tratar de uma questão do Enem, embora estejamos usando "comprimento do segmento", por exemplo, aparece a expressão "lados de mesma medida" para indicar que os lados têm comprimentos iguais.

Veja na Assessoria pedagógica comentários e sugestões de trabalho com esta tarefa.

Em grupo

44. (Ufpel-RS) O Brasil é considerado mundialmente o país do futebol. Em copas ou outros torneios, esse esporte está sempre presente e muito orgulho tem trazido para nosso povo, ao receber títulos significativos como o Pentacampeonato Mundial.

O brasileiro, independentemente de classe econômica, desde cedo tem familiaridade com a bola de futebol.

Nos cálculos propostos a seguir, estamos supondo uma bola de couro que tem sua superfície coberta com pentágonos e hexágonos regulares.

Baseando-se em seus conhecimentos e considerando que os hexágonos que cobrem a bola têm a distância do centro ao ponto médio dos seus lados igual a 3 cm, determine:

a) a área de cada hexágono. $18\sqrt{3}$ cm^2

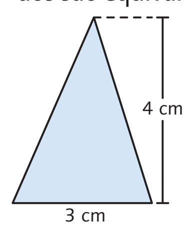
b) o perímetro de cada pentágono. $10\sqrt{3}$ cm

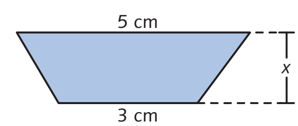
45. Na festa junina de um colégio, os alunos de uma turma ficaram encarregados de fazer as bandeirinhas, as quais teriam o formato de um triângulo equilátero de 20 cm de lado. Foram entregues aos alunos 100 folhas retangulares com 1,23 m de comprimento e 1 m de largura.

a) Quantos metros quadrados de papel foram entregues aos alunos? 123 m^2

b) Quantas bandeirinhas poderão ser feitas, sabendo que a cada 7 bandeirinhas haverá uma sobra de, aproximadamente, 19 cm^2 de papel? $\left(\text{Considere } \sqrt{3} = 1{,}73.\right)$ 7 000 bandeirinhas

46. Dizemos que duas figuras planas são equivalentes quando têm a mesma área. Determine o valor de x, sabendo que o triângulo e o trapézio representados são equivalentes. $x = 1{,}5$ cm



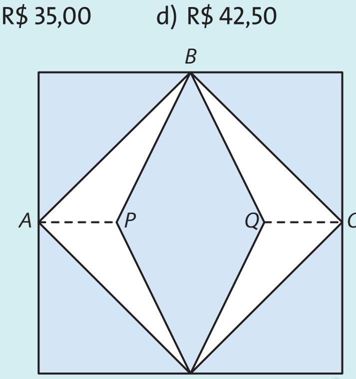


Ilustrações: Rafael L. Gaion

Desafio

47. (Enem) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura abaixo. Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R\$ 30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões $ABPDA$ e $BCDQB$), que custa R\$ 50,00 o m^2. De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral? b

a) R\$ 22,50 c) R\$ 40,00 e) R\$ 45,00
b) R\$ 35,00 d) R\$ 42,50



Rafael L. Gaion

No trabalho com a tarefa **44**, explique aos alunos que o centro de um hexágono regular coincide com o vértice comum aos seis triângulos equiláteros obtidos na decomposição desse hexágono.

Ladrilhamento

Nas páginas anteriores, estudamos os poliedros e como calcular a área de algumas figuras geométricas planas. Agora, vamos estudar um tipo de composição de figuras geométricas planas chamado ladrilhamento, cujos padrões se repetem e podem ser estendidos por todo o plano.

O **ladrilhamento** ou **pavimentação** do plano consiste em cobrir completamente uma superfície com polígonos sem que haja falhas entre eles e sem sobreposição. Dizemos que as peças utilizadas, também chamadas **ladrilhos** ou **tesselas**, cobrem ou pavimentam o plano. Um ponto que resulte da interseção de três ou mais ladrilhos é chamado **vértice da pavimentação** ou **nó**.

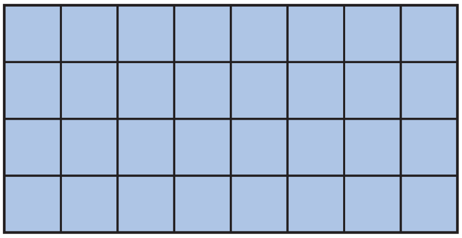
Entre os tipos de ladrilhamento possíveis, vamos considerar neste livro os ladrilhamentos com as condições a seguir.

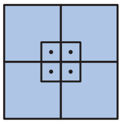
- As peças são polígonos regulares.
- Duas peças apenas se intersectam em um lado ou em um vértice.
- A distribuição das peças é a mesma ao redor de cada vértice.

Um ladrilhamento com essas características, formado por um único tipo de polígono (peça), é chamado **ladrilhamento regular**. Já um ladrilhamento com essas características, porém formado por mais de um tipo de polígono, é chamado **ladrilhamento semirregular**.

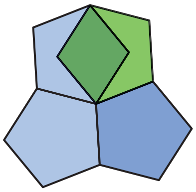
Ladrilhamento regular

Um exemplo de ladrilhamento regular é o formado por quadrados congruentes, posicionados lado a lado, conforme exemplo a seguir. Note que o quadrado satisfaz às condições apresentadas para cobrir o plano em um ladrilhamento regular.

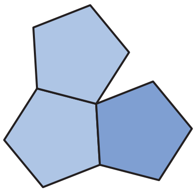




Um exemplo de polígono que não pode ser usado para cobrir o plano em um ladrilhamento regular é o pentágono regular, pois, quando pentágonos regulares são dispostos ao redor de um dos vértices, ocorre sobreposição ou falha.



Composição com sobreposição.



Composição com espaço entre os polígonos (falha).

Ilustrações: Rafael L. Gaion

No caso do quadrado, por exemplo, é possível formar um ângulo de 360° ao redor de um dos vértices, agrupando 4 quadrados congruentes. Porém, não é possível fazer o mesmo com pentágonos regulares congruentes, no qual um de seus ângulos internos tem medida 108°. Nesse caso, não é possível formar um ângulo de 360° ao redor de um dos vértices.

- Como você faria para determinar quais polígonos regulares e congruentes podem formar um ladrilhamento regular? Espera-se que os alunos relatem um procedimento viável, com o objetivo de generalizar os padrões observados, e que percebam que a soma das medidas dos ângulos internos dos polígonos regulares em torno de um vértice seja igual a 360°.

Vamos verificar quais polígonos regulares formam um ângulo de 360° em torno de um vértice em um ladrilhamento regular.

Se em um vértice da pavimentação podem ser dispostos m polígonos regulares congruentes de n lados, então a soma dos ângulos internos desses polígonos nesse vértice deve ser igual a 360°. Para calcular a medida α do ângulo interno de um polígono regular de n lados, usamos a seguinte expressão:

$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$

Assim, temos:

$$\alpha \cdot m = 360° \Rightarrow \frac{(n-2)\cdot 180°}{n} \cdot m = 360° \Rightarrow m \cdot \frac{(n-2)}{n} = \frac{360°}{180°} \Rightarrow m = \frac{2n}{(n-2)}$$

Para polígonos regulares de n lados, não haverá sobreposição ou falhas se m for um número inteiro. Além disso, são necessários ao menos 3 polígonos regulares em torno de um vértice, ou seja, $m \geqslant 3$. Assim:

$$3 \leqslant \frac{2n}{(n-2)} \Rightarrow 3\cdot(n-2) \leqslant 2n \Rightarrow 3n - 6 \leqslant 2n \Rightarrow 3n - 2n \leqslant 6 \Rightarrow n \leqslant 6$$

Verifique se os alunos compreenderam o motivo de serem necessários ao menos três polígonos regulares nesse tipo de composição. Espera-se que eles compreendam que a medida de um ângulo interno de um polígono regular deve ser menor do que 180°, e por isso, dois polígonos não são suficientes para completar a pavimentação em torno do vértice. Verifique também se eles perceberam que $n \geqslant 3$, pois o polígono com a menor quantidade n de lados é o triângulo. É por isso que o sinal da inequação é mantido ao multiplicarmos ambos os membros por $(n-2) > 0$.

Como $n \geqslant 3$, as únicas soluções inteiras e positivas são $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ e $n = 6$.

- $n = 3$

$$m = \frac{2\cdot 3}{3-2} = \frac{6}{1} = 6$$

Podem ser dispostos 6 triângulos equiláteros ao redor de um vértice em um ladrilhamento regular.

- $n = 4$

$$m = \frac{2\cdot 4}{4-2} = \frac{8}{2} = 4$$

Podem ser dispostos 4 quadrados ao redor de um vértice em um ladrilhamento regular.

- $n = 5$

$$m = \frac{2\cdot 5}{5-2} = \frac{10}{3} = 3{,}\overline{33}$$

Não podem ser dispostos pentágonos regulares ao redor de um vértice em um ladrilhamento regular.

- $n = 6$

$$m = \frac{2\cdot 6}{6-2} = \frac{12}{4} = 3$$

Podem ser dispostos 3 hexágonos regulares ao redor de um vértice em um ladrilhamento regular.

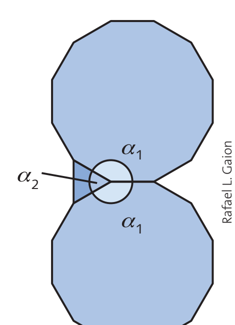
Portanto, os polígonos com os quais é possível obter um ladrilhamento regular são o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular. Denotamos esses ladrilhamentos por $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$, $(4, 4, 4, 4)$ e $(6, 6, 6)$ respectivamente.

Observação

A terna $(6, 6, 6)$, por exemplo, corresponde à disposição de 3 polígonos regulares de 6 lados em torno de um vértice.

Ladrilhamento semirregular

Da mesma maneira que fizemos com o ladrilhamento regular, podemos verificar quais grupos de polígonos regulares formam um ângulo de 360° em torno de um vértice em um ladrilhamento semirregular. Para isso, vamos considerar os ladrilhamentos com diferentes números de polígonos em torno de cada vértice.



- Qual é o número mínimo de polígonos regulares que podem ser posicionados ao redor de um vértice? E o número máximo? Justifique suas respostas.

Espera-se que os alunos respondam que podem ser posicionados no mínimo 3 e no máximo 6 polígonos regulares, pois a medida do ângulo interno de um polígono regular é menor do que 180° e maior do que ou igual a 60°.

Possibilidades com 3 polígonos

Considerando n_1, n_2 e n_3 o número de lados de cada um dos 3 polígonos ao redor de um vértice e α_1, α_2 e α_3 as medidas dos respectivos ângulos internos, temos:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 360° \Rightarrow \frac{(n_1 - 2) \cdot 180°}{n_1} + \frac{(n_2 - 2) \cdot 180°}{n_2} + \frac{(n_3 - 2) \cdot 180°}{n_3} = 360°$$

Simplificando essa igualdade, temos:

$$180° - \frac{360°}{n_1} + 180° - \frac{360°}{n_2} + 180° - \frac{360°}{n_3} = 360° \Rightarrow 540 - 360°\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right) = 360° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{540° - 360°}{360°} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$$

Supondo que $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3$, temos: $\frac{1}{2} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{3}{n_1} \Rightarrow n_1 \leqslant 6$

Assim, $3 \leqslant n_1 \leqslant 6$, e podemos observar cada caso:

- $n_1 = 3$

  $$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \Rightarrow \frac{1}{6} - \frac{1}{n_2} = \frac{1}{n_3} \Rightarrow \frac{n_2 - 6}{6n_2} = \frac{1}{n_3} \Rightarrow n_2 \geqslant 7$$

  Além disso:

  $$\frac{1}{6} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \Rightarrow \frac{1}{6} \leqslant \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} \Rightarrow \frac{1}{6} \leqslant \frac{2}{n_2} \Rightarrow n_2 \leqslant 12$$

  Assim, para $n_1 = 3$, temos $7 \leqslant n_2 \leqslant 12$. Para determinar os valores de n_3, substituímos os possíveis valores de n_2 em $\frac{1}{6} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$. Realizando os cálculos, obtemos as soluções $(3, 7, 42)$, $(3, 8, 24)$, $(3, 9, 18)$, $(3, 10, 15)$ e $(3, 12, 12)$.

Observação
A terna $(3, 7, 42)$, por exemplo, corresponde à disposição de polígonos regulares de 3, 7 e 42 lados em torno de um vértice.

- $n_1 = 4$

  De maneira parecida com os cálculos apresentados anteriormente, concluímos que, para $n_1 = 4$, temos $5 \leqslant n_2 \leqslant 8$, e as soluções obtidas são: $(4, 5, 20)$, $(4, 6, 12)$ e $(4, 8, 8)$.

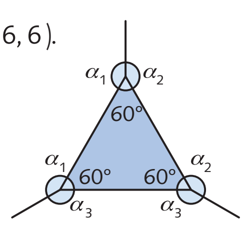
- $n_1 = 5$

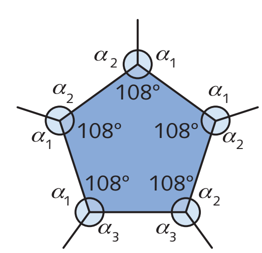
  De maneira parecida, concluímos que, para $n_1 = 5$, temos $5 \leqslant n_2 \leqslant 6$, e a única solução obtida é $(5, 5, 10)$.

- $n_1 = 6$

  Para $n_1 = 6$, temos $6 \leqslant n_2 \leqslant 6$, e a única solução obtida é $(6, 6, 6)$.

Portanto, existem 10 composições de três polígonos regulares de lados congruentes que podem ser posicionados ao redor de um vértice comum de modo que não haja falhas entre eles ou ocorra sobreposição. Agora, vamos verificar em quais dessas combinações é possível ladrilhar o plano. Veja os casos ao lado.





Ilustrações: Rafael L. Gaion

No caso das composições que envolvem o triângulo equilátero, vamos verificar o que acontece com outros dois polígonos regulares. De acordo com a imagem, $\alpha_1 + \alpha_2 + 60° = 360°$, $\alpha_1 + \alpha_3 + 60° = 360°$ e $\alpha_2 + \alpha_3 + 60° = 360°$. Assim, concluímos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, e, consequentemente, uma combinação envolvendo um triângulo equilátero ladrilha o plano apenas se os outros dois polígonos forem congruentes. De maneira perecida, o mesmo pode ser verificado para as composições que envolvem o pentágono regular.

Nesse caso, as seguintes composições de três polígonos regulares ao redor de um vértice que não pavimentam o plano são $(3, 7, 42)$, $(3, 8, 24)$, $(3, 9, 18)$, $(3, 10, 15)$, $(4, 5, 20)$ e $(5, 5, 10)$.

Portanto, as composições com três polígonos que formam um ladrilhamento semirregular são $(3, 12, 12)$, $(4, 6, 12)$ e $(4, 8, 8)$, além da composição $(6, 6, 6)$, que forma um ladrilhamento regular.

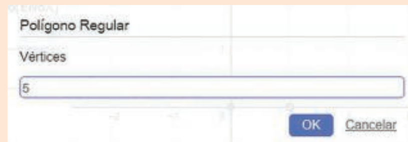
Acesso digital

Ladrilhamento com o GeoGeobra

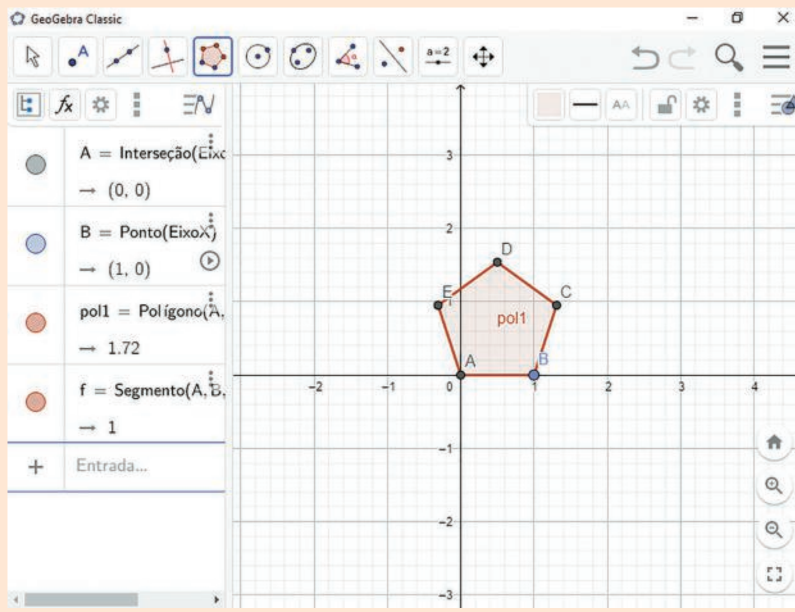
Nesta seção, vamos construir polígonos regulares de lados congruentes e verificar quais das composições apresentadas anteriormente ladrilham o plano. Para isso, vamos utilizar o GeoGebra, que é um *software* de Geometria dinâmica.

Veja como podemos verificar nesse *software* se a composição $(5, 5, 10)$ forma um ladrilhamento semirregular.

1º Selecione a ferramenta **Polígono Regular** e clique em dois pontos na **Janela de Visualização**.



2º Na janela, digite o número de vértices do polígono. Para o primeiro polígono do exemplo, digite 5. Em seguida, clique em **OK**.

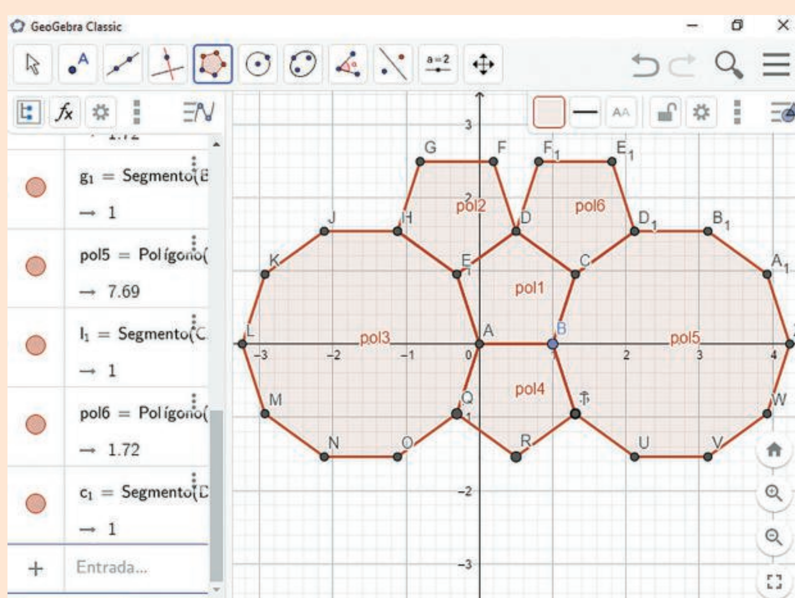


3º Para o próximo polígono, selecione novamente a ferramenta **Polígono Regular** e clique nos vértices do primeiro polígono construído. No exemplo, clique nos pontos *E* e *D*, nessa ordem, e depois digite o número de vértices do segundo polígono, que nesse caso é 5, e clique em **OK**.

Observação

Note que a ordem em que os pontos são clicados determina o lado em que o polígono é construído.

4º Repita o passo **3** alterando os pontos e o número de vértices para construir os polígonos restantes em torno do primeiro polígono.



Fotos: Reprodução/Geogebra/Markus Hohenwarter

Observação

Para construir o próximo polígono, que é um decágono regular, clique nos pontos *A* e *E*, digite 10 e clique em **OK**.

5º Note que, nesse caso, mesmo que em 4 dos vértices do pentágono seja possível compor os polígonos ao redor, no quinto vértice não é possível compor um pentágono ou decágono regular que não cause sobreposição ou falha. Ou seja, não é possível ladrilhar o plano com esses polígonos.

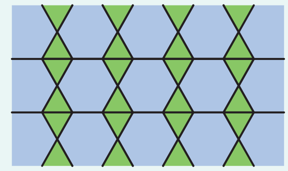
Veja as respostas nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.

a) Utilizando o GeoGebra, verifique se a composição $(4, 6, 12)$ ladrilha o plano.

b) No GeoGebra, verifique se é possível compor mais do que 6 polígonos regulares em torno de um vértice sem sobreposições ou falhas.

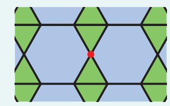
Problemas e exercícios resolvidos

R16. Na figura ao lado é apresentada uma composição de polígonos regulares e lados congruentes. Essa composição faz parte de um ladrilhamento semirregular do plano? Justifique sua resposta.

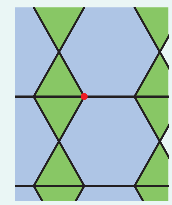


Resolução

Podemos observar que não existem sobreposições ou falhas nos vértices e que as interseções entre os polígonos, quando existem, são vértices ou lados. Agora, vamos verificar se a distribuição é a mesma em todos os vértices.



- Em torno do vértice destacado, temos um triângulo, um hexágono, um triângulo e um hexágono, todos regulares e com lados congruentes. Podemos denotar essa composição por $(3, 6, 3, 6)$.



- Em torno do vértice destacado, temos dois triângulos e dois hexágonos, todos regulares e com lados congruentes. Podemos denotar essa composição por $(3, 3, 6, 6)$.

Ilustrações: Rafael L. Gaion

Portanto, como a distribuição não é a mesma em torno dos vértices, a composição não caracteriza um ladrilhamento semirregular.

52. Resposta pessoal. Possível resposta: Silas deseja realizar uma composição com triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares, todos com lados congruentes, para fazer um mosaico. Que quantidade de cada um desses polígonos ele deve utilizar a fim de obter um ladrilho?

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

48. De maneira parecida com a que foi apresentada para as composições com 3 polígonos regulares, responda às questões.

a) Quais composições com 4 polígonos regulares e lados congruentes em torno do vértice podem ser formadas sem gerar sobreposições ou falhas? $(3, 3, 4, 12)$, $(3, 3, 6, 6)$, $(3, 6, 3, 6)$, $(3, 4, 3, 12)$, $(3, 4, 6, 4)$, $(3, 4, 4, 6)$ e $(4, 4, 4, 4)$

Observação

Incluindo as composições apresentadas na tarefa **R16**, são 7 as composições possíveis para o item **a**.

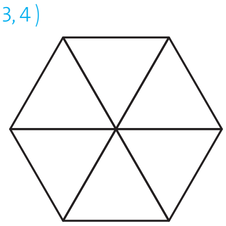
b) Quais das composições que você obteve no item **a** podem ladrilhar o plano? $(3, 6, 3, 6)$, $(3, 4, 6, 4)$ e $(4, 4, 4, 4)$

Observação

Utilize um *software* de Geometria dinâmica para facilitar a visualização das composições no item **b**.

49. Utilize procedimentos parecidos com os apresentados nas páginas anteriores e com os utilizados na tarefa **48** para determinar quais são as 3 composições de 5 polígonos regulares que formam ladrilhamento do plano. $(3, 3, 3, 3, 6)$, $(3, 3, 3, 4, 4)$ e $(3, 3, 4, 3, 4)$

50. Na figura ao lado, está representada a composição $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$, que distribui 6 triângulos equiláteros de lados congruentes ao redor de um vértice. É possível que alguma composição diferente com 6 polígonos regulares e lados congruentes possa ser distribuída ao redor de um vértice sem causar falhas ou sobreposições? Justifique sua resposta.



Rafael L. Gaion

51. As abelhas, ao construírem com cera os alvéolos, que são as estruturas de armazenamento presentes nas colmeias, utilizam um formato que lembra hexágonos regulares, conforme a imagem abaixo.

a) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que haveria espaço entre os alvéolos, algo que diminuiria a capacidade de armazenamento, além de utilizar uma quantidade maior de cera na construção.

Stephen Dalton/Minden Pictures/Fotoarena

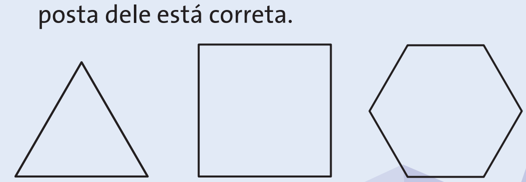
Alvéolos produzidos por abelhas da espécie abelha-europeia (*Apis melifera*).

a) Em sua opinião, o que aconteceria se as abelhas utilizassem estruturas que lembram pentágonos regulares, em vez de hexágonos regulares?

b) Vamos imaginar um ladrilhamento com a aparência dos alvéolos apresentados na fotografia. Nesse caso, teríamos um ladrilhamento regular ou semirregular? Justifique sua resposta. Regular, pois é formado por um único tipo de polígono regular; quando ocorre interseção entre as peças, é apenas nos seus lados ou vértices; ao redor de cada vértice ocorre a mesma distribuição.

Você produtor

52. Observe os polígonos regulares com lados congruentes representados a seguir e, a partir deles, elabore um problema envolvendo ladrilhamento no plano. Em seguida, peça para um colega resolvê-lo e, por fim, verifique se a resposta dele está correta.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

50. Não, pois em um vértice de uma composição podem ser dispostos m polígonos regulares congruentes de n lados cuja soma dos ângulos internos nesse vértice seja $360°$, e a única possibilidade que satisfaz expressão $m = \frac{2n}{(n-2)}$ é quando $n = 3$, ou seja, um triângulo equilátero.

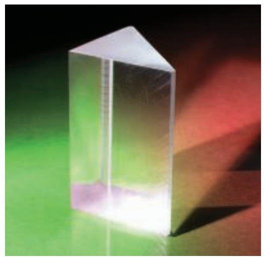
6 Prismas

Veja na Assessoria pedagógica comentários e sugestões de trabalho com esta página.

As imagens não estão representadas em proporção.

Neste tópico, iremos estudar com mais detalhes um grupo de poliedros: os **prismas**.

Muitos objetos, bem como embalagens de produtos e também alguns monumentos, apresentam o formato de prisma.



HomeStudio/Shutterstock.com

Prisma de vidro.

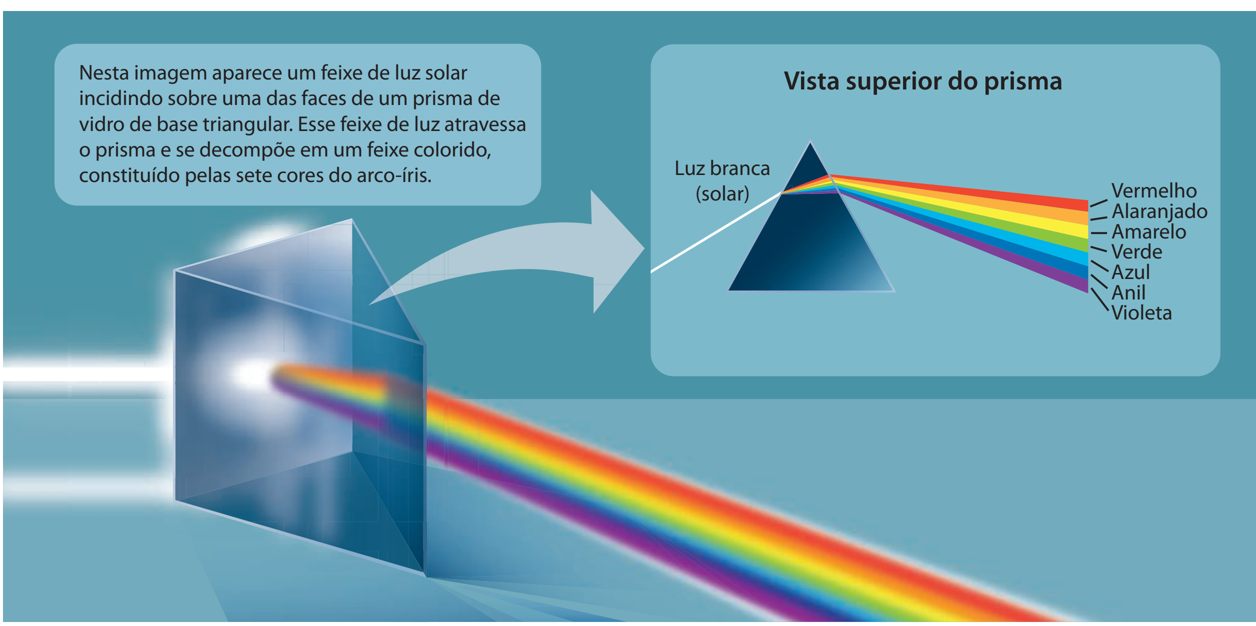
1st-ArtZone/Shutterstock.com

Cubo mágico.

FineArt/Alamy/Fotoarena/Galeria Nacional de retratos, Londres, Inglaterra

Retrato de Isaac Newton feito por Godfrey Kneller em 1702.

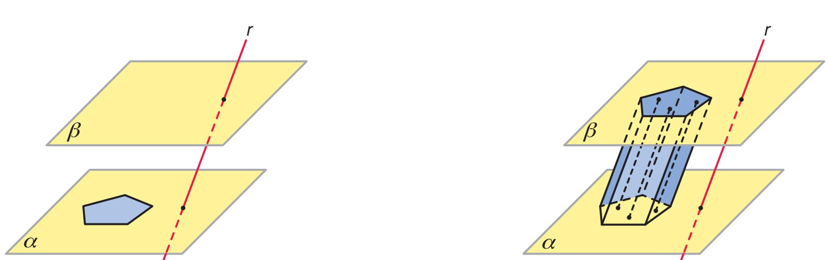
Isaac Newton (1642-1727), físico, matemático e astrônomo inglês, por exemplo, realizou diversos estudos importantes ligados à Matemática e à Física, entre os quais, podemos destacar os estudos relacionados à luz e às cores, nos quais ele utilizou um prisma de vidro de base triangular, como apresentado a seguir.



Emiliano Cavalcante

Podemos definir prisma da seguinte maneira:

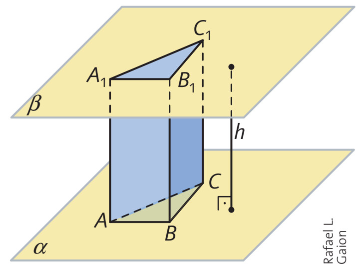
Considere dois planos paralelos α e β, uma reta r concorrente a esses planos e um polígono convexo contido em α. Denomina-se **prisma** a reunião de todos os segmentos de reta paralelos a r com uma extremidade no polígono dado e a outra no plano β.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Elementos do prisma

Em um prisma, podemos destacar alguns elementos. Veja no prisma ao lado quais são esses elementos.

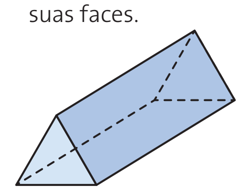


Rafael L. Gaion

- **Bases**: são os polígonos congruentes e que estão situados nos planos α e β, paralelos entre si. No caso da imagem, as bases são os polígonos: ABC e $A_1B_1C_1$.
- **Arestas das bases**: são os lados dos polígonos das bases. No caso da imagem: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$ e $\overline{A_1C_1}$.
- **Faces laterais**: são as demais faces do prisma, exceto as bases. No caso da imagem, as faces laterais são paralelogramos: ABB_1A_1, BCC_1B_1 e ACC_1A_1.
- **Arestas laterais**: são as demais arestas do prisma, exceto as das bases. No caso da imagem, temos: $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ e $\overline{CC_1}$.
- **Altura**: é a distância entre os planos das bases $(\alpha$ e $\beta)$. Na figura, h representa a medida da altura do prisma.

Observação

Nem sempre os prismas estão apoiados sobre suas bases. Eles também podem estar apoiados sobre uma de suas faces laterais, ou ainda, não estar apoiados sobre qualquer uma de suas faces.



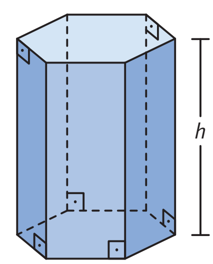
Sergio L. Filho

Classificação

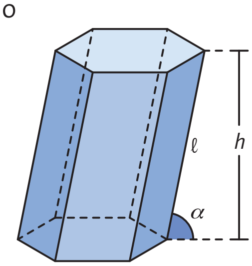
Explique aos alunos que, nas tarefas de Enem e vestibular, exceto quando dito o contrário, devemos considerar prismas retos.

Um prisma pode ser **reto** ou **oblíquo**.

- **Prisma reto**: é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares às bases, e a altura h corresponde ao comprimento da aresta lateral.
- **Prisma oblíquo**: é aquele cujas arestas laterais são oblíquas em relação às bases, e a altura está relacionada ao comprimento ℓ da aresta e ao ângulo α de inclinação. Esse é o ângulo entre a aresta lateral e sua projeção ortogonal no plano da base.



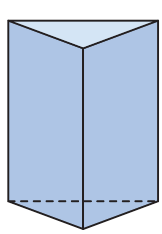
prisma reto



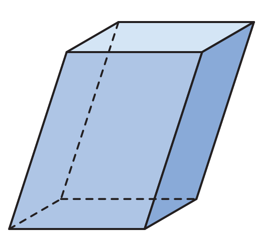
prisma oblíquo

De acordo com o polígono da base, um prisma pode ser denominado:

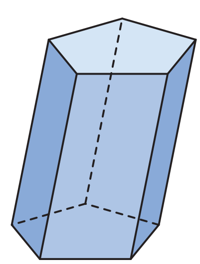
- **triangular**, se a base for um triângulo;
- **quadrangular**, se a base for um quadrilátero;
- **pentagonal**, se a base for um pentágono; e assim por diante.



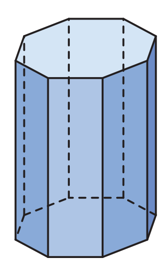
prisma de base triangular



prisma de base quadrangular



prisma de base pentagonal



prisma de base octogonal

Ilustrações: Rafael L. Gaion

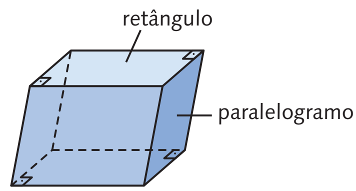
Um prisma reto cujas bases são polígonos regulares é chamado **prisma regular**.

Paralelepípedo

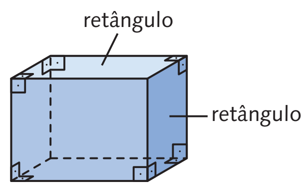
Alguns prismas quadrangulares recebem nomes especiais de acordo com suas características. Um deles é o **paralelepípedo**, prisma quadrangular cujas bases são paralelogramos. Um paralelepípedo também pode ser **reto** ou **oblíquo**.

Dentre os paralelepípedos, temos:

- **Paralelepípedo retângulo**: as bases são retângulos.

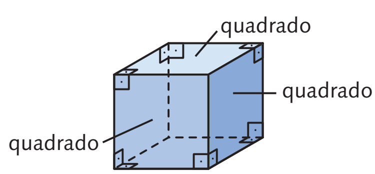


- **Paralelepípedo reto retângulo**: as bases e as faces laterais são retângulos.



Sugira aos alunos que pesquisem por que as ruas atualmente não são mais pavimentadas com paralelepípedos.

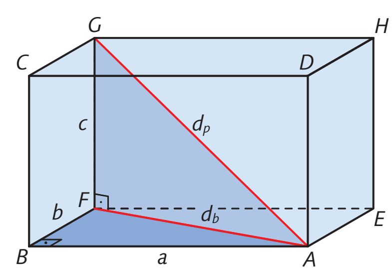
Observação
Se um paralelepípedo reto retângulo tem todas as faces quadradas, recebe o nome de **cubo**.



Trecho de rua pavimentada com paralelepípedos no município de Pomerode (SC), em junho de 2019.

Durante certo período, a pavimentação de ruas com os chamados paralelepípedos, foi uma boa opção, por se tratar de um material resistente, que não faz buracos e permite uma boa permeabilidade ao piso. Ainda hoje existem cidades (históricas e grandes centros) com essas pavimentações, mas grande parte está sendo recoberta com asfalto. Na pavimentação desse tipo, os blocos de pedra são colocados lado a lado, e possuem o formato de paralelepípedo reto retângulo.

Diagonal do paralelepípedo reto retângulo



Observe o paralelepípedo reto retângulo representado ao lado.

- a, b e c são as dimensões do paralelepípedo.
- d_p é o comprimento da diagonal do paralelepípedo.
- d_b é o comprimento da diagonal da base do paralelepípedo.

Note que o $\triangle ABF$ é retângulo e que d_b corresponde ao comprimento de sua hipotenusa.
Note que o $\triangle AFG$ também é retângulo e que d_p corresponde ao comprimento de sua hipotenusa.
De acordo com o teorema de Pitágoras, temos:

- $\triangle ABF$

$$(d_b)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \boxed{d_b = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Se um paralelepípedo reto retângulo é um cubo, temos $a = b$. Nesse caso:

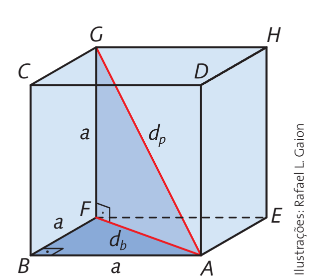
$$d_b = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} \Rightarrow \boxed{d_b = a\sqrt{2}}$$

- $\triangle AFG$

$$(d_p)^2 = \underbrace{(d_b)^2}_{a^2 + b^2} + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow \boxed{d_p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Se um paralelepípedo reto retângulo é um cubo, temos $a = b = c$. Nesse caso:

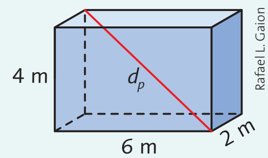
$$d_p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow \boxed{d_p = a\sqrt{3}}$$



Assim, o comprimento da diagonal do paralelepípedo reto retângulo será $d_p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ e o comprimento da diagonal do cubo, $d_p = a\sqrt{3}$.

Problemas e exercícios resolvidos

R17. Calcule o comprimento da diagonal do paralelepípedo reto retângulo.



Resolução

As dimensões, em metros, do paralelepípedo são dadas por $a = 6$, $b = 2$ e $c = 4$. Assim:

$$d_p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{6^2 + 2^2 + 4^2} =$$
$$= \sqrt{36 + 4 + 16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14} \rightarrow 2\sqrt{14}\text{ m}$$

R18. Qual o comprimento da aresta de um cubo cuja diagonal tem $3\sqrt{2}$ cm de comprimento?

Resolução

Indicando por a o comprimento da aresta, temos:

$$d_p = a\sqrt{3} \Rightarrow 3\sqrt{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = a \Rightarrow \frac{3\sqrt{6}}{3} = a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = \sqrt{6} \simeq 2{,}45 \rightarrow \text{aproximadamente } 2{,}45\text{ cm}$$

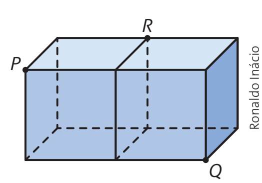
Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

53. Em relação ao número de lados do polígono da base, como pode ser classificado um prisma que tem:

a) 7 faces? prisma de base pentagonal
b) 12 arestas? prisma de base quadrangular
c) 12 vértices? prisma de base hexagonal

54. (Famerp-SP) Dois cubos idênticos, de aresta igual a 1 dm, foram unidos com sobreposição perfeita de duas das suas faces. P é vértice de um dos cubos, Q é vértice do outro cubo e R é vértice compartilhado por ambos os cubos, conforme indica a figura.

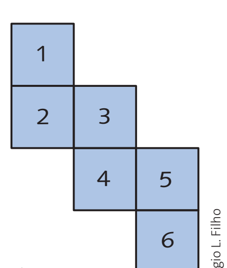


A área do triângulo de vértices P, Q e R é igual a a

a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ dm²
b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ dm²
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ dm²
d) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ dm²
e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ dm²

55. (UFRGS-RS) A figura ao lado representa a planificação de um cubo cujas faces foram numeradas de 1 a 6.

O produto dos números que estão nas faces adjacentes à face de número 1 é: c



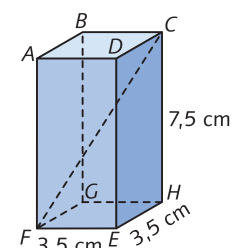
a) 120
b) 144
c) 180
d) 240
e) 360

56. Um paralelepípedo reto retângulo tem 60 cm de altura, 80 cm de comprimento e 50 cm de largura. Calcule o comprimento da aresta de um cubo cujo comprimento da diagonal é $\frac{2}{3}$ do comprimento da diagonal desse paralelepípedo.
$\frac{100}{9}\sqrt{15}$ cm

55. Caso os alunos tenham dúvida, diga a eles que adjacente significa situado em local próximo ou cujos lados são comuns.

57. Determine o número de pares de arestas não adjacentes em um prisma pentagonal. 75 pares

58. Qual é a área do triângulo FCH indicado no prisma reto de base quadrada representado ao lado?
aproximadamente 18,6 cm²



59. Resposta pessoal. Possível resposta: qual é a medida da diagonal de um paralelepípedo reto retângulo cujas medidas de suas dimensões são 8 cm, 6 cm e 4 cm?

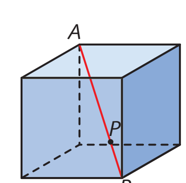
Você produtor

59. Determine as dimensões de um paralelepípedo reto retângulo. Depois, peça a um colega que calcule o comprimento da diagonal desse paralelepípedo. Em seguida, verifique se a resposta está correta.

60. Em um paralelepípedo reto retângulo, o comprimento da diagonal é igual a $\sqrt{110}$ cm e suas dimensões correspondem a números consecutivos. Calcule em centímetros, as dimensões desse paralelepípedo. 5 cm, 6 cm e 7 cm

61. Na figura, $\overline{AB}$ é uma diagonal do cubo e o ponto P, em $\overline{AB}$, é tal que $\frac{AP}{AB} = \frac{3}{4}$.

Sabendo que o comprimento da aresta do cubo é $8\sqrt{3}$ cm, determine o comprimento de $\overline{PB}$. 6 cm

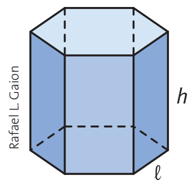


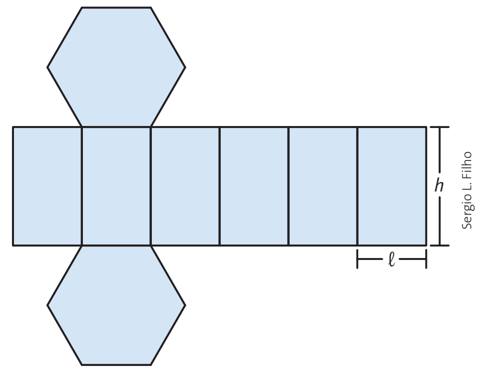
Você produtor

62. Determine o comprimento da diagonal de um cubo e peça a um colega que calcule o comprimento de sua aresta. Depois, verifique se a resposta está correta. Resposta pessoal. Possível resposta: o comprimento da diagonal de um cubo é 30 cm. Qual é o comprimento de sua aresta?

Área da superfície de um prisma

Nas imagens abaixo estão representados um prisma regular de base hexagonal e a planificação da respectiva superfície.





Observação
Não é possível planificar um sólido. Em alguns casos, como o prisma regular de base hexagonal apresentado, podemos planificar sua superfície. Desse modo, quando dizemos "planificação de um cubo", na verdade estamos nos referindo à planificação da superfície do cubo.

A **superfície lateral** de um prisma é a reunião de todas as suas faces laterais. A área dessa superfície é chamada **área lateral do prisma** (A_ℓ).

No caso do prisma apresentado, a área lateral é 6 vezes a área de uma face lateral (retângulo), isto é:

$$A_\ell = 6 \cdot \underbrace{(h \cdot \ell)}_{\text{área de uma face lateral}} = 6h\ell$$

A **área da base** corresponde à área do polígono que constitui sua base (A_b).

No caso do prisma apresentado, a área da base é a área do hexágono regular, isto é, 6 triângulos equiláteros.

$$A_b = 6 \cdot \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

A **superfície total** de um prisma é a reunião da superfície lateral com as bases. A área dessa superfície é chamada **área total do prisma** (A_t).

A área total de um prisma é a área lateral mais duas vezes a área da base, isto é: $A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b$

No caso do prisma apresentado:

$$A_t = \underbrace{A_\ell}_{6h\ell} + 2\underbrace{A_b}_{\frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}} = 6h\ell + 2 \cdot \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2} = 6h\ell + 3\ell^2\sqrt{3}$$

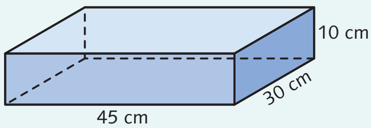
STEKLO/Shutterstock.com

Na elaboração de uma embalagem são considerados vários aspectos, como o logotipo da empresa, a cor, os modos de conservação e de transporte do produto, sua resistência e o seu manuseio.

O crescimento do consumo de produtos industrializados foi acompanhado pela preocupação do mercado em desenvolver embalagens feitas de materiais ecologicamente corretos – que não agridem o meio ambiente – e, de preferência, recicláveis. Também se busca sempre as melhores formas, a fim de maximizar a quantidade de produto embalado e minimizar a quantidade de material utilizado diminuindo, assim, os gastos da empresa e os resíduos gerados pela sua produção. Embalagens em formato de prisma são exemplos observados atualmente que visam a atender esses critérios.

Problemas e exercícios resolvidos

R19. Considere o paralelepípedo reto retângulo a seguir.



Em relação a esse paralelepípedo, calcule a área:

a) da base. b) lateral. c) total.

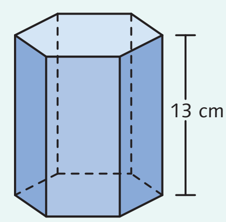
Resolução

a) Área da base: $A_b = 30 \cdot 45 = 1350 \rightarrow 1\,350\ \text{cm}^2$

b) Área lateral: $A_\ell = 2 \cdot \underbrace{(10 \cdot 45)}_{450} + 2 \cdot \underbrace{(10 \cdot 30)}_{300} = 900 + 600 = 1\,500 \rightarrow 1\,500\ \text{cm}^2$

c) Área total: $A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b = 1\,500 + 2 \cdot 1\,350 = 4\,200 \rightarrow 4\,200\ \text{cm}^2$

R20. A área da base de um prisma hexagonal regular é $54\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ e sua altura é 13 cm. Calcule a área lateral desse prisma.



Resolução

Para calcularmos a área lateral, precisamos saber a área de uma face lateral. Por isso, calculamos inicialmente o comprimento da aresta da base do prisma, que corresponde a um lado do hexágono que compõe a base. Como a área do hexágono regular é dada por $A = \dfrac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$, temos:

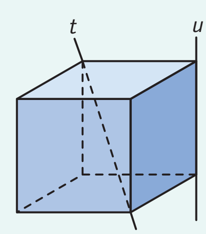
$$54\sqrt{3} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 108\sqrt{3} = 3\ell^2\sqrt{3} \Rightarrow \ell^2 = \frac{108\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 36 \Rightarrow \ell = \sqrt{36} = 6 \rightarrow 6\ \text{cm}$$

Calculando a área de uma face lateral: $A_{face} = 6 \cdot 13 = 78 \rightarrow 78\ \text{cm}^2$

Como a área lateral do prisma é dada pela soma das áreas das 6 faces retangulares laterais, multiplicamos a área da face lateral por 6.

$$A_\ell = 6 \cdot A_{face} = 6 \cdot 78 = 468 \rightarrow 468\ \text{cm}^2$$

R21. (UPM-SP) Se, no cubo da figura, a distância entre as retas t e u é $3\sqrt{2}$, a área total desse cubo é:



a) 150 b) 300 c) 216 d) 180 e) 280

Resolução

A distância entre as retas t e u é o comprimento do segmento que une os pontos médios da diagonal e da aresta do cubo, o que corresponde à metade do comprimento da diagonal da base. Assim, temos:

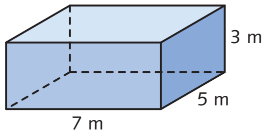
$$\frac{\ell\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 6$$

$$A_t = 6 \cdot 6^2 = 216$$

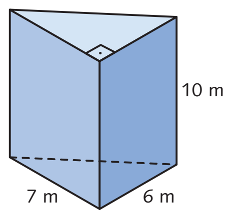
Portanto, a resposta desta questão é a alternativa **c**.

63. Calcule a área total dos prismas.

a) Paralelepípedo reto retângulo. $142\ m^2$

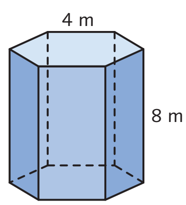


b) Prisma reto triangular. $(172 + 10\sqrt{85})\ m^2$



c) Prisma regular hexagonal. $(48\sqrt{3} + 192)\ m^2$

65. Resposta pessoal. Possível resposta: determine a área da base de um prisma regular pentagonal, sabendo que sua altura mede 20 cm e a aresta da base é 6 cm.



Ilustrações: Ronaldo Inácio

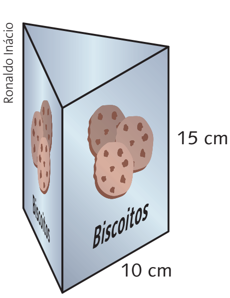
64. Calcule a área total de um paralelepípedo reto retângulo, sabendo que suas dimensões são dadas por x cm, $(x + 3)$ cm e $(x + 6)$ cm, com $x > 0$, e a diagonal de uma das faces maiores tem 15 cm de comprimento. $468\ cm^2$

Você produtor

65. Determine a altura (em cm), o comprimento da aresta da base (em cm) e a área total (em cm^2) de um prisma regular pentagonal. Em seguida, peça a um colega que calcule a área da base desse prisma. Depois, verifiquem se as resoluções estão corretas.

66. A altura de um prisma regular de base hexagonal é o triplo do comprimento da aresta da base. Sabendo que a aresta tem a cm de comprimento, calcule a área lateral do prisma em função de a. $18a^2\ cm^2$

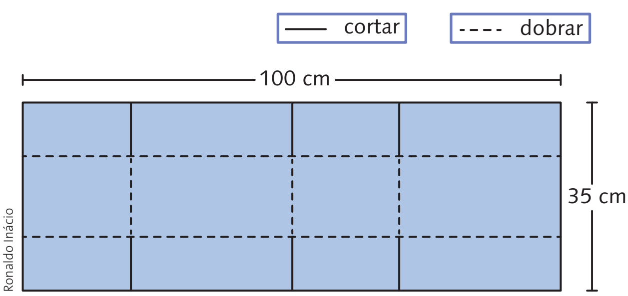
67. A embalagem representada é feita de alumínio e tem formato de prisma regular triangular. Calcule o número máximo de embalagens iguais a essa que podem ser produzidas com $2\ m^2$ de alumínio, considerando que no processo de produção não ocorra desperdício de material. 37 embalagens



Ronaldo Inácio

68. João vai construir uma caixa de som no formato de um cubo. Para isso, ele tem à sua disposição uma placa de madeira com 15 000 cm^2. Qual será o comprimento da aresta da caixa que João vai construir, sabendo que não ocorreu desperdício de material e ela será a maior possível? 50 cm

69. Uma empresa de doces terceiriza parte da produção das caixas de papelão utilizadas como embalagem. Certo mês, a empresa fabricou $\frac{1}{3}$ das caixas utilizadas, sendo o restante terceirizado. Veja a planificação da superfície de uma dessas caixas.



Ronaldo Inácio

a) Qual é a área total de papelão de cada caixa? $3\ 500\ cm^2$

b) Sabendo que, nesse mês, a empresa utilizou 2 700 m^2 de papelão na fabricação das caixas, quantas embalagens foram fabricadas na empresa? E quantas foram terceirizadas?

7 714 embalagens; 15 428 embalagens

Em grupo

70. (UPF-RS) Uma pequena empresa especializada em embalagens para presentes produz, mensalmente, 100 embalagens retangulares com altura de 10 cm e base com dimensões 15 cm × 20 cm, levando-se em conta 100% de aproveitamento do material utilizado. Num determinado mês, foi feito um pedido especial para embalagens com a base em forma de prisma hexagonal regular, com altura de 10 cm e com o lado da base de 15 cm. Como a empresa dispõe de estoque apenas para a produção habitual e levando-se em conta que, para esse pedido especial, serão consumidos 20% a mais de papelão do que o calculado para o acabamento da caixa, será possível confeccionar, aproximadamente: c

(Considere $\sqrt{3} = 1{,}73$.)

a) 32 embalagens
b) 42 embalagens
c) 52 embalagens
d) 62 embalagens
e) 72 embalagens

Volume de um prisma

A metrologia é a ciência que trata das medições. O ato de medir é uma atividade mais corriqueira do que parece. Ao verificar a massa de um objeto em uma balança, por exemplo, estamos observando no mostrador o resultado de uma medição de massa. Assim como podemos medir a massa de um objeto, o comprimento de um cômodo e a área de uma sala de aula, também é possível medir o volume de um objeto tridimensional. Situações envolvendo medidas de volume estão presentes em muitos momentos de nosso cotidiano.

As imagens não estão representadas em proporção.

R.M. Nunes/Shutterstock.com

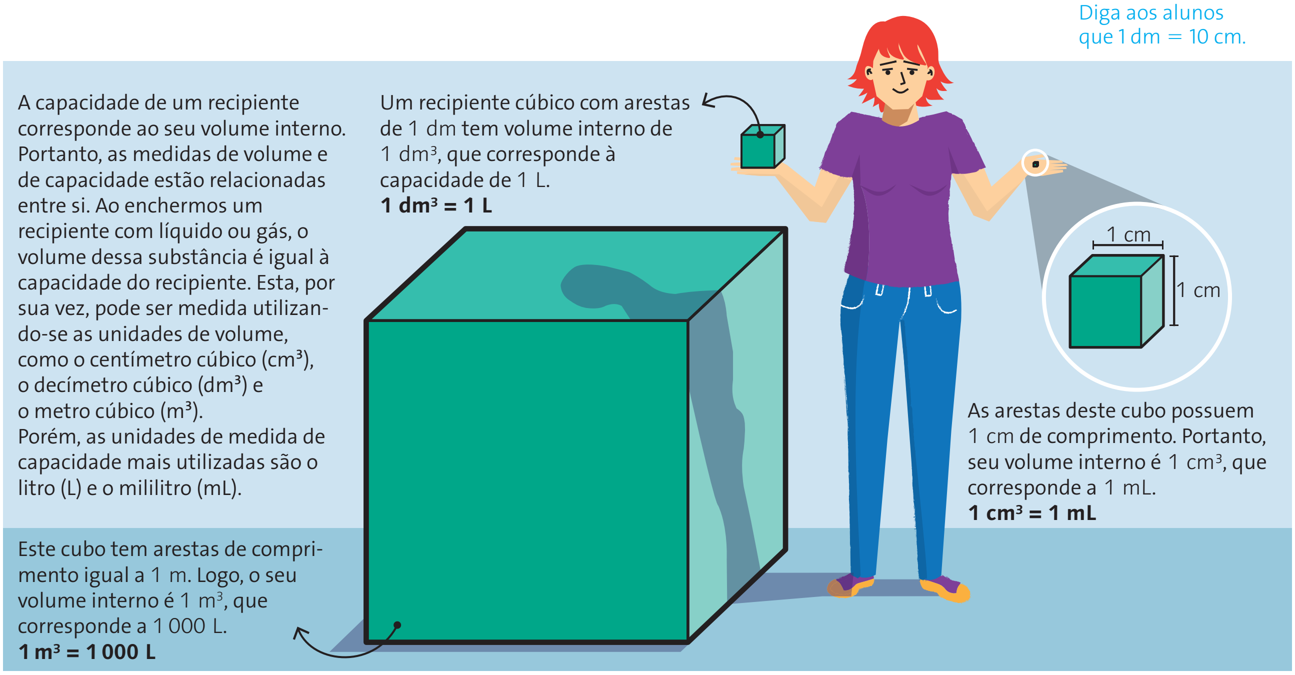
As Cataratas do Iguaçu, em 17 de março de 2019. Um dos mais belos destinos turísticos do mundo, são formadas pelas quedas do rio Iguaçu e localizam-se no oeste do estado do Paraná. A vazão média de água do rio está em torno de 1 500 m^3/s, variando de 500 m^3/s nas ocasiões de seca e de 6 500 m^3/s nas cheias.

Vadim Ratnikov/Shutterstock.com

A areia, "parte miúda" resultante da desagregação de rochas, é um elemento fundamental em algumas construções. Comercializada em volume, medido em metros cúbicos (m^3), é usada desde as fundações até as coberturas, passando pela estrutura, vedações e acabamentos.

Das unidades de medida de volume, as mais utilizadas são o centímetro cúbico (cm^3), o decímetro cúbico (dm^3) e o metro cúbico (m^3).

Diga aos alunos que 1 dm = 10 cm.



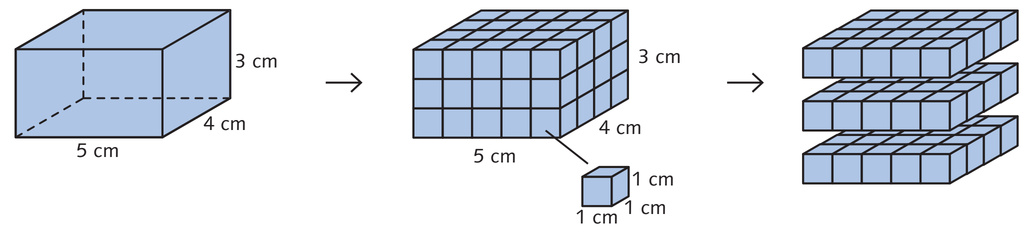
Emiliano Cavalcante

Agora, vamos estudar como se calcula o volume de alguns prismas.

Solicite aos alunos que levem para a aula uma caixa de leite e verifiquem suas dimensões, e, a seguir, o volume interno dessa caixa, que é 1 L. Por fim, pergunte: Quais alterações são necessárias nas dimensões dessa caixa a fim de obter uma caixa cúbica de mesmo volume?

Volume do paralelepípedo reto retângulo

O paralelepípedo reto retângulo representado a seguir foi decomposto em cubos com $1\ cm^3$ de volume.



Ronaldo Inácio

Para calcular a quantidade de cubos em que esse paralelepípedo foi decomposto, efetuamos o seguinte cálculo:

$$\underbrace{5 \cdot 4}_{\text{cubos em cada camada}} \cdot \overbrace{3}^{\text{número de camadas}} = 60$$

Esse paralelepípedo foi decomposto em 60 cubos com $1\ cm^3$. Portanto, o volume desse paralelepípedo é $60\ cm^3$.

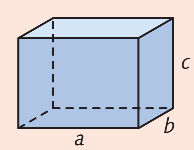
Podemos obter esse resultado multiplicando as dimensões desse paralelepípedo.

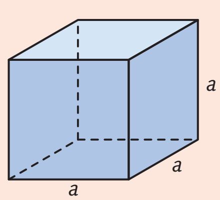
$$V = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \rightarrow 60\ cm^3$$

De modo geral:

Para calcular o volume de um paralelepípedo reto retângulo, basta multiplicar as medidas de suas dimensões.

$$V = a \cdot b \cdot c$$





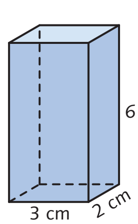
O volume de um cubo pode ser calculado de maneira semelhante. Como as dimensões do cubo são iguais, temos:

$$V = a \cdot a \cdot a \text{ ou } V = a^3$$

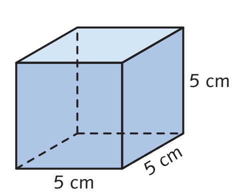
Observando a expressão $V = a \cdot b \cdot c$, podemos notar que o produto $a \cdot b$ corresponde à área da base do paralelepípedo (A_b). Assim, podemos escrever essa expressão da seguinte maneira: $V = A_b \cdot c$

Exemplo

Veja como podemos calcular o volume do paralelepípedo reto retângulo e do cubo.



$$V = a \cdot b \cdot c = 3 \cdot 2 \cdot 6 = 36 \rightarrow 36\ cm^3$$

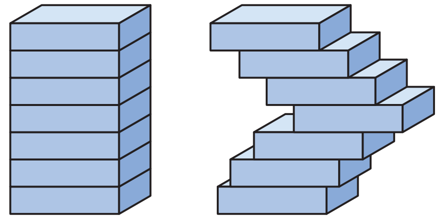


$$V = a^3 = 5^3 = 125 \rightarrow 125\ cm^3$$

Ilustrações: Rafael L. Gaion

Princípio de Cavalieri

Observe a representação de duas pilhas com 7 caixas no formato de paralelepípedo reto retângulo, todas de dimensões iguais.



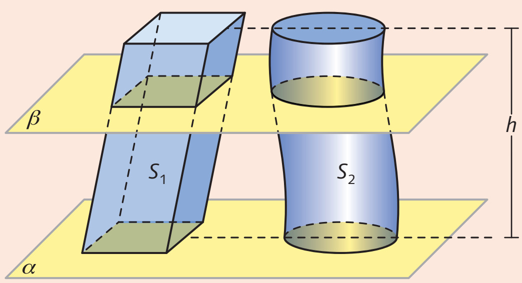
Sergio L. Filho

Qualquer que seja a maneira de empilhar essas caixas, o volume de cada pilha será o mesmo.

Com essa situação, ilustramos um princípio, chamado **princípio de Cavalieri**, que diz:

Sejam dois sólidos, S_1 e S_2, de mesma altura h, apoiados em um mesmo plano horizontal α. Se todo plano paralelo a α cortar um dos sólidos e cortar também o outro, determinando duas regiões planas de mesma área, então esses sólidos têm volumes iguais.

Cada região plana determinada pela interseção de um plano paralelo a α é denominada **seção transversal**.



O princípio de Cavalieri pode ser demonstrado; no entanto, isso não será feito neste livro. Apenas iremos considerá-lo verdadeiro.

Reprodução/Biblioteca Município de Trento, Itália

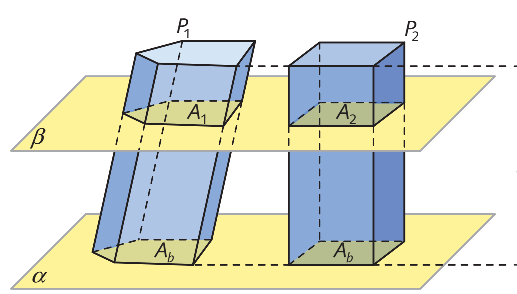
Gravura de Bonaventura Cavalieri, feita em 1837.

O italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647) foi discípulo de Galileu Galilei (1564-1642). Ele escreveu sobre muitos aspectos da Matemática pura e aplicada (geometria, trigonometria, astronomia e óptica) e foi o primeiro autor italiano a apreciar o valor dos logaritmos. Sua obra *Geometria indivisibilibus continuorum*, de 1635, é considerada uma das mais influentes do início do período moderno. Ela contém o "método dos indivisíveis", conhecido como princípio de Cavalieri.

Fonte de pesquisa: EVES, Horward. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

Calculando o volume de um prisma

Consideremos um prisma qualquer (P_1) e um paralelepípedo reto retângulo (P_2), ambos de altura h, apoiados em um plano horizontal α, de modo que suas bases tenham áreas iguais (A_b). Um plano β qualquer, paralelo a α, corta os dois sólidos, determinando regiões planas (seções transversais) de áreas A_1 e A_2.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Note que essas seções têm áreas iguais, pois são congruentes às respectivas bases: $A_1 = A_b$ e $A_2 = A_b$. Logo, $A_1 = A_2$.

De acordo com o princípio de Cavalieri, os dois sólidos têm o mesmo volume:

$$V_{\text{prisma}} = V_{\text{paralelepípedo}}$$

Como o volume do paralelepípedo é dado por $V_{\text{paralelepípedo}} = A_b \cdot h$, segue que:

$$\boxed{V_{\text{prisma}} = A_b \cdot h}$$

Assim, podemos determinar o volume de um prisma multiplicando a área da base pela sua altura.

Problemas e exercícios resolvidos

R22. Calcule o volume de um cubo cuja área total é 384 cm².

Resolução

No cubo, todas as 6 faces (4 laterais e 2 bases) têm o formato de quadrados congruentes. Denominando de A a área de cada uma dessas faces, temos:

$$A_t = 384 \Rightarrow 6 \cdot A = 384 \Rightarrow A = \frac{384}{6} = 64 \rightarrow 64 \text{ cm}^2$$

Como cada face é um quadrado, o comprimento de cada aresta a é dada por:

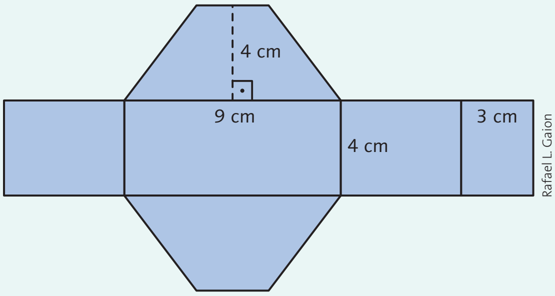
$$A = 64 \Rightarrow a^2 = 64 \Rightarrow a = \sqrt{64} = 8 \rightarrow 8 \text{ cm}$$

Dessa maneira, calculamos o volume do cubo:

$$V = a^3 = 8^3 = 512 \rightarrow 512 \text{ cm}^3$$

Observação
Nesse caso, $a = 8$, pois $a > 0$.

R23. Na figura ao lado está representada a planificação da superfície de um prisma reto.
Calcule o volume desse prisma.



Resolução

Vamos determinar a área da base A_b do prisma. Como a base é um trapézio, temos:

$$A_b = \frac{(9 + 3) \cdot 4}{2} = \frac{48}{2} = 24 \rightarrow 24 \text{ cm}^2$$

Assim, como a altura é 4 cm, o volume V é:

$$V = 24 \cdot 4 = 96 \rightarrow 96 \text{ cm}^3$$

Portanto, o volume é 96 cm³.

R24. (Acafe-SC) Uma caixa-d'água em formato cúbico tem a capacidade de armazenar 8 000 litros de água. Devido a problemas nessa caixa-d'água, foi realizada a troca por outra em formato de prisma hexagonal regular. Sabendo que altura e a capacidade das duas caixas não se alteraram, qual o perímetro da base desse novo reservatório?
Considere $\sqrt[4]{12} = 1{,}86$.

a) 4,54 metros.
b) 6,44 metros.
c) 8,54 metros.
d) 7,44 metros.

Resolução

Sabemos que a primeira caixa-d'água tem formato cúbico e sua capacidade de armazenamento é 8 000 L. Como 1 m³ = 1 000 L, então 8 m³ = 8 000 L. Calculando o comprimento da aresta desse reservatório, temos:

$$V = a^3 \Rightarrow 8 = a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{8} = 2 \rightarrow 2 \text{ m}$$

Como o volume na nova caixa em formato de prisma hexagonal regular também é 8 m³ (8 000 L) e a altura é 2 m, calculamos a área de sua base.

$$V = A_b \cdot h \Rightarrow 8 = A_b \cdot 2 \Rightarrow A_b = 4 \rightarrow 4 \text{ m}^2$$

A base no novo reservatório tem o formato de um hexágono regular, que pode ser dividido em seis triângulos equiláteros. Assim, podemos determinar o comprimento do lado do hexágono regular a partir da área da base da seguinte maneira:

$$A_b = 6 \cdot \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow 4 = 6 \cdot \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow 16 = 6 \cdot \ell^2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \ell^2 = \frac{16}{6\sqrt{3}} \Rightarrow \ell^2 = \frac{8}{3\sqrt{3}} \Rightarrow$$

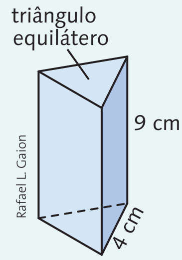
$$\Rightarrow \ell^2 = \frac{8\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \ell = \sqrt{\frac{8\sqrt{3}}{9}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 2\sqrt{3}}}{3} = \frac{2\sqrt{2\sqrt{3}}}{3} = \frac{2\sqrt[4]{12}}{3} = \frac{2 \cdot 1{,}86}{3} = 1{,}24 \rightarrow 1{,}24 \text{ m}$$

Portanto, o perímetro da base do novo reservatório será:

$$6 \cdot 1{,}24 = 7{,}44 \rightarrow 7{,}44 \text{ m}$$

Assim, a alternativa correta é **d**.

R25. Determine o volume deste prisma reto.



Resolução

Inicialmente, calculamos a área da base. Como esta é um triângulo equilátero, temos:

$$A_b = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \rightarrow 4\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

Calculando o volume do prisma:

$$V = A_b \cdot h = 4\sqrt{3} \cdot 9 = 36\sqrt{3} \simeq 62{,}35 \rightarrow \text{aproximadamente } 62{,}35\text{ cm}^3$$

R26. De certo reservatório cujo formato é cúbico, que estava totalmente cheio, foram retirados 1800 L de água, fazendo o nível da água baixar 20 cm. Qual é a capacidade total, em litros, desse reservatório?

Resolução

Como 1000 L = 1 m^3, foram retirados 1,8 m^3 de água do reservatório. Além disso, como 1 cm = 0,01 m, segue que 20 cm = 0,2 m. Indicando por x o comprimento da aresta do reservatório, em metros, o volume do reservatório cheio é dado por $x \cdot x \cdot x$ e o volume da água após a retirada é dado por $x \cdot x \cdot (x - 0{,}2)$. Assim:

$$\begin{aligned} x \cdot x \cdot x - 1{,}8 &= x \cdot x \cdot (x - 0{,}2) \\ x \cdot x \cdot x - x \cdot x \cdot (x - 0{,}2) &= 1{,}8 \\ x \cdot x \cdot (x - x + 0{,}2) &= 1{,}8 \\ x \cdot x \cdot 0{,}2 &= 1{,}8 \\ x^2 &= \frac{1{,}8}{0{,}2} \\ x^2 &= 9 \end{aligned}$$

Assim, $x = 3$, ou seja, 3 m. Desse modo, o volume do reservatório é dado por $3^3 = 27$, isto é, 27 m^3, e sua capacidade é 27 000 L.

R27. (Enem) Uma empresa especializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento da água cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado 1,5 mL desse produto para cada 1 000 L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m respectivamente. O nível da lâmina d’água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina.

A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender às suas especificações técnicas é

a) 11,25.
b) 27,00.
c) 28,80.
d) 32,25.
e) 49,50.

Resolução

Inicialmente, calculamos o volume de água que a piscina contém.

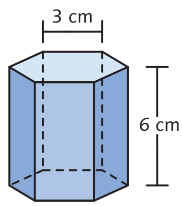
$$V = 3 \cdot 5 \cdot (1{,}7 - 0{,}5) = 15 \cdot 1{,}2 = 18 \rightarrow 18\text{ m}^3$$

Sabendo que em 1 000 L (ou 1 m^3) é necessário adicionar 1,5 mL do produto, calculamos:

$$1{,}5 \cdot 18 = 27 \rightarrow 27\text{ mL}$$

Portanto, a alternativa correta é **b**.

71. Calcule o volume do seguinte prisma hexagonal regular. aproximadamente 140,3 cm^3

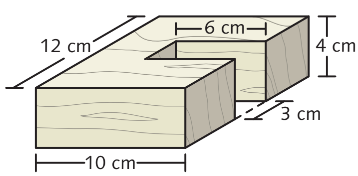


Ronaldo Inácio

72. Qual é o volume de um cubo cujo comprimento da aresta tem 12 dm? 1 728 dm^3

73. A figura representa uma peça de madeira maciça, a qual faz parte de um quebra-cabeça. Nessa peça, todas as arestas que se encontram são perpendiculares entre si.

Determine o volume da peça com base nas medidas indicadas. 408 cm^3

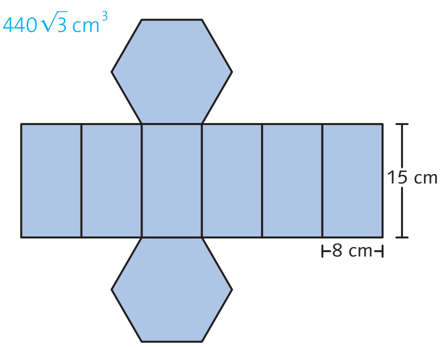


Ronaldo Inácio

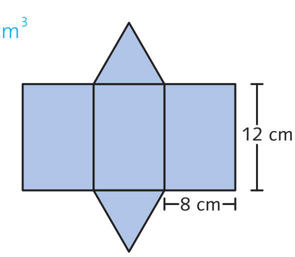
Observação
Note que essa peça pode ser decomposta em três partes com formatos de paralelepípedo reto retângulo.

74. Calcule o volume de cada prisma regular cuja superfície tem sua planificação representada a seguir.

a) $1440\sqrt{3}$ cm^3



b) $192\sqrt{3}$ cm^3



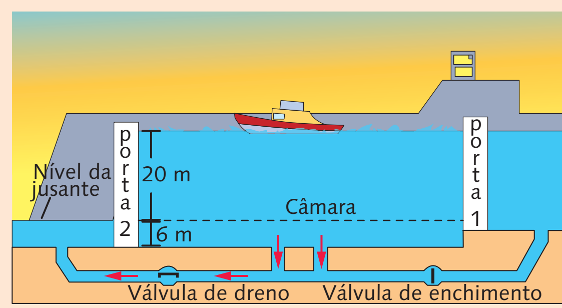
Ilustrações: Rafael L. Gaion

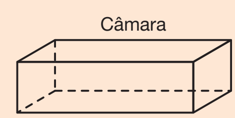
75. Uma caixa-d'água no formato de paralelepípedo reto retângulo deverá ser construída de maneira que as medidas internas de sua largura e seu comprimento sejam, respectivamente, 16 dm e 25 dm. Qual deverá ser a altura interna da caixa-d'água para que sua capacidade seja de 7 200 L? 18 dm

Observação
1 dm = 10 cm
1 dm^3 = 1 L

Em grupo Veja na Assessoria pedagógica sugestão de trabalho com esta tarefa.

76. (Enem) Eclusa é um canal que, construído em águas de um rio com grande desnível, possibilita a navegabilidade, subida ou descida de embarcações. No esquema a seguir, está representada a descida de uma embarcação, pela eclusa do porto Primavera, do nível mais alto do Rio Paraná até o nível da jusante.





Ilustrações: Rafael L. Gaion

Enquanto a válvula de enchimento está fechada e a de dreno, aberta, o fluxo de água ocorre no sentido indicado pelas setas, esvaziando a câmara até o nível da jusante. Quando, no interior da câmara, a água atinge o nível da jusante, a porta 2 é aberta, e a embarcação pode continuar navegando rio abaixo.

A câmara dessa eclusa tem comprimento aproximado de 200 m e largura igual a 17 m. A vazão aproximada da água durante o esvaziamento da câmara é de 4 200 m^3 por minuto. Assim, para descer do nível mais alto até o nível da jusante, uma embarcação leva cerca de: d

a) 2 minutos
b) 5 minutos
c) 11 minutos
d) 16 minutos
e) 21 minutos

77. Dobrando-se o comprimento da aresta de um cubo, o seu volume: e

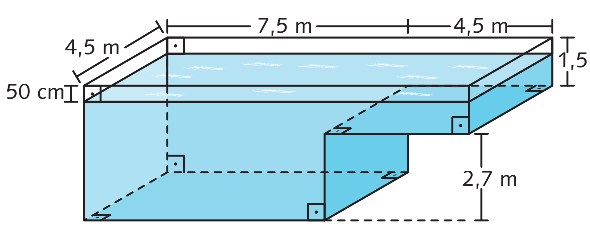
a) duplica.
b) não se altera.
c) triplica.
d) quadruplica.
e) é multiplicado por 8.

78. Um caminhão, cuja carroceria tem o formato de paralelepípedo reto retângulo está carregado com metade de sua capacidade. Após percorrer parte da viagem, foi adicionado à sua carga o correspondente à metade daquilo que já carregava, totalizando 24 m^3.

a) Qual é a capacidade máxima do caminhão? 32 m^3

b) Determine as dimensões internas da carroceria do caminhão, sabendo que elas são proporcionais a 0,4; 0,5 e 2,5. 1,6 m, 2 m e 10 m

79. A piscina de um clube está com água até a medida indicada na figura e, para esvaziá-la, é utilizada uma bomba de sucção cuja vazão de 1 600 L de água por minuto é constante. Determine o tempo necessário, em minutos, para que a piscina seja totalmente esvaziada. aproximadamente 91 minutos



Rafael L. Gaion

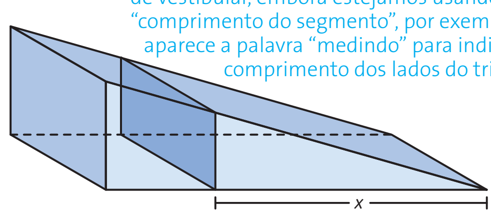
Na tarefa **79**, as dimensões indicadas na imagem não estão proporcionais, pois, caso contrário, tornaria inviável sua representação nesta página.

Observação

Essa piscina pode ser decomposta em duas partes com formatos de paralelepípedo reto retângulo.

80. (UFPE) Um pedaço de queijo tem a forma de um prisma triangular reto, tendo por base um triângulo com um dos lados medindo 8 cm, como ilustrado a seguir.

Na tarefa **80**, por se tratar de uma questão de vestibular, embora estejamos usando "comprimento do segmento", por exemplo, aparece a palavra "medindo" para indicar o comprimento dos lados do triângulo.

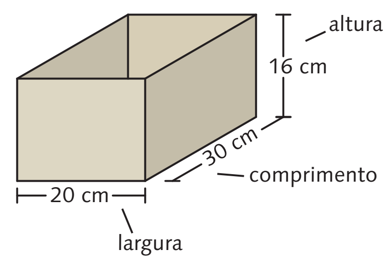


Ronaldo Inácio

O queijo deve ser dividido em dois pedaços de mesmo volume por um plano paralelo a uma das faces. Qual o valor de x? a

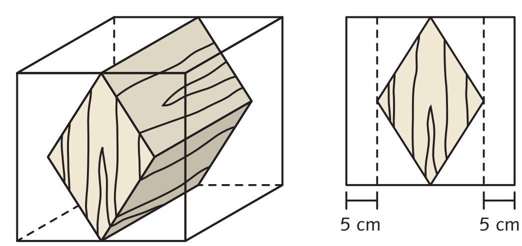
a) $2^{\frac{5}{2}}$ cm
b) $2^{\frac{3}{8}}$ cm
c) 4 cm
d) $2^{\frac{4}{3}}$ cm
e) 5 cm

81. Para armazenar seus produtos, uma fábrica utiliza caixas em formato de paralelepípedo reto retângulo, conforme a figura. Um novo modelo de caixa será utilizado, o qual terá o mesmo volume da caixa original, mas com altura e comprimento alterados. Para que a altura seja reduzida em 25%, qual deverá ser o comprimento da nova caixa? 40 cm



Rafael L. Gaion

82. De um bloco cúbico de madeira cujo volume era 64 dm^3, um marceneiro moldou uma peça no formato de prisma reto cuja base é um losango.

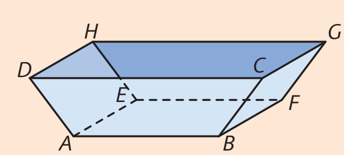


Sergio L. Filho

Determine, em decímetros cúbicos, o volume da peça moldada. 24 dm^3

Em grupo

83. (Ibmec-SP) Uma caçamba para recolher entulho, sem tampa, tem a forma de um prisma reto, conforme mostra a figura, em que o quadrilátero $ABCD$ é um trapézio isósceles.



Rafael L. Gaion

As dimensões da caçamba, dadas em metros, são $AB = 2$, $CD = 3{,}2$, $BC = 1$ e $CG = 1{,}5$.

a) Calcule a capacidade dessa caçamba, em metros cúbicos. 3,12 m^3

b) As chapas de aço que compõem a caçamba devem ser protegidas com tinta anticorrosiva, tanto na parte interna quanto na parte externa. Calcule a área a ser pintada, em metros quadrados. 20,32 m^2

7 Pirâmides

Neste tópico, iremos estudar outro tipo de poliedro: as **pirâmides**.

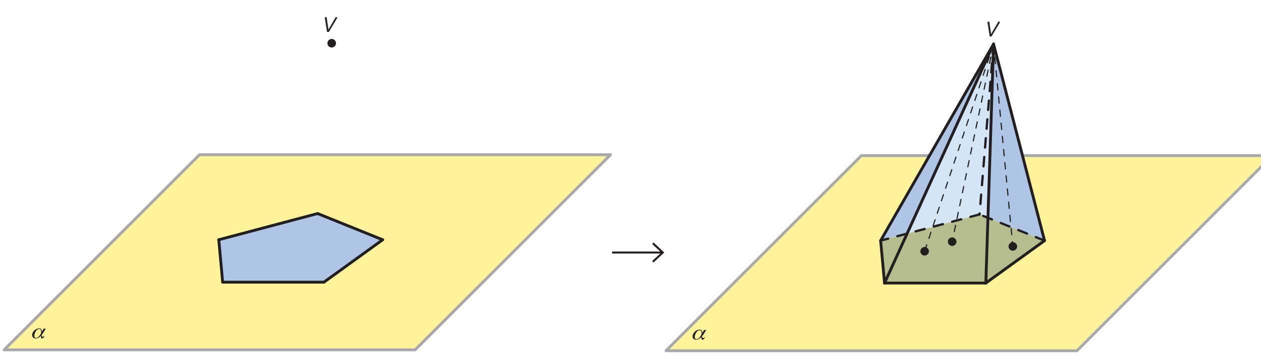
Fonte de inspiração para muitos, elas estão presentes em vários monumentos. Quando o assunto é pirâmide, pensamos imediatamente nas pirâmides do Egito, conhecidas em todo o mundo pela imponência, beleza e os mistérios que as cercam. No entanto, há outros monumentos modernos e interessantes nos quais as pirâmides estão presentes. Veja o exemplo.

Robert Harding/Alamy/Fotoarena

Na cidade de Edmonton, no Canadá, encontra-se o Conservatório Muttart. Trata-se de um local de visitação composto por quatro grandes pirâmides de vidro nas quais são cultivadas milhares de belas e raras plantas de todo o mundo. Fotografia de outubro de 2017.

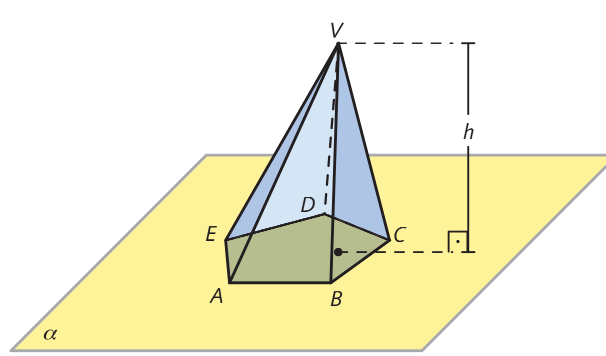
Podemos definir pirâmide da seguinte maneira:

Sejam um plano α, um polígono convexo contido nesse plano e um ponto V não pertencente ao plano. Denomina-se **pirâmide** a reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em V e a outra em um ponto do polígono.



Elementos da pirâmide

Em uma pirâmide, podemos destacar alguns elementos. Na pirâmide ao lado, temos:



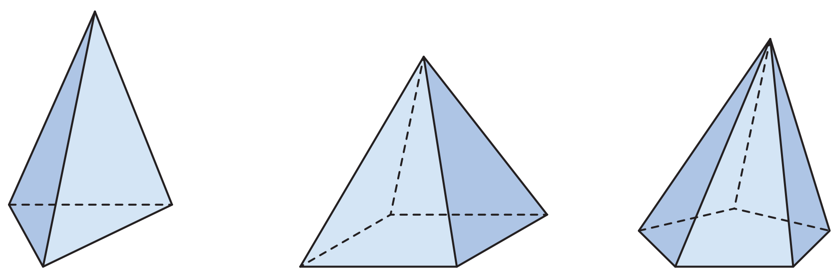
Ilustrações: Rafael L. Gaion

- **base**: é o polígono $ABCDE$.
- **vértice**: é o ponto V.
- **arestas da base**: são os lados do polígono da base. Nesse caso: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{AE}$.
- **arestas laterais**: são as demais arestas da pirâmide, exceto as da base. Nesse caso: $\overline{AV}$, $\overline{BV}$, $\overline{CV}$, $\overline{DV}$ e $\overline{EV}$.
- **faces laterais**: são as demais faces da pirâmide, exceto a base. As faces laterais são triângulos. Nesse caso: $\triangle ABV$, $\triangle BCV$, $\triangle CDV$, $\triangle DEV$ e $\triangle AEV$.
- **altura**: é a distância entre o plano da base (α) e o vértice V. Na figura, h representa a medida da altura da pirâmide.

Classificação

De acordo com o polígono da base, uma pirâmide pode ser denominada:

- **triangular** (ou tetraedro), se a base for um triângulo;
- **quadrangular**, se a base for um quadrilátero;
- **pentagonal**, se a base for um pentágono; e assim por diante.



pirâmide triangular | pirâmide quadrangular | pirâmide pentagonal

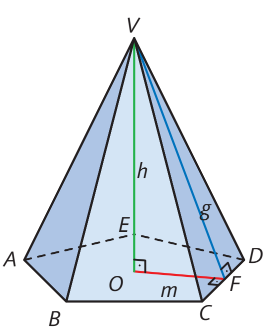
Ilustrações: Sergio L. Filho

Uma pirâmide é dita **regular** quando sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal de seu vértice no plano que contém sua base coincide com o centro do polígono da base.

Em uma pirâmide regular:

- as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes;
- o apótema do polígono regular da base é chamado **apótema da base**;
- a altura de uma face lateral relativa à aresta da base é chamada **apótema da pirâmide**.

Rafael L. Gaion



g: comprimento do apótema da pirâmide
m: comprimento do apótema da base
h: altura da pirâmide

Se necessário, diga aos alunos que apótema corresponde ao raio de uma circunferência inscrita em um polígono regular.

A pirâmide alimentar é um agrupamento de alimentos de acordo com suas funções e seus nutrientes que serve para orientar as pessoas a terem uma alimentação mais saudável. Ela é composta por seis níveis com nove grandes grupos, de acordo com a participação relativa no total de calorias de uma dieta saudável.

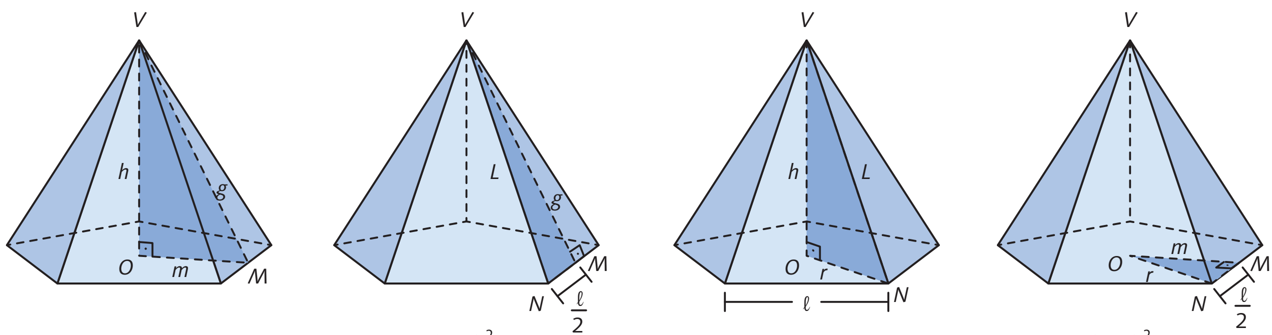
Fonte de pesquisa: BRASIL. Ministério da Saúde. *Guia alimentar para a população brasileira*. Disponível em: <http://www.saude.gov.br/images/pdf/2014/novembro/05/Guia-Alimentar-para-a-pop-brasiliera-Miolo-PDF-Internet.pdf>. Acesso em: 9 jul. 2020.

Heloísa Pintarelli

Pirâmide alimentar.

Em qualquer pirâmide regular podemos destacar 4 importantes triângulos retângulos, nos quais, por meio do teorema de Pitágoras, é possível calcular algumas medidas. Veja os exemplos:

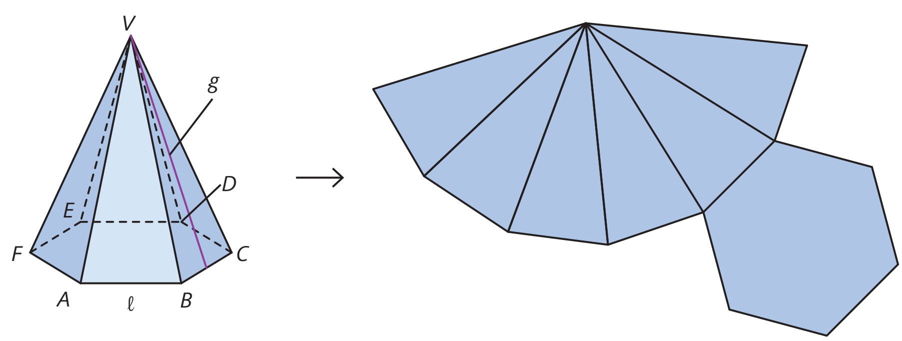
$\triangle VOM$ | $\triangle VMN$ | $\triangle VON$ | $\triangle OMN$



$g^2 = m^2 + h^2$ | $L^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + g^2$ | $L^2 = r^2 + h^2$ | $r^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m^2$

Área da superfície de uma pirâmide

Nas imagens a seguir, estão representadas uma pirâmide regular de base hexagonal e a planificação de sua superfície.



Rafael L. Gaion

Ronaldo Inácio

A **superfície lateral** de uma pirâmide é a reunião de todas as suas faces laterais. A área dessa superfície é chamada **área lateral da pirâmide** (A_ℓ).

No caso da pirâmide representada, a área lateral é 6 vezes a área de uma face.

$$A_\ell = 6 \cdot \underbrace{\left(\frac{\ell \cdot g}{2}\right)}_{\text{área de uma face lateral}} = 3\ell g$$

A **área da base** de uma pirâmide corresponde à área do polígono que a constitui (A_b).

No caso da pirâmide apresentada, a área da base é a área do hexágono regular, isto é, de 6 triângulos equiláteros: $A_b = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$

A **superfície total** de uma pirâmide é a reunião da superfície lateral com a base. A área dessa superfície é chamada **área total da pirâmide** (A_t).

A área total de uma pirâmide é a área lateral mais a área da base, isto é: $A_t = A_\ell + A_b$.

No caso da pirâmide apresentada: $A_t = \underbrace{A_\ell}_{3\ell g} + \underbrace{A_b}_{\frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}} = 3\ell g + \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$

Problemas e exercícios resolvidos

R28. Considere uma pirâmide hexagonal regular cuja aresta da base tem comprimento de 4 cm e altura 6 cm. Determine:

a) o comprimento do apótema da base.

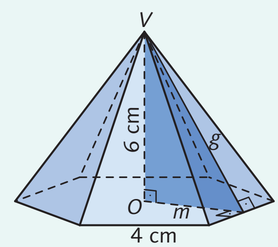
b) o comprimento do apótema da pirâmide.

c) a área lateral.

d) a área da base.

e) a área total.

Resolução



Rafael L. Gaion

a) Como a área da base é um hexágono regular, m é a altura de um triângulo equilátero com 4 cm de lado. Dessa maneira:

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \simeq 3{,}46 \rightarrow \text{aproximadamente } 3{,}46 \text{ cm}$$

b) O apótema da pirâmide é dado por:

$$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow g^2 = 6^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow g^2 = 36 + 12 \Rightarrow g = 4\sqrt{3} \simeq 6{,}93 \rightarrow \text{aproximadamente } 6{,}93 \text{ cm}$$

c) A área lateral é dada por:

$$A_\ell = 6 \cdot \left(\frac{\ell \cdot g}{2}\right) = 6 \cdot \left(\frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2}\right) = 48\sqrt{3} \simeq 83{,}14 \rightarrow \text{aproximadamente } 83{,}14 \text{ cm}^2$$

d) Como a base é um hexágono regular, a área da base é dada por:

$$A_b = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot 4^2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \simeq 41{,}57 \rightarrow \text{aproximadamente } 41{,}57 \text{ cm}^2$$

e) A área total é dada por:

$$A_t = A_\ell + A_b = 48\sqrt{3} + 24\sqrt{3} = 72\sqrt{3} \simeq 124{,}71 \rightarrow \text{aproximadamente } 124{,}71 \text{ cm}^2$$

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

84. Sendo $\sqrt{3}$ m a altura de uma pirâmide quadrangular regular e 2 m a aresta da base, calcule:

a) a medida do apótema da base. 1 m

b) a medida do apótema da pirâmide. 2 m

c) a área lateral. 8 m^2

d) a área da base. 4 m^2

e) a área total. 12 m^2

85. Determine a área total de um tetraedro regular cujo comprimento de cada aresta é igual a 10 cm.
aproximadamente 173,2 cm^2

86. Partindo de um cubo cujo volume era 1 dm^3, construiu-se uma pirâmide. Para isso, tomou-se uma das bases do cubo como base da pirâmide e o encontro das diagonais da face oposta como vértice. Determine a área lateral dessa pirâmide.
aproximadamente 2,24 dm^2

87. Heitor construiu uma pirâmide hexagonal regular de madeira que tem 3 dm de altura e apótema da base com $3\sqrt{3}$ dm de comprimento. Qual é a área total dessa pirâmide?
aproximadamente 201,53 dm^2

88. (Fuvest-SP) Um telhado tem a forma da superfície lateral de uma pirâmide regular, de base quadrada. O lado da base mede 8 m e a altura da pirâmide é 3 m. As telhas para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem 1 m^2. Supondo que possa haver 10 lotes de telhas desperdiçadas (quebras e emendas), o número mínimo de lotes de telhas a ser comprado é: a

a) 90

b) 100

c) 110

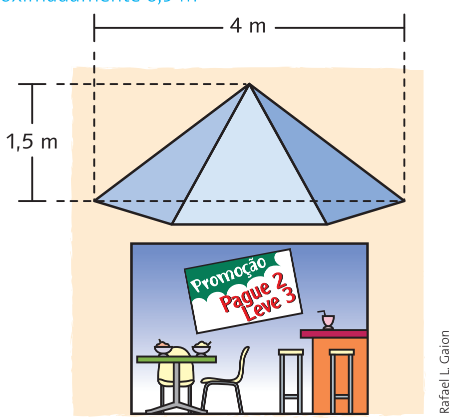
d) 120

e) 130

Na tarefa **88**, por se tratar de uma questão de vestibular, embora estejamos usando "comprimento do segmento", por exemplo, aparece a palavra "mede" para indicar o comprimento do lado da base do telhado.

89. Um pingente com formato de octaedro regular será utilizado na fabricação de um colar. Sendo a soma dos comprimentos das arestas desse pingente igual a 24 cm, determine a área de sua superfície.
aproximadamente 13,86 cm^2

90. Será instalado na fachada de uma sorveteria um toldo de lona com formato de meia pirâmide hexagonal regular. Com base na representação a seguir, determine, em metros quadrados, a quantidade mínima de lona necessária para o toldo.
aproximadamente 6,9 m^2

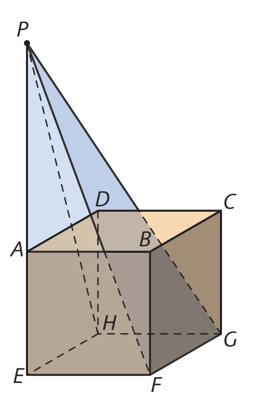


Rafael L. Gaion

91. Considere a pirâmide regular de base quadrada *ABCDE*, na qual *E* é o vértice. Sabendo que a aresta da base tem 12 cm de comprimento, e que a área da pirâmide é igual a 624 cm^2, calcule a área do triângulo *MNE*, em que *M* é o ponto médio do lado $\overline{AB}$ da base, *N* é o ponto médio do lado $\overline{CD}$ e $\overline{AB} // \overline{CD}$. $12\sqrt{91}$ cm^2

92. (UEL-PR) Considere o cubo de aresta 3 cm e vértices *ABCDEFGH*. Considere o ponto *P* situado no prolongamento da aresta $\overline{EA}$, de modo que *PA* = 5 cm, como está estabelecido na figura.

Na tarefa **92**, por se tratar de uma questão de vestibular, embora estejamos usando "comprimento do segmento", por exemplo, aparece a palavra "medem" para indicar os comprimentos da menor e da maior aresta lateral da pirâmide.



Rafael L. Gaion

A maior e a menor aresta lateral da pirâmide *PEFGH* medem, respectivamente: a

a) $\sqrt{82}$ cm e 8 cm
b) $\sqrt{82}$ cm e 4 cm
c) $\sqrt{43}$ cm e 8 cm
d) 20 cm e 10 cm
e) 12 cm e 8 cm

No trabalho com a tarefa **95**, explique aos alunos que o centro de um quadrado coincide com o ponto de encontro das suas diagonais.

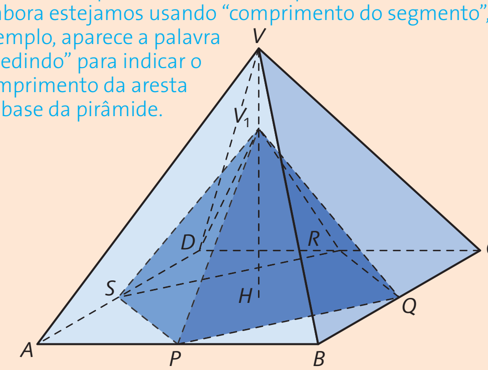
Você produtor

93. Determine as dimensões, em centímetros, de uma pirâmide triangular regular. De acordo com a pirâmide, elabore algumas questões e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se as resoluções estão corretas. Resposta pessoal. Possível resposta: uma pirâmide triangular regular tem arestas igual a 8 cm.
a) Qual é a medida do apótema dessa pirâmide?
b) Determine a área total dessa pirâmide.

Em grupo

94. (Uespi) Para a exposição dos quadros de um famoso pintor do século XVI, num salão de forma piramidal regular, de base quadrada medindo *AB* = 20 m e altura *VH* = 6 m, em que *H* situa-se no meio do quadrado da base *ABCD*, foi montada uma nova pirâmide $PQRSV_1$, agora de vidro, também regular, com altura igual a $\frac{2}{3}$ da altura do salão e os pontos *P*, *Q*, *R* e *S* situados nos pontos médios dos lados da base *ABCD*, conforme figura abaixo.

Na tarefa **94**, por se tratar de uma questão de vestibular, embora estejamos usando "comprimento do segmento", por exemplo, aparece a palavra "medindo" para indicar o comprimento da aresta da base da pirâmide.



Rafael L. Gaion

Na face PQV_1, foi feita no vidro uma abertura de área igual a 6 m^2, para possibilitar o acesso do público. Na construção da parte lateral da pirâmide $PQRSV_1$, sem a porta, foram gastos, em vidro, o equivalente a *x* metros quadrados. Nessas condições, é correto afirmar que o inteiro mais próximo do valor mínimo de *x* é: $\left(\text{Considere } \sqrt{33} = 5{,}74.\right)$ c

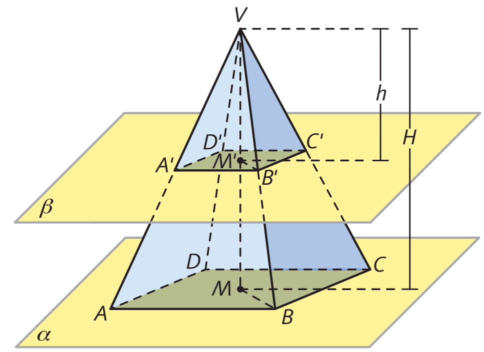
a) 146 m^2
b) 196 m^2
c) 224 m^2
d) 297 m^2
e) 315 m^2

95. (UFPI) A alternativa na qual consta a área superficial, medida em cm^2, do poliedro regular cujos vértices são os centros das faces de um cubo cuja aresta mede *a* cm é: c

a) $3a^2$
b) $2a^2$
c) $\sqrt{3}a^2$
d) $\sqrt{2}a^2$
e) a^2

Na tarefa **95**, por se tratar de uma questão de vestibular, embora estejamos usando "comprimento do segmento", por exemplo, aparece a palavra "mede" para indicar o comprimento da aresta do cubo.

Volume de uma pirâmide



Temos ao lado a representação de uma pirâmide de base quadrada e vértice V. A base $ABCD$ dessa pirâmide está contida em um plano α. Temos também um plano β, paralelo a α, que corta a pirâmide determinando a seção transversal correspondente ao quadrado $A'B'C'D'$.

Os quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são semelhantes, pois têm os ângulos correspondentes congruentes e os lados correspondentes proporcionais.

A **razão de semelhança** entre os quadriláteros $A'B'C'D'$ e $ABCD$ é $\frac{h}{H}$. Essa razão pode ser justificada da seguinte maneira:

- $\triangle VM'B' \sim \triangle VMB$, então: $\frac{VB'}{VB} = \frac{\overbrace{VM'}^{h}}{\underbrace{VM}_{H}} \Rightarrow \frac{VB'}{VB} = \frac{h}{H}$
- $\triangle VA'B' \sim \triangle VAB$, então: $\frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} \Rightarrow \frac{VA'}{VA} = \frac{h}{H}$

e assim por diante.

A razão entre as áreas dos quadriláteros $A'B'C'D'$ e $ABCD$ é igual ao quadrado da razão de semelhança, isto é: $\frac{\text{área de } A'B'C'D'}{\text{área de } ABCD} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$

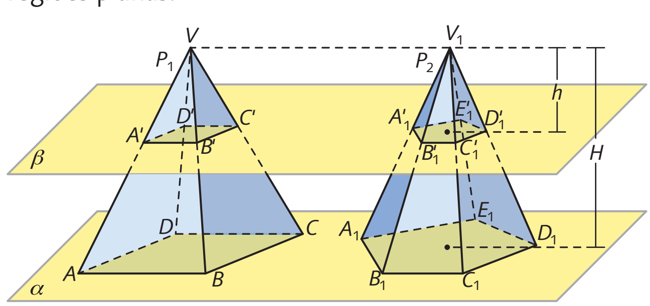
Observação
Essa propriedade foi estudada na página **65**, neste capítulo.

Agora, com base no que já estudamos, vamos provar o seguinte teorema:

> Duas pirâmides com a mesma altura e com as áreas das bases iguais têm o mesmo volume.

Demonstração

Sejam duas pirâmides, P_1 e P_2, de mesma altura H e cujas áreas das bases são iguais, apoiadas em um plano horizontal α. Seja também um plano β, paralelo a α, que corta as duas pirâmides determinando duas regiões planas.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Como $\frac{A_{A'B'C'D'}}{A_{ABCD}} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$ e $\frac{A_{A_1'B_1'C_1'D_1'E_1'}}{A_{A_1B_1C_1D_1E_1}} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$, temos: $\frac{A_{A'B'C'D'}}{A_{ABCD}} = \frac{A_{A_1'B_1'C_1'D_1'E_1'}}{A_{A_1B_1C_1D_1E_1}}$

Como as áreas das bases das pirâmides são iguais, ou seja, $A_{ABCD} = A_{A_1B_1C_1D_1E_1}$, concluímos que $A_{A'B'C'D'} = A_{A_1'B_1'C_1'D_1'E_1'}$, para qualquer plano β.

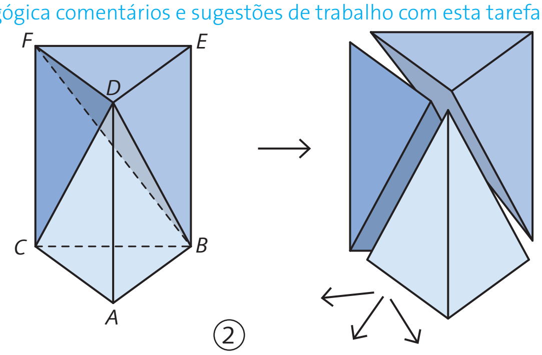
Assim, pelo princípio de Cavalieri, se todo plano paralelo a α determina, nas duas pirâmides, regiões planas de mesma área, os volumes das pirâmides P_1 e P_2 são iguais: $V_{P_1} = V_{P_2}$.

Cálculo do volume de uma pirâmide

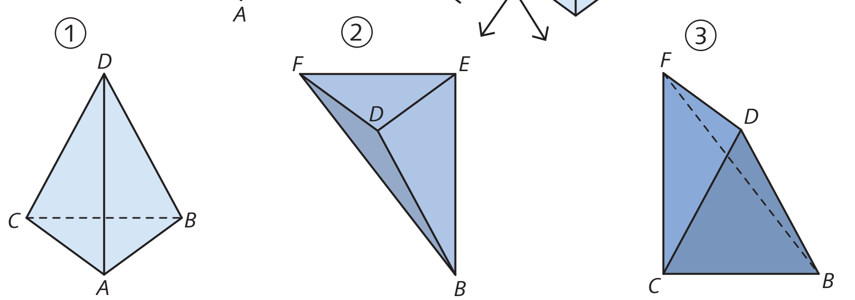
Neste tópico vamos investigar e obter uma fórmula para o cálculo do volume de uma pirâmide de base qualquer. Antes, porém, vamos calcular o volume de uma pirâmide triangular. Para isso, é possível relacionarmos esse volume a um prisma.

- Investigue, junto com um colega, qual seria esse prisma. Depois, elaborem uma maneira e obtenham uma relação entre o volume desse prisma e o da pirâmide triangular. *
- Agora, mostre que o volume V de uma pirâmide triangular pode ser obtido pela fórmula $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$, em que A_b e h são a área da base e altura da pirâmide, respectivamente.

Veja na Assessoria pedagógica comentários e sugestões de trabalho com esta tarefa.



*Nesta investigação, espera-se que os alunos respondam que é um prisma de base triangular. Para obter essa relação, é preciso decompor esse prisma em três pirâmides triangulares com a mesma base do prisma e com alturas iguais à do prisma. Com isso, espera-se que eles verifiquem que o volume do prisma é igual ao triplo do volume da pirâmide triangular com a mesma base do prisma e com altura igual à do prisma.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Observando as figuras, podemos notar que as pirâmides **1** e **2** têm o mesmo volume, pois:

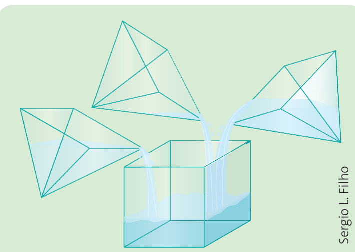
- as bases ABC e DEF são congruentes ($\triangle ABC \sim \triangle DEF$), visto que correspondem às bases do prisma;
- têm a mesma altura, que é igual à altura do prisma.

Podemos notar que as pirâmides **2** e **3** também têm o mesmo volume, pois:

- as bases BEF e BFC são congruentes ($\triangle BEF \sim \triangle BFC$), visto que correspondem à metade do paralelogramo $BEFC$ do prisma;
- têm a mesma altura, que corresponde à distância do ponto D ao paralelogramo $BEFC$.

Assim, concluímos que as 3 pirâmides têm o mesmo volume.

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_{\text{pirâmide}}$$



Sergio L. Filho

A prática indicada pode ser realizada utilizando um recipiente no formato de prisma e outro no formato de pirâmide, com a mesma base e mesma altura do prisma. Para encher o prisma de água, é necessário despejar nele a quantidade de água de três pirâmides cheias.

Logo, o volume de cada pirâmide corresponde à terça parte do volume do prisma.

$$V_{\text{prisma}} = V_1 + V_2 + V_3 \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 3 \cdot V_{\text{pirâmide}} \Rightarrow \boxed{V_{\text{pirâmide}} = \frac{V_{\text{prisma}}}{3}}$$

Vimos que $V_{\text{prisma}} = A_b \cdot h$. Assim:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{V_{\text{prisma}}}{3} \Rightarrow \boxed{V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_b \cdot h}{3}}$$

Observação

Essa relação é válida para o cálculo do volume de uma pirâmide de base qualquer. Isso é garantido pelo princípio de Cavalieri, pois duas pirâmides de mesma altura e com as áreas das bases iguais têm volumes iguais.

Problemas e exercícios resolvidos

R29. Calcule o volume de uma pirâmide regular de altura igual a 6 cm cuja base é um quadrado de lado 8 cm.

Resolução

Área da base da pirâmide:

$$A_b = 8 \cdot 8 = 64 \rightarrow 64\text{ cm}^2$$

Dessa maneira, o volume da pirâmide é dado por:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{64 \cdot 6}{3} = \frac{384}{3} = 128 \rightarrow 128\text{ cm}^3$$

R30. Numa pirâmide regular, a base é um hexágono de lado 4 cm. Qual deve ser a altura dessa pirâmide para que seu volume seja igual a 120 cm^3?

Resolução

A base da pirâmide é um hexágono regular. Dessa maneira, temos:

$$A_b = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot 4^2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \rightarrow 24\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

Utilizando a fórmula do volume da pirâmide, obtemos sua altura.

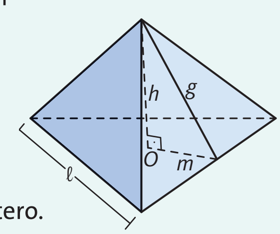
$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} \Rightarrow 120 = \frac{24\sqrt{3} \cdot h}{3} \Rightarrow 120 = 8\sqrt{3} \cdot h \Rightarrow h = \frac{120}{8\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3} \rightarrow 5\sqrt{3}\text{ cm}$$

R31. Sabendo que a área total de um tetraedro regular é $18\sqrt{3}$ cm^2, determine o seu volume.

Resolução

Inicialmente, obtemos o comprimento ℓ de cada aresta a fim de calcular o comprimento do apótema (g) da pirâmide. Como as 4 faces do tetraedro regular são triângulos equiláteros congruentes, temos:

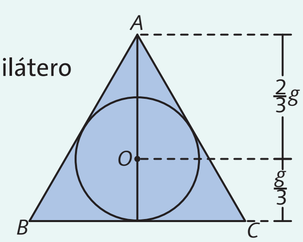
$$\underbrace{\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}}_{\text{área do triângulo equilátero}} = \underbrace{\frac{18\sqrt{3}}{4}}_{\text{área de cada face}} \Rightarrow \ell^2\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \Rightarrow \ell^2 = \frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 18 \Rightarrow \ell = 3\sqrt{2}$$



O comprimento do apótema da pirâmide é dado pela altura do triângulo equilátero.

$$g = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2} \rightarrow \frac{3\sqrt{6}}{2}\text{ cm}$$

O comprimento do raio da circunferência de centro O inscrita no triângulo equilátero corresponde a $\frac{1}{3}$ da altura do triângulo, ou seja, $m = \frac{g}{3}$.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Dessa maneira, o comprimento do apótema da base da pirâmide é dado por:

$$m = \frac{g}{3} = \frac{\frac{3\sqrt{6}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{6}}{2}\text{ cm}$$

Sabendo as medidas do apótema da pirâmide (g) e do apótema da base (m), calculamos a altura do tetraedro.

$$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{54}{4} = h^2 + \frac{6}{4} \Rightarrow$$

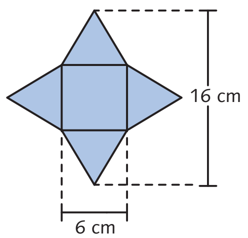
$$\Rightarrow h^2 = \frac{48}{4} = 12 \Rightarrow h = 2\sqrt{3} \rightarrow 2\sqrt{3}\text{ cm}$$

Agora, calculamos a área da base e, em seguida, o volume do tetraedro.

- $A_b = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{(3\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{9\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^2$
- $V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3}}{3} = 9 \rightarrow 9\text{ cm}^3$

96. Calcule o volume de uma pirâmide regular cuja altura é 24 cm e a base é um quadrado de lado 7 cm. $392\ cm^3$

97. A figura representa a planificação de uma embalagem com o formato de uma pirâmide regular de base quadrada.



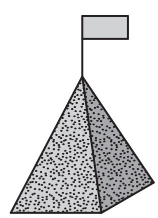
Sergio L. Filho

Em relação a essa embalagem, calcule:

a) a área total. $96\ cm^2$

b) o volume interno. $48\ cm^3$

98. (Unesp-SP) O prefeito de uma cidade pretende colocar em frente à prefeitura um mastro com uma bandeira, que será apoiado sobre uma pirâmide de base quadrada feita de concreto maciço, como mostra a figura.


Sergio L. Filho

Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 3 m e que a altura da pirâmide será 4 m, o volume de concreto, em metros cúbicos, necessário para a construção da pirâmide será: d

a) 36 b) 27 c) 18 d) 12 e) 4

Veja na Assessoria pedagógica comentários e sugestões de trabalho com esta tarefa.

Em grupo

99. (UEL-PR) As maiores pirâmides egípcias são conhecidas pelo nome de Pirâmides de Gizé e estão situadas às margens do Nilo. [...]
A maior e mais antiga é a de Quéops, que tem a forma aproximada de uma pirâmide de base quadrada com 230 m de lado e faces laterais que se aproximam de triângulos equiláteros.
Em Matemática, pirâmide é um sólido geométrico. O volume de um sólido com as dimensões da pirâmide de Quéops é: b

a) $\dfrac{230^3}{\sqrt{3}}\ m^3$

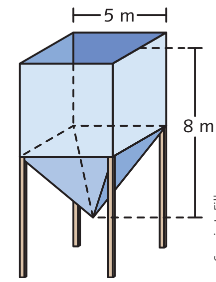
b) $\dfrac{230^3\sqrt{2}}{6}\ m^3$

c) $\dfrac{230^2\sqrt{3}}{4}\ m^3$

d) $\dfrac{230^3}{\sqrt{2}}\ m^3$

e) $\dfrac{230^3\sqrt{2}}{2}\ m^3$

100. Um pequeno silo para armazenar grãos tem o formato de um poliedro composto por um cubo e uma pirâmide regular, conforme a figura. Calcule, em litros, a capacidade de armazenamento desse silo. 150 000 L

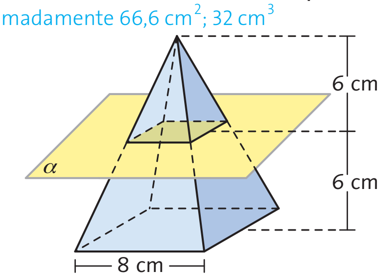


Sergio L. Filho

Observação
As medidas indicadas são internas.

101. A área da base de uma pirâmide hexagonal regular é $6\sqrt{3}\ cm^2$ e sua área lateral é 12 cm^2. Qual é o volume dessa pirâmide? $2\sqrt{3}\ cm^3$

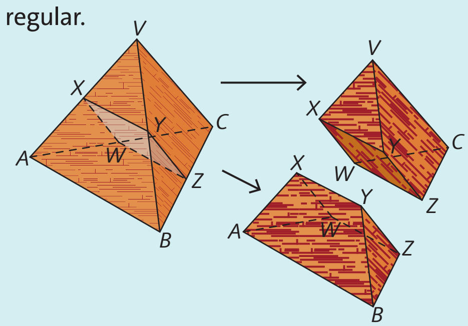
102. Seja uma pirâmide regular de altura 12 cm cuja base é um quadrado de lado 8 cm. Um plano α paralelo à base corta a pirâmide a 6 cm do vértice. Calcule a área total e o volume da pirâmide obtida.
aproximadamente $66{,}6\ cm^2$; $32\ cm^3$



Rafael L. Gaion

Desafio

103. Certo quebra-cabeça de madeira é composto de duas peças iguais, as quais foram obtidas com base em um objeto no formato de tetraedro regular.



Rafael L. Gaion

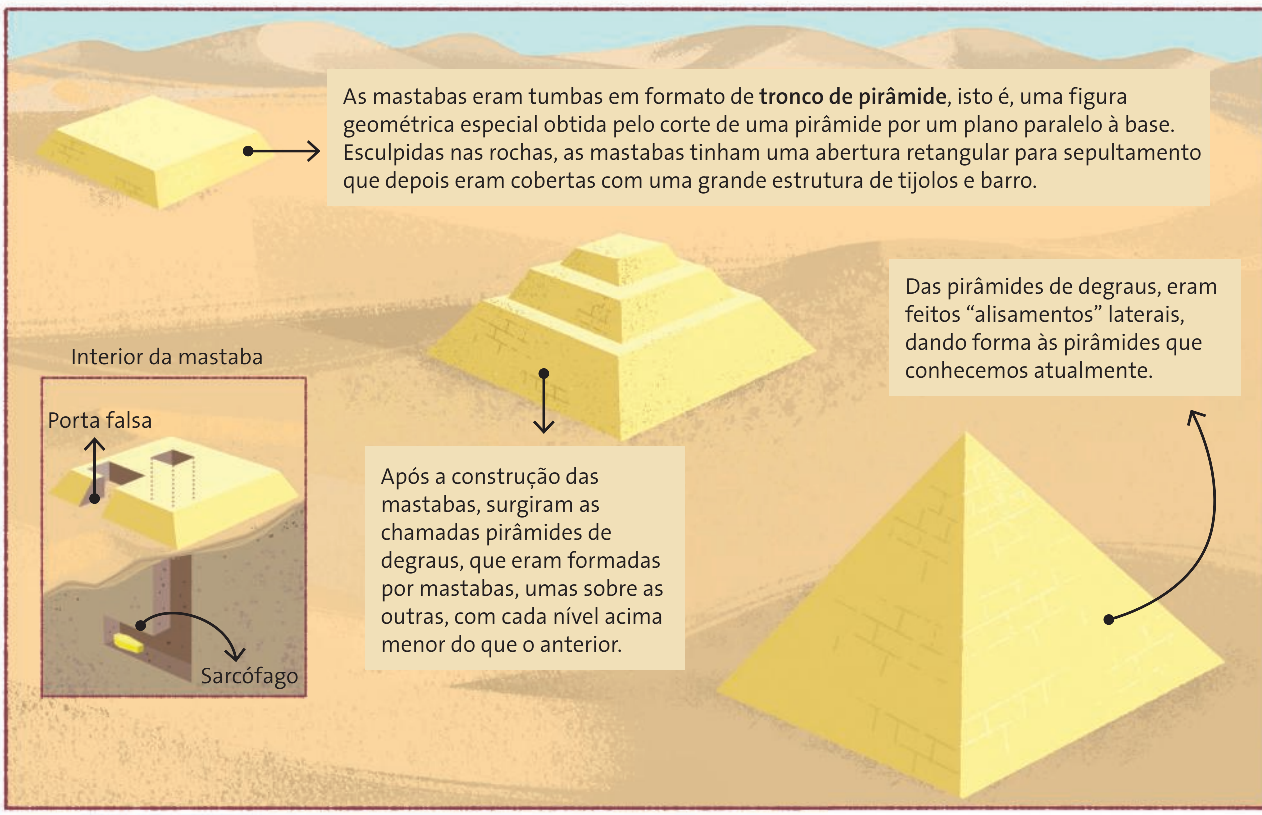
Note que foi realizado um corte transversal plano, passando por X, Y, Z e W, pontos médios de $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ respectivamente.
O triângulo VXY, face de uma das peças obtidas, tem área igual a $4\sqrt{3}\ cm^2$. Qual é o volume de cada uma dessas peças? $\dfrac{64\sqrt{2}}{3}\ cm^3$

Observação
O triângulo VXY é equilátero.

8 Tronco de pirâmide

A civilização egípcia é uma das mais antigas, com cerca de 6 000 anos. Desenvolvida às margens férteis do rio Nilo, essa civilização foi muito profícua, contribuindo em várias áreas do conhecimento, desde a criação de um sistema de numeração (os hieróglifos) a avanços na Medicina e grandes feitos na Arquitetura e na Engenharia.

No caso da engenharia, podemos destacar a construção das pirâmides. No entanto, antes de serem como as conhecemos hoje, os egípcios construíram as mastabas, como mostra a imagem.

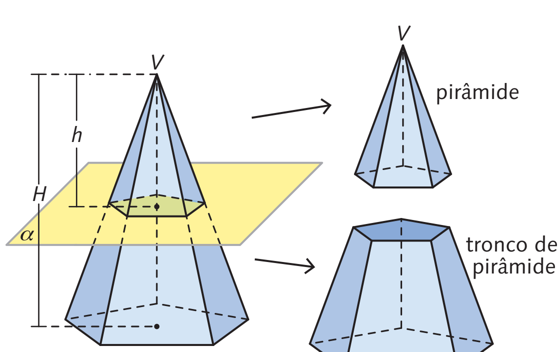


Bernardo França

Fonte de pesquisa: EGITO. Ministério do Turismo e Antiguidades. *The Step Pyramid Complex of Djoser*. Disponível em: <https://egymonuments.gov.eg/en/monuments/step-pyramid-of-djoser>. Acesso em: 29 jul. 2020.

Podemos definir tronco de pirâmide da seguinte maneira:

Consideremos uma pirâmide de base pentagonal com altura H e vértice V e um plano α paralelo à base, com distância h de V, determinando dois poliedros: uma pirâmide e um poliedro denominado **tronco de pirâmide**.

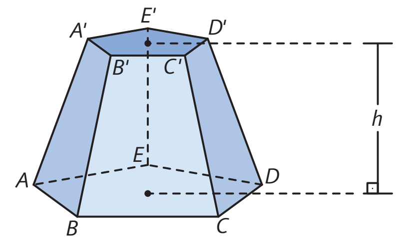


Rafael L. Gaion

Elementos do tronco de pirâmide

Em um tronco de pirâmide, podemos destacar alguns elementos. No tronco de pirâmide a seguir, temos:

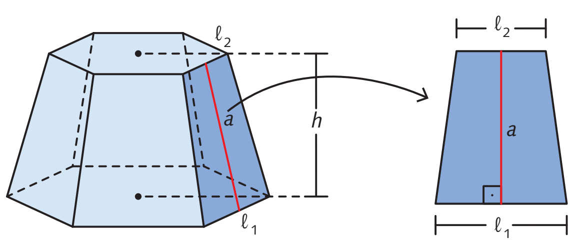
- **base maior**: é o polígono *ABCDE*;
- **base menor**: é o polígono *A'B'C'D'E'*;
- **face lateral**: são as demais faces do tronco de pirâmide, exceto as bases. As faces laterais são trapézios. Nesse caso: *ABB'A'*, *BCC'B'*, *CDD'C'*, *DEE'D'* e *AEE'A'*;
- **altura do tronco**: é a distância entre a base maior e a base menor. Na figura, *h* representa a medida da altura do tronco.



Um tronco de pirâmide é regular se a pirâmide original é regular.

Em um tronco de pirâmide regular:

- as bases são polígonos regulares semelhantes;
- as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são trapézios isósceles congruentes;
- a altura de uma face lateral (trapézio isósceles) é chamada **apótema do tronco**.

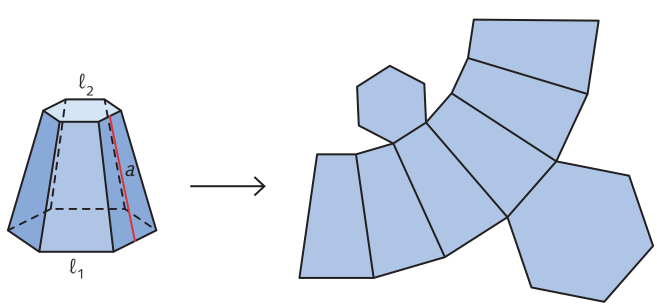


a: comprimento do apótema do tronco
h: altura do tronco
ℓ_1: comprimento da aresta da base maior
ℓ_2: comprimento da aresta da base menor

Se possível, reproduza e distribua aos alunos uma planificação da superfície de tronco de pirâmide regular de base hexagonal, a fim de que possam montá-la e utilizá-la ao longo do capítulo.

Área da superfície de um tronco de pirâmide

Veja a representação de um tronco de pirâmide regular de base hexagonal e a planificação de sua superfície.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

A **superfície lateral** de um tronco de pirâmide é a reunião de todas as suas faces laterais. A área dessa superfície é chamada **área lateral do tronco** (A_ℓ).

No caso do tronco acima, a área lateral é 6 vezes a área de uma face (trapézio).

$$A_\ell = 6 \cdot \underbrace{\left(\frac{(\ell_1 + \ell_2) \cdot a}{2}\right)}_{\text{área de uma face lateral}} = 3a(\ell_1 + \ell_2)$$

A **área da base maior** é a área do polígono da base maior do tronco (A_B). Já a **área da base menor** é a área do polígono da base menor (A_b).

No caso do tronco de pirâmide da página anterior, a área das bases corresponde à área dos hexágonos regulares (6 triângulos equiláteros).

$$A_B = 6 \cdot \frac{\ell_1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\ell_1^2\sqrt{3}}{2} \text{ e } A_b = 6 \cdot \frac{\ell_2^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\ell_2^2\sqrt{3}}{2}$$

A **superfície total** de um tronco de pirâmide é a reunião da superfície lateral com as bases. A área dessa superfície é chamada **área total do tronco** (A_t).

A área total do tronco de pirâmide é a área lateral mais as áreas das bases:
$$A_t = A_\ell + A_B + A_b$$

No caso do tronco de pirâmide apresentado na página anterior:

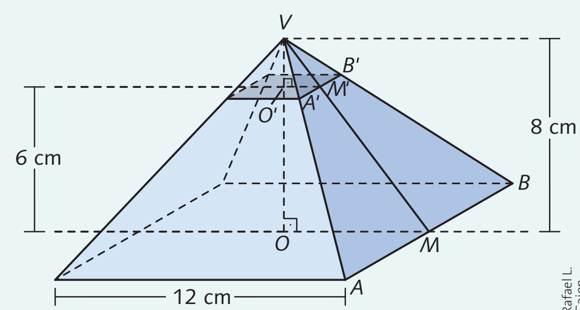
$$A_t = \underbrace{A_\ell}_{3a(\ell_1+\ell_2)} + \underbrace{A_B}_{\frac{3\ell_1^2\sqrt{3}}{2}} + \underbrace{A_b}_{\frac{3\ell_2^2\sqrt{3}}{2}} = 3a(\ell_1+\ell_2) + \frac{3\ell_1^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3\ell_2^2\sqrt{3}}{2}$$

Problemas e exercícios resolvidos

R32. Uma pirâmide regular de altura 8 cm cuja base é um quadrado de lado 12 cm foi seccionada por um plano paralelo à base e distante dela 6 cm. Em relação ao tronco obtido, calcule a área:

a) da base menor. b) lateral. c) total.

Resolução



Rafael L. Gaion

a) A base menor é um quadrado de lado $2 \cdot O'M'$.

Como $\triangle VOM \sim \triangle VO'M'$, temos:

$$\frac{VO}{VO'} = \frac{OM}{O'M'} \Rightarrow \frac{8}{2} = \frac{6}{O'M'} \Rightarrow O'M' = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{3}{2}\text{ cm}$$

Assim, a área da base menor é dada por:

$$A_b = (2 \cdot O'M')^2 = \left(2 \cdot \frac{3}{2}\right)^2 = 3^2 = 9 \rightarrow 9\text{ cm}^2$$

b) As faces laterais são trapézios congruentes. A base maior $\overline{AB}$, a base menor $\overline{A'B'}$ e a altura $\overline{MM'}$.

- $AB = 12$
- $A'B' = 2 \cdot O'M' = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$
- $MM' = VM - VM'$

VM é o comprimento do apótema da pirâmide, a qual é dada por:

$$(VM)^2 = (VO)^2 + (OM)^2 \Rightarrow (VM)^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \Rightarrow VM = \sqrt{100} = 10 \rightarrow 10\text{ cm}$$

Observação
Note que $VM = 10$, pois $VM > 0$.

Como $\triangle VOM \sim \triangle VO'M'$, temos: $\frac{VO}{VO'} = \frac{VM}{VM'} \Rightarrow \frac{8}{2} = \frac{10}{VM'} \Rightarrow VM' = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{5}{2}$ cm

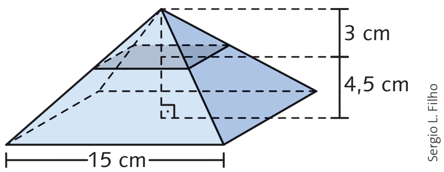
Portanto: $MM' = 10\text{ cm} - \frac{5}{2}\text{ cm} = \frac{15}{2}\text{ cm}$

A área lateral corresponde a 4 vezes a área do trapézio.

$$A_\ell = 4 \cdot \left(\frac{(AB + A'B') \cdot MM'}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{(12+3) \cdot \frac{15}{2}}{2}\right) = 4 \cdot \frac{225}{4} = 225 \rightarrow 225\text{ cm}^2$$

c) A área total é dada por: $A_t = A_\ell + A_B + A_b = 225 + \underbrace{144}_{12^2} + 9 = 378 \rightarrow 378\text{ cm}^2$

104. O tronco de certa pirâmide quadrangular regular é obtido ao seccionar essa pirâmide com um plano paralelo à sua base, conforme a figura.



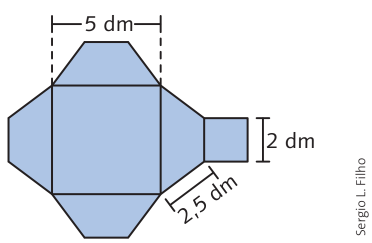
Com as informações apresentadas, calcule a área:

a) da base menor do tronco. $36\ cm^2$

b) lateral do tronco. aproximadamente $267,3\ cm^2$

c) total do tronco. $528,3\ cm^2$

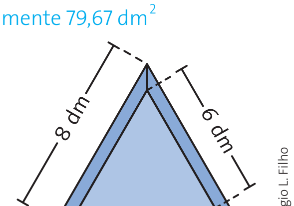
105. A figura representa a planificação da superfície do tronco de uma pirâmide regular. Qual é a área total desse tronco? $57\ dm^2$



106. Considere um tronco de pirâmide regular de base quadrada cuja área da base maior é igual à da face de um cubo de 12 cm de aresta. Sabendo que a área da base menor do tronco é $4\ cm^2$ e que o cubo e o tronco têm a mesma altura, calcule a área total do tronco de pirâmide. $512\ cm^2$

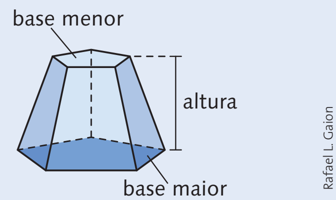
107. A base quadrada de uma pirâmide regular tem área igual a $9\ m^2$. Um plano paralelo à base e distante 2 m do vértice é traçado, obtendo-se uma região cuja área é $4\ m^2$. Determine a altura e a área total do tronco da pirâmide.
1 m; aproximadamente $24,18\ m^2$

108. A figura representa a vista de cima do tronco de uma pirâmide triangular regular. Sabendo que o apótema do tronco da pirâmide tem $\sqrt{3}$ dm, calcule a área total desse tronco.
aproximadamente $79,67\ dm^2$



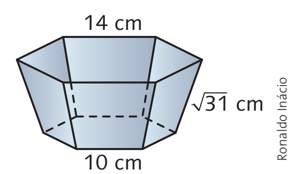
Você produtor

109. De acordo com a imagem, atribua valores às medidas, elabore algumas questões envolvendo cálculo de área de um tronco de pirâmide e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se as respostas estão corretas.



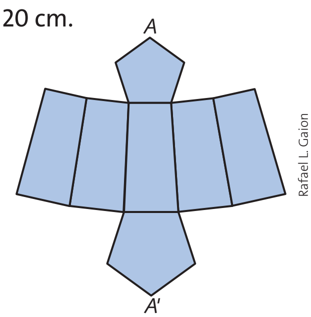
tronco da pirâmide pentagonal regular

110. Um recipiente de alumínio utilizado no preparo de certo doce tem o formato de um tronco de pirâmide hexagonal regular. Os comprimentos das arestas das bases maior e menor são, respectivamente, 14 cm e 10 cm, e o comprimento da aresta lateral, $\sqrt{31}$ cm.



Se esse recipiente for confeccionado com certa chapa de alumínio, quantos centímetros quadrados dessa chapa, no mínimo, serão necessários para produzir um deles? (Considere $\sqrt{3} = 1,7$.)
$622,2\ cm^2$

111. A figura representa a planificação da superfície de um tronco de pirâmide regular de base pentagonal e altura 20 cm.



Sabendo que o comprimento lado da base maior é 14 cm e o lado da base menor, 12 cm, calcule o comprimento da aresta $\overline{AA'}$ e a área do tronco.
aproximadamente 20,12 cm; $1\,896,5\ cm^2$

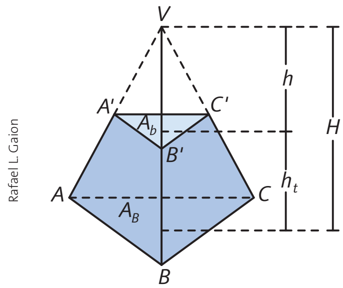
Desafio

112. Considere uma pirâmide regular de base hexagonal cuja base tem aresta medindo 4 cm e a altura é igual a 6 cm. Um plano paralelo à base secciona a pirâmide de modo que a altura do tronco é metade da altura da pirâmide. Qual é a área do tronco? $66\sqrt{3}\ cm^2$

109. Resposta pessoal. Possível resposta: As bases de um tronco de pirâmide são em formatos de dois pentágonos regulares cujos lados medem 5 cm e 3 cm, respectivamente. Sabendo que essas bases são paralelas e que o apótema do tronco da pirâmide mede 10 cm, determine: a) a área das bases desse tronco de pirâmide. b) a área total do tronco de pirâmide.

Volume do tronco de pirâmide

Na imagem está representado um tronco de pirâmide de base triangular.



A_B: área da base maior
A_b: área da base menor
H: altura da pirâmide $VABC$
h: altura da pirâmide $VA'B'C'$
h_t: altura do tronco

Observação

Note que $H = h + h_t$.

Antes de apresentar as explicações do livro, verifique se os alunos perceberam que uma maneira de obter o volume desse tronco é calcular a diferença entre os volumes das pirâmides *VABC* e *VA'B'C'*.

- Em sua opinião, como é possível obter o volume de um tronco de pirâmide observando a imagem acima? Junte-se a um colega, investiguem e determinem uma maneira.

Observando a imagem, podemos notar que o volume do tronco pode ser obtido pela diferença entre o volume das pirâmides *VABC* e *VA'B'C'*.

$$V_{tronco} = V_{VABC} - V_{VA'B'C'} = \frac{A_B \cdot H}{3} - \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{A_B \cdot H - A_b \cdot h}{3} \quad \text{(I)}$$

A dedução dessa fórmula pode ser feita na lousa com alunos. Essa dedução está disponível na Assessoria pedagógica.

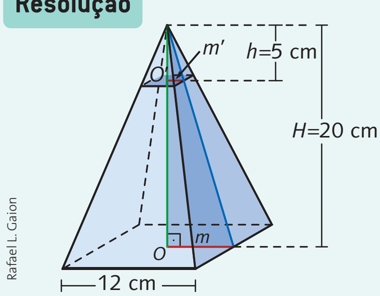
Substituindo $H = h + h_t$ em I e realizando alguns artifícios de cálculo, podemos deduzir a seguinte fórmula, que permite calcular o volume do tronco da pirâmide:

$$V_{tronco} = \frac{h_t}{3} \cdot \left(\sqrt{A_b \cdot A_B} + A_b + A_B \right)$$

Problemas e exercícios resolvidos

R33. Considere uma pirâmide regular com 20 cm de altura cuja base é um quadrado de lado 12 cm. Um plano paralelo à base secciona a pirâmide a 5 cm de seu vértice. Qual é o volume do tronco de pirâmide determinado por esse plano?

Resolução



Para calcular o volume do tronco, precisamos, inicialmente, calcular o comprimento da aresta da base menor. Por semelhança de triângulos:

$$\frac{H}{h} = \frac{m}{m'} \Rightarrow \frac{20}{5} = \frac{6}{m'} \Rightarrow m' = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{3}{2} \text{ cm}$$

Como as bases do tronco são quadradas, o comprimento da aresta da base menor é dada por: $2 \cdot m' = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \rightarrow 3$ cm

Podemos calcular o volume do tronco de duas maneiras.

1ª maneira: utilizando a fórmula do volume do tronco de pirâmide

$$V = \frac{h_t}{3} \cdot \left(\sqrt{A_b \cdot A_B} + A_b + A_B \right) = \frac{15}{3} \cdot \left(\sqrt{9 \cdot 144} + 9 + 144 \right) = 5 \cdot (36 + 9 + 144) = 5 \cdot 189 = 945 \rightarrow 945 \text{ cm}^3$$

2ª maneira: calculando a diferença entre os volumes da pirâmide maior e da menor

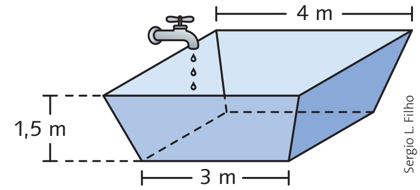
$$V = V_{\substack{\text{pirâmide}\\\text{maior}}} - V_{\substack{\text{pirâmide}\\\text{menor}}} = \frac{12^2 \cdot 20}{3} - \frac{3^2 \cdot 5}{3} = 945 \rightarrow 945 \text{ cm}^3$$

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

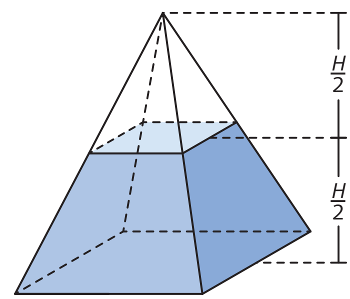
113. Calcule o volume de um tronco de pirâmide regular quadrangular cujas arestas das bases são iguais a 10 cm e 4 cm e a altura é 21 cm. $1092\ cm^3$

114. Um reservatório de água tem o formato de um tronco de pirâmide regular de base quadrada, conforme a figura. Estando vazio, certa torneira de vazão constante leva 75 minutos para enchê-lo. Qual é a vazão dessa torneira em litros por minuto? aproximadamente 246,7 L/min



Sergio L. Filho

115. (Ibmec-SP) Um artista projetou um enfeite no formato de pirâmide regular, constituído de resina colorida até a metade da altura e de resina transparente na outra metade, como mostra a figura.
Sabendo que foram gastos 672 mL de resina colorida na confecção do enfeite, o volume de resina transparente necessário foi de aproximadamente: b



Rafael L. Gaion

a) 84 mL

b) 96 mL

c) 168 mL

d) 252 mL

e) 336 mL

116. Foi pedido a um grupo de alunos que construísse um tronco de pirâmide regular de base hexagonal com o maior volume possível. As faces laterais deveriam ser construídas recortando 6 pedaços de cartolina de formato quadrado com $\frac{13\sqrt{3}}{2}$ cm de largura, e as bases a partir de dois círculos com 8 cm e 3 cm de raio. Calcule o volume desse tronco de pirâmide. $873\ cm^3$

117. Seja um tronco de pirâmide de base quadrada e altura 6 cm cuja aresta da base maior tem 9 cm e cuja base menor tem aresta de 5 cm. Qual é o volume desse tronco de pirâmide? $302\ cm^3$

118. Considere uma caixa cúbica com 10 cm de aresta cheia de água. Um tronco de pirâmide regular de base quadrada maciço é colocado dentro dela. As bases do tronco têm arestas com 8 cm e 4 cm de comprimento e a altura do tronco é igual a $\frac{2}{5}$ da altura da caixa.

a) Qual é o volume do tronco de pirâmide? $\frac{448}{3}\ cm^3$

b) Qual é o volume de água que ficará na caixa após ser colocado o tronco de pirâmide? $\frac{2\,552}{3}\ cm^3$

Finalizando a conversa

a) O que você entendeu acerca dos poliedros? Quais são seus elementos? a) Resposta pessoal. Possível resposta: considere uma reunião finita de polígonos, em que a interseção de dois polígonos é um lado comum ou é um vértice comum ou é vazia; cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono. Nessas condições, os polígonos delimitam uma região do espaço. A reunião dos polígonos com essa região é chamada poliedro. Os poliedros possuem faces, arestas e vértices, e são nomeados de acordo com o número de faces.

b) Quais são os poliedros de Platão? Tetraedro, cubo, dodecaedro, octaedro e icosaedro.

c) Que características diferenciam um poliedro convexo de um não convexo?

d) O que diferencia um prisma de uma pirâmide? Possível resposta: em um prisma temos duas bases, enquanto na pirâmide temos apenas uma. As faces laterais do prisma são paralelogramos, e na pirâmide são triângulos.

e) Em quais situações do dia a dia é possível utilizar os conceitos estudados neste capítulo? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que é possível utilizar os conceitos de cálculo de área e volume em situações diversas, como a área de uma superfície plana, o volume de água de uma piscina, entre outras.

f) Você considerou importante o estudo deste capítulo? Por quê? Converse com um colega sobre as suas considerações. Resposta pessoal.

c) Um poliedro é convexo quando um segmento de reta que liga quaisquer dois de seus pontos está inteiramente contido nele, ou então, se toda reta não paralela a nenhuma das faces cortar suas faces em dois pontos no máximo. Já no poliedro não convexo, existe uma reta não paralela a nenhuma de suas faces que corta suas faces em mais de dois pontos.

Saiba mais

Veja na Assessoria pedagógica uma sugestão de trabalho com esta seção.

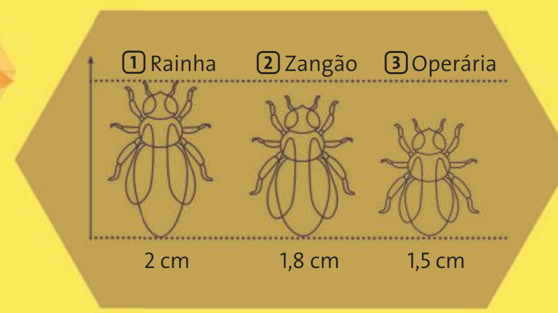
A Matemática das abelhas

Podemos encontrar elementos que lembram figuras geométricas planas e espaciais presentes em admiráveis formas da natureza.

Um dos casos mais curiosos e intrigantes encontrados na natureza é a maneira com que as abelhas constroem seus alvéolos. Na tarefa **51** da página **74**, já vimos algumas informações sobre os formatos utilizados na construção dos alvéolos e, agora, vamos aprofundar um pouco mais sobre esse assunto. Eles são feitos de cera e têm, entre outras finalidades, a de armazenar o mel produzido. A construção dos alvéolos envolve um complexo processo de **otimização**, digno de um verdadeiro matemático. As abelhas arquitetam seus alvéolos de modo que obtenham a maior capacidade possível de armazenamento de mel utilizando a menor quantidade de cera.

Otimização: processo que busca as condições mais favoráveis (menor custo, maior qualidade etc.) para a execução de uma tarefa ou fabricação de um produto

1 A abelha rainha é a responsável pela reprodução da espécie e pela harmonia dos trabalhos na colmeia. Seu tamanho é maior do que o das operárias e sua alimentação é essencialmente geleia real, produto riquíssimo em proteínas, vitaminas e hormônios sexuais.
Ela realiza poucos voos durante sua vida, por meio dos quais atrai zangões de todas as colmeias próximas, com o objetivo de ser fecundada. Quando isso ocorre, torna-se hermafrodita. A partir daí, ela não sai mais da colmeia, a não ser para acompanhar um enxame que abandona a colmeia para formar uma nova colônia.
Uma rainha bota cerca de 3 000 ovos por dia.



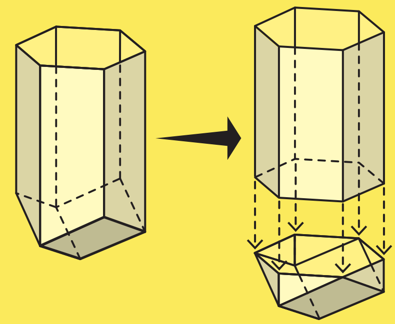
2 O zangão não possui ferrão. Sua única função é a fecundação das rainhas. Seu ciclo de vida é de cerca de 80 a 90 dias e ele depende das abelhas operárias para sobreviver. Se porventura o alimento estiver escasso na colmeia, normalmente entre o outono e o inverno, as operárias expulsam o zangão, que acaba morrendo de fome ou frio.
A presença de zangões em uma colmeia significa abundância de alimento. Seu destino após a cópula com a abelha rainha é a morte, pois nesse momento seu órgão genital é rompido, ficando preso à câmara do ferrão da rainha.

As abelhas são insetos sociais e vivem em colônias. Elas são conhecidas há mais de 40 000 anos.

3 As abelhas operárias são a maioria. Elas cuidam da defesa da colmeia e realizam todo o trabalho, desde a higiene, coleta de pólen e néctar, produção de cera (com a qual constroem os alvéolos) até garantia de alimento e água. Além de todo esse trabalho, as operárias são responsáveis pela produção e estocagem do mel, pela elaboração da própolis – que é utilizada para desinfetar os alvéolos, além de vedar e fixar peças na colmeia – e pelo aquecimento das larvas (crias) com o próprio corpo em dias frios. Seu ciclo de vida é curto, não ultrapassando 60 dias.

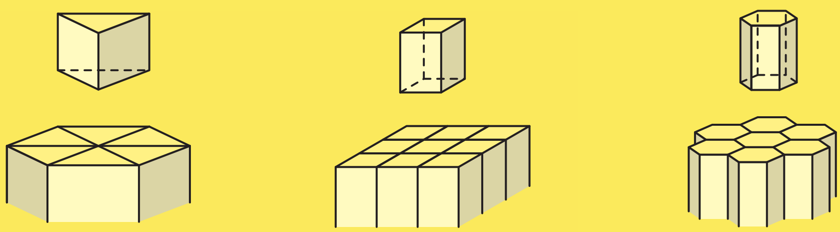
Daniel Carvalho

O alvéolo lembra um poliedro que pode ser decomposto em 1 prisma hexagonal regular e 1 poliedro de 10 faces: 3 losangos, 1 hexágono e 6 triângulos.



Sergio L. Filho

Não é por acaso que as abelhas utilizam esse modelo arquitetônico. A necessidade de não deixar fendas entre um alvéolo e outro (o que não seria possível se o formato fosse, por exemplo, cilíndrico) e consequentemente poder utilizar uma mesma face para dois alvéolos remete à possibilidade de três prismas regulares que podem ser justapostos: triangular, quadrangular e hexagonal.



Sergio L. Filho

As imagens não estão representadas em proporção.

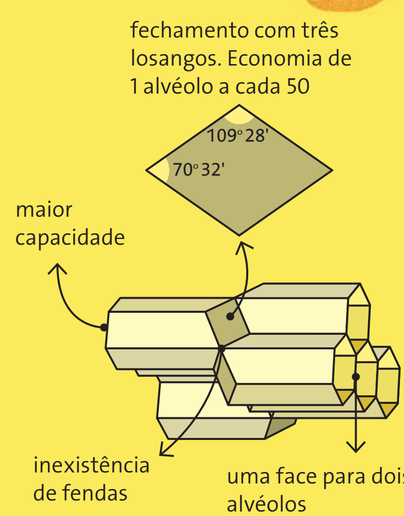
Fixando a altura e a quantidade de material a ser utilizada, o prisma mais vantajoso é aquele cuja capacidade seja a maior dentre os três. Cálculos não muito sofisticados levam à escolha do prisma hexagonal regular e justificam o trabalho das abelhas.

Para fechar o alvéolo, economizando ainda mais cera, as abelhas utilizam três losangos. Ao se comparar com um fechamento plano, a estratégia utilizada pelas abelhas permite uma economia de 1 alvéolo a cada 50, que, em grandes quantidades, torna-se considerável.

Porém, a habilidade das abelhas em otimizar material não para por aí. Tomado o fechamento do alvéolo por losangos, o interesse recai na determinação dos ângulos internos que maximizam a capacidade e minimizam a quantidade de cera utilizada.

Com o uso de trigonometria, logaritmos, cálculo integral e diferencial, entre outros, os matemáticos concluíram que os ângulos deveriam ser de 70°32’ e 109°28’, precisamente as medidas adotadas pelas abelhas.

A incrível habilidade que as abelhas têm com a geometria e a Matemática de modo geral ainda é um enigma para a ciência.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Fonte de pesquisa: RODRIGUES, Claudina I.; REZENDE, Eliane Q. F. Abelhas matemáticas. *IME-Unicamp*, Campinas, 2019. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/dl/1-EDULLkwNQ_MDA_d14f7_>. Acesso em: 14 jul. 2020.

a) Qual é o objetivo do processo de otimização envolvido na construção dos alvéolos pelas abelhas? O objetivo é obter a maior capacidade possível de armazenamento de mel utilizando a menor quantidade de cera.

b) Por que as abelhas não fabricam seus alvéolos, por exemplo, em formato cilíndrico? Pela necessidade de não deixar fendas entre um alvéolo e outro e, consequentemente, poder utilizar uma mesma face para dois alvéolos.

c) Quais são os prismas regulares que podem ser justapostos? Justifique o motivo pelo qual as abelhas utilizam o prisma hexagonal na construção de seus alvéolos. São 3 prismas regulares que podem ser justapostos: o triangular, o quadrangular e o hexagonal. As abelhas utilizam prismas hexagonais, pois a capacidade dele é a maior dentre os três usando a mesma quantidade de cera.

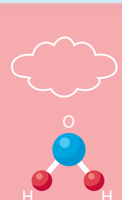
Conectando ideias

Veja na Assessoria pedagógica uma sugestão de trabalho com esta seção.

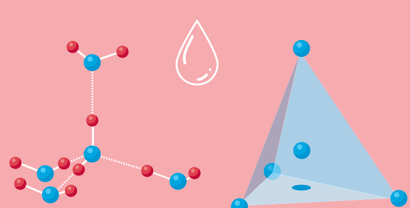
Água “mole”, água “dura”

As imagens não estão representadas em proporção e as cores utilizadas não correspondem às reais.

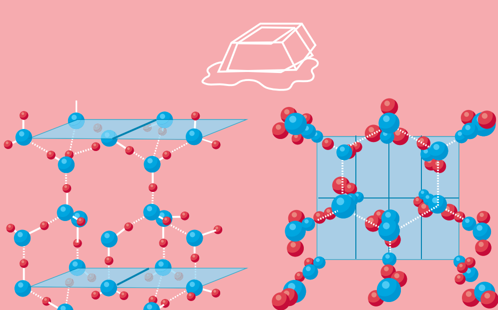
Toda matéria é constituída por átomos ou moléculas que se organizam no espaço de acordo com o estado em que se encontram, e suas dimensões dependem da temperatura (vibrações). Corriqueiramente, o aumento e a diminuição da temperatura geram, respectivamente, dilatação e contração da substância. No entanto, algumas substâncias, como a água, contraem-se em algum momento do aquecimento e expandem-se em algum momento do resfriamento.



As moléculas de água são formadas pela ligação covalente entre um átomo de oxigênio e dois de hidrogênio.

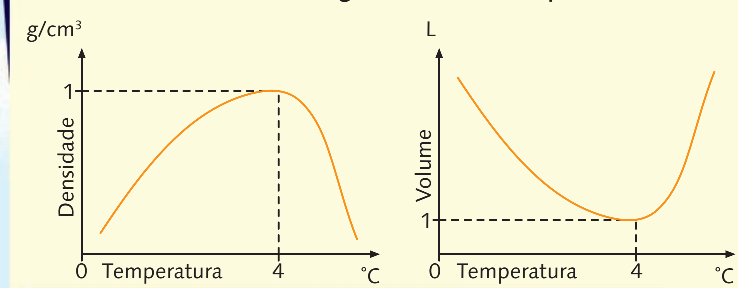


Uma molécula liga-se com outra por meio de pontes de hidrogênio, formando uma estrutura piramidal tetraédrica. Na forma líquida, quando as moléculas estão mais agitadas, a quantidade de pontes de hidrogênio é pequena, fazendo com que elas se arranjem de modo mais compacto e mais denso.



Quando a água se solidifica, diminuem as vibrações, e essas estruturas tetraédricas se organizam em formato hexagonal, ficando assim espaços centrais vazios, fazendo com que o gelo seja menos denso do que a água líquida.

A maior densidade da água ocorre na temperatura de 4 °C

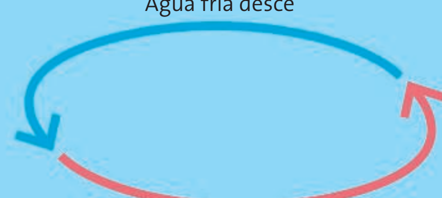


Ilustrações: Eduardo Carriça

Água com temperatura abaixo de 4 °C na superfície se congela.

Correntes de convecção:
Movimentos gerados em fluidos pela diferença de densidade provocada pela variação de temperatura.

Água fria desce



Água quente sobe

A água a temperatura de 4 °C, com maior densidade, localizada no fundo, não se congela, mantendo vivas as espécies.

Fonte de pesquisa: INSTITUTO DE FÍSICA – UFRGS. *Propriedades físicas da água*. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/fis01038/biofisica/agua/agua.htm>. Acesso em: 6 fev. 2020.

Como é construído um iglu

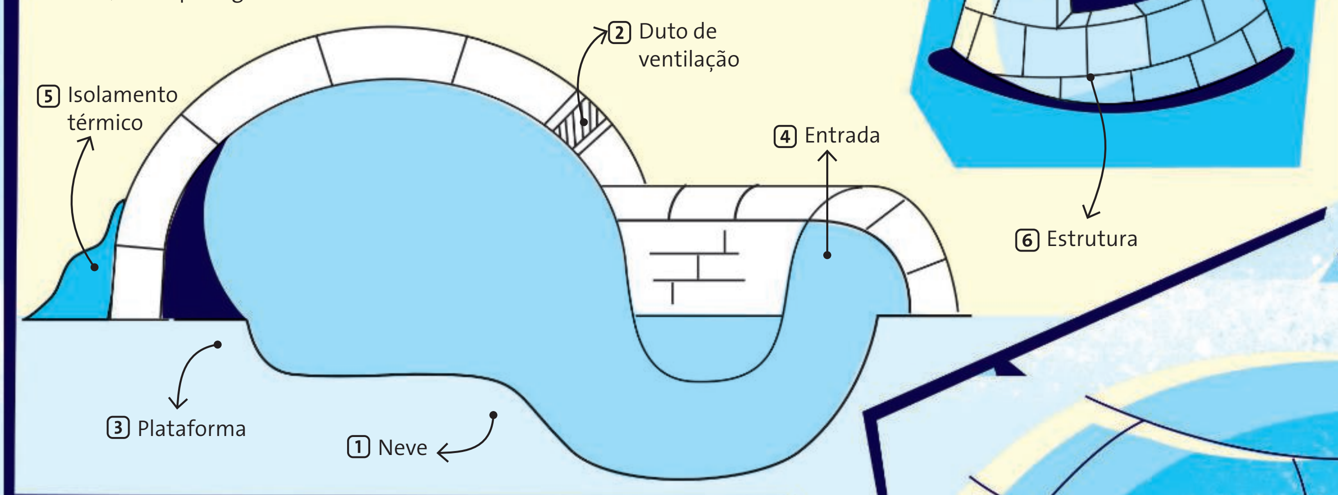
O iglu é a casa ideal para o Ártico. Veja no esquema a estrutura de um iglu tradicional feito na região ártica do Canadá e a característica de cada uma das partes destacadas.

a) A mudança do estado físico da água tem esse fenômeno descrito com base na geometria molecular utilizando figuras geométricas espaciais para representá-lo.

a De que maneira os conceitos abordados neste capítulo estão relacionados ao congelamento da água?

b Os conhecimentos que você possui sobre poliedros o ajudaram a compreender as informações apresentadas? Justifique sua resposta. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que sim, pois o formato das moléculas de água de acordo com o estado físico proporciona a ideia de poliedros.

Os iglus são abrigos construídos há séculos pelos inuítes, povos indígenas que vivem em regiões em torno do círculo polar Ártico. Construído com blocos de neve endurecida, o iglu é considerado uma construção muito engenhosa, que ajuda na proteção contra o frio, o vento e a neve. No interior de um iglu, a temperatura é estável, visto que o gelo é um isolante térmico.



1. O iglu é construído totalmente com neve, que deve estar seca e firme, o que facilita o manuseio e o corte.
2. Para servir como um duto de ventilação e manter o interior do iglu seco, é feito um buraco pequeno a cerca de $\frac{3}{4}$ da altura do iglu.
3. Uma plataforma com até 60 cm de altura é construída e serve como cama. Esse procedimento é feito para aproveitar a parte mais aquecida do espaço interno, uma vez que o ar quente sempre sobe.
   Geralmente, uma lamparina a óleo auxilia no aquecimento no interior do iglu. No entanto, ela precisa ficar pendurada e não pode elevar muito a temperatura, pois isso pode fazer com que as paredes comecem a derreter.
4. Parte mais fria do iglu, que consiste em um túnel que inicia na parte interna da parede do iglu.
5. Para manter o interior quente, o iglu é cercado com neve na altura da primeira fileira de blocos.
6. O iglu é construído em espiral, característica que dá resistência à construção. Na primeira parte, os blocos de neve são colocados levemente inclinados para o interior.
   Depois, é feita uma inclinação na parte de cima dos blocos, a fim de que as camadas seguintes formem uma espiral. Na sequência, é construído o teto, no qual é deixada uma pequena abertura, que é o duto de ventilação. Para finalizar, é esculpido um bloco no formato da entrada, que é a porta para fechar o iglu.

Leandro Lassmar

Fonte de pesquisa: BBC BRASIL. *O gelo que esquenta*: os engenhosos segredos dos iglus. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/internacional-38970141>. Acesso em: 30 jun. 2020.

CAPÍTULO 3

Corpos redondos

Sergiy Zavgorodny/Shutterstock.com

O mergulho é um esporte que proporciona contato com o meio ambiente e com os seres vivos.

Mergulhador

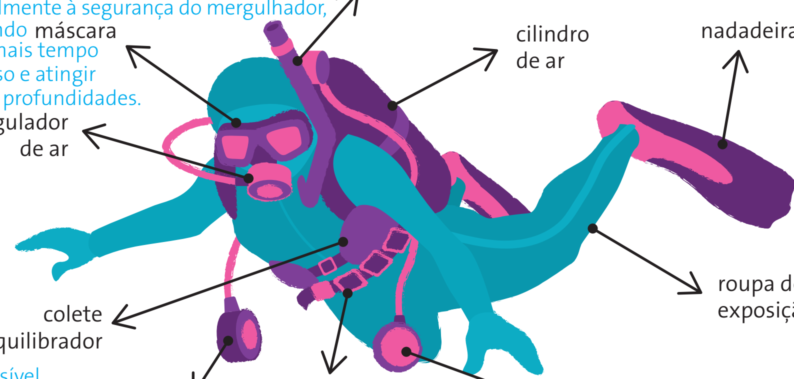
Provocar apneia, prender uma rocha ao corpo e submergir a até 30 ou 40 metros de profundidade durante 4 minutos e meio. Segundo relatos, assim eram realizados os primeiros mergulhos, praticados desde 4500 a.C. Hoje, existem diversos equipamentos que visam principalmente à segurança do mergulhador.

Pode-se dizer que, entre as principais dificuldades que uma pessoa encontra ao mergulhar, está a incapacidade de respirar debaixo d'água. Para isso, a solução encontrada foi o mergulhador levar consigo seu suprimento de gases necessários à respiração, comprimido em um equipamento chamado cilindro de ar.

Esses cilindros são feitos de aço ou alumínio, podendo ter diversos tamanhos e capacidades, de acordo com o tipo e profundidade do mergulho. Os mais comuns carregam cerca de 2 300 litros de "ar engarrafado", sob pressão duzentas vezes maior do que a da atmosfera.

Além do cilindro, o uso de outros equipamentos pode ser necessário, de acordo com o tipo e a profundidade do mergulho e do local, como roupas térmicas, luvas, nadadeiras e máscaras que diminuem a pressão do gás que sai do cilindro.

a) Há milhares de anos, um mergulho consistia em passar alguns minutos debaixo d'água apenas por apneia, prendendo rochas ao corpo para poder alcançar maiores profundidades. Atualmente, existem diversos equipamentos que visam principalmente à segurança do mergulhador, permitindo passar mais tempo submerso e atingir maiores profundidades.



b) Possível resposta: Uma das principais dificuldades é a incapacidade de respirar debaixo d'água. A solução encontrada foi o mergulhador levar consigo seu suprimento de gases necessários à respiração em um equipamento chamado cilindro de ar.

a O que se pode dizer sobre a maneira como o mergulho era realizado há milhares de anos e como é realizado atualmente?

b Entre as dificuldades encontradas por um mergulhador, cite uma delas e qual foi a solução obtida para esse problema.

c Liste alguns equipamentos normalmente utilizados por mergulhadores.
Possíveis respostas: cilindro de ar, roupa de exposição, nadadeiras, máscaras.

1 Introdução

Algumas vezes pela otimização de material, outras pelo aspecto visual, determinadas formas geométricas têm sido utilizadas com maior frequência pela indústria e pela arquitetura. Alguns arquitetos, por exemplo, se destacam por apresentar elementos curvos em suas obras. Entre eles, podemos citar o arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer (1907-2012), considerado um dos maiores do mundo. Veja algumas das obras idealizadas por ele.

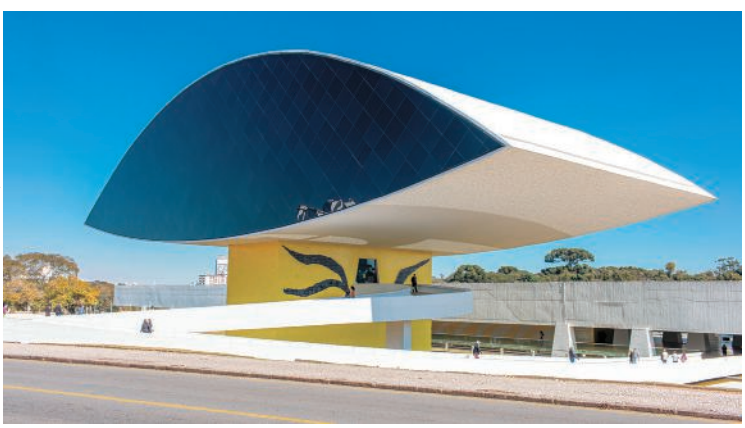
BNCC

- **CEMT 3**
- **CEMT 5**
- **EM13MAT309**
- **EM13MAT504**
- **EM13MAT509**

Ronaldo Almeida/Shutterstock
© Niemeyer, Oscar/ AUTVIS, Brasil, 2020

Casa do Baile, local que faz parte do conjunto arquitetônico da Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte (MG), inaugurada em 1943. Fotografia de 2015.

Luis War/Shutterstock
© Niemeyer, Oscar/ AUTVIS, Brasil, 2020



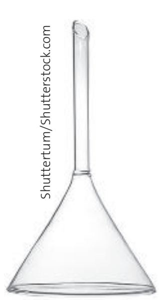
Museu Oscar Niemeyer, inaugurado em 2002 e localizado na cidade de Curitiba (PR). Fotografia de 2019.

Frequentemente observamos à nossa volta – na embalagem de um produto, em um silo de estocagem de grãos ou em um edifício – objetos e construções cujo formato lembra uma esfera, um cone ou um cilindro.

Africa Studio/Shutterstock.com

Bola de futebol.

Shutterstum/Shutterstock.com



Funil.

Alistair Mcclellan/Shutterstock.com

Silos para o armazenamento de grãos.

As imagens não estão representadas em proporção.

Neste capítulo, estudaremos os elementos do cilindro, do cone e da esfera. Além disso, também vamos calcular a área da superfície e o volume de cada uma dessas figuras.

Conversando

b) Possíveis respostas: o cilindro e o cone possuem bases circulares; o cone, o cilindro e a esfera possuem superfície curva.

a) Cite algum monumento ou construção que você já viu ou conhece cujo formato apresenta elementos curvos. Resposta pessoal. Possíveis respostas: Catedral Metropolitana de Brasília; Museu de Arte Contemporânea de Niterói; as cúpulas do Congresso Nacional etc.

b) Qual(is) característica(s) comum(ns) podemos identificar no cilindro, no cone e na esfera?

c) Em sua opinião, por que os silos que aparecem na fotografia da página anterior têm esse formato? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que o formato cilíndrico dos silos está relacionado com a capacidade de armazenamento dos grãos.

d) Nas embalagens de produtos observadas no dia a dia, é mais comum o formato de cilindro ou de cone? Em sua opinião, por que isso ocorre? Cilindro. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que o formato cilíndrico é mais prático no armazenamento dessas embalagens.

2 Cilindro circular

Existem vários objetos do cotidiano que têm formato cilíndrico. Nas embalagens de produtos, por exemplo, podemos perceber a grande utilização desse formato, seja por motivos de armazenamento, transporte ou até mesmo como atrativo para os consumidores. Além disso, os formatos cilíndricos são muito utilizados como compartimentos para o armazenamento de grãos, gases, líquidos etc. Veja alguns exemplos:

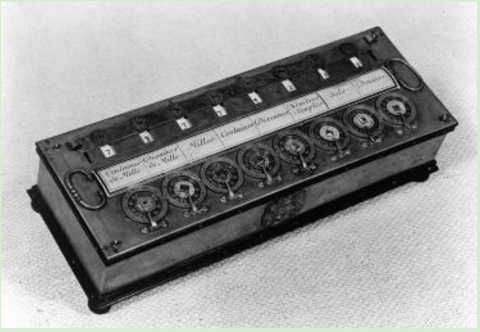
Krivosheev Vitaly/Shutterstock.com

Caminhão com reservatório em formato cilíndrico para o transporte de combustível.

Noiz Stocker/Shutterstock.com

Extintor de incêndio em formato cilíndrico.

The Granger Collection, New York/The Granger/Fotoarena



Máquina de calcular de Blaise Pascal, criada em 1642.

O filósofo e matemático Blaise Pascal (1623-1662), nascido na província francesa de Auvergne, cansado de fazer tantos cálculos, já que era filho de um coletor de impostos, inventou uma esquisita máquina de adicionar e subtrair. Ela consistia em um sistema composto por cilindros e engrenagens dentro de uma caixa. As rodas em cima correspondem às unidades, dezenas, centenas, e assim por diante, e cada uma registra algarismos de 0 a 9.

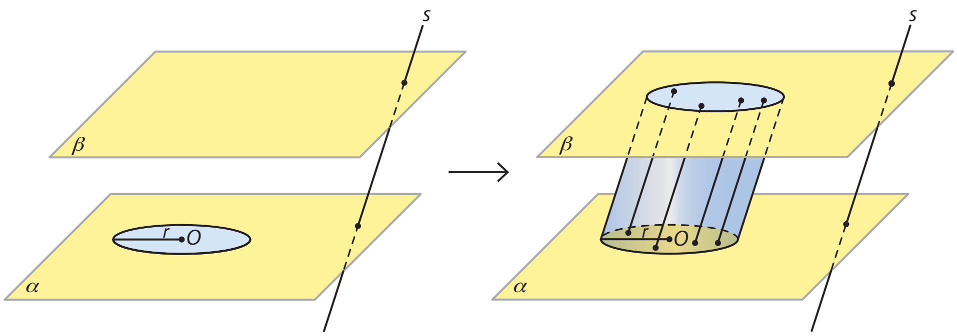
Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

Observação

Região poligonal é a reunião de um polígono e todos os seus pontos interiores. Neste capítulo, vamos utilizar a palavra polígono para nos referirmos tanto aos polígonos quanto às regiões poligonais.

Veja como podemos definir o cilindro circular.

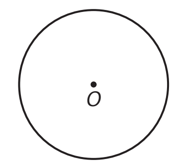
Considere dois planos paralelos α e β, uma reta s concorrente a esses planos e um círculo de centro O e raio cuja medida do comprimento é r contido em α. Denomina-se **cilindro circular** a reunião de todos os segmentos de reta congruentes entre si e paralelos a s com uma extremidade no círculo dado e a outra no plano β.



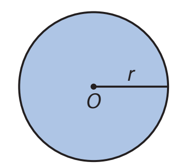
Neste capítulo, iremos estudar apenas cilindros circulares. Para simplificar a escrita, chamaremos apenas de cilindros.

Observação

Uma circunferência é uma linha fechada em um plano cujos pontos estão a uma mesma distância de um ponto fixo, chamado centro.



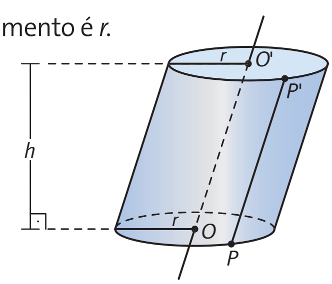
Já um círculo é formado pela circunferência e por todos os pontos de seu interior.



Elementos de um cilindro

Em um cilindro, podemos destacar alguns elementos. No cilindro ao lado, temos:

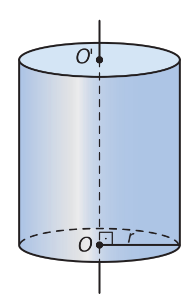
- **bases**: são os círculos paralelos de centros O e O' e raio cuja medida do comprimento é r.
- **altura**: é a distância entre os planos que contêm as bases. Na figura, h representa a medida da altura do cilindro.
- **eixo**: é a reta que contém os centros dos círculos das bases. Na figura, é a reta $\overleftrightarrow{OO'}$.
- **geratriz**: é cada segmento de reta paralelo ao eixo com extremidades nos pontos da circunferência das bases. Na figura, $\overline{PP'}$ é geratriz.
- **superfície lateral**: é a reunião de todas as geratrizes do cilindro.

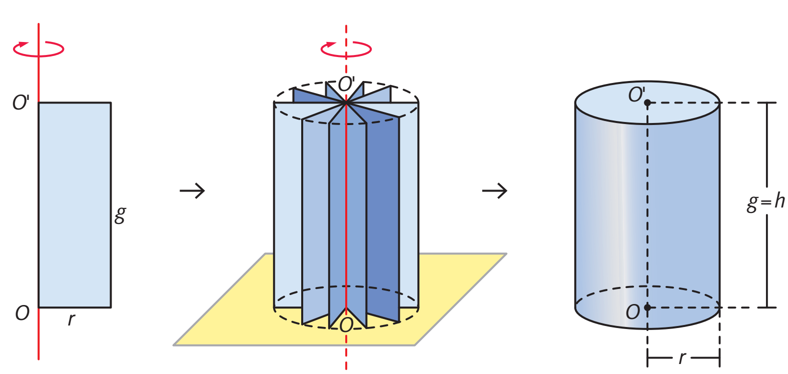


Classificação

Um cilindro pode ser **reto** ou **oblíquo**.

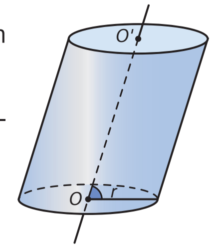
- **Cilindro reto**: é aquele cujo eixo é perpendicular aos planos que contêm as bases. Um cilindro reto também é chamado **cilindro de revolução**, pois pode ser obtido pela rotação de um retângulo em torno de um de seus lados.



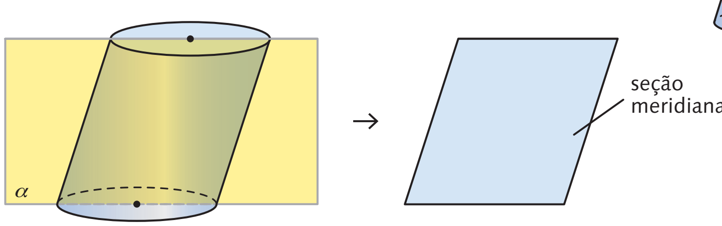


Ilustrações: Sergio L. Filho

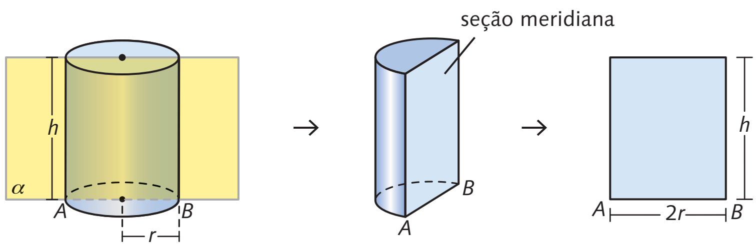
- **Cilindro oblíquo**: é aquele cujo eixo é oblíquo aos planos que contêm as bases.



A interseção de um cilindro e um plano que passa por seu eixo é denominada **seção meridiana do cilindro**.



A seção meridiana de um cilindro reto é um retângulo. Caso a seção meridiana de um cilindro reto seja um quadrado, dizemos que esse cilindro é **equilátero**.



Neste capítulo, não faremos distinção entre grandezas e as respectivas medidas para que possamos simplificar a escrita. Então, em situações do tipo "área do círculo", na verdade estamos nos referindo à "medida da área do círculo", assim como em situações do tipo "volume do cilindro" estamos nos referindo à "medida do volume do cilindro", entre outros casos.

Observação
Para simplificar a escrita, neste capítulo vamos dizer, em algumas situações, "segmento 10 cm" ou "10 cm de segmento" em referência ao segmento cuja medida do comprimento é 10 cm. Então, em vez de dizer "círculo cuja medida do comprimento do raio é *a*", diremos simplesmente "círculo de raio *a*", entre outras.

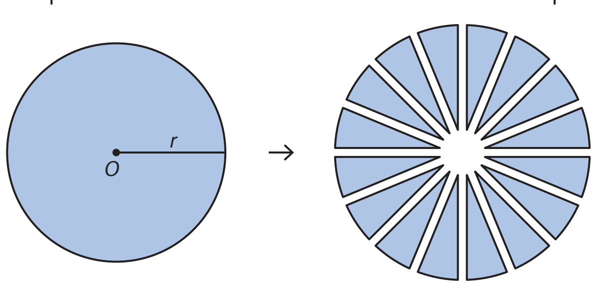
Observação
Em um cilindro equilátero, a medida da altura é igual à medida do comprimento do diâmetro da base, isto é, $h = 2r$, em que r indica a medida do comprimento do raio da base.

Área da superfície de um cilindro reto

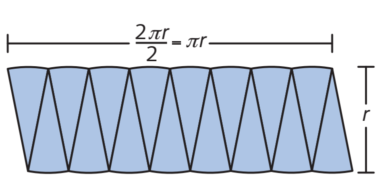
Área do círculo

Antes de calcularmos a área total de um cilindro, vamos estudar como se calcula a área de um círculo, que é a base do cilindro.

Inicialmente, decompomos um círculo de raio r e centro O em 16 partes iguais.



Em seguida, organizamos essas partes conforme representado abaixo.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Se necessário, explique aos alunos que paralelogramo é um quadrilátero que possui dois pares de lados paralelos.

Note que a figura obtida lembra um paralelogramo de altura r e comprimento πr. Quanto maior a quantidade de partes em que o círculo for dividido, mais a figura obtida se aproximará de um paralelogramo.

Observação
Lembre-se de que o comprimento C de uma circunferência de raio r é dado por $C = 2\pi r$.

Vimos no capítulo anterior que a área de um paralelogramo pode ser calculada multiplicando-se o comprimento da base pela altura. Nesse caso:

$$A_p = b \cdot h = \pi r \cdot r = \pi r^2$$

Como o paralelogramo é composto de todas as partes do círculo, a área do círculo é igual a πr^2.

Observação
Para demonstrar a fórmula que possibilita calcular a área de um círculo, faz-se necessário o uso de conceitos que não serão estudados neste livro. Desse modo, será apresentada, nesse tópico, apenas uma maneira que auxilia na compreensão dessa fórmula.

> Para calcular a área A de um círculo de raio r, basta multiplicar o número irracional π pelo comprimento do raio elevado ao quadrado, isto é, $A = \pi r^2$.

Exemplos

1. Vamos calcular a área de um círculo de raio 6 cm.
Assumindo $\pi = 3{,}14$, temos:

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3{,}14 \cdot 6^2 = 113{,}04$$

Portanto, a área desse círculo é, aproximadamente, 113,04 cm^2.

2. Vamos calcular o raio de um círculo cuja área é 50,24 cm^2.
Assumindo $\pi = 3{,}14$, temos:

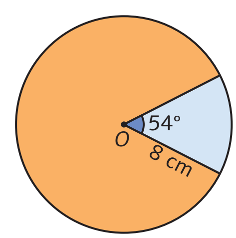
$$A = \pi r^2 \Rightarrow 50{,}24 = 3{,}14 r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{50{,}24}{3{,}14} = 16 \Rightarrow r = 4$$

Portanto, o raio desse círculo é, aproximadamente, 4 cm.

Observação
No exemplo **2**, $r = 4$, pois $r > 0$.

Área do setor circular

Um setor circular é a parte de um círculo determinada por um ângulo central qualquer. A parte colorida de azul no círculo ao lado corresponde a um setor circular determinado por um ângulo central de medida 54°.



Sergio L. Filho

A área do setor circular (A_s) é diretamente proporcional à medida do ângulo central que o determina, isto é, se o ângulo aumenta, a área aumenta na mesma proporção. Como as grandezas são diretamente proporcionais, podemos calcular a área desse setor (A_s) por uma regra de três.

ângulo (em graus)	área (em cm^2)
360	πr^2
54	A_s

$$\frac{360}{54} = \frac{\pi r^2}{A_s} \Rightarrow A_s \cdot 360 = 54 \cdot \pi \cdot 8^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_s = \frac{54 \cdot 3{,}14 \cdot 64}{360} = 30{,}144$$

Observação
Lembre-se de que estamos considerando π igual a 3,14.

Portanto, a área desse setor circular é, aproximadamente, 30,144 cm^2.

- Se fosse um ângulo de medida α qualquer, qual seria a área do setor circular?

Esse questionamento tem como objetivo instigar os alunos a investigar e generalizar a fórmula geral apresentada abaixo, tendo como referência as explicações apresentadas anteriormente. Se achar conveniente, reúna-os em duplas para realizar essa tarefa.

> Dado um círculo de raio r, podemos determinar a área A_s de um setor determinado por um ângulo central de medida α da seguinte forma:

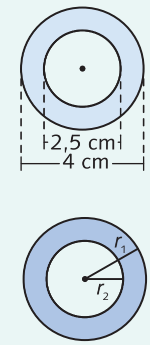
ângulo (em graus)	área
360	πr^2
α	A_s

$$\frac{360}{\alpha} = \frac{\pi r^2}{A_s} \Rightarrow A_s \cdot 360 = \alpha \cdot \pi r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_s = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2$$

Problemas e exercícios resolvidos

R1. Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, Pablo construiu a imagem apresentada ao lado. Calcule a área da região em destaque.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Resolução

A região em destaque corresponde a uma coroa circular, na qual $r_1 = \dfrac{4\text{ cm}}{2} = 2\text{ cm}$ e $r_2 = \dfrac{2{,}5\text{ cm}}{2} = 1{,}25\text{ cm}$.

Para calcular a área dessa coroa, precisamos calcular a área do círculo maior e dela subtrair a área do círculo menor. Considerando $\pi = 3{,}14$, temos:

$$A_{\text{coroa}} = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi\left(r_1^2 - r_2^2\right) = \pi\left(2^2 - 1{,}25^2\right) =$$

$$= 3{,}14 \cdot 2{,}4375 \simeq 7{,}65 \rightarrow \text{aproximadamente } 7{,}65\text{ cm}^2$$

Observação

De maneira geral, podemos calcular a área da coroa circular utilizando a fórmula $A_{\text{coroa}} = \pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)$, em que r_1 é o comprimento do raio do círculo maior e r_2 o comprimento do raio do círculo menor.

R2. Considerando um círculo de diâmetro 6 cm e $\pi = 3{,}14$, calcule:

a) sua área.

b) a área de um setor desse círculo determinado por um ângulo central de 50°.

Resolução

a) Como o comprimento do diâmetro é o dobro do comprimento do raio, temos $r = \dfrac{d}{2} = \dfrac{6\text{ cm}}{2} = 3\text{ cm}$. Assim:

$$A = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 3^2 = 28{,}26 \rightarrow 28{,}26$$

Portanto, a área desse círculo é, aproximadamente, 28,26 cm^2.

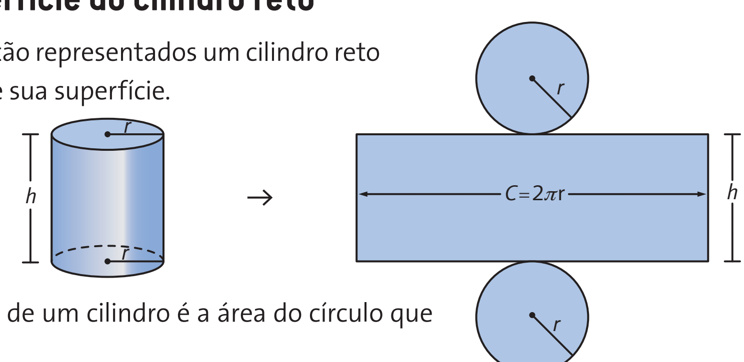
b) Como o ângulo central do setor é 50°, temos:

$$A_s = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2 = \frac{50}{360} \cdot 3{,}14 \cdot 3^2 = 3{,}925$$

Portanto, a área do setor circular é, aproximadamente, 3,925 cm^2.

Área da superfície do cilindro reto

Na imagem estão representados um cilindro reto e a planificação de sua superfície.



Sergio L. Filho

A **área da base** de um cilindro é a área do círculo que é sua base (A_b).

$$A_b = \pi r^2$$

Como vimos, a **superfície lateral** de um cilindro reto é a reunião de todas as suas geratrizes. Planificada, essa superfície corresponde a um retângulo de dimensões $2\pi r$, referente ao comprimento da circunferência da base, e h, que é a altura do cilindro. A área dessa superfície é chamada **área lateral** do cilindro (A_ℓ).

$$A_\ell = 2\pi r \cdot h$$

A **superfície total** de um cilindro é a reunião da superfície lateral com as bases. A área dessa superfície é chamada **área total** do cilindro (A_t).

$$A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b$$

Essa fórmula também pode ser escrita da seguinte maneira:

$$A_t = \underbrace{A_\ell}_{2\pi r \cdot h} + 2 \cdot \underbrace{A_b}_{\pi r^2} = 2\pi r \cdot h + 2 \cdot \pi r^2 \Rightarrow A_t = 2\pi r(h + r)$$

Problemas e exercícios resolvidos

R3. Calcule a altura de um cilindro reto equilátero, sabendo que a área de sua superfície total é $37{,}5\pi$ cm².

Resolução

Como o cilindro é equilátero, o comprimento do diâmetro da base é igual à sua altura. Assim, podemos escrever que $h = 2r \Rightarrow r = \dfrac{h}{2}$.

Com isso, temos:

$$A_t = 2\pi r(h + r) \Rightarrow 37{,}5\pi = 2\pi \frac{h}{2}\left(h + \frac{h}{2}\right) \Rightarrow 37{,}5 = \frac{3}{2}h^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = 37{,}5 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow h^2 = 25 \begin{cases} h_1 = 5 \\ h_2 = -5 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, a altura desse cilindro é 5 cm.

Na tarefa **2**, por se tratar de uma questão de vestibular, embora estejamos usando "comprimento do segmento", por exemplo, aparece a palavra "mede" para se referir ao comprimento do diâmetro da semicircunferência.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

Se achar necessário, oriente os alunos a utilizar uma calculadora durante a resolução das tarefas desta seção, a fim de auxiliá-los na execução dos cálculos.

Observação

Na resolução das tarefas desta seção, quando necessário, considere $\pi = 3{,}14$.

1. Considere os círculos A, B e C cujos comprimentos dos raios são, respectivamente, 5 cm, 9,5 cm e 0,7 cm. Para cada um desses círculos, calcule:

a) a área total aproximada.

b) a área de um setor circular de ângulo central igual a: Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

- 25°
- 70°
- 230°

2. (UPM-SP) Na figura abaixo, $\overline{AB}$ é diâmetro da semicircunferência de centro O. Se $\overline{AB}$ mede 2, a área assinalada vale: e

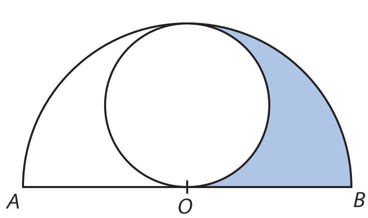
a) $\dfrac{\pi}{2}$

b) $\dfrac{\pi}{4}$

c) $\dfrac{\pi}{6}$

d) π

e) $\dfrac{\pi}{8}$



Sergio L. Filho

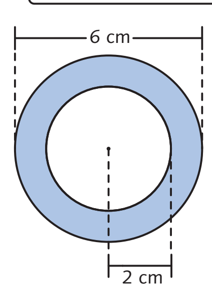
Se necessário, diga aos alunos que semicircunferência é a metade de uma circunferência limitada por um diâmetro.

1. a) A: aproximadamente 78,5 cm²; B: aproximadamente 283,385 cm²; C: aproximadamente 1,5386 cm²

3. Nos itens abaixo, cada figura é composta por circunferências concêntricas. Calcule a área indicada em azul em cada uma das figuras.

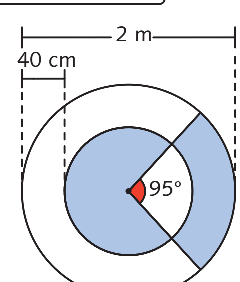
As imagens não estão representadas em proporção.

a)



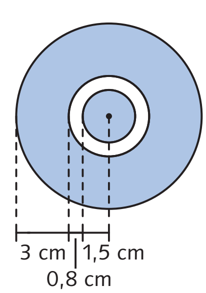
aproximadamente 15,7 cm²

c)



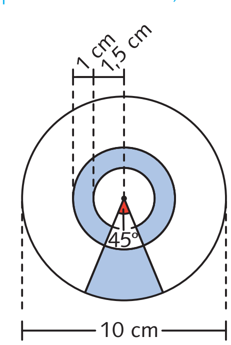
aproximadamente 1,363 m²

b)



aproximadamente 78,657 cm²

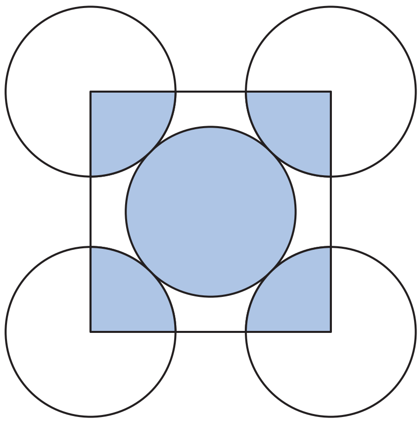
d)



aproximadamente 18,350 cm²

Ilustrações: Sergio L. Filho

4. (Cesgranrio-RJ) Na figura, os cinco círculos têm o mesmo raio e o quadrado tem seus vértices nos centros de quatro deles. Se o quinto círculo é tangente aos outros quatro, qual a razão entre a área sombreada e a área não sombreada no interior dos círculos? d



Sergio L. Filho

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{5}$

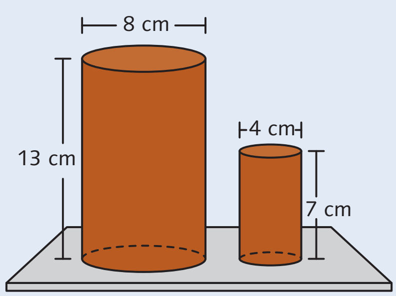
d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{5}{4}$

5. Para fazer cortes transversais em um cano de ferro, um metalúrgico utilizará uma serra elétrica equipada com um disco de corte cuja durabilidade permite cortar uma área de ferro equivalente a 1,2 m^2. Sabendo que o comprimento do diâmetro externo do cano é 80 mm e o interno é 62 mm, calcule quantos cortes, no máximo, poderão ser feitos com um único disco. 598 cortes

Você produtor

6. Observe os seguintes objetos de madeira em formato de cilindro reto em cima de uma mesa.



Rafael L. Gaion

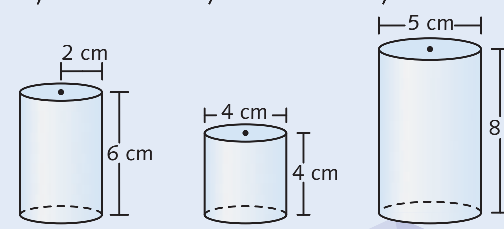
Elabore uma tarefa envolvendo área de superfície desses objetos. Em seguida, dê o problema que você elaborou para um colega resolver. Por fim, verifiquem se a resposta está correta.

Resposta pessoal. Possível resposta: considere os objetos **A** e **B** em formato de cilindro reto cujas alturas são, respectivamente, 13 cm e 7 cm. A área da superfície do objeto **A** é quantas vezes maior do que a área da superfície do objeto **B**?

7. Resposta pessoal. Possível resposta:
a) Qual é a área total deste cilindro?
b) Qual é a área lateral deste cilindro?
c) A soma das áreas totais dos cilindros dos itens **a** e **b** é maior do que a área total deste cilindro?

Você produtor

7. Para cada um dos cilindros retos, escreva algumas questões e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se as respostas estão corretas.



Ilustrações: Sergio L. Filho

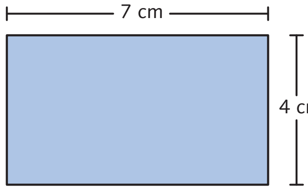
8. Um dos reservatórios de combustível de uma refinaria tem o formato de um cilindro reto de altura 10 m e diâmetro 11 m. Quantos litros de tinta são necessários para pintar toda a parte externa desse reservatório, sabendo que com cada litro é possível pintar 8 m^2? aproximadamente 67 litros

ymgerman/Shutterstock.com

Tanques para armazenamento de combustível.

9. Um tambor com 1,4 m de altura tem o formato de um cilindro reto cuja área total é $1{,}9\pi\ m^2$. Calcule, em metros, o comprimento do diâmetro desse tambor. 1 m

10. Considere dois cilindros obtidos pela rotação da região retangular abaixo, um em torno de seu lado maior e o outro em torno de seu lado menor.



Sergio L. Filho

a) Calcule a área lateral e a área da base de cada um desses cilindros.

b) Qual é a diferença entre as áreas totais desses cilindros? 207,24 cm^2

11. A área lateral de um cilindro reto é $240\pi\ cm^2$ e o raio de sua base tem 6 cm de comprimento. Qual é, em centímetros, a altura desse cilindro? 20 cm

12. Calcule a área da base de um cilindro equilátero sabendo que sua área total é $114\pi\ cm^2$. $19\pi\ cm^2$

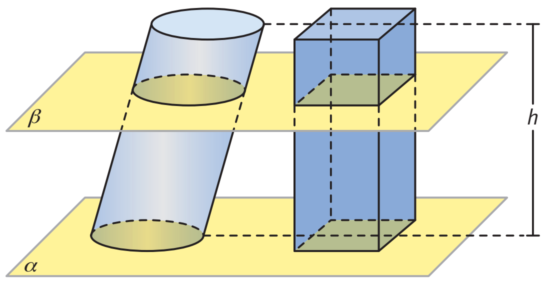
10. a) cilindro de $r = 7$ cm: aproximadamente 175,84 cm^2; aproximadamente 50,24 cm^2
cilindro de $r = 4$ cm: aproximadamente 175,84 cm^2; aproximadamente 153,86 cm^2

Volume do cilindro

Em certas situações, é necessário saber a quantidade de líquido que um recipiente, um reservatório ou uma embalagem de forma cilíndrica pode armazenar. Nesses casos, precisamos utilizar conhecimentos acerca de volume do cilindro.

Para abordar esse assunto, vamos utilizar o princípio de Cavalieri, já estudado no capítulo anterior.

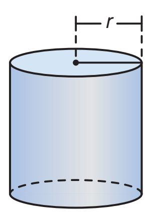
Consideremos um cilindro qualquer e um paralelepípedo, ambos de altura h, apoiados em um plano horizontal α, de modo que suas bases tenham áreas iguais. Vimos anteriormente, que, se um plano β qualquer paralelo a α cortar os dois sólidos, serão determinadas regiões planas de áreas iguais.



*Após os alunos analisarem, investigarem a imagem e conversarem sobre a questão, diga-lhes que os dois sólidos têm o mesmo volume, que pode ser representado pela igualdade $V_{cilindro} = V_{paralelepípedo}$.

- Com base no princípio de Cavalieri, o que podemos observar acerca do volume dos dois sólidos? Ambos têm o mesmo volume.*
- Que expressão podemos escrever para representar o volume do cilindro? $V_{cilindro} = A_b \cdot h$ **
- Visto que a base do cilindro é um círculo de raio r e área igual a πr^2, qual expressão permite calcular o volume do cilindro? $V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h$

**Deixe que os alunos conversem sobre essa questão e leve-os a perceber que o volume do cilindro pode ser calculado de maneira semelhante à do paralelepípedo: $V_{cilindro} = A_b \cdot h$



Ilustrações: Sergio L. Filho

Espera-se que o aluno perceba que na expressão $V_{cilindro} = A_b \cdot h$, a área da base, dada por A_b, pode ser substituída por πr^2, isto é, $V_{cilindro} = A_b \cdot h = \pi r^2 \cdot h$.

De modo geral:

> Podemos calcular o volume de um cilindro multiplicando a área da base pela altura.
>
> $$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h$$

Bridgeman/Easypix/Museu Nacional do Iraque, Allawi, Baghdad, Iraque

A geometria babilônica está ligada diretamente à mensuração prática. Existem vários exemplos concretos do período 2000-1600 a.C. que mostram o quanto os babilônicos estavam familiarizados com regras gerais para o cálculo da área de várias figuras planas (retângulo, triângulo, trapézio) e do volume de alguns prismas. Eles conheciam o teorema de Pitágoras, e indubitavelmente se deve aos babilônicos antigos a divisão da circunferência em 360 partes iguais.

Tábula babilônica de argila com escritas cuneiformes.

Problemas e exercícios resolvidos

Observação
Na resolução das tarefas desta seção, quando necessário, foi considerado $\pi = 3{,}14$.

R4. O raio da base de um cilindro equilátero tem 15 cm de comprimento. Calcule, em litros, o volume desse cilindro.

Resolução

Como o cilindro é equilátero, temos: $h = 2r = 2 \cdot 15 = 30 \rightarrow 30$ cm

Calculamos o volume do cilindro: $V = \pi r^2 h = 3{,}14 \cdot 15^2 \cdot 30 = 21\,195 \rightarrow 21\,195$ cm^3

Como 1 L = 1 000 cm^3, temos: $V = \dfrac{21\,195}{1\,000} = 21{,}195$

Portanto, o volume desse cilindro é, aproximadamente, 21,195 L.

R5. Um recipiente em forma de cubo cujo comprimento interno da aresta é igual a 12 cm está cheio de água. Se toda essa água for despejada em outro recipiente com a forma de cilindro circular reto com medidas internas de 6 cm de raio e 20 cm de altura, qual será a altura do nível da água?

Resolução

Calculamos o volume da água no recipiente cúbico.

$$V = a^3 = 12^3 = 1\,728 \rightarrow 1\,728 \text{ cm}^3$$

Sabemos que $r = 6$ cm e $V = 1\,728$ cm^3. Substituindo esses dados em $V = \pi r^2 h$ e efetuando os cálculos, obtemos o valor de h, que corresponde à altura da água no cilindro.

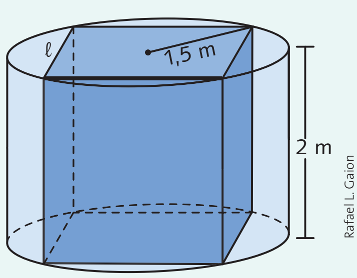
$$V = \pi r^2 h \Rightarrow 1\,728 = 3{,}14 \cdot 6^2 h \Rightarrow 1\,728 = 113{,}04h \Rightarrow h = 15{,}29$$

Portanto, a altura do nível da água no recipiente cilíndrico será, aproximadamente, 15,29 cm.

R6. Seja um prisma reto de base quadrada inscrito em um cilindro reto com 2 m de altura e raio 1,5 m.

a) Calcule o volume do prisma.

b) Qual é a diferença entre o volume do prisma e o do cilindro?



Resolução

a) A diagonal da base do prisma (D) e o diâmetro da base do cilindro têm o mesmo comprimento, ou seja, $D = 2 \cdot 1{,}5 = 3 \rightarrow 3$ m. Calculando o comprimento do lado da base do prisma, em metros, temos:

$$D^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow 3^2 = 2\ell^2 \Rightarrow \ell = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Observação
Note que $\ell = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, pois $\ell > 0$.

Calculamos o volume do prisma.

$$V_p = \ell^2 h = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot 2 = \frac{9 \cdot 2}{4} \cdot 2 = 9 \rightarrow 9 \text{ m}^3$$

b) Calculamos o volume do cilindro:

$$V_c = \pi r^2 h = 3{,}14 \cdot (1{,}5)^2 \cdot 2 = 14{,}13$$

Logo, o volume do cilindro é, aproximadamente, 14,13 m^3.

Por fim, calculamos a diferença entre o volume do cilindro e o do prisma:

$$V_c - V_p \simeq 14{,}13 - 9 = 5{,}13$$

Portanto, a diferença entre os volumes é de, aproximadamente, 5,13 m^3.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

Se achar necessário, oriente os alunos a utilizar uma calculadora durante a resolução das tarefas desta seção, a fim de auxiliá-los na execução dos cálculos.

Observação

Na resolução das tarefas desta seção, quando necessário, considere $\pi = 3{,}14$.

Na tarefa **17**, por se tratar de uma questão de vestibular, embora estejamos usando "comprimento do diâmetro", por exemplo, utilizou-se a expressão "altura igual ao diâmetro da base" para informar que a altura do cilindro é igual ao comprimento do diâmetro da base.

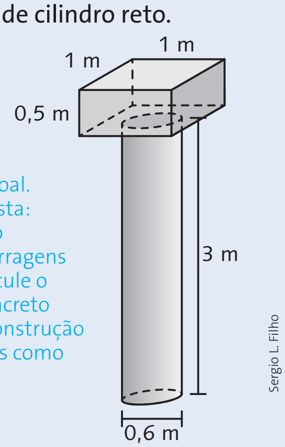
13. O interior do tanque de combustível de um caminhão tem a forma de um cilindro reto com diâmetro 70 cm e comprimento (distância entre as bases) igual a 130 cm. Calcule, em litros, a capacidade desse tanque de combustível. 500 L

Observação

$1\ m^3 = 1000\ L$

Você produtor

14. A imagem abaixo representa uma estrutura de concreto projetada para a construção de uma torre de transmissão. Essa estrutura é composta de duas partes: uma em formato de paralelepípedo reto retângulo e outra em formato de cilindro reto.



Sergio L. Filho

Resposta pessoal. Possível resposta: desprezando o volume das ferragens utilizadas, calcule o volume de concreto utilizado na construção de 4 estruturas como essa.

A partir dessa imagem e das informações apresentadas, elabore um problema que envolva o cálculo do volume de cilindro reto e dê para um colega resolver. Depois, verifiquem se a resposta está correta.

15. Determine a área da superfície externa de um recipiente cilíndrico, sabendo que seu volume é $48\pi\ cm^3$ e o comprimento do raio da base do recipiente é $\frac{1}{6}$ da altura. $56\pi\ cm^2$

Em grupo

16. Na página **52** do capítulo anterior, vimos como construir um fluxograma e elaborar um algoritmo. De maneira parecida, escrevam um algoritmo que possibilite determinar se é possível armazenar certo volume de água, em litros, em um recipiente com formato de cilindro reto, dados o comprimento do diâmetro interno da base e a altura interna do recipiente, ambos em centímetros. Depois, construam um fluxograma a partir do algoritmo que vocês escreveram.

Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

17. (UFG-GO) O cilindro circular reto equilátero (em que a altura é igual ao diâmetro da base) tem a seguinte propriedade: entre todos os cilindros de mesmo volume é o que tem menor área total. Uma empresa pretende comercializar o seu produto em embalagens em forma de cilindro reto equilátero com capacidade para 400 mL. Calcule as dimensões aproximadas da embalagem para que o custo de sua produção seja o menor possível.

raio: aproximadamente 4 cm; altura: aproximadamente 8 cm

Você produtor

18. a) Resposta pessoal. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

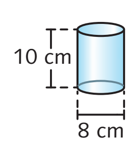
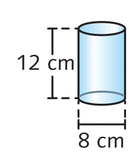
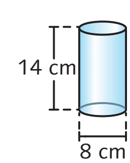
18. Atribua valores reais e positivos para *p*, *d* e *c*, e peça a um colega que determine:

a) o raio de um cilindro equilátero, sabendo que seu volume é $p\pi\ cm^3$.

b) a altura interna de uma caixa-d'água cilíndrica com diâmetro interno *d*, em metros, com capacidade para *c* litros.

Depois, verifique se as resoluções estão corretas.

19. José vende caldo de cana em copos de 3 tamanhos diferentes, todos com formato de cilindro reto. Veja no quadro o preço cobrado e as dimensões de cada copo.

Copo pequeno	Copo médio	Copo grande
R$ 4,00	R$ 5,00	R$ 6,00
		

Ilustrações: Rafael L. Gaion

Julgue em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações. verdadeiras: b, c, e; falsas: a, d

a) O copo pequeno tem 150π mL.

b) O copo grande tem 224π mL.

c) Por R$ 10,00 o consumidor leva a mesma quantidade de caldo de cana comprando dois copos médios ou um copo grande e um copo pequeno.

d) José terá mais lucro se vender a medida de 3 copos pequenos no lugar da medida de 2 copos grandes.

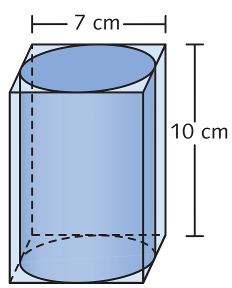
e) A quantidade de caldo de cana de 2 copos médios e 1 copo pequeno corresponde à mesma quantidade de 1 copo grande e 2 copos pequenos.

Em grupo

20. Um recipiente em forma de cilindro reto de raio interno com 8 cm de comprimento e altura interna de 17 cm contém determinada quantidade de água. Nesse recipiente foi colocado um prisma reto com volume igual a 525 cm^3 e altura igual a 21 cm. Com isso, a água encheu-o totalmente, sem transbordar. Sabendo que a base do prisma ficou totalmente apoiada no recipiente, calculem a altura do nível da água antes de o prisma ser colocado em seu interior. aproximadamente 14,89 cm

21. A figura representa um cilindro reto inscrito em um paralelepípedo reto retângulo de base quadrada.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

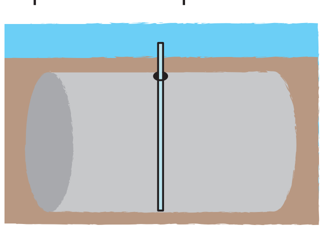


Rafael L. Gaion

a) Qual é o volume do paralelepípedo? E qual é o volume do cilindro? 490 cm^3; aproximadamente 384,65 cm^3

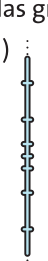
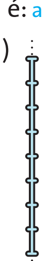
b) Qual deve ser o comprimento do raio de um cilindro com altura de 5 cm para que seu volume seja igual à diferença entre os volumes dos sólidos representados na figura? aproximadamente 2,59 cm

22. (Enem) Uma empresa de transporte armazena seu combustível em um reservatório cilíndrico enterrado horizontalmente. Seu conteúdo é medido com uma vara graduada em vinte intervalos, de modo que a distância entre duas graduações consecutivas represente sempre o mesmo volume.



Rafael L. Gaion

A ilustração que melhor representa a distribuição das graduações na vara é: a

a) 
b) 
c) 
d) 
e) 

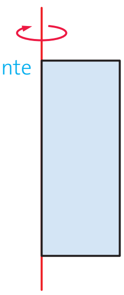
Ilustrações: Sergio L. Filho

23. Uma bomba instalada às margens de um lago é ligada a um reservatório por 300 m de tubo cujo formato é de um cilindro reto com o comprimento do diâmetro interno igual a 8 cm. Calcule quantos litros de água são necessários para encher totalmente esse tubo. aproximadamente 1 507,2 L

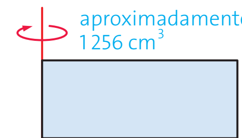
24. Considere um retângulo cujo lado maior tem 10 cm de comprimento e o lado menor, 4 cm. Com a rotação completa desse retângulo em torno de um de seus lados, podemos obter dois cilindros de revolução.

a) Calcule o volume aproximado do cilindro obtido pela rotação desse retângulo em torno do:

aproximadamente 502,4 cm^3



aproximadamente 1 256 cm^3



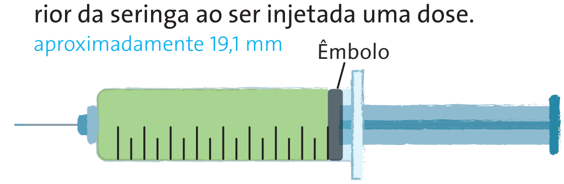
lado menor: aproximadamente 879,2 cm^2; lado maior: aproximadamente 351,68 cm^2

Ilustrações: Sergio L. Filho

- lado maior.
- lado menor.

b) Calcule a área total desses dois cilindros.

25. (UFG-GO) A figura, a seguir, representa uma seringa no formato de um cilindro circular reto, cujo êmbolo tem 20 mm de diâmetro. Esta seringa está completamente cheia de um medicamento e é usada para injetar doses de 6 mL desse medicamento. Com base nessas informações, determine quantos milímetros o êmbolo se desloca no interior da seringa ao ser injetada uma dose. aproximadamente 19,1 mm



Rafael L. Gaion

Desafio

26. (UFRN) Para obter uma mistura de cor alaranjada, um pintor utiliza-se de uma lata grande, em formato cilíndrico, cuja altura é 30 cm, contendo tinta de cor amarela, e de uma lata pequena, com tinta de cor vermelha, contendo $\frac{2}{7}$ da capacidade da lata maior. A mistura é obtida combinando duas porções de tinta amarela para cada porção de tinta vermelha. O pintor usa todo o conteúdo da lata menor para compor a mistura alaranjada. A quantidade de tinta amarela que restou na lata grande corresponde a uma altura aproximada de: a

a) 12,86 cm
b) 8,57 cm
c) 21,43 cm
d) 18,14 cm

3 Cone circular

Neste tópico, iremos estudar o **cone circular**.

Nas imagens abaixo, podemos notar alguns objetos cujo formato lembra um cone.

As imagens não estão representadas em proporção.


lovepaul2558/Shutterstock.com

Cone de sinalização.


Napat/Shutterstock.com

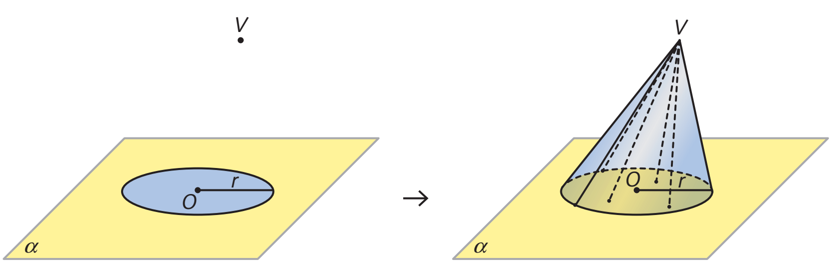
Funil.


Abramova Elena/Shutterstock.com

Casquinha de sorvete.

Podemos definir cone circular da seguinte maneira:

Sejam um plano α, um círculo de centro O e raio r contido nesse plano e um ponto V fora de α. Denomina-se **cone circular** a reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em V e outra em um ponto do círculo.



Sergio L. Filho

Neste capítulo, iremos estudar apenas cones circulares, e para simplificar a escrita, chamaremos apenas de cones.

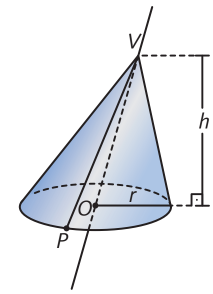
Cone de Imhoff, ou cone de sedimentação, é um instrumento em formato de cone, usado em laboratórios e em estações de tratamento de esgoto para determinar a sedimentação de sólidos em suspensão na água, ou seja, separar a água dos sedimentos (material insolúvel). Esse cone é preenchido com água e colocado em descanso (sem agitação), e verifica-se o volume dos sólidos no fundo. Possui esse nome em homenagem ao engenheiro sanitarista alemão Karl Imhoff (1876-1965).


José Vitor Elorza/ASC Imagens

Cone de sedimentação.

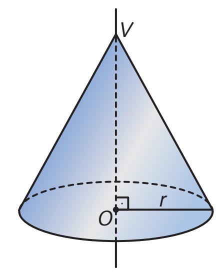
Elementos de um cone

Em um cone, podemos destacar alguns elementos. No cone ao lado, temos:



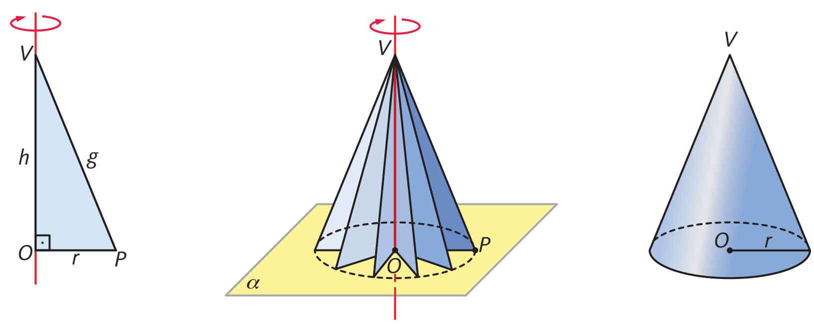
- **base**: é o círculo de centro *O* e raio *r*.
- **vértice**: é o ponto *V*.
- **altura**: é a distância entre o plano que contém a base e o vértice *V*.
  Na figura, *h* representa a medida da altura do cone.
- **eixo**: é a reta que passa pelo centro da base e pelo vértice. No caso da figura é a reta $\overleftrightarrow{OV}$.
- **geratriz**: é cada segmento de reta com uma extremidade em *V* e outra em um ponto da circunferência da base, por exemplo, $\overline{PV}$.
- **superfície lateral**: é a reunião de todas as geratrizes do cone.

Classificação

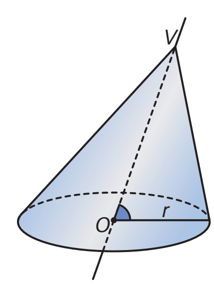


Um cone pode ser **reto** ou **oblíquo**.

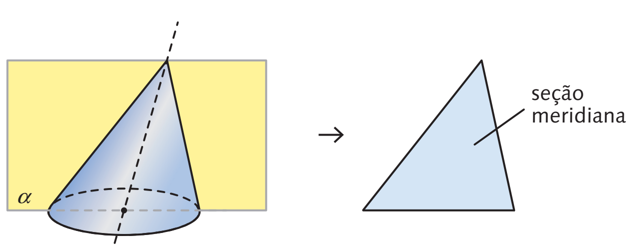
- **Cone reto**: é aquele cujo eixo é perpendicular ao plano que contém a base.
  Um cone reto também é chamado **cone de revolução**, pois pode ser obtido pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um dos catetos.



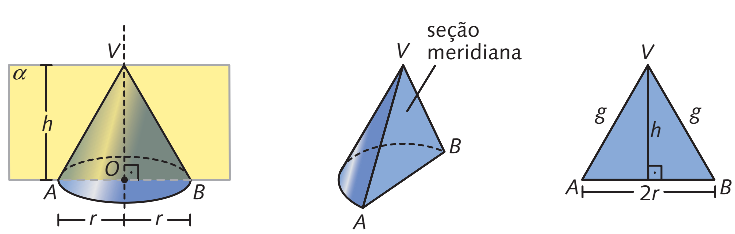
- **Cone oblíquo**: é aquele cujo eixo é oblíquo ao plano que contém a base.



A interseção de um cone com um plano que contém seu eixo é chamada **seção meridiana** do cone, a qual corresponde a um triângulo.



No cone reto, a seção meridiana contém o eixo de rotação dele. Caso a seção meridiana seja um triângulo equilátero, o cone também é chamado equilátero.

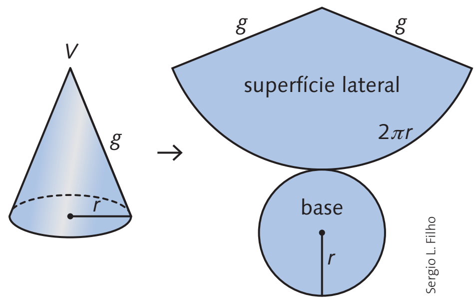


Ilustrações: Sergio L. Filho

Observação
Em um cone equilátero, $2r = g$.

Área da superfície de um cone reto

Na imagem abaixo, estão representados um cone reto e a planificação da sua superfície.



Sergio L. Filho

A **superfície lateral** de um cone reto é a reunião de todas as suas geratrizes. Planificada, essa superfície corresponde ao setor circular de raio g (geratriz), cujo comprimento do arco é $2\pi r$. A área dessa superfície é chamada **área lateral** do cone (A_ℓ).

De que maneira podemos calcular a área lateral de um cone reto?

Podemos calcular a área A_ℓ da superfície de um cone reto por meio de uma regra de três, visto que o comprimento do arco é diretamente proporcional à área do setor.

Deixe que os alunos conversem e deem sugestões de como calcular a área lateral do cone antes de abordá-la no livro. Depois, considerando as estratégias propostas e desenvolvidas por eles, apresente as explicações encontradas na página seguinte.

comprimento do arco		área do setor
$2\pi g$	———	πg^2
$2\pi r$	———	A_ℓ

$$\frac{2\pi g}{2\pi r} = \frac{\pi g^2}{A_\ell} \Rightarrow A_\ell \cdot g = \pi g^2 \cdot r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_\ell = \frac{\pi g^2 r}{g} \Rightarrow \boxed{A_\ell = \pi r g}$$

A **área da base** de um cone é a área do círculo que é sua base (A_b).

$$\boxed{A_b = \pi r^2}$$

A **superfície total** de um cone é a reunião da superfície lateral com a base. A área dessa superfície é chamada **área total** do cone (A_t).

$$\boxed{A_t = A_\ell + A_b}$$

Essa expressão também pode ser escrita da seguinte maneira:

$$A_t = \underbrace{A_\ell}_{\pi r g} + \underbrace{A_b}_{\pi r^2} = \pi r g + \pi r^2 \Rightarrow \boxed{A_t = \pi r(g + r)}$$

Observação

A expressão acima poderia ser escrita da seguinte forma para um cone equilátero:

$$A_t = \pi r(\underbrace{g}_{2r} + r) = \pi r(2r + r) = \pi r \cdot 3r = \boxed{3\pi r^2}$$

Problemas e exercícios resolvidos

R7. Sabendo que a área da base de um cone equilátero é 28,26 cm², resolva os itens.

a) Qual é o comprimento da geratriz desse cone?

b) Qual é a altura desse cone?

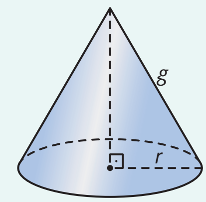
c) Qual é a área total de sua superfície?

d) Ao planificar a superfície lateral do cone, obtemos um setor circular cujo comprimento do arco é $2\pi r$. Calcule a medida do ângulo desse setor circular.

Observação
Na resolução das tarefas desta seção, quando necessário, foi considerado $\pi = 3{,}14$.

Resolução

a) Como o cone é equilátero, o comprimento de sua geratriz é igual ao comprimento do diâmetro da base, ou seja, igual ao dobro do comprimento do raio da base. Calculando o comprimento do raio da base, temos:

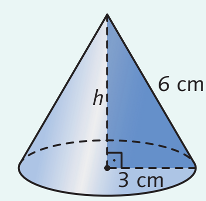


$$A_b = \pi r^2 \Rightarrow 28{,}26 = 3{,}14 \cdot r^2 \Rightarrow r^2 = 9 \begin{cases} r_1 = 3 \\ r_2 = -3 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Assim, o comprimento do raio é aproximadamente 3 cm. Agora, calcularemos o comprimento da geratriz. Para isso, fazemos:

$$g \simeq 2 \cdot 3 = 6 \rightarrow \text{aproximadamente 6 cm}$$

b) Como conhecemos o comprimento da geratriz e o comprimento do raio da base do cone, podemos calcular a altura por meio do teorema de Pitágoras.



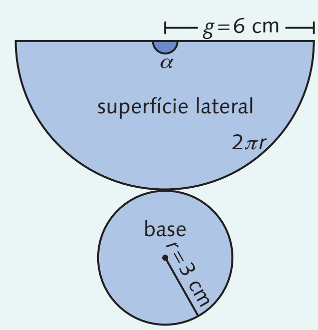
$$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow 6^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 27 \begin{cases} h_1 \simeq 5{,}2 \\ h_2 \simeq -5{,}2 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, a altura do cone é, aproximadamente, 5,2 cm.

c) Calculando a área total do cone, temos: $A_t = \pi r(g + r) = 3{,}14 \cdot 3 \cdot (6 + 3) = 84{,}78$

Portanto, a área total do cone é, aproximadamente, 84,78 cm².

d) Considerando toda a circunferência $(360°)$, a medida de seu comprimento é dada por $2\pi g$. Podemos calcular o ângulo do setor (α) por uma regra de três:



Ilustrações: Sergio L. Filho

ângulo (em graus)		comprimento do arco (em cm)
360	———	$2\pi g$
α	———	$2\pi r$

$$\frac{360}{\alpha} = \frac{2\pi g}{2\pi r} \Rightarrow \alpha \cdot \underset{6}{g} = 360 \cdot \underset{3}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{360 \cdot 3}{6} = 180$$

Portanto, a medida do ângulo do setor circular é 180°.

R8. Para a produção de embalagens de presentes, um artesão utiliza diversos materiais. A tampa de uma dessas embalagens tem a forma de um cone reto sem a base, com o comprimento do diâmetro da base igual a 15 cm e geratriz com 9 cm de comprimento. Sabendo que esse artesão pretende cobrir com tecido a superfície externa dessa tampa, calcule a quantidade mínima de tecido a ser utilizada.

Resolução

A quantidade mínima de tecido a ser utilizada corresponde à área lateral. Assim:

$$A_\ell = \pi r g = 3{,}14 \cdot 7{,}5 \cdot 9 = 211{,}95$$

Portanto, a quantidade mínima de tecido é, aproximadamente, 211,95 cm².

Se achar necessário, oriente os alunos a utilizar uma calculadora durante a resolução das tarefas desta seção, a fim de auxiliá-los na execução dos cálculos.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

32. Resposta pessoal. Possível resposta: Seja $r = 3{,}5$ cm e $h = 8$ cm. Determine:
a) a medida da geratriz.
b) a área da base.
c) a área total.

Observação

Na resolução das tarefas desta seção, quando necessário, considere $\pi = 3{,}14$.

28. Resposta pessoal. Possível resposta: qual é a quantidade mínima de papel a ser utilizada na confecção de cada um desses chapéus?

27. Considere um cone reto cuja geratriz tem 12 cm de comprimento e altura é 9 cm. Calcule:

a) sua área lateral. aproximadamente 299,18 cm²

b) a área da base. aproximadamente 197,96 cm²

c) a medida do ângulo central do setor obtido com a planificação desse cone.
aproximadamente 238°12’

Você produtor

28. Para uma festa de aniversário, serão confeccionados chapéus de papel no formato de cones retos com 15 cm de altura e 12 cm de diâmetro. A partir desse contexto e da fotografia a seguir, use a sua criatividade e escreva o enunciado de um problema envolvendo a área da superfície do cone reto. Depois, dê o problema que você elaborou para um colega resolver e, ao final, verifiquem se a resposta está correta.

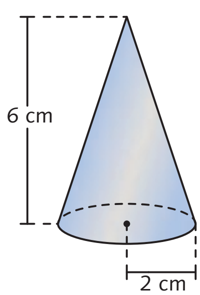

gmstockstudio/Shutterstock.com

Chapéu artesanal para festa.

29. De acordo com as medidas indicadas no cone reto representado, calcule:

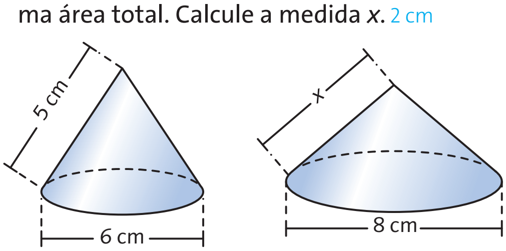
a) o comprimento de sua geratriz. aproximadamente 6,32 cm

b) a área de sua superfície total. aproximadamente 52,25 cm²



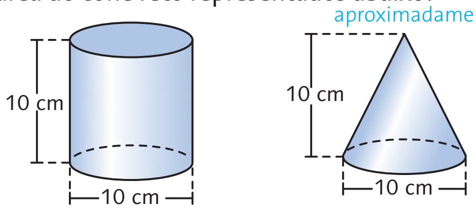
Rafael L. Gaion

30. Os cones retos representados abaixo têm a mesma área total. Calcule a medida x. 2 cm



Sergio L. Filho

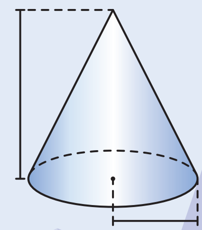
31. Qual é a razão entre a área total do cilindro reto e a área do cone reto representados abaixo?
aproximadamente 1,85



Rafael L. Gaion

Você produtor

32. De acordo com a representação do cone reto, atribua valores para a altura e para o comprimento do raio, escreva algumas questões e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se as respostas estão corretas.

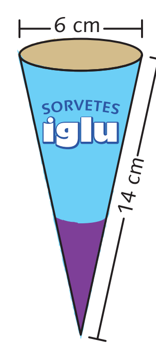

Sergio L. Filho

33. A altura de um cone reto é 9 cm e o diâmetro da base tem 24 cm de comprimento. Qual é a área total desse cone? aproximadamente 1 017,36 cm²

34. Em certo cone reto, a altura é igual ao dobro do comprimento do diâmetro da base. Sabendo que sua área lateral é, aproximadamente, $102{,}5\pi$ cm², calcule o comprimento do raio de sua base. (Considere $\sqrt{17} = 4{,}1$.) 5 cm

35. Uma indústria comercializa sorvetes em embalagens de papel no formato de cone reto. Observe na imagem ao lado algumas medidas dessa embalagem.

Sabendo que o papel deve dar duas voltas ao redor do sorvete, calcule a quantidade mínima de papel utilizada em cada embalagem.
aproximadamente 263,76 cm²

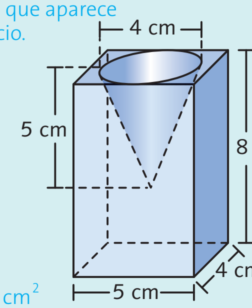


Rafael L. Gaion

Desafio

O nome do produto que aparece nesta página é fictício.

36. A figura representa um paralelepípedo reto retângulo do qual foi retirado um cone reto. Qual é a área total dessa figura? Considere $\sqrt{29} = 5{,}39$. 205,2892 cm²



Sergio L. Filho

37. (UFRGS-RS) Um cone circular reto é tal que cada seção obtida pela interseção de um plano que passa por seu vértice e pelo centro da sua base é um triângulo retângulo de catetos iguais. Se cortarmos esse cone ao longo de uma geratriz, abrindo e planificando sua superfície lateral, será obtido um setor circular cujo ângulo central tem medida α. Então: e

a) $\alpha < 180°$

b) $180° \leqslant \alpha < 200°$

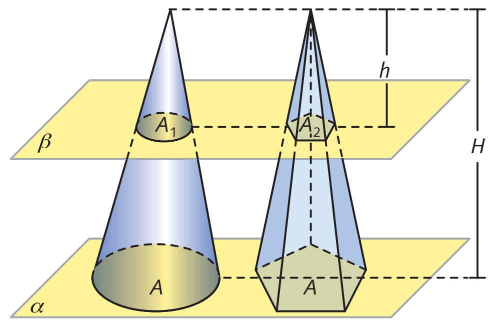
c) $200° \leqslant \alpha < 220°$

d) $220° \leqslant \alpha < 240°$

e) $\alpha \geqslant 240°$

Volume do cone

Neste tópico, vamos determinar uma fórmula para calcular o volume de um cone, assim como feito para as outras figuras geométricas espaciais estudadas até o momento.



Rafael L. Gaion

Consideremos um cone qualquer de altura H e área da base A contida em um plano α. Agora, imagine um plano horizontal β paralelo a α que intersecta o cone a uma distância h de seu vértice, determinando nele uma seção de área A_1. É possível demonstrar que A_1 e a base A do cone são regiões semelhantes, cuja razão de proporcionalidade é $\frac{h}{H}$.

- Observando a imagem e considerando o que você estudou até o momento, que estratégia poderia ser utilizada para calcular o volume desse cone? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam, com base no princípio de Cavalieri estudado anteriormente, que construiriam, ao lado do cone e apoiada no plano α, uma pirâmide com altura H e área da base igual a A.
- Junte-se a um colega e encontrem uma maneira de mostrar que o volume de um cone qualquer é igual à terça parte do produto da área da base pela altura.

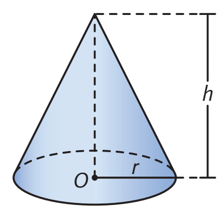
Partindo da estratégia apresentada na primeira questão, temos um cone e uma pirâmide apoiados em um plano α, ambos de altura H e área da base igual a A. Se um plano horizontal β paralelo a α intersecta o cone e a pirâmide a uma distância h de seus vértices, determinando seções de áreas A_1 e A_2, então temos: $\frac{A_1}{A} = \frac{A_2}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$. Assim, $A_1 = A_2$, e, pelo princípio de Cavalieri, o cone e a pirâmide possuem volumes iguais. Como vimos no capítulo anterior, o volume da pirâmide é igual a $V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_b \cdot h}{3}$. Dessa maneira, o volume do cone também é igual a $V_{\text{cone}} = \frac{A_b \cdot h}{3}$, isto é, a terça parte do produto da área da base pela altura, como queríamos mostrar.

De modo geral:

> O volume de um cone é igual à terça parte do produto da área da base pela altura.
>
> $$V_{\text{cone}} = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

Visto que a base do cone é um círculo de raio r e área πr^2, podemos escrever essa fórmula da seguinte maneira:

$$V_{\text{cone}} = \frac{A_b \cdot h}{3} \Rightarrow \boxed{V_{\text{cone}} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}}$$



Sergio L. Filho

Problemas e exercícios resolvidos

Observação

Na resolução das tarefas desta seção, quando necessário, foi considerado $\pi = 3{,}14$.

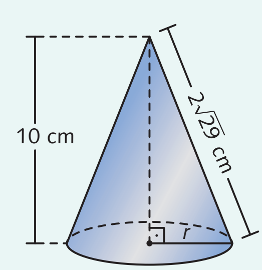
R9. Calcule o volume de um cone cuja geratriz tem $2\sqrt{29}$ cm de comprimento e cuja altura é 10 cm.

Resolução

Com os dados do problema, podemos calcular o comprimento do raio da base por meio do teorema de Pitágoras.

$$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow \left(2\sqrt{29}\right)^2 = r^2 + 10^2 \Rightarrow r^2 = 4 \cdot 29 - 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = 16 \begin{cases} r_1 = 4 \\ r_2 = -4 \quad \text{(não convém)} \end{cases}$$



Sergio L. Filho

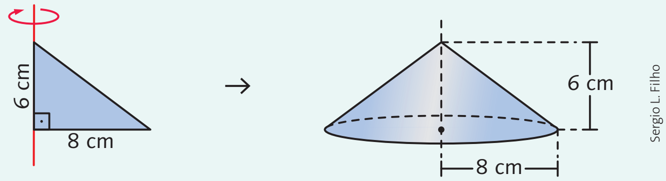
Conhecido o comprimento do raio, calculamos o volume do cone.

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 10}{3} = \frac{502{,}4}{3} \simeq 167{,}47$$

Portanto, o volume do cone é, aproximadamente, 167,47 cm³.

R10. Qual é o volume do cone obtido pela rotação, em relação ao menor lado, de um triângulo retângulo com catetos medindo 6 cm e 8 cm?

Resolução



Rotacionando esse triângulo em relação ao lado menor, obtemos um cone reto de altura 6 cm e raio 8 cm. Calculando o volume desse cone, temos:

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 8^2 \cdot 6}{3} = 401{,}92$$

Portanto, o volume desse cone é, aproximadamente, 401,92 cm^3.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

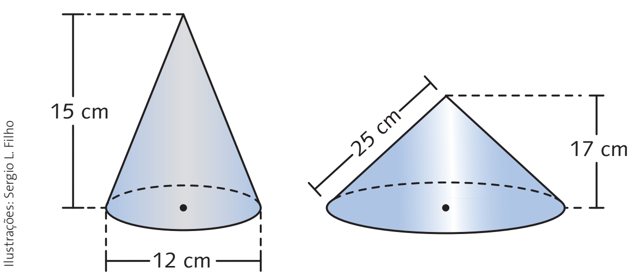
Observação

Se achar necessário, oriente os alunos a utilizar uma calculadora durante a resolução das tarefas desta seção, a fim de auxiliá-los na execução dos cálculos.

Na resolução das tarefas desta seção, quando necessário, considere $\pi = 3{,}14$.

38. Calcule o volume dos cones retos indicados.

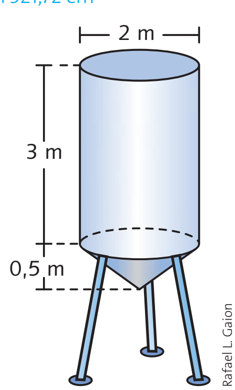
a) aproximadamente 565,2 cm^3 b) aproximadamente 5 978,36 cm^3



39. Determine a altura de um cone reto, sabendo que o comprimento de seu diâmetro é 20 cm e seu volume é igual ao de um cilindro reto com 19 cm de altura e cujo comprimento do raio da base é 5 cm.
aproximadamente 14,25 cm

40. Qual é o volume de um cone equilátero cujo diâmetro da base tem 18 cm de comprimento?
aproximadamente 1 321,72 cm^3

41. Na imagem, está representado um reservatório de água. Note que ele é composto de uma parte cujo formato lembra um cilindro reto e de outra parte que lembra um cone reto. Considerando as indicações da figura e desconsiderando a espessura das partes, calcule:



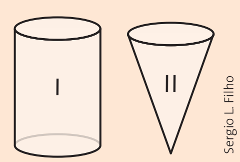
a) o volume da parte cônica desse reservatório.
aproximadamente 0,52 m^3

b) a capacidade desse reservatório em litros.
9 940 L

c) a área da superfície externa desse reservatório.
25,5 m^2

Em grupo

42. (UFMT) Admita que os interiores dos recipientes I e II da figura tenham, respectivamente, as formas de um cilindro circular reto e de um cone circular reto, de áreas das bases iguais e alturas iguais. Sabe-se que o recipiente I está com a metade de sua capacidade ocupada por água.



Se toda a água do recipiente I for despejada no recipiente II, pode-se afirmar: b

a) Todo o recipiente II será preenchido e sobrará água correspondente a $\frac{1}{3}$ da capacidade do recipiente I.

b) Todo o recipiente II será preenchido e sobrará água correspondente a $\frac{1}{6}$ da capacidade do recipiente I.

c) Faltará água correspondente a $\frac{1}{6}$ da capacidade do recipiente I para preencher todo o recipiente II.

d) Faltará água correspondente a $\frac{1}{3}$ da capacidade do recipiente I para preencher todo o recipiente II.

e) Todo o recipiente II será preenchido e não sobrará água no recipiente I.

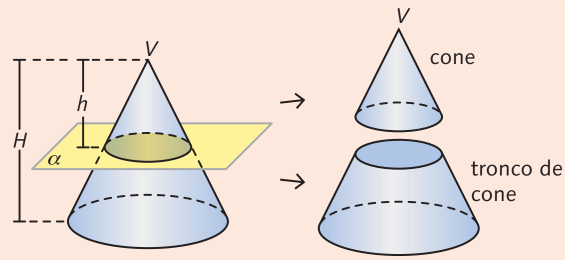
4 Tronco de um cone reto

Os instrumentos de percussão são aqueles cujo som é produzido pelo impacto, raspagem ou agitação. São os mais antigos instrumentos musicais. Entre os instrumentos de percussão, podemos citar o rebolo cônico, cuja forma é de um **tronco de cone** reto vazado, geralmente revestido de couro na base maior, como mostra a imagem ao lado.

Baloncici/Shutterstock.com

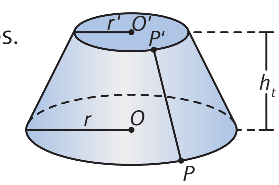
Rebolo cônico.

Consideremos um cone reto com altura H e vértice V. Consideremos também um plano α paralelo à base, com distância h de V, determinando dois sólidos: um cone e um sólido denominado **tronco de cone**.



Elementos do tronco de cone

Em um tronco de cone, podemos destacar alguns elementos. No tronco de cone ao lado, temos:

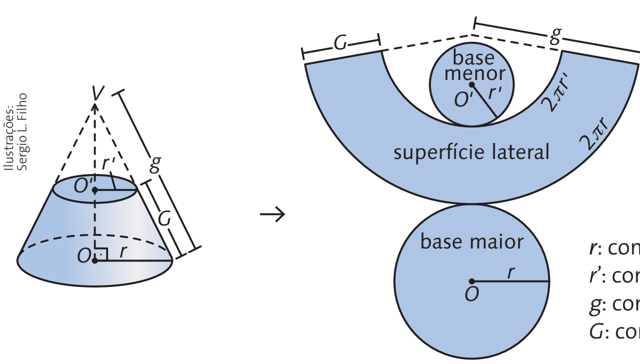


- **base maior**: é o círculo de centro O e raio r.
- **base menor**: é o círculo de centro O' e raio r'.
- **altura do tronco**: é a distância entre a base maior e a base menor. Na figura, h_t representa a medida da altura do tronco.
- **geratriz do tronco**: é cada segmento de reta contido na geratriz do cone cujas extremidades pertencem às circunferências das bases, por exemplo, $\overline{PP'}$ na figura.
- **superfície lateral**: é a reunião de todas as geratrizes do tronco de cone.

Área da superfície de um tronco de cone reto

Na imagem estão representados um tronco de cone reto e a planificação de sua superfície.

Ilustrações: Sergio L. Filho



Observação

Note que $g - G$ corresponde ao comprimento da geratriz do cone de base de centro O'.

r: comprimento do raio da base maior
r': comprimento do raio da base menor
g: comprimento da geratriz do cone de base O
G: comprimento da geratriz do tronco

A **área lateral do tronco** (A_ℓ) pode ser obtida pela diferença entre a área lateral do cone com base de centro O (A_O) e a área lateral do cone com base de centro O' $(A_{O'})$.

- $A_O = \pi r g$
- $A_{O'} = \pi r'(g - G)$
- $A_\ell = A_O - A_{O'} = \pi r - \pi r'(g - G)$ (I)

Escrevendo g em função de G, r e r' em I, podemos deduzir a seguinte fórmula, que permite calcular a área lateral do tronco de cone reto:

$$A_\ell = \pi G(r + r')$$

A dedução dessa fórmula, que se encontra na Assessoria pedagógica, pode ser feita na lousa com os alunos.

As **áreas das bases** de um tronco de cone correspondem às áreas dos círculos que constituem essas bases. Nesse caso, temos:

- base maior: $A_B = \pi r^2$
- base menor: $A_b = \pi r'^2$

A **superfície total** de um tronco de cone é a reunião da superfície lateral com as bases. A área dessa superfície é chamada **área total do tronco** (A_t).

$$A_t = A_\ell + A_B + A_b$$

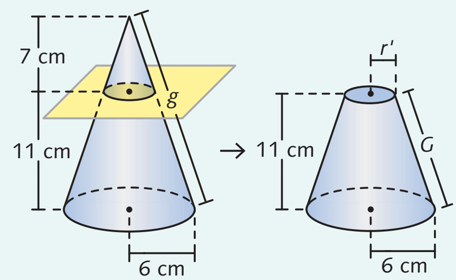
Problemas e exercícios resolvidos

Observação
Na resolução das tarefas desta seção, quando necessário, foi considerado $\pi = 3{,}14$.

R11. Considere o cone reto representado e o tronco de cone obtido dele.

a) Qual é o comprimento do raio da base menor e da geratriz do tronco de cone obtido?

b) Calcule a área total desse tronco de cone.

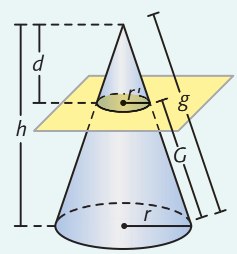


Resolução

a) Por meio da semelhança, temos as seguintes proporções:

- raio da base menor

$$\frac{r}{r'} = \frac{h}{d} \Rightarrow \frac{6}{r'} = \frac{18}{7} \Rightarrow 18r' = 42 \Rightarrow r' = \frac{42}{18} = 2{,}3 \rightarrow 2{,}3 \text{ cm}$$



Ilustrações: Sergio L. Filho

- geratriz do tronco de cone

Inicialmente, calculamos g utilizando o teorema de Pitágoras.

$$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 18^2 + 6^2 \Rightarrow g^2 = 360 \begin{cases} g_1 = 6\sqrt{10} \\ g_2 = -6\sqrt{10} \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Assim, segue que:

$$\frac{h}{d} = \frac{g}{g - G} \Rightarrow \frac{18}{7} = \frac{6\sqrt{10}}{6\sqrt{10} - G} \Rightarrow 108\sqrt{10} - 18G = 42\sqrt{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18G = 66\sqrt{10} \Rightarrow G = \frac{66\sqrt{10}}{18} \simeq 11{,}6 \rightarrow \text{aproximadamente } 11{,}6 \text{ cm}$$

b) Inicialmente, calculamos, em centímetros quadrados, a área de cada uma das bases e da superfície lateral.

- Base menor

$$A_b = \pi r'^2 = 3{,}14 \cdot (2{,}3)^2 \simeq 16{,}61$$

- Base maior

$$A_B = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 6^2 = 113{,}04$$

- Superfície lateral

$$A_\ell = \pi G(r + r') = 3{,}14 \cdot 11{,}6 \cdot (6 + 2{,}3) \simeq 302{,}32$$

Adicionando a medida dessas áreas aproximadas, obtemos uma aproximação para a área total do tronco de cone.

$$A_t = A_\ell + A_B + A_b \simeq 302{,}32 + 113{,}04 + 16{,}61 = 431{,}97 \rightarrow \text{aproximadamente } 431{,}97 \text{ cm}^2$$

Se achar necessário, oriente os alunos a utilizar uma calculadora durante a resolução das tarefas desta seção, a fim de auxiliá-los na execução dos cálculos.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

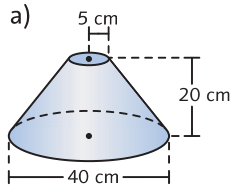
48. Resposta pessoal. Possível resposta: Seja $r = 5$ cm, $r' = 3$ cm e $h_t = 8$ cm. Calcule:
a) a geratriz do tronco.
b) a área total do tronco.

Observação

Na resolução das tarefas desta seção, quando necessário, considere $\pi = 3{,}14$.

43. Calcule a área total dos troncos de cone.

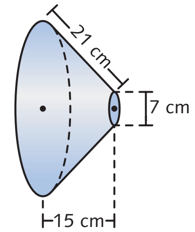
a)



Ilustrações: Sergio L. Filho

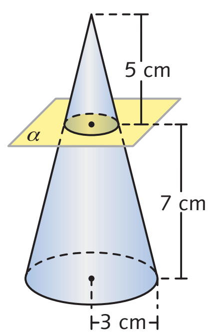
aproximadamente 3 297 cm^2

b)



aproximadamente 2 509,46 cm^2

44. O plano α representado na imagem a seguir é paralelo à base de um cone reto e corta-o determinando um tronco de cone e um cone menor.



Sergio L. Filho

a) Em relação ao tronco de cone, calcule:
- o comprimento do raio da base menor. 1,25 cm
- o comprimento da geratriz. aproximadamente 7,22 cm

b) Qual é a área lateral do tronco de cone? aproximadamente 96,35 cm^2

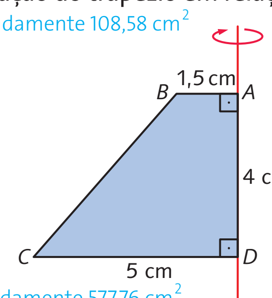
c) A sentença a seguir é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta. falsa

A área total do cone maior é igual à reunião da área total do cone menor com a do tronco de cone.

45. Seja um tronco reto de cone cujos comprimentos do raio da base maior, do raio da base menor e da geratriz são, respectivamente, r, r' e G. Sabendo que $r = 3r'$ e que $G = 3r$, determine a área total aproximada desse tronco se:

a) $r' = 2$ cm b) $r = 3$ cm c) $G = 27$ cm

46. Calcule a área lateral do tronco de cone obtido pela rotação do trapézio em relação ao lado $\overline{AD}$.
aproximadamente 108,58 cm^2

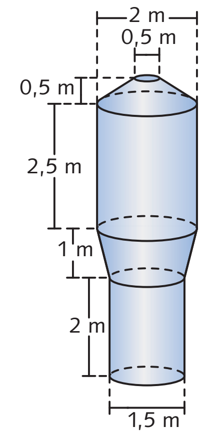


Sergio L. Filho

45. a) aproximadamente 577,76 cm^2
45. b) aproximadamente 144,44 cm^2
45. c) aproximadamente 1 299,96 cm^2

47. Observe na figura as dimensões de um reservatório de água formado por quatro partes, sendo duas com formato de cilindro reto e duas com formato de tronco de cone reto.

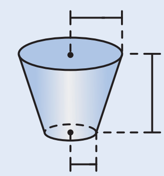
Para pintar esse reservatório, será utilizada uma tinta que permite cobrir 7 m^2 com um litro. Quantos litros de tinta, no mínimo, serão necessários para pintar toda a superfície externa do reservatório? 5,18 L



Rafael L. Gaion

Você produtor

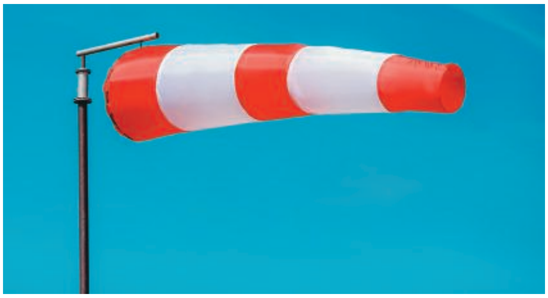
48. Atribua valores às medidas correspondentes ao tronco de cone reto representado, elabore algumas questões sobre ele e passe-as para um colega resolver. Em seguida, verifique se as respostas estão corretas.



Sergio L. Filho

49. Certo utensílio de cozinha tem o formato de um tronco de cone reto com 15 cm de altura. Sabendo que o comprimento do diâmetro da base (base menor) é igual à altura e que o comprimento do diâmetro da abertura (base maior) é o dobro do comprimento do diâmetro da base, calcule a área da superfície externa desse utensílio.
aproximadamente 1 361,42 cm^2

50. A biruta, equipamento feito de tecido, é usada para indicar a direção do vento. Ela tem a forma de um tronco de cone aberto nas bases, e sua base maior é presa a um aro de metal.



Parilov/Shutterstock.com

Biruta.

O diâmetro da base maior de certa biruta tem 0,8 m de comprimento, o diâmetro da base menor, 0,2 m, e o comprimento é 1,6 m. Qual é a quantidade de tecido, em metro quadrado, dessa biruta?
aproximadamente 2,56 m^2

Volume de um tronco de cone reto

Diversos grupos culturais por meio de suas práticas buscam explicar e resolver problemas que fazem parte de seu universo cotidiano. Calcular a área de uma região ou explicar fenômenos climáticos, por exemplo, podem ser compreendidos e explicados de formas distintas por grupos culturais diferentes, como jovens que vivem no campo e jovens que vivem em uma grande cidade.

Uma prática muito conhecida entre os trabalhadores rurais, por exemplo, consiste na cubagem da madeira, que é um método utilizado para medir o volume do tronco de uma árvore. Esse cálculo é útil para determinar quanto de madeira deve ser cortado para se transformar em lenha ou em tábuas para a construção, para o uso em projetos de reflorestamento, para a compra e venda de áreas arborizadas e ainda para negociações com donos de madeireiras.

Veja a seguir como esse método é usado para obter o volume do tronco de uma árvore:

- mede-se o comprimento da circunferência no centro do tronco;
- divide-se esse valor por quatro;
- o resultado obtido é elevado ao quadrado e multiplicado pelo comprimento do tronco.

Observe o método da cubagem aplicado no exemplo abaixo.

Rafael L. Gaion

Exemplo

Considere que o tronco acima tenha 200 cm de comprimento e que o comprimento da circunferência ao centro seja 132 cm. Então, o volume do tronco (V_t) será:

$$V_t = \left(\frac{132}{4}\right)^2 \cdot 200 = 217\,800$$

Portanto, por meio do método da cubagem, o volume do tronco apresentado é de, aproximadamente, 217 800 cm^3 ou 0,2178 m^3.

Neste caso, o formato do tronco foi aproximado ao formato de um prisma de base quadrada, cujo comprimento da aresta é igual à quarta parte do comprimento da circunferência ao centro do tronco. Esse recurso funciona no contexto em que há uma parte da madeira que é desprezada e, portanto, não há necessidade de se obter uma aproximação muito precisa.

Observação
Na resolução das tarefas dessa seção, quando necessário, considere $\pi = 3{,}14$.

Outra maneira de se obter o volume do tronco de um cone reto é a partir dos comprimentos dos raios das bases e de sua altura. Tomando o tronco de cone reto a seguir, veja como podemos obter essa fórmula.

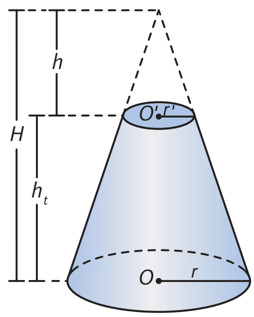
Observando a imagem ao lado, podemos notar que o volume do tronco (V_t) pode ser obtido pela diferença entre o volume do cone com base de centro O (V_O) e o volume do cone com base de centro O' $(V_{O'})$.

$$V = V_O - V_{O'} = \frac{\pi r^2 \cdot H}{3} - \frac{\pi r'^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi}{3}\left(r^2 \cdot H - r'^2 \cdot h\right) \qquad \text{(I)}$$

Substituindo $h = H - h_t$ em I e realizando alguns cálculos, obtemos a seguinte fórmula, que permite calcular o volume do tronco de cone:

$$V_t = \frac{\pi h_t}{3}\left(r^2 + r'r + r'^2\right)$$

A dedução dessa fórmula se encontra na Assessoria pedagógica.



Sergio L. Filho

H: altura do cone com base de centro O
h: altura do cone com base de centro O'
h_t: altura do tronco

- Sabendo que os comprimentos dos raios das bases do tronco de madeira apresentado são 24 cm e 18 cm, calcule seu volume aproximado usando a fórmula acima. Em seguida, calcule a diferença entre esse resultado e o volume calculado no exemplo, pelo método da cubagem. 278 832 cm^3 ou, aproximadamente, 0,2788 m^3. A diferença entre os dois volumes calculados é 0,061 m^3.
- O que você pode concluir a respeito do método de cubagem, utilizado pelos trabalhadores rurais, e pela fórmula que acabamos de estudar?
Que ambos resultam em volumes aproximados.

Se achar necessário, oriente os alunos a utilizar uma calculadora durante a resolução das tarefas desta seção, a fim de auxiliá-los na execução dos cálculos.

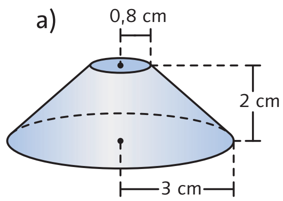
Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

Observação
Na resolução das tarefas desta seção, quando necessário, considere $\pi = 3{,}14$.

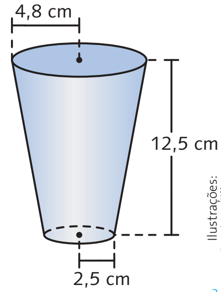
51. Calcule o volume de cada tronco de cone reto.

a)



aproximadamente 25,2 cm³

b)



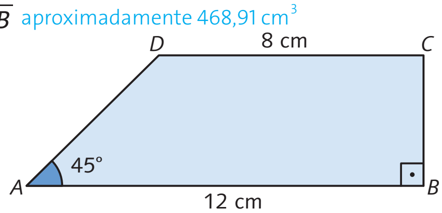
Ilustrações: Sergio L. Filho

aproximadamente 540,21 cm³

52. Sabendo que a área do trapézio é 40 cm², calcule o volume dos sólidos obtidos pela rotação do trapézio em torno do lado:

a) $\overline{BC}$ aproximadamente 1 272,75 cm³

b) $\overline{AB}$ aproximadamente 468,91 cm³



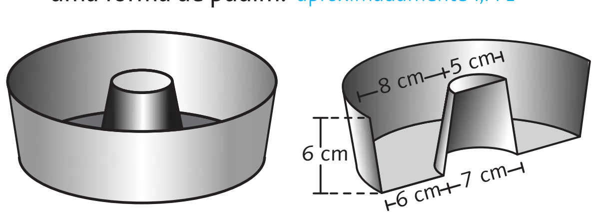
Sergio L. Filho

53. Um equipamento utilizado para lançar fertilizante sobre o solo tem um reservatório em formato de um tronco de cone reto. Sabendo que esse reservatório tem capacidade para 440 L de fertilizante, 1,10 m de diâmetro na base maior e 1,10 m de altura, calcule, em metros, o raio da base menor desse equipamento.
aproximadamente 0,12 m

Você produtor

54. Faça o esboço de um tronco de cone reto. Depois, atribua algumas medidas para esse tronco, como o comprimento do raio da base maior e o da base menor, bem como o comprimento da geratriz do tronco. A partir das medidas que você atribuiu, elabore o enunciado de um problema envolvendo o volume desse tronco e dê para um colega resolver. Por último, verifique se a resposta está correta.

55. Observe na imagem algumas medidas internas de uma forma de pudim. aproximadamente 1,71 L



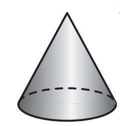
Rafael L. Gaion

Calcule, em litros, a capacidade dessa forma.

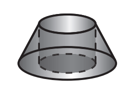
54. Resposta pessoal. Possível resposta: de acordo com as medidas indicadas, determine o volume do tronco de cone reto.

56. Um cone reto é dividido em duas partes de mesma altura por um plano β paralelo à base. Qual é a razão entre os volumes do cone limitado por β e do tronco de cone? $\frac{1}{7}$

57. (Fuvest-SP) Um torneiro mecânico dispõe de uma peça de metal maciça na forma de um cone circular reto de 15 cm de altura e cuja base B tem raio 8 cm (figura 1). Ele deverá furar o cone, a partir de sua base, usando uma broca cujo eixo central coincide com o eixo do cone. A broca perfurará a peça até atravessá-la completamente, abrindo uma cavidade cilíndrica, de modo a obter-se o sólido da figura 2. Se a área da base desse novo sólido é $\frac{2}{3}$ da área de B, determine seu volume.
aproximadamente 386,75 cm³



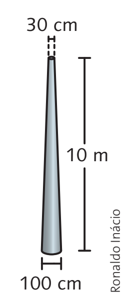
Antes
Figura 1



Depois
Figura 2

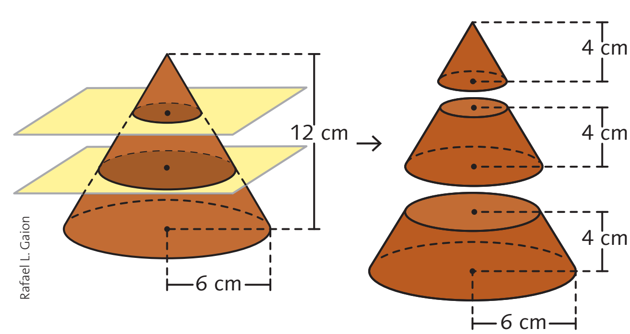
Ilustrações: Sergio L. Filho

58. Uma indústria foi contratada para construir postes de concreto com formato de tronco de cone reto, conforme a imagem. Desconsiderando o volume ocupado pelas ferragens, calcule, em metros cúbicos, o volume aproximado de concreto utilizado para construir cada um desses postes.
aproximadamente 3,64 m³



Ronaldo Inácio

59. Um cone reto de madeira tem 12 cm de altura e base com 6 cm de raio. Nesse cone foram feitos dois cortes paralelos à base dividindo-o em três partes, como representado na figura.



Rafael L. Gaion

Qual é o volume de cada parte?
cone: aproximadamente 16,75 cm³
tronco menor: aproximadamente 117,23 cm³
tronco maior: aproximadamente 318,19 cm³

Desafio

60. Considere um cone circular reto de altura 12 cm e área da base igual a 32π cm². Considere também um plano α paralelo à base determinando um tronco de cone e um cone menor cuja área da base é 18π cm². Calcule o volume do tronco de cone. 74π cm³

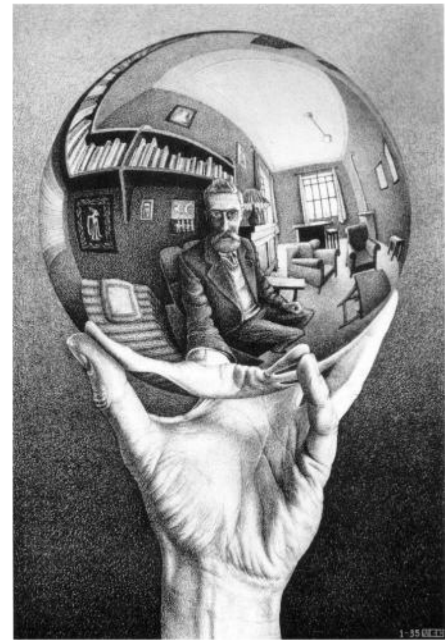
5 Esfera

Ao observar algumas imagens, podemos nos surpreender pela beleza, leveza dos traços, combinações de cores empregadas ou ainda as curiosidades, surpresas e ilusões ali presentes.

Ao observar uma gravura do artista holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972), podemos ter algumas dessas sensações, pois, em muitas de suas obras, nada do que vemos é o que realmente parece ser.

Os desenhos de Escher não nasciam como num toque de mágica. Para executá-los, ele fazia uso de vários conceitos matemáticos, principalmente no campo da geometria, além de apresentar em suas gravuras harmonia nos traços, qualidade técnica e, estética e respeito às regras geométricas do desenho e da perspectiva.

Em algumas de suas obras, Escher utilizava figuras geométricas, entre elas as esferas, como mostra a imagem ao lado.

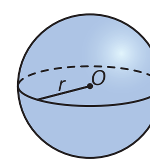


Mão com esfera refletora, de Maurits Cornelis Escher, 1935. Litografia, 32 cm × 21,5 cm.

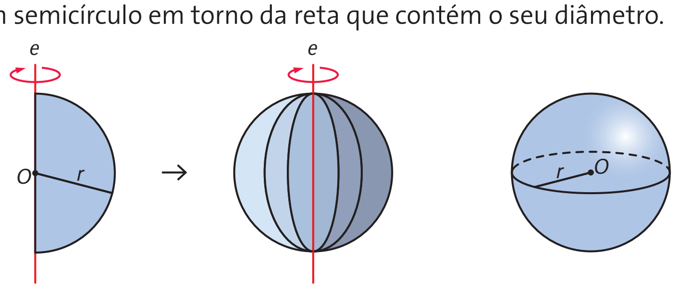
Podemos definir esfera da seguinte maneira:

> Sejam um ponto O e um número real positivo r. O conjunto de todos os pontos do espaço cujas distâncias em relação a O são iguais a r denomina-se **superfície esférica** de centro O e raio r.

O sólido limitado por uma superfície esférica é chamado **esfera**. Uma esfera de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos do espaço cujas distâncias em relação a O são menores ou iguais a r.



A esfera também pode ser definida como um **sólido de revolução**, obtido da rotação completa de um semicírculo em torno da reta que contém o seu diâmetro.

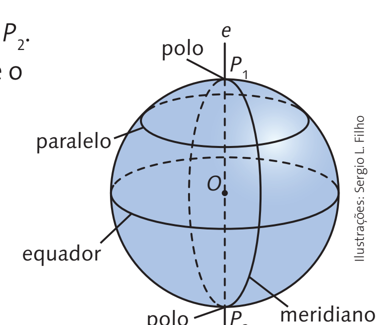


Elementos da esfera

Veja comentários e sugestões na Assessoria pedagógica.

Em uma esfera, podemos destacar alguns elementos. Na esfera ao lado, temos:

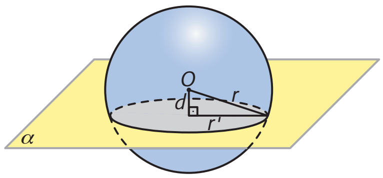
- **eixo**: é uma reta que passa pelo centro O da esfera. No caso da figura, a reta e. Em relação a esse eixo, definimos os polos, o equador, os paralelos e os meridianos.
- **polos**: são as interseções do eixo com a superfície esférica. Na figura, P_1 e P_2.
- **equador**: é a circunferência obtida pela interseção da superfície esférica e o plano perpendicular ao eixo que passa pelo centro O.
- **paralelo**: é qualquer seção (circunferência) perpendicular ao eixo.
- **meridiano**: é qualquer seção (circunferência) cujo plano que a contém passa pelo eixo.
- **seção da esfera**: é o círculo obtido pela interseção da esfera e um plano secante a ela. Se o plano secante contém o centro O da esfera, temos um **círculo máximo**.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Volume de uma esfera

Na figura, temos uma esfera de centro O e raio r e um plano α que a corta a uma distância d do centro, determinando uma região que corresponde a um círculo de raio r'.



De acordo com o teorema de Pitágoras: $r^2 = d^2 + r'^2 \Rightarrow r'^2 = r^2 - d^2$

Dessa maneira, a área do círculo é dada por: $A = \pi r'^2 \Rightarrow A = \pi\left(r^2 - d^2\right)$

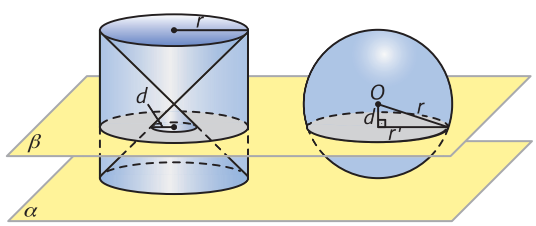
Para obtermos o volume da esfera, será utilizado o princípio de Cavalieri. Nesse caso, vamos considerar um sólido de volume conhecido, tal que as regiões determinadas por planos horizontais na esfera e no sólido tenham áreas iguais.

Esse sólido é obtido de um cilindro equilátero cujo comprimento do raio da base é r e cuja altura é $2r$. Dele, retiramos dois cones de altura r cujo comprimento do raio da base também é r.

Note que o volume desse sólido corresponde ao volume do cilindro menos o volume dos dois cones.

$$V = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{\pi r^2 \cdot r}{3} = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Consideremos agora a esfera e o sólido obtidos anteriormente, apoiados em um plano horizontal α. Consideremos também um plano β qualquer paralelo a α cortando o sólido e a esfera.



Ilustrações: Sergio L. Filho

O plano β determinou uma região no sólido e outra na esfera. A região determinada na esfera corresponde a um círculo de área $\pi\left(r^2 - d^2\right)$, como vimos anteriormente. A região determinada no sólido corresponde a uma coroa de raios r e d, cuja área também é igual a $\pi\left(r^2 - d^2\right)$, pois: $\pi r^2 - \pi d^2 = \pi\left(r^2 - d^2\right)$

Pelo princípio de Cavalieri, como as regiões delimitadas por planos horizontais têm áreas iguais, a esfera e o sólido têm o mesmo volume: $\frac{4\pi r^3}{3}$. Veja comentários e sugestões na Assessoria pedagógica.

Portanto, o volume de uma esfera de raio r pode ser calculado por:

$$\boxed{V = \frac{4\pi r^3}{3}}$$

Exemplo

Vamos calcular o volume de uma esfera de raio 5 cm. Considerando $\pi = 3{,}14$, temos:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 5^3}{3} \simeq 523{,}33 \rightarrow \text{aproximadamente } 523{,}33 \text{ cm}^3$$

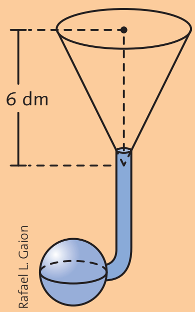
Explorando problemas

Utilize as etapas sugeridas para resolver o problema a seguir.

Neste problema, por se tratar de uma questão de vestibular, embora estejamos usando "comprimento do segmento", por exemplo, aparece a palavra "mede" para se referir ao comprimento do raio interno da esfera.

(Epcar-MG) Um sistema de irrigação para plantas é composto por uma caixa-d'água, em formato de cone circular reto, interligada a 30 esferas, idênticas. O conteúdo da caixa-d'água chega até as esferas por encanamentos cuja capacidade de armazenamento é desprezível.

O desenho a seguir ilustra a ligação entre a caixa-d'água e uma das 30 esferas, cujo raio interno mede $r = \pi^{-\frac{1}{3}}$ dm.



Se a caixa-d'água está cheia e as esferas, bem como os encanamentos, estão vazios, então, no momento em que todas as 30 esferas ficarem cheias, restará, no cone, apenas a metade de sua capacidade total.

Assim, a área lateral de um cone equilátero cujo raio da base é congruente ao da caixa-d'água, em dm^2, é igual a

a) 80 b) 40 c) 20 d) 10

Compreender

1. Há palavras ou notações no enunciado cujos significados você desconhece? Se sim, pesquise-as.
Resposta pessoal.

2. O que se pede no problema? d

a) A área lateral da caixa-d'água.

b) A área da superfície da caixa-d'água menos a área da superfície das 30 esferas.

c) A capacidade da caixa-d'água e das 30 esferas.

d) A área lateral de um cone equilátero cujo raio da base é congruente ao da caixa-d'água.

3. Quais informações são importantes para a compreensão do problema? a e c

a) A capacidade da caixa-d'água.

b) A área da superfície das esferas.

c) A quantidade de esferas no sistema.

d) O tempo necessário para encher as esferas.

Planejar

4. Quais conceitos matemáticos estão envolvidos no problema? b e c

a) Área de polígonos regulares.

b) Volume de esferas.

c) Área de círculos.

d) Volume de troncos de cone.

5. Verifique se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Em seguida, justifique sua resposta.

a) A soma das capacidades das 30 esferas é igual à capacidade da caixa-d'água.
Falsa. A soma das capacidades das 30 esferas é igual à metade da capacidade da caixa-d'água.

b) A caixa-d'água possui o formato de cone equilátero.
Falsa. A caixa-d'água possui o formato de cone circular reto de altura igual a 6 dm.

6. Represente as informações principais do problema por meio de uma figura, um esquema ou um quadro, e utilize uma notação adequada para os dados.
Veja a resposta nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.

7. Antes de efetuar os cálculos por escrito ou na calculadora, estime uma resposta para o problema. Ao final das etapas, você pode comparar o valor estimado com o resultado obtido.
Resposta pessoal. Espera-se que os alunos consigam fazer uma estimativa próxima do resultado obtido.

Executar

8. Podemos resolver o problema por meio dos seguintes passos:

- Calculamos a capacidade V_E de cada esfera.

$$V_E = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4}{3}\pi\left(\pi^{-\frac{1}{3}}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \pi^{-\frac{3}{3}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{\pi} = \frac{4}{3} \to \frac{4}{3}\ \text{dm}^3$$

Assim, a soma da capacidade das 30 esferas é: $30 \cdot \frac{4}{3} = 40 \to 40\ \text{dm}^3$.

- Esse valor corresponde à metade da capacidade da caixa-d'água (V_C), ou seja, a capacidade da caixa-d'água é: $2 \cdot 40 = 80 \to 80\ \text{dm}^3$.
- Como a altura da caixa-d'água é 6 dm, para calcular o comprimento do raio r, fazemos:

$$V_C = \frac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow 80 = \frac{\pi r^2 \cdot 6}{3} \Rightarrow 80 = 2\pi r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{40}{\pi}$$

- Considerando um cone equilátero de raio congruente ao da caixa-d'água e geratriz $g = 2r$, a área lateral A_ℓ é:

$$A_\ell = \pi r g = \pi r(2r) = 2\pi r^2$$

- Como $r^2 = \frac{40}{\pi}$, temos:

$$A_\ell = 2\pi r^2 = 2\pi \cdot \frac{40}{\pi} = 2 \cdot 40 = 80 \to 80\ \text{dm}^2$$

Portanto, a alternativa correta é **a**.

Verificar

9. Podemos calcular o comprimento do raio r da base da caixa-d'água e verificar se as figuras geométricas espaciais possuem as características apresentadas no enunciado.

- Obtemos $r^2 = \frac{40}{\pi}$. Assim:

$$r^2 = \frac{40}{\pi} \Rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{40}{\pi}}$$

Como r é uma medida de comprimento, descartamos o valor negativo.

$$r = \sqrt{\frac{40}{\pi}} \to \sqrt{\frac{40}{\pi}}\ \text{dm}$$

- Calculando o volume V_C da caixa-d'água, que possui altura de 6 dm, temos:

$$V_C = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi\left(\sqrt{\frac{40}{\pi}}\right)^2 \cdot 6}{3} = \pi \cdot \frac{40}{\pi} \cdot 2 = 40 \cdot 2 = 80 \to 80\ \text{dm}^3$$

- Para o cone equilátero, cujo raio r da base e a área lateral A_ℓ foram determinados, podemos verificar se $g = 2r$.

$$A_\ell = \pi r g \Rightarrow 80 = \pi g\sqrt{\frac{40}{\pi}} \Rightarrow 80 = \pi g \cdot \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow g = 80 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\pi\sqrt{40}} \Rightarrow g = 2 \cdot \frac{40\sqrt{\pi}}{\pi\sqrt{40}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = 2 \cdot \frac{\sqrt{1600}\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi^2}\sqrt{40}} \Rightarrow g = 2\sqrt{\frac{1600\pi}{\pi^2 40}} \Rightarrow g = 2\sqrt{\frac{40}{\pi}} \to 2\sqrt{\frac{40}{\pi}}\ \text{dm}$$

Como o comprimento do raio é $\sqrt{\frac{40}{\pi}}$ dm e o da geratriz é $2\sqrt{\frac{40}{\pi}}$ dm, concluímos que o cone é equilátero.

Problemas e exercícios resolvidos

Observação

Na resolução das tarefas desta seção, quando necessário, foi considerado $\pi = 3{,}14$.

R12. Um plano corta uma esfera a 3 cm de distância de seu centro. Sabendo que o comprimento do equador dessa esfera é 18π cm, calcule:

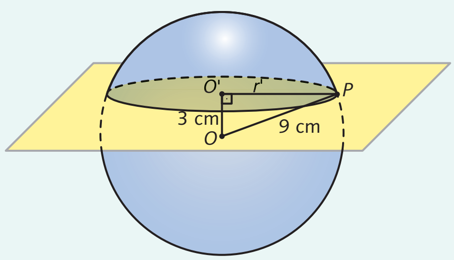
a) o comprimento do raio do círculo determinado pelo plano.

b) o volume dessa esfera.

Resolução

a) Para calcular o raio do círculo determinado pelo plano, precisamos, inicialmente, calcular o comprimento do raio da esfera. Como o raio do equador é igual ao da esfera, temos:

$$C = 2\pi r \Rightarrow 18\pi = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{18\pi}{2\pi} = 9 \to 9 \text{ cm}$$



Sergio L. Filho

Note que o $\triangle OO'P$ é retângulo. Assim, podemos calcular o comprimento do raio do círculo determinado pelo plano usando o teorema de Pitágoras.

$$(OP)^2 = (O'O)^2 + (O'P)^2 \Rightarrow 9^2 = 3^2 + r'^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r'^2 = 72 \begin{cases} r'_1 = 6\sqrt{2} \\ r'_2 = -6\sqrt{2} \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, o raio do círculo determinado pelo plano tem $6\sqrt{2}$ cm de comprimento.

b) Calculando o volume da esfera, temos:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 9^3}{3} = 3\,052{,}08$$

Portanto, o volume da esfera é, aproximadamente, $3\,052{,}08 \text{ cm}^3$.

R13. Determine o volume da esfera inscrita em um cubo com volume de 64 cm^3.

Resolução

Calculando o comprimento da aresta (ℓ) do cubo, temos:

$$\ell^3 = 64 \Rightarrow \ell = \sqrt[3]{64} = 4 \to 4 \text{ cm}$$

Como a esfera está inscrita no cubo, o comprimento de seu raio é metade do comprimento da aresta do cubo, ou seja, $r = \frac{\ell}{2} = 2$ cm.

Calculando o volume da esfera, temos:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 2^3}{3} \simeq 33{,}5$$

Portanto, o volume da esfera é, aproximadamente, $33{,}5 \text{ cm}^3$.

Se achar necessário, oriente os alunos a utilizar uma calculadora durante a resolução das tarefas desta seção, a fim de auxiliá-los na execução dos cálculos.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

Observação

Na resolução das tarefas desta seção, quando necessário, considere $\pi = 3{,}14$.

61. Calcule o volume de uma esfera:

a) de raio 15 mm. aproximadamente $14\,130 \text{ mm}^3$

b) em que o comprimento do meridiano é 14π cm. aproximadamente $1\,436{,}03 \text{ cm}^3$

c) de diâmetro 11 cm. aproximadamente $696{,}56 \text{ cm}^3$

d) inscrita em um cubo com volume igual a 343 cm^3. aproximadamente $179{,}50 \text{ cm}^3$

62. Parte da cobertura de uma construção tem formato de uma semiesfera com 3 m de diâmetro externo e 2,92 m de diâmetro interno. Qual é o volume dessa parte da cobertura? aproximadamente $0{,}55 \text{ m}^3$ Se necessário, diga aos alunos que semiesfera é a metade de uma esfera.

63. O diâmetro externo de uma bola de borracha tem 18 cm de comprimento e o interno, 15 cm. Calcule o volume de borracha utilizado na fabricação dessa bola. aproximadamente $1\,285{,}83 \text{ cm}^3$

64. (UEPB) A área de um círculo máximo de uma esfera vale $81\pi \text{ dm}^2$. O volume dessa esfera é igual a: a

a) $972\pi \text{ dm}^3$

b) $2\,916\pi \text{ dm}^3$

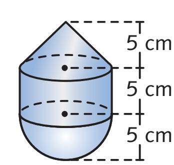
c) $729\pi \text{ dm}^3$

d) $263\pi \text{ dm}^3$

e) $324\pi \text{ dm}^3$

65. O volume da esfera A é $\frac{1}{8}$ do volume da esfera B. Se o raio da esfera A tem 5 cm de comprimento, qual é o comprimento do raio da esfera B? 10 cm

66. A figura ao lado representa um sólido formado por um cone reto, um cilindro reto e uma semiesfera. Determine o volume desse sólido. aproximadamente $654{,}167 \text{ cm}^3$



Sergio L. Filho

67. Em um recipiente com formato de prisma reto de base quadrada contendo 400 mL de água, foram colocadas 8 esferas de vidro cujos raios têm 1,2 cm de comprimento. Sabendo que a largura interna desse recipiente é 5 cm e que todas as esferas ficaram submersas, calcule a altura atingida pelo nível da água em seu interior. aproximadamente 18,32 cm

68. Considere as esferas A e B. Quanto por cento o volume da esfera B será maior do que o da esfera A se o comprimento do raio da esfera B for:

a) 10% maior do que o da esfera A? 33,1%

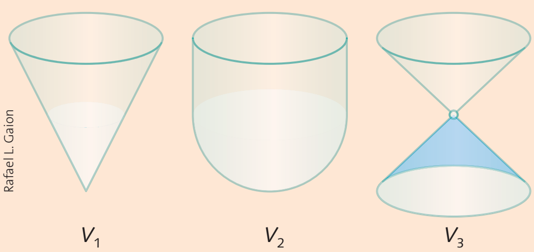
b) o dobro do da esfera A? 800%

69. (UPM-SP) Um frasco de forma esférica, com raio de 4 cm, contém perfume em $\frac{1}{4}$ de seu volume total. Se uma pessoa utilizar, todos os dias, 2 mL, das alternativas abaixo, a que indica o maior período de tempo de duração do perfume é: b

a) 16 dias
b) 31 dias
c) 26 dias
d) 54 dias
e) 43 dias

Em grupo

70. (Enem) Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Neles, são colocados líquidos até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras.

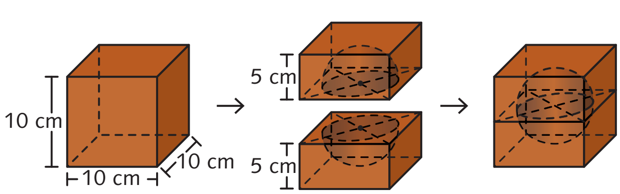


Rafael L. Gaion

Representando por V_1, V_2 e V_3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se: b

a) $V_1 = V_2 = V_3$
b) $V_1 < V_3 < V_2$
c) $V_1 = V_3 < V_2$
d) $V_3 < V_1 < V_2$
e) $V_1 < V_2 = V_3$

71. (Unesp-SP) Para confeccionar um porta-joias a partir de um cubo maciço e homogêneo de madeira com 10 cm de aresta, um marceneiro dividiu o cubo ao meio, paralelamente às duas faces horizontais. De cada paralelepípedo resultante extraiu uma semiesfera de 4 cm de raio, de modo que seus centros ficassem localizados no cruzamento das diagonais da face de corte, conforme mostra a sequência de figuras.

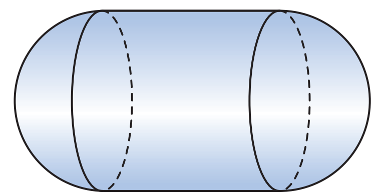


Rafael L. Gaion

Sabendo que a densidade da madeira utilizada na confecção do porta-joias era de 0,85 g/cm^3 e admitindo $\pi = 3$, a massa aproximada do porta-joias, em gramas, é: c

a) 634 b) 638 c) 632 d) 630 e) 636

72. (UPM-SP) Um tanque de gás tem a forma de um cilindro de 4 m de comprimento, acrescido de duas semiesferas de raio 2 m, uma em cada extremidade, como mostra a figura. Adotando $\pi = 3$, a capacidade total do tanque, em metros cúbicos, é: a



Sergio L. Filho

a) 80 b) 70 c) 60 d) 55 e) 50

Em grupo Veja comentários e sugestões na Assessoria pedagógica.

73. Junte-se a um colega e resolvam a tarefa.

Arquimedes foi um dos maiores matemáticos de todos os tempos, deixando contribuições nos campos da Matemática e da Física. Muitos são os relatos de histórias envolvendo Arquimedes. No entanto, não sabemos o quanto de verdade existe em cada uma delas. Entre os seus feitos, podemos citar o parafuso de Arquimedes, as rodas dentadas e as roldanas. Por meio da densidade de um corpo, Arquimedes resolveu o problema da coroa do rei. Sem danificar a coroa, ele descobriu que parte do ouro de que a coroa devia ser feita fora substituída por prata.

A densidade de um corpo é dada pela razão entre sua massa e seu volume. Dizemos que um objeto maciço é mais denso do que outro se, por exemplo, ao colocarmos corpos feitos de materiais diferentes em um recipiente com o mesmo volume de água, notamos que alguns flutuam e outros afundam. Esse resultado demonstra que os objetos possuem densidades diferentes. Podemos afirmar, por exemplo, que uma bolinha de isopor flutua e uma bolinha de chumbo afunda quando colocadas na água.

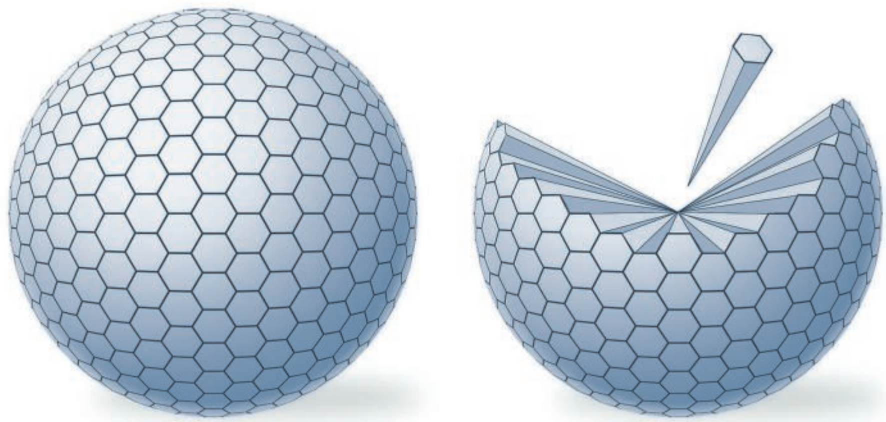
Supondo que uma joia de ouro tem a forma de uma esfera com 3 cm de diâmetro e massa igual a 229 g e sabendo que a densidade do ouro é 19,3 g/cm^3, determine se essa joia é maciça. Não é maciça.

- Sendo a densidade da água igual a 1 g/cm^3, essa joia flutua ou afunda quando colocada em um copo com água? Por quê?

Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Área da superfície de uma esfera

Imagine que uma esfera de centro *O* e raio de medida *r* é, de maneira aproximada, a reunião de *n* (em que *n* é um número muito grande) pirâmides com vértices em *O* e altura igual ao raio *r*. Desse modo, a área da superfície da esfera é aproximadamente igual à soma das áreas das bases de todas as pirâmides. Analogamente, o volume da esfera é aproximadamente igual à soma dos volumes de todas as pirâmides.



Sergio L. Filho

Sendo $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ as áreas das bases das *n* pirâmides, o volume *V* aproximado da esfera é dado por:

$$V \simeq \frac{A_1 \cdot r}{3} + \frac{A_2 \cdot r}{3} + \frac{A_3 \cdot r}{3} + \cdots + \frac{A_n \cdot r}{3}$$

$$V \simeq \frac{1}{3} r \underbrace{(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n)}_{A\text{: área da superfície esférica}}$$

$$V \simeq \frac{A \cdot r}{3}$$

Quanto maior o valor de *n*, ou seja, quanto mais pirâmides forem utilizadas, menor será o erro cometido na aproximação da área da superfície e do volume da esfera. Então, para um valor de *n* suficientemente grande, podemos escrever:

$$V = \frac{A \cdot r}{3}$$

Como o volume de uma esfera de raio *r* é dado por $\frac{4\pi r^3}{3}$, temos:

$$\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{A \cdot r}{3} \Rightarrow A = 4\pi r^2$$

Portanto, a área da superfície de uma esfera de raio *r* pode ser calculada por:

$$\boxed{A = 4\pi r^2}$$

pimeenta/Shutterstock.com

Caneta esferográfica com destaque para a ponta.

Existem vários tipos de caneta, entre as quais, as chamadas canetas esferográficas. O sistema de funcionamento desse tipo de caneta consiste em uma esfera rolante em sua ponta, que é umedecida em tinta e desliza sobre as superfícies, possibilitando um fluxo contínuo e controlado da tinta. Ao girar livremente, a esfera permite a passagem por igual da tinta, e seu tamanho determina a espessura da linha traçada. Ela também impede que a tinta seque no interior do tubo e age como um amortecedor entre o papel e a tinta.

Problemas e exercícios resolvidos

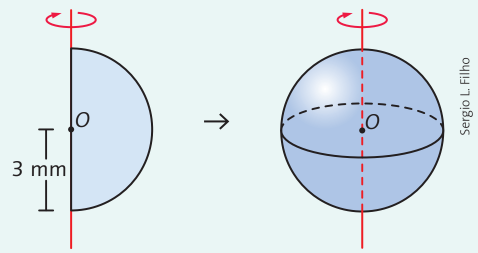
R14. Qual é a área da superfície e o volume obtidos pela rotação completa em relação ao diâmetro de um semicírculo com raio 3 mm?

Observação
Na resolução das tarefas desta seção, quando necessário, foi considerado $\pi = 3{,}14$.

Resolução

Com a rotação do semicírculo, obtemos uma superfície esférica.

- Calculando a área da superfície da esfera, temos: $A = 4\pi r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 3^2 = 113{,}04$
  Portanto, a área da superfície da esfera é, aproximadamente, 113,04 mm^2.
- Calculamos o volume da esfera: $V = \dfrac{4\pi r^3}{3} = \dfrac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 3^3}{3} = 113{,}04$
  Portanto, o volume da esfera é, aproximadamente, 113,04 mm^3.



R15. Para pintar algumas bolas esféricas de isopor, será utilizada uma tinta que rende 2 cm^2/mL.

a) Quantos mililitros dessa tinta serão necessários para pintar 7 bolas de isopor com 10 cm de diâmetro?

b) Se fossem gastos 1 750 mL de tinta para pintar 7 bolas de isopor, qual seria, aproximadamente, o diâmetro de cada bola?

Resolução

a) Como as bolas de isopor têm formato de uma esfera, calculamos, inicialmente, a área da superfície de cada uma delas.

$$A = 4\pi r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 = 314$$

Portanto, a área da superfície de cada uma das esferas é, aproximadamente, 314 cm^2.

Agora, calculamos a área total a ser pintada (7 bolas) e, em seguida, a quantidade de tinta necessária.

- $A_t = 7 \cdot A \simeq 7 \cdot 314 = 2\,198 \longrightarrow$ aproximadamente 2 198 cm^2
- Quantidade de tinta (Q)

$$Q \simeq \frac{\overbrace{2\,198}^{A_t}}{\underbrace{2}_{\substack{\text{rendimento:}\\ 2\text{ cm}^2/\text{mL}}}} = 1\,099 \longrightarrow \text{aproximadamente } 1\,099 \text{ mL}$$

b) Como o rendimento da tinta é 2 cm^2/mL, calculamos a área total (A_t) das 7 bolas.

$$Q = \frac{A_t}{2} \Rightarrow 1\,750 = \frac{A_t}{2} \Rightarrow A_t = 3\,500 \longrightarrow 3\,500 \text{ cm}^2$$

Agora, calculamos a área (A) de cada bola de isopor.

$$A_t = 7 \cdot A \Rightarrow 3\,500 = 7 \cdot A \Rightarrow A = 500 \longrightarrow 500 \text{ cm}^2$$

Por último, calculamos o diâmetro d de cada bola de isopor.

$$A = 4\pi r^2 \Rightarrow 500 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot r^2 \Rightarrow r^2 \simeq 39{,}809 \Rightarrow r \simeq 6{,}31 \longrightarrow \text{aproximadamente } 6{,}31 \text{ cm}$$

$$d = 2r \simeq 2 \cdot 6{,}31 = 12{,}62 \longrightarrow \text{aproximadamente } 12{,}62 \text{ cm}$$

Se achar necessário, oriente os alunos a utilizar uma calculadora durante a resolução das tarefas desta seção, a fim de auxiliá-los na execução dos cálculos.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

Observação
Na resolução das tarefas desta seção, quando necessário, considere $\pi = 3{,}14$.

74. Uma esfera é cortada por um plano α que determina uma circunferência com 17π cm de comprimento. Sabendo que a distância de α até o centro da esfera é 5 cm, calcule a área:

a) da superfície dessa esfera. aproximadamente 1 221,08 cm^2

b) do círculo máximo dessa esfera. aproximadamente 305,27 cm^2

75. Sabendo que o volume de uma semiesfera é 18π cm^3, calcule a área de sua superfície. aproximadamente 84,78 cm^2

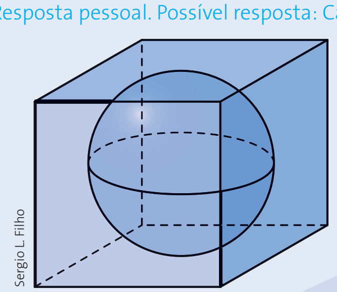
76. Considere as esferas *A* e *B*. Quantos por cento a área da superfície da esfera *B* será maior do que a da esfera *A* se o comprimento do raio da:

a) esfera *B* for 30% maior do que o da esfera *A*? 69%

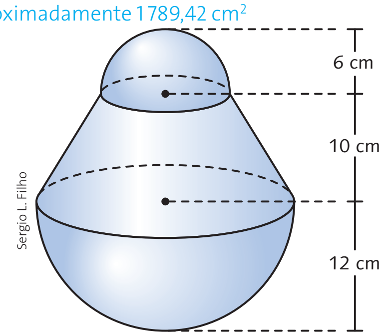
b) esfera *A* for metade do da esfera *B*? 400%

Você produtor

77. Elabore um problema envolvendo área da superfície de uma esfera a partir da ilustração abaixo, sabendo que a esfera está inscrita no cubo. Para isso, atribua medidas para o que achar necessário. Depois, peça para um colega resolver o problema que você escreveu e, por último, verifique se a resolução está correta.
Resposta pessoal. Possível resposta: Calcule a área da superfície da esfera inscrita no cubo cujo comprimento da aresta é 5 cm.



78. Calcule a área total do sólido representado, sabendo que ele é formado por duas semiesferas e um tronco de cone.
aproximadamente 1 789,42 cm^2



79. Determine a área da superfície de uma esfera:

a) com 4,7 cm de raio. aproximadamente 277,45 cm^2

b) com círculo máximo de 80π mm de comprimento. aproximadamente 20 096 mm^2

80. Qual é o comprimento do raio de uma esfera cuja área da superfície é 2 034 cm^2?
aproximadamente 12,72 cm

81. Uma indústria calcula o custo do material utilizado na confecção de bolas plásticas esféricas de acordo com a área da superfície externa de cada bola.

Veja no quadro a seguir o comprimento do diâmetro e o custo por metro quadrado do material utilizado na fabricação de bolas plásticas de quatro tamanhos diferentes.

Custo do material utilizado	
Comprimento do diâmetro da bola (cm)	Custo por metro quadrado (R$)
9	7,35
12	7,30
15	6,84
18	6,50

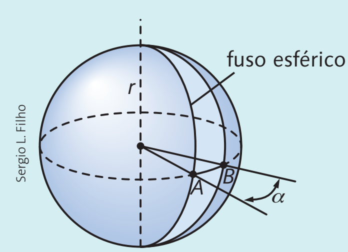
Com base nessas informações, determine o comprimento do diâmetro da bola cuja produção tem:

a) o menor custo com material.
9 cm

b) o maior custo com material.
18 cm

Desafio

82. (FGV-SP) Um observador colocado no centro de uma esfera de raio 5 m vê um arco *AB* sob um ângulo α de 72°, como mostra a figura.



Isso significa que a área do fuso esférico determinado por α é: a

a) 20π m^2

b) 15π m^2

c) 10π m^2

d) 5π m^2

e) π m^2

6 Projeções cartográficas

Uma das maneiras de representar a superfície da Terra é por meio de um globo. Porém, essa representação possui várias limitações, como a dificuldade em tirar cópias e realizar medições. Em diversas situações é conveniente fazer essa representação em um plano, no qual cada ponto da superfície terrestre corresponde a um ponto no plano. Para se obter essa correspondência, vamos utilizar o processo chamado **sistema de projeção cartográfica**.

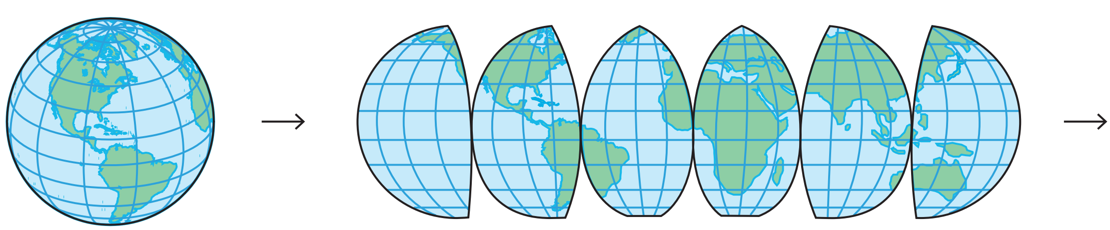
Para facilitar a localização de um ponto no globo terrestre, utilizam-se as coordenadas geográficas.

As projeções cartográficas são ferramentas utilizadas na Cartografia para representar uma superfície curva sobre um plano com o mínimo de distorções. O matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) provou não ser possível transformar uma superfície curva em uma superfície plana sem que haja deformações nas áreas, nos ângulos ou nas distâncias.

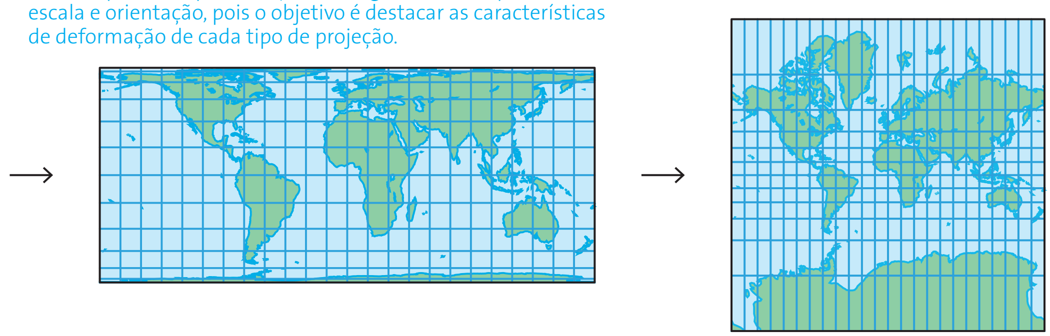
Abaixo é apresentado um esquema que ilustra uma tentativa de representar a superfície da Terra em um plano.

Observação

Para determinar a posição de uma localidade na Terra, foram definidas linhas imaginárias chamadas **paralelos** e **meridianos**. Os paralelos dividem a Terra horizontalmente. O principal deles é o Equador, que divide a Terra em Norte e Sul. Já os meridianos são linhas verticais, das quais o de Greenwich o principal, que divide a Terra em Leste e Oeste. Cada meridiano corresponde a uma **longitude** e cada paralelo, a uma **latitude**. A longitude é a distância em graus de qualquer ponto da superfície terrestre em relação ao Meridiano de Greenwich, considerado longitude 0°. Já a latitude é a distância em graus de qualquer ponto da superfície terrestre em relação à linha do Equador, considerado latitude 0°. Para indicar a posição de um ponto na superfície terrestre, basta informar sua longitude e sua latitude.



Neste tópico, as representações cartográficas não apresentam escala e orientação, pois o objetivo é destacar as características de deformação de cada tipo de projeção.



As cores utilizadas não correspondem às reais.

Keithy Mostachi

Observe que, no final, temos um mapa em que os formatos dos países não são distorcidos. Para conseguir esse resultado, foi preciso “esticar” as regiões de alta latitude, ou seja, regiões próximas aos polos. É possível notar que a distância entre os paralelos aumenta à medida que se afasta da linha do Equador e as áreas dessas regiões sofrem alterações. Essa planificação do globo terrestre é conhecida como projeção de Mercator, elaborada em 1569 por Gerardus Mercator. É importante destacar que, ao se preservar uma das propriedades (área, ângulo ou distância), as demais normalmente sofrem distorções. Além disso, os mapas são representações aproximadas da superfície terrestre, e a utilidade de cada um deles é adequada para certa aplicação e em determinado momento. A projeção cartográfica é escolhida de maneira que satisfaça a finalidade desejada.

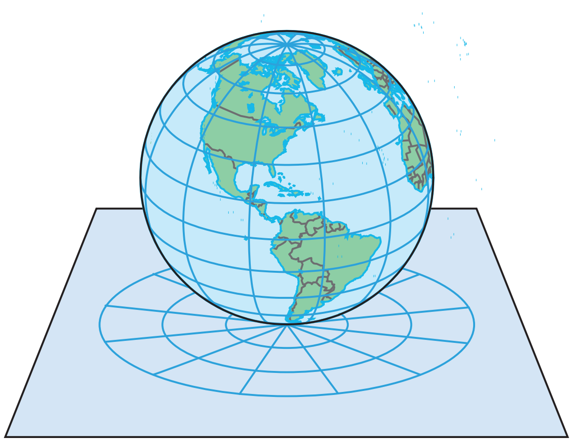
Classificação das projeções

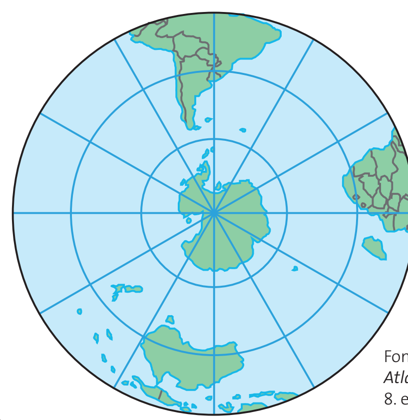
Para representar a superfície terrestre em um mapa, primeiramente deve-se estabelecer um método em que todo ponto da superfície da Terra corresponda a um ponto do mapa, e vice-versa. Os sistemas de projeções cartográficas são classificados de acordo com o tipo de superfície escolhida e por seu grau de deformação.

Classificação quanto ao tipo de superfície

Projeções planas ou azimutais

Esse tipo de projeção utiliza um plano diretamente como superfície. É o tipo mais antigo de projeção, e é utilizado para confeccionar mapas náuticos e aeronáuticos.





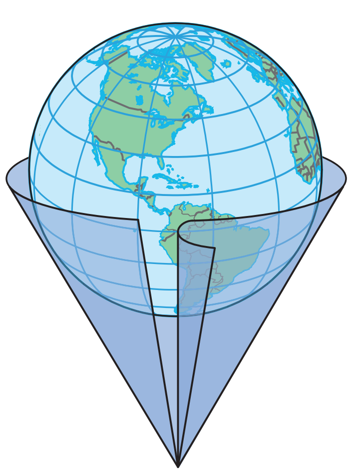
Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar.* 8. ed. Rio de Janeiro, 2018.

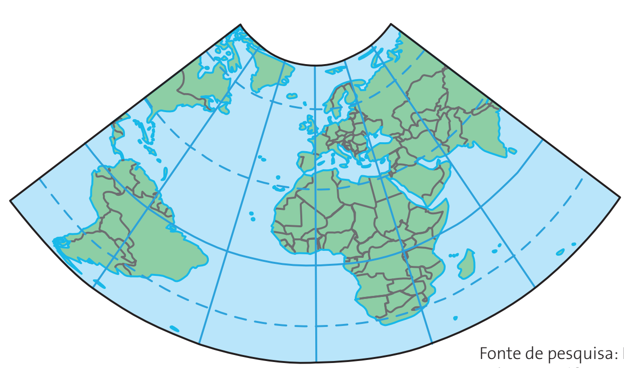
Os paralelos são círculos concêntricos. O espaçamento dos paralelos diminui conforme aumenta a distância ao polo. Projeções planas ou azimutais possuem a propriedade de não deformarem os ângulos no ponto central. No entanto, os elementos são deformados.

Projeções cônicas

Nesta projeção, a superfície do globo terrestre é projetada sobre a superfície lateral de um cone reto “desenrolado” sobre o plano. Na superfície de projeção, os paralelos são arcos concêntricos e os meridianos convergem para os polos.

Ilustrações: Keithy Mostachi



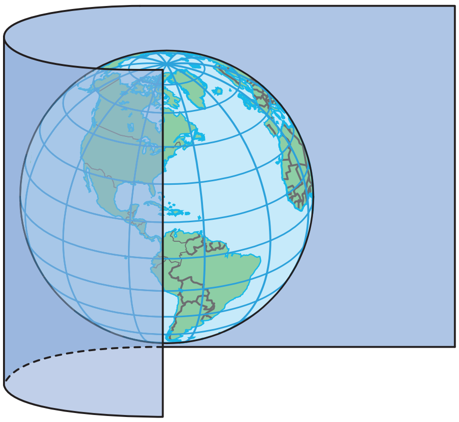


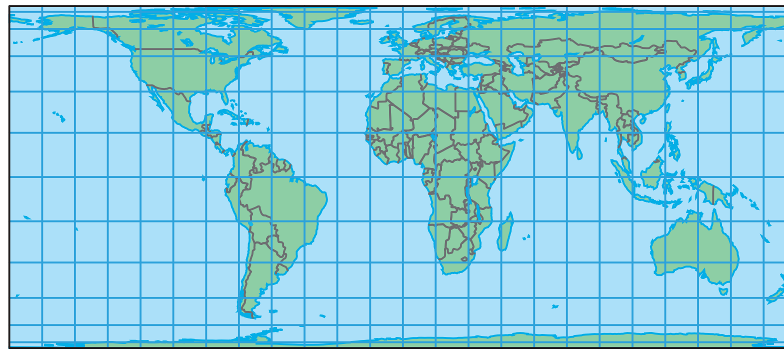
Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar.* 8. ed. Rio de Janeiro, 2018.

Os pontos que tocam o globo são os únicos que não apresentam deformações. Conforme se distanciam desses pontos, as distorções dos elementos aumentam.

Projeções cilíndricas

Nesta projeção, a superfície do globo terrestre é projetada sobre a superfície lateral de um cilindro reto “desenrolado” sobre o plano. Na superfície de projeção, os paralelos e os meridianos são perpendiculares. É a projeção mais utilizada para representar mapas-múndi.





Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar.* 8. ed. Rio de Janeiro, 2018.

As áreas do mapa em regiões de baixa latitude (regiões próximas à linha do Equador) sofrem pequenas alterações, e as distorções aumentam em regiões de alta latitude (regiões próximas aos polos).

Classificação quanto à deformação

Como vimos anteriormente, ao se preservar uma das propriedades em um mapa – área, ângulo ou distância –, as demais normalmente sofrem distorções. De acordo com o grau de deformação, as projeções cartográficas podem ser classificadas em **equidistantes**, **conformes**, **equivalentes** e **afiláticas**. Veja a seguir as características de cada uma delas.

- **Equidistantes**: as distâncias são preservadas, mas as áreas e os ângulos são deformados. São utilizadas para representar distâncias de rotas de aviação.

- **Conformes**: os ângulos são mantidos idênticos (na esfera e no plano) e, como consequência, os formatos também são mantidos sem alterações, mas as áreas são alteradas.

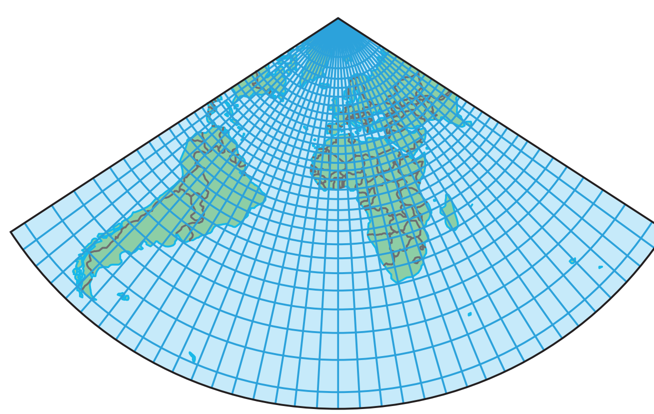
Projeção azimutal equidistante

Ilustrações: Keithy Mostachi

Fonte de pesquisa: MCNALLY, Randy. *Goode’s World Atlas*. 23. ed. Chicago, 2017.

As distâncias medidas a partir do centro de projeção são verdadeiras. As distorções das outras propriedades aumentam à medida que se afasta do ponto central.

Projeção cônica conforme de Lambert



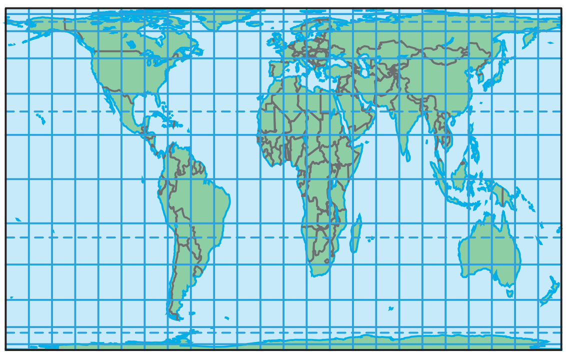
Fonte de pesquisa: MCNALLY, Randy. *Goode’s World Atlas*. 23. ed. Chicago, 2017.

Para o objetivo específico de reduzir as deformações de área, essa projeção é a mais adequada. Além disso, se traçarmos um pequeno círculo no globo terrestre, também teremos um círculo na projeção, caracterizando uma deformação angular nula.

- **Equivalentes**: não deformam as áreas, mas os formatos e os ângulos sofrem alterações. Um exemplo é a projeção de Gall-Peters, cujos paralelos são distribuídos em intervalos decrescentes desde o Equador até os polos.

- **Afiláticas**: não é conforme nem equivalente nem equidistante, porém tentam minimizar todas as deformações. Não possuem superfície de projeção. Uma das projeções afiláticas mais utilizadas para representar mapas-múndi é a projeção de Robinson.

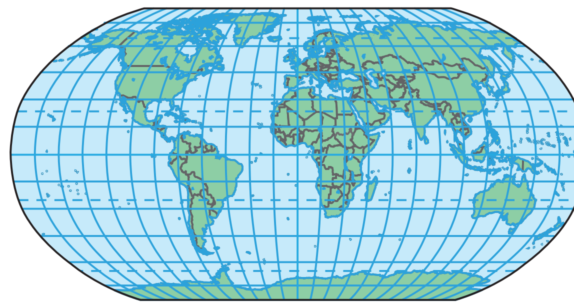
Projeção cilíndrica equivalente de Gall-Peters



Fonte de pesquisa: MCNALLY, Randy. *Goode's World Atlas*. 23. ed. Chicago, 2017.

Os países preservam as suas verdadeiras áreas, mas seus formatos ficam distorcidos.

Projeção afilática de Robinson



Ilustrações: Keithy Mostachi

Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro, 2018.

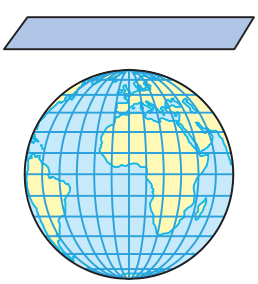
Apresenta características semelhantes às da projeção cilíndrica, mas mantém uma relação entre formatos e áreas sem distorção extrema.

Problemas e exercícios propostos

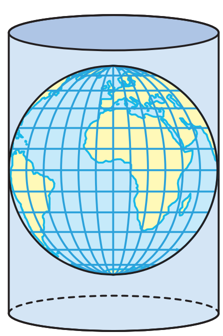
Não escreva no livro.

83. Entre as imagens abaixo, qual apresenta o modelo que as projeções de Mercator e de Galls-Peters utilizam? b

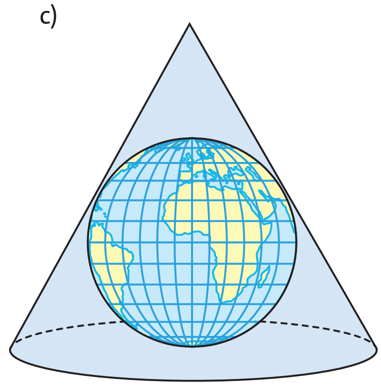
a)



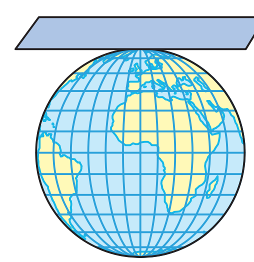
b)



c)



d)



Ilustrações: Keithy Mostachi

84. Considerando as projeções classificadas quanto à deformação, determine se a informação de cada item é verdadeira ou falsa. Em seguida, justifique sua resposta. verdadeiras: a, c, e; falsas: b, d, f

a) Na projeção azimutal equidistante, as distâncias medidas a partir dos centros de projeção são verdadeiras, mas as áreas e os ângulos são deformados.

b) Na projeção cilíndrica equivalente de Gall-Peters, os formatos da superfície são visivelmente distorcidos, como se os continentes tivessem sido mais alongados no sentido leste-oeste e mais achatados no sentido norte-sul.

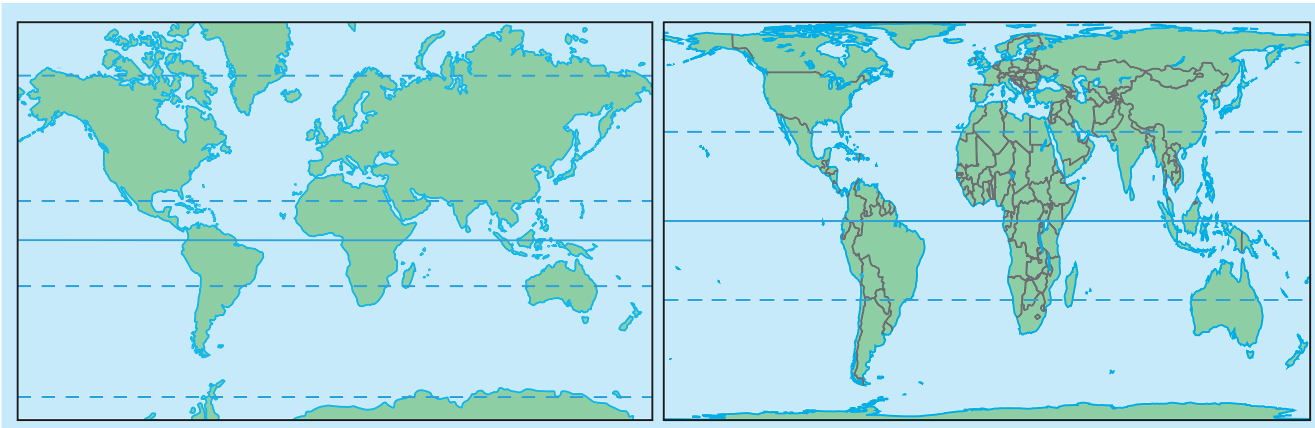
c) A superfície adotada na projeção cilíndrica equivalente de Gall-Peters é um cilindro, enquanto a adotada na projeção cônica conforme de Lambert é um cone.

d) Os ângulos e as áreas são mantidos na projeção cônica conforme de Lambert, mas a forma das superfícies é alterada.

e) A projeção afilática de Robinson tem como objetivo minimizar todas as deformações, porém ela não é equivalente nem conforme nem equidistante.

f) Na projeção afilática de Robinson, as deformações que ocorrem nas áreas representadas são máximas nas regiões perto dos polos, mas diminuem em direção ao Equador.

85. (Enem) Existem diferentes formas de representação plana da superfície da Terra (planisfério). Os planisférios de Mercator e de Peters são atualmente os mais utilizados.

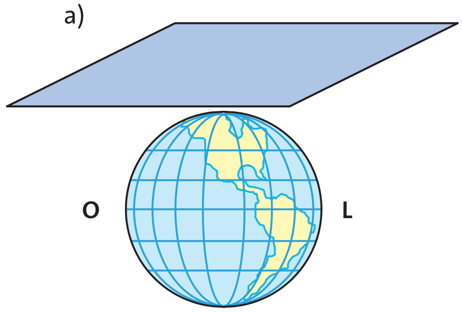


Mercator

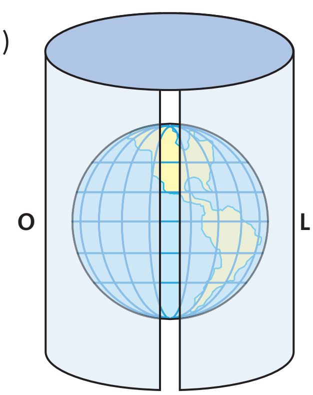
Peters

Apesar de usarem projeções, respectivamente, conforme e equivalente, ambas utilizam como base da projeção o modelo: c

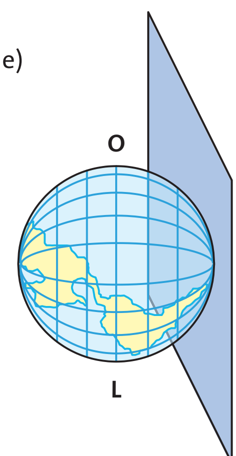
a)



c)

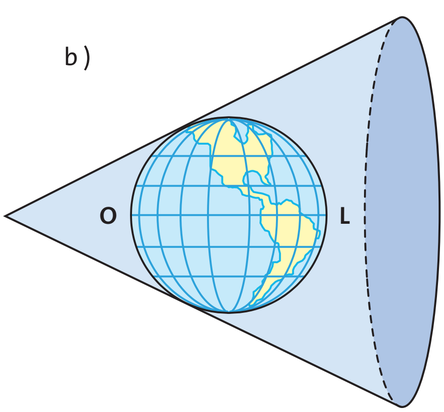


e)

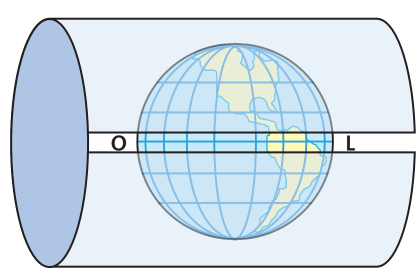


Ilustrações: Keithy Mostachi

b)



d)



b) Semelhanças: essas figuras têm uma superfície não plana e suas bases são círculos; diferenças: o cilindro possui duas bases congruentes e o cone possui uma única base e um vértice.

Finalizando a conversa

a Quais foram os conteúdos estudados neste capítulo? Os elementos do cilindro, do cone e da esfera, bem como o cálculo da área da superfície e do volume de cada uma dessas figuras. Além disso, estudamos aspectos relacionados às deformações ocorridas em projeções cartográficas.

b Quais são as semelhanças e diferenças entre o cilindro e o cone?

c Entre o cone, o cilindro e a esfera, de qual dessas figuras geométricas espaciais não é possível obter a planificação da superfície? Justifique sua resposta. A esfera, pois não é possível "abri-la" sobre uma superfície plana sem sobreposições e sem distorções. O que pode ser feito são apenas aproximações.

d Entre as projeções cartográficas apresentadas, qual é mais utilizada para representar mapas-múndi? Justifique sua resposta. A projeção afilática de Robinson, pois ela não é conforme nem equivalente nem equidistante, mas seu objetivo é minimizar deformações.

e Você considerou importante o estudo deste capítulo? Por quê?

Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que sim, pois os assuntos abordados têm relevância em vários aspectos e situações vividas por eles no dia a dia.

Acesso digital

O verdadeiro tamanho

Neste tópico vamos explorar as diferentes deformações geradas pelas projeções cartográficas com o auxílio de plataformas interativas. Para isso, siga as orientações do professor e o passo a passo para realizar as tarefas propostas.

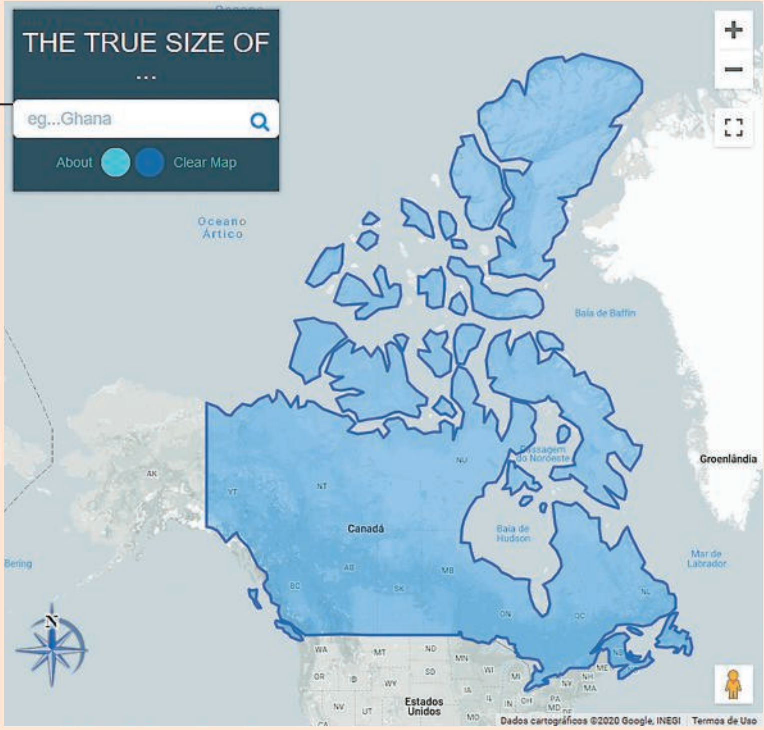
A primeira plataforma é um mapa interativo em que é possível “deslizar um país” pelo mapa-múndi, observar as distorções geradas pela projeção de Mercator e verificar o seu verdadeiro tamanho quando comparado a outros países.

1º Acesse o aplicativo disponível no *site* The true size.

2º No campo de pesquisa, digite **CANADÁ** e pressione **ENTER**.

3º Clique sobre a região destacada e deslize-a por todo o mapa.

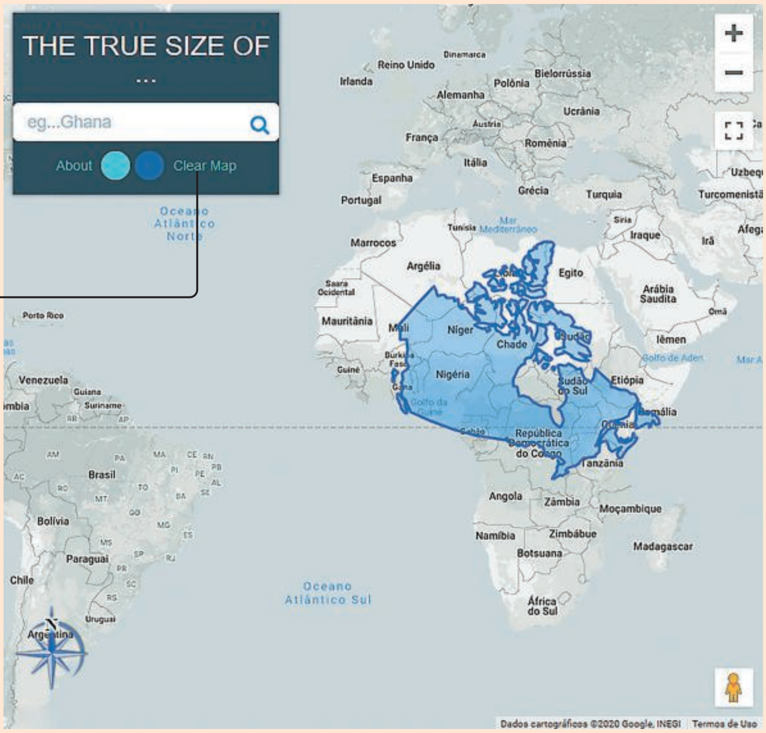
Observação
Ao deslizar as regiões destacadas pelo mapa, é possível explorar as distorções geradas pela projeção de Mercator e ao mesmo tempo comparar o tamanho real dessas regiões com outras regiões do mapa.



A área do Canadá será destacada no mapa. É possível escolher vários países ao mesmo tempo.

4º Deslize a região do Canadá sobre o continente africano.

5º Para limpar o mapa, clique em Clear Map ou clique com o botão direito do *mouse* sobre cada região destacada.



Ao colocar as duas regiões próximas, é possível comparar seus verdadeiros tamanhos.

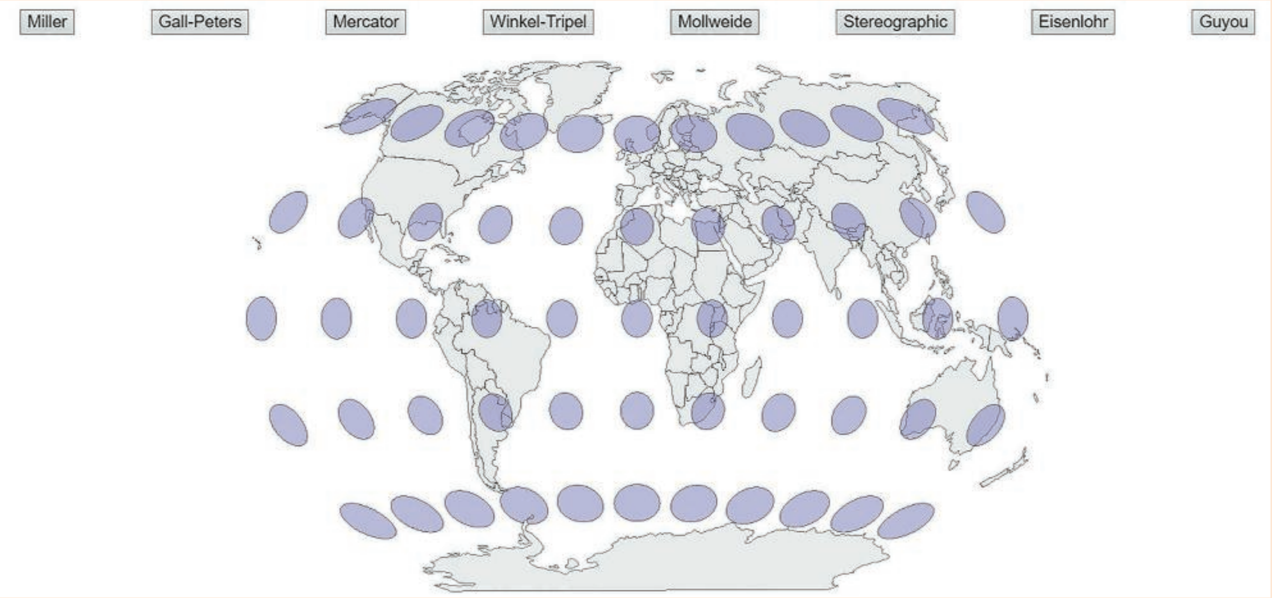
Fotos: Reprodução/http://thetruesize.com

As próximas plataformas interativas distorcem o mapa simulando as diferentes projeções cartográficas.

Neste *site*, as imagens em destaque são originalmente círculos congruentes desenhados no globo terrestre. Esses círculos ajudam a ilustrar como e onde cada projeção distorce o mapa.

1º Acesse o *site* Metrocosm, disponível em: <http://metrocosm.com/compare-map-projections.html>. Acesso em: 3 ago. 2020.

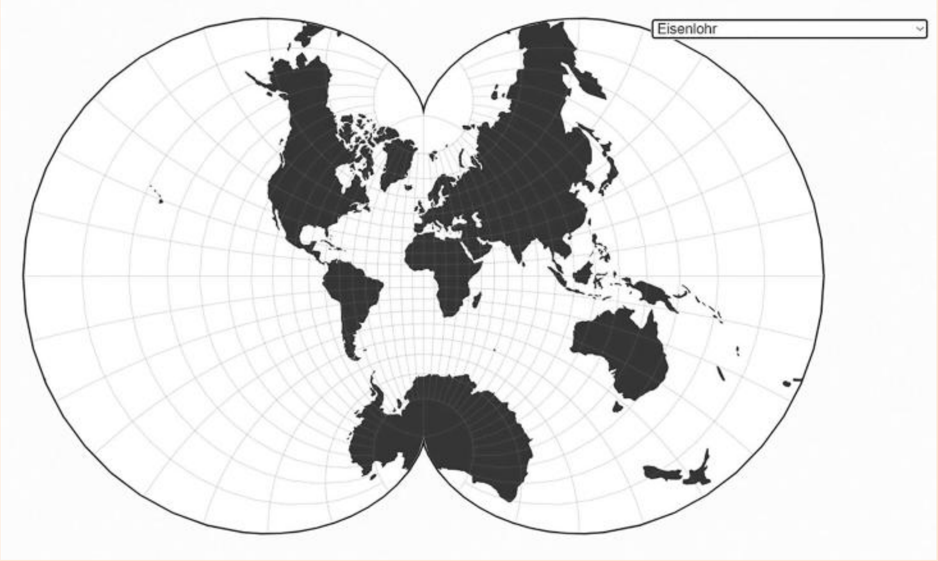
2º Clique sobre os botões com o nome de cada projeção e observe o movimento das distorções.



Neste outro *site*, encontramos mais opções de projeções cartográficas.

3º Acesse o *site* Observable, disponível em: <https://bl.ocks.org/mbostock/raw/3711652>. Acesso em: 3 ago. 2020.

4º Clique sobre o botão de opções, escolha uma projeção e observe os mapas.



As imagens não estão representadas em proporção.

a) Investigando a projeção de Mercator com o apoio das plataformas digitais, o que se pode dizer sobre a deformação dos ângulos e das áreas? A projeção de Mercator possui a propriedade de não deformar os ângulos, ou seja, é possível traçar uma direção em linha reta sobre o mapa, mas, ao manter a precisão dos ângulos, distorcem-se as áreas. As deformações aumentam em regiões de altas latitudes.

b) Em sua opinião, entre as projeções exploradas neste tópico, você considera que exista uma que melhor representa o globo terrestre? Justifique sua resposta. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos tenham entendido que não existe uma melhor ou pior projeção cartográfica, todas possuem suas vantagens e desvantagens, de acordo com a finalidade a que se destinam.

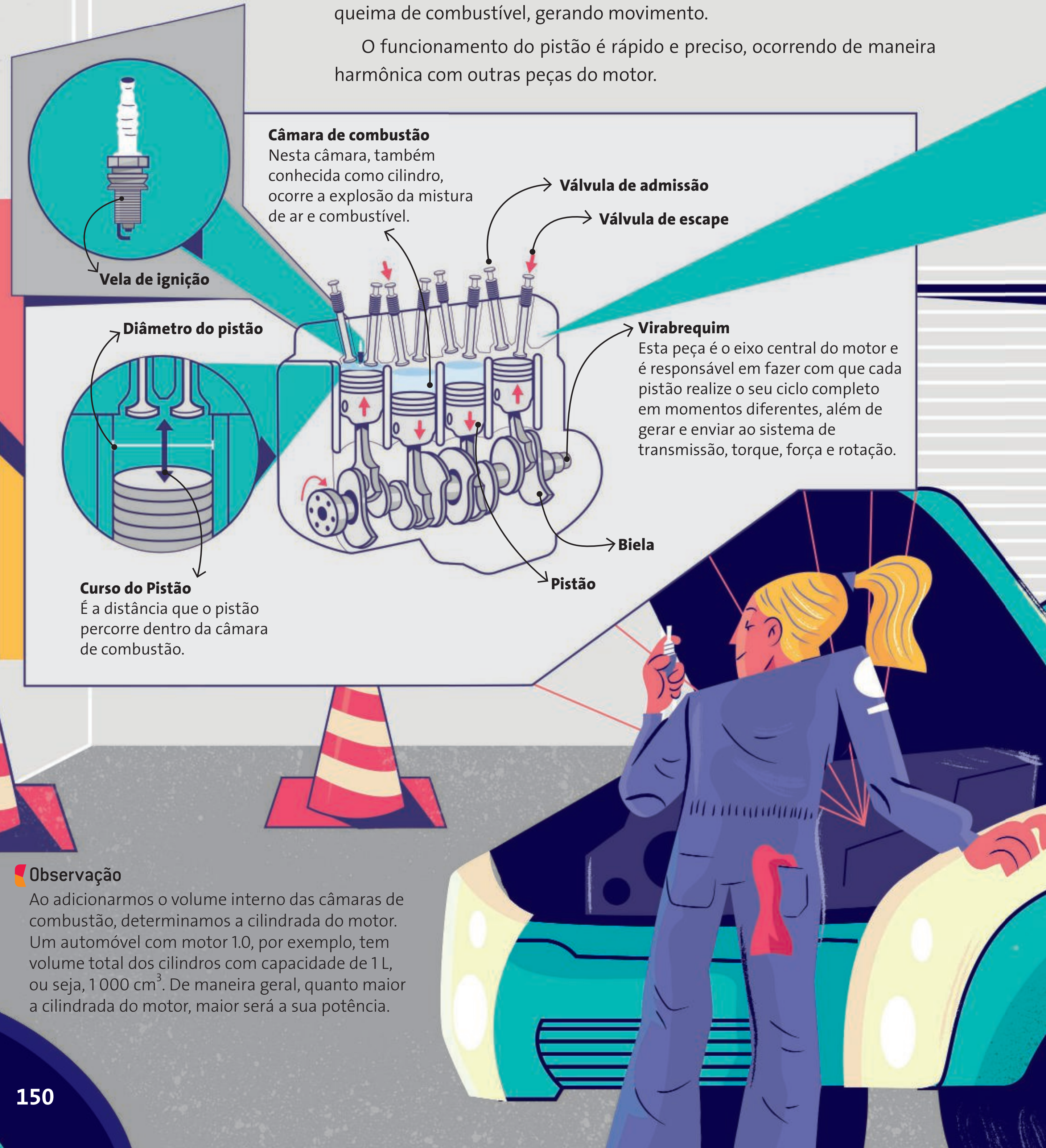
Conectando ideias

Ciclo explosivo

Veja na Assessoria pedagógica comentários e sugestões de trabalho com esta seção.

Atualmente, grande parte dos automóveis produzidos são movidos por motores de combustão interna de quatro tempos, como no ciclo Otto. O processo de funcionamento desse tipo de motor acontece por meio da queima de combustível, gerando movimento.

O funcionamento do pistão é rápido e preciso, ocorrendo de maneira harmônica com outras peças do motor.

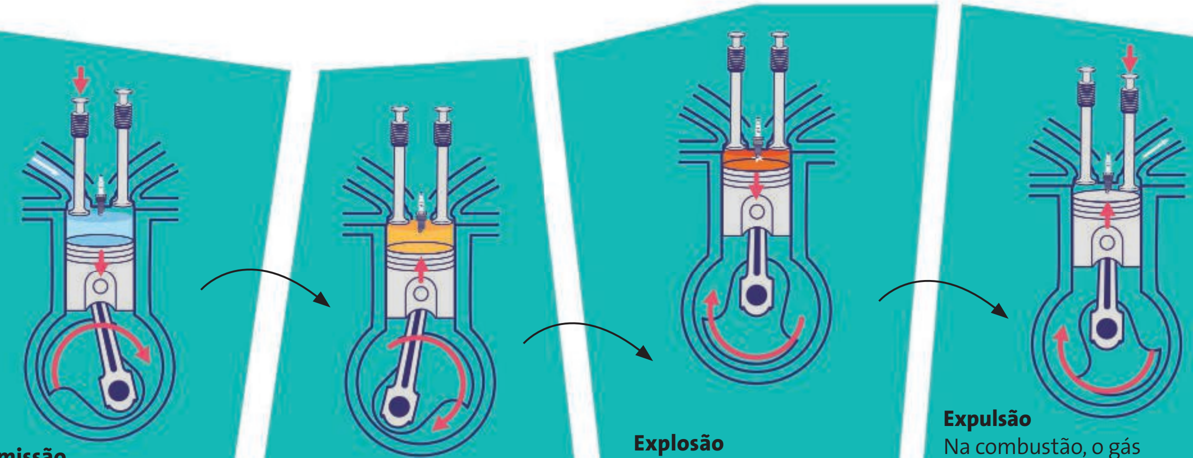


Observação

Ao adicionarmos o volume interno das câmaras de combustão, determinamos a cilindrada do motor. Um automóvel com motor 1.0, por exemplo, tem volume total dos cilindros com capacidade de 1 L, ou seja, 1 000 cm^3. De maneira geral, quanto maior a cilindrada do motor, maior será a sua potência.

Funcionamento de um pistão

Observe com detalhes o funcionamento de um pistão, ilustrando os quatro tempos no ciclo Otto.



Admissão
Com o motor em funcionamento, a válvula de admissão é aberta e a câmara de combustão recebe a mistura de ar e combustível.

Compressão
A válvula de admissão é fechada, e o pistão comprime a mistura na câmara de combustão.

Explosão
A vela de ignição produz uma faísca, provocando a combustão da mistura, e dessa maneira, empurrando o pistão fazendo o motor girar.

Expulsão
Na combustão, o gás produzido é expulso da câmara com a abertura da válvula de escape, que novamente recebe a mistura de ar e combustível completando o ciclo. Esse ciclo ocorre sucessivas vezes até que o funcionamento do motor seja interrompido.

Fontes de pesquisa: ESTADÃO. *Como funciona o motor do carro?* Disponível em: <https://jornaldocarro.estadao.com.br/carros/como-funciona-o-motor-do-carro>. Acesso em: 29 abr. 2020.
QUATRO RODAS. *Por que a cilindrada de um motor quase nunca é um número exato?* Disponível em: <https://quatrorodas.abril.com.br/auto-servico/por-que-a-cilindrada-de-um-motor-quase-nunca-e-um-numero-exato>. Acesso em: 29 abr. 2020.

Diga aos alunos que o valor encontrado no cálculo da cilindrada de um motor quase sempre é um valor aproximado ao anunciado pelo fabricante.

Leandro Lassmar

a De que maneira os conceitos abordados neste capítulo estão relacionados aos motores de combustão interna? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que o cálculo das cilindradas de um automóvel se resume no cálculo do volume de um cilindro.

b Sabendo que um automóvel possui 4 cilindros, cada um com 82,5 mm de diâmetro e 92,8 mm de curso, qual é a cilindrada desse automóvel, em cm^3? $1\,984{,}3\ cm^3$

c Os conhecimentos que você possui sobre geometria o ajudaram a compreender as informações apresentadas? Justifique sua resposta. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos identifiquem e relacionem os termos utilizados nesta seção com os conteúdos apresentados ao longo do capítulo.

Respostas

Capítulo 1 Geometria de posição

1. **a)** sim **b)** sim **c)** infinitos

2. **a)** falsa **b)** verdadeira **c)** verdadeira **d)** verdadeira **e)** falsa

3. **a)** 15 retas; As retas são *l*, *m*, *n*, *o*, *p*, *q*, *r*, *s*, *t*, *u*, *v*, *w*, *x*, *y* e *z*, que contêm respectivamente os pontos *A* e *B*; *A* e *C*; *A* e *D*; *A* e *E*; *A* e *F*; *B* e *C*; *B* e *D*; *B* e *E*; *B* e *F*; *C* e *D*; *C* e *E*; *C* e *F*; *D* e *E*; *D* e *F*; *E* e *F*.

b) reta *l*

c) 20 planos

4. alternativa **d**

5. **a)** falsa **b)** verdadeira **c)** falsa **d)** verdadeira **e)** falsa

6. **a)** $\overleftrightarrow{AG}$ e $\overleftrightarrow{BH}$

b) $\overleftrightarrow{HI}$, $\overleftrightarrow{IJ}$, $\overleftrightarrow{JL}$, $\overleftrightarrow{LM}$, $\overleftrightarrow{GM}$, $\overleftrightarrow{AG}$, $\overleftrightarrow{BH}$, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{ED}$

7. **a)** *r* e *s*; *r* e *t*; *r* e *u*; *s* e *t*; *s* e *u*; *t* e *u*

b) não

8. **a)** $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CE}$, $\overleftrightarrow{BA}$, $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{ED}$

b) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DC}$; $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AD}$

c) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{DA}$; $\overleftrightarrow{DA}$ e $\overleftrightarrow{AB}$

d) $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CE}$, $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{AD}$

e) $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{DC}$

9. Resposta pessoal.

10. Possíveis respostas:

a) $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{DC}$ e $\overleftrightarrow{FE}$; $\overleftrightarrow{ML}$, $\overleftrightarrow{IJ}$ e $\overleftrightarrow{GH}$

b) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{DI}$; $\overleftrightarrow{IJ}$ e $\overleftrightarrow{JC}$

c) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{DE}$; $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{EF}$; $\overleftrightarrow{GF}$ e $\overleftrightarrow{FA}$; $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BL}$; $\overleftrightarrow{BL}$ e $\overleftrightarrow{LM}$; $\overleftrightarrow{LM}$ e $\overleftrightarrow{MA}$

d) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{IH}$; $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{GH}$; $\overleftrightarrow{FE}$ e $\overleftrightarrow{GM}$

12. alternativa **a**

13. verdadeiras: **a**, **c**, **d**; falsa: **b**

14. **a)** $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{CF}$

b) paralela

c)
- $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CB}$, $\overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{FE}$
- $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{CF}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{DF}$

15. **a)**
- perpendicular
- paralela
- contida no plano

b) $\overleftrightarrow{IJ}$, $\overleftrightarrow{JF}$, $\overleftrightarrow{FG}$, $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{HI}$

c) $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{AE}$

d) $\overleftrightarrow{BA}$, $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{GF}$, $\overleftrightarrow{FJ}$, $\overleftrightarrow{IJ}$ e $\overleftrightarrow{HI}$

16. alternativa **d**

17. alternativa **b**

18. não

19. alternativa **e**

20. **a)** são perpendiculares

b) sim

c) 8 planos

d) *ABJL*, *CDML*, *FENO*, *HGPQ*, *ABCDEFGH* e *IJLMNOPQ*

e) são perpendiculares

21. verdadeiras: **b**, **d**; falsas: **a**, **c**, **e**

22. alternativa **c**

23. alternativa **b**

24. alternativa **a**

25. **a)** ponto

b) região determinada por um quadrilátero

c) região triangular

d) reta

e) segmento de reta

f) círculo

26. **a)** verdadeira

b) verdadeira

c) verdadeira

d) falsa

e) falsa

27. alternativa **a**

28. **a)** hexágono **b)** segmento de reta

29. A projeção ortogonal sobre um plano dessas retas pode ser:
- uma única reta;
- outras duas retas paralelas;
- dois pontos, no caso em que essas retas contêm um ponto do plano e são ortogonais a ele.

30. Resposta pessoal.

31. **a)**
- $\overline{DJ}$ e $\overline{CI}$
- $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$
- $\overline{ML}$ e $\overline{GH}$

b)
- $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$
- $\overline{AB}$, $\overline{EF}$, $\overline{MG}$, $\overline{LH}$, $\overline{JI}$ e $\overline{CD}$

32. Resposta pessoal.

33. **a)** 8 cm

b) 6 cm

c) 10 cm

d) 8 cm

34. **a)** falsa

b) verdadeira

c) falsa

d) verdadeira

Capítulo 2 Poliedros

1. poliedros: **a**, **b**, **d**, **e**; não poliedros: **c**, **f**

2. **a)** 13 faces, 24 arestas e 13 vértices
b) 11 faces, 20 arestas e 11 vértices
c) 7 faces, 12 arestas e 7 vértices
d) 18 faces, 40 arestas e 24 vértices

3. **a)** 9 faces, 16 arestas e 9 vértices
b) eneaedro
c) triângulo
d)
- paralelas
- concorrentes
- reversas

e)
- 3 arestas
- 4 arestas
- 4 arestas

4. **a)** convexo
b) não convexo
c) não convexo
d) não convexo
e) convexo
f) não convexo

5. 14

6. 6

7. 18

8. **a)** 10 faces, 20 arestas e 12 vértices
b) sim

9. alternativa **b**

10. 7

11. 38; 20

12. Resposta pessoal.

13. alternativa **a**

14. 9

15. 18; 8

16. poliedro **A**: 12 arestas, 8 vértices e 6 faces
poliedro **B**: 12 arestas, 6 vértices e 8 faces

17. 10 faces, 18 arestas e 10 vértices

18. **a)** A quantidade de arestas *A*.
b) 8 vértices

19. tetraedro

20. alternativa **d**

21. válida

22. Sim, pois todo poliedro regular é convexo, e para este a relação de Euler é válida.

23. **a)** não convexo
b) 8 faces, 12 vértices e 18 arestas
c) válida

24. Resposta pessoal.

25. **a)** 54 cm^2 **b)** 84 cm^2 **c)** 51 cm^2

26. 450 m^2

27. **a)** 9 cm e 6 cm
b) $3\sqrt{13}$ cm

28. 12 100 m^2

30. $x = \frac{22}{3}$ cm; $y = \frac{10}{3}$ cm

31. 560 pisos

32. aproximadamente 34 441 pessoas

33. **a)** $10 \leqslant x \leqslant 26$
b) 18 m

34. alternativa **d**

35. **a)** R$ 24 000,00 **b)** 120 m^2

36. alternativa **c**

37. alternativa **c**

38. alternativa **a**

39. **a)** 280 cm^2 **b)** 120 cm^2

40. alternativa **c**

41. Resposta pessoal.

42. alternativa **a**

43. alternativa **e**

44. **a)** $18\sqrt{3}$ cm^2 **b)** $10\sqrt{3}$ cm

45. **a)** 123 m^2
b) 7 000 bandeirinhas

46. $x = 1{,}5$ cm

47. alternativa **b**

48. **a)** $(3, 3, 4, 12)$, $(3, 3, 6, 6)$, $(3, 6, 3, 6)$, $(3, 4, 3, 12)$, $(3, 4, 6, 4)$, $(3, 4, 4, 6)$ e $(4, 4, 4, 4)$
b) $(3, 6, 3, 6)$, $(3, 4, 6, 4)$ e $(4, 4, 4, 4)$

49. $(3, 3, 3, 3, 6)$, $(3, 3, 3, 4, 4)$ e $(3, 3, 4, 3, 4)$

50. Não, pois em um vértice de uma composição podem ser dispostos *m* polígonos regulares congruentes de *n* lados cuja soma dos ângulos internos nesse vértice seja 360°, e a única possibilidade que satisfaz a expressão $m = \frac{2n}{(n-2)}$ é quando $n = 3$, ou seja, um triângulo equilátero.

51. **a)** Resposta pessoal. **b)** regular

52. Resposta pessoal.

53. **a)** prisma de base pentagonal
b) prisma de base quadrangular
c) prisma de base hexagonal

54. alternativa **a**

55. alternativa **c**

56. $\dfrac{100}{9}\sqrt{15}$ cm

57. 75 pares

58. aproximadamente 18,6 cm^2

59. Resposta pessoal.

60. 5 cm, 6 cm e 7 cm

61. 6 cm

62. Resposta pessoal.

63. **a)** 142 m^2
b) $(172 + 10\sqrt{85})\,m^2$
c) $(48\sqrt{3} + 192)\,m^2$

64. 468 cm^2

65. Resposta pessoal.

66. $18a^2$ cm^2

67. 37 embalagens

68. 50 cm

69. **a)** 3 500 cm^2
b) 7 714 embalagens; 15 428 embalagens

70. alternativa **c**

71. aproximadamente 140,3 cm^3

72. 1 728 dm^3

73. 408 cm^3

74. **a)** $1\,440\sqrt{3}$ cm^3
b) $192\sqrt{3}$ cm^3

75. 18 dm

76. alternativa **d**

77. alternativa **e**

78. **a)** 32 m^3
b) 1,6 m, 2 m e 10 m

79. aproximadamente 91 minutos

80. alternativa **a**

81. 40 cm

82. 24 dm^3

83. **a)** 3,12 m^3
b) 20,32 m^2

84. **a)** 1 m
b) 2 m
c) 8 m^2
d) 4 m^2
e) 12 m^2

85. aproximadamente 173,2 cm^2

86. aproximadamente 2,24 dm^2

87. aproximadamente 201,53 dm^2

88. alternativa **a**

89. aproximadamente 13,86 cm^2

90. aproximadamente 6,9 m^2

91. $12\sqrt{91}$ cm^2

92. alternativa **a**

93. Resposta pessoal.

94. alternativa **c**

95. alternativa **c**

96. 392 cm^3

97. **a)** 96 cm^2
b) 48 cm^3

98. alternativa **d**

99. alternativa **b**

100. 150 000 L

101. $2\sqrt{3}$ cm^3

102. aproximadamente 66,6 cm^2; 32 cm^3

103. $\dfrac{64\sqrt{2}}{3}$ cm^3

104. **a)** 36 cm^2
b) aproximadamente 267,3 cm^2
c) 528,3 cm^2

105. 57 dm^2

106. 512 cm^2

107. 1 m; aproximadamente 24,18 m^2

108. aproximadamente 79,67 dm^2

109. Resposta pessoal.

110. 622,2 cm^2

111. aproximadamente 20,12 cm; 1 896,5 cm^2

112. $66\sqrt{3}$ cm^2

113. 1 092 cm^3

114. aproximadamente 246,7 L/min

115. alternativa **b**

116. 873 cm^3

117. 302 cm^3

118. **a)** $\dfrac{448}{3}$ cm^3
b) $\dfrac{2\,552}{3}$ cm^3

Capítulo 3 Corpos redondos

1. **a)** A: aproximadamente 78,5 cm^2;
B: aproximadamente 283,385 cm^2;
C: aproximadamente 1,5386 cm^2

b)
- A: aproximadamente 5,45 cm^2;
B: aproximadamente 19,68 cm^2;
C: aproximadamente 0,11 cm^2
- A: aproximadamente 15,26 cm^2;
B: aproximadamente 55,10 cm^2;
C: aproximadamente 0,30 cm^2
- A: aproximadamente 50,15 cm^2;
B: aproximadamente 181,05 cm^2;
C: aproximadamente 0,98 cm^2

2. alternativa **e**

3. **a)** aproximadamente 15,7 cm^2
b) aproximadamente 78,657 cm^2
c) aproximadamente 1,363 m^2
d) aproximadamente 18,350 cm^2

4. alternativa **d**

5. 598 cortes

6. Resposta pessoal.

7. Resposta pessoal.

8. aproximadamente 67 litros

9. 1 m

10. **a)** cilindro de $r = 7$ cm: aproximadamente 175,84 cm^2; aproximadamente 50,24 cm^2
cilindro de $r = 4$ cm: aproximadamente 175,84 cm^2; aproximadamente 153,86 cm^2
b) aproximadamente 207,24 cm^2

11. 20 cm

12. 19π cm^2

13. 500 L

14. Resposta pessoal.

15. 56π cm^2

16. Resposta pessoal. Possível resposta:

Início
1. Inserir o volume V de água, em litros, a ser armazenada no recipiente.
2. Inserir o comprimento, em centímetros, do diâmetro interno d da base do recipiente.
3. Inserir a altura interna h, em centímetros, do recipiente.
4. Calcule: $V_R = \dfrac{\pi\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 h}{1000}$.
5. Caso V_R seja menor do que V, não será possível armazenar o volume de água no recipiente. Caso contrário, é possível armazenar o volume de água no recipiente.

Fim

17. raio: aproximadamente 4 cm; altura: aproximadamente 8 cm

18. Resposta pessoal.

19. verdadeiras: **b**, **c**, **e**; falsas: **a**, **d**

20. aproximadamente 14,89 cm

21. **a)** 490 cm^3; aproximadamente 384,65 cm^3
b) aproximadamente 2,59 cm

22. alternativa **a**

23. aproximadamente 1 507,2 L

24. **a)** aproximadamente 502,4 cm^3; aproximadamente 1 256 cm^3
b) lado menor: aproximadamente 879,2 cm^2;
lado maior: aproximadamente 351,68 cm^2

25. aproximadamente 19,1 mm

26. alternativa **a**

27. **a)** aproximadamente 299,18 cm^2
b) aproximadamente 197,96 cm^2
c) aproximadamente 238°12'

28. Resposta pessoal.

29. **a)** aproximadamente 6,32 cm
b) aproximadamente 52,25 cm^2

30. 2 cm

31. aproximadamente 1,85

32. Resposta pessoal.

33. aproximadamente 1 017,36 cm^2

34. 5 cm

35. 263,76 cm^2

36. 205,2892 cm^2

37. alternativa **e**

38. **a)** aproximadamente 565,2 cm^3
b) aproximadamente 5 978,36 cm^3

39. 14,25 cm

40. aproximadamente 1 321,72 cm^3

41. **a)** aproximadamente 0,52 m^3
b) 9 940 L
c) 25,5 m^2

42. alternativa **b**

43. **a)** aproximadamente 3 297 cm^2
b) aproximadamente 2 509,45 cm^2

44. **a)**
- 1,25 cm
- aproximadamente 7,22 cm

b) aproximadamente 96,35 cm^2
c) falsa

45. **a)** aproximadamente 577,76 cm^2
b) aproximadamente 144,44 cm^2
c) aproximadamente 1 299,96 cm^2

46. aproximadamente 108,58 cm^2

47. 5,18 L

48. Resposta pessoal.

49. 1 361,42 cm^2

50. aproximadamente 2,56 m^2

51. **a)** aproximadamente 25,2 cm^3
b) aproximadamente 540,21 cm^3

52. **a)** aproximadamente 1 272,75 cm^3
b) aproximadamente 468,91 cm^3

53. aproximadamente 0,12 m

54. Resposta pessoal.

55. aproximadamente 1,71 L

56. $\frac{1}{7}$

57. aproximadamente 386,75 cm^3

58. aproximadamente 3,64 m^3

59. cone: aproximadamente 16,75 cm^3
tronco menor: aproximadamente 117,23 cm^3
tronco maior: aproximadamente 318,19 cm^3

60. 74π cm^3

61. **a)** aproximadamente 14 130 mm^3
b) aproximadamente 1 436,03 cm^3
c) aproximadamente 696,56 cm^3
d) aproximadamente 179,50 cm^3

62. aproximadamente 0,55 m^3

63. 1 285,83 cm^3

64. alternativa **a**

65. 10 cm

66. aproximadamente 654,167 cm^3

67. aproximadamente 18,32 cm

68. **a)** 33,1% maior
b) 800% maior

69. alternativa **b**

70. alternativa **b**

71. alternativa **c**

72. alternativa **a**

73. A joia não é maciça.
• A joia afunda, pois a densidade é maior do que a da água.

74. **a)** aproximadamente 1 221,08 cm^2
b) aproximadamente 305,27 cm^2

75. aproximadamente 84,78 cm^2

76. **a)** 69%
b) 400%

77. Resposta pessoal.

78. aproximadamente 1 789,42 cm^2

79. **a)** aproximadamente 277,45 cm^2
b) aproximadamente 20 096 mm^2

80. aproximadamente 12,72 cm

81. **a)** 9 cm **b)** 18 cm

82. alternativa **a**

83. alternativa **b**

84. verdadeiras: **a**, **c**, **e**; falsas: **b**, **d**, **f**

85. alternativa **c**

Sugestões de leitura para o aluno

- ***A janela de Euclides***

  MLODINOW, Leonard. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

  O livro narra a história da Geometria ao longo do tempo, de uma maneira divertida, mostrando que podemos encontrá-la em qualquer parte do mundo.

- ***As maravilhosas utilidades da geometria: da pré-história à era espacial***

  GERBASI, Alberto Ramón Valderrama. Curitiba: PUCPress, 2017.

  O autor deste livro aborda a Geometria de modo dinâmico, mostrando por meio de fenômenos da natureza que é possível despertar o interesse do leitor por esse campo da Matemática.

- ***A matemática e a Mona Lisa: a confluência da arte com a ciência***

  ATALAY, Bulent. São Paulo: Mercuryo, 2007.

  Para explicar a ciência, o autor utiliza neste livro obras de Leonardo da Vinci e mostra que cálculos matemáticos estão presentes na natureza e no corpo humano. Além disso, são feitas análises da razão áurea, encontrada tanto nas pirâmides do Egito como na obra Mona Lisa, *de Leonardo da Vinci.*

- ***Descobrindo matemática na arte: atividades para o ensino fundamental e médio***

  FAINGUELERNT, Estela Kaufman; NUNES, Katia Regina Ashton. Porto Alegre: Artmed, 2011.

  Neste livro, são propostas atividades envolvendo as obras de grandes artistas e conceitos relacionados com a Geometria, evidenciando a aplicabilidade, dos poliedros e demais figuras geométricas para a interpretação de obras de arte famosas.

- ***Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial***

  DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. 7. ed. São Paulo: Atual, 2019. v. 10.

  Este livro aborda os conteúdos, de maneira aprofundada e completa, sobre Geometria espacial, Posição e Métrica. Contém ainda artigos relacionados aos assuntos abordados e também questões de vestibulares organizadas por grau de dificuldade.

- ***Geometria métrica: uma nova abordagem***

  CARVALHO, Fábio Romeu de. São Paulo, 2019.

  Contém um estudo detalhado sobre poliedros regulares e uma análise de prismas, pirâmides e antiprismas, apresentando uma abordagem que procura deduzir fórmulas para calcular seus elementos.

- ***Mania de matemática: diversão e jogos de lógica e matemática***

  STEWART, Ian. Rio de Janeiro: Zahar, 2010.

  Este livro contempla uma diversidade de problemas, enigmas e jogos que exigem do leitor o raciocínio lógico e conceitos matemáticos para a resolução dos mais variados problemas, como converter um pentagrama em um dodecaedro ou determinar quantos homens são necessários para construir uma pirâmide.

- ***Matemática sem mistérios: geometria plana e espacial***

  GARCIA, Antônio Carlos de Almeida; CASTILHO, João Carlos Amarante. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2006.

  O livro apresenta ao leitor, por meio de uma linguagem simples, o conteúdo de Geometria plana e espacial com questões de concursos e de provas de vestibulares.

- ***O instinto matemático***

  DEVLIN, Keith. 2. ed. Rio de Janeiro: Record, 2009.

  Este livro mostra o que podemos fazer para desenvolver a Matemática nata. Sendo assim, apresenta maneiras de aprimorarmos as habilidades matemáticas com situações que vivenciamos em nosso dia a dia.

- ***Os elementos de Euclides: uma história da geometria e do poder das ideias***

  BERLINSKY, David. Rio de Janeiro: Zahar, 2018.

  Neste livro o autor discute a respeito da obra Os elementos, *de Euclides de Alexandria, com informações importantes sobre os temas que são abordados nessa obra, leituras críticas a respeito do tema, além de propor reflexões que envolvem o poder das ideias no que se refere a convencer as pessoas da validade e da importância de determinados assuntos.*

- ***Os números: a história de uma grande invenção***

  IFRAH, Georges. 5. ed. Porto Alegre: Globo, 1992.

  Para mostrar a evolução da Matemática, este livro passa por diversas civilizações da Antiguidade – egípcios, babilônios, fenícios, gregos, romanos, hebreus, maias, chineses, hindus e árabes – que contribuíram com sua construção.

- ***Os poliedros de Platão e os dedos da mão***

  MACHADO, Nílson José. 8. ed. São Paulo: Scipione, 1995.

  O conteúdo deste livro auxilia na compreensão de conceitos de ângulo, área, volume e figuras geométricas relacionados com a prática do dia a dia. Por meio desses conceitos, realiza estudos sobre os poliedros e conclui que há apenas cinco poliedros regulares, os poliedros de Platão.

Sites

- ***Banco Internacional de Objetos Educacionais (Bioe)***

Disponível em: <http://objetoseducacionais.mec.gov.br/#/inicio>. Acesso em: 5 ago. 2020.

Aborda temas ligados a todas as etapas de ensino e áreas de conhecimento, especialmente a Matemática, apresentando objetos na forma de imagens, simuladores, aplicativos, vídeos, áudios e hipertextos.

- ***Domínio Público***

Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.jsp>. Acesso em: 20 jul. 2020.

Este site *do governo brasileiro é uma biblioteca digital que disponibiliza conhecimento e incentiva o aprendizado. Alunos e professores podem utilizá-lo para estudos, pesquisas e desenvolvimento profissional/educacional.*

- ***EducaBras***

Disponível em: <https://www.educabras.com/>. Acesso em: 25 jul. 2020.

Oferece suporte aos estudantes que estão se preparando para o vestibular e o Enem por meio de aulas e uma grande quantidade de questões de Matemática abrangendo diversos conteúdos.

- ***GeoGebra 3D***

Disponível em: <https://www.geogebra.org/3d?lang=pt>. Acesso em: 5 ago. 2020.

O GeoGebra *é um* software *de Geometria dinâmica gratuito que permite a realização de diversos estudos – de Geometria a funções, por exemplo. Neste* site, *é possível utilizar de forma* on-line *a ferramenta 3D do* software, *a partir do qual é possível trabalhar pontos, retas, planos e sólidos geométricos, como prismas, pirâmides, poliedros e corpos redondos.*

- ***Enem***

Disponível em: <www.enem.inep.gov.br>. Acesso em: 5 ago. 2020.

O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), realizado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) desde 1998, avalia o desempenho escolar ao final do Ensino Médio e possibilita o acesso à Educação Superior por meio de programas como o Sistema de Seleção Unificada (Sisu) e o Programa Universidade para Todos (Prouni). Os resultados também permitem o desenvolvimento de estudos e indicadores educacionais.

- ***Matemática***

Disponível em: <http://matematica.com.br>. Acesso em: 27 jul. 2020.

Com modernas ferramentas de ensino, o site *propõe uma nova maneira de aprender. Aborda conteúdos matemáticos e exercícios diferenciados para facilitar a aprendizagem.*

- ***Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM)***

Disponível em: <https://www.obm.org.br/>. Acesso em: 25 jul. 2020.

Neste site *estão disponíveis provas com gabarito de vários anos da OBM e em diversos níveis.*

- ***Portal Aprendiz***

Disponível em: <www.aprendiz.com.br>. Acesso em: 28 jul. 2020.

Site *especializado em educação do Brasil e referência na produção de conteúdos voltados para compreender as relações entre educação e cidade e escola e território, além de temas como direito à cidade. Contém ainda notícias e entretenimento e disponibiliza cursos e projetos.*

- ***Percursos Educativos***

Disponível em: <http://hotsite.tvescola.org.br/percursos/>. Acesso em: 7 ago. 2020.

Contém recursos das diferentes áreas de ensino e foi construído com o objetivo de ajudar estudantes aprofundar seus conhecimentos de diferentes maneiras, não somente com resolução de exercícios.

- ***SketchUp***

Disponível em: <https://www.sketchup.com/pt-BR/plans-and-pricing/sketchup-free>. Acesso em: 5 ago. 2020.

O SketchUp *é um* software *que permite a manipulação e a construção de figuras tridimensionais, voltado principalmente à construção de projetos para objetos e obras arquitetônicas. No entanto, apesar de ter sido desenvolvido com essa finalidade, também é um recurso interessante para compreender relações entre figuras geométricas tridimensionais, como poliedros, esferas, cones, entre outras, além do estudo de posições relativas entre pontos, retas e planos partindo dos paralelepípedos.*

Bibliografia

ACIDINI, Cristina; DELPRIORI, Alessandro. *Mestres do Renascimento*: obras-primas italianas. São Paulo: Base7 Projetos Culturais, 2013. Disponível em: <https://www.bb.com.br/docs/pub/inst/dwn/renascimento.pdf>. Acesso em: 2 jun. 2020.

Material sobre essa importante exposição com obras de arte do movimento renascentista, relacionando-a com o contexto histórico e a vida dos artistas.

BRASIL. Ministério da Saúde. *Guia alimentar para a população brasileira*. 2. ed. Brasília, 2014. Disponível em: <http://www.saude.gov.br/images/pdf/2014/novembro/05/Guia-Alimentar-para-a-pop-brasiliera-Miolo-PDF-Internet.pdf>. Acesso em: 9 jul. 2020.

O guia apresenta recomendações sobre a alimentação voltada à realidade das famílias do país, com o objetivo de promover a saúde e o bem-estar dos brasileiros.

COMO FUNCIONA o motor do carro? *Jornal do Carro*, 17 nov. 2019. Disponível em: <https://jornaldocarro.estadao.com.br/carros/como-funciona-o-motor-do-carro>. Acesso em: 29 abr. 2020.

Texto sobre o funcionamento de motores de carros e com informações sobre a partida e a parte elétrica desses veículos.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. 4. ed. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

A história da Matemática é abordada neste livro, fazendo um traçado que começa na Antiguidade e chega até nossos dias, além de exercícios no final de cada capítulo, que permitem ao leitor avaliar seu conhecimento.

FETISSOV, Andrei I. *A demonstração em geometria*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997. (Matemática: Aprendendo e Ensinando).

Este livro apresenta uma pesquisa que almejava trabalhar com as técnicas de demonstração no ensino de Geometria euclidiana.

GARRET, Felipe. Entenda como funcionam os diferentes tipos de impressoras 3D. *Tech Tudo*, 27 fev. 2016. Disponível em: <https://www.techtudo.com.br/listas/noticia/2016/02/entenda-como-funcionam-os-diferentes-tipos-de-impressoras-3d.html>. Acesso em: 4 jun. 2020.

Apresenta o funcionamento de diferentes tipos de impressoras 3D, além de suas vantagens e desvantagens.

MINISTÉRIO DO TURISMO E ANTIGUIDADES DO EGITO. *The Step Pyramid Complex of Djoser*. Disponível em: <https://egymonuments.gov.eg/en/monuments/step-pyramid-of-djoser>. Acesso em: 9 jul. 2020.

Neste site, *é possível ver informações interessantes sobre monumentos do Egito antigo e até mesmo realizar passeios virtuais por importantes e lindos pontos turísticos do país, como museus, monumentos e sítios arqueológicos.*

O GELO que esquenta: os engenhosos segredos dos iglus. *BBC Brasil*, 21 fev. 2017. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/internacional-38970141>. Acesso em: 30 jun. 2020.

Matéria com informações interessantes sobre a construção e as características dos iglus.

RODRIGUES, Claudina I.; REZENDE, Eliane Q. F. *Abelhas matemáticas*. Campinas: IME-Unicamp, 2019. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/dl/1-EDULLkwNQ_MDA_d14f7_>. Acesso em: 14 jul. 2020.

Este guia apresenta detalhes sobre as características e a Matemática presente nos alvéolos produzidos pelas abelhas.

RODRIGUEZ, Henrique. Por que a cilindrada de um motor quase nunca é um número exato? *Quatro Rodas*, 20 dez. 2016. Disponível em: <https://quatrorodas.abril.com.br/auto-servico/por-que-a-cilindrada-de-um-motor-quase-nunca-e-um-numero-exato>. Acesso em: 29 abr. 2020.

Reportagem com informações sobre o cálculo dos valores das cilindradas anunciados pelos fabricantes de veículos.

SILVEIRA, Fernando Lang da; AXT, Rolando. A “atração” entre sombras. *Física na Escola*, São Paulo, Sociedade Brasileira de Física, v. 8, n. 1, p. 17-21, 2007. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol8/Num1/v08n01a04.pdf>. Acesso em: 5 fev. 2020.

Explica características da formação das sombras e o fenômeno que ocorre quando duas sombras se aproximam.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. Instituto de Física. *Propriedades físicas da água*. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/fis01038/biofisica/agua/agua.htm>. Acesso em: 6 fev. 2020.

Informações sobre as características físicas e químicas das moléculas de água, além de comentários sobre as interações com outras moléculas e suas principais características.

Siglas

Acafe-SC: Associação Catarinense das Fundações Educacionais (Santa Catarina)

AFA-SP: Academia da Força Aérea (São Paulo)

Cesgranrio-RJ: Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio (Rio de Janeiro)

Enem: Exame Nacional do Ensino Médio

Epcar-MG: Escola Preparatória de Cadetes do Ar (Minas Gerais)

Famerp-SP: Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto (São Paulo)

FGV-SP: Fundação Getulio Vargas (São Paulo)

Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular (São Paulo)

Ibmec-SP: Faculdades do Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais

IME-RJ: Instituto Militar de Engenharia (Rio de Janeiro)

Obmep: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

UEA-AM: Universidade do Estado do Amazonas

Uece: Universidade Estadual do Ceará

UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina (Paraná)

UEPB: Universidade Estadual da Paraíba

Uespi: Universidade Estadual do Piauí

UFG-GO: Universidade Federal de Goiás

Ufla-MG: Universidade Federal de Lavras (Minas Gerais)

UFMT: Universidade Federal de Mato Grosso

UFPE: Universidade Federal de Pernambuco

Ufpel-RS: Universidade Federal de Pelotas (Rio Grande do Sul)

UFPI: Universidade Federal do Piauí

UFPR: Universidade Federal do Paraná

UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UFRN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte

UFTM-MG: Universidade Federal do Triângulo Mineiro (Minas Gerais)

Unesp: Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (São Paulo)

Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)

UPF-RS: Universidade de Passo Fundo (Rio Grande do Sul)

UPM-SP: Universidade Presbiteriana Mackenzie (São Paulo)

Matemática

Geometria espacial e plana

Assessoria pedagógica

Sumário

1 O Ensino Médio e esta coleção

Estrutura da obra

Esta obra está estruturada em seis volumes, sendo estes autocontidos e não sequenciais, ou seja, cada volume apresenta todos os conteúdos imprescindíveis para a compreensão dos alunos, de modo que não seja necessário retomar conteúdos abordados em outros volumes. Assim, esta seção tem por objetivo apresentar como os capítulos do Livro do Estudante estão estruturados, com fac-símiles, textos explicativos a respeito de cada tipo de seção e destaques que poderão aparecer nos capítulos.

Para promover uma aprendizagem enriquecedora e completa, são usados nesta obra, tanto no desenvolvimento dos conteúdos como em seções especiais e tarefas propostas, textos que possuem vários elementos, como imagens, desenhos e ícones. Por isso, o uso neste volume de aparentes publicidades ou marcas é justificado pelo Parecer CNE/CEB nº 15/2000, quando menciona que "[...] o uso didático de imagens comerciais identificadas pode ser pertinente desde que faça parte de um contexto pedagógico mais amplo, conducente à apropriação crítica das múltiplas formas de linguagens presentes em nossa sociedade, submetido às determinações gerais da legislação nacional e às específicas da educação brasileira, com comparecimento módico e variado [...]", tendo o único objetivo de auxiliar os alunos a compreender o conteúdo trabalhado.

- ***Estrutura do Livro do Estudante***

Abertura do capítulo

Nessas páginas, com base em um texto relacionado a diferentes assuntos e situações, os alunos são convidados a responder a algumas questões, que visam motivá-los a refletir sobre o conteúdo a ser trabalhado no decorrer do capítulo, além de explorar os conhecimentos prévios deles. Em geral, os assuntos abordados buscam estabelecer uma relação com outros componentes curriculares, como Biologia, Química e Física, por exemplo.

BNCC

Os códigos referentes a destaques da BNCC indicados no sumário estão sinalizados no início do capítulo correspondente, destacados neste quadro.

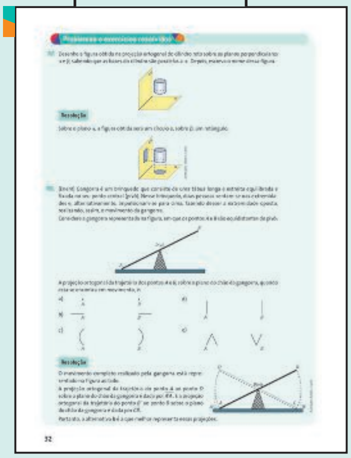
Introdução

Todos os capítulos têm esse tópico inicial. Nele, há situações-problema, textos referentes à história da Matemática ou situações do cotidiano relacionadas ao conteúdo, explorando os conhecimentos prévios dos alunos e mostrando a necessidade de estudar o conceito abordado.

Conversando

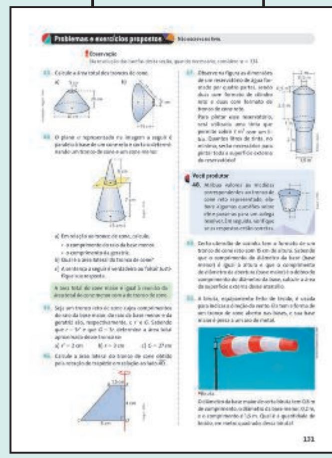
Seção no final da introdução, na qual são propostas questões que servem como diálogo inicial, a fim de incentivar a interlocução entre alunos e professor, bem como organizar e expor os argumentos individuais e a verbalização de ideias matemáticas.

Problemas e exercícios resolvidos



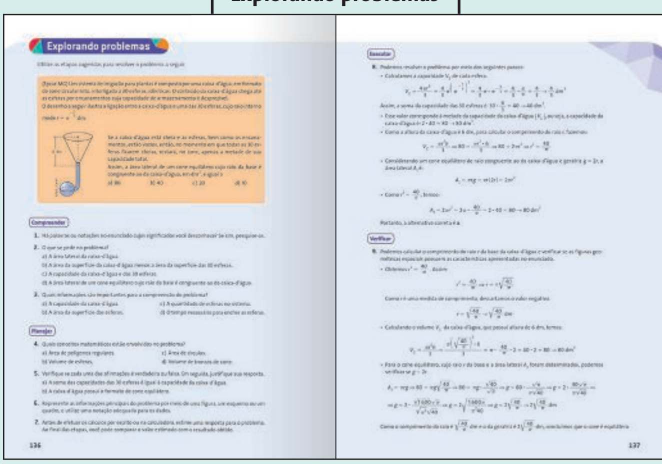
Nessa seção, são apresentadas tarefas resolvidas, que servem tanto de exemplo quanto complemento da teoria abordada. De modo geral, a seção vem logo após a teoria, a fim de contribuir no desenvolvimento de estratégias para a resolução de tarefas propostas nas demais seções do livro.

Problemas e exercícios propostos



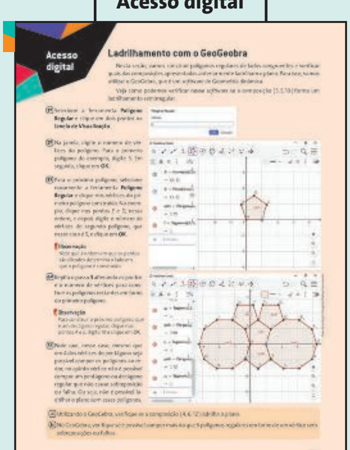
Propõe tarefas referentes ao conteúdo em estudo, que permitem aos alunos colocar em prática o que estão aprendendo, desenvolvendo assim o aprendizado por meio de situações desafiadoras e também utilizando diferentes estratégias de resolução.

Explorando problemas



Seção que mostra maneiras de organizar o pensamento para resolver um problema por meio de raciocínio, representação, comunicação e argumentação. Nela, será apresentada cada etapa da resolução, em que se faz necessário mobilizar conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução.

Acesso digital

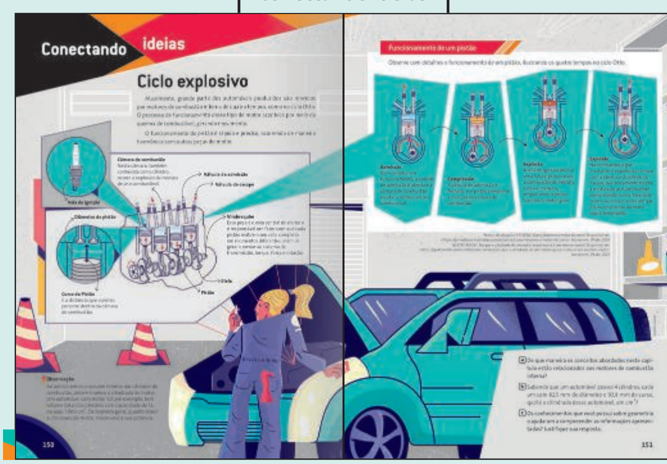


Apresentada em alguns capítulos, essa seção contém recursos digitais, como *softwares* e *sites*, e várias ferramentas tecnológicas computacionais, que possibilitam o desenvolvimento de atividades relacionadas ao conteúdo em estudo, a fim de incentivar os alunos a utilizar o computador no estudo da Matemática. Ao final da seção, são propostas algumas questões que visam familiarizá-los com o recurso apresentado e a verificação do que compreenderam a seu respeito.

Saiba mais

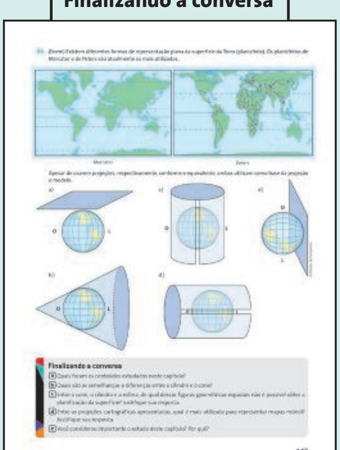
Essa seção apresenta informações complementares que vão além do conteúdo abordado, visando à formação dos alunos na construção da cidadania e mostrando as várias relações da **Matemática** com outras áreas do conhecimento, como **Ciências da Natureza** e **Ciências Humanas**, além de curiosidades ligadas ao conteúdo. Ao final, são propostas algumas questões para que eles possam refletir sobre o que foi estudado.

Conectando ideias



Seção em que os alunos são convidados a ler e interpretar informações apresentadas na forma de textos e infográficos, envolvendo diferentes temas e situações, e, com base nelas, a responder a algumas questões, as quais visam motivá-lo a refletir sobre o que foi estudado no capítulo e a perceber a relação desse conteúdo com situações cotidianas e outras áreas do conhecimento.

Finalizando a conversa



Encontrada ao final da última seção de problemas e exercícios propostos de cada capítulo, essa seção traz sugestões de questões cujo objetivo é levar os alunos a fazer uma análise sobre o que foi estudado, bem como expor o que foi compreendido por eles.

Desafio

Algumas tarefas são destacadas como **desafios**, pois envolvem resoluções que vão além da simples aplicação do conteúdo estudado.

Você produtor

Em algumas tarefas, é proposta a elaboração de problemas com base em imagens ou informações ou, então, a realização de algumas construções. Nesses casos, o destaque aparecerá para os alunos.

Vocabulário

Nesse quadro, encontram-se os significados de algumas palavras em destaque no texto, provavelmente desconhecidas dos alunos.

Em grupo

Pensando na formação mais ampla dos alunos, em algumas tarefas propostas, eles são convidados a resolvê-las em grupos com dois ou mais integrantes.

Você cidadão

No decorrer do capítulo, os alunos vão responder a questões que contribuem para a formação cidadã, refletindo a respeito do que está sendo questionado, tanto no seu cotidiano quanto na sociedade em que está inserido.

Observação

Quadro com informações complementares sobre a teoria abordada.

• ***Destaques da Assessoria pedagógica***

Metodologias e estratégias ativas

Apresenta possibilidades de trabalho no desenvolvimento dos conteúdos com diferentes metodologias e estratégias ativas.

Planejamento individual e coletivo

Apresenta subsídios para o planejamento individual e coletivo, podendo propor trabalho com outros professores do mesmo componente curricular ou com professores de diferentes componentes curriculares.

Para aprofundar

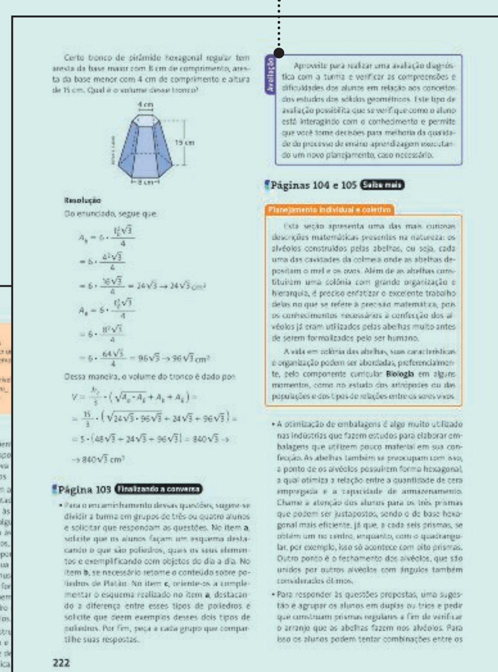
Traz sugestões de livros e *sites* para complementar o trabalho com o tema que está sendo estudado na página do livro do aluno ou na própria Assessoria pedagógica.

BNCC

Apresenta as implicações no trabalho com a BNCC no Ensino Médio referentes ao trabalho com competências, habilidades, temas contemporâneos transversais, atitudes e vivências.

Avaliação

Apresenta diferentes modos para que você avalie os alunos, mapeando os conhecimentos (prévios e posteriores) deles, destacando tanto o caráter formativo quanto a preparação para exames de larga escala.



Boxe informativo

Apresenta informações para complementar o tema estudado na página do livro do aluno ou na própria Assessoria pedagógica.

A Matemática no Ensino Médio

No cenário nacional, especificamente em relação à Educação Básica, é possível observar mudanças significativas nos últimos anos. Entre elas, pode-se destacar a elaboração e a aprovação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para todas as etapas da Educação Básica, além da reestruturação do Ensino Médio, o qual passou a ser referenciado como "novo Ensino Médio".

Conforme indicam os marcos legais, principalmente as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – parecer CNE/CEB nº 3/2018 –, no "novo Ensino Médio", é proposto que o aluno desenvolva o protagonismo juvenil, de tal modo que ele possa tomar decisões e assumir a responsabilidade por elas, além de garantir aprendizagens essenciais e comuns a todos os alunos, mas sem desconsiderar especificidades locais, culturais, sociais, entre outras. Assim, o ensino nessa etapa passa a ser organizado com base em itinerários formativos, os quais devem ser organizados considerando os objetivos, os projetos de vida e as escolhas realizadas pelos alunos diante das possibilidades estabelecidas em concordância com a BNCC, entre outros documentos.

Independentemente do itinerário formativo no qual o aluno será inserido, a Matemática é uma unidade curricular presente ao longo dos três anos do Ensino Médio, de modo que seu objetivo ultrapassa a simples memorização de fórmulas e a realização de cálculos. Conforme as orientações da BNCC (BRASIL, 2018), o ensino de Matemática deve ser organizado de modo a possibilitar a construção de uma visão mais integrada a essa ciência e condizente à sua aplicabilidade em contextos reais e ao seu papel na construção cidadã.

Diante do exposto, o ensino de Matemática deve ser organizado de tal modo que possibilite aos alunos

> *[...] desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.*
>
> *[...] (BRASIL, 2018, p. 529).*

A BNCC é estruturada, em cada unidade curricular, com base em competências específicas e habilidades esperadas. Sendo assim, a escolha dos conteúdos a serem abordados em cada ano do Ensino Médio deve ser orientada baseando-se tanto no desenvolvimento delas quanto no das competências gerais estabelecidas para o Ensino Médio como um todo, considerando as aprendizagens mínimas esperadas para os alunos dessa etapa de ensino, conforme descreve o texto desse documento (BRASIL, 2018).

Sendo assim, é essencial a organização do trabalho pedagógico no sentido de possibilitar ao aluno seu desenvolvimento, objetivando alcançar sua inserção e vivência em sociedade. Nesse sentido, é necessário atribuir a ele parte da responsabilidade diante de suas próprias aprendizagens, incentivando-o a desenvolver a autonomia e o protagonismo juvenil, o que pode ser realizado por meio do emprego de diferentes propostas e metodologias, visando contribuir para sua formação integral.

Conforme aponta Carbonell (2002, p. 16),

> *[...] não se pode olhar para trás em direção à escola ancorada no passado em que se limitava ler, escrever, contar e receber passivamente um banho de cultura geral. A nova cidadania que é preciso formar exige, desde os primeiros anos de escolarização, outro tipo de conhecimento e uma participação mais ativa [...].*

Nesse sentido, a mudança nas práticas e a criação de novas estratégias podem contribuir para o desenvolvimento de novas propostas que visam uma participação mais ativa dos alunos, de modo a propiciar um aprendizado mais efetivo e ancorado em ações colaborativas, permitindo estabelecer relações mais específicas com situações da realidade com as quais o aluno poderá deparar-se ao longo de sua vida.

Além dos objetivos citados, o Ensino Médio também deve proporcionar aos alunos a formação necessária para que possam obter resultados satisfatórios nos exames de larga escala relativos a essa etapa, como é o caso do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), o qual é essencial, por exemplo, para que os alunos deem continuidade à sua formação com o ingresso em cursos de Ensino Superior. Considerando que esse exame tem por objetivo avaliar o desempenho individual ao fim da escolaridade básica, o ensino de Matemática nessa etapa da Educação Básica deve favorecer o desenvolvimento das competências e habilidades necessárias para que obtenham um desempenho adequado nos exames de larga escala, contribuindo para que possam prosseguir com os estudos de acordo com seu projeto de vida.

Porém, muito além de uma etapa preparatória para exames de larga escala, o Ensino Médio deve ser organizado de modo a proporcionar aos alunos uma formação ampla e integral e possibilitar sua inserção na sociedade e no mercado de trabalho, desenvolvendo competências e habilidades que os auxiliarão no acompanhamento das transformações pelas quais a sociedade é submetida e na busca de formação continuada a fim de se atualizarem de acordo com essas transformações.

O estudante e o Ensino Médio

Conforme apresentado pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2011 *apud* BRASIL, 2018, p. 463), a juventude deve ser considerada não apenas como uma etapa de transição entre infância e maturidade, mas como uma

> *[...] condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes.*
>
> *[...] (BRASIL, Parecer CNE/CEB nº 5/2011).*

De acordo com Dayrell e Carrano (2014, p.112), a juventude

> *[...] constitui um momento determinado, mas que não se reduz a uma passagem. Ela assume uma importância em si mesma como um momento de exercício de inserção social. Nesse, o indivíduo vai se descobrindo e descortinando as possibilidades em todas as instâncias de sua vida, desde a dimensão afetiva até a profissional. Essa realidade ganha contornos próprios em contextos históricos, sociais e culturais distintos. As distintas condições sociais (origem de classe e cor da pele, por exemplo), a diversidade cultural (as identidades culturais e religiosas, os diferentes valores familiares etc.), a diversidade de gênero (a heterossexualidade, a homossexualidade, a transexualidade, por exemplo) e até mesmo as DIFERENÇAS TERRITORIAIS se articulam para a constituição dos DIFERENTES MODOS DE VIVENCIAR A JUVENTUDE.*
>
> *[...]*

O perfil do aluno que está inserido no Ensino Médio sofreu muitas modificações nos últimos anos, principalmente por influência de mudanças sociais e culturais vivenciadas pela sociedade, motivadas tanto pelas evoluções tecnológicas ocorridas nos últimos tempos quanto pela expansão do acesso dos alunos a essa etapa de ensino em todo o Brasil. No entanto, ainda que as tecnologias e outras inovações estejam presentes na vida de muitos jovens, considerando a extensão territorial do país e sua diversidade cultural, não é possível traçar um perfil único para o jovem matriculado no Ensino Médio devido à pluralidade de indivíduos, com diferentes características e interesses, sendo possível tratar apenas a respeito "das juventudes" presentes nas salas de aula de Ensino Médio do país.

Assim, apesar de existirem diferenças em relação a aspectos sociais, culturais e econômicos, entre outros, os jovens que integram o Ensino Médio devem ser considerados em sua totalidade, para que a escola possa acolher essa pluralidade de indivíduos, garantindo a eles a possibilidade de expandirem o protagonismo juvenil e de definirem seus projetos de vida (BRASIL, 2018), proporcionando-lhes um desenvolvimento integral, que perpassa a formação de caráter conteudista, e contribuindo para sua formação no sentido de integração e participação em sociedade.

Diante dessa pluralidade, é importante que a escola e o professor considerem, na organização do trabalho pedagógico, diferentes aspectos e busquem proporcionar a todos, independentemente de suas características, as oportunidades equivalentes de aprendizagem e de acesso a recursos, inclusive os tecnológicos, os quais estão presentes em diferentes setores da sociedade e farão parte do cotidiano de muitos alunos ao longo de sua vida.

Assim, é importante que o professor garanta a todos os alunos o acesso aos diferentes recursos tecnológicos disponíveis na escola, tanto aos que têm contato diário com esses equipamentos quanto aos que não têm acesso a eles, de maneira que tenham, no contexto escolar, as mesmas oportunidades de aprendizagem e preparação para os desafios que surgirem no ambiente escolar, em seu futuro profissional e no convívio em sociedade.

Nesse sentido, além de preocupar-se com os conteúdos matemáticos que devem ser trabalhados, é importante que o professor esteja atento às características dos jovens que integram as diferentes turmas, observando suas especificidades e considerando-as no momento de organizar seu trabalho, pois, se forem consideradas, por exemplo, duas turmas formadas por indivíduos da mesma faixa etária, observa-se que elas podem apresentar características completamente diferentes, conforme os sujeitos que as compõem. Por isso, esse é um fator essencial a ser considerado na organização dos trabalhos desenvolvidos pela escola e por seus professores.

O papel do professor

Atualmente, a interação de alguns alunos com a tecnologia incorporou mudanças de comportamento em sala de aula, e essa "geração digital" passou a exigir do professor a mesma alteração, como o professor utilizar essa tecnologia em suas aulas, para se manter atualizado e para se comunicar com outras pessoas. Além disso, há alunos que, por falta de acesso a algumas tecnologias, depositam na escola as esperanças de poder vivenciar experiências importantes de convívio social e que podem ser essenciais para seu futuro profissional. Fatores como esses indicam que o papel do professor precisa ser repensado e redimensionado significativamente, pois influenciam diretamente o ambiente escolar.

Na perspectiva do ensino tradicional, o conteúdo era transmitido por meio de aulas expositivas e pressupunha-se o aprendizado pelo acúmulo de informações. Assim, caberia ao aluno reter essas informações mediante a reprodução de atividades exploratórias, que, se realizadas de maneira correta, constatariam a aprendizagem. No entanto, a mera repetição não comprova o aprendizado, mas a capacidade de memorização e de aplicação dos conhecimentos. Reter grande quantidade de informações também não parece suficiente em uma sociedade dinâmica e complexa que requer cada vez mais habilidades e competências associadas à criatividade e à produção de conhecimento, entre muitas outras.

No entanto, diante dos objetivos formativos apresentados pela BNCC (BRASIL, 2018), em consonância com os demais marcos legais que regem a organização do Ensino Médio no Brasil, a mera transmissão de informações não é suficiente para a formação dos sujeitos. Devido às competências e às habilidades esperadas para esses indivíduos, as práticas pedagógicas precisam ser aprimoradas e construídas de modo a possibilitarem aos alunos esse tipo de formação, considerando suas características individuais.

Dessa maneira, devido às transformações ocorridas na sociedade, tanto a escola quanto o aluno sofreram modificações em seus papéis. Por esse motivo, na atualidade, é esperado que o ensino seja organizado de modo que o aluno passe a ter participação ativa no processo de aprendizagem, ou seja, torne-se agente da construção do próprio conhecimento. Nesse sentido, o professor deve se posicionar como um mediador e como um avaliador de processos, isto é, aquele que ajuda a fornecer as informações necessárias e faz intervenções que auxiliam o aluno a ter condições de construir seu conhecimento, reestruturando o processo quando necessário.

Para Santaló (1996, p. 11),

> *A missão dos educadores é preparar as novas gerações para o mundo em que terão que viver. Isto quer dizer proporcionar-lhes o ensino necessário para que adquiram as destrezas e habilidades que vão necessitar para seu desempenho, com comodidade e eficiência, no seio da sociedade que enfrentarão ao concluir sua escolaridade.*
>
> *[...]*

Sendo assim, o professor deve assumir, entre outros, os seguintes papéis.

- Provedor: aquele que torna os conceitos e os conteúdos matemáticos passíveis de serem aprendidos, fornecendo as informações necessárias, as quais os alunos ainda não têm condições de obter sozinhos, o que exige do professor o domínio do conteúdo e conhecimentos pedagógicos, tecnológicos e outros.
- Orientador: aquele que conduz e organiza o trabalho em sala de aula, buscando desenvolver a autonomia dos alunos e contribuir para o desenvolvimento das competências e habilidades esperadas para essa etapa de ensino.
- Incentivador: aquele que incentiva continuamente os alunos, motivando-os a refletir, investigar, levantar questões e debatê-las com os colegas.

Diante dessas novas perspectivas, é importante que o professor conheça as condições socioculturais, as expectativas e as competências cognitivas dos alunos, refletindo a respeito de como pode organizar seu trabalho no sentido de proporcionar a eles aprendizagens significativas, considerando as orientações e os objetivos estabelecidos para o ensino de Matemática no Ensino Médio. Assim, o professor terá condições de selecionar ou produzir situações-problema relacionadas ao cotidiano de sua turma. É relevante também o trabalho de determinado conteúdo em diversos contextos, a fim de que os alunos desenvolvam a capacidade de generalização. Além disso, o professor precisa ter conhecimento das mudanças que ocorrem dentro e fora da escola, repensando seu trabalho diante das transformações às quais a escola e a sociedade estão sujeitas.

Nesse aspecto, a formação do professor é fundamental, não se resumindo apenas à graduação ou à especialização, mas também à formação continuada, a fim de acompanhar o desenvolvimento de estudos e os progressos que ocorrem no âmbito educacional. É desejável, por exemplo, que um professor de Matemática saiba o conteúdo da área; é necessário que ele tenha algum conhecimento sobre psicologia, pedagogia, linguagem, sexualidade, infância, adolescência, sonho, afeto, vida etc., para que possa, no cotidiano da sala de aula, lidar com problemas e situações referentes a esses e a outros campos, os quais afetam os alunos e podem influenciar diretamente em suas aprendizagens.

Para se informar sobre as mudanças que ocorrem fora da escola, o professor precisa estar atento às constantes transformações e evoluções sociais, a fim de verificar se seu trabalho está contribuindo para a construção do conhecimento do estudante como cidadão.

De acordo com Brousseau (1996, p. 71),

> *[...] o professor é uma espécie de ator. Atua segundo um texto escrito em outro contexto e segundo determinada tradição. Podemos imaginá-lo como um ator da Commedia dell'arte: improvisa na hora, em função de um argumento ou uma trama.*
>
> *[...]*

No entanto, para que o professor possa organizar seu trabalho visando às aprendizagens essenciais aos alunos no Ensino Médio, é necessário considerar que, em todo trabalho pedagógico, a relação entre professor, aluno e saber está pautada em um conjunto de regras nem sempre explícitas. Essas regras emergem exatamente quando há a infração de uma delas, tanto por parte do professor quanto do aluno.

Por isso, há a necessidade de, inicialmente, estabelecer um acordo entre ambas as partes de maneira que tenham direitos e deveres e verifiquem também as responsabilidades de cada uma. A esse acordo, dá-se o nome de contrato didático.

Segundo Brousseau (2008, p. 9),

> *[...] Numa situação de ensino preparada e realizada pelo professor, o aluno em geral tem a tarefa de resolver o problema que lhe é apresentado, por meio da interpretação das questões colocadas, das informações fornecidas, das exigências impostas, que são a maneira de ensinar do professor. Esses hábitos específicos do professor, esperados pelo aluno, e os comportamentos deste, esperados pelo professor, constituem o contrato didático.*
>
> *[...]*

O contrato didático, portanto, pode ser entendido como um instrumento de análise da relação professor, aluno e saber.

Acerca do saber, com base nas ideias de Brousseau, Moretti e Flores (2002), destacam-se quatro elementos importantes:

- A ideia de divisão de responsabilidades: para que se efetive uma relação didática, é necessário que o professor esteja disposto a ensinar e que o aluno também cumpra seu papel no envolvimento com o aprendizado, manifestando seu desejo de aprender.
- A tomada de consciência do implícito: a manutenção das regras implícitas é fundamental para o processo de ensino-aprendizagem. Tomar consciência dessas regras propicia conflitos e espaços para trocas entre os parceiros, porém não é conveniente transformar tudo o que está implícito em explícito.
- A relação com o saber: a característica fundamental de uma relação didática reside na existência de assimetria entre as relações que professor e aluno mantêm com os saberes.
- A construção da comunicação didática: mediante o contrato didático, busca-se descobrir o que favorece ou impede o acesso dos alunos ao conhecimento e o que pode estar bloqueando ou não a entrada destes no processo de aprendizagem.

A quebra das regras contratuais sugere mudanças na relação e, consequentemente, novas configurações, considerando a ação e a reflexão do professor, bem como uma participação mais decisiva dos alunos. De acordo com Silva (1999), a conscientização da normatização contratual, sua explicitação e eventuais rupturas deveriam ser desenvolvidas sempre em consonância com uma ênfase segundo a qual professor e alunos tivessem papel ativo no processo.

Além disso, é necessário que o contrato didático esteja em consonância com a perspectiva pedagógica adotada, visto que é preciso adaptá-lo ao contexto em que está inserido. Se a relação didática se dá em um ambiente de aulas expositivas, o conjunto de regras, explícitas ou não, é diferente, por exemplo, daquele em que o aluno tem participação efetiva no processo de aprendizagem, realizando trabalhos, pesquisas, entre outras ações. Nesse sentido, considerando as orientações quanto ao uso de estratégias que possibilitem ao aluno assumir um papel de protagonista, sendo um sujeito ativo e responsável por sua aprendizagem, é importante que o contrato didático se alinhe a ações e posturas que considerem e favoreçam trocas entre professor e alunos, bem como ajude a manter um ambiente propício ao desenvolvimento.

Segundo o que foi apontado por algumas pesquisas e experiências, a presença do contrato didático tem se mostrado relevante na relação didática. Os bons resultados aparecem à medida que os alunos se sentem responsáveis por seus objetivos e pelos meios de alcançá-los, o que contribui para a prática do professor, que passa a valorizar o uso desse instrumento no processo de aprendizagem.

Assim como o professor tem autonomia para organizar o contrato didático, em conjunto com seus alunos, a organização dos conteúdos também pode ser estabelecida pelo professor, considerando sua formação e sua experiência com o componente curricular Matemática. Dessa maneira, com base em conceitos teóricos e em sua formação, o professor pode determinar qual é a melhor distribuição para os conteúdos ao longo do Ensino Médio, tendo em vista o conjunto de aprendizagens mínimas estabelecidas pela BNCC (BRASIL, 2018) para os alunos do Ensino Médio.

Nesse sentido, desde que considere todas as competências e as habilidades esperadas dos alunos ao concluírem o Ensino Médio, o professor tem autonomia para distribuir os conteúdos ao longo dessa etapa de ensino, ordenando-os e articulando-os da forma que julgar mais adequada, considerando as possíveis relações multidisciplinares e interdisciplinares que podem ser estabelecidas entre os diferentes componentes curriculares. Assim, o planejamento e a organização dos conteúdos podem ser feitos tanto individualmente quanto coletivamente, no contexto da escola, considerando os professores que atuam com o componente curricular de Matemática no Ensino Médio e também os professores de outras áreas do conhecimento. Desse modo, há a contribuição para uma abordagem contextualizada dos conceitos matemáticos e para o desenvolvimento de uma visão integral a respeito da Matemática, de sua aplicabilidade em situações presentes no cotidiano e de seu potencial para leitura, interpretação e transformação do mundo.

Para concluir, o professor deve ser um aliado na formação do aluno/cidadão, e não apenas um transmissor de conteúdo. Além disso, é importante que ele esteja preparado para as contínuas mudanças do cotidiano. Diante de todas as transformações que influenciam a sociedade e o espaço escolar, o professor precisa repensar continuamente seu papel e sua postura em sala de aula, para que possa contribuir para a aprendizagem dos alunos, deixando de ser apenas um transmissor de conteúdos e assumindo uma postura de provedor, orientador e incentivador. Com isso, o professor proporciona aos alunos um ambiente no qual são incentivados a assumir um papel ativo e a desenvolver as competências e as habilidades esperadas para o convívio em sociedade, além de estarem preparados a se adaptarem às mudanças que poderão influenciá-los ao longo da vida.

Cultura de paz, combate à violência e promoção da saúde mental

O ensino de Matemática no Ensino Médio não envolve apenas questões teóricas e conteudistas. Ele é permeado pelo cotidiano dos alunos e pelas relações interpessoais presentes no ambiente escolar, em relação ao professor, aos alunos e aos demais integrantes desse ambiente. Assim, de acordo com Vygotsky (*apud* MOREIRA, 2011), não é possível analisar o ensino e a aprendizagem sem considerar os contextos históricos, culturais e sociais nos quais os alunos estão inseridos. Nesse sentido, a organização do trabalho pedagógico deve considerar os fatores externos e internos que podem integrar o contexto da sala de aula e influenciar as aprendizagens.

Os alunos estão inseridos em uma sociedade na qual prevalece a coletividade, de modo que todos precisam cooperar e respeitar uns aos outros para que seja possível estabelecer uma relação de convivência com vistas a um bem comum. Além disso, ao concluírem o Ensino Médio, eles devem ter desenvolvido diversas competências e habilidades que permitam, entre outras ações, exercer a cidadania e integrar-se ao mercado de trabalho, o que exige o estabelecimento de relações por meio, principalmente, do diálogo, que deve estar presente também no contexto escolar.

Conforme destacado por Freire (1972 *apud* ALRO; SKOVSMOSE, 2010, p. 120-121), o diálogo "[...] é uma forma humilde e respeitosa de cooperar com o outro numa relação de confiança mútua. [...]". Sendo assim, o diálogo consiste em um elemento fundamental para que ocorram as aprendizagens no contexto escolar e o desenvolvimento das competências e das habilidades relacionadas ao aprimoramento do aluno como cidadão. Além disso, com o exercício do diálogo, os alunos podem desenvolver a empatia e o respeito aos demais, contribuindo para inibir e evitar situações de violência no contexto escolar, como é o caso, por exemplo, da intimidação sistemática, conhecida como *bullying*.

De acordo com Fernandes, Yunes e Taschetto (2017, p. 144-145), o "*bullying* é definido como a prática violenta e intencional que causa dor, angústia e sofrimento às vítimas [...] O *bullying* pode causar problemas sérios para quem sofre, pratica ou testemunha. [...]". Francisco e Libório (2009, p. 201) afirmam que, se,

> *[...] por um lado, as vítimas sofrem uma deterioração da sua autoestima, e do conceito que têm de si, por outro, os agressores também precisam de auxílio, visto que sofrem grave deterioração de sua escala de valores [...].*

Para lidar com esse tipo de situação, é importante que o professor busque informações a respeito da temática e converse com os demais atores do processo educativo, como coordenadores pedagógicos e diretores, de modo que todos possam trabalhar em conjunto para enfrentar situações de violência como o *bullying*. É imprescindível que o professor busque informações que lhe permitam identificar situações de violência em sala de aula e lidar com elas, evitando a exposição dos alunos e exercitando a escuta acolhedora, além de contribuir para a resolução dos problemas e a superação das situações de crise. Desse modo, o professor evita intimidações entre os alunos, caso existam, uma vez que episódios desse tipo, além de serem prejudiciais aos envolvidos, podem influenciar negativamente na aprendizagem e no convívio escolar.

Durante o ensino da Matemática, é possível desenvolver atividades que incentivem a cultura de paz, o combate à violência e a promoção da saúde mental por meio de algumas estratégias metodológicas que contribuem para evitar situações de conflito e violência, pois são criados espaços nos quais é incentivado o desenvolvimento da empatia, do respeito, dos valores humanos e da reflexão sobre os conflitos.

O desenvolvimento de atividades – como a realização de trabalhos cooperativos baseados na resolução de problemas, investigações, modelagem matemática, desenvolvimento de projetos, dinâmicas de grupos, entre outras – pode ser um importante aliado do combate às situações de violência. Tais atividades, além de serem empregadas em diferentes momentos e no trabalho com os mais variados conteúdos, mantendo o foco na aprendizagem dos conceitos matemáticos essenciais para o Ensino Médio, podem favorecer a construção de um ambiente no qual prevaleça o respeito mútuo, por meio da realização de trabalhos em grupos e pela participação ativa de todos os alunos, que se tornam atores principais no desenvolvimento das atividades.

Assim, é possível aliar o estudo dos conhecimentos teóricos com o desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas ao convívio social, contribuindo para a formação de indivíduos capazes de se relacionarem socialmente e de manterem o respeito em relação aos demais integrantes da sociedade e aos contextos nos quais estão inseridos.

As situações de violência não ocorrem somente em relação a terceiros, mas podem também ser autoprovocadas, principalmente no que se refere às tentativas de suicídio e automutilação. Por esse motivo, é importante que o professor busque acompanhar, a todo o momento, o comportamento dos alunos e sua interação com professores e colegas, observando se houve alguma mudança de comportamento e estando atento às situações, como o distanciamento social de algum aluno em sala de aula, que pode representar um problema de relacionamento ou, em situações mais graves, pensamentos de violência autoprovocada.

Por isso, além de organizar o trabalho pedagógico no que se refere a conceitos matemáticos, é importante que o professor proponha situações de aprendizagem que o aproximem dos alunos e que lhe permitam conhecê-los melhor, a fim de identificar possíveis situações críticas e tentar evitá-las, pois, além de formação técnica, o Ensino Médio deve ser orientado à formação de um indivíduo em todos os seus aspectos (BRASIL, 2018), especialmente nos sentidos social e emocional.

Conforme indica Costa, Figueiredo e Ribeiro (2013 *apud* SILVA *et al.*, 2019, p. 135), a escola não deve objetivar

> *[...] ser apenas um lugar onde se produz educação e conhecimento de forma eficaz, mas um lugar onde exista interesse e que haja saúde de todos os seus membros. A educação em saúde na escola dá-se mediante o processo onde se busca colaborar para a formação de um pensamento crítico do estudante, que tenha como resultado a aquisição de práticas que visem promover, manter e recuperar a própria saúde.*
>
> *[...]*

Quando se discute a respeito de saúde, é necessário considerar tanto os fatores físicos quanto os psicológicos. Sendo assim, é preciso que no Ensino Médio sejam desenvolvidas atividades que promovam a saúde mental dos alunos, e não apenas a aprendizagem dos conceitos essenciais. A articulação entre saúde mental e desenvolvimento cognitivo é um aspecto importante a ser considerado, visto que não é possível pensar em aprendizagem se não houver, entre outros elementos, uma predisposição do aluno em aprender, além de seu envolvimento com as atividades propostas.

No contexto da Matemática, considerando a necessidade da promoção da saúde mental, é importante articular várias estratégias metodológicas, propor tipos distintos de atividade, pois cada aluno tem um ritmo de aprendizagem diferente, e procurar sempre valorizar as produções realizadas mostrando a eles que o erro pode ser utilizado não como um fator negativo, mas como um mecanismo de autorregulação capaz de contribuir para a aprendizagem.

A fase da adolescência e a transição para a vida adulta são momentos delicados na vida e resultam em experiências diferentes para cada pessoa. Além de ser uma etapa na qual os indivíduos vivenciam novas experiências, esses períodos revelam possíveis vulnerabilidades, em que as pessoas precisam lidar com situações conflituosas (SILVA *et al.*, 2019), pois estão formando sua personalidade e precisam fazer escolhas importantes em relação ao futuro, como a escolha de uma profissão e a participação em exames de larga escala, como é o caso do Enem e das provas de vestibulares. Dessa maneira, na organização do trabalho pedagógico, é importante que o professor também considere esse tipo de situação e organize propostas que considerem o momento de vida dos alunos em conjunto com a formação mínima necessária, buscando contribuir para a aprendizagem deles e, ao mesmo tempo, considerando a promoção de sua saúde mental.

O ensino de Matemática no Ensino Médio deve oferecer aos alunos as condições necessárias para se tornarem indivíduos capazes de assumir seus papéis na sociedade de maneira adequada, utilizando seus conhecimentos teóricos a fim de contribuir, por exemplo, para a resolução dos problemas que podem surgir e para o exercício da profissão escolhida, e que possam promover uma cultura de paz e de respeito ao próximo, em sua família, em sua comunidade, em seu trabalho e em todos os contextos nos quais ele se insira.

Para que essa formação possa ser efetivada, é essencial que a escola se torne um ambiente de promoção da cultura de paz, nas mais variadas atividades realizadas e entre todas as pessoas envolvidas: alunos, professores, diretores, supervisores, entre outros. Desse modo, vivenciando um ambiente no qual as relações humanas sejam respeitadas, em que situações críticas sejam resolvidas por meio do diálogo e da reflexão e onde a violência não seja promovida, os alunos poderão desenvolver as competências e as habilidades que lhes permitirão contribuir para que a cultura de paz se propague também fora do ambiente escolar, ou seja, em sociedade e na própria vida.

Pensamento computacional

A evolução tecnológica impactou significativamente nossa sociedade nos últimos anos. O uso da tecnologia, mediado pela internet, tem tomado cada vez mais espaço na rotina dos jovens, seja para comunicação pelas redes sociais, seja para se atualizarem por meio de notícias e informações publicadas na *web*. O desenvolvimento do pensamento computacional ganhou destaque nesse processo, pois está associado ao uso adequado e direcionado das tecnologias, de modo a incentivar as capacidades criativa, crítica e estratégica, contribuindo para desenvolver habilidades relativas aos fundamentos da computação, aplicando-os nas mais diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de resolver problemas de maneira individual e colaborativa (OLÍMPIO JUNIOR; VILLA-OCHOA, 2013; SILVA, 2019).

Em outras palavras, o pensamento computacional está relacionado ao pensamento analítico e ao raciocínio dedutivo, que envolvem a Lógica e a Matemática. Podemos ainda mencionar que o pensamento computacional pode contribuir com a resolução de problemas, bem como tornar os alunos hábeis a fazer uma representação geométrica ou, ainda, solucionar sistemas aplicando corretamente as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDICs), o que vai ao encontro da **Competência específica 4** da área de **Matemática e suas Tecnologias** (BRASIL, 2018). Dessa maneira, é necessário incentivá-los a fazer uso dessas tecnologias como uma alternativa para a aprendizagem, com o intuito de transformar problemas e/ou situações considerados de difícil resolução em um processo compreensível e que possam ser resolvidos com mais facilidade.

O pensamento computacional tem como base quatro pilares – decomposição, reconhecimento de padrões, abstração, algoritmo (LIUKAS, 2015) – que orientam o processo de solução de problemas. Assim, quando nos deparamos com um problema, sua solução pode ser pensada computacionalmente. Em outras palavras, é preciso analisar o problema e dividi-lo em partes menores, por meio da **decomposição**, aumentando a atenção aos detalhes. Na sequência, ocorre o **reconhecimento de padrões** nos problemas decompostos, identificando similaridades em diferentes processos para solucioná-los de maneira mais eficiente e rápida. Já pela **abstração**, buscamos uma solução que possa ser válida em mais de um problema e o que pode ser ignorado. Por fim, verificamos os procedimentos necessários para solucionar o problema, pensando assim no **algoritmo**.

No universo da Educação Básica, o uso do computador pode consolidar e aprofundar conhecimentos, habilidades, atitudes e valores desenvolvidos no ensino que estejam relacionados à área de **Matemática e suas tecnologias**. Nesse viés, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 474) menciona que o

> *pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos.*
>
> [...]

O pensamento computacional no cotidiano escolar

O mundo digital engloba métodos para a solução de problemas baseados nos fundamentos e técnicas computacionais, consistindo em uma forma de incentivar o raciocínio lógico. Desse modo, no âmbito da educação, os alunos podem desenvolver o pensamento computacional conforme a afinidade que tenham com a tecnologia, aprimorando assim técnicas como a abstração e a organização. Em relação a essa afinidade, Prensky (2010) aponta duas gerações distintas: os nativos digitais e os imigrantes digitais. Os primeiros são a geração que já nasceu em uma cultura digital, ou seja, há compatibilidade tecnológica de maneira intuitiva e orgânica. Já os imigrantes digitais, embora façam uso dos aparatos tecnológicos, não têm a mesma aptidão dos nativos, pois precisam se adaptar a esse uso.

O uso da tecnologia tem modificado a maneira de pensar e de viver em sociedade, isso porque não há espaço para um ensino desconectado da realidade, pois vivemos a era da informação. As gerações mais novas, desde muito cedo, já estão em contato com a tecnologia, realizando atividades complexas de maneira muito simples.

> *[...] com o avanço das tecnologias digitais e a consequente facilidade de acesso à informação, a escola já não é a única fonte de conhecimento disponível para as pessoas. Por meio do desenvolvimento dos computadores, smartphones, tablets e internet, pode-se aprender em qualquer lugar e a qualquer hora. Contudo, o papel da escola não termina, mas se expande, e cabe a ela direcionar e capacitar os alunos a explorar responsavelmente esses novos caminhos.*
>
> *[...] (SUNAGA; CARVALHO, 2015, p. 141).*

Nessa perspectiva, torna-se importante propor aulas com o uso de tecnologias digitais de informação e comunicação, incentivando os alunos a desenvolver diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático (indução, dedução, abdução e raciocínio por analogia) por meio de diversos problemas, atividades e vivências, especialmente para promover práticas (orais e escritas) de argumentação e inferência. Um dos desafios do processo educativo, mediado pelo uso dessas tecnologias, consiste em construir respostas às demandas colocadas por um contexto social, econômico e cultural, ou seja, reconhecer suas potencialidades para propor e/ou implementar soluções (BRASIL, 2018).

Para garantir a aprendizagem, além de desenvolver as habilidades cognitivas (ler, escrever e fazer operações matemáticas), no intuito de atingir bons resultados, é necessário incentivar e proporcionar o conhecimento para o exercício da cidadania, fazendo uso do pensamento computacional. Nesse viés, consideramos aliados do processo de ensino a alfabetização e o letramento digital, assegurando o desenvolvimento, do ponto de vista matemático e computacional, da análise crítica, criativa e propositiva de temas relacionados aos princípios éticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social.

Para explorar e promover ainda mais o contato dos alunos com o pensamento computacional ao longo da Educação Básica, é possível fazer uso de alguns recursos, que podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico e incentivar o desenvolvimento de noções gerais de programas de computador. Nesta coleção são utilizados alguns desses recursos, como o VisualG, a planilha eletrônica Calc da LibreOffice e o GeoGebra, todos gratuitos e desenvolvidos na seção **Acesso digital**. Tais recursos, assim como tarefas específicas e a seção **Explorando problemas**, que são trabalhadas ao longo da coleção, possibilitam construir e analisar planilhas, gráficos, algoritmos e fluxogramas.

O VisualG, por exemplo, permite criar, editar, interpretar e executar algoritmos. Além disso, incentiva os alunos a desenvolver a lógica e a programação, pois é elaborado especialmente para iniciantes. Na coleção, são dadas instruções para utilizá-lo e tarefas para colocar em prática a aprendizagem.

Já a seção **Explorando problemas** e algumas tarefas específicas da seção **Problemas e exercícios resolvidos** e **Problemas e exercícios propostos** são organizadas de modo que não há necessidade de utilizar recursos tecnológicos, pois nelas é preciso que os alunos as resolvam por meio do raciocínio – representando, comunicando e argumentando. Além disso, em **Explorando problemas** são apresentadas cada etapa da resolução, mobilizando conhecimentos e habilidades com o objetivo de identificar conceitos e conceber um processo de resolução, desenvolvendo, assim, o pensamento computacional.

Para concluir, propomos a necessidade de praticar o pensamento computacional, com o intuito de mostrar que os meios tecnológicos têm desempenhado um papel importante ao atender algumas das necessidades dos professores e alunos, dando continuidade nos processos de ensino e aprendizagem. Além disso, é possível desenvolver esse pensamento por meio de tipos de abordagens diferentes. Por fim, torna-se importante compreender que o pensamento computacional pode ser mobilizado dentro e fora do ambiente escolar.

Metodologias e estratégias ativas

A atual sociedade globalizada e informatizada tem exigido mudanças significativas na educação, destacando-se a importância da aprendizagem ativa, que considera os alunos como protagonistas dessa ação, que exige responsabilidade, pois é algo compartilhado com o professor. Esse modelo de aprendizagem baseia-se na participação ativa dos alunos em um conjunto de atividades, como resolver problemas, desenvolver projetos, conjecturar, modelar situações, ler, escrever, perguntar, discutir e participar de seminários. Portanto, faz-se necessário que o professor torne-se mediador, orientador e supervisor, promovendo um ambiente que possibilite aos alunos desenvolver a autonomia e assumir o protagonismo nos processos de sua aprendizagem. Para isso, pesquisadores sugerem o uso de diferentes estratégias, que têm como objetivo envolver e engajar os alunos ativamente em todas as etapas. Entre os benefícios do uso dessas estratégias, estão:

> *[...] o protagonismo estudantil, a apreensão das informações mediadas, habilidades comunicacionais, habilidades de raciocínio avançadas, trabalho em equipe, motivação, novos recursos de aprendizagem e respeito aos vários estilos de aprendizagem. [...] (MOREIRA; RIBEIRO, 2016, p. 97).*

Esta coleção possibilita que o professor desenvolva experiências definidas por um conjunto de atividades, levando os alunos a realizar algo e a refletir sobre o que estão fazendo, interagindo com o assunto em estudo, de modo dinâmico, e não apenas recebendo a informação do professor de maneira passiva.

Entre as diferentes estratégias de aprendizagem, elencamos algumas possibilidades, como **Sala de aula invertida**, **Rotação por estações** e **estação laboral**, **Seminários**, **Fishbowl**, **Gallery Walk**, **Modelagem matemática** e **Tecnologias digitais de informação e comunicação** (TDICs).

A seguir, destacamos características dessas metodologias ativas e sugerimos seções do livro que apresentam potencialidades para desenvolvê-las.

Sala de aula invertida

Nessa metodologia, também conhecida como **Flipped classroom**, os alunos são desafiados a estudar os conteúdos básicos em casa, por meio de vídeos, textos, pesquisas, entre outros suportes, para que posteriormente, em sala de aula, o professor esclareça dúvidas, problematize e complemente o conteúdo com discussões e atividades práticas. A **Sala de aula invertida** também permite trabalhar as dificuldades dos alunos, não apenas apresentar meramente o conteúdo a ser estudado. Segundo Valente (2014, p. 86), ao usar essa estratégia, o professor tem que cumprir algumas regras, a saber:

> *[...] 1) as atividades em sala de aula envolvem uma quantidade significativa de questionamento, resolução de problemas e outras atividades de aprendizagem ativa, obrigando os alunos a recuperar, aplicar e ampliar o material aprendido [....];*
>
> *2) os alunos recebem* feedback *imediatamente após a realização das atividades presenciais. [...].*

O uso dessa metodologia em sala de aula requer que o professor tenha em mente seus objetivos e planeje com antecedência as tarefas que serão realizadas pelos alunos. Ainda com base em Valente (2014), o fato de os alunos terem contato com o material antes da aula permite a eles que trabalhem no próprio ritmo e tentem desenvolver ao máximo a compreensão em torno do que estão estudando. Além disso, esse primeiro contato dá a eles motivação antecipada para a aula,

> *[...] com isso, o aluno pode entender o que precisa ser mais bem assimilado, captar as dúvidas que podem ser esclarecidas em sala de aula e planejar como aproveitar o momento presencial, com os colegas e com o professor. [...] (VALENTE, 2014, p. 92).*

O planejamento deve ser feito com base nos conteúdos propostos no volume, mas de maneira criativa, com o intuito de incentivar os alunos a buscar conhecimento e descobrir caminhos para seu aprendizado. Nesse sentido, a **Sala de aula invertida** torna a aprendizagem mais significativa e permite que os alunos se tornem protagonistas de sua aprendizagem.

Uma dúvida que pode ocorrer ao professor é a possibilidade de desenvolver essa estratégia tendo como base o livro didático. Isso pode ser feito utilizando os contextos das páginas de abertura, das seções **Explorando problemas**, **Saiba mais** e **Conectando ideias**. Na abertura de cada um dos capítulos, são tratados assuntos contextualizados relacionados aos conceitos trabalhados no capítulo. Utilizando a **Sala de aula invertida**, o professor pode solicitar aos alunos que leiam o material disponibilizado na seção, além de sugerir vídeos introdutórios sobre o tema problematizado, o que vai ajudá-los a responder às perguntas propostas. Também pode pedir a eles que anotem as principais ideias e o que entenderam sobre os vídeos e a leitura, uma vez que essa atividade deve ser realizada antecipadamente pelos alunos em casa. Outra possibilidade é que eles tragam para a sala de aula questões sobre o tema e que estas sejam apresentadas à turma, pois assim estão assumindo o papel de debatedores durante a discussão. Na aula, pode-se discutir os pontos e as anotações realizadas pelos alunos, promovendo uma reflexão em torno da relação entre esse tema e o conceito. Tal discussão deve ser orientada de maneira que, ao final, eles consigam responder às questões propostas e tenham um conhecimento preliminar sobre o conceito, mas, naturalmente, o resultado da discussão poderá abarcar outras questões trazidas por eles e não constantes no livro. Dessa maneira, é importante ressaltar que se trata apenas de uma possibilidade, pois a **Sala de aula invertida** pode ser utilizada no momento que o professor julgar conveniente e utilizar as seções ou boxes do livro que melhor se alinhem a seus objetivos.

Rotação por estações e estação laboral

Metodologia que consiste em organizar os alunos em grupos que se revezam dentro do espaço preparado pelo professor (estações), podendo ser em sala de aula ou não, ou seja, dá oportunidade para que sejam utilizados outros espaços.

Essa estratégia requer do professor organização prévia do ambiente, com estações específicas de trabalho e programação fixa, para que os alunos façam um rodízio nessas estações, de acordo com o tempo fixo preestabelecido. Um desses pontos específicos deve incluir uma tecnologia digital e os outros podem inserir atividades, como instruções para pequenos grupos ou para todos os alunos a um só tempo, projetos em grupo, tutoria individual ou, ainda, tarefas escritas (SOUZA; ANDRADE, 2016). Cada estação deve conter uma atividade diferente e que não dependa uma da outra, mas ainda assim com um objetivo central e que se refira ao mesmo conteúdo.

A quantidade de estações que o professor vai formar está relacionada ao total de alunos da turma. Sugere-se que quanto maior a turma mais estações sejam formadas, de maneira que os grupos não tenham uma quantidade grande de alunos. O uso dessa estratégia permite que o professor identifique e analise o desempenho individual e do grupo sobre o que foi apresentado em cada uma das estações. Para tal, é preciso definir os objetivos de cada estação, de acordo com os resultados que se deseja alcançar e com a atividade proposta na estação. Soares *et al.* (2019) destacam que a **Rotação por estação laboral** é parecida com a **Rotação por estação**, a diferença é que a primeira inclui o laboratório de informática.

Além disso, os estudantes que forem direcionados ao laboratório trabalham de modo autônomo, cumprindo os objetivos que o professor propuser, com sua orientação ou por meio de um tutor.

Diante do exposto, pode-se afirmar que ambas as metodologias permitem que os alunos se tornem ativos no processo de aprendizagem. Visando a essa aprendizagem ativa, como podemos desenvolver tal estratégia utilizando o livro didático? Entre as possibilidades, o professor pode usar, por exemplo, a seção **Acesso digital**, que propõe o uso de *softwares* de Geometria dinâmica, planilhas, linguagem de programação, entre outros suportes, para desenvolver certas potencialidades de conceito. Desse modo, pode-se utilizar essa seção e empregar a metodologia **Rotação laboral** fazendo uso do laboratório de informática. Por exemplo: o professor pode criar uma estação em que os alunos façam uma tarefa por escrito sobre determinado conteúdo; outra estação em que é proposta a eles a mesma tarefa, mas utilizando materiais diversos, como malhas quadriculadas e réguas; outra, contendo um jogo matemático sobre o conteúdo da tarefa; e, por último, uma estação no laboratório de informática, onde os alunos poderão praticar o conceito trabalhado nas estações anteriores e que está sugerido na seção **Acesso digital**.

Caso utilize a **Rotação por estação laboral**, é necessário verificar se a escola possui um laboratório de informática que contenha computadores com o *software* desejado instalado. Caso não o tenha, *smartphones* podem ser usados, pois alguns *softwares*, como o GeoGebra, também estão disponíveis para esses dispositivos gratuitamente, porém com algumas diferenças em determinadas funcionalidades.

Seminários

Os **Seminários**, como metodologia ativa de aprendizagem, pressupõem o uso de técnicas, geralmente uma dinâmica em grupo, para estudar determinado assunto. Envolvem, além de uma pesquisa por parte dos alunos, discussões e debates sobre o tema escolhido. O professor pode optar por realizar um seminário individual ou em grupo, sendo este o mais comum. Por isso, é importante criar um ambiente propício às discussões.

Marconi e Lakatos (2017) destacam que, além de desenvolver habilidades de pesquisa, essa estratégia proporciona aos alunos a reflexão sobre o assunto estudado, pois eles ficam responsáveis por pesquisar e organizar e expor suas ideias para a turma, o que contribui para o desenvolvimento da autonomia e da habilidade de argumentação. Dessa maneira, os seminários em aulas de Matemática podem levar os alunos a procurar relações entre os conceitos matemáticos e as situações do cotidiano, e boxes como **Conversando** e **Finalizando a conversa** ajudam no estabelecimento dessa relação. Por exemplo, pode ser proposto um seminário sobre determinado conteúdo a ser abordado no capítulo e cada grupo fica responsável por apresentar informações elencando características, diferenças e situações do dia a dia em que esses conceitos estão presentes.

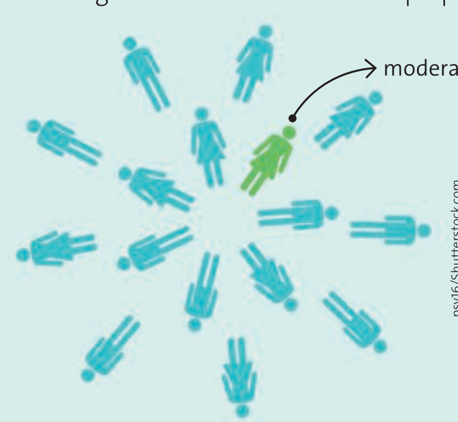
Outra possibilidade é sugerir aos alunos que se dividam em grupos, pesquisem as perguntas propostas nos boxes já mencionados e, posteriormente, apresentem os resultados à turma. Nesse sentido, o professor sugere um seminário sobre o conteúdo das questões e, para a apresentação, fica combinado que eles podem usar recursos como cartazes ou apresentações mais elaboradas em ferramentas virtuais, como a construção de uma apresentação em *slides*, com as principais informações da pesquisa. Esta última opção é válida se a escola disponibilizar projetores. Outra sugestão é que os alunos produzam vídeos sobre as questões trabalhadas. É importante ressaltar que tal estratégia pode ser utilizada com base em outras seções ou boxes dessa coleção.

Fishbowl

A metodologia **Fishbowl**, conhecida como "método aquário", é uma estratégia de aprendizagem interativa, que tem como objetivo apoiar a discussão em grupo e possibilitar que os alunos exponham suas opiniões a respeito de determinado assunto. Além disso, permite a troca de experiência entre os participantes e que os alunos revisem o conteúdo, propiciando o protagonismo deles e a aprendizagem colaborativa. Segundo Graminha (2019, p. 86), essa estratégia requer a organização do ambiente

> *[...] de modo que alguns estudantes ocupem um círculo central dentro de um círculo externo [...] onde discutem temas relacionados ao seu aprendizado, previamente proposto pelo professor. A discussão é iniciada pelos alunos que ocupam o círculo central e observada pelos alunos do círculo externo, que caso queiram participar da discussão podem ocupar o espaço do círculo central substituindo um participante. [...].*

É necessário ainda ter um moderador, no caso o professor, para instigar e direcionar a discussão proposta.



Nessa coleção, uma possibilidade é que o professor use os questionamentos propostos nos boxes **Você cidadão** e **Conversando**, pois ambos contêm questões que favorecem a discussão sobre diversos temas da atualidade, especialmente o **Você cidadão**.

Como sugestão, o professor pode solicitar aos alunos que conversem com seus familiares sobre o tema em questão e, na aula, expressem essas informações posicionando-se criticamente. Para esse momento, os alunos devem ser divididos em dois grupos – sendo um grupo menor, que vai ocupar o círculo central, e outro ocupando os lugares do círculo maior. É necessário deixar uma cadeira vazia no círculo central e, se algum aluno do círculo maior quiser contribuir com o debate, deve levantar-se em silêncio e sentar na cadeira vazia. Para isso, um integrante do círculo central precisa voluntariar-se e ir para o círculo maior, pois é necessário que sempre haja uma cadeira vazia para aqueles que queiram contribuir com a discussão. Para utilizar essa estratégia, o professor precisa de espaço onde as cadeiras consigam ficar dispostas em dois círculos.

Situações que envolvem temas como os propostos no boxe **Você cidadão** contribuem para o desenvolvimento da **Competência geral 10** ao levar os alunos a agir pessoal e coletivamente, com autonomia e responsabilidade, tomando decisões com base em princípios éticos e democráticos.

Gallery walk

Gallery walk, também traduzida como "A caminhada na galeria", é uma metodologia cooperativa, em que os alunos têm papel ativo no processo de aprendizagem, permitindo que eles discutam variados assuntos com os colegas, o que favorece o desenvolvimento de habilidades como investigação, avaliação, síntese, colaboração e trabalho cooperativo.

Para o desenvolvimento dessa metodologia, o professor pode dividir a turma em grupos, que receberão um tema previamente escolhido para discutirem e/ou pesquisarem. Após isso,

> *[...] cada grupo elabora um cartaz acerca do tema e, em seguida, são redistribuídos em novos grupos com um integrante de cada grupo anterior. Os cartazes são colocados nas paredes e os novos grupos irão se deslocar pela sala de aula visitando os cartazes, e cada estudante que parar em frente do cartaz que ajudou a elaborar deve apresentá-lo, ensinando os seus colegas. [...] (REIS* et al.*, 2019, p. 108).*

Diante das potencialidades dessa estratégia, como podemos desenvolvê-la tendo como base o livro didático? Entre as várias possibilidades, o professor pode utilizar as seções **Saiba mais** ou **Conectando ideias**. Na primeira, por exemplo, são apresentados textos e imagens envolvendo o conteúdo em estudo, relacionados a outras áreas do conhecimento, como Química, Física e Biologia, que podem servir como base para a realização da pesquisa e/ou discussão. Uma sugestão de trabalho é que o professor organize os alunos em grupos e solicite que cada um interprete as informações fornecidas na seção, relacionando o contexto com a Matemática. Além disso, pode-se solicitar que eles façam uma pesquisa sobre os assuntos envolvidos na seção e, em seguida, elaborem cartazes para mostrar os resultados de suas pesquisas e os exponham na sala de aula.

Por fim, o professor também pode solicitar aos alunos que anotem anonimamente, em um pequeno pedaço de papel, suas opiniões sobre a pesquisa realizada em cada grupo. Ao final da exposição, é importante que seja efetuada uma discussão entre professor e alunos sobre os pontos mais relevantes de cada cartaz.

Modelagem matemática

Podemos afirmar que a **Modelagem matemática** implica em criar um modelo, sendo este um padrão ou uma fórmula, para explicar, compreender ou interpretar um fenômeno natural, tornando o processo de aprendizagem mais significativo, pois os conteúdos estudados são aplicados no dia a dia dos alunos em fenômenos que podem ser de qualquer área do conhecimento.

Bassanezi (2002, p. 18) menciona o uso da Matemática em uma colocação sobre a Modelagem matemática:

> *O objetivo fundamental do "uso" de Matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camuflados num emaranhado de variáveis de menor importância.*

A **Modelagem matemática**, como metodologia, apresenta uma proposta de ensino na qual os alunos são levados a relacionar determinadas situações reais com a Matemática. Nesse sentido, eles são incentivados a problematizar ou investigar situações do cotidiano que geram reflexões sobre a presença da Matemática e usá-la para explicar tais situações.

Ao utilizar a Modelagem matemática durante as aulas, o professor as torna mais motivadoras, despertando nos alunos o interesse e a criatividade, bem como proporciona a eles o avanço na aprendizagem.

Com esse trabalho, é possível mostrar aos alunos a utilidade diária da Matemática e também relacioná-la com outras áreas do conhecimento, por exemplo, na produção de alimentos, na descrição de um fenômeno natural, em uma situação que envolva a Medicina, na aplicabilidade na criação de animais, no comércio, na construção civil, tudo por meio de observação de padrões e obtenção de fórmulas auxiliares.

O papel do professor que faz uso dessa metodologia de ensino é o de orientador, podendo, por exemplo, sugerir alguns temas aos alunos, que estarão organizados em grupos e farão pesquisas, coleta de dados, investigações, levantamento de hipóteses, análise das soluções encontradas e, por fim, validarão o modelo construído de acordo com o tema proposto. Durante o processo de trabalho, o professor esclarece dúvidas, orienta, faz sugestões e apontamentos para nortear os alunos quanto ao desenvolvimento do processo.

Um exemplo prático é propor à turma a análise de vários tipos de embalagens usadas no comércio local, e pesquisar e relatar qual delas têm o maior volume e o menor custo de matéria-prima.

Em outro exemplo, pode-se buscar a medida da altura de determinada caixa (base de formato retangular, circular, quadrado etc.) para que o volume seja o máximo. A partir dos resultados, o respectivo gráfico é construído e também é definido o formato ideal de determinada embalagem.

Diante das potencialidades dessa estratégia, como podemos desenvolvê-la tendo como base o livro didático? Entre as várias opções, o professor pode utilizar as seções **Explorando problemas, Conectando ideias** e até mesmo por meio de problemas contextualizados, que são apresentados na seção **Problemas e exercícios propostos**. Cabe a ele, então, avaliar a situação e adequá-la à realidade em que se encontra para desenvolver o trabalho com a Modelagem matemática. Desse modo, o processo de aprendizagem se torna mais motivador e desafiador para os alunos.

Tecnologias digitais de informação e comunicação (TDICs)

A cada dia o uso das tecnologias digitais da informação e da comunicação se torna mais presente no processo de ensino e aprendizagem. Segundo a BNCC (BRASIL, 2018, p. 528), no Ensino Médio, o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos alunos do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos e pela potencialidade das mídias sociais. Nesse contexto, destaca-se a importância de fazer uso dos recursos das tecnologias digitais e aplicativos, tanto para a investigação matemática como para o desenvolvimento do pensamento computacional. Destaca-se também que é mais importante saber usar os recursos digitais do que deixar de usá-los. Para isso, torna-se fundamental que os alunos usem adequadamente computadores, calculadoras científicas, *softwares*, aparelhos celulares e aplicativos. Esses alunos, como instrumentos de aprendizagem escolar, precisam se familiarizar e se atualizar com as novas tecnologias digitais, munindo-se dos conhecimentos tecnológicos para as demandas sociais presentes e futuras. Contudo, é necessário que qualquer recurso didático seja integrado a situações que os levem ao exercício da análise e da reflexão. Não basta visar à capacitação dos alunos para futuras habilitações em termos das especializações tradicionais, mas também formá-los para que possam desenvolver novas competências, em função da constante evolução que se espera de um novo profissional, capaz de lidar com novas tecnologias e linguagens e responder satisfatoriamente a novos ritmos, processos e desafios.

O uso adequado de tecnologias digitais na sala de aula favorece o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas de ordem mais complexa, em determinadas situações, possibilitando que os alunos explorem a aplicabilidade do conhecimento adquirido. Nesta coleção, o professor pode explorar as tecnologias digitais, por exemplo, na seção **Acesso digital**, na qual eles têm a oportunidade de lidar com alguns procedimentos digitais em conjunto com tarefas relacionadas aos conteúdos trabalhados no capítulo. O objetivo é levá-los à familiaridade com o uso das tecnologias e tornar presentes diferentes *softwares*, de planilhas e de linguagem da programação, no desenvolvimento das aulas, contribuindo de maneira efetiva com a construção do conhecimento matemático dos alunos. Uma sugestão para trabalhar com essa seção é realizar uma aula no laboratório de informática ou, em alguns casos, com aplicativo nos *smartphones*, caso o professor julgue conveniente. Em um primeiro momento, ele explica aos alunos as funcionalidades da ferramenta e depois permite que eles a explorem e a conheçam. Depois, pode propor aos alunos que desenvolvam as tarefas presentes na seção, além de preparar outras que julgar necessário. Ao final da aula, é importante realizar uma sistematização dos conceitos vistos durante o uso da tecnologia envolvida.

Essa metodologia, alinhada com essa seção, contempla a **Competência geral 7**, pois possibilita a produção do conhecimento e a resolução de problemas utilizando tecnologias digitais.

Ao utilizar esses recursos em sala de aula, é importante verificar com antecedência a disponibilidade do laboratório de informática e se os *softwares* que serão usados estão disponíveis nas máquinas ou, ainda, avaliar a possibilidade de usar *smartphones* e se há aparelhos em quantidade suficiente. Em caso negativo, é necessário organizar os alunos em grupos ou duplas para fazer a atividade.

Algumas considerações

O professor pode utilizar outras metodologias ativas de ensino em que o aluno se torna o protagonista do processo de aprendizagem, aqui não destacadas. Independentemente de qual seja utilizada, é importante que se planeje e estruture as propostas que serão desenvolvidas com antecedência, deixando claro aos alunos a maneira de cada metodologia ser trabalhada, estabelecendo algumas regras entre professor e alunos. Nesses tópicos, foram apresentadas algumas possibilidades, sugestões de seções e alguns boxes, que favorecem o desenvolvimento das tarefas e estratégias. Outro ponto importante é que elas podem ser utilizadas no momento em que o professor julgar mais conveniente e aplicadas em associação a outras seções ou boxes do livro. Devemos lembrar que os recursos digitais e as metodologias ativas são ferramentas auxiliares na personalização da aprendizagem, permitindo que os alunos aprendam no seu ritmo, de acordo com os conhecimentos que já tenham, facilitando o avanço na aprendizagem.

Avaliação

Quando pensamos em avaliação, podemos partir do pressuposto de que avaliar consiste em algo essencial às atividades humanas, isto é, em diferentes situações, independentemente da posição que ocupe, o ser humano terá de definir critérios, estabelecer relações e tomar decisões. Em razão disso, é fato que a avaliação está presente em toda proposta educacional. Contudo, ainda assim, consiste em algo complexo e polêmico, passível de críticas e controvérsias.

No âmbito da Educação Matemática, a avaliação pensada como algo isolado, estanque, como um fim em si mesmo, sem considerar os processos de ensino e aprendizagem desenvolvidos, é encarada como insatisfatória. Nessa modalidade de avaliação, um dos instrumentos, e às vezes o único, é a prova mensal ou bimestral, utilizada para quantificar o conhecimento dos alunos. Nelas, de modo geral, eles são levados a resolver problemas e questões semelhantes aos propostos durante as aulas. Em razão de sua forma, tal instrumento não consegue a abrangência necessária dos elementos a serem avaliados – conhecimentos, habilidades, atitudes, valores etc. Consequentemente, terá mais sucesso o aluno que coincidentemente tiver estudado os conteúdos correspondentes aos propostos na prova, enquanto será baixa a nota daquele que optou por se dedicar mais a outros conteúdos.

A avaliação que assume essas características é denominada somativa, a qual está relacionada prioritariamente à identificação de um desempenho pontual dos alunos. Quando observamos os processos ocorridos no ambiente escolar, muitas vezes identificamos que a escola e seus professores reforçam, no processo avaliativo, alguns aspectos negativos, como

> *[...] foco na classificação, caráter de exclusão, autoritarismo, avaliação de perspectiva individual, destaque para a memorização, valorização do quantitativo e busca por apenas um bom resultado na prova. [...]. (PAIXÃO, 2016, p. 5).*

Essas são algumas características da avaliação somativa e que reforçam sua preocupação em gerar resultados, como “aprovado” ou “reprovado”, ou, ainda, de valores numéricos correspondentes ao desempenho dos alunos, ou seja, notas.

Esse tipo de avaliação não é suficiente quando o interesse do professor vai além da atribuição de notas e classificação dos alunos. Considerando que a proposta do Ensino Médio esteja relacionada à construção de conhecimentos, desenvolvimento de habilidades, atitudes e valores, de acordo com o conjunto de aprendizagens mínimas estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), é importante que a avaliação integre o trabalho pedagógico, não sendo exclusiva apenas para desenvolvimento em momentos pontuais, como fechamentos de bimestres e semestres, mas coerente com os objetivos estabelecidos pelo professor.

No entanto, ao longo de sua formação, principalmente no Ensino Médio e após sua conclusão, os alunos serão colocados diante de avaliações de caráter somativo, como os exames de larga escala, entre eles as provas de vestibular e do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Esses exames têm relação direta com a avaliação somativa, por estarem alinhados a seu objetivo principal de classificar os alunos para o ingresso em cursos superiores. Assim, apesar de não ser suficiente para acompanhá-los no Ensino Médio, a avaliação somativa será vivenciada pelos alunos ao longo de seu percurso nessa etapa de ensino. Por isso, também precisa estar presente nos ambientes escolares, não exclusiva mas integrada aos demais tipos de avaliação.

Em contraposição a essa forma de avaliar, prioritariamente pontual, na Educação Matemática são valorizadas as abordagens voltadas à avaliação contínua, mediante a valorização daquilo que os alunos sabem do todo, algo que é visto como parte do processo de ensino e aprendizagem, vinculada a um projeto pedagógico coerente em relação a suas finalidades. Segundo Rabelo (1998, p. 11), a "[...] avaliação é inerente e imprescindível, durante todo o processo educativo que se realize em um constante trabalho de ação-reflexão-ação [...]".

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Básica, nº 9394/1996, em seu art. 24, inciso V, destaca que a avaliação escolar deve atender ao critério de ser

> *[...] contínua e cumulativa do desempenho do aluno, com prevalência dos aspectos qualitativos sobre os quantitativos e dos resultados ao longo do período sobre os de eventuais provas finais. [...].*

Sendo assim, no Ensino Médio a avaliação deve ser organizada de modo a perpassar todo o ano letivo, não se restringindo às provas bimestrais ou semestrais, mas sendo constante, acompanhando os alunos em todo seu desenvolvimento ao longo do ano letivo e em cada disciplina, especialmente em Matemática.

Além de contínua, a avaliação deve ser desenvolvida de maneira a integrar os processos de ensino e aprendizagem, não sendo mero instrumento de identificação de desempenho pontual, mas contribuindo para o desenvolvimento dos alunos, particularmente para o ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio.

A avaliação formativa objetiva fornecer informações que permitam ao professor acompanhar a aprendizagem dos alunos e reorganizar seu trabalho com o intuito de atender às diferenças individuais observadas, isto é, a avaliação precisa ser associada a um processo de intervenção pedagógica, o qual deve contribuir com as aprendizagens dos alunos e auxiliar na superação das dificuldades manifestadas por eles (VILLAS BOAS, 2019). Assim, na avaliação formativa, o objetivo não é exclusivo para atribuição de nota, mas consiste em um acompanhamento dos alunos ao longo dos processos de ensino e aprendizagem, visando à promoção da aprendizagem a eles.

Popham (2008 *apud* VILLAS BOAS, 2019, p. 18) apresenta, em consonância com sua visão de avaliação formativa como processo planejado, em que professores e alunos utilizam as informações coletadas para ajustar o trabalho pedagógico, as seguintes características para esse tipo de avaliação:

> *[...]*
>
> *É um processo, não um teste em particular; é um processo planejado, que envolve diferentes atividades; é usada não apenas por professores, mas também por estudantes; ocorre durante o desenvolvimento do trabalho pedagógico; fornece* feedback *a professores e estudantes; a função do* feedback *é ajudar professores e estudantes a promover ajustes que atendam aos propósitos curriculares almejados.*
>
> *[...]*

Sendo assim, tanto professores quanto alunos devem utilizar-se das informações obtidas a partir da avaliação formativa para que seja possível promover a aprendizagem, contribuindo para a reorganização do trabalho pedagógico, a superação de dificuldades e o desenvolvimento dos alunos.

Vista por esta perspectiva, isto é, como parte de um projeto pedagógico, a avaliação corresponde a uma forma de verificação da eficácia do método didático-pedagógico desenvolvido pelo professor. Com base nos resultados das avaliações, o docente tem como conferir se os elementos de sua prática estão adequados aos objetivos que pretende atingir e se favorecem a aprendizagem dos alunos, de modo que possa reorientar sua prática pedagógica quando necessário. Sendo assim,

> *[...] a avaliação formativa existe para promover as aprendizagens. Isso só pode ocorrer se o professor aprimorar o trabalho pedagógico. Portanto, um dos componentes dessa avaliação é a possibilidade de o professor ajustar as atividades que desenvolve com seus alunos. [...]. (VILLAS BOAS, 2019, p. 19).*

Assim, a reorganização da prática pedagógica a partir dos resultados obtidos por meio da avaliação formativa é uma etapa indispensável do trabalho do professor.

Porém, para que isso ocorra, é necessário que o professor organize seu trabalho no sentido de desenvolver um processo avaliativo de modo simultâneo aos processos de ensino e aprendizagem, além de ser contínuo durante todo o ano letivo. Além disso, é preciso articular as avaliações formativa e somativa, de modo que ambas possam contribuir com a aprendizagem dos alunos. Conforme destaca Paixão (2016, p. 7),

> *[...]*
>
> *Em ambientes em que o processo avaliativo segue seu curso ideal, com a avaliação formativa e a somativa trabalhando conjuntamente em prol da aprendizagem [...] o que se vê é uma parceria entre professor e aluno, que faz a avaliação deixar de ser uma prova comprobatória e passe a ser um instrumento para verificação do progresso. [...]. Ao avaliar o aluno desse modo, a escola não apenas o valoriza, destacando suas habilidades e conquistas, mas também assume responsabilidade direta por seu desempenho – o fato de um aluno não alcançar os objetivos de aprendizagem passa a ser um problema conjunto, e não isolado, o que reforça a parceria. [...].*

Além disso, no processo avaliativo, uma etapa importante consiste em mapear os conhecimentos, habilidades, atitudes e valores que os alunos já possuem para que, a partir disso, seja possível organizar um trabalho pedagógico significativo e que permita a eles se desenvolverem. Uma estratégia que pode contribuir nesse sentido é utilizar a avaliação diagnóstica.

De acordo com Castillo Arredondo (2013), a finalidade da avaliação diagnóstica é dar início ao processo educativo conhecendo as reais características dos alunos, em relação aos aspectos pessoais e acadêmicos, sendo esse conhecimento essencial para que o professor consiga organizar sua prática em concordância com a realidade de sala de aula, partindo do que os alunos já sabem e já desenvolveram, e não de um aluno ideal e que nem sempre corresponde à realidade.

Com base no diagnóstico obtido para cada aluno, identificado por diferentes instrumentos, como provas, testes, atividades de resolução de problemas, discussões em grupo, entre outros, considerando as especificidades dos conceitos matemáticos, o professor pode organizar seu trabalho considerando os conhecimentos prévios dos alunos e construir propostas adequadas a eles e coerentes com os conhecimentos, habilidades, atitudes e valores esperados para a etapa em questão. Para a preparação dos instrumentos de avaliação diagnóstica, as premissas podem ser as orientações da Base Nacional Comum Curricular, verificando se os alunos atingiram os conhecimentos mínimos esperados para as etapas anteriores, seja em relação aos anos finais do Ensino Fundamental, seja em séries anteriores do Ensino Médio.

No processo avaliativo, no que diz respeito aos alunos, é preciso dar a eles a oportunidade de verificar suas dificuldades e necessidades na construção do conhecimento. Por meio do processo de avaliação, eles poderão tomar consciência dos conteúdos que já aprenderam e, também, identificar a necessidade de uma dedicação maior em relação a alguns assuntos. Dessa forma, para que a avaliação possa contribuir significativamente para a aprendizagem dos alunos, é necessário que ela "[...] deixe de ser utilizada como recurso de autoridade, que decide sobre os destinos do educando, e que assuma o papel de auxiliar o crescimento. [...]" (LUCKESI, 2006, p. 166).

Outro instrumento eficiente para que professores e alunos possam verificar, respectivamente, seu trabalho e sua aprendizagem, é a autoavaliação. Conforme Villas Boas (2008, p. 51), esta corresponde

> *[...] ao processo pelo qual o próprio aluno analisa continuamente as atividades desenvolvidas e em desenvolvimento, registra suas percepções e seus sentimentos e identifica futuras ações, para que haja avanço na aprendizagem [...].*

Dessa forma, a avaliação é direcionada para a aprendizagem, sendo um importante processo associado à avaliação formativa. Nesse sentido, os alunos poderão refletir sobre a própria aprendizagem, assumindo um papel ativo, enquanto o docente pensará mais a respeito de seu trabalho e o reorganizará de modo a potencializar as aprendizagens dos alunos.

Diante dessas possibilidades, considerando a articulação entre as avaliações diagnóstica, formativa e somativa, em conjunto com a autoavaliação, o processo avaliativo, portanto, passa a ter um caráter de formação, e não de punição. O foco, agora, está na compreensão dos conteúdos e procedimentos avaliados, e os erros cometidos pelos alunos não têm mais caráter punitivo, antes se converteram em elementos de investigação, discussão e produção de novos saberes. Desse modo, é importante que o professor aborde a questão do erro de maneira que os alunos compreendam sua importância como indicativo de possíveis dificuldades que podem ser superadas mediante o direcionamento dos estudos, o que pode ser realizado pelo professor por meio de mudanças nas metodologias, atividades ou abordagens, conforme as observações realizadas por ele durante a avaliação.

Por isso, o processo avaliativo deve ser praticado diariamente no ambiente escolar. Nesse contexto, a avaliação consiste em uma maneira de o professor estar consciente das conquistas da turma e, desse modo, manter-se atento às falhas que podem ocorrer nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática, sendo configurada como parte desses processos. Uma maneira de desenvolver um trabalho contínuo de avaliação com seus alunos é utilizar diversos recursos, como listas de atividades, apresentação de seminários, relatórios e provas escritas e elaboração de portfólios, mediante a utilização de instrumentos que envolvam a produção escrita. De posse dessas ferramentas avaliativas, é possível obter informações sobre a apreensão e o registro das ideias que os alunos levantaram com base na situação apresentada. De acordo com Buriasco e Soares (2008), essas informações constituem um material valioso para o repertório de planejamento das aulas e das suas escolhas didáticas. Além disso, fornece subsídios comunicativos entre professor e alunos.

O documento PCN+ Ensino Médio – Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, em relação às Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 2002, p. 131), indica que ao

> *[...] professor são oferecidas incessantemente muitas oportunidades de observação e avaliação no desenrolar de seu trabalho com os alunos. Muitas vezes, usamos as informações, mas não mantemos nenhum registro delas, outras vezes recolhemos informações que já possuíamos, de que não necessitamos ou das quais nunca faremos uso. Pontuar, registrar e relatar são procedimentos comuns numa avaliação que se integra ao ensino.*
>
> *[...]*

Assim, é importante que o docente aproveite as diferentes oportunidades para acompanhar o desenvolvimento dos alunos e procure utilizar-se de registros para que possa, com base neles, reorganizar sua prática conforme julgue necessário. Além dos registros elaborados por ele, é importante que sejam utilizados os que foram feitos pelos próprios alunos, como parte da avaliação, já que uma das habilidades a ser desenvolvida no Ensino Médio, na área de Matemática, é a comunicação de ideias, por escrito e de forma oral, utilizando linguagem matemática e a língua materna.

Em relação aos recursos que possibilitam a comunicação oral, professor e alunos poderão negociar significados e ideias matemáticas associados a conceitos, além de trabalhar estratégias e procedimentos para a resolução de problemas. O objetivo é auxiliar no processo de aprendizagem de Matemática, sendo a avaliação um instrumento de mediação, permitindo aos alunos a compreensão e o desenvolvimento das habilidades, assim como a produção de conhecimento sobre os conceitos envolvidos.

Os instrumentos de avaliação escolhidos pelo professor devem ser coerentes com seus objetivos e com as estratégias metodológicas adotadas. Considerando uma integração entre as avalições diagnóstica, formativa e somativa, em conjunto com a autoavaliação, os mais variados instrumentos podem ser utilizados, desde que sejam estabelecidos objetivos claros para a utilização de cada um deles.

Em relação ao trabalho com grandes grupos de alunos, que apresentam suas características individuais e níveis de desenvolvimento próprios, o processo avaliativo tem um papel indispensável para que o professor possa conhecer cada aluno e organizar seu trabalho no sentido de atender às dificuldades manifestadas. Nesse caso, a diversificação das metodologias adotadas e dos instrumentos de avaliação, com destaque para observação, análise dos registros escritos, acompanhamento de discussões realizadas em pequenos grupos ou com a turma, entre outros procedimentos, são indispensáveis para que, além de dirigir seu olhar a todos os alunos, o professor atenda às necessidades individuais deles, promovendo um espaço onde haja cooperação entre os pares e ocorra a promoção da aprendizagem significativa a todos.

Nesta coleção, o professor tem a oportunidade de verificar as aprendizagens dos alunos e analisar seu método didático-pedagógico. Ao longo de cada capítulo, são propostas várias tarefas, por meio das quais ele poderá seguir o processo de aprendizagem dos alunos aula a aula, sem precisar reservar sua avaliação para um único momento. Além disso, mediante as informações que tiver, poderá refazer, se necessário, seus planos de aula, a fim de adequá-los para cada turma.

Nesta coleção, temos a presença das seções **Conversando** e **Finalizando a conversa**, cujo objetivo é contribuir com a organização das temáticas e dos conteúdos abordados. A respeito da primeira seção, esta visa introduzir os temas que serão discutidos na unidade, sendo importante o professor realizar um trabalho no sentido de introduzir os conteúdos que serão estudados, bem como suas possíveis aplicações práticas, para que os alunos percebam a presença da Matemática na realidade. Além disso, em associação com essa seção, o professor pode desenvolver outras atividades com o objetivo de identificar os conhecimentos prévios dos alunos a respeito da temática que será discutida, aproveitando o momento para aplicação de avaliação diagnóstica que lhe permita refletir e organizar seu trabalho considerando os conhecimentos deles e suas dificuldades, a fim de tornar o aprendizado significativo e direcionado às características da turma.

Já em relação à seção **Finalizando a conversa**, o professor pode, além de propor as atividades e discussões apresentadas nesta coleção, utilizar outros instrumentos para contribuir com a avaliação dos alunos e com identificação de possíveis lacunas de aprendizagem, as quais podem ser sanadas mediante um trabalho em articulação com essa última seção, e em cada unidade. Nesse momento, caso seja necessário e conveniente, o professor pode também utilizar-se de elementos da avaliação somativa, em concordância com o sistema de avaliação adotado pela instituição escolar em que atua.

Cabe ressaltar que os alunos poderão ser submetidos, ao longo do Ensino Médio, a diferentes exames de larga escala, como o já citado Enem. Assim, a avaliação do tipo somativa também precisa estar presente no sistema adotado, para que eles se preparem para esse tipo de prova. Nesse sentido, o professor pode fazer uso de instrumentos como provas objetivas e/ou dissertativas, simulados envolvendo questões desses exames, entre outros, para que, além de acompanhar o desempenho dos alunos, possa prepará-los para uma participação em provas desse tipo. Porém, não se pode esquecer que a avaliação somativa não deve ser a única forma de avaliar, e sim mais uma maneira de acompanhar o desenvolvimento dos alunos, além das já citadas avaliações diagnóstica e formativa.

Diante desses temas, na organização do trabalho pedagógico, um dos elementos indispensáveis é a avaliação que corresponde a um processo indissociável do ensino e da aprendizagem de Matemática. Por isso, essa avaliação deve ser integrada ao trabalho pedagógico, assumindo um caráter contínuo e prioritariamente formativo, por meio da articulação entre as características das avaliações diagnóstica, formativa e somativa, em conjunto com a autoavaliação, contribuindo para que a ação docente seja voltada à organização e à proposição de atividades que sejam significativas aos alunos e que contribuam com a aprendizagem de conceitos matemáticos, bem como para o desenvolvimento das habilidades, das atitudes e dos valores esperados para esses alunos na conclusão dessa etapa de ensino.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Ensino Médio

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo, que tem como objetivo definir o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais para todos os alunos e que devem ser desenvolvidas em todas as etapas da Educação Básica (Educação Infantil; Ensino Fundamental e Ensino Médio). Por se tratar de um documento normativo, a BNCC é referência nacional para a formulação dos currículos das redes públicas municipal e estadual das escolas e para as propostas pedagógicas tanto das instituições escolares da rede pública quanto da rede privada. Além disso, o documento visa contribuir para o alinhamento de ações em âmbito federal, estadual e municipal no que se refere à formação de professores e à avaliação. A BNCC foi elaborada a fim de garantir que todos os alunos, independentemente da rede de ensino e do estado onde moram, tenham um patamar comum de aprendizagem.

As aprendizagens comuns aos alunos devem assegurar o desenvolvimento de competências, isto é

> *[...] a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. [...] (BRASIL, 2018, p. 8).*

Nesse sentido, a BNCC define dois tipos de competência, a saber: gerais, que possuem uma interlocução e desdobram-se no tratamento didático proposto para as três etapas da Educação Básica durante a construção de conhecimento, atitudes e valores; e específicas, ou seja, de cada área do conhecimento.

As competências gerais devem ser desenvolvidas durante todas as etapas da Educação Básica, a fim de capacitar os alunos a resolver problemas complexos do cotidiano e exercer uma cidadania consciente. São competências gerais:

> **1** *Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.*
>
> **2** *Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.*
>
> **3** *Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.*
>
> **4** *Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artísticas, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.*
>
> **5** *Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.*
>
> **6** *Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.*
>
> **7** *Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.*
>
> **8** *Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.*
>
> **9** *Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.*
>
> **10** *Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários. (BRASIL, 2018, p. 9-10).*

Os conteúdos abordados ao longo da coleção levam os alunos a desenvolver as competências citadas anteriormente. Também nesta coleção é disposta a seção intitulada **Acesso digital**, que propõe ao professor trabalhar com *softwares* matemáticos e de programação com intuito de que os alunos resolvam problemas e produzam conhecimentos matemáticos e de outras áreas do conhecimento, contemplando assim a **Competência geral 5**.

Além disso, alguns temas da coleção realizam uma abordagem histórica do conteúdo ou, ainda, estão relacionados com diferentes culturas étnicas e raciais, o que contempla a **Competência geral 3**.

As páginas temáticas iniciais de cada capítulo abordam conteúdos relacionados ao dia a dia, como energia elétrica, armazenamento de dados na medicina, entre outros. Esses conteúdos favorecem o exercício da curiosidade intelectual, a investigação científica, o trabalho coletivo, a utilização de diferentes tipos de linguagem (verbal, geométrica, algébrica, entre outras), contemplando assim diferentes competências gerais.

Conforme a BNCC, o Ensino Médio está dividido em áreas de conhecimento (Linguagens e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Ciências Humanas e Sociais Aplicadas). Para cada uma dessas áreas, são definidas competências específicas, que fazem uma inter-relação com as respectivas competências do Ensino Fundamental, realizando adequações de acordo com as especificidades do Ensino Médio. Relacionadas a cada uma delas são descritas habilidades, que devem ser desenvolvidas ao longo dessa etapa da Educação Básica.

No que diz respeito à área do conhecimento Matemática e suas Tecnologias, a BNCC aponta as unidades temáticas, os objetos de conhecimentos e as habilidades que os alunos devem consolidar no Ensino Fundamental, e propõe que as aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental sejam ampliadas e aprofundadas no Ensino Médio. Propõe também recursos e estratégias para resolver problemas mais complexos com que os alunos vão se deparar na vida acadêmica e social. De acordo com a BNCC, o Ensino Médio tem como objetivo desenvolver a construção de uma visão integrada da Matemática aplicada à realidade, de tal modo que os alunos sejam capazes de utilizar conhecimentos matemáticos para analisar, interpretar e resolver problemas do cotidiano e de diferentes áreas do conhecimento. Para isso é necessário que as aulas considerem as vivências dos alunos, que são impactados de modos diferentes pelos avanços tecnológicos e pelas exigências do mercado de trabalho. Nesse contexto, é importante destacar o papel dos recursos de tecnologias digitais e aplicativos.

Ainda segundo a BNCC, para que os objetivos do Ensino Médio se concretizem na área de conhecimento da Matemática, é necessário que os alunos desenvolvam

> *[...] habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. [...] (BRASIL, 2018, p. 529).*

A primeira competência específica da área de Matemática e suas Tecnologias refere-se à utilização de

> *[...] estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral" (BRASIL, 2018, p. 531).*

Essa competência é ampla e permite que o professor realize propostas e práticas que favoreçam o desenvolvimento de habilidades referentes à interpretação e à compreensão da realidade utilizando conceitos matemáticos. Além disso, possibilita que o aluno utilize conceitos, estratégias e procedimentos matemáticos para a tomada de decisões não só em problemas matemáticos, mas em atividades de diferentes áreas. Nesta coleção, as páginas que iniciam cada tema, bem como a seção **Problemas e exercícios propostos**, dão ao professor a oportunidade de utilizar estratégias de trabalho que colocam os alunos como o centro do processo de aprendizagem, permitindo assim que ele possa abordar os conceitos estudados em cada tema para resolver problemas cotidianos e de outras áreas do conhecimento, como Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Essa seção engloba não só exercícios matemáticos, mas problemas que fazem parte do dia a dia dos alunos, a fim de que eles possam aplicar os conceitos matemáticos em situações reais.

> *Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática (BRASIL, 2018, p. 534).*

Esta é a segunda competência específica da área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias, que amplia a primeira de maneira a colocar os alunos para investigar situações e desafios que tenham impactos social e ambiental. Além desses aspectos, essa competência prevê que eles sejam capazes de identificar aspectos consensuais ou não em discussões que envolvem problemas éticos, sustentáveis e com base em princípios solidários. A segunda competência específica também propicia a interação colaborativa entre os alunos, a fim de que possam aprender e ensinar Matemática de modo significativo. A seção **Saiba mais** e as páginas iniciais permitem que eles tenham contato com situações sociais e ambientais, como o consumo consciente de energia elétrica, tratado no tema sobre cálculo de área e volume.

A terceira competência específica refere-se à utilização de

> *[...] estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2018, p. 535).*

Essa competência mobiliza habilidades relacionadas a resolução, interpretação, formulação e construção de problemas e modelos matemáticos que envolvem conceitos algébricos, geométricos, estatísticos, entre outros. O texto da BNCC destaca que os alunos do Ensino Médio devem mobilizar habilidades que podem ser necessárias para resolver problemas ao longo da vida, assim é preciso que os problemas elaborados e resolvidos sejam de diferentes contextos. Os temas relacionados a funções, de modo geral, oferecem ao professor exercícios que envolvem a solução de problemas cotidianos em que os conceitos podem ser aplicados diretamente para sua resolução ou, ainda, situações em que os alunos precisem fazer adaptações de seu uso a fim de resolver um problema ou construir um modelo matemático que descreva a situação em estudo. Ao trabalhar funções trigonométricas, por exemplo, por meio da análise das marés, os alunos têm a oportunidade de descrever o movimento das marés por meio de uma função seno ou cosseno, criando assim um modelo matemático que auxilia a interpretar a situação. Nesse caso, o uso de tecnologias digitais facilita o desenvolvimento de modelos e a formulação e resolução de problemas, o que possibilita a eles terem acesso às alternativas de experiências variadas e que facilitam a aprendizagem de conceitos matemáticos e a capacidade de raciocinar logicamente, testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações. A seção **Acesso digital** possibilita a realização de um trabalho em que *softwares* podem ser aplicados na construção de modelos e/ou na resolução de problemas. Já na seção **Problemas e exercícios propostos** algumas tarefas requerem dos alunos a formulação de problemas que envolvem assuntos cotidianos, destacados no **Você cidadão**.

A quarta competência específica relaciona-se à compreensão e utilização,

> *[...] com flexibilidade e precisão, [de] diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas (BRASIL, 2018, p. 538).*

Ser capaz de utilizar diferentes tipos de representação para um mesmo objeto matemático na resolução de problemas de diferentes contextos é uma das habilidades vinculadas a essa competência. O texto da BNCC destaca que

> *[...] ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de modo significativo sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente [...]. (BRASIL, 2018, p. 538).*

Assim, é importante que eles tenham domínio dos conceitos matemáticos a fim de realizar conversões entre os diferentes tipos de representação, como do registro algébrico para o registro gráfico, e vice-versa. Na seção **Problemas e exercícios propostos**, os alunos necessitam de conhecimentos sobre essas representações para que possam aplicá-las da melhor maneira possível na resolução de problemas matemáticos e problemas de diferentes contextos.

> *Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 540).*

Esta é a quinta e última competência específica da área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias. O desenvolvimento dessa competência requer um conjunto de habilidades relacionadas às capacidades de investigação e formulação de explicações e argumentações a respeito de problemas decorrentes de experiências empíricas.

Ao propor tarefas que permitem o desenvolvimento das competências gerais para o Ensino Médio e competências específicas para a área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias, o professor contribui para que os alunos desenvolvam o senso crítico, possibilitando analisar, refletir e construir argumentos sobre questões socioambientais. Além disso, o desenvolvimento das habilidades que constituem todas as competências específicas contribui para que eles se tornem cidadãos conscientes. Por exemplo, ao trabalhar sobre unidades de medida de volume e área, pode-se abordar o assunto sobre consumo de energia elétrica, discutindo com os alunos, além dos conceitos matemáticos, maneiras de economizar energia. O trabalho que sugere a investigação e a leitura e interpretação de textos científicos divulgados em diferentes mídias propicia a eles o desenvolvimento de habilidades necessárias à formação crítica e reflexiva.

Vale ressaltar que os temas da coleção foram pensados de modo a propiciar ao professor possibilidades de desenvolver as diferentes competências e habilidades propostas na BNCC.

Ao longo da coleção é possível que alunos e professor identifiquem quais competências e habilidades serão desenvolvidas nos temas trabalhados. No que se refere aos primeiros, eles podem identificar as habilidades que o tema propicia desenvolver em boxes denominados "BNCC". As habilidades são escritas em códigos, permitindo identificar a qual competência específica refere-se o número da habilidade e a qual área do conhecimento pertence. Por exemplo, na habilidade **EM13MAT104** temos primeiro um par de letras (**EM**), que indica a etapa de Ensino Médio. O primeiro par de números (**13**) mostra que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio. A segunda sequência de letras aponta a área (três letras) ou o componente curricular (duas letras), nesse caso **MAT**, que significa Matemática e suas Tecnologias. Já os números finais indicam a competência específica à qual se relaciona a habilidade (1º número) e sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência (dois últimos números).

Além das páginas disponíveis para os alunos, na Assessoria pedagógica são mostradas ao professor as competências gerais e específicas e as habilidades da BNCC desenvolvidas em determinados problemas, exercícios ou seções especiais. Ao propor e explicitar os assuntos em cada tema, sempre que pertinente é composto o boxe **BNCC**. Nesse boxe, é apresentada a maneira pela qual determinado conteúdo propicia o desenvolvimento de certa competência e habilidade.

Além de estabelecer as competências gerais e específicas de cada área do conhecimento, a BNCC propõe os chamados Temas Contemporâneos Transversais, que buscam contextualizar o que é ensinado relacionando-os com temas que sejam de interesse dos alunos e que contribuam para sua formação cidadã.

> *[...] O grande objetivo é que o estudante não termine sua educação formal tendo visto apenas conteúdos abstratos e descontextualizados, mas que também reconheça e aprenda sobre os temas que são relevantes para sua atuação na sociedade. [...] (BRASIL, 2019, p. 7).*

Além disso, com base nesses temas, espera-se que os alunos compreendam melhor aspectos de seu dia a dia, como utilizar o dinheiro, cuidar da saúde, usar novas tecnologias digitais, entre outros. A BNCC engloba seis áreas temáticas, que são: cidadania e civismo; ciência e tecnologia; economia; meio ambiente; multiculturalismo; e saúde. Essas englobam quinze temas contemporâneos: ciência e tecnologia; direitos da criança e do adolescente; diversidade cultural; educação alimentar e nutricional; educação ambiental; educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras; educação em direitos humanos; educação financeira; educação fiscal; educação para o consumo; educação para o trânsito; processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso; saúde; trabalho; e vida familiar e social, conforme ilustra a imagem a seguir.

Governo Federal/Ministério da Educação

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2020.

Há distintas maneiras e concepções de trabalhar esses temas na escola, sendo positiva essa diversidade de abordagens, pois garante a autonomia das redes de ensino e dos professores.

A BNCC propõe que esses temas sejam trabalhados em conjunto com outras áreas do conhecimento, podendo fazer uso de diferentes metodologias ativas, em que os alunos tornam-se o centro do processo de aprendizagem. Ao longo dos temas desta coleção, em cada página inicial, é possível contemplar esse tipo de trabalho em conjunto com professores de componentes curriculares como Física, Ciências Biológicas, Arte, História, entre outros. Além disso, ao estudar temas que propiciam aos alunos discutir assuntos relacionados à saúde, ao meio ambiente e à educação física, por exemplo, eles desenvolvem a reflexão e a interpretação crítica desses assuntos por meio de conceitos tanto matemáticos quanto de outras áreas do conhecimento. Isso é visto na seção **Você cidadão**, na qual são explorados assuntos que permitem ao professor trabalhar os temas contemporâneos transversais também em conjunto com outros professores.

O trabalho com os temas contemporâneos transversais promove o desenvolvimento de competências gerais e específicas propostas na BNCC.

A assessoria pedagógica apresenta em quais ocasiões da coleção é possível realizar um trabalho em conjunto com outros professores, bem como qual tema contemporâneo transversal abordar, oferecendo sugestões ao professor.

O trabalho com os pressupostos da BNCC e com os temas contemporâneos transversais permite que o professor desenvolva com os alunos habilidades, atitudes e valores que os auxiliarão na formação – tanto no âmbito acadêmico como fora dele.

Nesse sentido, sempre que possível e conveniente, é importante promover situações que favoreçam o desenvolvimento dessas habilidades, desses valores e atitudes por meio de reflexões, discussões, debates, trabalho em grupo, uso adequado das tecnologias e pesquisas.

Abordagem teórico-metodológica

Esta obra tem como proposta oferecer subsídios para possibilitar o desenvolvimento acadêmico e pessoal dos alunos, apresentando conteúdos por meio de situações-problema advindas da realidade, favorecendo assim a compreensão do conceito tanto no âmbito da Matemática quanto em suas aplicações em situações de diferentes áreas. Além disso, a obra se alinha à teoria sociointeracionista, valorizando aspectos históricos e culturais e posicionando os alunos no centro do processo de aprendizagem.

Os conteúdos são abordados de maneira direta e propiciam o uso de metodologias ativas, permitindo o protagonismo dos alunos em seu processo de aprendizagem. Já as situações-problema consideram o protagonismo juvenil, bem como contribuem para que eles reflitam criticamente sobre essas situações, entendam as relações próprias do mundo do trabalho e façam escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e a seu projeto de vida.

Quando se trata da aprendizagem, seja no âmbito da Matemática, seja em questões relacionadas aos projetos pessoais, é importante considerar o conhecimento prévio e as experiências de vida dos alunos, que servirão de suporte para introduzir novos conceitos e tomar decisões diante de questões que envolvam conceitos matemáticos e situações nos âmbitos social, ambiental, financeiro, no mundo do trabalho, entre outras. Nesse sentido, o conteúdo desta obra considera tais conhecimentos prévios necessários e, sempre que possível, a apresentação é feita de maneira gradativa, até chegar à formalização.

Ao longo da obra também são propostos recursos, como o uso de tecnologias digitais que proporcionam a visualização de conceitos mais abstratos, de modo a facilitar a compreensão desses conceitos, contribuindo assim para a construção do saber, do trabalho interativo e colaborativo, de processos de descobertas de modo dinâmico, utilizando a teoria e a prática. Além disso, os conteúdos favorecem o desenvolvimento de trabalho interdisciplinar com professores de diferentes componentes curriculares. De modo geral, essa interdisciplinaridade tem sido entendida como uma maneira de articular dois ou mais componentes por meio da exploração de determinados assuntos, visando analisar, discutir e compreender os diferentes pontos de vista apresentados em cada uma das áreas de conhecimento, o que pode auxiliar os alunos na construção de seus conhecimentos em uma perspectiva mais ampla e múltipla.

> *[...] Nesse sentido, o ensino de Matemática deve engajar-se na crescente preocupação com a formação integral do aluno como cidadão da sociedade contemporânea [...] [em que] "cada vez mais é obrigado a tomar decisões políticas complexas. Introduz-se, assim, definitivamente, na agenda da Matemática escolar, o ensino voltado para a formação de cidadãos críticos e responsáveis. [...]." (TOMAZ; DAVID, 2008, p. 15).*

Um modo de viabilizar o trabalho integrado com outras áreas do conhecimento é por meio do desenvolvimento de projetos. Vale ressaltar, contudo, que um projeto desse tipo, para ser bem-sucedido, precisa de mais do que integração entre as áreas do conhecimento, ou seja, é necessário envolvimento e empenho entre os participantes, tanto professores quanto alunos. Para Nogueira (1998, p. 33), tal integração "[...] pretende atingir como complementaridade das diferentes disciplinas, já que demonstra aos alunos possíveis inter-relações nelas existentes. [...]". Ainda segundo o autor, outro fator importante para a execução de projetos interdisciplinares é a possibilidade de acesso à pesquisa. Com isso, espera-se que os alunos, ao perceberem as relações entre as áreas do conhecimento, sejam motivados a

> *[...] buscar novos conhecimentos sobre um tema, problema ou questão, pois agora o projeto apresenta perspectivas múltiplas, em que todas as disciplinas contribuem de uma certa forma, e, por consequência, [...] receber orientações e desafios para a pesquisa de vários professores em prol de um tema único (NOGUEIRA, 1998, p. 33).*

Nesta obra, o caráter interdisciplinar da Matemática é explorado por meio de tarefas, apresentação de informações e contextos diversificados. Nas tarefas, por exemplo, a Matemática atua como instrumento de apoio para a resolução de problemas, em geral, vinculados a situações envolvendo medições, cálculos e interpretações de informações relacionadas a várias áreas do conhecimento. Por meio dessas situações, os conceitos trabalhados nos capítulos são resgatados e utilizados para compreender informações e conceitos abordados em outras áreas do conhecimento, estabelecendo uma relação entre elas. Assim, espera-se que os alunos percebam essa interação, a fim de construir o conhecimento de modo mais amplo e significativo.

A interdisciplinaridade também pode ser um modo de relacionar a Matemática com temas contemporâneos transversais, permitindo assim que os alunos interpretem criticamente situações que contribuam para uma formação cidadã. Ao longo da obra, tarefas e seções, como as páginas de abertura, as seções **Saiba mais** e **Conectando ideias**, bem como o destaque **Você cidadão**, permitem o trabalho com esses temas contemporâneos transversais, favorecendo assim a discussão sobre situações que levam os alunos a pensar em que medida as atividades feitas na escola ou fora dela estão associadas ao planejamento e às decisões de seus projetos de vida. Outra seção que merece ser comentada é **Explorando problemas**, que possibilita a formulação de hipóteses, a validação de resultados para a elaboração de conceitos, a autonomia da comunicação e a organização do raciocínio.

Por meio das tarefas propostas e dos possíveis encaminhamentos, os alunos expressam suas ideias, seja escrevendo, seja dialogando com o professor e os colegas. Nesse sentido, eles têm a oportunidade de se comunicar e de desenvolver a capacidade de organizar o raciocínio, construir argumentos bem fundamentados e ouvir seus colegas, contribuindo assim para o desenvolvimento de atitudes de respeito mútuo, cooperação e senso crítico que são essenciais para a formação deles como indivíduos, e que são obtidas por meio do trabalho em grupo, proposto em alguns momentos da obra. Isso favorece a interação e a consequente participação de todos os alunos no processo. Com isso, apresentam-se mais possibilidades para expor ideias, argumentar sobre seus pontos de vista e discutir diferentes estratégias e soluções. Por causa desses fatores, o trabalho em pequenos grupos tem sido frequentemente sugerido nas aulas de Matemática. Apesar de muitos professores o rejeitarem

> *[...] sob alegação de que os alunos fazem muito barulho e não sabem trabalhar coletivamente, essa modalidade de trabalho é valiosa para várias das competências que se deseja desenvolver. Outro aspecto que se deve enfatizar é a importância da comunicação em Matemática, por ser uma competência valiosa como relato, registro e expressão. [...]. (BRASIL, 2002, p. 129).*

Ao realizar o trabalho em grupo é fundamental que o professor esteja atento para como os alunos se organizam em determinada atividade, visto que essa deve permitir a eles que atinjam satisfatoriamente os objetivos estabelecidos. Iniciar o trabalho em equipe com os alunos desde a Educação Básica torna-se cada vez mais importante, visto que

> *[...] pode ajudar a promover o desenvolvimento profissional dos indivíduos nele envolvidos, podendo proporcionar momentos de aprendizagem mútua e potenciar reflexões individuais. [...] (HARGREAVES, 1998, apud DIAS, 2008, p. 236).*

Contudo, ao desenvolver o trabalho em grupo, é preciso que o professor considere certos aspectos ao orientar os alunos (WASSERMANN, 1990), conforme descrito a seguir.

- O professor precisa conversar com os alunos acerca de como espera que eles trabalhem em grupo, sobre o que significa trabalhar em grupo e sobre os materiais que eles irão utilizar.
- É importante que se dê aos alunos oportunidade para levantarem questões relativas aos pontos que os preocupam.
- É importante conversar com os alunos, também, sobre as possibilidades, as opções, e sobre o modo como as escolhas podem ser feitas. Se possível, mostrar como isso é feito.
- O professor precisa mostrar entusiasmo pelo trabalho em grupo e conversar com os alunos sobre o quanto acredita que esta seja uma boa maneira de aprender.

- É preciso demonstrar confiança na capacidade de os alunos cooperarem com o trabalho.
- É importante discutir com os alunos acerca do conjunto de requisitos essenciais para o trabalho em grupo: cada um esperar sua vez, partilhar, conversar, ter respeito pelos outros e cuidado com os materiais.
- Solicite aos alunos que expressem suas ideias e façam sugestões para tornar tudo mais eficaz. Dê-lhes oportunidades para decidirem sobre o funcionamento dos grupos durante um trabalho na sala de aula.

Também é importante que o professor planeje cada atividade e auxilie os alunos quando necessário, orientando-os a registrar as conclusões a que chegarem.

Além disso, nas **Orientações sobre os capítulos**, presentes nesta Assessoria pedagógica, são propostas sugestões de trabalhos em grupo em momentos pertinentes, como **Conversando**, **Saiba mais**, **Você cidadão** e **Explorando problemas**, ou em situações especiais – durante as tarefas das seções **Problemas e exercícios propostos** – e, quando pertinente, nas tarefas em destaque de **Você produtor** ou **Em grupo**.

Outro fator importante é o professor procurar estratégias para o desenvolvimento dos conceitos das tarefas. Algo que tem conquistado um papel de destaque, em virtude dos mais variados benefícios que pode oferecer ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento, independentemente do nível de ensino, é a resolução de problemas.

De acordo com os PCN (BRASIL, 2000, p. 52),

> *[...] os alunos, confrontados com situações-problema, novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação.*
>
> *[...]*

Do mesmo modo, segundo os PCN+ (BRASIL, 2002, p. 112-113),

> *[...]*
>
> *A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas.*
>
> *[...] [No processo de resolução], o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido.*
>
> *[...]*

Para que o trabalho com a resolução de problemas possa ser viabilizado, é necessário que o professor promova situações em sala de aula que possibilitem aos alunos vivenciar experiências nas quais estejam presentes, dando a eles a oportunidade de resolver problemas em contexto prático. Além disso, é preciso oferecer experiências com problemas cujas resoluções não sejam únicas, isto é, que permitam várias respostas. Tudo isso pode contribuir para que os alunos deixem de ser meros espectadores e tornem-se agentes ativos no processo de aprendizagem em Matemática.

As páginas de abertura introduzem os conteúdos de maneira contextualizada, o que favorece o estabelecimento de uma relação entre conceitos matemáticos e suas aplicações. Além disso, na seção **Problemas e exercícios propostos**, são apresentadas outras situações que permitem aos alunos, por exemplo, ampliar seus conhecimentos sobre os conceitos e procedimento matemáticos relacionados à resolução de problemas, bem como elaborar e resolver esses problemas.

Toda a obra foi pensada e construída de modo que atenda às necessidades dos jovens da atual sociedade, considerando as culturas juvenis. A escola deve sempre levar em consideração a presença de um jovem que enfrenta vários conflitos na construção de sua identidade. Eles buscam fazer parte de um grupo de amigos para partilhar sua vida, daí nasce a cultura juvenil, grupo caracterizado por apresentar uma cultura com valores, símbolos, ídolos, gostos pela música, características, mitos e linguagem próprios, entre outros aspectos. A cultura juvenil é dotada de uma sintonia de ideias, comportamentos e interesses dos adolescentes.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as competências gerais explicitam o compromisso da educação brasileira com a "[...] formação humana integral e com a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. [...]." (BRASIL, 2018, p. 25). Nesse sentido, o professor exerce um papel fundamental no Ensino Médio, pois deve priorizar o desenvolvimento das competências e habilidades propostas pela BNCC, levando em consideração e tendo como base as culturas juvenis, de modo a realizar um trabalho diferenciado para conquistar os jovens, preparando-os para o futuro, com o objetivo de formar cidadãos críticos, capazes de atuar em uma sociedade justa.

De acordo com Viana (2014, p. 258), "[...] os estudantes do Ensino Médio, em maioria jovens, são portadores de experiências, sensibilidades e saberes que, muitas vezes, não cabem nos padrões ou cânones culturais e nas propostas curriculares escolares. [...]". Portanto, é necessário que haja o diálogo entre as culturas juvenis e a cultura escolar e que esse diálogo conduza à construção do saber.

> *As experiências culturais juvenis estão, muitas vezes, presentes, mas nem sempre são valorizadas e potencializadas nas escolas. Essas experiências juvenis carregam conhecimentos sensíveis e cognitivos intrínsecos que podem ser expandidos na medida em que se mesclam com outras áreas do conhecimento ou são reconhecidas em seus sentidos próprios*
>
> *[...] (VIANA, 2014, p. 259).*

Para tornar isso possível, o professor deve olhar para os jovens enxergando suas características comuns e também as específicas, valorizando as diferenças entre eles. Para conquistá-los, é importante ouvi-los e torná-los sujeitos de sua aprendizagem. O professor precisa demonstrar esse interesse em conhecê-los e conhecer suas experiências, incluindo-os em um processo colaborativo e interdisciplinar e promovendo o protagonismo juvenil, bem como contribuir para a construção de seu projeto de vida, isto é, que pensem sobre aspectos profissionais, escolares, entre outros. O projeto de vida, segundo Leão *et al.* (2011, p. 1071),

> *[...] seria uma ação do indivíduo de escolher um, entre os futuros possíveis, transformando os desejos e as fantasias que lhe dão substância em objetivos passíveis de serem perseguidos, representando, assim, uma orientação, um rumo de vida. Nesse sentido, o projeto não deve ser entendido como resultado de um cálculo matemático, estrategicamente elaborado, ou de um processo linear, como está presente no senso comum.*
>
> *[...]*

Assim, os temas propostos na obra levam os alunos a refletir sobre aspectos financeiros, trabalhistas, sociais, ambientais, entre outros, o que contribui para sua formação como cidadãos e para que tomem decisões futuras conscientes, auxiliando na construção de seus projetos pessoais. Com as propostas de práticas inovadoras, como desenvolvimento de projetos integrados articulando diferentes áreas do conhecimento, contidas nesta obra, bem como por meio do desenvolvimento de metodologias diferenciadas, é possível desenvolver um trabalho significativo para os alunos, tornando-os protagonistas do processo de aprendizado.

Leitura e Matemática no Ensino Médio

A leitura é uma atividade essencial para o estudo do componente curricular Matemática, além de ser condição básica para a aprendizagem e para a apropriação de conceitos. Em decorrência dessa importância, o professor dessa disciplina é, também, um professor de leitura. De fato, ele é, em geral, o leitor que atua como modelo na interpretação dos textos matemáticos. Se considerarmos a leitura como uma prática social – que se difere de acordo com quem e o que lê, para quem lê e com que propósitos se lê –, a exatidão e a precisão na leitura de um problema por um matemático são mais bem interpretadas por aquele que tem essa prática social – o professor de Matemática, de acordo com Kleiman (1998).

Há, no entanto, outra faceta da relação entre a leitura e a Matemática que inverte tal relação: a Matemática é essencial para a leitura e a interpretação de muitos dos textos com os quais nos deparamos na vida social. Ela está na vida de todos e consiste em instrumento essencial para uma leitura crítica dos textos do cotidiano, pois saber como realizar uma leitura que envolve dados matemáticos deve fazer parte do repertório de um leitor. Por isso, ensiná-lo a fazer essa leitura pode contribuir de forma essencial em sua formação.

Se o jovem ou adolescente ainda tem dificuldades de leitura quando chega ao Ensino Médio, reduzem-se as possibilidades de aprendizagem de alguns conceitos básicos que lhe permitem mobilizar suas capacidades de raciocínio matemático. Resolver equações é uma importante habilidade matemática, e é com base nesse raciocínio que os alunos acompanham a leitura do problema e podem decidir como escrever a equação, que dados ignorar e quais serão os dados desconhecidos. Portanto, para escrever uma equação, eles precisam do raciocínio matemático, mas antes, para raciocinar, precisam ler e interpretar enunciados.

Tanto a linguagem matemática como a língua natural são essenciais no cotidiano das pessoas. Estudos confirmam, com base na observação da prática docente, que se os alunos não conseguem interpretar a linguagem natural, dificilmente chegarão a entender a linguagem matemática e contextualizar conceitos. Por isso, fica difícil para o professor preocupado com a aprendizagem de seus alunos ignorar os problemas de leitura.

As dificuldades encontradas por jovens e adolescentes para aprender conhecimentos e conceitos matemáticos não estão totalmente fora do âmbito da educação matemática. Limitar-se a apontar que eles não aprendem o conteúdo de Matemática porque têm problemas de leitura não é suficiente, mesmo que a leitura seja apenas um recurso, nunca o "essencial da aula", como propõem os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 2000).

De fato, o ensino de Matemática deve ter, como os PCNEM sugerem, uma função formativa, podendo auxiliar os alunos a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, transcendendo seu papel instrumental e assim

> *[...] gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. [...] (BRASIL, 2000, p. 40).*

Com esses argumentos, é difícil pensar em alguma prática formativa que venha a ser mais enriquecedora e viabilizadora para essa formação do que a leitura. Nesse contexto, assim como outros recursos tecnológicos são explorados pelo professor, como o uso da calculadora, constituem-se de caráter fundamental o ensino e o uso da língua escrita – especificamente a leitura – como uma tecnologia, um recurso, um instrumento central para a aprendizagem contínua.

É importante lembrar que o professor de Matemática não foi formado para ensinar a ler. Todavia, ele pode atuar modelando os modos de leitura nas práticas matemáticas. Isso pode ser feito com base em uma reflexão sobre seus hábitos e estratégias de leitura aliados a uma compreensão das dificuldades características do leitor escolar no Ensino Médio.

Levando essas restrições em consideração, é possível encontrar pelo menos três áreas de atuação do professor de Matemática para contribuir na formação de leitores de textos matemáticos: desenvolvimento da leitura crítica, do vocabulário e de estratégias de estudo.

Desenvolvimento da leitura crítica

A Matemática está relacionada intimamente com o desenvolvimento das capacidades de interpretar, analisar, sintetizar, abstrair e projetar, e todas estas se apoiam no uso da linguagem natural, ou seja, verbal. Se tomamos como exemplo uma das competências matemáticas exigidas nas provas do Enem, como a competência de

> *[...] Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação (INEP, 2015, p. 6),*

e retiramos a especificidade do texto matemático (ou seja, gráficos e tabelas), vemos que esse trecho poderia descrever uma competência de leitura, pois prever, extrapolar, interpolar e interpretar são também absolutamente indispensáveis para a leitura de qualquer texto. Além disso, as habilidades necessárias para demonstrar a competência de interpretar informações de natureza científica e social são, de fato, habilidades de leitura. Se, novamente, retiramos as referências aos gráficos e tabelas, devemos utilizar informações para fazer inferências; resolver problemas com dados; e analisar informações como recurso para a construção de argumentos.

Um dos importantes atributos da Matemática consiste em sua natureza abstrata, e tal abstração está baseada nas capacidades de deduzir, inferir, prever e extrapolar, ou seja, na capacidade de pensamento crítico. Por isso, quando o jovem ou adolescente consegue transformar um enunciado (uma história, uma descrição em palavras) em um problema matemático, ele está, de fato, retirando o contexto, ou abstraindo dele a Matemática, de tal modo que o problema básico passa a ser entendido independentemente da situação em que foi apresentado, isto é, de sua aplicação.

A extração de um problema matemático com base em um enunciado em linguagem natural é um processo complexo. Para ensinar esse processo, o professor pode iniciar com problemas simples, aumentando aos poucos a complexidade. Novos conceitos e novas habilidades podem ser desenvolvidos em problemas de complexidade crescente, aumentando gradativamente a maneira de traduzir a linguagem natural em linguagem matemática, uma forma de raciocínio crítico. Dessa forma, ao engajar os alunos com suas perguntas, na resolução desses problemas, do mais simples aos mais complexos, o professor propicia a mobilização do pensamento crítico, exigindo habilidades usadas na leitura de outros textos e em outras situações da vida cotidiana que demandam o engajamento intelectual do indivíduo. Portanto, está ensinando a ler criticamente os textos de sua área de especialização.

Saber posicionar-se social e politicamente é fundamental para o jovem em formação. Por isso é importante que o professor desenvolva nos alunos a competência comunicativa, para que eles sejam capazes de utilizar com segurança os recursos comunicativos que forem necessários para determinados contextos, sabendo argumentar e defender suas opiniões com coerência, criticando, se necessário, no sentido de discordar daquilo que lhes é apresentado, mas sem recorrer a discussões sem fundamento ou concordar simplesmente por não saber argumentar.

Aprendizagem de vocabulário especializado

O conhecimento e o uso preciso de termos, operações e símbolos são essenciais para o domínio da matéria (assim como em toda disciplina). Nesse contexto, a Matemática é precisa: os significados de termos e os conceitos devem ser completamente unívocos, sem ambiguidades, sob a pena de, na falta desse conhecimento, o jovem ou o adolescente falhar na comunicação e na resolução de problemas. Por isso, professor e alunos devem estar completamente de acordo sobre os significados das palavras que usam para se comunicarem.

Existem termos matemáticos utilizados na linguagem cotidiana com sentidos diferentes. Estudos realizados sobre a apropriação de vocabulário mostram que uma criança, ao se deparar com uma palavra já conhecida, mas com sentido diferente, o primeiro significado se impõe a ela, mesmo que não faça sentido no contexto. Com os jovens, essa dificuldade de descartar o significado primário também pode acontecer. De acordo com alguns estudos, há uma probabilidade maior de os alunos perceberem os dois sentidos quando sua atenção é dirigida para o fato. Em uma pesquisa sobre conhecimentos matemáticos, Oliveira e Lopes (2012) destacam que, em um primeiro contato com o tema, os alunos não conseguem entender o significado matemático de um termo da linguagem natural.

Uma atividade proposta nesse mesmo estudo consistia na elaboração de um glossário pelos alunos, com base em um levantamento dos termos que eles consideravam mais importantes. Nesse trabalho, os alunos apresentavam a definição com as próprias palavras, fornecendo um exemplo, uma aplicação ou uma relação com outro termo. Quando os termos tinham significados diferentes na Matemática e na linguagem cotidiana, ambos eram registrados. Certamente, o conhecimento vocabular é essencial para a aprendizagem de novos conceitos apresentados aos alunos. Essa pesquisa mostra que a focalização no termo, no decorrer da aula, por exemplo, leva-os a procurar as diferenças com a linguagem cotidiana e a construir uma nova definição, dessa vez matemática, para o termo em questão.

Desse modo, a prática de leitura e escrita nas aulas de Matemática no Ensino Médio pode ser um caminho que propicia a relação professor/aluno e aluno/alunos mais interativa e, consequentemente, mais efetiva. Isso não apenas para a construção do conhecimento matemático, mas para o conhecimento em geral, contribuindo, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), para uma estratégia que repense os processos de ensino e aprendizagem, possibilitando aos alunos não apenas a aquisição de conhecimentos e competências, mas também convivência e realização individual, por meio de experiências inovadoras.

Desenvolvimento de estratégias de estudo

No Ensino Médio, é possível que alguns alunos ainda não tenham desenvolvido as estratégias de estudo independentes, esperadas nessa etapa da Educação Básica, na qual já deviam ter desenvolvido práticas de leitura (e de escrita, ou seja, práticas de letramento) mais autônomas. Em relação a qualquer leitura, mais ainda em relação a textos matemáticos, os alunos parecem depender do auxílio contínuo do professor. Pesquisadores (RIBEIRO; KAIBER, 2012) têm observado que a tendência é solicitar ajuda diante da primeira dificuldade na leitura do problema, sem ao menos tentar resolvê-la relendo, anotando e sublinhando. Entretanto, esses estudos também destacam que basta o professor orientá-los a fazer uma segunda leitura, que a superação das dificuldades já passa a ser notada. Essas práticas mostram que boa parte dos alunos não tem repertório de leitura adequado e, com isso, não desenvolveu estratégias de estudo que permitam um aprendizado autônomo.

Uma maneira de orientar o jovem ou adolescente a desenvolver estratégias próprias de estudo é ensiná-lo a utilizar o livro didático, pois este, se bem utilizado, fornece aos alunos uma oportunidade de revisar o conteúdo estudado e refletir sobre os conceitos abordados. Desse modo, o livro didático de Matemática auxilia na consulta e no esclarecimento de conceitos. Com o livro, os alunos determinam seus ritmos de leitura e de aprendizagem (eles podem até solicitar ajuda a algum membro da família e este pode ajudar, desde que seja um leitor e o material esteja apresentado de modo explícito).

Para que os alunos estudem de maneira independente, eles devem entender como o texto está estruturado. Saber usar a estrutura textual é uma habilidade que precisa ser desenvolvida, e os alunos precisam de estratégias que os ajudem a explorar todo o capítulo, a lê-lo de modo global, para entender que parte da informação é importante, que informações dependem de outras e o que é detalhe. Esse conteúdo pode fazer parte de uma aula cujo objetivo é conhecer o livro didático: ler o sumário; analisar como são sinalizados os títulos e os subtítulos (tamanho das letras, cores, uso de números); descobrir partes do texto e suas relações, o que os subtítulos indicam; verificar hierarquias entre seções e subseções; e elaborar um diagrama mostrando essas relações. Também, com o objetivo de adquirir estratégias de leitura e estudo independentes, eles podem ser orientados a fazer um resumo do capítulo contendo os conceitos mais importantes abordados, com exemplos ou aplicações.

Os documentos oficiais defendem que a Matemática no Ensino Médio tem valores formativo e instrumental. O foco na leitura, por um lado, desenvolve o raciocínio e o pensamento crítico; por outro, constitui-se em ferramenta indispensável para interpretar e resolver problemas corriqueiros.

O professor de Matemática tem a oportunidade de formar cidadãos que sejam capazes de expressarem suas ideias adequadamente e de modo competente, oralmente e por escrito, para que possam se inserir de pleno direito na sociedade e ajudar na construção e na transformação da sociedade em que atuam. Portanto, é preciso reconhecer que a linguagem matemática é de suma importância, não apenas para os estudiosos da área, mas para qualquer cidadão que necessita utilizá-la com criticidade e autonomia.

Bibliografia consultada

- ALRO, Helle; SKOVSMOSE, Ole. *Diálogo e aprendizagem em educação matemática*. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.
  Este livro argumenta que o bom diálogo em sala de aula está relacionado diretamente com a aprendizagem, relatando sua importância.
- BASSANEZI, Rodney C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.
  Este livro motiva o professor a usar a metodologia Modelagem Matemática no encaminhamento das aulas, partindo da ideia de que é possível articular atividades de modelagem e resolução de situações-problema, permitindo a análise de resultados, a interpretação de gráficos e tabelas, entre outras ações.
- BRASIL. Ministério da Educação. Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF: MEC, 1996. p. 27833. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 15 jun. 2020.
  Este site *apresenta a lei de diretrizes e bases da Educação Nacional.*
- ________. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2020.
  Este site *apresenta a versão final completa da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que norteia o trabalho do professor atendendo às demandas dos alunos desta época e preparando-os para o futuro.*
- ________. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. *Parecer CNE/CEB nº 3/2018*. Brasília, DF: 8 nov. 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=102311-pceb003-18&category_slug=novembro-2018-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 16 jun. 2020.
  Este documento apresenta o parecer homologado do Ministério da Educação e a atualização das Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, observadas as alterações introduzidas pela LDB por meio da Lei nº 13.415/2017.
- ________. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. *Parecer CNE/CEB nº 5/2011*. Distrito Federal, DF: Ministério da Educação, 4 maio 2011. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=9915-pceb005-11-1-1&Itemid=30192>. Acesso em: 15 jun. 2020.
  Este documento apresenta o parecer homologado do Ministério da Educação sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.
- ________. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2020.
  Este documento visa a um detalhamento esclarecedor de como os Temas Contemporâneos Transversais podem ser inseridos no contexto da Educação Básica e como articular esses temas com os conteúdos escolares.
- ________. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Ensino Médio. Brasília, 2000. p. 53.
  Este documento apresenta as diretrizes curriculares em âmbito nacional, que precedeu a Base Nacional Comum Curricular.
- ________. *PCN+ Ensino Médio*: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2002.
  A finalidade deste documento é delimitar a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias apresentando orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM).
- BROUSSEAU, Guy. *Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas*: conteúdos e métodos de ensino. Tradução de Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008.
  O documento apresenta uma teoria das situações didáticas, criada e aperfeiçoada ao longo de quatro décadas, incluindo os alunos, o meio que os cerca e o professor. O autor desenvolve esta teoria pautado na relação que se estabelece entre aluno, professor e conhecimento e no fato de que a relação existente entre eles necessita de regras e negociações, que o autor denomina como "contrato didático".
- ________. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, Cecília; IRMA, Saiz (Org.). *Didática da matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996. p. 48-72.
  Este livro é uma coleção com sete trabalhos escritos por profissionais diferentes. Os assuntos abordados nos trabalhos são voltados à educação matemática, com reflexões, análises e propostas didáticas.
- BURIASCO, Regina L. C.; SOARES, Maria T. C. Avaliação de sistemas escolares: da classificação dos alunos à perspectiva de análise de sua produção

matemática. In: VALENTE, Wagner R. (Org.). *Avaliação em matemática*: história e perspectivas atuais. Campinas: Papirus, 2008.

Este livro contém resultados de pesquisas que mostram as modificações que a avaliação escolar sofreu desde os tempos do Brasil Império até os dias atuais.

- CARBONELL, Jaume. *A aventura de inovar a mudança na escola.* Rio de Janeiro: Artmed, 2002.

  Este livro apresenta ao leitor práticas modernas que podem tornar a escola um espaço inovador.

- CASTILLO ARREDONDO, Santiago. *Avaliação educacional e promoção escolar.* Curitiba: InterSaberes, 2013.

  Este livro apresenta discussões sobre a avaliação educacional e formas como os professores podem aplicá-la. O autor desenvolve a prática avaliadora baseada não somente em conteúdos curriculares, mas em valores e atitudes essenciais para a formação cidadã.

- DAYRELL, Juarez; CARRANO, Paulo; MAIA, Carla L. (Org.). *Juventude* e e*nsino médio*: sujeitos e currículos em diálogo. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2014.

  Este livro apresenta reflexões a respeito do jovem no Brasil e de seus desdobramentos e relações com o currículo do Ensino Médio.

- DIAS, Paulo. Pontos de partida para uma dinâmica de trabalho colaborativo. In: GTI (Eds.). *O professor de matemática e os projectos de escola*. Lisboa: APM, 2008, p. 233-256.

  Este artigo apresenta o relato do trabalho de professores de Matemática de uma escola em condições precárias. Porém, a escola conta com o comprometimento de uma equipe de professores na realização de projetos que envolvem recursos tecnológicos.

- FRANCISCO, Vinicius Marcos; LIBÓRIO, Renata Maria Coimbra. Um estudo sobre o *bullying* entre escolares do Ensino Fundamental. *Psicologia*: Reflexão e Crítica, Porto Alegre, v. 22, n. 2, p. 200-207, 2009. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/prc/v22n2/a05v22n2.pdf>. Acesso em: 11 jul. 2020.

  O artigo levanta reflexões sobre o bullying *no ambiente escolar e apresenta um projeto de intervenção motivado por um relato escrito das experiências negativas de um aluno que sofria com práticas violentas.*

- FERNANDES, Grazielli; YUNES, Maria Angela Mattar; TASCHETTO, Leonidas Roberto. *Bullying* no ambiente escolar: o papel do professor e da escola como promotores de resiliência. *Revista Sociais e Humanas*, Santa Maria, v. 30, n. 3, p. 141-154, 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufsm.br/sociaisehumanas/article/download/27701/pdf>. Acesso em: 15 jun. 2020.

  Este artigo esclarece o que vem a ser o bullying *e relata a experiência de uma professora que realizou um projeto depois que descobriu o sofrimento de um de seus alunos ao voltar às aulas.*

- GRAMINHA, Cristiano V. Aplicação do método *fishbowl* na discussão do tratamento fisioterapêutico da artrite reumatoide no curso de graduação em fisioterapia. In: GARCÊS, Bruno Pereira (Org.). *Aprendizagem centrada nos estudantes em sala de aula*. Uberlândia: Edibrás, 2019.

  Este livro apresenta relatos da aplicação das diferentes metodologias ativas em sala de aula, que podem tornar o processo de ensino-aprendizagem mais significativo, despertando o interesse dos alunos.

- INEP. *Matrizes de Referência*. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/matriz-de-referencia>. Acesso em: 10 jul. 2020.

  Este documento visa indicar as habilidades a serem avaliadas em cada etapa da escolarização, além de orientar a elaboração de itens de testes e provas, que servem de referência na elaboração do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem).

- KLEIMAN, Angela B.; MORAES, Silvia E. *Leitura e interdisciplinaridade*. Campinas: Mercado de Letras, 1998.

  Este livro contém sugestões de práticas de organização do planejamento para que se realizem trabalhos interdisciplinares no ambiente escolar articulando diferentes áreas do conhecimento, a fim de ir além do modo tradicional de ensino.

- LEÃO, Geraldo *et al*. Juventude, projetos de vida e ensino médio. *Educação & Sociedade*, v. 32, n. 117, p. 1067-1084, 2011.

  O artigo relata parte de uma pesquisa feita com jovens que cursavam o Ensino Médio objetivando mostrar a visão deles em relação às contribuições da escola em suas vidas.

- LIUKAS, Linda. *Hello Ruby:* Adventures in Coding. New York: Feiwel & Friends, 2015.

  Este livro tem o objetivo de iniciar a linguagem de programação ensinando primeiro seus conceitos, sem que seja necessário ter um computador. A autora conta a história de uma menina que tem muita imaginação e interesse para resolver quebra-cabeças.

- LUCKESI, Cipriano C. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. São Paulo: Cortez, 2006.

  Este livro apresenta estudos específicos sobre temas da avaliação da aprendizagem de maneira crítica e propõe novos caminhos e possibilidades nessa área da prática educativa escolar.

- MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. *Fundamentos de metodologia científica*. 8. ed. São Paulo: Atlas, 2017.

  O conteúdo deste livro serve de embasamento para o trabalho profissional, apresentando procedimentos didáticos, fundamentos para trabalhos escolares, orientações de análises de textos, relatórios, memorandos, entre outros aspectos inerentes à educação.

- MOREIRA, Marco Antonio. *Teorias de aprendizagem*. 2. ed. São Paulo: EPU, 2011.

  A obra apresenta de maneira acessível teorias de aprendizagem importantes e significativas para a Educação, como o construtivismo, o humanismo, o behaviorismo, entre outras abordagens.

- MOREIRA, Jonathan Rosa; RIBEIRO, Jefferson Bruno Pereira. Prática pedagógica baseada em metodologia ativa: aprendizagem sob a perspectiva do letramento informacional para o ensino na educação profissional. Periódico Científico *Outras palavras*, v. 12, n. 2, 2016, p. 93. Disponível em: <http://revista.faculdadeprojecao.edu.br/index.php/Projecao5/article/download/722/608>. Acesso em: 29 jun. 2020.

  Artigo que relata a análise de um estudo feito para apresentar um modelo de prática pedagógica baseado na metodologia ativa de aprendizagem para a educação profissional.

- MORETTI, Méricles Thadeu.; FLORES, Cláudia Regina. *Elementos do contrato didático*. (Ensaio). Mimeo. UFSC, 2002.

  Neste trabalho, os autores fazem uma estruturação da noção de contrato didático e discutem suas implicações na prática escolar.

- NOGUEIRA, Nilbo R. *Interdisciplinaridade aplicada*. 3. ed. São Paulo: Érica, 1998.

  O livro tem como objetivo definir as diferenças entre multidisciplinaridade, pluridisciplinaridade, interdisciplinaridade e transdisciplinaridade e relacionar a pedagogia dos projetos com a interdisciplinaridade.

- PAIXÃO, Claudiane Reis da (org.). *Avaliação*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.

  Esse livro apresenta diversos temas relacionados à avaliação, mostrando na prática seu funcionamento e propiciando ao leitor mais subsídios para o estudo sobre a avaliação.

- RABELO, Edmar Henrique. *Avaliação*: novos tempos, novas práticas. Petrópolis: Vozes, 1998.

  O autor apresenta uma proposta de avaliação, baseada em pesquisas, que leva em consideração discussões sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a nova LDB.

- OLIVEIRA, Roberto Alves de; LOPES, Celi Espasandin. O ler e o escrever na construção do conhecimento matemático no Ensino Médio. *Bolema*, Rio Claro, v. 26, n. 42b, p. 513-534, abr. 2012. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2012000200006&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 16 jul. 2020.

  O artigo apresenta uma pesquisa qualitativa que investigou as estratégias de leitura e escrita no ensino de Matemática analisando as atividades propostas e organizando-as em um portfólio.

- OLIMPIO JUNIOR, Antonio; VILLA-OCHOA, Jhony A. Coletivos pensantes e compreensão conceitual no cálculo diferencial e integral: uma composição de olhares. In: BORBA, Marcelo. C.; CHIARI, Aparecida S. S. (Org.). *Tecnologias digitais e educação matemática*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013. p. 141-174.

  Este livro é uma reunião de vários trabalhos, de diferentes pesquisadores, voltados às tecnologias digitais para a educação.

- PRENSKY, Marc. O papel da tecnologia no ensino e na sala de aula. Tradução de Cristina M. Pescador. *Conjectura*, Caxias do Sul, v. 15, n. 2, p. 201-204, maio/ago. 2010. Disponível em: <http://www.ucs.br/etc/revistas/index.php/conjectura/article/view/335>. Acesso em: 30 jun. 2020.

  O autor deste artigo argumenta que uma das principais metas a serem atingidas no século XXI pelos professores é saber com qual pedagogia devemos ensinar nossos alunos. O papel da tecnologia, nas salas de aula, deveria ser o de oferecer suporte ao novo paradigma de ensino. Assim, é proposta uma discussão: será que as tecnologias estão cumprindo esse papel?

- REIS, Francislene Glória de Freitas et al. Gallery walk: o uso da aprendizagem colaborativa no ensino de bioquímica. In: GARCÊS, Bruno Pereira (Org.). *Aprendizagem centrada nos estudantes em sala de aula*. Uberlândia: Edibrás, 2019.

  A obra apresenta relatos da aplicação de diferentes metodologias ativas em sala de aula. O artigo em questão descreve o método Gallery walk e oferece exemplos que podem tornar o processo de ensino-aprendizagem mais significativo e motivador.

- RIBEIRO, Vânia G. da Silva; KAIBER, Carmen T. *Leitura e interpretação de textos matemáticos*: construindo competências no Ensino Médio. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/cc/PDF/CC4.pdf>. Acesso em: 13 maio 2020.

  O texto apresenta um estudo com o objetivo de identificar as dificuldades na interpretação e na produção de textos matemáticos por alunos do Ensino Médio por meio de coleta e análise de dados, de acordo com as competências e as habilidades preconizadas pelo Enem e pelos PCN.

- SANTALÓ, Luis A. Matemática para não matemáticos. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Org.). *Didática da matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

  Por meio do processo didático de ensino da Matemática, o professor deve levar os alunos ao desenvolvi-

mento constante. A didática da Matemática deve ser uma ferramenta que auxilia o trabalho do professor, mas que seja voltada ao entendimento dos processos de aprendizagem dos alunos, de modo que, cada vez mais, proporcione seus avanços.

- SUNAGA, Alexsandro; CARVALHO, Camila Sanches. As tecnologias digitais no ensino híbrido. In: BACICH, Lilian; NETO, Adolfo Tanzi; TREVISANI, Fernando de Mello (Org.). *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

  Baseado em pesquisas, este livro aborda o uso da tecnologia na sala de aula, fazendo uma ligação entre o padrão atual de ensino e a estruturação de um novo currículo escolar. O artigo apresenta análises da educação híbrida com base em experiências vividas por um grupo de professores das redes pública e privada.

- SILVA, Benedito A. da. Contrato didático. In: FRANCHI, Anna et al. *Educação matemática*: uma introdução. São Paulo: Educ, 1999.

  O artigo apresenta conceitos relacionados à didática da Matemática. Com o objetivo de contribuir para pesquisas voltadas a esse tema, o autor expressa a necessidade de mostrar ao alunos uma matemática contextualizada, tornando a aprendizagem mais significativa.

- SILVA, Gabriel Veloso da et al. *Promoção de saúde mental para adolescente em uma escola de Ensino Médio*: um relato de experiência. Rev. NUFEN, Belém, v. 11, n. 2, p. 133-148, maio/ago. 2019. Disponível em: <http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2175-25912019000200009&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 30 abr. 2020.

  O texto apresenta um relato de experiência de acadêmicos que realizaram uma atividade de intervenção sobre educação e saúde com estudantes do Ensino Médio, envolvendo relações interpessoais, bullying *e suicídio.*

- SILVA, Rodrigo Tavares da. *Atividades para estudo de integrais em um ambiente de ensino híbrido*. 2019. 128 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2019.

  Essa dissertação apresenta reflexões sobre o estudo de integrais e o uso da tecnologia em uma perspectiva de ensino híbrido, apresentando discussões pertinentes a respeito desse tipo de ensino nas aulas de Matemática.

- SOUZA, Priscila R.; ANDRADE, Maria do Carmo F. Modelos de rotação do ensino híbrido: estações de trabalho e sala de aula invertida. *E-Tech*: Tecnologias para Competitividade Industrial, Florianópolis, v. 9, n. 1, p. 3-16, 2016.

  Este artigo trata de estudos de caso que utilizaram o modelo de Rotação por estações de trabalho e também o modelo de Sala de aula invertida. As autoras relatam experiências e apresentam sugestões de sites *para o aprofundamento do estudo de ambos os modelos de ensino, oferecendo um valioso conteúdo para quem quer implementar essas metodologias em suas aulas.*

- TOMAZ, Vanessa S.; DAVID, Maria Manuela M. S. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

  Neste livro, as autoras refletem sobre como lidar com a interdisciplinaridade no ensino da Matemática e apresentam situações práticas em sala de aula que possibilitam várias aprendizagens.

- VALENTE, José Armando. *Blended learning* e as mudanças no ensino superior: a proposta da sala de aula invertida. *Educar em Revista*, Curitiba, Ed. Especial, n. 4, p. 79-97, 2014.

  Este texto aborda reflexões sobre a necessidade de tornar presentes práticas inovadoras na sala de aula, destacando a postura do professor diante disso. Ele apresenta também detalhes sobre a metodologia Sala de aula invertida.

- VIANA, Maria Luiza. Estéticas, experiências e saberes: artes, culturas juvenis e o Ensino Médio. In: DAYRELL, Juarez; CARRANO, Paulo; MAIA, Carla L. (Org.). *Juventude e Ensino Médio*: sujeitos e currículos em diálogo. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2014.

  O artigo trata de assuntos relacionados aos desafios do Ensino Médio e à necessidade de levar aos alunos saberes que os ajudarão em seus projetos de vida e em suas escolhas para o futuro.

- VILLAS BOAS, Benigna Maria de Freitas. *Conversas sobre avaliação*. Campinas: Papirus, 2019.

  Este livro aborda temas que comumente geram dúvidas sobre o assunto avaliação, apresentando reflexões e apontamentos para o dia a dia em sala de aula.

- ________. *Virando a escola do avesso por meio da avaliação*. Campinas: Papirus, 2008.

  Este livro analisa duas problemáticas da escola brasileira: repetência e evasão escolar, além de discutir o uso da avaliação formativa e abordar a autoavaliação.

- WASSERMANN, Selma. *Brincadeiras sérias na Escola Primária*. Lisboa: Instituto Piaget, 1990.

  Neste livro, a autora demonstra que as atividades lúdicas, no âmbito da sala de aula, podem contribuir para o desenvolvimento emocional, social e intelectual das crianças.

2 Sugestões de cronogramas

A seguir, apresentamos duas sugestões de cronogramas para o trabalho com esta coleção, **Opção 1** e **Opção 2**, nas quais os conteúdos estão distribuídos em seis volumes, com seus respectivos capítulos.

Tanto uma quanto a outra dão sugestões para o professor elaborar o planejamento de modo **bimestral**, **trimestral** ou **semestral**. Ainda assim, ele tem autonomia pedagógica para elaborar outro cronograma para esta coleção, baseando-se em suas necessidades e na realidade que o cerca, como a grade curricular, a quantidade de aulas e horas destinadas à Matemática e as condições de cada turma.

Neste quadro, chamaremos de:

- F.A.Q.E.L. o volume de Funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica;
- T.F.P.P. o volume de Trigonometria, fenômenos periódicos e programação;
- G.S.M.F. o volume de Grandezas, sequências e matemática financeira;
- M.S.L.G.A. o volume de Matrizes, sistemas lineares e geometria analítica;
- E.A.C.P. o volume de Estatística, análise combinatória e probabilidade;
- G.E.P. o volume de Geometria espacial e plana.

Bimestre	
1º	Volume **F.A.Q.E.L.** Capítulos **1** e **2**
2º	Volume **F.A.Q.E.L.** Capítulos **3**, **4** e **5**
3º	Volume **T.F.P.P.** Capítulos **1** e **2**
4º	Volume **T.F.P.P.** Capítulos **3** e **4**
5º	Volume **G.S.M.F.** Capítulo **1**
6º	Volume **G.S.M.F.** Capítulos **2** e **3**
7º	Volume **M.S.L.G.A.** Capítulos **1, 2** e **3**
8º	Volume **M.S.L.G.A.** Capítulos **4** e **5**
9º	Volume **E.A.C.P.** Capítulos **1** e **2**
10º	Volume **E.A.C.P.** Capítulo **3**
11º	Volume **G.E.P.** Capítulos **1** e **2**
12º	Volume **G.E.P.** Capítulo **3**

Trimestre	
1º	Volume **F.A.Q.E.L.** Capítulos **1**, **2** e **3**
2º	Volume **F.A.Q.E.L.** Capítulos **4** e **5**
3º	Volume **G.S.M.F.** Capítulos **1**, **2** e **3**
4º	Volume **E.A.C.P.** Capítulos **1, 2** e **3**
5º	Volume **M.S.L.G.A.** Capítulos **1** e **2**
6º	Volume **M.S.L.G.A.** Capítulos **3**, **4** e **5**
7º	Volume **T.F.P.P.** Capítulos **1** e **2**
8º	Volume **T.F.P.P.** Capítulos **3** e **4**
9º	Volume **G.E.P.** Capítulos **1**, **2** e **3**

Semestre	
1º	Volume **F.A.Q.E.L.** Capítulos **1**, **2**, **3**, **4** e **5**
2º	Volume **T.F.P.P.** Capítulos **1**, **2**, **3** e **4**
3º	Volume **G.S.M.F.** Capítulos **1**, **2** e **3**
4º	Volume **M.S.L.G.A.** Capítulos **1**, **2**, **3**, **4** e **5**
5º	Volume **E.A.C.P.** Capítulos **1**, **2** e **3**
6º	Volume **G.E.P.** Capítulos **1**, **2** e **3**

3 Painel do volume

Nesta coleção, cada volume procura trabalhar os conhecimentos da área de Matemática de maneira dinâmica, buscando, sempre que possível, articular conteúdos multimodais e manifestações plurais de cultura e propondo o desenvolvimento de ações que levem os alunos a serem protagonistas de sua aprendizagem de modo significativo, conforme a realidade deles.

Desse modo, para facilitar o trabalho do professor durante o planejamento de suas aulas, apresentamos a lista de competências e de habilidades cujo desenvolvimento é propiciado neste volume e um painel geral de conteúdos e objetivos.

Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias e Habilidades relacionadas a elas

CEMT 3

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

EM13MAT309

- Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais

EM13MAT315

- Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

CEMT 5

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

EM13MAT504

- Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

EM13MAT505

- Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

EM13MAT509

- Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

Competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias

CECNT3

Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

Painel geral

O painel geral de conteúdos e objetivos está organizado com as seguintes colunas:

- **Capítulo**: identifica o número do capítulo deste volume.
- **Conteúdo/conceitos principais**: apresenta conteúdos e/ou conceitos principais por capítulo.
- **Objetivos específicos**: indica os objetivos específicos a serem obtidos no estudo de cada capítulo.
- **BNCC**: apresenta o código das Competências gerais (CG), das Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias (CEMT), das Competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias (CECNT) e das Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias (EM13MATxxx), da BNCC, cujo trabalho é favorecido no volume conforme o capítulo.
- **Integrações possíveis entre componentes curriculares**: indica a possibilidade de integração com componentes curriculares, conforme o capítulo.
- **Temas contemporâneos transversais**: indica os temas contemporâneos explorados em cada capítulo.

	Conteúdos/conceitos principais	Objetivos específicos	BNCC	Integrações possíveis entre componentes curriculares	Temas contemporâneos transversais
Capítulo 1	• Ponto, reta e plano • Definição de espaço • Postulados • Posições relativas entre duas retas • Posições relativas entre reta e plano • Posições relativas entre dois planos • Projeções ortogonais • Projeção de um ponto sobre um plano • Projeção de uma figura sobre um plano • Projeção de uma reta ou de um segmento de reta sobre um plano • Distância entre dois pontos • Distância entre ponto e reta • Distância entre ponto e plano • Distância entre duas retas paralelas • Distância entre reta e plano paralelos • Distância entre dois planos paralelos • Distância entre retas reversas	• Compreender os conceitos de ponto, reta e plano. • Identificar o espaço enquanto conjunto de pontos. • Reconhecer método ou sistema dedutivo, teorema, conceitos primitivos e postulados. • Identificar a posição relativa entre: duas retas; reta e plano; dois planos. • Identificar a projeção ortogonal de: um ponto sobre um plano; uma figura sobre um plano; uma reta ou um segmento de reta sobre um plano. • Compreender os conceitos de distância entre: dois pontos; ponto e reta; ponto e plano; duas retas distintas e paralelas; reta e planos paralelos; dois planos distintos e paralelos; retas reversas. • Utilizar os conceitos sobre posições relativas entre retas e planos, sobre projeções ortogonais, figuras e retas, bem como sobre distâncias, na resolução de problemas.	• CG 3 • CECNT 3 • CEMT 5 • EM13MAT509	• Arte • Física • Geografia	• Ciência e tecnologia
Capítulo 2	• Poliedros • Poliedros convexos e não convexos • Relação de Euler • Poliedros de Platão • Poliedros regulares	• Identificar poliedros e seus elementos. • Reconhecer as formas poliédricas em objetos, embalagens, construções, entre outros. • Perceber a diferença entre prisma e pirâmide segundo suas características. • Reconhecer poliedros convexos e não convexos.	• CG 1 • CG 2 • CG 5 • CEMT 3 • CEMT 5	• Biologia • Educação Física • Física • Geografia	• Educação para o consumo

	Conteúdos/conceitos principais	Objetivos específicos	BNCC	Integrações possíveis entre componentes curriculares	Temas contemporâneos transversais
Capítulo 2	• Área do quadrado • Área do retângulo • Área do paralelogramo • Área do losango • Área do trapézio • Área do triângulo • Áreas de polígonos regulares • Razão entre áreas de figuras planas • Ladrilhamento • Ladrilhamento regular • Ladrilhamento semirregular • Prismas • Elementos e classificação de um prisma • Área da superfície de um prisma • Volume de um prisma • Princípio de Cavalieri • Pirâmides • Elementos e classificação de uma pirâmide • Área da superfície de uma pirâmide • Volume de uma pirâmide • Tronco de pirâmide • Elemento de tronco de pirâmide • Área da superfície de um tronco de pirâmide • Volume do tronco de pirâmide	• Compreender e utilizar a relação de Euler. • Reconhecer os poliedros de Platão e os poliedros regulares. • Calcular a área de algumas figuras planas. • Calcular a área de polígonos regulares e de alguns não regulares. • Compreender o conceito de ladrilhamento e os tipos de ladrilhamentos. • Utilizar o conceito de ladrilhamento do plano na resolução de problemas. • Reconhecer e analisar prismas, pirâmides e troncos de pirâmide, bem como identificar seus elementos e suas propriedades. • Calcular a área e o volume de prismas, pirâmides e troncos de pirâmide. • Utilizar os conceitos relacionados a poliedros, prismas, pirâmides e troncos de pirâmide na resolução de problemas.	• EM13MAT309 • EM13MAT315 • EM13MAT504 • EM13MAT505	• História • Química	

Capítulo 3	• Conceito de cilindro circular • Elementos e classificação de um cilindro • Área do círculo e do setor circular • Área da superfície de um cilindro reto • Volume do cilindro • Cone circular • Elementos e classificação de um cone • Área da superfície de um cone reto • Volume do cone • Tronco de um cone reto • Elementos do tronco de cone • Área da superfície de um tronco de cone reto • Volume de um tronco de cone reto • Esfera • Elementos da esfera • Volume de uma esfera • Área da superfície de uma esfera • Projeções cartográficas • Classificação das projeções quanto ao tipo de superfície e à deformação	• Identificar cilindros, cones, troncos de cone e esferas, bem como seus elementos e suas propriedades. • Reconhecer as formas estudadas no capítulo em objetos, embalagens, construções, entre outros. • Perceber a diferença entre cilindro, cone e esfera segundo suas características. • Calcular a área de círculo e setor circular. • Calcular a área e o volume de cilindros, cones, troncos de cone e esferas. • Utilizar os conceitos relacionados a corpos redondos, com relação a cilindros, cones, troncos de cone e esferas, na resolução de problemas. • Compreender o conceito de projeções cartográficas. • Identificar e investigar os tipos de projeções cartográficas, de acordo com sua deformação.	• CEMT 3 • CEMT 5 • EM13MAT309 • EM13MAT504 • EM13MAT509	• Física • Química	• Diversidade cultural

4 Sugestões para aprofundamento

Essa seção tem como objetivo oferecer ao professor subsídios para aprofundar seus estudos e pesquisas, visto que é um profissional sempre em busca de novas reflexões e que acompanha as mudanças no processo educativo. A seguir, apresentamos referências e sugestões comentadas de livros, *sites*, vídeos e *podcasts* para pesquisa ou consulta. Cabe ressaltar que o professor também pode realizar suas pesquisas em referências que não foram citadas nesta coleção.

Sugestões de leitura para o professor

Metodologia de ensino de Matemática

- ***Ensino da matemática: concepções, metodologias, tendências e organização do trabalho pedagógico***

  GÓES, Anderson R. T.; GÓES, Heliza C. Curitiba: InterSaberes, 2015.

  Propõe maneiras de melhorar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática em sala de aula dos ensinos Fundamental e Médio, contemplando as novas tendências dessa área. Apresenta o histórico da Matemática no Brasil, bem como recursos e materiais didáticos relevantes para o ensino da Matemática, como planejamento, elaboração e avaliação de atividades e o uso de livros didáticos e paradidáticos.

- ***Modelagem matemática no ensino***

  BIEMBENGUT, Maria S.; HEIN, Nelson. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2018.

  Neste livro, a modelagem matemática é mostrada no cotidiano da sala de aula em suas várias possibilidades de trabalho, dando opções ao professor de tornar suas aulas mais significativas e motivadoras.

- ***Resolver problemas e pensar a matemática***

  CONTI, Keli C.; LONGO, Conceição A. C. (Org.). Campinas: Mercado de Letras, 2017.

  Livro que apresenta um conjunto de textos sobre o tema "resolução de problemas", indicando etapas importantes a serem trabalhadas nas aulas de Matemática, além de mostrar como é possível tornar a sala de aula um lugar para questionar, contextualizar e formular problemas, e não apenas propor questões com respostas previsíveis.

- ***Sala de aula invertida: uma metodologia ativa de aprendizagem***

  BERGMANN, Jonathan; SAMS, Aaron. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

  Nesta obra, o autor explica como utilizar a metodologia ativa sala de aula invertida *e as tecnologias a ela associadas, visando obter dos alunos mais motivação, desempenho e autonomia.*

Formação de professores

- ***A fascinante história da matemática: da pré-história aos dias de hoje***

  LAUNAY, Mickaël. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019.

  Neste livro, a Matemática é apresentada de um modo belo, poético e cativante. Com suas histórias, curiosidades e teoremas, está além de apenas fórmulas que necessitam ser decoradas. Com uma linguagem simples e acessível, leva o leitor a conhecer o início da contagem, da geometria e da álgebra e vai até os estudos de vanguarda na área da robótica atual.

- ***Aprender e ensinar geometria***

  LORENZATO, Sergio. Campinas: Mercado de Letras, 2015.

  Propõe o ensino de Geometria levando os alunos a ser participativos, tornando assim as aulas motivadoras e significativas.

- ***Cálculo das funções de uma variável***

  ÁVILA, Geraldo. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003. v. 1.

  O livro motiva o interesse do leitor pela Matemática ao mesmo tempo que oferece uma visão mais completa do papel do cálculo nos contextos científico, histórico e cultural dos últimos quatro séculos.

- ***Constituição do saber matemático: reflexões filosóficas e históricas***

  MENEGHETTI, Renata C. G. Londrina: Eduel, 2010.

  Este livro apresenta elementos para discutir o processo de constituição do saber matemático. Propõe, ainda, um exame das concepções de conhecimento matemático em algumas correntes filosóficas, desde o tempo de Platão, que foram significativas para o desenvolvimento da Matemática.

- ***Culturas juvenis: múltiplos olhares***

  CATANI, Afrânio M.; GILIOLI, Renato S. P. São Paulo: Editora Unesp, 2008.

  Livro que mostra como as manifestações das culturas juvenis têm aumentado cada vez mais, configurando-se como um panorama cultural variado e de tendências de maneiras de expressão em relação aos jovens.

- ***Descobrindo a geometria fractal: para a sala de aula***

  BARBOSA, Ruy Madsen. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

  Neste livro é apresentado um estudo sobre os fractais, voltado para o uso em sala de aula, buscando introduzi-lo na Educação Matemática brasileira. Contém capítulos específicos, como os de criação e exploração de fractais, de manipulação de materiais concretos e de relacionamento com o triângulo de Pascal, sobretudo um, com recursos computacionais – softwares educacionais em uso no Brasil.

- ***Didática da matemática: uma análise da influência francesa***

  PAIS, Luiz Carlos. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

  Este livro aborda conceitos principais da tendência conhecida como "didática francesa" e também temas como transposição didática, contrato didático, obstáculos epistemológicos e engenharia didática. Além disso, essa tendência é adotada ao trabalhar as concepções dos alunos e a formação de professores.

- ***História e tecnologia no ensino da matemática***

  CARVALHO, Luiz M. et al. (Org.). Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. v. 2.

  Coletânea relevante de trabalhos que discutem a qualidade da Educação Básica no Brasil, com modelos de ensino visando a uma qualidade melhor na formação dos alunos.

- ***Introdução à sociologia da juventude***

  GROPPO, Luís A. Jundiaí: Paco Editorial, 2017.

  Este livro apresenta contribuições fundamentais da Sociologia para conhecer melhor as juventudes nas sociedades atuais.

- ***Jovens e cotidiano: trânsitos pelas culturas juvenis e pela escola da vida***

  STECANELA, Nilda. Caxias do Sul: EdUCS, 2010.

  O livro trabalha temas que vão desde a abordagem histórico-sociológica da categoria "juventude", passando pela questão educacional, até a problemática das identidades na sociedade moderna, além de discussões a respeito da territorialidade e seus significados.

- ***Matemática básica interdisciplinar***

  AVERSI-FERREIRA, Tales A. Campinas: Átomo, 2018.

  Esta obra aborda a Matemática básica de modo prático e interdisciplinar com as áreas de Física, Química e Biologia. Apresenta discussões teóricas e exercícios, tendo o objetivo de levar os alunos ao domínio das operações matemáticas e sua aplicabilidade nessas diferentes áreas, bem como às metodologias científicas aplicadas a cada caso.

- ***O processo de avaliação nas aulas de matemática***

  LOPES, Celi E.; MUNIZ, Maria I. S. (Org.). Campinas: Mercado de Letras, 2010.

  Relata uma prática avaliativa que resulta da dissertação de mestrado **A prática avaliativa nas aulas de Matemática: uma ação compartilhada com os alunos**. *Também apresenta instrumentos avaliativos e a maneira de colocá-los em prática, bem como a formação contínua de professores de Matemática que atuam em diferentes níveis da Educação Básica.*

Educação Matemática

- ***Álgebra linear***

  BOLDRINI, José L. et al. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

  Enfatiza o uso dos conceitos de Álgebra no decorrer de todos os textos. Os pré-requisitos para a utilização deste livro são os tópicos de Matemática normalmente estudados no Ensino Médio.

- ***Da etnomatemática a arte-*****design** ***e matrizes cíclicas***

  GERDES, Paulus. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

  Este livro discute e também dá exemplos de como a Matemática se relaciona com outras atividades humanas, quebrando barreiras entre áreas que muitas vezes são vistas de modo estanque no Ensino Médio ou no Ensino Superior.

- ***Educação matemática: da teoria à prática***

  D'AMBROSIO, Ubiratan. 23. ed. Campinas: Papirus, 2019.

  Neste livro são abordados aspectos da cognição de natureza matemática e questões teóricas da educação. Além disso, apresenta discussões sobre temas diretamente ligados à sala de aula e às inovações da prática docente, propondo reflexões sobre o assunto.

- ***Informática e educação matemática***

  BORBA, Marcelo de C.; PENTEADO, Miriam G. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

  Traz o resultado de um trabalho sobre informática educativa e exemplos do uso da informática com alunos e professores relacionados à utilização de computadores e calculadoras gráficas em Educação Matemática.

- ***Relações de gênero, educação matemática e discurso: enunciados sobre mulheres, homens e matemática***

  SOUZA, Maria Celeste R. F.; FONSECA, Maria da Conceição F. R. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

  Este livro proporciona uma reflexão sobre o modo como as relações de gênero permeiam as práticas educativas, em particular as que se constituem no âmbito da Educação Matemática. Propõe uma análise que mostra como os discursos sobre relações de gênero e Matemática repercutem e produzem desigualdades, abrangendo aspectos que envolvem vida doméstica, relações de trabalho, o cotidiano escolar, entre outros.

- ***Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica: sobre linguagens e práticas culturais***

  FLORES, Cláudia R.; CASSIANI, Suzani. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

  Contribui para a propagação dos diferentes modos de pensar e pesquisar os problemas da educação, abordando questões tanto matemáticas quanto científicas.

Sites, vídeos e *podcasts*

- ***Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática***

  Disponível em: <https://www.ime.usp.br/caem/index.php>. Acesso em: 24 jun. 2020.

  Trata-se de um órgão que presta assessoria e formação continuada referente ao aperfeiçoamento e extensão científico-cultural para professores e estudantes de Matemática. Entre as várias atividades, oferece cursos, oficinas e palestras e promove eventos para os diferentes níveis de ensino.

- ***Matemática Humanista***
  Disponível em: <https://www.matematicahumanista.com.br/podcast>. Acesso em: 25 jun. 2020.
  Primeiro **podcast** *sobre Educação Matemática e Matemática Humanista do Brasil, com entrevistas,* **reviews** *de livros e eventos, humor e arte, tudo com o clima típico das rádios. Além disso, apresenta posicionamentos diante do ensino e da aprendizagem de Matemática bastante diferentes dos mais usualmente vividos em escolas e universidades.*
- ***Ministério da Educação (MEC)***
  Disponível em: <https://www.youtube.com/ministeriodaeducacao_MEC/>. Acesso em: 24 jun. 2020.
  Disponibiliza vídeos institucionais desenvolvidos pelo MEC e as últimas notícias sobre educação no país.
- ***Minuto IBGE***
  Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/minuto-ibge.html>. Acesso em: 25 jun. 2020.
  Podcast que apresenta fatos, curiosidades, relatos e dados relevantes que estão presentes no cotidiano dos brasileiros. Consiste em um programa de rádio semanal disponibilizado gratuitamente, para emissoras de todo o país, por meio da Rede Nacional de Rádio.
- ***Nova Escola***
  Disponível em: <https://novaescola.org.br/>. Acesso em: 25 jun. 2020.
  Edição on-line *que dá aos alunos a oportunidade de acessar diversas informações sobre educação, em várias áreas do conhecimento, pesquisar artigos publicados e consultar o acervo da revista.*
- ***Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas***
  Disponível em: <http://www.obmep.org.br/>. Acesso em: 24 jun. 2020.
  O site contém várias informações sobre o evento e possibilita às escolas que se inscrevam on-line. *Apresenta também informações sobre provas, gabaritos, datas, escolas inscritas, entre outras.*
- ***O Quadro Negro***
  Disponível em: <http://www.central3.com.br/category/podcasts/o-quadro-negro/>. Acesso em: 25 jun. 2020.
  Traz informações, trocas de experiências, análises e discussões pontuais sobre assuntos variados da educação, tornando o podcast *um espaço aberto para que educandos, educadores e todos os interessados participem do tema proposto.*
- ***Portal Aprendiz***
  Disponível em: <https://portal.aprendiz.uol.com.br/>. Acesso em: 24 jun. 2020.
  Tem como maior objetivo mostrar que é possível tornar as cidades espaços educativos, onde se pode aprender, criar, pensar e transformar. Assim, as oportunidades educativas que as cidades oferecem constituem o principal foco das reportagens publicadas no site, *fazendo dos territórios lugares mais educadores, inteligentes, sustentáveis, criativos, inclusivos e democráticos.*
- ***Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos (RBEP)***
  Disponível em: <http://rbep.inep.gov.br/ojs3/index.php/rbep/issue/view/423>. Acesso em: 24 jun. 2020.
  No site é possível encontrar edições anteriores da revista, além da opção de pesquisar por artigos, que podem ser baixados. Trata-se de um periódico quadrimestral, publicado em formatos impresso e eletrônico. A RBEP publica artigos inéditos, resultantes de pesquisas que apresentem consistência, rigor e originalidade na abordagem do tema e que contribuem para a construção do conhecimento na área da educação.

Cursos e instituições

- ***Ucsal – Universidade Católica de Salvador***
  Especialização em Docência em Matemática
  Disponível em: <https://www.ucsal.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***Uece – Universidade Estadual do Ceará***
  Especialização em Ensino de Matemática
  Mestrado Profissional em Matemática
  Disponível em: <http://www.uece.br/ced/cursos/lato-sensu/presencial/metodologia-do-ensino-de-matematica/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UEFS – Universidade Estadual de Feira de Santana***
  Especialização em Matemática
  Mestrado Profissional em Matemática
  Disponível em: <http://www.uefs.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UEG – Universidade Estadual de Goiás***
  Especialização em Matemática e Educação Matemática
  Especialização em Matemática para a Educação Básica e Superior
  Especialização em Matemática Pura e Aplicada
  Especialização em Ensino da Matemática
  Disponível em: <http://www.prp.ueg.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UEL – Universidade Estadual de Londrina***
  Especialização em Estatística com Ênfase em Pesquisa Quantitativa
  Disponível em: <http://www.uel.br/pos/estatistica-quantitativa/portal/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
  Mestrado e Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática
  Disponível em: <http://www.uel.br/pos/mecem/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
  Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional
  Disponível em: <http://www.uel.br/pos/pgmac/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
  Mestrado Profissional em Matemática
  Disponível em: <http://www.uel.br/pos/profmat/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UEM – Universidade Estadual de Maringá***
  Mestrado e Doutorado em Educação para a Ciência e Matemática
  Disponível em: <http://www.pcm.uem.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.

Mestrado e Doutorado em Matemática
Disponível em: <http://www.pma.uem.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
Mestrado Profissional em Matemática
Disponível em: <http://www.profmat.uem.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.

- ***UEMG – Universidade do Estado de Minas Gerais***
Especialização em Ensino de Ciências e Matemática
Disponível em: <http://www.uemg.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***Ufal – Universidade Federal de Alagoas***
Mestrado e Doutorado em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Disponível em: <http://www.ufal.edu.br/unidadeacademica/im/pt-br/pos-graduacao/matematica>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***Ufam – Universidade Federal do Amazonas***
Mestrado e Doutorado em Matemática
Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
Disponível em: <https://www.ufam.edu.br/pos-graduacao.html>. Acesso em: 25 jun. 2020.
- ***Ufes – Universidade Federal do Espírito Santo***
Mestrado em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
Disponível em: <http://www.matematica.ufes.br/pt-br/pos-graduacao/PPGMAT/linhas-de-pesquisa>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFMS – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul***
Mestrado e Doutorado em Educação Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
Disponível em: <http://posgraduacao.ufms.br/portal/cursos/buscar>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFPB – Universidade Federal da Paraíba***
Pós-Graduação em Matemática – Mestrado e Doutorado
Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional
Mestrado Profissional em Matemática
Disponível em: <http://www.mat.ufpb.br/posgrad/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFPE – Universidade Federal de Pernambuco***
Mestrado em Educação em Ciências e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Estatística – Mestrado e Doutorado
Programa de Pós-Graduação em Matemática – Mestrado e Doutorado
Programa de Pós-Graduação em Matemática Computacional – Doutorado
Disponível em: <https://www.ufpe.br/cursos>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul***
Mestrado e Doutorado Acadêmico em Matemática
Mestrado e Doutorado Acadêmico em Matemática Aplicada
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Disponível em: <http://www.ufrgs.br/ufrgs/ensino/pos-graduacao>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro***
Especialização em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
Mestrado e Doutorado em Matemática
Disponível em: <http://app.pr2.ufrj.br/listarStrictoMestreDoutor>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte***
Mestrado e Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática
Mestrado em Matemática Aplicada e Estatística
Mestrado Profissional em Matemática
Disponível em: <https://sigaa.ufrn.br/sigaa/public/curso/lista.jsf?nivel=S&aba=p-stricto>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina***
Mestrado e Doutorado em Matemática
Mestrado Profissional
Disponível em: <https://ppgmtm.posgrad.ufsc.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFV – Universidade Federal de Viçosa***
Mestrado em Matemática
Matemática em Rede Nacional
Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática
Disponível em: <http://www.ppg.ufv.br/?page_id=383>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UFPI – Universidade Federal do Piauí***
Mestrado e Doutorado em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
Disponível em: <https://sigaa.ufpi.br/sigaa/public/curso/lista.jsf?nivel=S&aba=p-ensino>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***UnB – Universidade de Brasília***
Mestrado e Doutorado em Educação – Linha de pesquisa de Educação em Ciências e Matemática
Disponível em: <https://www.mat.unb.br/pagina/pesquisa-projetos>. Acesso em: 26 jun. 2020.
Mestrado Profissional de Matemática
Disponível em: <http://www.fe.unb.br/index.php?option=com_content&view=article&id=153&Itemid=1392>. Acesso em: 26 jun. 2020.
- ***USP – Universidade de São Paulo***
Mestrado e Doutorado em Estatística
Mestrado e Doutorado em Matemática
Mestrado e Doutorado em Matemática Aplicada
Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria
Disponível em: <https://www5.usp.br/>. Acesso em: 26 jun. 2020.

5 Orientações sobre os capítulos

CAPÍTULO 1 Geometria de posição

Páginas 10 e 11

Metodologias e estratégias ativas

Ao introduzir o conteúdo desse capítulo, peça aos alunos que leiam as informações apresentadas nestas páginas e verifique a possibilidade de organizá-los em grupos de três ou quatro integrantes, para que discutam o assunto. Oriente-os a anotar as dúvidas que surgirem. Após essa etapa, se algum grupo apresentar dúvida, peça a um dos integrantes que a leia em voz alta, de modo que todos possam ouvi-la e, talvez, esclarecê-la. Em seguida, verifique a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática, para que realizem pesquisas sobre perspectivas e desenhistas projetistas, destacando informações importantes, como os profissionais que utilizam perspectivas em seus trabalhos e *softwares* que são utilizados por esses profissionais.

O desenvolvimento dessa tarefa pode se dar por meio da metodologia ativa **Gallery walk**. Para isso, após os alunos realizarem as pesquisas, peça que elaborem cartazes com as informações obtidas.

Para saber como deve ser o encaminhamento dessa tarefa utilizando a metodologia **Gallery walk**, veja informações na seção **Uso de estratégias de ensino inovadoras** nessa Assessoria pedagógica.

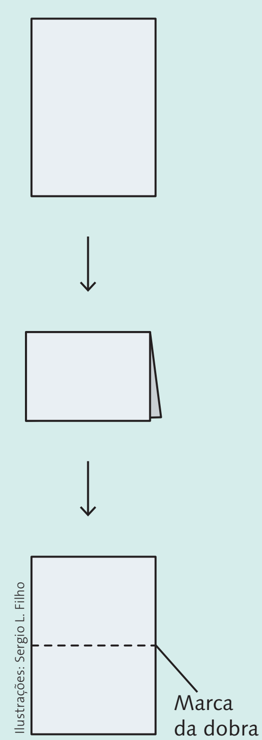
Página 12

BNCC

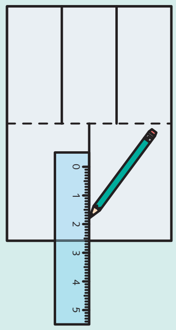
Este capítulo retoma alguns conceitos que, provavelmente, os alunos estudaram no Ensino Fundamental, como ponto e reta. Além disso, verão outros, como os planos e suas propriedades. Investigarão deformações dos ângulos provocadas por diferentes projeções, por exemplo, as utilizadas em cartografia, desenvolvendo assim, aspectos da habilidade **EM13MAT509**.

Além disso, todo o trabalho desse capítulo, com teoremas, postulados e demonstrações, favorece o desenvolvimento da **Competência específica 5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

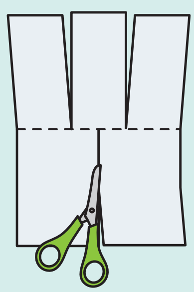
- O conteúdo deste capítulo é introduzido pela análise das imagens que representam, a partir de certo ponto de referência, algumas das vistas ortogonais de uma figura espacial.
- Uma atividade que pode ser realizada com os alunos, a fim de complementar o trabalho dessa página, é a construção em uma folha de papel sem emendas, apenas com cortes e dobras, a fim de que eles observem suas diferentes vistas. Para isso, providencie antecipadamente folha de papel sulfite ou, caso seja possível, peça aos alunos que utilizem uma folha de caderno, para que possam reproduzir as dobras sugeridas a seguir. Além disso, precisarão de régua e tesoura. Esse tipo de dinâmica vai auxiliá-los na compreensão do conteúdo, além de desenvolver e aprimorar a visão espacial. Para realizar a tarefa, siga as etapas abaixo.
- Dobre uma folha de papel retangular ao meio, marcando bem seu vinco.



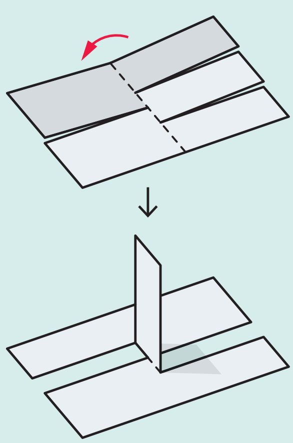
- Com auxílio de uma régua, trace três retas sobre a folha como mostra a imagem.



- Utilizando uma tesoura, recorte nos locais indicados, ou seja, sobre as retas traçadas.



- Finalmente, gire e dobre parte da figura, de acordo com as indicações da imagem, e ela estará pronta.

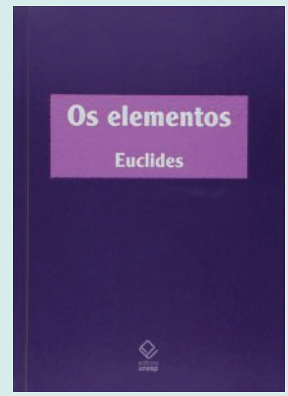


Ilustrações: Sergio L. Filho

- Agora, peça aos alunos que analisem as imagens que podem ser representadas em relação à folha de papel cortada e dobrada de determinada maneira. Conforme a posição em que o aluno observa a folha, obtém diferentes representações, como uma região plana e um segmento de reta; dois segmentos de reta concorrentes; duas regiões planas com um ponto em comum.

Página 13

- O esquema que aparece nesta página apresenta, de maneira resumida, o conteúdo existente nos 13 livros que compõem a obra *Os Elementos*, de Euclides. Comente com os alunos a importância dessa obra na história da Matemática e para a Ciência de modo geral. Caso seja possível levar a obra para a sala de aula, ela está disponível para empréstimo em diversas universidades públicas brasileiras. Caso não seja possível, a capa dessa obra está disponível em diversos *sites*, apresente-a aos alunos e leia o trecho a seguir a respeito de Euclides.



Reprodução/Editora Unesp

> *Pouco se sabe sobre a vida e a personalidade de Euclides e se desconhece a data de seu nascimento. É provável que sua formação matemática tenha se dado na escola platônica de Atenas. Ele foi professor do Museu em Alexandria.*
>
> *Euclides escreveu cerca de uma dúzia de tratados, cobrindo tópicos desde óptica, astronomia, música e mecânica até um livro sobre secções cônicas; porém, mais da metade do que ele escreveu se perdeu. Entre as obras que sobreviveram até hoje temos:* Os elementos*,* Os dados*,* Divisão de figuras*,* Os fenômenos *e* Óptica*.*
>
> Os elementos *de Euclides não tratam apenas de geometria, mas também de teoria dos números e álgebra elementar (geométrica). O livro se compõe de quatrocentos e sessenta e cinco proposições distribuídas em treze livros ou capítulos, dos quais os seis primeiros são sobre geometria plana elementar, os três seguintes sobre teoria dos números, o livro X sobre incomensuráveis e os três últimos tratam sobre geometria no espaço.*
>
> [...]
>
> LUCHETTA, Valéria Ostete Jannis. Euclides e os "Elementos". *iMática*. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/euclides.html>. Acesso em: 21 ago. 2020.

Para aprofundar

A reportagem desse *site* traz os três matemáticos do século 19 que ajudaram Einstein a desenvolver sua teoria.

BBC. *Os matemáticos que ajudaram Einstein e sem os quais a Teoria da Relatividade não funcionaria.* Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/geral-45177447>. Acesso em: 19 jul. 2020.

O artigo a seguir traz informações sobre a obra *Os elementos*, de Euclides.

ÁVILA, Geraldo. *Euclides, Geometria e Fundamentos*. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/veiculos_de_comunicacao/RPM/RPM45/RPM45_01.PDF>. Acesso em: 19 jul. 2020.

Conversando

- Caso julgue necessário, no item **c**, oriente os alunos, dando os seguintes exemplos, que podem representar:
  - um ponto: uma estrela, um furo de agulha, um pingo de tinta de caneta;
  - uma reta: fios esticados, lados de um quadro;
  - um plano: um quadro-negro, a superfície de uma mesa.
- No item **d**, deixe que eles discutam entre si sobre os objetos que possuem diferentes vistas, quando observados em diferentes posições. Verifique se eles perceberam que a esfera é o único objeto que, observado em diferentes posições, possui sempre a mesma vista.

Página 14

- Se julgar conveniente, comente com os alunos que axiomas ou postulados são aceitos sem demonstrações. Apresente alguns postulados trazidos no livro *Os elementos*, de Euclides.
  - Pode-se traçar uma reta ligando quaisquer dois pontos.
  - Pode-se prolongar qualquer reta finita continuamente em uma reta.
  - Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.
  - Todos os ângulos retos são iguais.

Fonte de pesquisa: EUCLIDES. *Os elementos/Euclides*. Trad. Intr. Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.

Para aprofundar

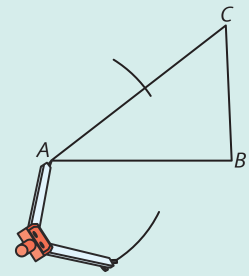
O texto a seguir traz alguns axiomas da geometria Euclidiana.

MASSAGO, Sadão. *Axiomas da Geometria Euclidiana*. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/~sadao/download/%3Ffile%3Dstudent/geometria-euclidiana-axiomas.pdf>. Acesso em: 19 jul. 2020.

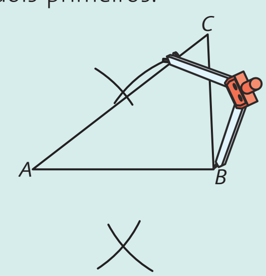
Página 23

- O texto no final desta página indica o que é o baricentro de um triângulo e apresenta uma tarefa prática que comprova que esse ponto corresponde ao centro de gravidade da figura. O centro de gravidade é o ponto em que a força peso deve ser representada (lembrando que peso corresponde à força da atração da gravidade; e massa, está associada à quantidade de matéria presente em um corpo). Existem algumas práticas para encontrar esse ponto, e uma delas está indicada nesta tarefa. Seria conveniente realizar esta tarefa prática com os alunos em sala de aula. Se possível, peça que levem tesoura, linha, compasso, régua e algum papel mais grosso (papel-cartão, cartolina etc.). Apresente as instruções a seguir, para que obtenham as três medianas (segmentos de reta que ligam um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto):

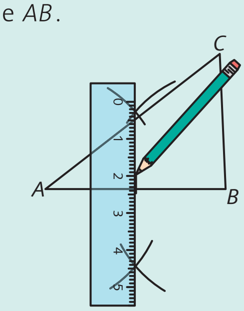
1º Desenhe um triângulo *ABC*. Em seguida, coloque a ponta seca do compasso em um dos vértices (*A*, por exemplo) e, com uma abertura pouco maior do que a metade de $\overline{AB}$, trace dois arcos.



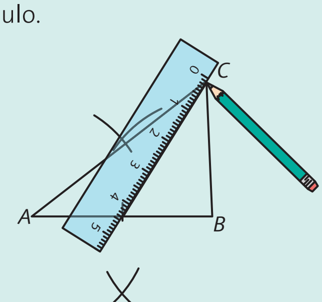
2º Com a mesma abertura do compasso, coloque a ponta seca em *B* e trace dois arcos que interceptam os dois primeiros.



3º Posicione uma régua nos dois pontos onde os arcos se interceptam. Essa reta irá cruzar o ponto médio de $\overline{AB}$.



4º Trace um segmento de reta do ponto médio de $\overline{AB}$ até o vértice *C*. Esse segmento será a mediana relativa ao lado $\overline{AB}$. Repita os procedimentos para os três lados, traçando assim as três medianas. O ponto de interseção das três medianas é o baricentro ou centro de gravidade do triângulo.



Ilustrações: Sergio L. Filho

Página 26

BNCC

Comente com os alunos que, na tarefa **19**, é apresentada uma das obras do artista holandês M. C. Escher. Seus trabalhos são comumente utilizados pelo componente curricular **Arte**, seja para tratar das artes visuais utilizando a técnica da pintura, seja para discutir a retratação de ambientes impossíveis de se representar tridimensionalmente. Esta tarefa também possibilita o desenvolvimento da **Competência geral 3**, pois amplia o repertório cultural dos alunos. Nesse caso, os conceitos de posição relativa entre retas e planos são necessários para verificar os detalhes que caracterizam a imagem como impossível e em seguida resolver a tarefa. Assim, eles têm a oportunidade de conhecer um dos trabalhos desse inovador artista enquanto aprofundam seus conhecimentos sobre Geometria.

Página 30

Planejamento individual e coletivo

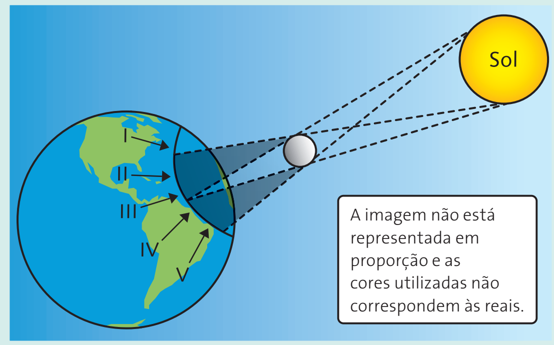
Ao resolver a tarefa **24**, relacione-a com a área do conhecimento **Linguagens e suas Tecnologias**, mais especificamente com o componente curricular **Arte**, no âmbito das artes visuais, como pinturas e esculturas. Verifique, junto com o professor de Artes da sua escola, a possibilidade de organizarem uma visita guiada a alguma galeria de arte ou a um museu que contenha esculturas. Caso não seja possível a visita, veja a possibilidade de levar os alunos à sala de informática ou até mesmo acessar o computador com internet na sala de aula, e visitem um museu *on-line*.

Explore com os alunos as obras de arte de maneira digital. Uma sugestão é o museu do artista Salvador Dali, na Espanha, disponível no endereço: <https://www.salvador-dali.org/en/>. Acesso em: 27 ago. 2020.

- Para resolver a tarefa **24**, são necessárias percepções acerca da posição relativa entre planos e dos elementos que compõem a estrutura apresentada. Espera-se que os conhecimentos matemáticos auxiliem o aluno a verificar a impossibilidade da existência real dessa estrutura artística.

Página 33

- Na tarefa **27**, caso os alunos tenham dúvidas na resolução, desenhe na lousa um esquema parecido ao que segue, destacando as partes que indicam a sombra e penumbra (ponto de transição da luz) da Lua. Diga aos alunos que o eclipse solar ocorre quando os cones de sombra e de penumbra da Lua interceptam a superfície terrestre. Para observadores posicionados na região de sombra, haverá eclipse total, e para observadores posicionados na região de penumbra, haverá eclipse parcial. Dessa maneira, pode-se concluir, pelas fotografias, que os observadores que as registraram estão na região de penumbra (eclipses parciais).



Para aprofundar

No endereço eletrônico é possível descobrir sobre os tipos de eclipses lunares e as datas dos próximos eclipses.

OLIVEIRA FILHO, Kepler de Souza; SARAIVA, Maria de Fátima Oliveira. *Eclipses*. 13 ago. 2018. Disponível em: <http://astro.if.ufrgs.br/eclipses/eclipse.htm>. Acesso em: 19 jul. 2020.

Páginas 34 e 35 Saiba mais

BNCC

O tema desta seção permite estabelecer uma relação entre a Geometria e assuntos relacionados à Terra e ao Sistema Solar, mais comumente abordados pelo componente curricular **Física**. No caso, conceitos como retas, planos e projeções são necessários para esquematizar e representar a formação da sombra e da penumbra e como ocorre o eclipse solar. Assim, espera-se que o aluno se aproprie de conhecimentos sobre os eclipses enquanto faz uso da Matemática estudada neste capítulo.

Esse tema pode ser relacionado com a **Competência específica 3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, "Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC)."

Comente com os alunos que a sombra é a ausência total de luz, em razão da interceptação dos raios por um corpo opaco. Já penumbra, conforme o quadro vocabulário apresentado na página, corresponde à região de transição entre luz e sombra, ou seja, corresponde a uma diminuição da intensidade luminosa em determinada região. Devido à existência da atmosfera, corpos opacos iluminados pela luz solar não projetam sombras, mas penumbras, pois essa luz ao adentrar a atmosfera se dispersa em todas as direções. Isso não ocorre, por exemplo, na Lua, onde não há atmosfera.

Discuta com os alunos como ocorrem os eclipses da Lua (durante a noite, quando a Terra se coloca entre a Lua e o Sol, bloqueando os raios solares e fazendo com que a Lua fique total ou parcialmente encoberta por alguns instantes).

Aproveite também essa seção para fazer relação entre o assunto abordado com o tema contemporâneo transversal **Ciência e Tecnologia**. Comente com os alunos que, no passado, as previsões sobre os eclipses eram feitas com base em observações a olho nu. Mesmo com esse método primitivo, os pensadores da época deram importantes contribuições, entendendo as estações do ano e o movimento dos corpos celestes. Hoje, com as novas tecnologias, inserindo dados em programas específicos de computador, é possível saber, por exemplo, as datas dos próximos eclipses.

Página 36

- Para complementar o tópico Distância entre dois pontos, diga aos alunos que para auxiliar pessoas a chegarem a um local em uma cidade, por exemplo, ou fazer uma viagem cujo trajeto desconheçam existem programas que possibilitam visualizar mapas e imagens de satélites. Estes programas permitem analisar e traçar o trajeto, verificando a menor distância e o caminho mais fácil a ser percorrido. Isso é possível já que esses programas exibem informações detalhadas do local, como os nomes e o sentido das ruas. Pode-se analisar também qual é a distância em linha reta entre os pontos desejados. Caso seja possível, leve os alunos à sala de informática da escola, ou acesse o computador dentro da sala de aula e pesquisem juntos alguns trajetos.
- Peça aos alunos que, em duplas, escolham um destino para o qual desejem viajar. Depois, solicite que façam um planejamento dessa viagem, em que conste distância entre a cidade de origem e a de destino, custo de transporte, entre outros que eles julgarem interessantes para um planejamento.

Página 39 Finalizando a conversa

Avaliação

Aproveite as questões desta seção para realizar uma avaliação diagnóstica com a turma. Em um primeiro momento, peça aos alunos que respondam as questões em uma folha de papel avulsa. Estipule um tempo para que possam responder as questões e recolha as folhas a fim de analisar posteriormente as respostas. Registre suas observações para cada aluno, ajudando-os a perceber o que ainda falta compreender ou faça comentários de reforços positivos.

Outra sugestão para o encaminhamento dessas questões é organizar os alunos em duplas e solicitar que respondam às questões. No item **a** solicite que façam um esquema com todos os conceitos que eles acham pertinentes sobre a geometria de posição. No item **b** oriente-os a fazer as representações de cada um dos tipos de retas e dar exemplos do dia a dia em que podemos encontrar essas retas, caso sintam dificuldades, peça que identifiquem essas retas utilizando a estrutura da sala de aula, relacionando as arestas às retas. Ao final realize um debate com todos os alunos, solicitando que cada grupo compartilhe suas respostas.

Em um segundo momento, entregue os resultados das questões para os alunos e, caso tenham sido organizados em duplas, peça que troquem ideias e façam as devidas correções baseadas em suas indicações.

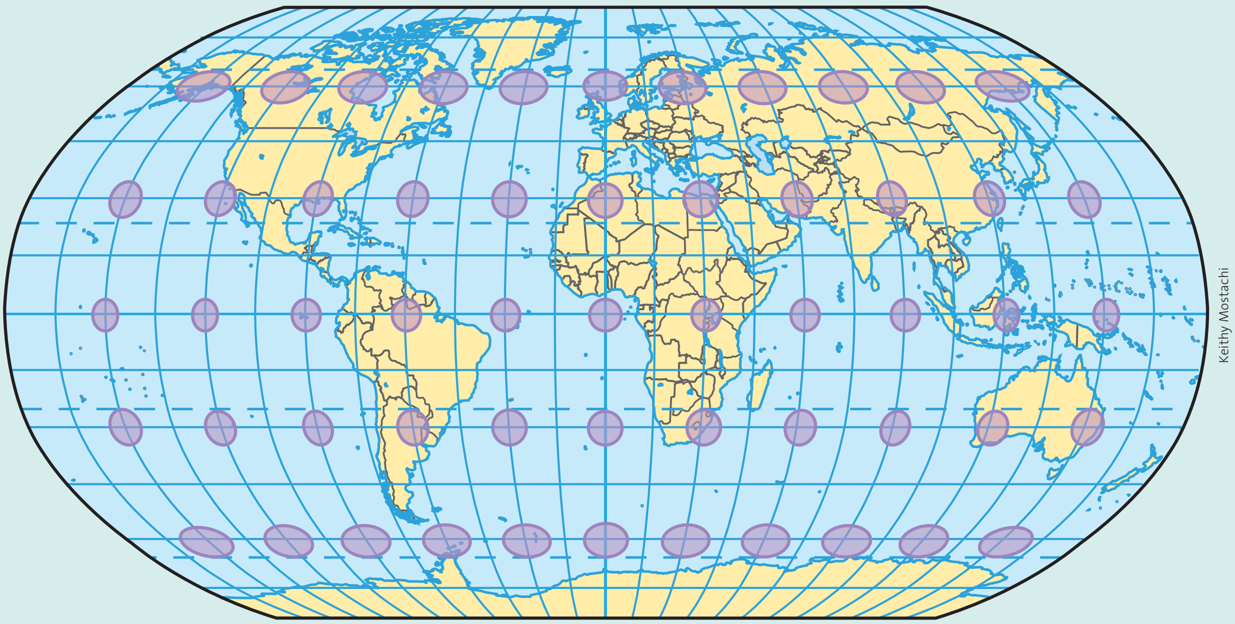
Este tipo de avaliação possibilita que se verifique como o aluno está interagindo com o conhecimento e tome decisões para melhoria da qualidade do processo de ensino-aprendizagem executando um novo planejamento caso seja necessário. Além disso, possibilita ao aluno reconhecer suas necessidades e superar as dificuldades do conteúdo estudado com ajuda de um colega.

Páginas 40 e 41 Saiba mais

Planejamento individual e coletivo

O tema cartografia nessa seção é abordado com enfoque nas projeções cartográficas. Esse tema é comumente discutido na componente curricular **Geografia**, porém sob uma perspectiva diferente, geralmente com foco no cenário político. Na Matemática, o interesse está nas deformações de mapas decorrentes das projeções. Neste momento foi apresentada apenas uma introdução ao tema. Em outro momento desse volume serão abordados com mais detalhes a projeção cilíndrica e outros tipos de projeções cartográficas.

• Comente com os alunos que a projeção mais utilizada para representar mapas-múndi é a projeção de Robinson, e ela não preserva formas, áreas ou distâncias. No entanto, ela tem a característica de tentar minimizar todas essas distorções.



Projeção de Robinson

Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar.* 8. ed. Rio de Janeiro, 2018.

BNCC

A seção **Saiba Mais** permite que o aluno investigue a deformação de ângulos e áreas provocadas pelas diferentes projeções utilizadas na cartografia, como a cilíndrica e cônica, o que contempla aspectos da habilidade **EM13MAT509**.

Páginas 42 e 43 Conectando ideias

Planejamento individual e coletivo

A impressora 3D, aparelho que possibilita gerar objetos em três dimensões, é o tema escolhido para esta seção. Este tema permite que o aluno tenha contato com alguns assuntos descritos no componente curricular **Física**, por exemplo, as mudanças de fase sofridas pelo plástico durante a formação da peça e a lâmpada alógena que derrete o material com a forma da camada desejada. Inicialmente, pode-se fazer algumas perguntas aos alunos, como:

- Você tem um computador conectado a uma impressora?
- Que tipo de impressora você possui?
- Você já viu uma impressora 3D ou algum objeto feito por esse tipo de impressora?

Com base nas respostas dos alunos, promova uma discussão sobre a necessidade de se ter uma impressora em casa, considerando o modelo mais apropriado de acordo com a necessidade de cada pessoa. Converse com os alunos sobre o processo de criação de um objeto em uma impressora 3D. Explique que, de certa forma, ela tem o mesmo procedimento das impressoras tradicionais, mas, em vez de aplicar tinta em um papel plano, ela forma uma figura plana de plástico. À medida que esses planos são formados, ela os sobrepõe para que, ao final, toda a peça seja esquentada, juntando assim todos os planos. Este comentário irá auxiliá-los a responder às questões propostas na seção.

• Se julgar conveniente, comente com os alunos que as impressoras 3D são úteis em diferentes áreas, como na indústria automobilística. Com essa tecnologia, essas indústrias imprimem peças utilizadas na produção, garantindo menos custos operacionais. Na Medicina, por exemplo, a tecnologia pode auxiliar na identificação de tumores, visto que as tomografias fornecem uma imagem 2D. Assim, é possível visualizar toda a extensão do comprometimento de um tumor. Outro uso das impressoras 3D é na fabricação de próteses de baixo custo, na reparação de crânios, em transplantes de órgãos, entre outras áreas.

CAPÍTULO 2 Poliedros

Páginas 44 e 45

- Agrupe os alunos em duplas ou trios e oriente-os a ler as informações fornecidas nas páginas iniciais. Aproveite para iniciar uma discussão sobre o assunto a partir das questões a seguir.
  - Vocês já jogaram algum jogo de RPG? Se sim, qual?
  - Vocês sabiam que existem vários tipos de jogos de RPG?
- Para iniciar a discussão, comente com os alunos que os jogos de RPG (*role-playing game*) de mesa pode ser interpretado como um jogo de interpretações de papéis, e teve sua origem baseada nos jogos de estratégia militar, os denominados *wargames*. O primeiro jogo de RPG comercializado, *Dugeons e Dragons*, foi desenvolvido a partir dos conceitos presentes nos *wargames Blackmoor* e *Chainmail*, ambos tinham elementos de estratégias e fantasia. Explique aos alunos que existem várias modalidades de jogos de RPG, por exemplo, fantasia medieval, terror, viagens espaciais, cenários históricos, entre outros. Para jogar RPG são necessários dados de 4 a 100 faces, sendo mais comum o uso de dados de até 20 faces.

  Comente também que jogos como os de RPG estão presentes em diferentes culturas juvenis, que encontram nesses jogos um ambiente propício para o compartilhamento de experiências e saberes, além de desenvolver habilidades como interpretação e raciocínio lógico.

Página 46

- Utilize as imagens apresentadas para antecipar aos alunos alguns dos elementos dos sólidos geométricos que serão tratados no capítulo, como altura, face, tipos de base, procurando resgatar o conhecimento dos alunos sobre esse conteúdo. Algumas questões podem ser relevantes quanto à contextualização dos formatos dos sólidos:
  - Quais sólidos geométricos você lembra ter estudado?
  - Quais são as formas geométricas mais comuns em sua casa (em objetos, cômodos etc.)?
  - Na sua cidade existe algum monumento que lembra o formato de um poliedro? Que monumento é esse?

  Com base nas respostas dos alunos, inicie uma discussão sobre as formas citadas por eles.
- Nessas páginas são apresentadas três grandes construções: a pirâmide de Quéops, no Egito; o Castelo de Santa Maria da Feira, em Portugal; o Obelisco do Parque Ibirapuera, no Brasil. Todas com formato de poliedros. Se possível, comente sobre pirâmides e obeliscos:
  - As pirâmides do Egito são túmulos de faraós. A maior delas é a do faraó Khufu (Quéops) e já foi uma das sete maravilhas do mundo antigo. Os egípcios acreditavam que a vida após a morte dependia da conservação do corpo; assim, os corpos eram embalsamados e colocados em túmulos. Os corpos dos faraós eram acondicionados nas pirâmides acompanhados por pertences de grande valor. Se julgar conveniente, mostre para os alunos o vídeo Pirâmides do Egito – como elas foram construídas?, acessando o endereço eletrônico <https://www.youtube.com/watch?v=4oDAc0nubAQ> ou outro vídeo de sua preferência. Acesso em: 21 jul. 2020. Após assistirem ao vídeo, organize um debate com os alunos sobre o formato das pirâmides destacando suas características e solicitando que identifiquem outros objetos que possuam o mesmo formato.
  - Comente que o obelisco refere-se a um tipo específico de monumento. Trata-se de uma pedra vertical, de base quadrangular, que vai estreitando-se progressivamente para formar, no ápice, uma pirâmide. No Egito Antigo, obeliscos eram construídos para celebrar o deus Sol. Atualmente, eles são construídos para homenagear personalidades, eventos, entre outros.

Conversando

Metodologias e estratégias ativas

Para o desenvolvimento dessa seção pode-se utilizar a metodologia **Gallery walk**. Para isso divida a turma em cinco grupos e oriente cada grupo a discutir um dos itens dessa seção. Se necessário, leve-os à biblioteca ou ao laboratório de informática para que façam pesquisas sobre os assuntos solicitados. Em seguida, oriente-os a exemplificar suas respostas com imagens ou desenhos das figuras citadas, sempre que possível, e a elaborar cartazes acerca do tema. Após isso, os alunos devem ser redistribuídos em novos grupos com um integrante de cada grupo anterior. Os cartazes devem ser colocados nas paredes e os novos grupos vão se deslocar pela sala de aula visitando os cartazes, e cada estudante que parar em frente do cartaz que ajudou a elaborar deve apresentá-lo, ensinando os seus colegas.

- No item **b**, verifique se os alunos identificaram que as figuras geométricas espaciais que podem ser lembradas ao se observar as construções apresentadas na página são pirâmide, paralelepípedo, cone e prisma.

- No item **c**, verifique se eles perceberam as características comuns entre as formas geométricas apresentadas. Caso tenham dificuldade, auxilie-os a chegar às conclusões, lembrando algumas características dessas figuras, de modo a resgatar seu conhecimento prévio acerca do assunto. Leve para a sala de aula algumas embalagens ou objetos, ou poliedros confeccionados em cartolina, com formatos similares aos apresentados, e distribua-os entre os alunos, para que eles possam manuseá-los e observar na prática algumas características similares entre eles.

Página 48

- Para complementar o conteúdo Poliedros, diga aos alunos que Leonardo da Vinci (1452-1517) é reconhecido por sua ousadia e originalidade. Entre tantos talentos atribuídos a ele, estão os de artista e engenheiro. Mas ele também é frequentemente reconhecido como matemático, devido à aplicação da Matemática às ciências e à teoria das perspectivas. Em seus cadernos de notas, encontram-se ideias sobre gravidade, curvas de dupla curvatura, construções de polígonos regulares, e projetos como o do paraquedas. Comente também que Leonardo da Vinci elaborou cerca de 60 ilustrações para a obra De divina proportione, de Luca Pacioli (1445-1514), que foi um frade italiano, conhecido por seu compêndio de Matemática, Summa de Arithmetica, Geometrica, proportioni et proportionalita (1494) e De divina proportione (1509). Um desses desenhos é o dodecaedro regular, feito manualmente com uma perfeição admirável.

Reprodução/Biblioteca Nacional da França, Paris

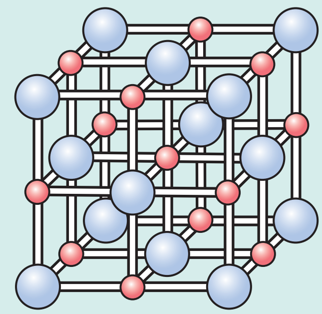
Dodecaedro regular de Leonardo da Vinci.

Para aprofundar

No endereço eletrônico a seguir pode-se encontrar uma tradução anotada e comentada da obra De divina proportione, de Luca Pacioli, com base no manuscrito que se encontra na Biblioteca Ambrosiana de Milão.

BERTATO, Fabio Maia. A *"De Divina Proportione" de Luca Pacioli* – Trad. anotada e comentada. Tese (doutorado) – Campinas, Unicamp, 2008. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/280394/1/Bertato_FabioMaia_D.pdf>. Acesso em: 21 jul. 2020.

- Complemente esta página explicando aos alunos que o estado sólido de algumas substâncias é caracterizado por uma organização espacial da estrutura atômica, que pode ser de formato amorfo (sem ordenação) ou cristalino (os átomos ou moléculas se distribuem de maneira regular no espaço, formando uma "rede geométrica"). O sal de cozinha (NaCl), por exemplo, possui formato cúbico (conforme imagem), assim como o diamante. O grafite possui a mesma composição do diamante, mas é organizado de outra maneira. A estrutura do diamante faz dele o material mais resistente da natureza.

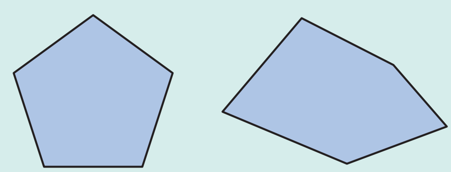


A imagem não está representada em proporção.

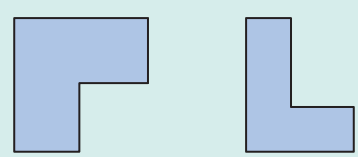
Página 49

- Uma sugestão para o desenvolvimento desse conteúdo é desenhar na lousa diferentes polígonos e pedir aos alunos que os classifiquem em convexos ou não convexos. Seguem alguns exemplos de polígonos que podem ser desenhados:

Polígonos convexos



Polígonos não convexos



Ilustrações: Rafael L. Gaion

É importante que o aluno perceba a diferença entre esses tipos de polígonos. Reforce quais são polígonos convexos e quais são não convexos.

- Para complementar o assunto dessa página, diga aos alunos que o espelho é uma superfície com alta capacidade de refletir luz. Para obter alguns efeitos, os espelhos podem ser encurvados de forma côncava (face espelhada para dentro da curvatura) ou convexa (face espelhada para fora). Os côncavos são utilizados para projetar imagens ou aumentá-las, dependendo da posição do objeto. Já os espelhos convexos são utilizados para diminuir a imagem do objeto, aumentando assim o campo visual. Comente com os alunos que os espelhos convexos são usados, por exemplo, em retrovisores de carro.

As imagens não estão representadas em proporção.

ssuaphotos/Shutterstock.com

Reflexo de veículos no espelho retrovisor de um carro.

E os côncavos são úteis, por exemplo, em espelhos bucais usados pelos dentistas.

HOMONSTOCK/Shutterstock.com

Espelho bucal sendo usado para examinar os dentes.

- Para explicar sobre a relação de Euler, solicite aos alunos que levem para a sala de aula embalagens ou materiais com formatos de paralelepípedo reto retângulo, cubo e, se possível, pirâmide. Se julgar necessário, reproduza e entregue aos alunos as planificações das páginas finais desta Assessoria pedagógica. De posse desses poliedros, peça aos alunos que anotem, em uma tabela, a quantidade de arestas, faces e vértices e tentem buscar uma relação entre esses valores. O objetivo é que compreendam a relação de Euler com base nessas informações.
- Se necessário, proponha aos alunos a tarefa a seguir:

(Enem) O hábito cristalino é um termo utilizado por mineralogistas para descrever a aparência típica de um cristal em termos de tamanho e forma. A granada é um mineral cujo hábito cristalino é um poliedro com 30 arestas e 20 vértices. Um mineralogista construiu um modelo ilustrativo de um cristal de granada pela junção dos polígonos correspondentes às faces.

Supondo que o poliedro ilustrativo de um cristal de granada é convexo, então a quantidade de faces utilizadas na montagem do modelo ilustrativo desse cristal é igual a

a) 10. b) 12. c) 25. d) 42. e) 50.

Resolução

Como temos um poliedro convexo, podemos utilizar a relação de Euler para descobrir a quantidade de faces:

$$V + F = A + 2$$

$$20 + F = 30 + 2$$

$$F = 32 - 20$$

$$F = 12$$

Assim, são necessárias doze faces para a montagem do modelo ilustrativo do cristal. Portanto, a alternativa correta é **b**.

Página 51

Planejamento individual e coletivo

A tarefa **13** apresenta algumas informações sobre os astecas, sociedade que se estabeleceu no México entre os séculos XII e XVI, assunto abordado pelo componente curricular **História** durante o estudo dos povos da América. Segundo registros, para armazenar grãos, essa sociedade desenvolveu um silo composto de placas poligonais, sendo necessários conceitos relacionados aos polígonos e poliedros, como a relação de Euler. Com essa tarefa, espera-se que o aluno aprofunde seus conhecimentos matemáticos em um contexto referente à história das civilizações antigas.

Página 52

Avaliação

Para avaliar o aprendizado dos alunos com relação aos conteúdos apresentados, proponha as seguintes tarefas complementares.

1. (UFC-CE) Um poliedro convexo só tem faces triangulares e quadrangulares. Se ele tem 20 arestas e 10 vértices, o número de faces triangulares é:

   a) 12 b) 11 c) 10 d) 9 e) 8

2. (Enem) Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro P, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que a metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro P, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces.

   Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu?

Resoluções

1. Caso os alunos tenham dificuldade na realização dessa tarefa, faça perguntas a fim de auxiliá-los no desenvolvimento de uma estratégia de resolução.

- Do que trata essa tarefa?

Peça a eles que expliquem a tarefa e enfatize a pergunta do problema. À medida que os dados forem citados, anote-os na lousa. Em seguida, comente que é dada a quantidade de arestas e vértices, faltando a quantidade de faces. Então, pergunte:

- Que relação estudada relaciona esses três elementos?

Espera-se que eles mencionem a relação de Euler. Caso contrário, peça que procurem a resposta no capítulo.

Após os alunos concluírem que precisarão da relação de Euler, peça que substituam os dados e calculem a quantidade de faces. Nesse caso, 12, que é a soma da quantidade de faces triangulares com a quantidade de faces quadrangulares $(q + t = 12)$. Feito isso, falta descobrir, das 12 faces, quantas são triangulares. Como só existem dois formatos de faces, pergunte aos alunos:

- Uma face triangular corresponde a quantas arestas? E uma face quadrangular?

Uma face triangular corresponde a 3 arestas, e uma face quadrangular, a 4 arestas. Mas a cada junção de faces, dois lados correspondem a uma aresta. Assim, deduz-se a outra relação em função das 20 arestas:

$$\left(20 = \frac{3 \cdot t + 4 \cdot q}{2}\right)$$

Com isso, tem-se um sistema de duas equações e duas incógnitas, que poderá ser resolvido, por exemplo, pelo método da substituição. Da primeira relação temos:

$$q + t = 12$$
$$q = 12 - t$$

Substituindo essa igualdade na segunda relação teremos:

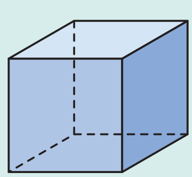
$$20 = \frac{3 \cdot t + 4 \cdot (12 - t)}{2}$$
$$40 = 3t + 48 - 4t$$
$$t = 8$$

Assim $q = 12 - 8 = 4$. Se os alunos tiverem dificuldade de entender a relação:

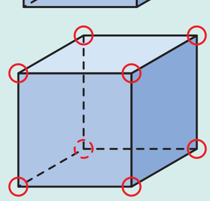
$$\left(20 = \frac{3 \cdot t + 4 \cdot q}{2}\right)$$

mostre, como exemplo, o caso do cubo, uma vez que se trata de uma figura mais simples.

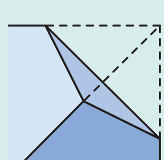
2. Para resolver essa tarefa, primeiro vamos considerar um cubo, conforme a imagem ao lado.



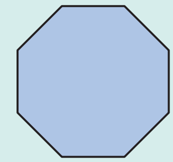
Em seguida, tiramos os cantos dele (encontro de 3 faces).



Cada uma dessas quinas vira uma face triangular. Como fizemos esse procedimento em oito cantos, temos 8 faces triangulares a mais.



Quando retiramos todos os cantos do cubo, passamos a ter um sólido com 6 faces octogonais e 8 faces triangulares, conforme a figura.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Como cada face será pintada de uma cor diferente, teremos seis cores para pintar as faces octogonais e oito cores diferentes para pintar as faces triangulares. Assim, são necessárias quatorze cores diferentes para pintar as faces do troféu.

BNCC

A tarefa **17** permite que o aluno investigue e registre um problema sobre determinação de faces, arestas e vértices de poliedros com faces triangulares e quadrangulares, por meio de um fluxograma. Além disso, a tarefa **18** permite que o aluno investigue um problema por meio de um algoritmo, contemplando assim a habilidade **EM13MAT315**. A tarefa **17** também propicia o desenvolvimento do pensamento computacional no aluno, pois envolve uma maneira de determinar a quantidade de faces, arestas e vértices de um poliedro convexo com 6 faces quadrangulares e 4 faces triangulares ao submeter os dados a um algoritmo construído intencionalmente para isso.

Página 55

- A fim de verificar a afirmação de que todo poliedro regular é um poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é regular, proponha aos alunos que construam poliedros de Platão. Isto é, poliedros que satisfazem a condição de que todas as faces têm a mesma quantidade n de arestas, de cada vértice do poliedro parte a mesma quantidade m de arestas e a relação de Euler é válida. Peça que construam, por exemplo, um tetraedro regular. Se necessário reproduza e entregue a planificação dos poliedros das páginas finais desta Assessoria pedagógica. De posse dos poliedros, oriente-os a verificar a afirmação mencionada.

Página 57

BNCC

O contexto apresentado nesta página favorece o desenvolvimento da **Competência geral 1**, apresentando e valorizando os conhecimentos da civilização egípcia antiga sobre a natureza, a Agricultura e a Matemática. Compreender a importância que esses conhecimentos tiveram na sociedade daquela época é um passo importante para um desenvolvimento justo e inclusivo da sociedade atual.

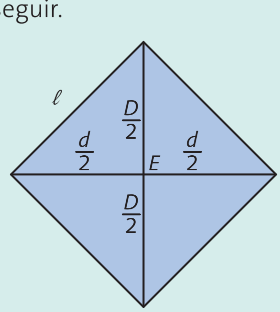
- Comente que os papiros de Moscou e Rhind possuem um total de 110 problemas, sendo que 26 desses problemas são relacionados à Geometria. O problema 51 do papiro de Rhind, por exemplo, mostra o cálculo da área de um triângulo isósceles através da multiplicação da metade do comprimento da base pela altura, e o problema 52 trata da área do trapézio isósceles de modo similar. Além disso, existem indícios de que os egípcios e os babilônicos possuíam métodos eficazes para o cálculo da área do círculo, dos triângulos, dos retângulos e dos trapézios.

Página 58

- Se necessário, comente com os alunos que retângulo é todo quadrilátero que possui os quatro ângulos internos retos; e quadrado é todo quadrilátero que possui os quatro ângulos internos retos e os quatro lados com o mesmo comprimento. Nesse sentido, todo quadrado é um retângulo, porém nem todo retângulo é um quadrado.
- Além disso, explique aos alunos que todo quadrado e todo retângulo são paralelogramos, visto que possuem dois pares de lados paralelos. Porém, a recíproca não é verdadeira, isto é, nem todo paralelogramo é um quadrado ou um retângulo.

Página 59

- Comente com os alunos que há outra maneira de deduzir a área de um losango, por meio da área de triângulos. Construa na lousa um losango de lado ℓ, diagonal maior D e diagonal menor d. O ponto E divide as diagonais em duas partes iguais. Conforme a figura a seguir.



- A interseção das diagonais divide o losango em quatro triângulos retângulos de base $\frac{d}{2}$ e altura $\frac{D}{2}$. Sabendo que a área de um triângulo é dada pela fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$, teremos:

$$A = \frac{\frac{d}{2} \cdot \frac{D}{2}}{2} = \frac{d \cdot D}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{d \cdot D}{8}$$

Como temos quatro triângulos, multiplicamos essa área por quatro:

$$A = \frac{d \cdot D}{8} \cdot 4 = \frac{d \cdot D}{2}$$

Página 61

- Após o desenvolvimento da tarefa **32**, proponha a seguinte tarefa.
  - Em algumas escolas é comum fazer simulações para casos de incêndios. A orientação é que os alunos, quando possível, se direcionem ao pátio ou à quadra de esportes da escola. Tendo essa situação em mente, oriente-os a realizar a medição das dimensões da quadra de esportes ou do pátio da escola. Depois, considerando que em um metro quadrado cabem 4 pessoas em pé, solicite que calculem quantas pessoas cabem na área do local medido por eles.

Página 64

- Comente com os alunos que é possível demonstrar a área de um triângulo equilátero com lado ℓ utilizando a fórmula de Herão. Se o triângulo equilátero possui os três lados com comprimento ℓ, então seu semiperímetro será $p = \frac{3\ell}{2}$ e, assim, pela fórmula de Herão

$$A = \sqrt{\frac{3\ell}{2}\left(\frac{3\ell}{2} - \ell\right)\left(\frac{3\ell}{2} - \ell\right)\left(\frac{3\ell}{2} - \ell\right)}$$

$$A = \sqrt{\frac{3\ell^4}{16}} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Página 66

- Outra maneira de resolver a tarefa **R9** é a seguinte:

Como o hexágono é regular, podemos decompô-lo em 6 triângulos equiláteros. Dessa maneira, o comprimento do apótema do hexágono (altura do triângulo equilátero) é dado por:

$$a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

Agora, calculamos a área do hexágono:

$$A = n \cdot \frac{\ell \cdot a}{2} =$$

$$= 6 \cdot \frac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 150\sqrt{3} \simeq 259{,}8$$

Portanto, a área do hexágono é aproximadamente 259,8 cm^2.

Página 69

Planejamento individual e coletivo

O futebol, tema da tarefa **44**, como uma modalidade de esporte coletivo, é um conteúdo abordado mais especificamente no componente curricular **Educação Física**, apresentando suas regras e características, como as medidas oficiais do campo e da bola. Devido à precisão garantida pela tecnologia, a bola utilizada para praticar este esporte apresenta hoje uma superfície com diferentes maneiras de fabricação. Porém, o modelo tradicional e ainda muito utilizado é aquele citado nesta tarefa, baseado no poliedro de Arquimedes.

Conceitos como área e perímetro de figuras planas são necessários para calcular a área da superfície da bola, composta por polígonos. Assim, espera-se que o aluno faça uso dos conhecimentos desenvolvidos durante o estudo do capítulo em um objeto conhecido e utilizado em diferentes práticas esportivas.

Página 70

BNCC

Durante o trabalho com este tópico é favorecido o desenvolvimento da **Competência geral 2**, por meio do uso de abordagens como a verificação das condições, a formação de questionamentos, análise por casos e teste com uso de tecnologias digitais.

- Uma sugestão ao discutir sobre ladrilhamento é agrupar os alunos em duplas ou trios e solicitar que construam recortes de polígonos regulares. Solicite que eles construam pelo menos três triângulos equiláteros, quatro quadrados, cinco pentágonos regulares e seis hexágonos regulares. Construídas essas peças, oriente-os a posicionar as figuras de mesmo formato a fim de verificar se é possível encaixá-las. Oriente-os também a posicionar diferentes formatos a fim de ladrilhar uma determinada região. O objetivo dessa tarefa é que os alunos percebam quando é possível encaixar as figuras sem espaços e sobreposições.

Página 73 Acesso digital

Metodologias e estratégias ativas

Essa seção permite que a metodologia ativa **Tecnologias digitais de informação e comunicação** seja utilizada no desenvolvimento da proposta. Em um primeiro momento leve os alunos ao laboratório de informática, se necessário agrupe-os em duplas ou trios, e deixe que eles se familiarizem com o *software* GeoGebra. Nessa seção foi utilizada a versão 6.0.851.0 do GeoGebra, um *software* gratuito de Matemática que combina recursos de construções geométricas, algébricas, gráficos, tabelas, entre outros. Sua interface é simples e exibe comandos para realizar diferentes tipos de construções. É possível acessá-lo diretamente do navegador, sem necessidade de instalá-lo acessando o *link* <https://www.geogebra.org/classic>, porém alguns passos podem ser diferentes da versão apresentada nesta coleção. Para realizar o *download* e instalá-lo acesse o endereço eletrônico <https://www.geogebra.org/download>. O *site* também contém informações e materiais de apoio para o uso do programa. Acessos em: 9 jun. 2020.

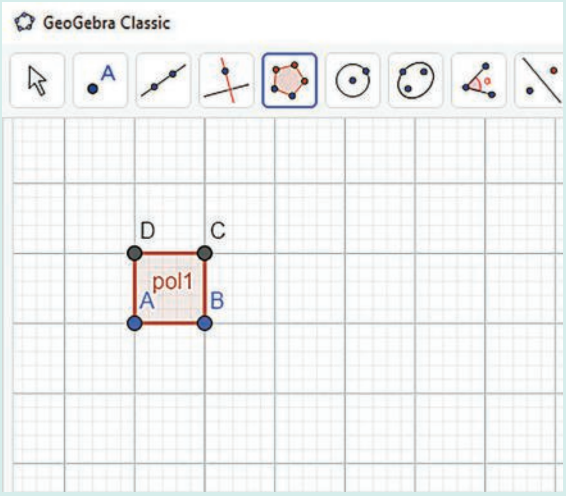
Em um primeiro momento, oriente os alunos a explorar a ferramenta de construção de polígonos, após essa familiarização, oriente-os a seguir os passos fornecidos para a construção indicada na página. Após a construção, peça aos alunos que façam as tarefas propostas no final da seção.

BNCC

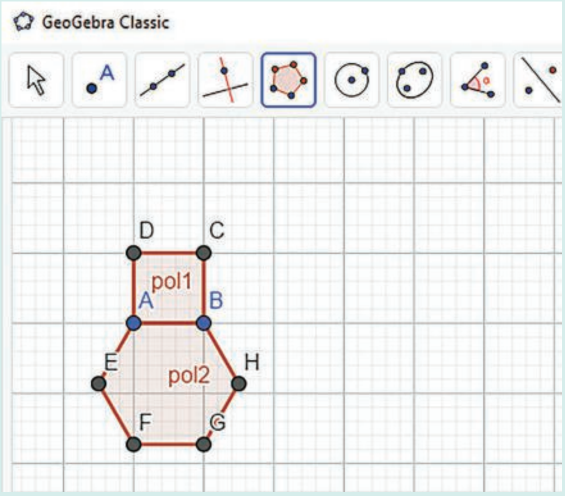
Essa seção permite desenvolver a **Competência geral 5**, pois os alunos são levados a testar e validar hipóteses, deixando-os em uma posição de autonomia no processo de investigação.

- No item **a**, é necessário verificar, utilizando o GeoGebra, se a composição $(4, 6, 12)$ pode ladrilhar o plano. Para isso iremos seguir os mesmos passos informados na seção.

  O primeiro passo é utilizar a ferramenta **Polígono Regular** e construir um polígono regular de 4 lados, conforme a figura a seguir.

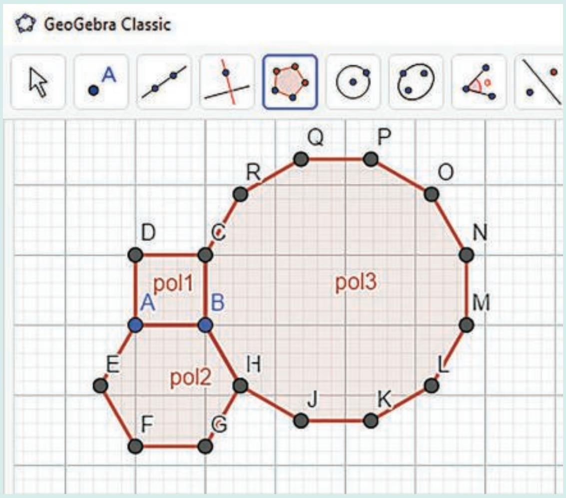


Depois de construído esse polígono, selecione novamente a ferramenta **Polígono Regular** e clique em 2 vértices consecutivos do primeiro polígono construído e construa um polígono regular de 6 lados.

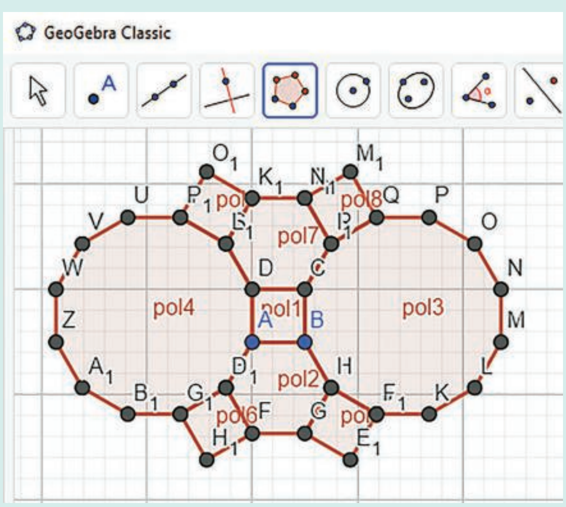


Fotos: Reprodução/Geogebra/Markus Hohenwarter

Em seguida, deve-se realizar o mesmo procedimento clicando em 2 vértices consecutivos, construindo assim um polígono regular com 12 lados.

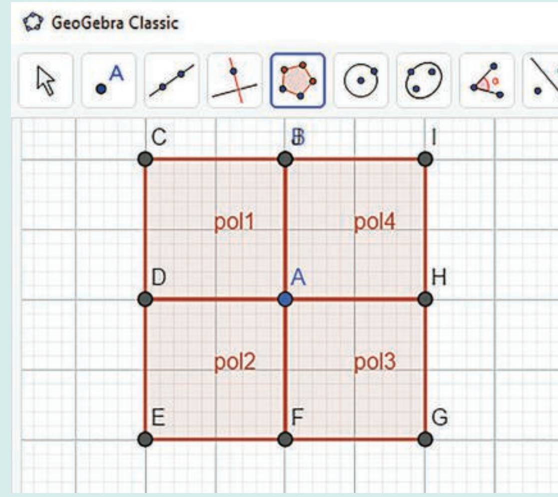


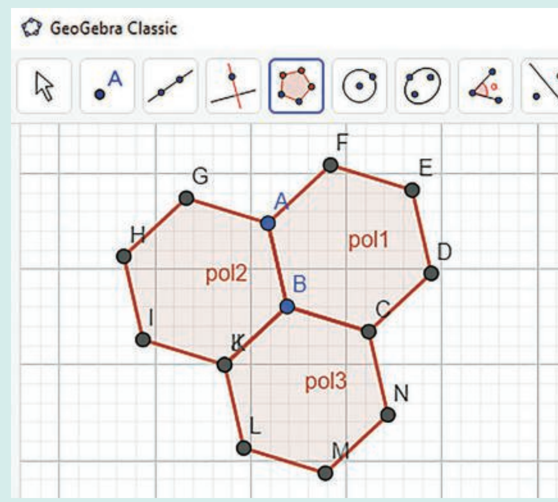
Para verificar se é possível ladrilhar com essa composição, repetimos os mesmos passos, obtendo assim uma figura similar à que segue.

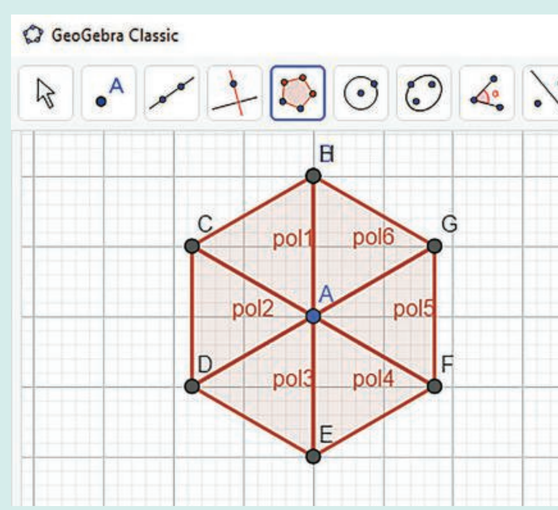


Portanto, com a composição $(4, 6, 12)$ é possível realizar o ladrilhamento semirregular de um plano.

- No item **b**, é necessário verificar se é possível compor mais do que 6 polígonos regulares em torno de um vértice sem sobreposições ou falhas. Pelas figuras a seguir, pode-se observar que a quantidade máxima de polígonos regulares em torno de um vértice que é possível compor é 6, utilizando triângulos equiláteros nessa composição. Dessa maneira, pode-se observar que quanto maior a quantidade de lados de um polígono regular, menor é a quantidade de polígonos que conseguimos construir sob um único vértice sem sobreposição ou falhas.







Fotos: Reprodução/Geogebra/Markus Hohenwarter

Página 74

- Na tarefa **49**, se necessário, leve os alunos ao laboratório de informática para que possam utilizar um *software* de Geometria dinâmica, como o GeoGebra, por exemplo. O uso desse *software* pode facilitar a visualização da formação ou não de um ladrilhamento.
- Aproveite a tarefa **50** e retome a discussão que foi

feita, com base em construções no GeoGebra, sobre a possibilidade ou não de compor mais do que 6 polígonos regulares em torno de um vértice sem sobreposições ou falhas.

BNCC

As tarefas **49** a **52** permitem que o aluno investigue e estabeleça conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades de poliedros e polígonos, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões. Contemplam, assim, parte da **Competência Específica 5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, mais especificamente no que diz respeito à habilidade **EM13MAT505**. Visto que essas tarefas proporcionam ao aluno o entendimento sobre o ladrilhamento de um plano, além de propiciar a resolução de problemas sobre esse tema, com ou sem apoio de aplicativos de Geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

Página 75

Planejamento individual e coletivo

Ao falar sobre os estudos de Newton, é possível fazer uma relação com o componente curricular **Física**. Para tal, verifique com o professor desse componente a possibilidade de fazer a experiência realizada por Newton. Para isso, será necessário um prisma de vidro e um local escuro, de tal maneira que quando um feixe de luz incidir no prisma seja possível observar a decomposição do feixe de luz nas cores do arco-íris.

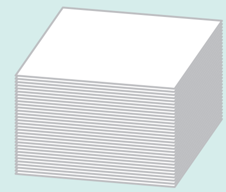
Página 79

BNCC

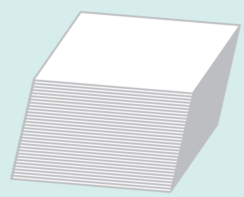
O assunto abordado no final da página a respeito do formato de embalagens está relacionado ao tema contemporâneo transversal **Educação para o consumo**. Comente com os alunos que muitas empresas têm investido cada vez mais na elaboração da embalagem de produtos que tenham um menor impacto no meio ambiente e que utilizem materiais recicláveis, pois é importante que as empresas e os consumidores pensem na quantidade de lixo que é produzida e de que maneiras podem minimizar isso.

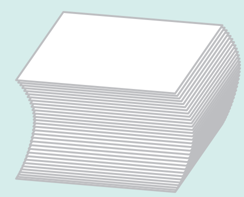
Página 84

- Uma sugestão para trabalhar o Princípio de Cavalieri é solicitar aos alunos que levem uma quantidade de folhas de papel de mesmas dimensões para sala de aula. O objetivo é formar um paralelepípedo reto retângulo ao empilhar essas folhas. Organize os alunos em trios e disponibilize uma quantidade de folhas de papel sulfite para cada grupo. Essa quantidade deve ser o suficiente para formar um paralelepípedo reto retângulo, conforme a figura a seguir, de tal maneira que os alunos consigam tirar as medidas necessárias para o cálculo do volume desse paralelepípedo.



Em seguida, solicite que inclinem um pouco as folhas de papel de tal maneira que o paralelepípedo fique parecido com as figuras que seguem.





Ilustrações: Rafael L. Gaion

Oriente-os a calcular o volume desse novo prisma e a comparar os volumes calculados. A ideia é que os alunos concluam que os volumes são iguais.

BNCC

O conteúdo abordado nessa página propicia a investigação dos processos para o cálculo de volume de sólidos geométricos, mais especificamente de prismas, por meio do princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo do volume dessas figuras, contemplando assim a habilidade **EM13MAT504**.

Página 87

- Na tarefa **74**, se necessário, entregue aos alunos as planificações apresentadas na tarefa e peça que construam os prismas a partir dessa planificação. Pode-se reproduzir e entregar aos alunos as planificações desses prismas disponíveis nas páginas finais desta Assessoria pedagógica. A construção pode auxiliar o aluno a identificar os elementos necessários para o cálculo do volume.

Planejamento individual e coletivo

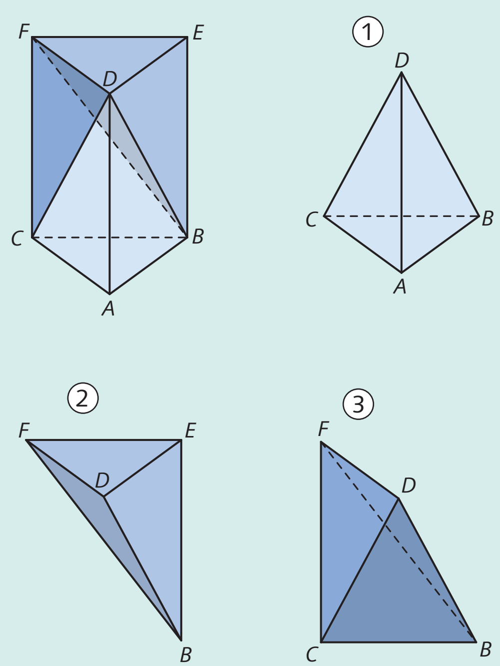
O contexto da tarefa **76** apresenta a eclusa, comumente abordada no componente curricular **Geografia** durante o estudo das águas continentais superficiais e navegações. Se possível, peça ao professor desse componente que faça uma discussão teórica sobre o assunto.

Nesta tarefa calcula-se o volume de água dentro da câmara utilizando o conceito de paralelepípedo, para posteriormente obter o tempo necessário para que o nível da câmara atinja o da jusante, tendo o valor da vazão da água. Com isso, espera-se que o aluno perceba as figuras geométricas espaciais estudadas no capítulo em diferentes situações e saiba utilizar os conhecimentos matemáticos adquiridos, ao mesmo tempo em que conhece essa importante solução para o problema de navegação em águas com grandes desníveis.

Sugere-se que os alunos resolvam essa tarefa em grupo e conversem sobre o funcionamento da eclusa, verificando como a câmara é abastecida e esvaziada. Ressalte que a câmara consiste em um paralelepípedo de dimensões 200 m × 17 m × 20 m e não 200 m × 17 m × 26 m, já que a água deve atingir o nível da jusante.

Página 95

- Apresente aos alunos a dedução de que o volume V de uma pirâmide triangular pode ser obtido pela fórmula $V = \dfrac{A_b \cdot h}{3}$, em que A_b e h são a área da base e altura da pirâmide, respectivamente. Para isso, considere o prisma triangular *ABCDEF* e sua decomposição em três pirâmides triangulares.



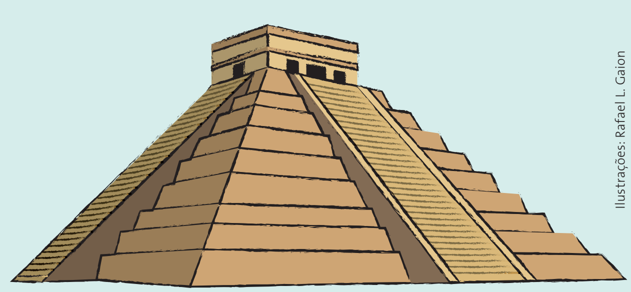
Note que as pirâmides **1** e **2** possuem bases congruentes e a mesma altura, correspondente à altura do prisma. Assim, as pirâmides **1** e **2** possuem o mesmo volume. Note também que as bases das pirâmides **2** e **3** são congruentes e têm a mesma altura, correspondente à distância do ponto D ao paralelogramo *BEFC*.
Consequentemente, as pirâmides **2** e **3** possuem o mesmo volume.
Logo: $V_{T_1} = V_{T_2} = V_{T_3}$.
Se A_b e h são a área da base e a altura do prisma *ABCDEF*, note que A_b é a área da base e h é a altura do tetraedro T_1. Considerando que $V_{T_1} = V_{T_2} = V_{T_3} = V_T$ e que $V_{prisma} = V_{T_1} + V_{T_2} + V_{T_3}$, temos:

$$V_{prisma} = V_{T_1} + V_{T_2} + V_{T_3}$$
$$\Rightarrow 3V_T = A_b \cdot h$$
$$\Rightarrow V_T = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

- Caso julgue necessário, construa com os alunos as três partes do tetraedro, de tal maneira que eles consigam visualizar a união e a separação desses prismas. Ou pode-se utilizar o objeto de aprendizagem *Demonstração do volume da pirâmide*. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/cdfa2s8m>. Acesso em: 22 jul. 2020.

Página 97

- O assunto da tarefa **99**, sobre as pirâmides do Egito, é frequentemente tratado no estudo dos poliedros, por serem importantes monumentos, construídos há mais de 4 500 anos, e também pela riqueza de detalhes e mistérios. Em **História**, elas são apresentadas de maneira mais detalhada no tratamento dos povos antigos da África, mais especificamente na civilização egípcia. Comente com os alunos que as pirâmides também foram construções utilizadas pelos povos astecas. Os astecas construíam seus templos em cima das pirâmides, ou seja, as pirâmides constituíam uma base para que os templos mais importantes ficassem mais próximos do céu.



Ilustrações: Rafael L. Gaion

Nessa tarefa os conceitos de pirâmide são aplicados em uma situação real, considerando que a maior das pirâmides egípcias possui aproximadamente base quadrada. Espera-se que o aluno utilize os conhecimentos desenvolvidos no estudo deste capítulo baseado em valores próximos dos reais e estime as dimensões dessa importante construção.

BNCC

As tarefas **98**, **99** e **101** permitem que o aluno resolva problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de pirâmides, como o cálculo do volume de concreto para se construir uma determinada estrutura, além de calcular o volume de objetos cujos formatos são composições dos sólidos estudados. Nesse sentido, essas tarefas contemplam aspectos da habilidade **EM13MAT309**. Além disso, elas estão relacionadas com a **Competências específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, pois propiciam o uso de conceitos matemáticos para resolver problemas em diversos contextos, analisando a adequação das soluções propostas.

Página 102

- Apresente aos alunos a dedução da fórmula do volume do tronco da pirâmide.

$V_{tronco} = V_{VABC} - V_{VA'B'C'}$ em que:

$$V_{VABC} = \frac{A_B \cdot H}{3}$$

$$V_{VA'B'C'} = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

Dessa maneira, temos

$$V_{tronco} = V_{VABC} - V_{VA'B'C'}$$

$$= \frac{A_B \cdot H}{3} - \frac{A_b \cdot h}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{tronco} = \frac{A_B \cdot H - A_b \cdot h}{3}$$

Como $H = h + h_t$:

$$V_{tronco} = \frac{A_B \cdot (h + h_t) - A_b \cdot h}{3} =$$

$$= \frac{A_B \cdot h + A_B \cdot h_t - A_b \cdot h}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h(A_B - A_b) + A_B \cdot h_t}{3} \qquad \text{(I)}$$

Agora, vamos obter o valor de h em função de A_B, A_b e h_t e substituir na fórmula acima. Para isso, vamos utilizar a razão de semelhança entre as áreas das bases e as alturas das pirâmides.

$$\frac{A_b}{A_B} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{A_b}{A_B}} = \sqrt{\left(\frac{h}{h_t + h}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{A_b}}{\sqrt{A_B}} = \frac{h}{h_t + h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{A_b} \cdot h_t + \sqrt{A_b} \cdot h = h \cdot \sqrt{A_B}$$

$$\Rightarrow \sqrt{A_b} \cdot h_t = h\left(\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}\right) \Rightarrow$$

$$h = \frac{\sqrt{A_b} \cdot h_t}{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo II em I:

$$V_{tronco} = \frac{\frac{\sqrt{A_b} \cdot h_t}{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}}(A_B - A_b) + A_B \cdot h_t}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{A_b} \cdot h_t \cdot \frac{A_B - A_b}{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}} + A_B \cdot h_t}{3}$$

No cálculo acima, a expressão $\frac{A_B - A_b}{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}}$ pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{A_B - A_b}{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}} =$$

$$= \frac{A_B - A_b}{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}} \cdot \frac{\sqrt{A_B} + \sqrt{A_b}}{\sqrt{A_B} + \sqrt{A_b}} =$$

$$= \frac{(A_B - A_b) \cdot \left(\sqrt{A_B} + \sqrt{A_b}\right)}{A_B - A_b} =$$

$$= \sqrt{A_B} + \sqrt{A_b}$$

Assim temos:

$$V_{tronco} = \frac{\sqrt{A_b} \cdot h_t \cdot \left(\sqrt{A_B} + \sqrt{A_b}\right) + A_B \cdot h_t}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{A_b} \cdot h_t \cdot \sqrt{A_B} + A_b \cdot h_t + A_B \cdot h_t}{3} =$$

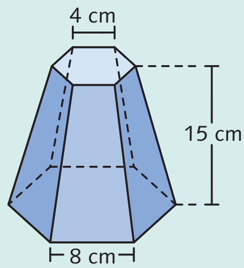
$$= \frac{h_t}{3} \cdot \left(\sqrt{A_b \cdot A_B} + A_b + A_B\right)$$

Portanto, o volume do tronco de pirâmide é dado por:

$$V_{tronco} = \frac{h_t}{3} \cdot \left(\sqrt{A_b \cdot A_B} + A_b + A_B\right)$$

- Se julgar pertinente, complemente o estudo dessa página com a seguinte tarefa.

Certo tronco de pirâmide hexagonal regular tem aresta da base maior com 8 cm de comprimento, aresta da base menor com 4 cm de comprimento e altura de 15 cm. Qual é o volume desse tronco?



Resolução

Do enunciado, segue que:

$$A_b = 6 \cdot \frac{\ell_b^2\sqrt{3}}{4}$$
$$= 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4}$$
$$= 6 \cdot \frac{16\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3} \rightarrow 24\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$
$$A_B = 6 \cdot \frac{\ell_B^2\sqrt{3}}{4}$$
$$= 6 \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4}$$
$$= 6 \cdot \frac{64\sqrt{3}}{4} = 96\sqrt{3} \rightarrow 96\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Dessa maneira, o volume do tronco é dado por:

$$V = \frac{h_t}{3} \cdot \left(\sqrt{A_b \cdot A_B} + A_b + A_B\right) =$$
$$= \frac{15}{3} \cdot \left(\sqrt{24\sqrt{3} \cdot 96\sqrt{3}} + 24\sqrt{3} + 96\sqrt{3}\right) =$$
$$= 5 \cdot \left(48\sqrt{3} + 24\sqrt{3} + 96\sqrt{3}\right) = 840\sqrt{3} \rightarrow$$
$$\rightarrow 840\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

Página 103 Finalizando a conversa

- Para o encaminhamento dessas questões, sugere-se dividir a turma em grupos de três ou quatro alunos e solicitar que respondam as questões. No item **a**, solicite que os alunos façam um esquema destacando o que são poliedros, quais os seus elementos e exemplificando com objetos do dia a dia. No item **b**, se necessário retome o conteúdo sobre poliedros de Platão. No item **c**, oriente-os a complementar o esquema realizado no item **a**, destacando a diferença entre esses tipos de poliedros e solicite que deem exemplos desses dois tipos de poliedros. Por fim, peça a cada grupo que compartilhe suas respostas.

Avaliação

Aproveite para realizar uma avaliação diagnóstica com a turma e verificar as compreensões e dificuldades dos alunos em relação aos conceitos dos estudos dos sólidos geométricos. Este tipo de avaliação possibilita que se verifique como o aluno está interagindo com o conhecimento e permite que você tome decisões para melhoria da qualidade do processo de ensino-aprendizagem executando um novo planejamento, caso necessário.

Páginas 104 e 105 Saiba mais

Planejamento individual e coletivo

Esta seção apresenta uma das mais curiosas descrições matemáticas presentes na natureza: os alvéolos construídos pelas abelhas, ou seja, cada uma das cavidades da colmeia onde as abelhas depositam o mel e os ovos. Além de as abelhas constituírem uma colônia com grande organização e hierarquia, é preciso enfatizar o excelente trabalho delas no que se refere à precisão matemática, pois os conhecimentos necessários à confecção dos alvéolos já eram utilizados pelas abelhas muito antes de serem formalizados pelo ser humano.

A vida em colônia das abelhas, suas características e organização podem ser abordadas, preferencialmente, pelo componente curricular **Biologia** em alguns momentos, como no estudo dos artrópodes ou das populações e dos tipos de relações entre os seres vivos.

- A otimização de embalagens é algo muito utilizado nas indústrias que fazem estudos para elaborar embalagens que utilizem pouco material em sua confecção. As abelhas também se preocupam com isso, a ponto de os alvéolos possuírem forma hexagonal, a qual otimiza a relação entre a quantidade de cera empregada e a capacidade de armazenamento. Chame a atenção dos alunos para os três prismas que podem ser justapostos, sendo o de base hexagonal mais eficiente, já que, a cada seis prismas, se obtém um no centro, enquanto, com o quadrangular, por exemplo, isso só acontece com oito prismas. Outro ponto é o fechamento dos alvéolos, que são unidos por outros alvéolos com ângulos também considerados ótimos.
- Para responder às questões propostas, uma sugestão é agrupar os alunos em duplas ou trios e pedir que construam prismas regulares a fim de verificar o arranjo que as abelhas fazem nos alvéolos. Para isso os alunos podem tentar combinações entre os

poliedros. Além disso, peça que construam cilindros e analisem por que esse formato não é utilizado pelas abelhas. Se necessário, entregue aos alunos planificações desses sólidos.

Para aprofundar

O artigo apresenta uma oficina com o objetivo de estudar o formato dos alvéolos das colmeias, desvendando o que as abelhas sabem e o que elas não sabem de geometria.

MARTINS, Deborah; SALLUN, Rafael Élvia Mureb. *As abelhas conhecem geometria?* Disponível em: <https://www.ime.usp.br/caem/anais_mostra_2015/arquivos_auxiliares/oficinas/Oficina03_Elvia_Debora.pdf>. Acesso em: 22 jul. 2020.

Páginas 106 e 107 Conectando ideias

Planejamento individual e coletivo

A dilatação anômala da água é o tema desta seção, a qual apresenta o comportamento anormal da água de se expandir em certo momento de seu resfriamento, quando o esperado era que se contraísse. Este assunto é abordado, preferencialmente, pelos componentes curriculares **Física** e **Química**, pelo fato de a dilatação térmica e a mudança de estado físico constituírem processos físicos (aqueles que não causam alterações da matéria) e devido à descrição desse fenômeno ser feita com base na Geometria molecular, que utiliza algumas formas espaciais estudadas neste capítulo. Nessa seção, é interessante disponibilizar um tempo para que os alunos a leiam individualmente e façam seus apontamentos iniciais. Diga a eles que escrevam o que entenderam acerca do assunto, incluindo informações referentes aos componentes curriculares **Física** e **Química**, e que também anotem eventuais dúvidas. Após esta primeira análise, inicie a discussão com alguns questionamentos, como:

- Qual é o assunto do infográfico?
- Você já tinha ouvido falar dessa característica da água e de sua importância? Converse com seus colegas sobre este assunto.
- Você já estudou este assunto em outros componente curriculares? Cite ao menos um caso.

A dilatação é um fenômeno térmico, ou seja, depende das variações de temperatura. Quando um material é aquecido, aumentam as vibrações das estruturas que o compõem, que passam a ocupar mais espaço, aumentando assim suas dimensões. Situação contrária ocorre no resfriamento.

A água também tem esse comportamento, porém, ocorre uma anomalia à temperatura entre 0 °C a 4 °C, quando ela atinge sua máxima densidade, ou seu volume mínimo, conforme apresentado nos gráficos. Quando a temperatura está entre 0 °C e 4 °C, a água sofre uma pequena expansão, aumentando seu volume e diminuindo sua densidade, ou seja, ao solidificar, o gelo será menos denso que a água líquida, o que não ocorre com a maioria dos materiais.

Se achar necessário, comente com os alunos que densidade é a relação entre massa e volume, ou seja, o modo como os átomos ou as moléculas (massa) estão arranjados no espaço (volume). Os gráficos apresentados demonstram os valores da densidade e do volume da água para temperaturas próximas a 4 °C. Chame a atenção para a configuração das curvas: quando o volume é mínimo, a substância está muito compacta, ou seja, sua densidade é máxima. Se achar conveniente, peça ao professor do componente curricular **Física** que revise esse conteúdo com os alunos.

Esse fenômeno pode ser descrito fazendo uso da Geometria molecular, que estuda a organização tridimensional dos átomos e das moléculas em uma estrutura. A molécula de água é formada por um átomo de oxigênio e dois de hidrogênio, ligados de forma covalente, ou seja, com compartilhamento de elétrons. Pelo fato de o oxigênio apresentar maior capacidade de atrair elétrons que o hidrogênio, a molécula de água é dita polar, surgindo uma atração com outras moléculas próximas, estabelecendo uma ligação chamada ponte de hidrogênio. Uma molécula pode se ligar com quatro outras, formando uma configuração tetraédrica. Devido ao movimento das partículas (temperatura), somente algumas moléculas fazem as quatro ligações.

Quando a temperatura de um lago diminui, diminuem as vibrações das partículas, de maneira que a água se contrai. A 4 °C ocorre a organização mais compacta (com menor volume e maior densidade), localizando-se assim no fundo do lago. A temperatura da água situada na superfície baixa para menos de 4 °C, estabelecendo cada vez mais pontes de hidrogênio. A forma resultante é hexagonal, com espaços vazios no centro da estrutura, gerando a diminuição da densidade. Assim, essa porção de água que se localiza na superfície atinge a temperatura de congelamento e se solidifica. A água abaixo dessa porção se mantém no estado líquido, também pelo fato de o gelo ser um bom isolante térmico, o que é confirmado pela existência de estruturas como os iglus, que protegem do frio os moradores de regiões com temperaturas muito baixas.

Corpos redondos

Páginas 108 e 109

- Uma sugestão para o trabalho com essas páginas é solicitar aos alunos que se organizem em duplas ou trios e leiam as informações da página, orientando-os a anotar as dúvidas que surgirem. Caso os alunos se interessem por esse tema, peça que pesquisem locais onde pode-se praticar mergulho no Brasil.

  Comente com os alunos que existem três tipos de mergulhos: o livre, o dependente e o autônomo. O mergulho livre é praticado sem equipamento, contando apenas com o fôlego do mergulhador. Já no mergulho dependente utiliza-se uma fonte de ar proveniente da superfície. Por fim, o mergulho autônomo faz uso da chamada Scuba (Self-Contained Underwater Breathing Apparatus), um aparato independente de respiração aquática.
- Explique aos alunos a função de cada um dos equipamentos necessários ao mergulhador, que foram apresentados nas páginas.
  - O *snorkel* consiste em um tubo de aproximadamente trinta centímetros de comprimento acoplado a um bocal, permitindo ao mergulhador respirar o ar do ambiente pela boca com a cabeça submersa.
  - A máscara de mergulho tem a função de proteger os olhos e dar visibilidade ao mergulhador, visto que os raios de luz não podem ser focados sem a presença de uma camada de ar diante dos olhos.
  - O regulador de ar tem a função de regular a pressão do cilindro.
  - O colete equilibrador tem a função de controlar a flutuabilidade do mergulhador. Ele é formado por bolsas infláveis que enchem ou esvaziam quando o mergulhador aciona o respectivo botão.
  - O cinto de lastro é um equipamento que tem como função compensar a flutuabilidade causada principalmente pela roupa isolante e pela gordura corporal.
  - A fonte alternativa de ar é usada apenas em emergências e tem por função substituir o regulador de ar.
  - O medidor de pressão é responsável por informar a pressão.
  - A roupa de exposição, também chamada de roupa isotérmica, tem a função de manter a temperatura natural do corpo, evitando a perda de calor. Também protege o mergulhador contra queimaduras de corais, animais venenosos ou cortes de pedras.
  - As nadadeiras auxiliam o mergulhador a se movimentar embaixo d’água.
  - O cilindro de ar armazena o ar que o mergulhador utiliza no mergulho. O tempo que leva para esse ar acabar depende da profundidade (pressão que se encontra o mergulhador) e do ritmo respiratório.

Página 110

- Ao introduzir o assunto deste capítulo, peça aos alunos que leiam as informações desta página e comente as construções apresentadas. Aproveite a oportunidade para destacar alguns elementos dos corpos redondos, como base, altura, superfície lateral, entre outros. Comente também as semelhanças e diferenças que eles puderam observar entre os poliedros, vistos no capítulo anterior, e os corpos redondos.

  Se possível, leve para a sala de aula algumas fotografias de objetos ou construções que apresentam formas arredondadas, a fim de que os alunos associem o conteúdo a alguns monumentos, construções e objetos do dia a dia.

  Veja algumas sugestões de perguntas que podem ser feitas aos alunos nesse momento:
  - Quais são as características comuns entre o formato das construções e dos objetos que aparecem nas fotografias desta página?
  - Que nome é dado aos formatos geométricos que aparecem nas fotografias desta página?
  - Vocês conhecem ou já ouviram falar do arquiteto Oscar Niemeyer? Se ouviram, o que sabem a respeito dele?
  - Cite o nome de outras construções famosas que foram projetadas por esse arquiteto.
  - Existe na cidade onde moramos algum monumento com formato similar ao das construções que aparecem nesta página? Caso exista, explore sua descrição com os alunos.
- Em relação às duas obras de Oscar Niemeyer (1907-2012) apresentadas na página, complemente com as seguintes informações:
  - O Museu Oscar Niemeyer é um dos maiores da América Latina, com mais de 17 mil metros quadrados destinados a exposições de Artes visuais, arquitetura e *design*. Esse museu é composto de um prédio e um anexo, popularmente chamado Olho, ambos projetos de Oscar Niemeyer. Com aproximadamente duas mil peças, o acervo tem obras de importantes artistas, como Tarsila do Amaral e Candido Portinari.
  - A Casa do Baile, local onde funcionava um salão de dança popular, foi reaberta em 2002, transformando-se em um centro que discute Urbanismo, Arquitetu-

ra e *design*, vinculado à Fundação Municipal de Cultura/Prefeitura de Belo Horizonte. A Casa possui ainda um salão de 255 m^2, um auditório de 53 lugares, com recursos multimídia e salas de apoio administrativo.

- Com base nas respostas dos alunos, caso haja interesse, fale um pouco mais sobre Oscar Niemeyer. Veja a seguir algumas informações.

Oscar Niemeyer

Oscar Niemeyer Soares Filho nasceu na cidade do Rio de Janeiro em 1907. Em 1934, na mesma cidade formou-se em Arquitetura pela Escola Nacional de Belas Artes. Realizou grande quantidade de projetos arquitetônicos, consolidando-se ao longo do tempo como um dos mais importantes arquitetos do mundo. Entre seus projetos, podemos destacar:

- O conjunto arquitetônico da Pampulha, projetado entre 1940 e 1944, por encomenda do então prefeito de Belo Horizonte, Juscelino Kubitschek.
- Em 1947, foi convidado pela ONU para participar da comissão de arquitetos encarregada de definir os planos de sua sede em Nova Iorque. Seu projeto, associado ao de Le Corbusier, foi escolhido como base do plano definitivo.
- Em 1956, iniciou, a convite do presidente da República, Juscelino Kubitschek, sua colaboração na construção da nova capital brasileira, Brasília, onde permaneceu até 1960.
- Em 1967, projetou a sede do Partido Comunista Francês, em Paris.
- Em 1968, projetou a Universidade de Constantine, na Argélia, e a sede da editora Mondadori, em Milão.
- Em 1982, realizou o projeto da Passarela do Samba, no Rio de Janeiro.
- Em 1991, projetou o Museu de Arte Contemporânea (MAC), em Niterói (RJ).
- Suas obras são expostas em mostras individuais, como Oscar Niemeyer, *l'architecte* de Brasília, no Musée des Arts Décoratifs, em Paris, 1965; Oscar Niemeyer 80 anos, no MAM/RJ, 1987; Oscar Niemeyer: escultura, no MAC/Niterói, 1999; entre outras.
- Participou de exposições coletivas, como *From Aleijadinho to Niemeyer*, no Salão de Exposições da ONU, em Nova Iorque, 1983; e Tradição e ruptura: síntese de arte e cultura brasileiras, na Fundação Bienal, em São Paulo, 1984.
- Recebeu homenagens e distinções, como a ordem de Comendador das Artes e Letras e a Medalha de Ouro da Academia de Arquitetura de Paris, em 1982; o título de Doutor Honoris Causa da Universidade de São Paulo, em 1995; e o Prêmio Leão de Ouro, na 6ª Bienal Internacional de Arquitetura de Veneza, em 1996.

Niemeyer faleceu no dia 5 de dezembro de 2012 na cidade do Rio de Janeiro aos 104 anos.

Fonte de pesquisa: FUNDAÇÃO OSCAR NIEMEYER. Disponível em: <http://www.niemeyer.org.br/>. Acesso em: 5 set. 2020.

Para aprofundar

No endereço eletrônico a seguir é possível ler mais informações sobre a Casa do Baile, bem como fazer uma visita virtual ao museu da Pampulha, em que podemos observar outras obras de Oscar Niemeyer.

MUSEU VIRTUAL PAMPULHA. *Casa do Baile*. Disponível em: <http://www.museuvirtualbrasil.com.br/museu_pampulha/modules/news3/article.php?storyid=16>. Acesso em: 19 ago. 2020.

Página 111 Conversando

- Para o desenvolvimento dessas questões oriente os alunos a formar duplas ou trios a fim de responderem às questões propostas. Ao final promova uma discussão com base nas respostas dos alunos.
- No item **b**, verifique se os alunos perceberam as características comuns entre as formas apresentadas e, caso tenham dificuldade, auxilie-os a chegar às conclusões. Para isso, leve para a sala de aula algumas embalagens ou objetos que se assemelham às formas apresentadas (ou alguns cones e cilindros, confeccionados em cartolina) e uma bola (de isopor, por exemplo) para representar a esfera. Distribua esse material aos alunos para que eles possam manuseá-lo e verificar algumas semelhanças entre as formas. Leve-os a perceber que esses objetos possuem formas arredondadas e que as bases do cilindro e do cone, bem como a seção da esfera, são círculos.
- No item **c**, converse com os alunos que a estrutura do silo é composta por um corpo cilíndrico e uma cobertura cônica, interligados. Sua forma se deve à grande eficiência estrutural da forma cilíndrica, que possibilita um grande volume de armazenagem. Os silos são, frequentemente, observados em fazendas produtoras de grãos.
- No item **d**, verifique se os alunos perceberam que as embalagens de produtos mais comuns no dia a dia, entre cilíndricas e cônicas, são as de formato cilíndrico, pois possuem maior volume interno em relação às cônicas, podendo, assim, acondicionar maior quantidade de produto. Uma sugestão para mostrar aos alunos que o cilindro possui maior volume interno em relação a um cone, é levar dois objetos com o formato de cilindro e de cone com a mesma altura e mesmo raio, para a sala de aula. Em seguida, preenchê-los com um líquido e constatar que o volume do cilindro é maior do que o volume do cone.

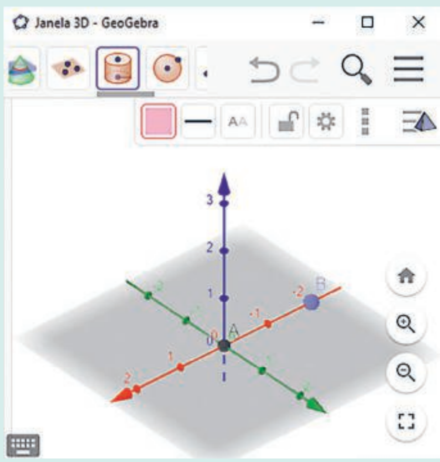
Página 112

Metodologias e estratégias ativas

Uma sugestão para o trabalho com essa página é utilizar a metodologia ativa **Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação**. Caso seja possível, leve os alunos ao laboratório de informática e utilize o *software* GeoGebra 3D. Oriente-os a se familiarizarem com o *software* e depois peça que construam um cilindro. Nessa construção foi utilizada a versão 6.0.851.0 do GeoGebra, o mesmo apresentado na página **217**.

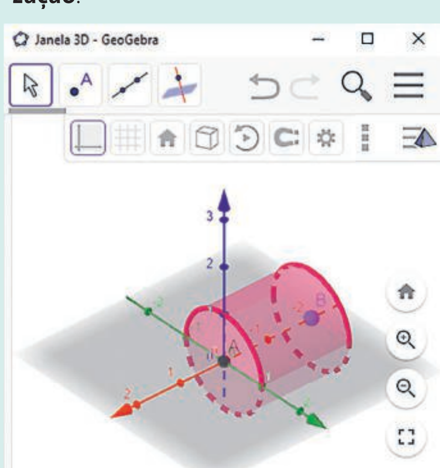
- Para a construção de um cilindro é necessário determinar dois pontos A e B e depois determinar o raio. Para essa construção, siga os seguintes passos:

1º Selecione a ferramenta **Cilindro** e clique em dois pontos da **Janela de Visualização**.

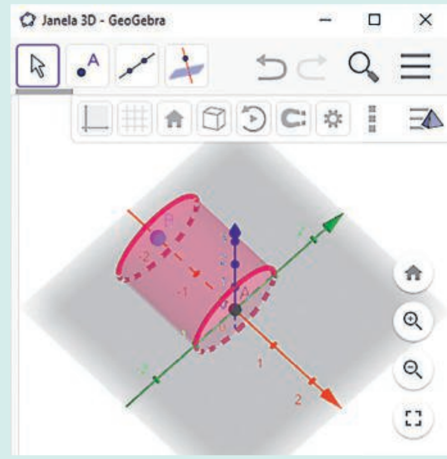


2º Na caixa que aparecer, digite o comprimento do raio do cilindro e clique em **OK**.

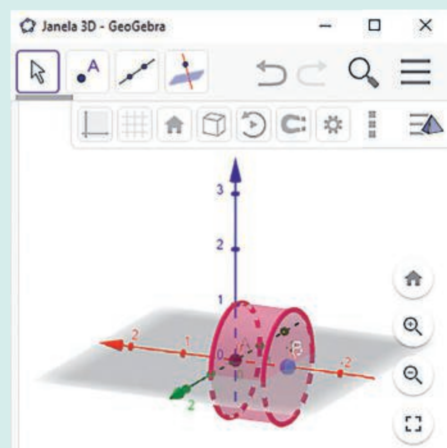
3º Aproxime ou afaste a visualização utilizando os ícones no canto inferior direito para que o cilindro apareça inteiro na **Janela de Visualização**.



4º Com a ferramenta **Mover**, é possível arrastar a **Janela de Visualização** para observar o cilindro de outras posições.



5º Ainda com a ferramenta **Mover**, arrastando os pontos é possível alterar a altura e a posição do cilindro.



Fotos: Reprodução/Geogebra/Markus Hohenwarter

Permita que os alunos construam os seus próprios sólidos e os explorem movimentando tanto o ponto B quanto o ponto A. Ao final, faça uma discussão sobre os elementos necessários para construir um cilindro.

Para saber como deve ser o encaminhamento dessa atividade utilizando a metodologia **Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação**, leia sobre ela na seção **Uso de estratégias de ensino inovadoras** nesta Assessoria pedagógica.

- Para abordar a construção de um cilindro de revolução, utilize o objeto de aprendizagem Cone e cilindro de revolução, do *software* GeoGebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/u6wxNeeY>. Acesso em: 19 ago. 2020. Utilizando esse objeto o aluno pode perceber que um cilindro reto é formado pela rotação de um retângulo em torno do eixo y. Oriente os alunos a moverem o ponto H em torno do eixo y, com isso eles perceberão a formação de um cilindro circular.

Página 113

- Comente com os alunos que na Antiguidade os matemáticos calculavam a área do círculo utilizando aproximações. Uma dessas maneiras é apresentada no papiro de Rhind (ou Ahmes), que descreve os métodos de multiplicação e divisão, frações unitárias, área do círculo e muitas outras aplicações. Nesse documento encontra-se uma aproximação para a área de um círculo que seria igual à de um quadrado cujo lado mede $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo. Para exemplificar essa forma de calcular a área sugira a seguinte tarefa:

  Considerando o método para o cálculo da área de um círculo apresentado no Papiro de Rhind, determine a área de um círculo cujo diâmetro é 9 cm. Compare o resultado encontrado com a área do círculo utilizando a fórmula $A = \pi r^2$.

  Resolução

  De acordo com o papiro, a área de um círculo é igual à área de um quadrado cujo lado tem $\frac{8}{9}$ da medida do diâmetro desse círculo. Como nosso círculo tem o diâmetro de 9 cm obtemos:

$$A = \left(\frac{8}{9}D\right)^2$$
$$A = \left(\frac{8}{9} \cdot 9\right)^2$$
$$A = (8)^2$$
$$A = 64 \rightarrow 64 \text{ cm}^2$$

  Para o cálculo da área do círculo utilizando a fórmula $A = \pi r^2$, precisamos do raio desse círculo. Como o diâmetro é duas vezes o raio, então o raio tem 4,5 cm de comprimento. Assim temos:

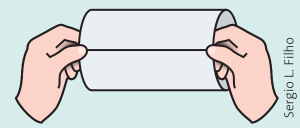
$$A = \pi r^2$$
$$A = \pi(4{,}5)^2$$
$$A = 20{,}25\pi$$
$$A \simeq 63{,}617 \rightarrow 63{,}617 \text{ cm}^2$$

  Compare os dois resultados e discuta com os alunos como o método apresentado no papiro fornece uma área muito próxima ao valor encontrado utilizando a fórmula $A = \pi r^2$.

Página 115

- Para trabalhar o conteúdo dessa página, utilize para exemplificar a área lateral de um cilindro reto, uma folha de papel sulfite e apresente aos alunos como essa área pode ser determinada.

  Com uma folha de papel A4, una dois lados paralelos (sem dobrar, como na figura a seguir) para formar um cilindro, a união desses lados pode ser feita tanto com a folha na vertical quanto na horizontal.



  Observe que a união desses lados mostra a área da superfície lateral do cilindro. Assim a área da superfície lateral do cilindro será dada pela multiplicação do comprimento da circunferência e da altura do cilindro.

- Se julgar conveniente, reproduza a planificação da superfície do cilindro disponível nas **Páginas para reprodução** e entregue aos alunos, a fim de que possam montá-lo e utilizá-lo ao longo do capítulo.

Página 117

- Na tarefa **5**, caso os alunos demonstrem dificuldade, realize questionamentos a fim de que criem suas estratégias. Faça questionamentos como:
  - Devemos calcular a área total do cilindro?
  - Devemos calcular a área da base do cilindro? Ou a área lateral?
  - Qual procedimento devemos utilizar para determinar a quantidade de cortes?

  Nessa tarefa, relembre os alunos as unidades de medida de área, e informe que, para realizar os procedimentos necessários, é fundamental que operemos com as mesmas unidades de medida. Se necessário, comente que, para converter de milímetros quadrados em metro quadrado, é necessário dividir por 1 000 000.

BNCC

A seção **Problemas e exercícios propostos** proporciona que o aluno resolva e elabore problemas que envolvem o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cilíndricos. Para essas e outras tarefas desse capítulo, é necessário que o aluno relacione o conceito de área total e de volume de corpos redondos com os problemas propostos, desenvolvendo assim a habilidade **EM13MAT309**.

Página 118

- Para o desenvolvimento do tema dessa página, pode-se sugerir que os alunos construam um cilindro e um paralelepípedo de mesma altura e com as áreas da base igual. Uma sugestão é que construam esses sólidos com um material impermeável. Assim, eles podem colocar água nos dois sólidos e verificar que o volume de água é o mesmo. Caso não seja possível realizar essa experiência, oriente-os a observar os sólidos construídos, com papel por exemplo, a fim de tecer reflexões sobre o volume desses dois sólidos. Questione-os se já foi estudado algum conceito que pode auxiliar a chegar na ideia do volume de um cilindro.

BNCC

O processo de obtenção do volume de um cilindro é investigado por meio do Princípio de Cavalieri, o que resulta na fórmula do cálculo do volume de um cilindro. Investigações como essa possibilitam o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT504**.

Página 120

- Na tarefa **13**, se necessário retome a diferença entre capacidade e volume. Além disso, destaque que a unidade de capacidade é litros e a de volume é metros cúbicos.
- Na tarefa **15**, se constatar dificuldades dos alunos com a resolução dessa tarefa, oriente-os a anotar as informações presentes no problema. Faça questionamentos que os incentivem a refletir sobre o procedimento a ser realizado. Para auxiliá-los proponha a seguinte tarefa, que possui uma ideia similar.

Dado um cilindro reto de raio 3 cm e volume 141,30 cm^3, determine sua altura.

Resolução:

Sabemos que o volume de um cilindro reto é dado por $V = \pi r^2 h$ e o problema forneceu essa informação e o raio. De posse dessas informações, substituímos os valores na fórmula do volume. Considere: $\pi = 3{,}14$.

$$V = \pi r^2 h$$

$$141{,}30 = \pi\,(3)^2 h$$

$$141{,}30 = 9\pi h$$

$$h = \frac{141{,}30}{9\pi}$$

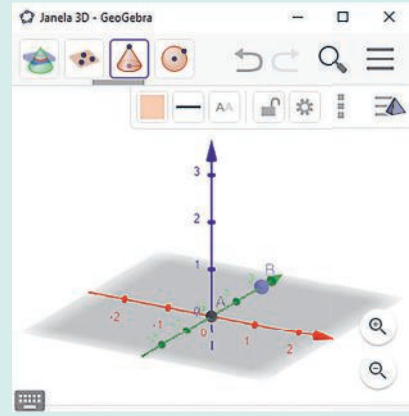
$$h = 5$$

Portanto, a altura desse cilindro reto é 5 cm.

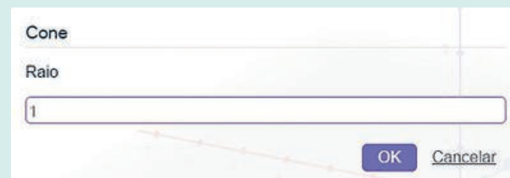
Página 122

- Uma sugestão para abordar o conteúdo dessa página é utilizar um *software* de Geometria dinâmica, como o GeoGebra 3D. Nessa construção foi utilizada a versão 6.0.851.0 do GeoGebra, o mesmo apresentado na página **217**.
- Para a construção de um cone é necessário uma circunferência de determinado raio, no plano xy e um ponto A que não pertença ao plano xy. Para a construção do cone, siga os seguintes passos:

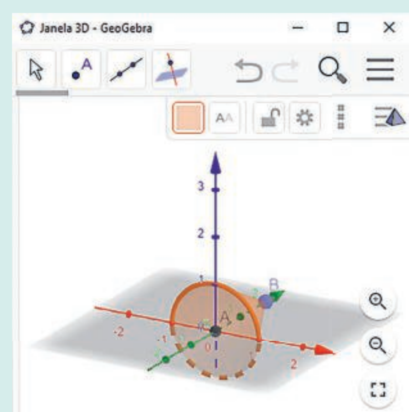
1º Selecione a ferramenta **Cone** e clique em dois pontos da **Janela de Visualização**.



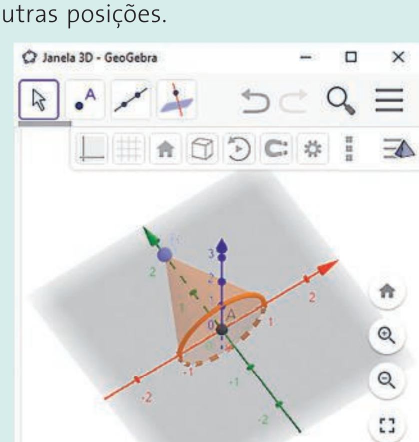
2º Na caixa que aparecer, digite o comprimento do raio da base do cilindro e clique em **OK**.



3º Aproxime ou afaste a visualização utilizando os ícones no canto inferior direito para que o cone apareça inteiro na **Janela de Visualização**.

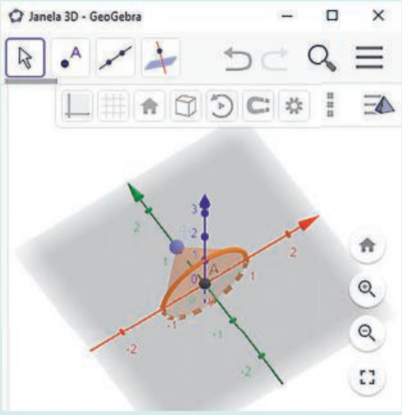


4º Com a ferramenta **Mover**, é possível arrastar a **Janela de Visualização** para observar o cone de outras posições.



Fotos: Reprodução/Geogebra/Markus Hohenwarter

5º Ainda com a ferramenta **Mover**, arrastando os pontos é possível alterar a altura e a posição do cone.



Reprodução/Geogebra/Markus Hohenwarter

Permita que os alunos construam os seus próprios sólidos e os explorem movimentando tanto o ponto *B* quanto o ponto *A*. Ao final, promova uma discussão sobre os elementos necessários para construir um cone.

Página 123

- Uma sugestão de mostrar aos alunos como se forma um cone ao revolucionar um triângulo em torno de um eixo, é acessando com eles o objeto de aprendizagem Cone e cilindro de revolução, do *software* GeoGebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/u6wxNeeY>. Acesso em: 19 ago. 2020. Caso seja possível, leve-os ao laboratório de informática e oriente-os a acessar esse objeto. Com essa ação, os alunos podem perceber que um cone reto é formado pela rotação de uma reta em torno do eixo *y*.

Página 124

- Se julgar conveniente, reproduza a planificação da superfície do cone disponível nas **Páginas para reprodução** e entregue aos alunos, a fim de que possam montá-lo e utilizá-lo ao longo do capítulo.

Página 129

- Durante o desenvolvimento da teoria desta página, deduza com os alunos a fórmula para o cálculo da área lateral do tronco de cone reto. Para isso, vamos utilizar a relação **I** apresentada nesta página, $\pi r - \pi r'(g - G)$, e a razão de semelhança entre as geratrizes dos cones e os raios das bases.

$$\frac{g}{g-G} = \frac{r}{r'}$$
$$r'g = rg - rG$$
$$rg - r'g = rG$$
$$g(r - r') = rG$$
$$g = \frac{rG}{r-r'} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo II em I, temos:

$$A_\ell = \pi(rg - r'g + r'G) =$$
$$= \pi\left[r\left(\frac{rG}{r-r'}\right) - r'\left(\frac{rG}{r-r'}\right) + r'G\right] =$$
$$= \pi\left(\frac{r^2G}{r-r'} - \frac{r'rG}{r-r'} + r'G\right) =$$
$$= \pi\left(\frac{r^2G - r'rG + r'G(r-r')}{r-r'}\right) =$$
$$= \pi\left(\frac{r^2G - r'rG + r'rG - r'^2G}{r-r'}\right) =$$
$$= \pi G\frac{(r+r')(r-r')}{r-r'} = \pi G(r+r')$$

- Portanto, a área lateral do tronco de cone é dada por: $A_\ell = \pi G(r + r')$.

Página 132

BNCC

O tema abordado nessa página relaciona-se com o tema contemporâneo **Diversidade cultural** e permite uma discussão sobre a Etnomatemática. A Etnomatemática trata dos saberes e fazeres de diferentes povos ou grupos sociais que expressam muitas vezes sofisticados conhecimentos matemáticos. Nessa página é abordada a cubagem, uma prática conhecida entre os trabalhadores rurais, a qual consiste em um processo utilizado para medir o volume do tronco de uma árvore. Note que essas pessoas criaram um modo de determinar o volume do tronco de uma árvore, objeto esse que se assemelha ao tronco de um cone, sem utilizar a fórmula matemática do cálculo de volume. Esse é um saber daquele grupo social que foi desenvolvido ao longo do tempo. Com base nisso, promova uma discussão com os alunos sobre a importância de valorizar o conhecimento de determinado grupo. Destaque que, ao realizar essa valoração, mostramos que não existe um único modo de realizar determinados cálculos, além disso, não existe uma única matemática, sendo possível que determinados grupos desenvolvam o seu próprio método de resolver problemas matemáticos. A Matemática aprendida na escola é o que consideramos a Matemática escolar, em que aprendemos fórmulas e algoritmos para realizar procedimentos matemáticos. Esses procedimentos podem ser realizados de outro modo, em diferentes tipos de matemática, como é o caso apresentado nessa página. É importante destacar que apesar de serem matemáticas diferentes, os resultados são bem próximos.

Etnomatemática

[...]

Etnomatemática é a matemática praticada por grupos culturais, tais como comunidades urbanas e rurais, grupos de trabalhadores, classes profissionais, crianças de uma certa faixa etária, sociedades indígenas, e tantos outros grupos que se identificam por objetivos e tradições comuns aos grupos.

[...]

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática:* elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. p. 9.

- Deduza com os alunos a fórmula para o cálculo do volume do tronco de cone.

$$V = \frac{\pi}{3}(r^2 \cdot H - r'^2 \cdot h) =$$
$$= \frac{\pi}{3}\left[r^2 \cdot H - r'^2 \cdot (H - h_t)\right] =$$
$$= \frac{\pi}{3}(r^2 \cdot H - r'^2 \cdot H + r'^2 \cdot h_t) =$$
$$= \frac{\pi}{3}\left[H(r^2 - r'^2) + r'^2 \cdot h_t\right] \qquad (\text{I})$$

Agora, vamos obter o valor de H em função de h_t, r, r'. Para isso, vamos utilizar a razão de semelhança entre os raios das bases e as alturas dos cones.

$$\frac{r}{r'} = \frac{H}{h} \Rightarrow r \cdot h = H \cdot r' \Rightarrow r(H - h_t) = H \cdot r' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow rH - rh_t = Hr' \Rightarrow rH - Hr' = rh_t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H(r - r') = rh_t \Rightarrow H = \frac{rh_t}{r - r'} \qquad (\text{II})$$

Substituindo II em I, temos:

$$V = \frac{\pi}{3}\left[H(r^2 - r'^2) + r'^2 \cdot h_t\right] =$$
$$= \frac{\pi}{3}\left[\frac{rh_t}{r - r'} \cdot (r^2 - r'^2) + r'^2 \cdot h_t\right] =$$
$$= \frac{\pi}{3}\left[\frac{rh_t}{r - r'} \cdot (r - r')(r + r') + r'^2 \cdot h_t\right] =$$
$$= \frac{\pi}{3}\left[rh_t(r + r') + r'^2 \cdot h_t\right] =$$
$$= \frac{\pi}{3}\left[r^2h_t + r'h_tr + r'^2 \cdot h_t\right] =$$
$$= \frac{\pi h_t}{3}(r^2 + r'r + r'^2)$$

Portanto, o volume do tronco de um cone é dado por $V = \frac{\pi h_t}{3}(r^2 + r'r + r'^2)$.

Página 133

- Para resolver as tarefas **56**, **57**, **59** e **60** é necessário que os alunos utilizem alguns conceitos relacionados à semelhança de triângulos, assunto que eles provavelmente já estudaram nos anos finais do Ensino Fundamental. Neste momento, se achar oportuno e conveniente, faça uma revisão desse assunto com os alunos. Diga a eles que dois triângulos são semelhantes quando os ângulos internos correspondentes são congruentes (têm a mesma medida) e os lados correspondentes são proporcionais. Relembre também os casos de semelhança.

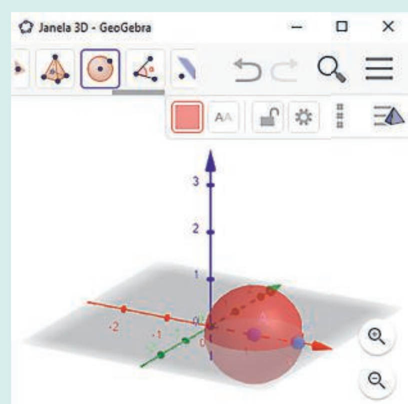
  - 1º caso de semelhança ângulo e ângulo (AA): Dois triângulos são semelhantes quando têm dois ângulos internos correspondentes congruentes.
  - 2º caso de semelhança lado, ângulo e lado (LAL): Dois triângulos são semelhantes quando têm dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por eles congruentes.
  - 3º caso de semelhança lado, lado e lado (LLL): Dois triângulos são semelhantes quando têm os três lados correspondentes proporcionais.

  Mais informações sobre esse assunto serão trabalhadas no capítulo **1** do volume **Trigonometria**, **fenômenos periódicos e programação**.

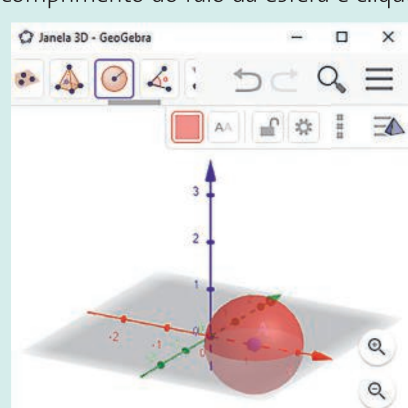
Página 134

Uma sugestão para abordar o conteúdo dessa página é utilizar um *software* de Geometria dinâmica, como o GeoGebra 3D. Com esse *software*, é possível construir uma esfera informando o centro e um ponto, ou ainda informando o centro e o raio.

1º Selecione a ferramenta **Esfera: Centro & Ponto** e clique em dois pontos da **Janela de Visualização**.



2º Selecione a ferramenta **Esfera: Centro & Raio**, clique em um ponto da **Janela de Visualização**, digite o comprimento do raio da esfera e clique em **OK**.



Fotos: Reprodução/Geogebra/Markus Hohenwarter

3º Em ambos os casos, use os ícones no canto inferior direito e a ferramenta **Mover** para arrastar a **Janela de Visualização** e observar a esfera de outras posições

- Comente com os alunos que em uma esfera:
  - toda reta que passa pelo seu centro é eixo;
  - todos os pontos da superfície são polos;
  - qualquer seção é paralelo ou meridiano;
  - toda circunferência com mesmo centro da esfera é equador.
- Se julgar conveniente, diga aos alunos que todos os esportes que utilizam bola devem obedecer a regras e padrões determinados por órgãos oficiais. Bolas de futebol, por exemplo, devem ter uma circunferência de 68 cm a 70 cm e massa entre 410 g e 450 g, segundo a FIFA (Federação Internacional de Futebol). Já a de voleibol, segundo a FIVB (Federação Internacional de Voleibol), deve ter uma circunferência entre 65 cm e 67 cm e massa entre 260 g e 280 g.

  Fontes de pesquisa: FIFA. *Regras de futebol 2018/19*. Disponível em: <https://conteudo.cbf.com.br/cdn/201812/20181205182028_192.pdf>. Acesso em: 5 set. 2020.

  FIVB. *Regras oficiais de voleibol 2017-2020*. Disponível em: <https://cbv.com.br/pdf/regulamento/quadra/REGRAS-DE-QUADRA-2017-2020.pdf>. Acesso em: 5 set. 2020.

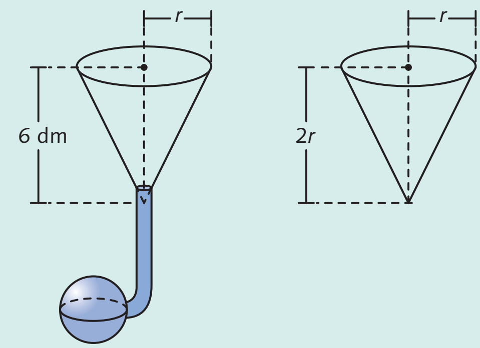
Página 135

- Nesse momento, peça aos alunos que se organizem em duplas. Depois, solicite a um integrante de cada dupla que explique a outra dupla a dedução da expressão $V = \frac{4\pi r^3}{3}$. Dessa maneira, eles podem se comunicar matematicamente, expor ideias, desenvolver a capacidade de argumentar, organizar as informações e contribuir para habilidade oral. Na elaboração da argumentação, o aluno pode ter ideias equivocadas, e com a sua intervenção e a dos colegas, ele tem a oportunidade de se reorganizar e reconstruir seus conceitos.
- Se julgar conveniente, leve os alunos ao laboratório de informática e apresente-os ao objeto de aprendizagem Dedução da fórmula do Volume da esfera, do *software* GeoGebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/bpkQGYHG>. Acesso em: 19 ago. 2020. Nesse objeto, além de deduzir a fórmula do volume de uma esfera são propostas reflexões sobre o assunto.

Páginas 136 e 137 Explorando problemas

- O trabalho com esta seção permite o desenvolvimento do pensamento computacional do aluno ao resolver o problema proposto diante das etapas de compreender o problema, planejar uma possível estratégia de resolução, executar a resolução e, por último, verificar o resultado.
- Veja uma possível resposta para o item **6**.

  Considerando o raio da caixa-d’água como *r*, as medidas do cone equilátero são:



Rafael L. Gaion

Página 139

Planejamento individual e coletivo

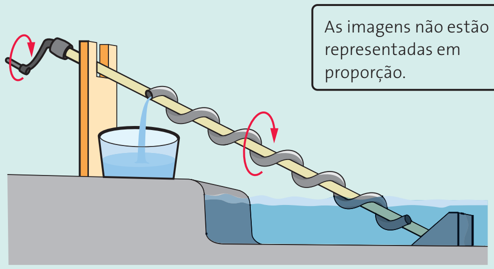
- O contexto da tarefa **73** permite estabelecer uma relação entre a Matemática e a área do conhecimento **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o componente curricular **Física**, abordando conceitos relacionados à esfera e assuntos referentes à Hidrostática. Caso seja oportuno, convide o professor de Física da escola para que trabalhe os conceitos envolvidos na realização dessa tarefa, integrando os conhecimentos relacionados à Geometria com saberes correspondentes à massa e ao volume dos corpos. No caso, com base na densidade de uma esfera e no cálculo do seu volume, é possível determinar se uma joia com esse formato é ou não maciça.

  Esta tarefa também apresenta informações referentes à análise da densidade para verificar se um corpo vai flutuar ou afundar em determinado líquido. Esse efeito está relacionado à força exercida pelo líquido, chamada empuxo, definida pelo princípio de Arquimedes: um objeto imerso em um fluido sofre ação de uma força vertical, orientada de baixo para cima. Sua intensidade corresponde ao peso do fluido deslocado pelo objeto. Essa força é a responsável pela sensação de um corpo ser mais leve quando o seguramos dentro da água. Partindo da comparação da força peso do objeto imerso e a força de empuxo exercida pelo líquido, se conclui que um corpo afunda quando sua densidade é maior do que a do líquido, e flutua se sua densidade é menor. Assim, caso os alunos tenham dificuldade em responder à pergunta proposta, comente que essa joia tem volume de 14,14 cm^3, deslocando um volume de água de igual valor quando imersa nesse líquido. Esse volume deslocado de água tem massa igual a 14,14 g, pois a densidade da água vale 1 g/cm^3. Como a massa da joia (229 g) é maior do que a massa de água deslocada, a massa da joia é maior do que o empuxo, logo ela afunda. Isso é facilmente verificado observando apenas que a densidade da joia é maior do que a da água.

No enunciado da tarefa, são citados três feitos de Arquimedes. Se possível, descreva-os rapidamente para os alunos.

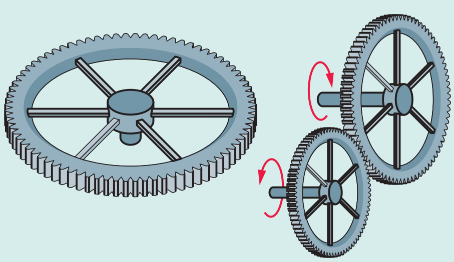
Parafuso de Arquimedes

As imagens não estão representadas em proporção.



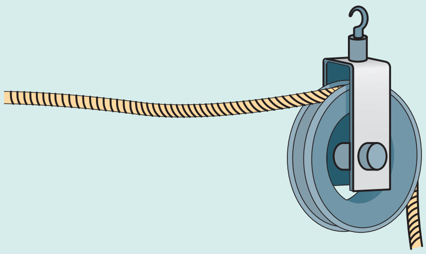
Trata-se de tubos em hélice presos a um eixo inclinado com uma manivela para fazê-lo girar. Conhecido também como bomba de água em parafuso, esse engenho ainda é usado no Egito.

Rodas dentadas



As rodas dentadas, também chamadas engrenagens, são elementos essenciais na composição de algumas máquinas, destinadas a facilitar ou mover corpos que exigem o emprego de grandes forças de tração.

Roldanas

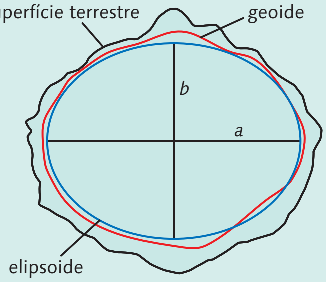


Ilustrações: Keithy Mostachi

Roda de metal ou madeira canelada em toda a circunferência, por onde passa uma corda ou corrente para facilitar a manobra. Tem sido usada com a função de ajudar a elevar objetos pesados.

Página 144

- Comente com os alunos que a Terra não é uma esfera, mais precisamente ela tem o formato de um geoide, que leva em consideração as elevações da superfície da Terra. A figura geométrica matemática que mais se aproxima do formato de um geoide é o elipsoide de revolução, definido pela rotação de uma elipse sobre o seu eixo menor.



Elipsoide de revolução

Ilustrações: Ronaldo Inácio

Fonte de pesquisa:
Atlas geográfico escolar. 8 ed.
Rio de Janeiro: IBGE, 2018.

BNCC

Ao abordar as projeções cartográficas, é possível que o aluno investigue a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), sendo que em um primeiro momento o aluno tem contato com essas projeções sem o suporte de tecnologia digital. Porém, na seção **Acesso Digital**, o aluno investiga essas deformações com o suporte de tecnologia digital, contemplando assim a habilidade **EM13MAT509**.

Além disso, a investigação das deformações de ângulos e áreas provocadas pelas diferentes projeções cartográficas com e sem o uso de tecnologias digitais, favorece o desenvolvimento da **Competência específica 5** da área de **Matemática e suas Tecnologias.**

Página 147 Finalizando a conversa

Metodologias e estratégias ativas

O encaminhamento dessas questões pode ser realizado com o apoio da metodologia ativa de **Rotação laboral**. Para utilizar essa metodologia organize a turma em grupos de três a quatro alunos e organize quatro estações de trabalho.

Em uma dessas estações, disponibilize objetos que possuem o formato de prismas de base retangular, cilindros, cones e esferas. Nessa primeira estação, oriente os alunos a classificar os objetos de acordo com o tipo de sólido que ele representa.

Na segunda estação, oriente os alunos a construir um esquema destacando os conteúdos estudados no capítulo. Nesse esquema solicite que escrevam as principais características de cada um desses conteúdos.

Na terceira estação, disponibilize um sólido no formato de cone, de esfera e de cilindro. Forneça também altura e raio de cada um deles. Nessa estação solicite que os alunos calculem a área total e o volume desses sólidos.

Na quarta estação, oriente os alunos a responder aos itens **c** e **d**, justificando suas respostas. Essa estação pode ser realizada no laboratório de informática, assim solicite que realizem uma pesquisa sobre a relação entre as projeções cartográficas e o estudo da esfera.

Caso julgue conveniente, organize mais estações de acordo com a necessidade dos alunos.

Páginas 150 e 151 Conectando ideias

Planejamento individual e coletivo

O motor a combustão interna de quatro tempos é o tema escolhido para esta seção, apresentando o funcionamento do pistão durante o ciclo Otto, e também outros detalhes referentes às peças em torno dos pistões. O motor a combustão é uma máquina térmica, assunto abordado, preferencialmente, no componente curricular **Física** no estudo da Termodinâmica. O ciclo Otto, assim como o ciclo Diesel, é um dos exemplos de máquinas abordadas nestas aulas. Assim, espera-se que o aluno adquira conhecimentos sobre esse tipo de motor e reconheça os corpos redondos estudados neste capítulo e que estão presentes em sua constituição.

Para trabalhar esta seção, disponibilize inicialmente um tempo para que os alunos leiam e interpretem as informações apresentadas. Inicie a discussão com algumas perguntas:

- Qual é o assunto abordado nesta seção?
- Quais são os corpos redondos estudados no capítulo e representados no infográfico?

Se alguns alunos conhecerem o assunto, é essencial que relatem seus conhecimentos.

Como o funcionamento do motor tem como base a combustão, alguns esclarecimentos referentes, preferencialmente ao componente curricular **Química**, podem ser relevantes:

- a combustão é a reação de uma substância (combustível) com o oxigênio (O_2) (comburente) presente na atmosfera, com liberação de energia;
- a combustão da gasolina é chamada de exotérmica, ou seja, libera calor;
- como a gasolina possui carbono em sua constituição, sua combustão leva à formação de gás carbônico (CO_2), expelido para o meio ambiente pelo escapamento do veículo;
- alguns produtos da combustão da gasolina são decorrentes das impurezas presentes nela, como o caso do enxofre (S), cuja combustão gera grande quantidade de dióxido de enxofre (SO_2), gás tóxico e corrosivo, um dos responsáveis pela acidificação da atmosfera.

Comente que no motor, a combustão interna apresentada funciona com base nos chamados quatro tempos, que compõem o ciclo Otto: admissão, compressão, explosão e expulsão. O ciclo foi desenvolvido em 1876, pelo engenheiro e inventor alemão Nikolaus August Otto (1832-1891).

Para aprofundar

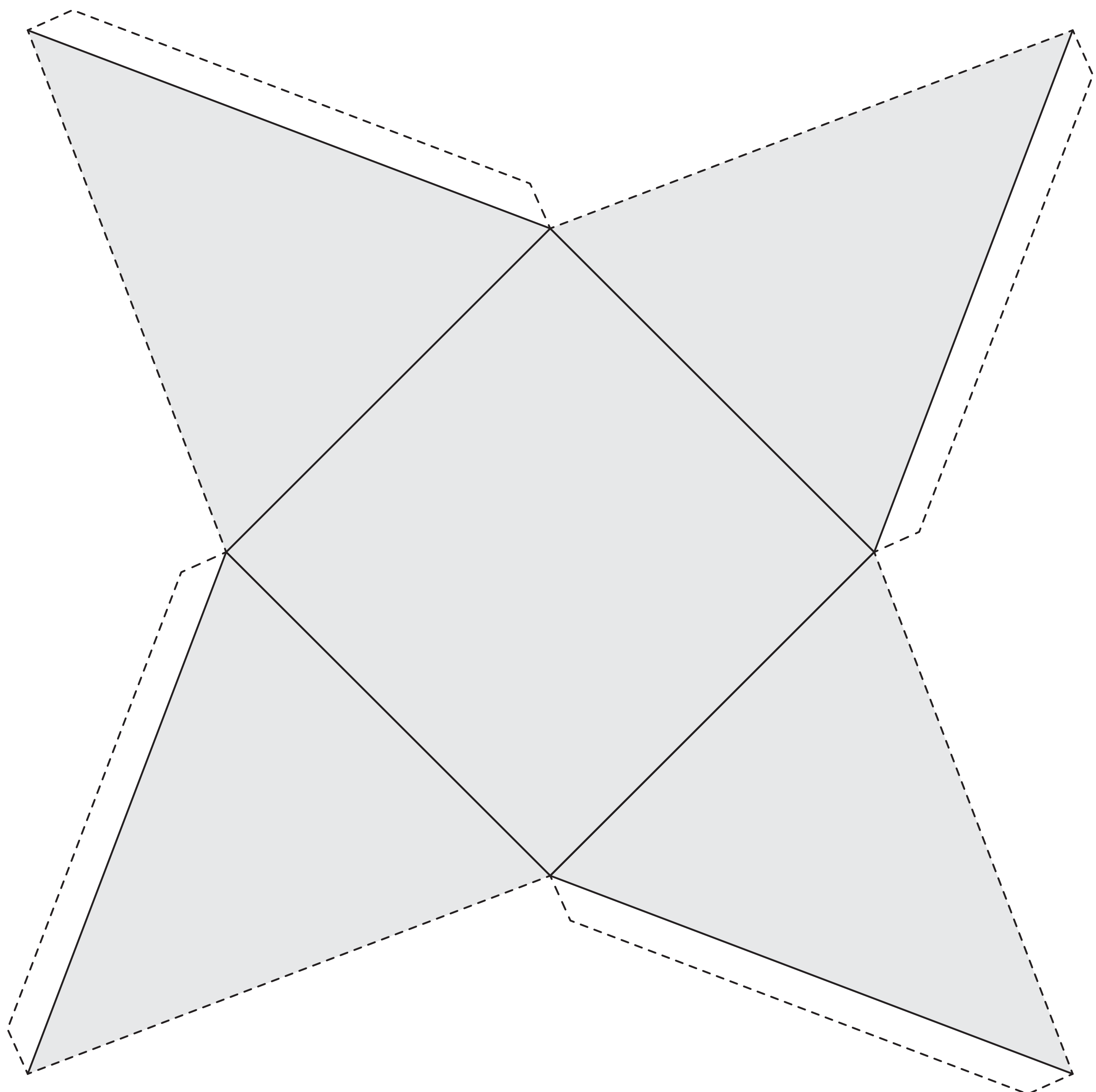
O endereço eletrônico a seguir traz informações sobre a as máquinas a combustão interna do tipo Otto e Diesel.

SILVEIRA, Fernando Lang. *Máquinas térmicas a combustão interna de Otto e de Diesel*. Disponível em: <https://www.if.ufrgs.br/fis183/textos/maquinas/maquinas.html>. Acesso em: 19 ago. 2020.

BNCC

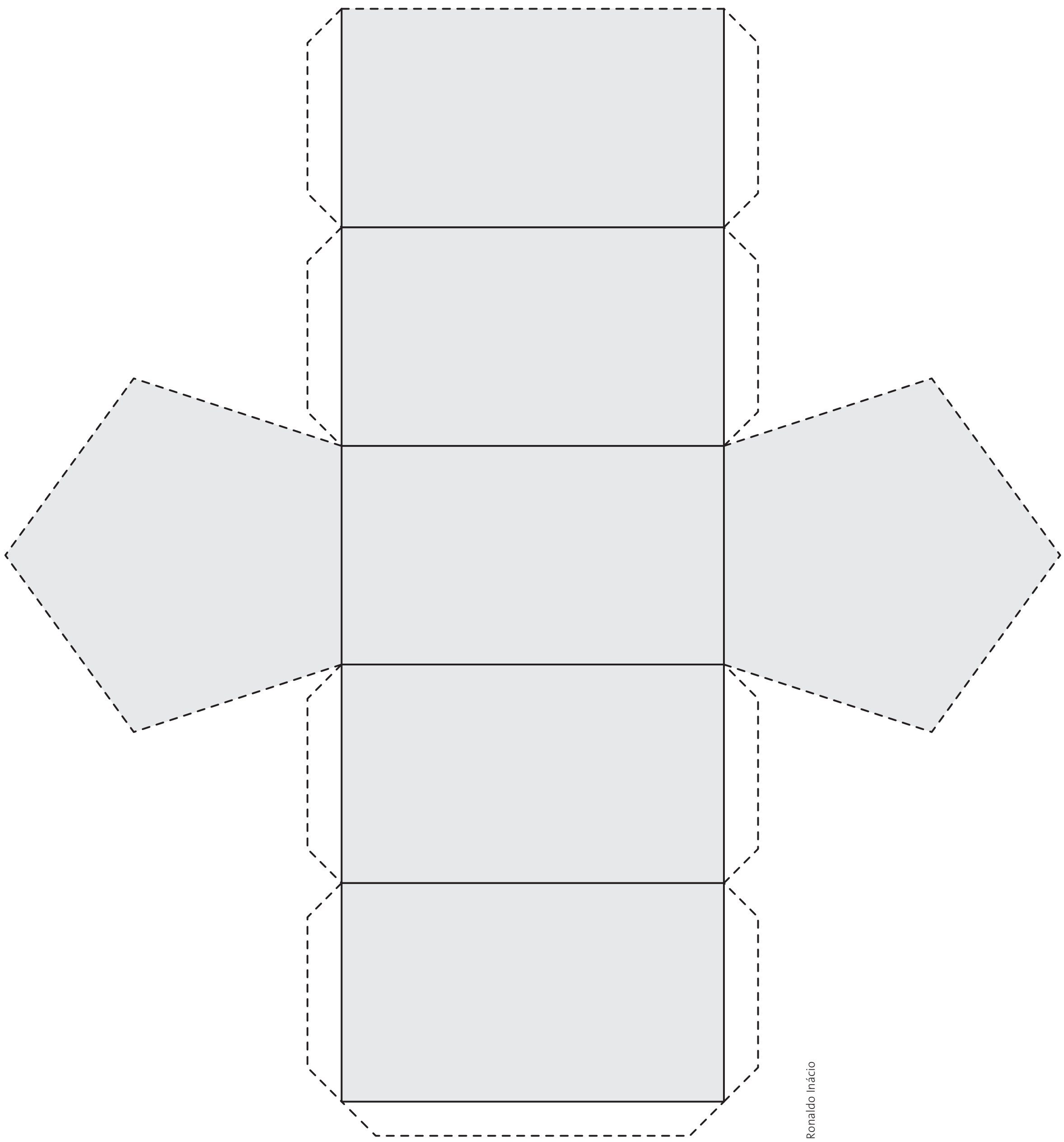
No decorrer desse capítulo seja na resolução dos problemas e exercícios propostos, seja na seção acesso digital, é necessário que o aluno utilize estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos. No caso específico desse capítulo o aluno foi levado a resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de cilindro, cone e esfera. Esses problemas muitas vezes envolviam situações reais, como o cálculo do gasto de material para revestimento ou o cálculo do volume de estruturas que possuem um formato determinado por uma composição dos sólidos estudados. Assim, os estudantes desenvolvem a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Planificação da superfície de uma pirâmide de base quadrada

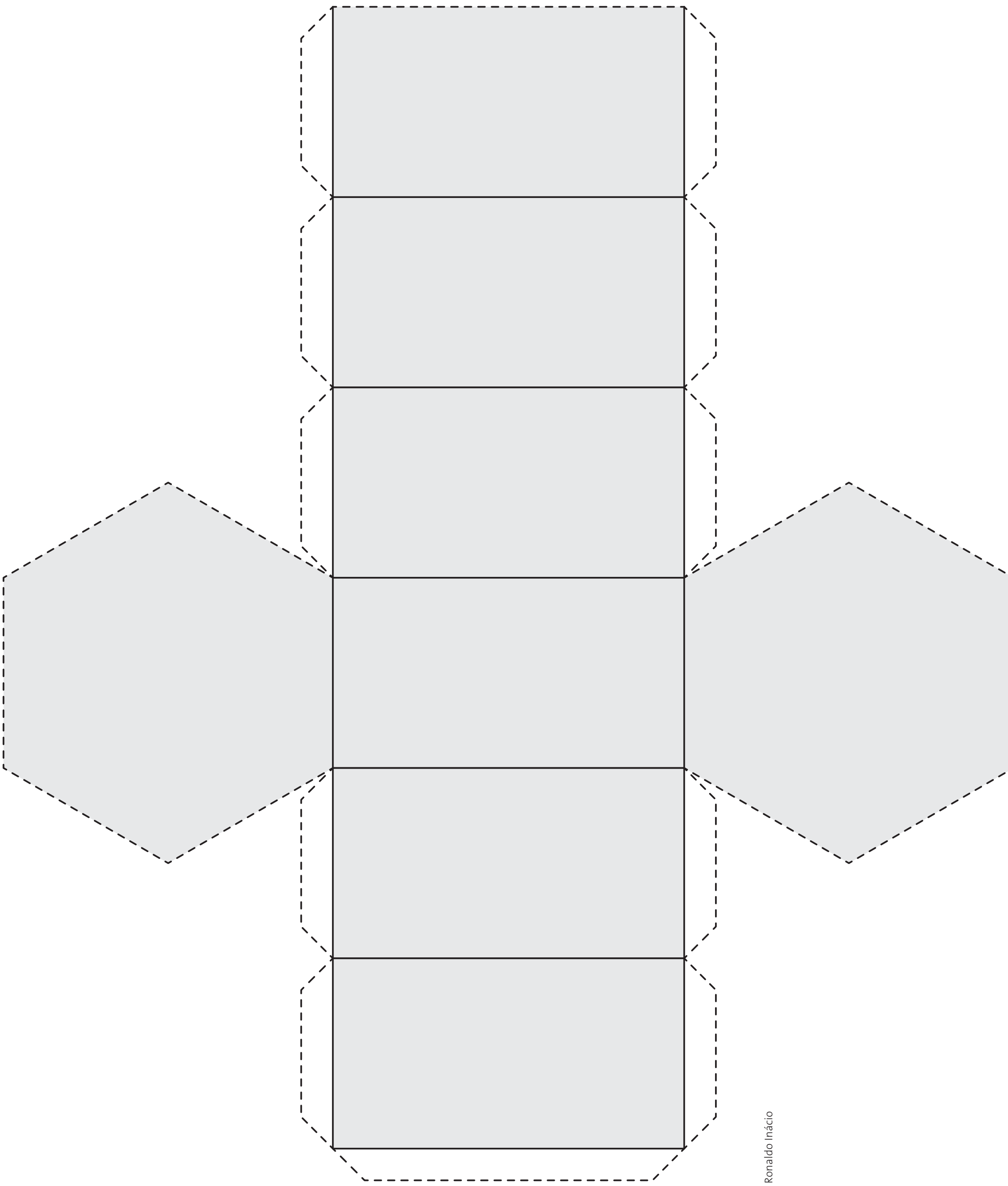


Ronaldo Inácio

Planificação da superfície de um prisma reto de base pentagonal

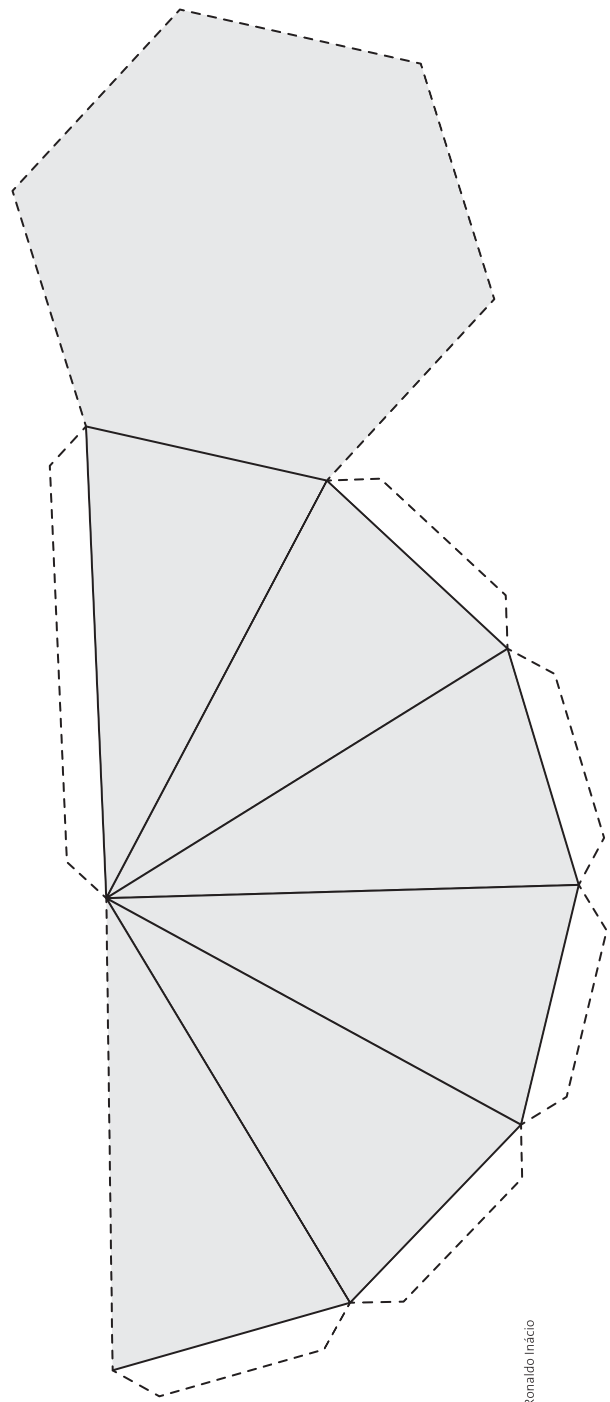


Planificação da superfície de um prisma reto de base hexagonal

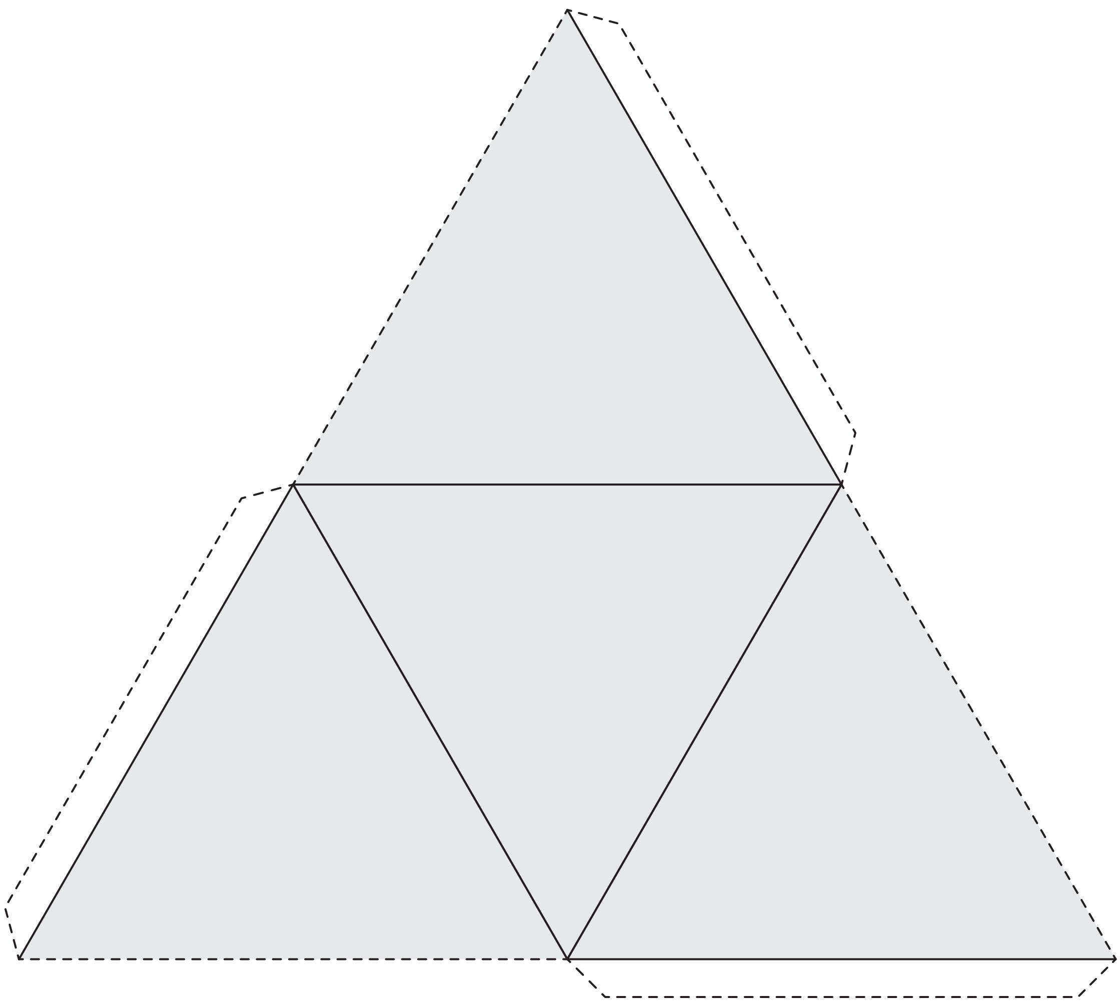


Ronaldo Inácio

Planificação da superfície de uma pirâmide de base hexagonal

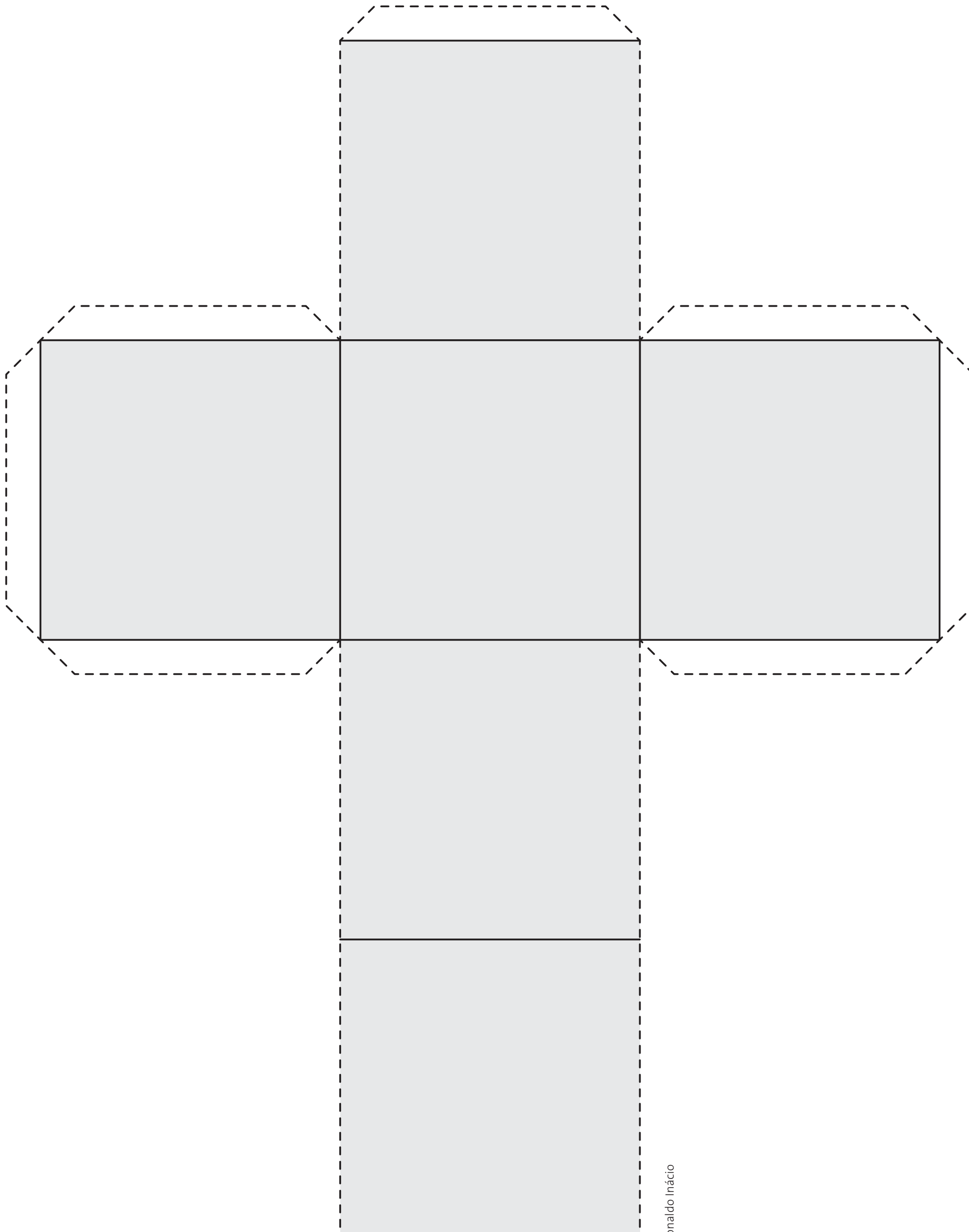


Planificação da superfície de um tetraedro regular



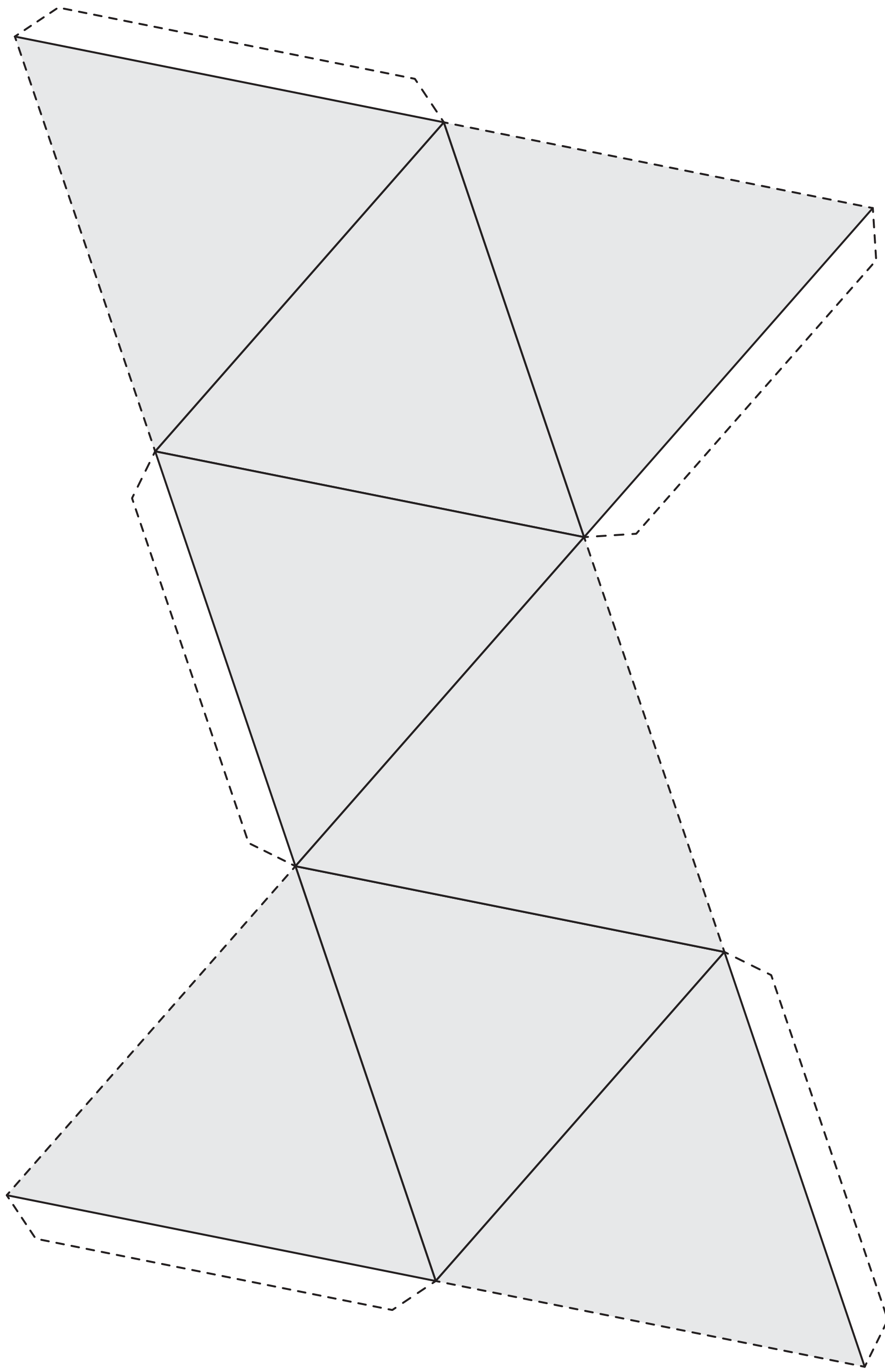
Ronaldo Inácio

Planificação da superfície de um cubo



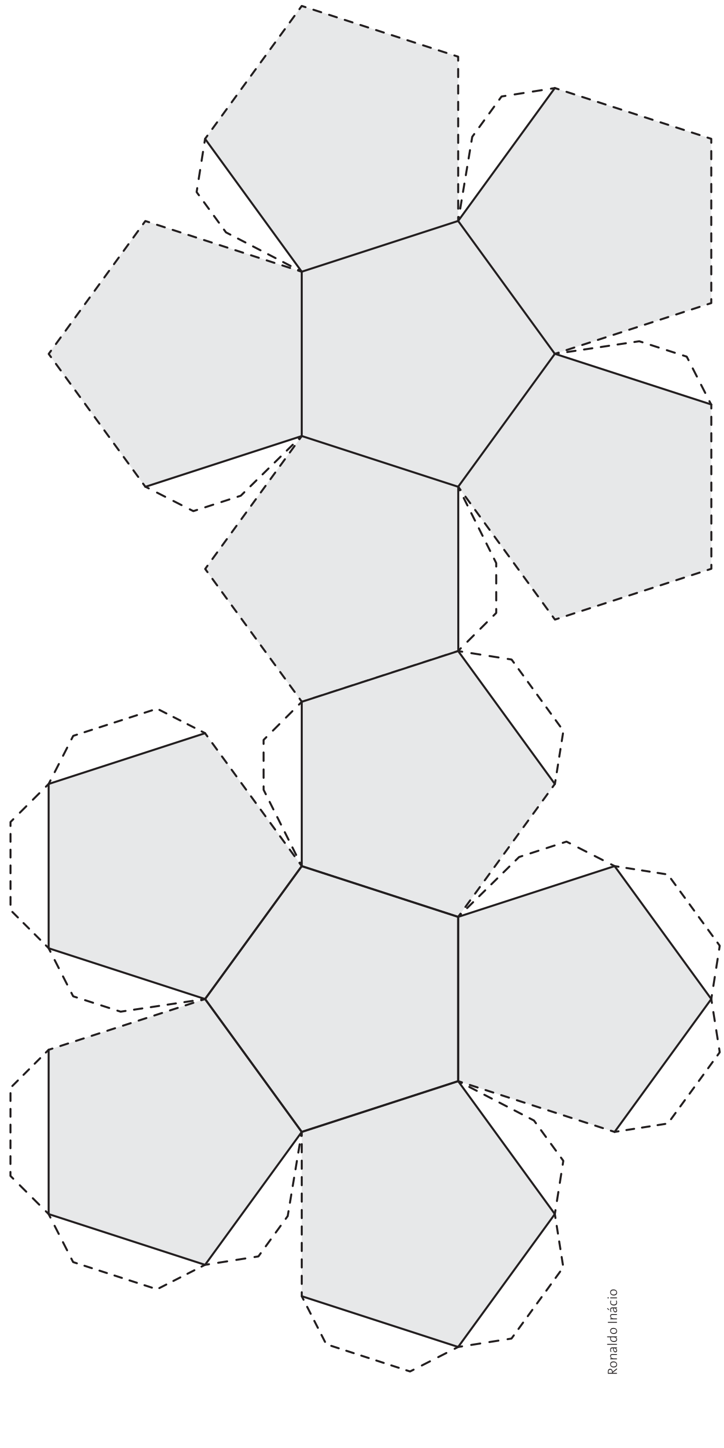
Ronaldo Inácio

Planificação da superfície de um octaedro regular



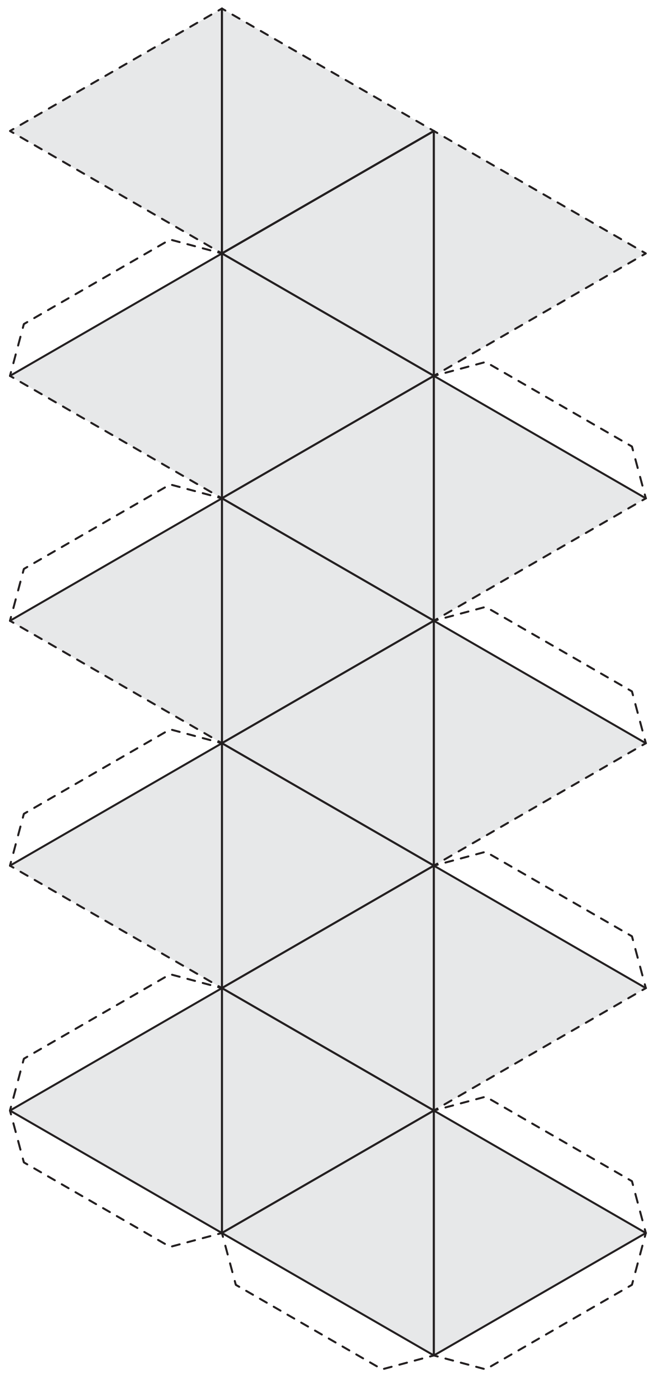
Ronaldo Inácio

Planificação da superfície de um dodecaedro regular



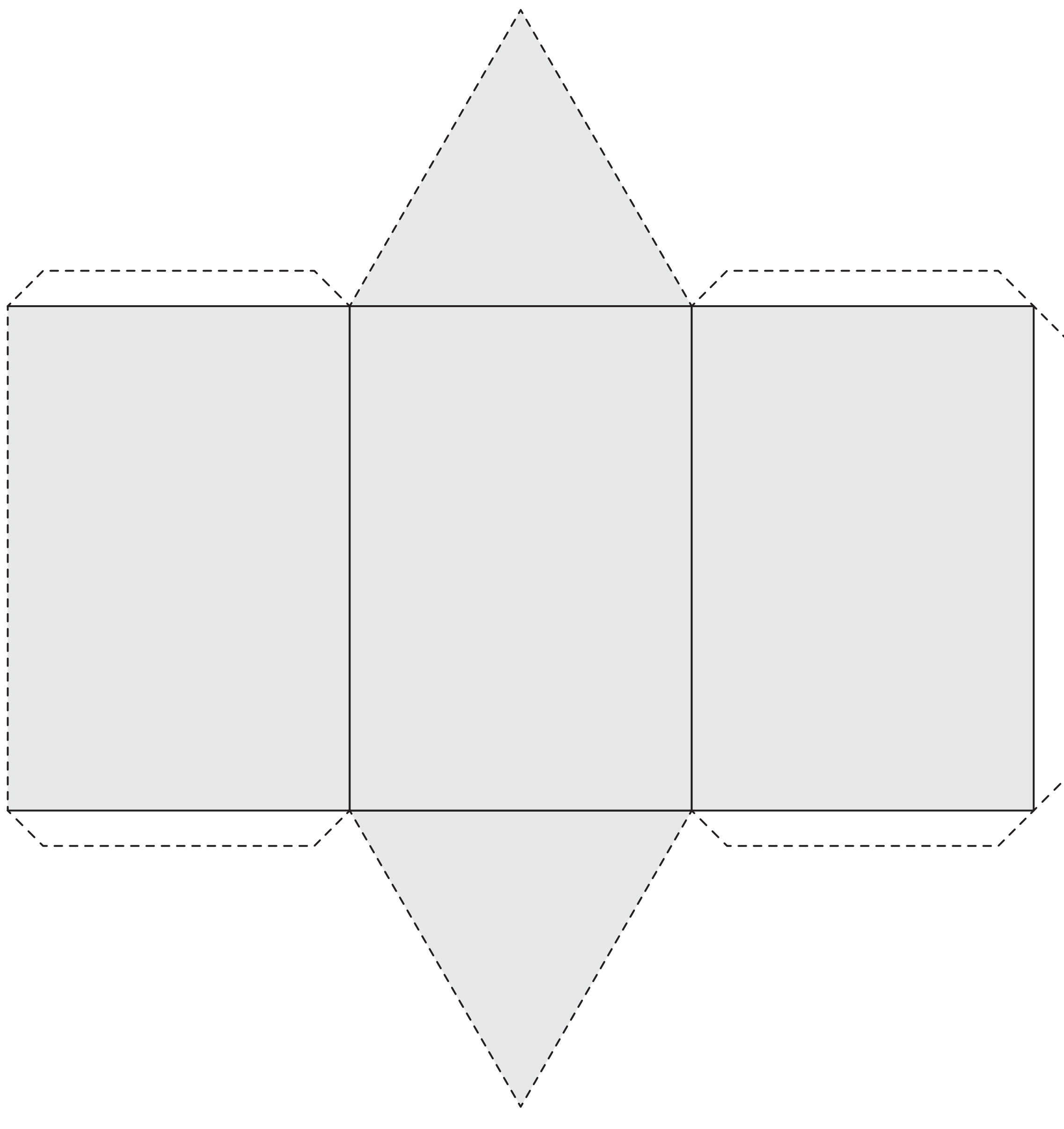
Ronaldo Inácio

Planificação da superfície de um icosaedro regular



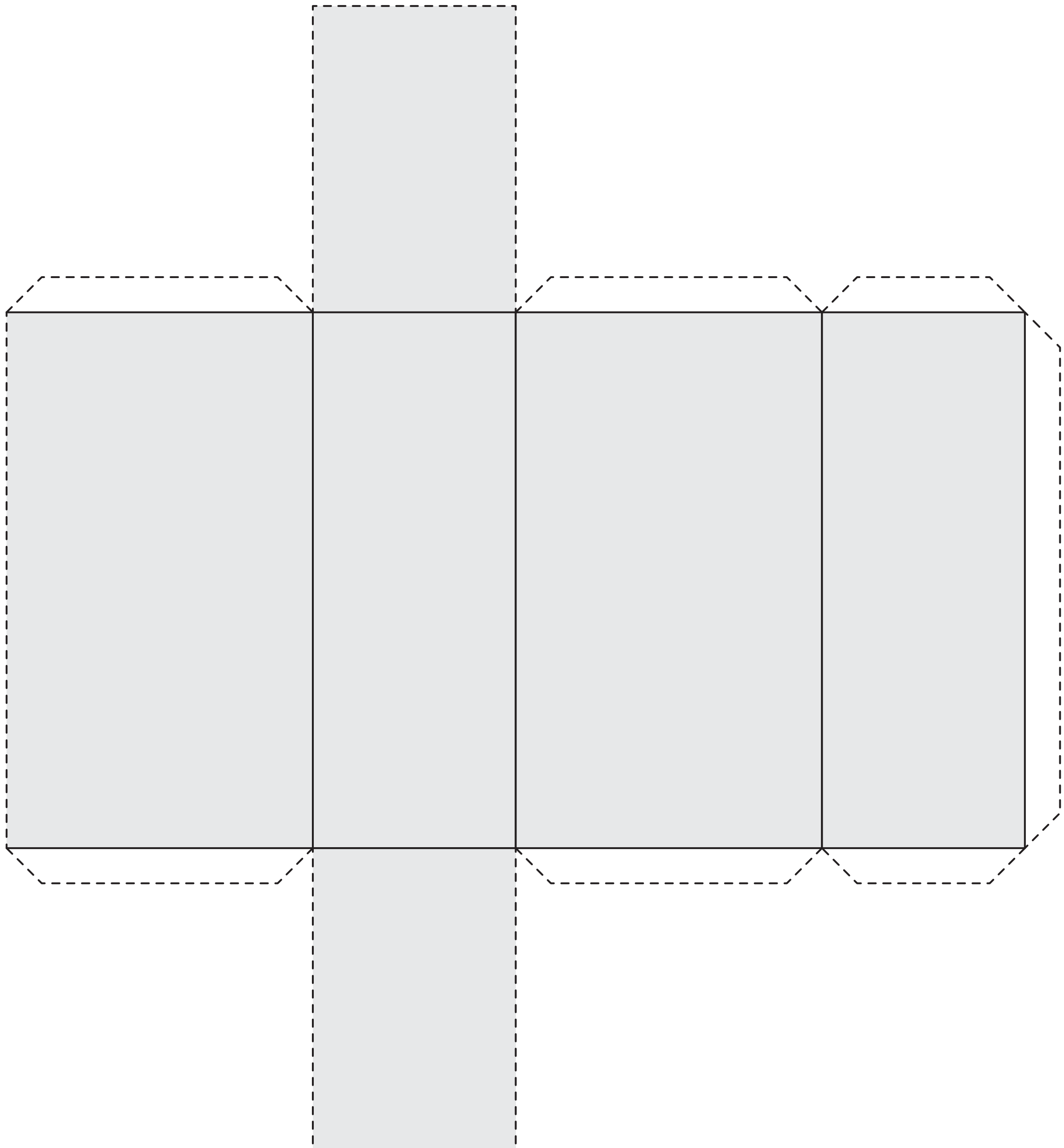
Ronaldo Inácio

Planificação da superfície de um prisma reto de base triangular

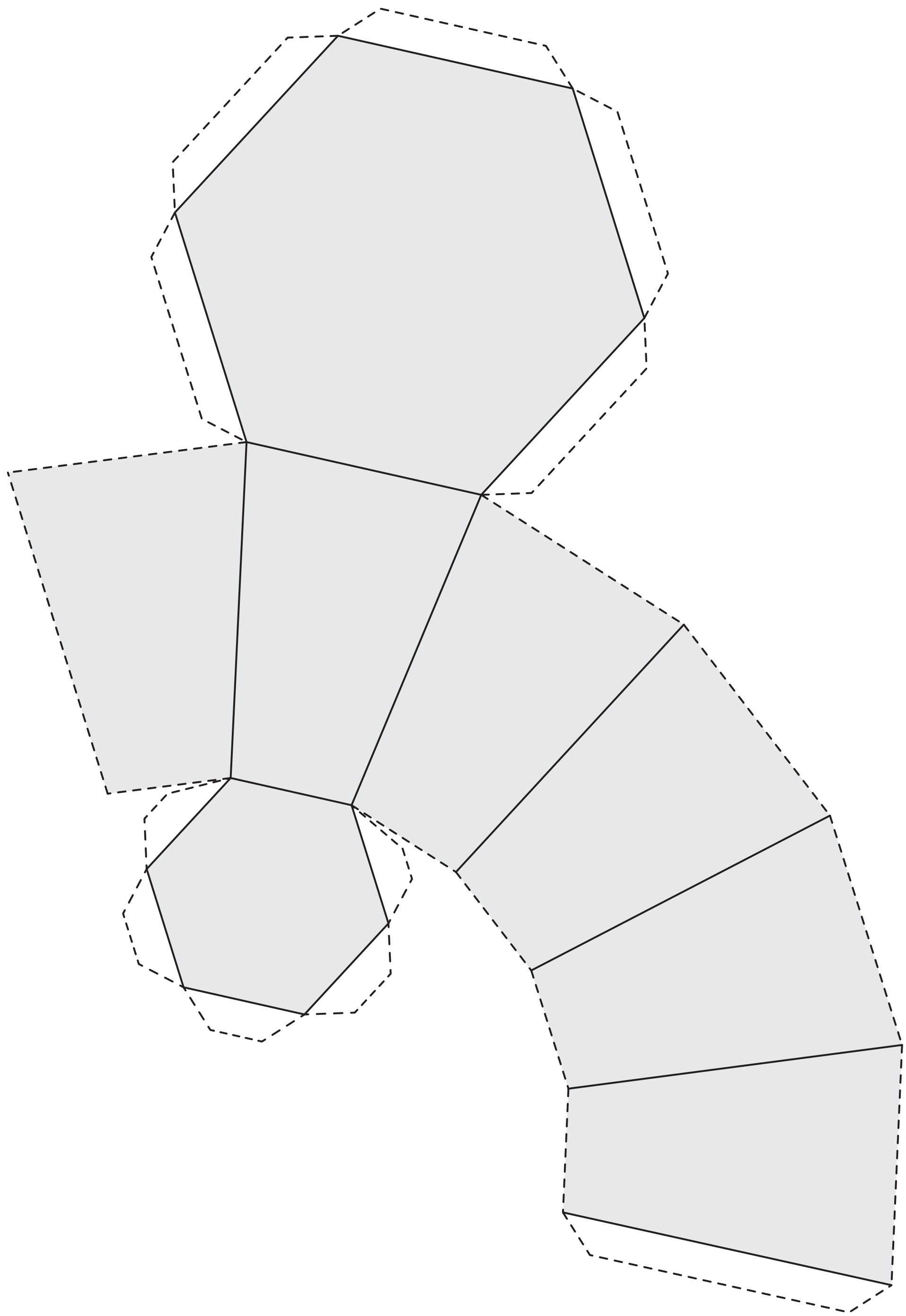


Ronaldo Inácio

Planificação da superfície de um paralelepípedo

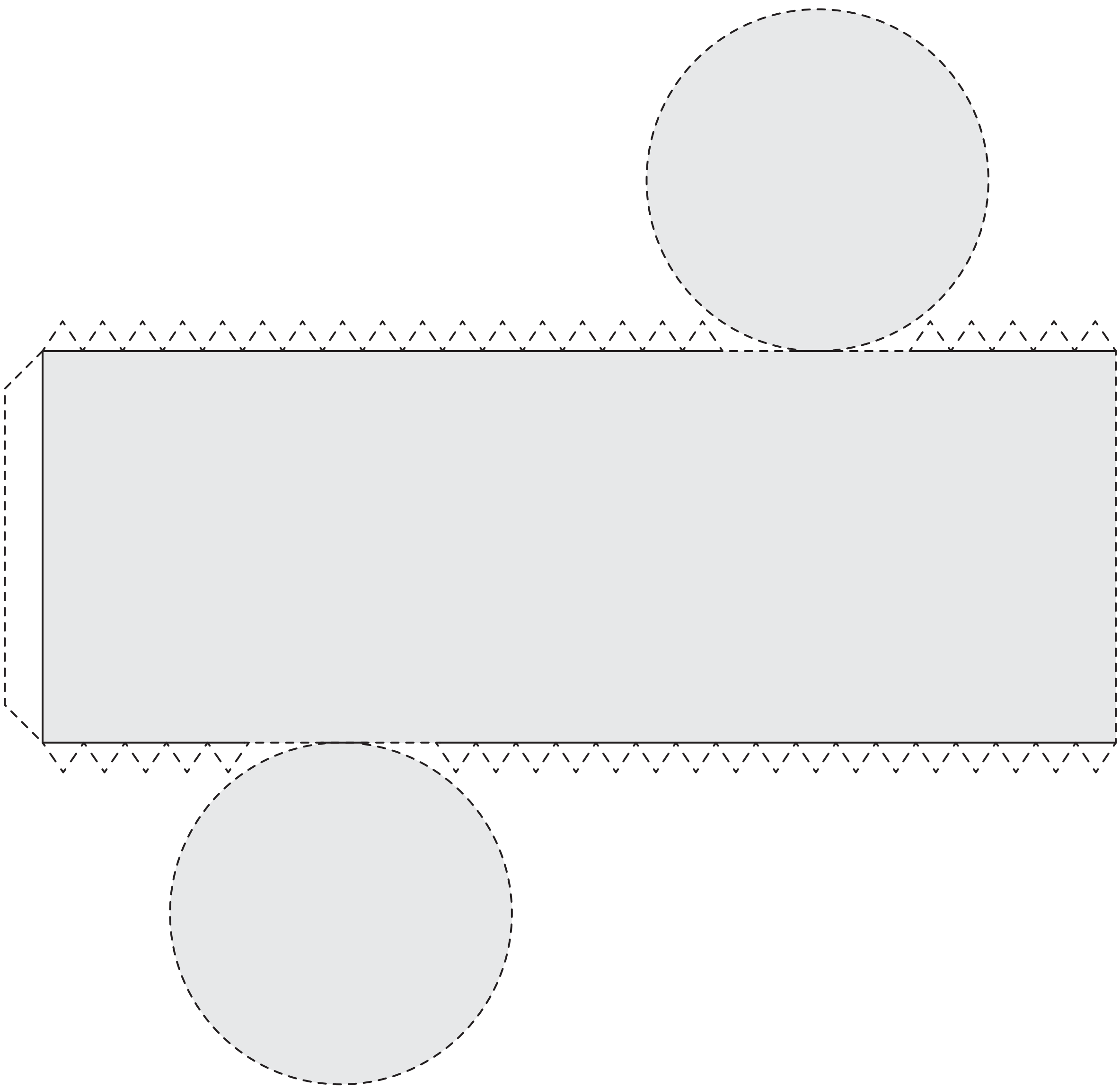


Planificação da superfície de um tronco de pirâmide de base hexagonal



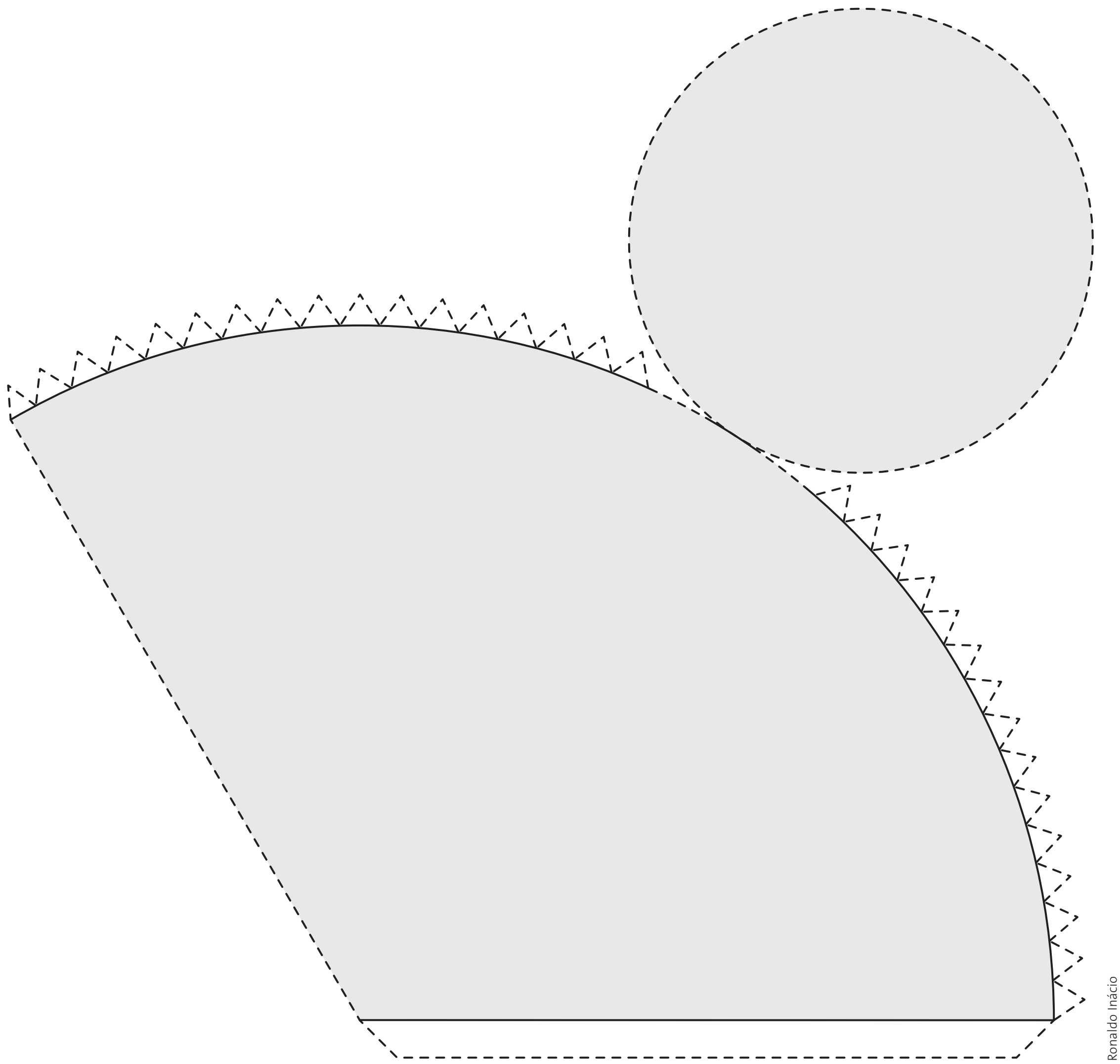
Ronaldo Inácio

Planificação da superfície de um cilindro reto



Ronaldo Inácio

Planificação da superfície de um cone reto



7 Resolução dos problemas e exercícios

Capítulo 1 Geometria de posição

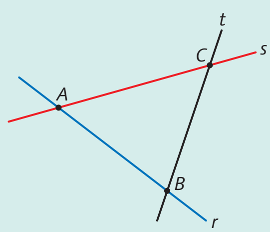
1. a) Sim, pois dois pontos são sempre colineares.

b) Sim, pois por um ponto passam infinitas retas.

c) Infinitos, pois P e Q determinam uma única reta que os contém, e por essa reta passam infinitos planos.

2. a) Falsa, pois por um único ponto passam infinitas retas.

b) Verdadeira, pois, de acordo com o postulado 4, dois pontos distintos determinam uma única reta que os contém. Assim, dados 3 pontos não colineares, teremos 3 retas, com dois pontos em cada uma delas.



Ronaldo Inácio

c) Verdadeira, pois os pontos pertencentes a uma reta são colineares.

d) Verdadeira, pois em um plano existem infinitos pontos não colineares e cada dois pontos distintos determinam uma reta. Logo, em um plano existem infinitas retas.

e) Falsa, pois três pontos colineares determinam uma única reta, pela qual passam infinitos planos.

3. a) 15 retas; As retas são l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y e z, que contêm respectivamente os pontos A e B; A e C; A e D; A e E; A e F; B e C; B e D; B e E; B e F; C e D; C e E; C e F; D e E; D e F; E e F.

b) De acordo com o postulado 6, se dois pontos de uma reta pertencem a um plano, então esta reta está contida no plano. Pelo postulado 2, em uma reta existem infinitos pontos. Logo, se uma reta está contida em um plano, ela possui infinitos pontos nesse plano. Assim, apenas a reta l está contida no plano α e, portanto, possui infinitos pontos em α.

c) Conforme o postulado 5, três pontos não colineares determinam um único plano que os contém. Como os pontos A, B, C, D, E e F são não colineares três a três, teremos os planos determinados por:

ABC	BCD
ABD	BCE
ABE	BCF
ABF	CDE
ACD	CDF
ACE	DBF
ACF	DEB
ADE	DEF
ADF	FEC
AEF	FEB

Portanto, nesse caso é possível determinar 20 planos.

4. alternativa **d**

De acordo com o postulado 5, três pontos não colineares determinam um plano. Sejam os pontos M, N, O, P e Q não colineares, temos:

MNO	OPM
MNP	OPQ
MNQ	PQM
NOP	PQN
NOQ	QMO

Portanto, 10 planos.

5. a) Falsa, pois retas coincidentes correspondem ao mesmo conjunto de pontos, e retas concorrentes têm um único ponto em comum.

b) Verdadeira, pois se as retas são coplanares e não se cruzam, elas são paralelas. Caso não sejam coplanares, elas são reversas.

c) Falsa, pois existe a possibilidade de s e t serem retas reversas.

d) Verdadeira, pois dois pontos distintos determinam uma única reta que os contém. Se duas retas passam por esses dois pontos, elas serão obrigatoriamente coincidentes.

e) Falsa, pois existe a possibilidade de r e s serem retas reversas.

6. a) $\overleftrightarrow{AG}$ e $\overleftrightarrow{BH}$

b) $\overleftrightarrow{HI}$, $\overleftrightarrow{IJ}$, $\overleftrightarrow{JL}$, $\overleftrightarrow{LM}$, $\overleftrightarrow{GM}$, $\overleftrightarrow{AG}$, $\overleftrightarrow{BH}$, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{ED}$

7. a) Como r, s, t e u são retas não coincidentes que se cruzam pelo ponto P, logo existe um plano que contém o ponto P e dois outros pontos pertencentes a cada uma das retas. Assim, existe um plano formado por duas dessas retas: r e s; r e t; r e u; s e t; s e u; t e u.

b) Não. Como r, s e t são perpendiculares entres si, são não coincidentes e possuem o ponto P em comum, logo necessariamente elas não são coplanares.

8. a) $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CE}$, $\overleftrightarrow{BA}$, $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{ED}$

b) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DC}$; $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AD}$

c) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{DA}$; $\overleftrightarrow{DA}$ e $\overleftrightarrow{AB}$

d) $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CE}$, $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{AD}$

e) $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{DC}$

9. Resposta pessoal. Possíveis respostas:

Determine a posição relativa das retas $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{HD}$;

Determine as retas coplanares a $\overleftrightarrow{DC}$; determine as retas reversas a $\overleftrightarrow{AD}$.

10. Possíveis respostas:

a) $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{DC}$ e $\overleftrightarrow{FE}$; $\overleftrightarrow{ML}$, $\overleftrightarrow{IJ}$ e $\overleftrightarrow{GH}$

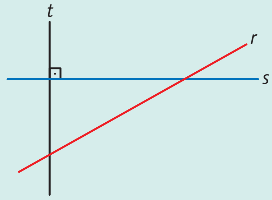
b) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{DI}$; $\overleftrightarrow{IJ}$ e $\overleftrightarrow{JC}$

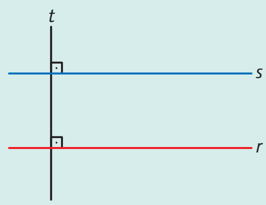
c) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{DE}$; $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{EF}$;

$\overleftrightarrow{GF}$ e $\overleftrightarrow{FA}$; $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BL}$; $\overleftrightarrow{BL}$ e $\overleftrightarrow{LM}$; $\overleftrightarrow{LM}$ e $\overleftrightarrow{MA}$

d) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{IH}$; $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{GH}$; $\overleftrightarrow{FE}$ e $\overleftrightarrow{GM}$

11. Para r e t secantes, temos duas possibilidades: r e t são oblíquas ou r e t são perpendiculares.

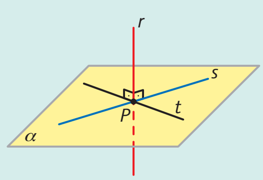




Ilustrações: Ronaldo Inácio

12. alternativa **a**

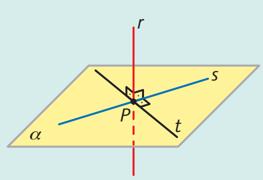
I - verdadeira



$s \perp r$ $t \perp r$

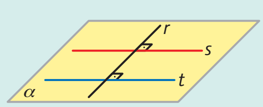
s e t são concorrentes entre si

II - verdadeira



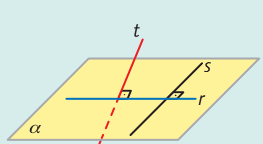
$s \perp r$ $t \perp r$ $s \perp t$

III - verdadeira



$s \perp r$ $t \perp r$ $s \mathbin{//} t$

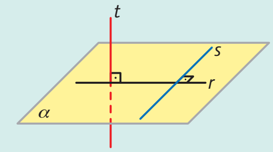
IV - verdadeira



$s \perp r$ $t \perp r$

s e t são reversas e não ortogonais

V - verdadeira



Ilustrações: Ronaldo Inácio

$s \perp r$ $t \perp r$

s e t são ortogonais

13. a) Verdadeira, pois a reta u é perpendicular a β se, e somente se, todas as retas de β que concorrem com u forem perpendiculares a u.

b) Falsa, pois para que s seja perpendicular a α é necessário que s seja perpendicular a pelo menos duas retas concorrentes contidas em α.

c) Verdadeira, pois t não está contida no plano β e é paralela a uma reta contida nesse plano.

d) Verdadeira, pois r é perpendicular a duas retas contidas em α, logo r está contida ou é perpendicular a α. Sabemos que s é paralela a α, logo s é perpendicular a r se, e somente se, r e α forem perpendiculares e r e s, concorrentes.

14. a) $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$ e $\overleftrightarrow{CF}$

b) paralela

c)
- $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CB}$, $\overleftrightarrow{DE}$ **e** $\overleftrightarrow{FE}$
- $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{CF}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{DF}$

15. a)
- perpendicular
- paralela
- contida no plano

b) $\overleftrightarrow{IJ}$, $\overleftrightarrow{JF}$, $\overleftrightarrow{FG}$, $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{HI}$

c) $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{AE}$

d) $\overleftrightarrow{BA}$, $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{GF}$, $\overleftrightarrow{FJ}$, $\overleftrightarrow{IJ}$ e $\overleftrightarrow{HI}$

16. alternativa **d**

a) Falsa, pois o ponto F pertence aos dois planos, logo eles não são paralelos.

b) Falsa, pois o segmento $\overline{HG}$ não pertence ao plano determinado por EFN.

c) Falsa, pois o ponto G é comum aos dois planos, logo eles não são paralelos.

d) Verdadeira, pois o segmento $\overline{EF}$ pertence à interseção dos planos determinados por EFN e EHG.

17. alternativa **b**

a) Falsa, pois o fato de r ser perpendicular a uma reta contida no plano α não garante que r seja perpendicular a esse plano.

b) Verdadeira, pois como r é perpendicular a s, então r e s são retas concorrentes e, portanto, há um plano que as contém.

c) Falsa, pois r está contida em α.

d) Falsa, pois r e α possuem ao menos o ponto de interseção entre r e s em comum.

e) Falsa, pois existem retas reversas e paralelas a r que não cortam s.

18. Não. Para que uma reta r seja perpendicular a um plano α, é necessário e suficiente que ela seja perpendicular a pelo menos duas retas concorrentes contidas nesse plano.

19. alternativa **e**

O único modelo possível de ser representado por um marceneiro é a figura representada no item **e**. As demais figuras possuem características que impedem de serem reproduzidas em um modelo tridimensional.

20. a) perpendiculares

b) Sim, pois $\overleftrightarrow{CL}$ e $\overleftrightarrow{EN}$ são distintas e perpendiculares ao plano determinado por *CDE*.

c) 8 planos

d) *ABJL*, *CDML*, *FENO*, *HGPQ*, *ABCDEFGH* e *IJLMNOPQ*

e) perpendiculares

21. a) Falsa, pois os planos α e β podem ser concorrentes e paralelos à reta *r*.

b) Verdadeira, pois se dois planos distintos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela ao outro.

c) Falsa, pois para que dois planos sejam perpendiculares, necessariamente, eles precisam ser concorrentes.

d) Verdadeira, pois, de acordo com o postulado 8, se dois planos distintos se cruzam, sua interseção é uma reta.

e) Falsa, pois se um terceiro plano for paralelo a um dos dois planos anteriores, este plano será concorrente a somente um dos dois planos.

22. alternativa **c**

I) Verdadeira. Dados dois planos, α e β, tal que $\alpha // \beta$, se *r* está contida em α, então *r* é paralela a β. E se *r* está contida em β, então *r* é paralela a α.

II) Falsa, pois algumas retas serão reversas a *r*.

III) Verdadeira, pois dois pontos determinam uma reta. Logo, se dois pontos de uma reta pertencem a um plano, então a reta está contida nesse plano.

IV) Falsa, pois toda reta paralela a um dos planos secantes corta o segundo plano.

23. alternativa **b**

I) Verdadeira, pois pontos colineares estão contidos em uma reta e qualquer reta está contida em um plano.

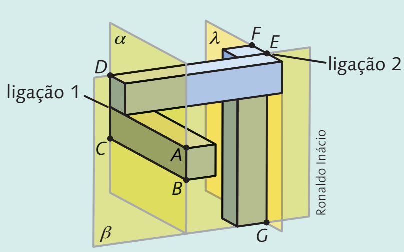
II) Falsa, pois a reta pode ser concorrente ao plano.

III) Falsa, pois quatro pontos não coplanares determinam 4 planos.

IV) Falsa, pois elas podem ser reversas.

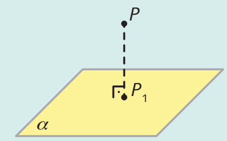
V) Verdadeira, pois são secantes e possuem uma reta em comum.

24. alternativa **a**

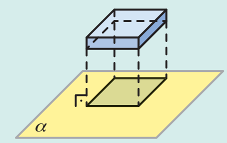


Ronaldo Inácio

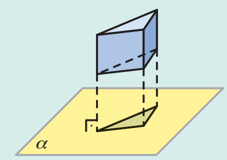
25. a) Ponto.



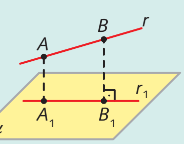
b) Região determinada por um quadrilátero.



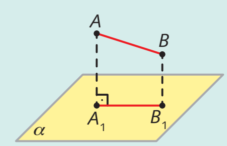
c) Região triangular.



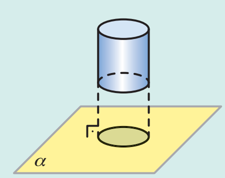
d) Reta.



e) Segmento de reta.

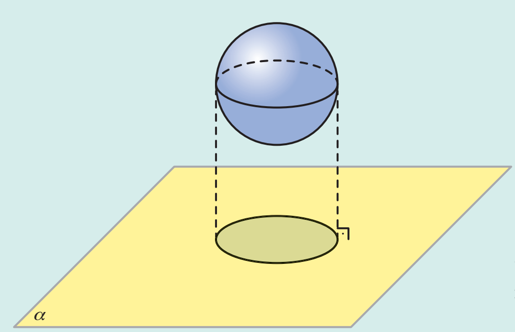


f) Círculo.



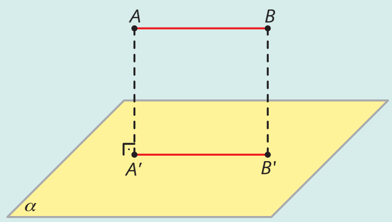
Ilustrações: Ronaldo Inácio

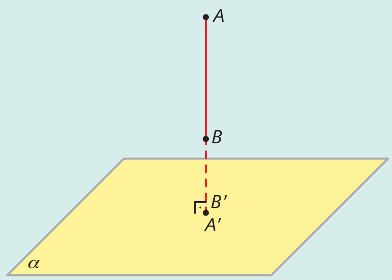
26. a) Verdadeira.

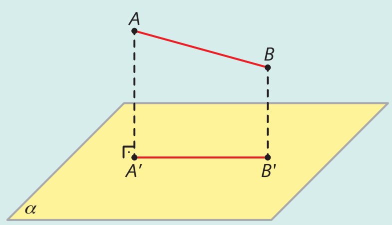


Ronaldo Inácio

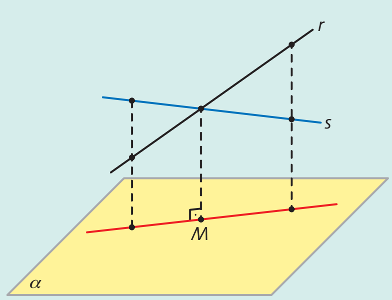
b) Verdadeira.



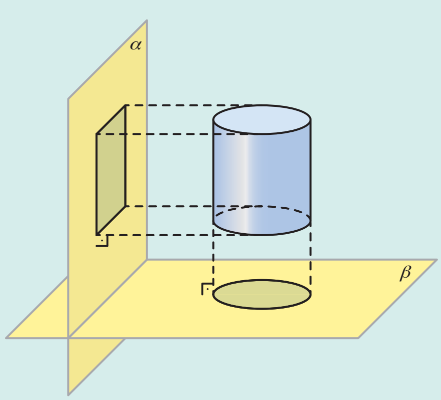




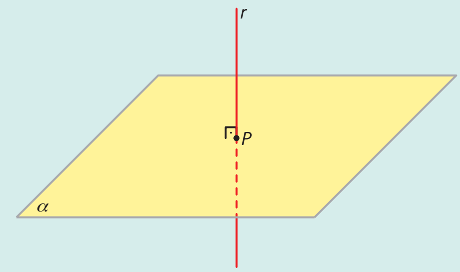
c) Verdadeira.



d) Falsa.



e) Falsa.



Ilustrações: Ronaldo Inácio

27. alternativa **a**

A primeira fotografia mostra o eclipse quase total do Sol, portanto o observador que a obteve deveria estar posicionado mais próximo do cone de sombra. Assim, conclui-se que a primeira fotografia foi obtida do ponto III.

A 2ª e 3ª fotografias têm forma de **C** e, portanto, correspondem a observadores situados do mesmo lado em relação ao cone de sombra. Logo, a 3ª fotografia foi obtida do ponto II. Como a 2ª e 3ª fotografias foram obtidas de pontos simetricamente posicionados em relação ao cone de sombra, a 2ª fotografia foi obtida do ponto V.

28. a) hexágono b) segmento de reta

29. A projeção ortogonal sobre um plano dessas retas pode ser:
- uma única reta;
- outras duas retas paralelas;
- dois pontos, no caso em que essas retas contêm um ponto do plano e são ortogonais a ele.

30. Resposta pessoal. Possíveis respostas:

Qual é a projeção ortogonal da região retangular sobre o plano α? E sobre o plano β?

31. a) • $\overline{DJ}$ e $\overline{CI}$
- $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$
- $\overline{ML}$ e $\overline{GH}$

b) • $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$
- $\overline{AB}$, $\overline{EF}$, $\overline{MG}$, $\overline{LH}$, $\overline{JI}$ e $\overline{CD}$

32. Resposta pessoal. Possíveis respostas:

Qual é o segmento cujo comprimento é a distância entre o ponto A e a reta que contém os pontos B e C?

Quais são os segmentos cujo comprimento é a distância entre F e G?

33. a) 8 cm

b) 6 cm

c) $(CE)^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow CE = \sqrt{64 + 36} \Rightarrow CE = 10 \rightarrow 10$ cm

d) 8 cm

34. a) Falsa, pois, dois pontos coincidentes equivalem ao mesmo ponto, com distância nula entre si.

b) Verdadeira. De fato, essa é a definição da distância entre um ponto e um plano.

c) Falsa, pois por definição, a distância entre um ponto e uma reta é determinada pelo comprimento do segmento de reta perpendicular a essa reta.

d) Verdadeira. A distância de cada um desses pontos ao plano será a mesma.

Capítulo 2 Poliedros

1. Poliedros: **a**, **b**, **d** e **e**, pois são sólidos limitados por superfícies planas poligonais. Não poliedros: **c** e **f**, pois são sólidos limitados por superfícies não planas.

2. a) 13 faces, 24 arestas e 13 vértices
b) 11 faces, 20 arestas e 11 vértices
c) 7 faces, 12 arestas e 7 vértices
d) 18 faces, 40 arestas e 24 vértices

3. a) 9 faces, 16 arestas e 9 vértices
b) eneaedro
c) triângulo
d) • $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$: paralelas
• $\overline{EH}$ e $\overline{HI}$: concorrentes
• $\overline{FG}$ e $\overline{AB}$: reversas
e) • A: 3 arestas
• E: 4 arestas
• I: 4 arestas

4. a) convexo
b) não convexo
c) não convexo
d) não convexo
e) convexo
f) não convexo

5. $V + 9 - 21 = 2 \Rightarrow V = 14$
Logo, o número de vértices desse poliedro é 14.

6. $8 + F - 12 = 2 \Rightarrow F = 6$
Portanto, esse poliedro tem 6 faces.

7. $8 + 12 - A = 2 \Rightarrow A = 18$
Portanto, esse poliedro tem 18 arestas.

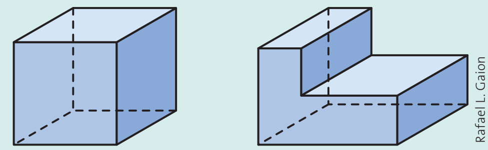
8. a) 10 faces, 20 arestas e 12 vértices.
b) Sim, pois aplicando a relação, obtemos:
$$10 + 12 - 20 = 2$$

9. alternativa **b**
Como o número de arestas excede o número de faces, temos:
$A = F + 18$, assim:
$$V + F - A = 2 \Rightarrow V + F - (F + 18) = 2 \Rightarrow V = 20$$
Logo, o poliedro tem 20 vértices.

10. Como o poliedro é composto por 10 faces triangulares, o número de arestas é dado por:
$$A = \frac{10 \cdot 3}{2} = 15$$
Assim:
$$V + 10 - 15 = 2 \Rightarrow V = 7$$

11. De acordo com as faces que formam o poliedro, o número de arestas é dado por:
$$A = \frac{11 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 7 \cdot 5}{2} = 38$$
Substituindo na relação de Euler, temos:
$$V + 20 - 38 = 2 \Rightarrow V = 20$$
Portanto, esse poliedro tem 38 arestas e 20 vértices.

12. Resposta pessoal. Possível resposta:



a) Classifique os poliedros em convexo ou não convexo.
b) A relação de Euler é válida para esses poliedros?

13. alternativa **a**
• número de arestas das faces hexagonais:
$$6 \cdot \underbrace{20}_{\text{placas hexagonais}} = 120$$
• número de arestas das faces pentagonais:
$$5 \cdot \underbrace{12}_{\text{placas pentagonais}} = 60$$
• Como cada aresta é comum a duas faces, temos:
$$A = \frac{120 + 60}{2} = \frac{180}{2} = 90$$
Utilizando a relação de Euler, obtemos o número de vértices:
$$V + \underbrace{F}_{20 + 12 = 32} = A + 2 \Rightarrow V + 32 = A + 2 \Rightarrow V = A - 30 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V = 90 - 30 \Rightarrow V = 60$$
Logo, o silo tem 90 arestas e 60 vértices.

14. $\begin{cases} V + F - 16 = 2 \\ V = F \end{cases} \Rightarrow V + V - 16 = 2 \Rightarrow 2V = 18 \Rightarrow V = 9$
$F = V = 9$
Portanto, esse poliedro tem 9 faces e 9 vértices.

15. $2A = 3V \Rightarrow A = \dfrac{3 \cdot 12}{2} = 18$
Assim,
$12 + F - 18 = 2 \Rightarrow F = 8$
Portanto, esse poliedro possui 18 arestas e 8 faces.

16. Do enunciado, temos:
$$\begin{cases} F_B = F_A + 2 \\ A_A = A_B \end{cases}$$
Sabemos que o número de faces vezes a quantidade de arestas de cada face é igual ao dobro do número de arestas:
• $4F_A = 2A$
• $3F_B = 2A \Rightarrow 3(F_A + 2) = 2A \Rightarrow 3F_A + 6 = 2A$
Temos o seguinte sistema:
$$\begin{cases} 4F_A = 2A \\ 3F_A + 6 = 2A \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4F_A = 2A \\ -3F_A - 6 = -2A \end{cases}$$
$$F_A - 6 = 0 \Rightarrow F_A = 6$$
• $F_B = F_A + 2 \Rightarrow F_B = 6 + 2 = 8$
• $4F_A = 2A \Rightarrow 4 \cdot 6 = 2A \Rightarrow A = 12$
$$V_A + F_A - A = 2 \Rightarrow V_A + 6 - 12 = 2 \Rightarrow V_A = 8$$
$$V_B + F_B - A = 2 \Rightarrow V_B + 8 - 12 = 2 \Rightarrow V_B = 6$$
Portanto, o poliedro A tem 12 arestas, 8 vértices e 6 faces e o poliedro B tem 12 arestas, 6 vértices e 8 faces.

17. Segue que:

$$A = \frac{4 \cdot 3 + 6 \cdot 4}{2} = 18 \Rightarrow 18 + 2 - 10 = 10$$

Assim, temos 10 faces, 18 arestas e 10 vértices.

18. a) A quantidade de arestas A.

b) Segue que:

$$A = \frac{2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 6}{2} = 13 \Rightarrow 13 + 2 - 7 = 8$$

Logo, temos 8 vértices.

c)

Início

↓

Adicione as quantidades de faces quadrangulares, triangulares e hexagonais. O resultado é a quantidade de faces F.

↓

Multiplique a quantidade de faces triangulares por 3.

↓

Multiplique a quantidade de faces quadrangulares por 4 e adicione ao resultado do passo anterior.

↓

Multiplique a quantidade de faces hexagonais por 6 e adicione ao resultado do passo anterior.

↓

Divida o resultado obtido no passo anterior por 2. O resultado é a quantidade de arestas.

↓

Adicione 2 ao valor de A e depois subtraia o valor de F. O resultado é a quantidade de vértices V.

↓

Fim

19. tetraedro

20. alternativa **d**

O fato de um poliedro satisfazer o teorema de Euler não garante que ele seja regular ou sólido de Platão, entretanto, quando temos um poliedro regular, este será também convexo e todo poliedro convexo satisfaz o teorema de Euler.

21. $20 + 12 - 30 = 2$

Portanto, é válida a relação de Euler para o dodecaedro regular.

22. Sim, pois todo poliedro regular é convexo, e para este a relação de Euler é válida.

23. a) Não convexo, pois há uma reta não paralela a nenhuma de suas faces, que corta em mais de 2 pontos, nesse caso, 4 pontos.

b) Temos 12 vértices, 8 faces e 18 arestas.

c) Temos:

$$V + F - A = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 12 + 8 - 18 = 2$$

Logo, a relação de Euler é válida.

24. Resposta pessoal. Possível resposta: a bola de futebol comum pode ser denominada icosaedro truncado, como mostra a imagem abaixo.

Rafael L. Gaion

Sendo formada por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, podemos classificá-la como um sólido de Platão?

25. a) $A = 9 \cdot 6 = 54 \rightarrow 54\ \text{cm}^2$

b) $A = 12 \cdot 7 = 84 \rightarrow 84\ \text{cm}^2$

c) $A = \dfrac{\left[(3 + 5 + 4) + 5\right] \cdot 6}{2} = 51 \rightarrow 51\ \text{cm}^2$

26. $A_{taco} = 0{,}1 \cdot 0{,}03 = 0{,}003 \rightarrow 0{,}003\ \text{m}^2$

$A_{total} = 150\,000 \cdot 0{,}003 = 450 \rightarrow 450\ \text{m}^2$

27. a) Representando por a e b as medidas dos lados do retângulo, temos:

- $2a + 2b = 30 \Rightarrow a + b = 15 \Rightarrow b = 15 - a$
- $a \cdot b = 54 \Rightarrow a(15 - a) = 54 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2 - 15a + 54 = 0 \begin{cases} a_1 = 9 \\ a_2 = 6 \end{cases}$$

$$b_1 = \frac{54}{a_1} \Rightarrow b_1 = \frac{54}{9} = 6$$

$$b_2 = \frac{54}{a_2} \Rightarrow b_2 = \frac{54}{6} = 9$$

Portanto, as dimensões desse retângulo são 9 cm e 6 cm.

b) $d^2 = 9^2 + 6^2 \Rightarrow d^2 = 117 \Rightarrow d = 3\sqrt{13} \rightarrow 3\sqrt{13}\ \text{cm}$

28. Representando por a e b as medidas dos lados dos lotes **A** e **B**, temos:

$1\,600 = a^2 \Rightarrow a = 40 \rightarrow 40\ \text{m}$

$4\,900 = b^2 \Rightarrow b = 70 \rightarrow 70\ \text{m}$

Assim, a área total do terreno é dada por:

$(40 + 70)^2 = 12\,100 \rightarrow 12\,100\ \text{m}^2$

29. a) Considere o quadrado de lado medindo a, assim a área é dada por $a \cdot a = a^2$.

Agora, considerando o quadrado de lado medindo $2a$, sua área será $2a \cdot 2a = 4a^2$.

b) Considere o retângulo de largura ℓ e comprimento c, assim a área é dada por $\ell \cdot c = \ell c$.

Agora, considerando o retângulo de largura 2ℓ e comprimento c, a área será $2\ell \cdot c = 2\ell c$.

30. $102 = 6 \cdot (9 - 4) + (2x + y) \cdot 4 \Rightarrow y = 18 - 2x$

$x - y = 4 \Rightarrow x - (18 - 2x) = 4 \Rightarrow x = \dfrac{22}{3} \rightarrow \dfrac{22}{3}$ cm

$x - y = 4 \Rightarrow \dfrac{22}{3} - y = 4 \Rightarrow y = \dfrac{10}{3} \rightarrow \dfrac{10}{3}$ cm

31. A área da varanda é dada por:

$$A = 7 \cdot 8 = 56 \rightarrow 56\ \text{m}^2 \Rightarrow 560\,000\ \text{cm}^2$$

A área de um piso é dado por:

$$A = 25 \cdot 40 = 1\,000 \rightarrow 1\,000\ \text{cm}^2$$

Determinando o número mínimo de pisos, temos:

$$\frac{560\,000}{1\,000} = 560$$

Portanto, serão necessários, no mínimo, 560 pisos.

32. Obtendo a área do centro de eventos, temos:

$$A = \frac{100 \cdot 100\sqrt{3}}{2} \simeq 8\,660{,}25 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{aproximadamente } 8\,660{,}25\ \text{m}^2$$

Subtraindo a área do palco, temos:

$$8\,660{,}25 - 50 = 8\,610{,}25 \rightarrow 8\,610{,}25\ \text{m}^2$$

Calculando a quantidade aproximada de pessoas, obtemos:

$$8\,610{,}25 \cdot 4 = 34\,441$$

Portanto, nesse *show* estavam presentes, aproximadamente, 34 441 pessoas.

33. a) A ocupação mínima é dada por:

$$0{,}5 \cdot 800 = 400 \rightarrow 400\ \text{m}^2$$

A ocupação máxima é dada por:

$$0{,}7 \cdot 800 = 560 \rightarrow 560\ \text{m}^2$$

Assim, para o menor valor de x, temos:

$$400 = \frac{(30 + x) \cdot 20}{2} \Rightarrow x = 10$$

Para o maior valor de x, temos:

$$560 = \frac{(30 + x) \cdot 20}{2} \Rightarrow x = 26$$

Logo, $10 \leqslant x \leqslant 26$.

b) Temos: $\dfrac{2}{5} \cdot 800 = 320 \rightarrow 320\ \text{m}^2$

Logo, a área construída corresponde a 480 m^2, assim:

$$480 = \frac{(30 + x) \cdot 20}{2} \Rightarrow x = 18 \rightarrow 18\ \text{m}$$

34. alternativa **d**

O polígono sombreado é formado por 4 retângulos, 4 triângulos e 1 quadrado. Como cada quadrado tem 1 cm^2 de área, os lados desses quadrados medem 1 cm.

Como o vértice do polígono sombreado é ponto médio do lado do quadrado, temos:

Área do retângulo: $0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5 \rightarrow 0{,}5\ \text{cm}^2$

Área do triângulo: $\dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{2} = 0{,}125 \rightarrow 0{,}125\ \text{cm}^2$

Assim, a medida da área do polígono sombreado é dado por: $4 \cdot (0{,}5) + 4 \cdot (0{,}125) + 1 = 3{,}5 \rightarrow 3{,}5\ \text{cm}^2$.

35. a) Calculando a área total do terreno, temos:

$$A = \frac{(AB + CD) \cdot BC}{2} = \frac{(25 + 15) \cdot 24}{2} = 480 \rightarrow 480\ \text{m}^2$$

O valor do terreno será:

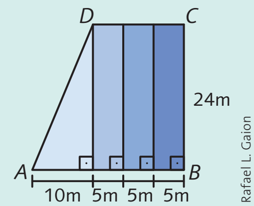
$$V = 50 \cdot 480 = 24\,000 \rightarrow \text{R\$ } 24\,000{,}00$$

b) A área de cada parte do terreno é dada por:

$$A_\ell = \frac{A}{4} = \frac{480}{4} = 120 \rightarrow 120\ \text{m}^2$$

Assim:

$$A_\ell = 24 \cdot x \Rightarrow 120 = 24x \Rightarrow x = 5 \rightarrow 5\ \text{m}$$



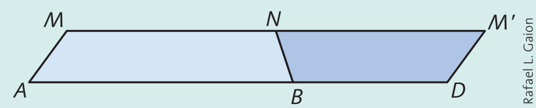
36. alternativa **c**

Altura do trapézio $ABCD$: $2h$.

- Área do trapézio $ABCD$:

- $A_{\text{trapézio}} = \dfrac{(AB + CD) \cdot 2h}{2} \Rightarrow A_{\text{trapézio}} = \dfrac{(a + b) \cdot 2h}{2} \Rightarrow$

  $A_{\text{trapézio}} = (a + b) \cdot h$



- Área do paralelogramo $ADM'M$:

- $A_p = (MN + M'N) \cdot \dfrac{2h}{2} \Rightarrow$

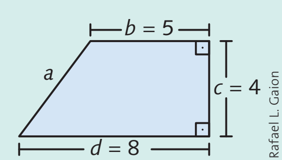
  $\Rightarrow A_p = (MN + MN) \cdot \dfrac{2h}{2} = 2(MN) \cdot h$

- $A_{\text{trapézio}} = A_p \Rightarrow (a + b) \cdot h = 2(MN) \cdot h \Rightarrow MN = \dfrac{a + b}{2}$

- $\dfrac{A_{MNCD}}{A_{ABNM}} = \dfrac{\dfrac{(MN + CD)}{2} \cdot h}{\dfrac{(AB + MN)}{2} \cdot h} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \dfrac{A_{MNCD}}{A_{ABNM}} = \dfrac{\dfrac{\left(\dfrac{a + b}{2} + b\right)}{2}}{\dfrac{\left(a + \dfrac{a + b}{2}\right)}{2}} = \dfrac{a + 3b}{3a + b}$

37. alternativa **c**



Utilizando o teorema de Pitágoras para obter a medida do comprimento do lado a, temos:

$a^2 = 4^2 + (8 - 5)^2 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

Assim:

$A = \dfrac{(5 + 4) \cdot (5 + 8)}{4} = \dfrac{117}{4}$

$A_{\text{exata}} = \dfrac{(8 + 5) \cdot 4}{2} = 26$

$\dfrac{117}{4} - 26 = \dfrac{13}{4}$

Portanto, a diferença é de $\dfrac{13}{4}$.

38. alternativa **a**

Calculando a área do trapézio, de acordo com o esquema I, temos:

$$A_t = \frac{(600 + 360) \cdot 580}{2} = \frac{960 \cdot 580}{2} =$$

$$= 480 \cdot 580 \rightarrow 480 \cdot 580\ \text{cm}^2$$

Calculando a área do retângulo, de acordo com esquema II, temos:

$$A_r = 490 \cdot 580 = (480 + 10) \cdot 580 =$$
$$= 480 \cdot 580 + 10 \cdot 580 \text{ cm}^2$$

Assim, após as alterações previstas podemos verificar que houve um aumento de $10 \cdot 580$ cm², ou seja, cada garrafão ocupa uma área de 5 800 cm².

39. a) $A = \dfrac{28 \cdot 20}{2} = 280 \rightarrow 280 \text{ cm}^2$

b) Temos:

$$p = \frac{10 + 26 + 24}{2} = 30 \rightarrow 30 \text{ cm}$$

Assim:

$$A = \sqrt{30(30 - 10)(30 - 26)(30 - 24)} =$$
$$= \sqrt{30 \cdot 480} = \sqrt{14\,400} = 120 \rightarrow 120 \text{ cm}^2$$

40. alternativa **c**

$$p = \frac{a + b + c}{2} \Rightarrow p = \frac{13 + 12 + 5}{2} = 15 \rightarrow 15 \text{ cm}$$

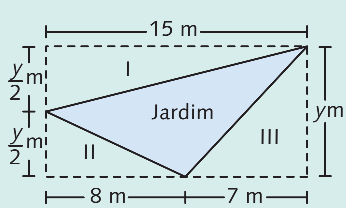
$$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{15(15 - 13)(15 - 12)(15 - 5)} = 30 \rightarrow 30 \text{ cm}^2$$

$$2p = 2 \cdot 15 = 30$$

41. Resposta pessoal. Possível resposta: Um triângulo equilátero tem área medindo 43,25 cm². Calcule o perímetro desse triângulo.

42. alternativa **a**



Rafael L. Gaion

$$A_{\text{jardim}} = A_{\text{retângulo}} - (A_{\text{I}} + A_{\text{II}} + A_{\text{III}}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 23 = 15y - \left(\frac{15 \cdot \frac{y}{2}}{2} + \frac{8 \cdot \frac{y}{2}}{2} + \frac{7y}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 23 = 15y - \frac{37y}{4} \Rightarrow y = 4 \rightarrow 4 \text{ m}$$

43. alternativa **e**

A área do paralelogramo é o produto da base pela altura $(A = b \cdot h)$, e a área de um triângulo é a metade da área de um paralelogramo $\left(A = \dfrac{b \cdot h}{2} \right)$. Assim, na figura do item **a** e do item **d** observamos que a região foi dividida em quatro paralelogramos congruentes. Do mesmo modo, no item **b**, a divisão foi feita pelas diagonais, formando quatro triângulos congruentes.

No item **c**, vemos que as bases dos triângulos obtidos são congruentes. Como a altura dos triângulos é a mesma para todos eles, concluímos que as áreas desses triângulos são iguais.

Portanto, o único esquema em que não podemos afirmar que os lotes possuem a mesma área é o do item **e**, pois não sabemos a medida do terceiro segmento na base.

44. a) $3 = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell = \dfrac{6}{\sqrt{3}} \Rightarrow \ell = 2\sqrt{3} \rightarrow 2\sqrt{3}$ cm

$$A = 6 \cdot \frac{(2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3} \rightarrow 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

b) $P = 5 \cdot 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \rightarrow 10\sqrt{3}$ cm

45. a) $100 \cdot 1{,}23 \cdot 1 = 123 \rightarrow 123 \text{ m}^2$

b) $A_b = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = \dfrac{20^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 100\sqrt{3} \rightarrow 100\sqrt{3} \text{ cm}^2$

$A_{7b} = 7 \cdot A_b + 19 \Rightarrow A_{7b} = 7 \cdot 100\sqrt{3} + 19 =$

$= 1\,230 \rightarrow 1\,230 \text{ cm}^2$

$A_f = 123 \cdot 100 = 12\,300 \rightarrow 12\,300 \text{ cm}^2$

- Quantidade de bandeirinhas por folha.

$$n_{b_f} = 7 \cdot \frac{A_f}{A_{7b}} \Rightarrow n_{b_f} = 7 \cdot \frac{12\,300}{1\,230} = 70$$

- Quantidade total de bandeirinhas.

$$n_t = n_{b_f} \cdot 100 = 70 \cdot 100 = 7\,000$$

Portanto, poderão ser feitas 7 000 bandeirinhas.

46. Igualando as duas áreas, temos:

$$\frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{(5 + 3) \cdot x}{2} \Rightarrow 6 = 4x \Rightarrow x = 1{,}5 \rightarrow 1{,}5 \text{ cm}$$

47. alternativa **b**

A área de um quadrado é 1 m²

Como $\triangle ABP \sim \triangle ADP \sim \triangle CBQ \sim \triangle CDQ$, a área desses triângulos são dadas por:

$$4 \cdot \frac{0{,}25 \cdot 0{,}5}{2} = 0{,}25 \rightarrow 0{,}25 \text{ m}^2$$

Assim, a área sombreada corresponde a:

$$1 - 0{,}25 = 0{,}75 \rightarrow 0{,}75 \text{ m}^2$$

Calculando o custo, temos:

$$0{,}75 \cdot 30 + 0{,}25 \cdot 50 = 35$$

Portanto, o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral é de R$ 35,00.

48. a) (3, 3, 4, 12), (3, 3, 6, 6), (3, 6, 3, 6), (3, 4, 3, 12), (3, 4, 6, 4), (3, 4, 4, 6) e (4, 4, 4, 4)

b) (3, 6, 3, 6), (3, 4, 6, 4) e (4, 4, 4, 4)

49. (3, 3, 3, 3, 6), (3, 3, 3, 4, 4) e (3, 3, 4, 3, 4)

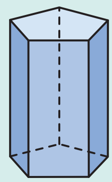
50. Não, pois em um vértice de uma composição podem ser dispostos m polígonos regulares congruentes de n lados cuja soma dos ângulos internos desses polígonos neste vértice seja 360°, e a única possibilidade que satisfaz a expressão $m = \dfrac{2n}{(n - 2)}$ é quando $n = 3$, ou seja, um triângulo equilátero.

51. a) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que haveriam espaços entre os alvéolos, algo que diminuiria a capacidade de armazenamento, além de utilizar uma quantidade maior de cera na construção.

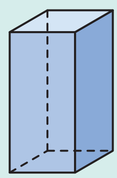
b) Regular, pois é formado por um único tipo de polígono regular; quando ocorre interseção entre as peças, é apenas nos seus lados ou vértices; ao redor de cada vértice ocorre a mesma distribuição.

52. Resposta pessoal. Possível resposta: Silas deseja realizar uma composição com triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares, todos com lados congruentes, para fazer um mosaico. Qual é a quantidade de cada um desses polígonos que ele deve utilizar a fim de obter um ladrilho?

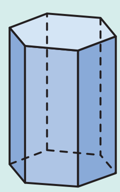
53. a) prisma de base pentagonal



b) prisma de base quadrangular

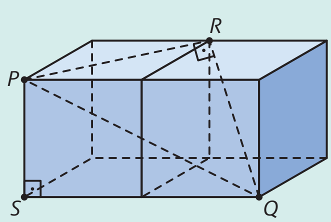


c) prisma de base hexagonal



Ilustrações: Rafael L. Gaion

54. alternativa **a**



Rafael L. Gaion

Calculando as medidas dos lados do triângulo formado, temos:

$\overline{PR} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$ dm

$\overline{RQ} = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \rightarrow \sqrt{3}$ dm

$\overline{PQ} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \rightarrow \sqrt{5}$ dm

Podemos verificar que o triângulo PQR é retângulo, de fato:

$\left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$

Assim, a área desse triângulo é dada por:

$\dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \rightarrow \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ dm^2

55. alternativa **c**

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 = 180$

56. Diagonal do paralelepípedo reto retângulo:

- $d_p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow$

  $\Rightarrow d_p = \sqrt{50^2 + 80^2 + 60^2} = 50\sqrt{5} \rightarrow 50\sqrt{5}$ cm

- Aresta do cubo: $\dfrac{2}{3} \cdot d_p = d_c \Rightarrow \dfrac{2}{3} \cdot 50\sqrt{5} = a\sqrt{3} \Rightarrow$

  $\Rightarrow a = \dfrac{100}{9}\sqrt{15} \rightarrow \dfrac{100}{9}\sqrt{15}$ cm

57. total de arestas: 15

arestas não adjacentes a cada aresta: 10

pares de arestas não adjacentes: $n = \dfrac{15 \cdot 10}{2} = 75 \rightarrow 75$ pares

58. Pelo teorema de Pitágoras no triângulo EFH:

$(FH)^2 = (EF)^2 + (EH)^2 \Rightarrow (FH)^2 = (3{,}5)^2 + (3{,}5)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (FH)^2 = \dfrac{49}{2} \Rightarrow FH = \dfrac{7\sqrt{2}}{2} \rightarrow \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ cm

- Área do triângulo FCH:

  $A = \dfrac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \dfrac{(FH) \cdot (CH)}{2} \Rightarrow$

  $\Rightarrow A = \dfrac{\dfrac{7\sqrt{2}}{2} \cdot 7{,}5}{2} \Rightarrow A = \dfrac{105\sqrt{2}}{8} \simeq 18{,}6$

Portanto, a área do triângulo FCH é, aproximadamente, 18,6 cm^2.

59. Resposta pessoal. Possível resposta: qual é a medida da diagonal de um paralelepípedo reto retângulo cujas medidas de suas dimensões são 8 cm, 6 cm e 4 cm?

60. $\sqrt{110} = \sqrt{(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2} \Rightarrow 110 = 3n^2 + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 = 36 \Rightarrow n = 6$

Portanto, as dimensões desse paralelepípedo são: 5 cm, 6 cm e 7 cm.

61. $d_{cubo} = a \cdot \sqrt{3} \Rightarrow d_{cubo} = 8 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 24 \rightarrow 24$ cm

$\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow AP = \dfrac{3}{4} \cdot AB \Rightarrow AP = \dfrac{3}{4} \cdot 24 = 18 \rightarrow 18$ cm

$AB = AP + PB \Rightarrow 24 = 18 + PB \Rightarrow PB = 6 \rightarrow 6$ cm

62. Resposta pessoal. Possível resposta: a medida da diagonal de um cubo é 30 cm. Qual é o comprimento de sua aresta?

63. a) $A = 2 \cdot (7 \cdot 3) + 2 \cdot (5 \cdot 3) + 2 \cdot (7 \cdot 5) =$

$= 42 + 30 + 70 = 142 \rightarrow 142$ m^2

b) $a^2 = 7^2 + 6^2 \Rightarrow a^2 = 85 \Rightarrow a = \sqrt{85} \rightarrow \sqrt{85}$ cm

$A = 2 \cdot \underbrace{\dfrac{7 \cdot 6}{2}}_{\substack{\text{área de} \\ \text{uma face} \\ \text{triangular}}} + 6 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + \sqrt{85} \cdot 10 =$

$= 42 + 60 + 70 + 10\sqrt{85} =$

$= \left(172 + 10\sqrt{85}\right) \rightarrow \left(172 + 10\sqrt{85}\right)$ m^2

c) $A = 2 \cdot \underbrace{\dfrac{3 \cdot 4^2\sqrt{3}}{2}}_{\substack{\text{área de} \\ \text{uma face} \\ \text{hexagonal}}} + 6 \cdot \underbrace{(4 \cdot 8)}_{\substack{\text{área de} \\ \text{uma face} \\ \text{retangular}}} =$

$= \left(48\sqrt{3} + 192\right) \rightarrow \left(48\sqrt{3} + 192\right)$ m^2

64. Temos:

$15^2 = (x+3)^2 + (x+6)^2 \Rightarrow 225 = 2x^2 + 18x + 45$

$x^2 + 9x - 90 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -15 \text{ (não convém)} \end{cases}$

Segue que as dimensões são 6 cm, 9 cm e 12 cm, assim a área total é:

$A_t = 2 \cdot (6 \cdot 9 + 6 \cdot 12 + 9 \cdot 12) = 468 \rightarrow 468$ cm^2

65. Resposta pessoal. Possível resposta: determine a área da base de um prisma regular pentagonal, sabendo que seu apótema mede 4,12 cm e a aresta da base é 6 cm.

66. $A_\ell = 6 \cdot 3a \cdot a = 18a^2 \rightarrow 18a^2$ cm^2

67. $A_\ell = 3 \cdot 10 \cdot 15 = 450 \rightarrow 450$ cm^2

$A_b = \dfrac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3} \simeq 43{,}3 \rightarrow$ aproximadamente 43,3 cm^2

$A_t = 450 + 2 \cdot 43{,}3 = 536{,}60 \rightarrow 536{,}60$ cm^2

2 m$^2 = 20\,000$ cm^2

$\dfrac{20\,000}{536{,}60} \simeq 37{,}27$

Portanto, a quantidade máxima de embalagens é 37.

68. $A_t = 15\,000 \Rightarrow A_\ell + 2A_b = 15\,000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \cdot a^2 + 2 \cdot a^2 = 15\,000 \Rightarrow a^2 = 2\,500 \Rightarrow a = 50$

Logo, o comprimento da aresta será 50 cm.

69. a) $A = 100 \cdot 35 = 3\,500 \rightarrow 3\,500$ cm^2

b) • $3\,500$ cm$^2 = \dfrac{7}{20}$ m^2

$\dfrac{2\,700}{\frac{7}{20}} = \dfrac{54\,000}{7} \simeq 7\,714 \rightarrow 7\,714$ embalagens

• $2 \cdot 7\,714 = 15\,428 \rightarrow 15\,428$ embalagens

70. alternativa **c**

Chamando de R e H as áreas das embalagens retangular e hexagonal, respectivamente, temos:

$R_t = R_\ell + 2 \cdot R_b = 2 \cdot (15 \cdot 10) + 2 \cdot (20 \cdot 10) + 2 \cdot (15 \cdot 20) =$

$= 1300 \rightarrow 1300$ cm^2

$100 \cdot R_t = 100 \cdot 1300 = 130\,000 \rightarrow 130\,000$ cm^2

$H_t = H_\ell + 2H_b = 6 \cdot (15 \cdot 10) + 2 \cdot \left(6 \cdot \dfrac{15^2\sqrt{3}}{4}\right) =$

$= 900 + 675\sqrt{3} \simeq 2\,067{,}75 \rightarrow$ aproximadamente 2 067,75 cm^2

$2\,067{,}75 + 0{,}2 \cdot 2\,067{,}75 = 2\,481{,}3 \rightarrow 2\,481{,}3$ cm^2

$\dfrac{130\,000}{2\,481{,}3} \simeq 52{,}4$

Portanto, será possível confeccionar 52 embalagens.

71. $V = A_b \cdot h = 6 \cdot \dfrac{3^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 =$

$= 81\sqrt{3} \simeq 140{,}3 \rightarrow$ aproximadamente 140,3 cm^3

72. $V = 12^3 = 1728 \rightarrow 1728$ dm^3

73. $V = 10 \cdot 12 \cdot 4 - 6 \cdot 3 \cdot 4 = 408 \rightarrow 408$ cm^3

74. a) $V = A_b \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \dfrac{3 \cdot 8^2\sqrt{3}}{2} \cdot 15 = 1440\sqrt{3} \rightarrow 1440\sqrt{3}$ cm^3

b) $V = A_b \cdot h \Rightarrow V = \dfrac{8^2\sqrt{3}}{4} \cdot 12 = 192\sqrt{3} \rightarrow 192\sqrt{3}$ cm^3

75. $A_b = 16 \cdot 25 = 400 \rightarrow 400$ dm^2

$7\,200$ L $= 7\,200$ dm^3

$V = 400 \cdot h \Rightarrow 7\,200 = 400 \cdot h \Rightarrow h = 18 \rightarrow 18$ dm

76. alternativa **d**

$V = 200 \cdot 20 \cdot 17 = 68\,000 \rightarrow 68\,000$ m^2

$\dfrac{68\,000}{4\,200} \simeq 16{,}19$

Portanto, uma embarcação leva cerca de 16 minutos.

77. alternativa **e**

$V = a^3$

$V_{2a} = (2a)^3 = 8a^3$

78. a) $\dfrac{1}{2}V + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}V = 24 \Rightarrow V = 32 \rightarrow 32$ m^3

b) $V = A_b \cdot h \Rightarrow 32 = 0{,}4x \cdot 0{,}5x \cdot 2{,}5x \Rightarrow x^3 = 4^3 \Rightarrow x = 4$

$0{,}4x = 0{,}4 \cdot 4 = 1{,}6 \rightarrow 1{,}6$ m

$0{,}5x = 0{,}5 \cdot 4 = 2 \rightarrow 2$ m

$2{,}5x = 2{,}5 \cdot 4 = 10 \rightarrow 10$ m

79. Temos:

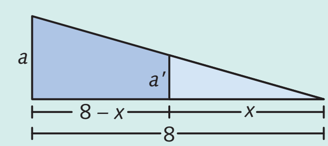
$V = 7{,}5 \cdot 4{,}5 \cdot 2{,}7 + 1 \cdot 12 \cdot 4{,}5 = 145{,}125 \rightarrow 145{,}125$ m^3

$V = 145{,}125 \cdot 1\,000 = 145\,125 \rightarrow 145\,125$ L

$\dfrac{145\,125}{1\,600} \simeq 90{,}7$

Portanto, serão necessários, aproximadamente, 91 minutos para que a piscina seja totalmente esvaziada.

80. alternativa **a**



Rafael L. Gaion

Volume total: $V_T = A_b \cdot h \Rightarrow V_T = \dfrac{8 \cdot a}{2} \cdot h = 4a \cdot h$

Calculando a', temos: $\dfrac{a}{8} = \dfrac{a'}{x} \Rightarrow a' = \dfrac{ax}{8}$

Calculando o volume do pedaço representado pela região mais clara na figura, obtemos:

$V_p = A_b \cdot h \Rightarrow V_p = \dfrac{x \cdot \frac{ax}{8}}{2} \cdot h = \dfrac{x^2a}{16} \cdot h$

Assim, o valor de x é dado por:

$V_p = \dfrac{1}{2} \cdot V_T \Rightarrow \dfrac{x^2a}{16} \cdot h = \dfrac{1}{2} \cdot 4a \cdot h \Rightarrow x^2 = 32 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{2^5} = 2^{\frac{5}{2}} \rightarrow 2^{\frac{5}{2}}$ cm

81. O volume da caixa é dado por:

$V = 20 \cdot 30 \cdot 16 = 9\,600 \rightarrow 9\,600$ cm^3

Calculando 25% de 16, obtemos:

$\dfrac{25}{100} = \dfrac{x}{16} \Rightarrow x = 4$

$h = 16 - 4 = 12 \rightarrow 12$ cm

Assim: $9\,600 = 20 \cdot c \cdot 12 \Rightarrow c = 40$

Portanto, o comprimento da nova caixa deve ser 40 cm.

82. $a^3 = 64 \Rightarrow a = 4 \rightarrow 4$ dm

1 dm $= 10$ cm $\Rightarrow 5$ cm $= 0{,}5$ dm

$4 - 2 \cdot 0{,}5 = 3 \rightarrow 3$ dm

$A_b = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6 \rightarrow 6$ dm^2

$V = 4 \cdot 6 = 24 \rightarrow 24$ dm^3

83. a) $1^2 = h^2 + \left(\dfrac{3{,}2 - 2}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 0{,}64 \Rightarrow h = 0{,}8 \rightarrow 0{,}8$ m

$A_{ABCD} = \dfrac{(3{,}2 + 2) \cdot 0{,}8}{2} = 2{,}08 \rightarrow 2{,}08$ m²

$V = 2{,}08 \cdot 1{,}5 = 3{,}12 \rightarrow 3{,}12$ m³

b) $A_\ell = 2 \cdot 2{,}08 + 2 \cdot 1{,}5 = 7{,}16 \rightarrow 7{,}16$ m²

$A_{ABFE} = 2 \cdot 1{,}5 = 3 \rightarrow 3$ m²

$A = 2 \cdot (7{,}16 + 3) = 20{,}32 \rightarrow 20{,}32$ m²

84. a) apótema da base: $\dfrac{2}{2} = 1 \rightarrow 1$ m

b) $g^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 \Rightarrow g^2 = 4 \Rightarrow g = 2 \rightarrow 2$ m

c) $A_\ell = 4 \cdot \dfrac{2 \cdot 2}{2} = 8 \rightarrow 8$ m²

d) $A_b = 2^2 = 4 \rightarrow 4$ m²

e) $A_t = 8 + 4 = 12 \rightarrow 12$ m²

85. $A_t = 4 \cdot \dfrac{10^2\sqrt{3}}{4} =$

$= 100\sqrt{3} \simeq 173{,}2 \rightarrow$ aproximadamente 173,2 cm²

86. $a^3 = 1 \Rightarrow a = 1 \rightarrow 1$ dm

$m = \dfrac{1}{2} \rightarrow \dfrac{1}{2}$ dm

$g^2 = 1^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow g^2 = \dfrac{5}{4} \Rightarrow g = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ dm

$A_\ell = 4 \cdot \dfrac{1 \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \sqrt{5} \simeq 2{,}24 \rightarrow$ aproximadamente 2,24 dm²

87. $g^2 = 3^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow g^2 = 36 \Rightarrow g = 6 \rightarrow 6$ dm

$a^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6 \rightarrow 6$ dm

$A_\ell = 6 \cdot \dfrac{6 \cdot 6}{2} = 108 \rightarrow 108$ dm²

$A_b = 6 \cdot \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3} \rightarrow 54\sqrt{3}$ dm²

$A_t = 108 + 54\sqrt{3} \simeq 201{,}53 \rightarrow$ aproximadamente 201,53 dm²

88. alternativa **a**

apótema da base: $\dfrac{8}{2} = 4 \rightarrow 4$ m

$g^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow g^2 = 25 \Rightarrow g = 5 \rightarrow 5$ m

$A_\ell = 4 \cdot \dfrac{8 \cdot 5}{2} = 80 \rightarrow 80$ m²

$\dfrac{80}{1} + 10 = 90 \rightarrow 90$ lotes

89. $12 \cdot a = 24 \Rightarrow a = 2 \rightarrow 2$ cm

$A_t = 8 \cdot \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3} \simeq 13{,}86 \rightarrow$ aproximadamente 13,86 cm²

90. $\ell = \dfrac{4}{2} = 2 \rightarrow 2$ m

$m = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \rightarrow \sqrt{3}$ m

$g^2 = (1{,}5)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow g^2 = 5{,}25 \Rightarrow$

$\Rightarrow g \simeq 2{,}3 \rightarrow$ aproximadamente 2,3 m

$A_t = 3 \cdot \left(\dfrac{2 \cdot 2{,}3}{2}\right) = 6{,}9 \rightarrow 6{,}9$ m²

91. $A_t = A_\ell + A_b \Rightarrow 624 = 4 \cdot \dfrac{12 \cdot g}{2} + 12^2 \Rightarrow g = 20 \rightarrow 20$ cm

$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow 20^2 = h^2 + \left(\dfrac{12}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 364 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 2\sqrt{91} \rightarrow 2\sqrt{91}$ cm

Área do $\triangle MNE$: $A = \dfrac{(MN) \cdot 2\sqrt{91}}{2} = \dfrac{12 \cdot 2\sqrt{91}}{2} =$

$= 12\sqrt{91} \rightarrow 12\sqrt{91}$ cm²

92. alternativa **a**

$d_b = a\sqrt{2} \Rightarrow EG = 3\sqrt{2} \rightarrow 3\sqrt{2}$ cm

$PE = PA + AE \Rightarrow PE = 5 + 3 = 8 \rightarrow 8$ cm

Pelo teorema de Pitágoras no $\triangle EGP$:

$(PG)^2 = (PE)^2 + (EG)^2 \Rightarrow (PG)^2 = 8^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (PG)^2 = 82 \Rightarrow PG = \sqrt{82} \rightarrow \sqrt{82}$ cm

93. Resposta pessoal. Possível resposta: uma pirâmide triangular regular tem arestas medindo 8 cm.

a) Qual é a medida do apótema dessa pirâmide?

b) Determine a medida da área total dessa pirâmide.

94. alternativa **c**

- Pelo teorema de Pitágoras no $\triangle BPQ$:

  $(PQ)^2 = (BP)^2 + (BQ)^2 \Rightarrow (PQ)^2 = \left(\dfrac{20}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{20}{2}\right)^2 \Rightarrow$

  $\Rightarrow (PQ)^2 = 200 \Rightarrow PQ = 10\sqrt{2} \rightarrow 10\sqrt{2}$ m

- Na pirâmide $PQRSV_1$, temos:

  $g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow g^2 = \left(\dfrac{2}{3} \cdot 6\right)^2 + \left(\dfrac{10\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow$

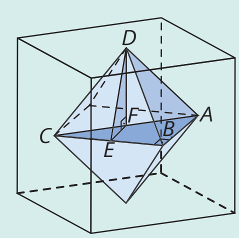
  $\Rightarrow g^2 = 66 \Rightarrow g = \sqrt{66} \rightarrow \sqrt{66}$ m

  $A_\ell = 4 \cdot \dfrac{10\sqrt{2} \cdot \sqrt{66}}{2} - 6 = 40\sqrt{33} - 6 =$

  $= 40 \cdot 5{,}74 - 6 = 223{,}6 \rightarrow 223{,}6$ m²

  Logo, o valor inteiro mais próximo é 224 m².

95. alternativa **c**



Rafael L. Gaion

Pelo teorema de Pitágoras, no $\triangle ABC$:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow a^2 = (BC)^2 + (BC)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (BC)^2 = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow BC = \dfrac{\sqrt{2} \cdot a}{2} \rightarrow \dfrac{\sqrt{2} \cdot a}{2}$ cm

Pelo teorema de Pitágoras, no $\triangle DEF$:

$(DE)^2 = (EF)^2 + (DF)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (DE)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2} \cdot a}{2} \cdot \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow (DE)^2 = \dfrac{3a^2}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow DE = \dfrac{\sqrt{6} \cdot a}{4} \rightarrow \dfrac{\sqrt{6} \cdot a}{4}$ cm

$A_\ell = 8 \cdot \dfrac{\sqrt{2} \cdot a}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{6} \cdot a}{4} \cdot \dfrac{1}{2} = a^2\sqrt{3} \rightarrow a^2\sqrt{3}$ cm²

96. $A_b = 7^2 = 49 \rightarrow 49$ cm²

$V = \dfrac{49 \cdot 24}{3} = 392 \rightarrow 392$ cm³

97. a) $g = \dfrac{16 - 6}{2} = 5 \rightarrow 5$ cm

$A_\ell = 4 \cdot \dfrac{6 \cdot 5}{2} = 60 \rightarrow 60\ \text{cm}^2$

$A_b = 6^2 = 36 \rightarrow 36\ \text{cm}^2$

$A_t = 60 + 36 = 96 \rightarrow 96\ \text{cm}^2$

b) $m = \dfrac{6}{2} = 3 \rightarrow 3$ cm

$5^2 = h^2 + 3^2 \Rightarrow h^2 = 16 \Rightarrow h = 4 \rightarrow 4$ cm

$V = \dfrac{36 \cdot 4}{3} = 48 \rightarrow 48\ \text{cm}^3$

98. alternativa **d**

$A_b = 3^2 = 9 \rightarrow 9\ \text{m}^2$

$V = \dfrac{9 \cdot 4}{3} = 12 \rightarrow 12\ \text{m}^3$

99. alternativa **b**

$A_b = 230^2 \rightarrow 230^2\ \text{m}^2$

$g = \dfrac{230\sqrt{3}}{2} \rightarrow \dfrac{230\sqrt{3}}{2}$ m

apótema da base: $\dfrac{230}{2}$ m

$\left(\dfrac{230\sqrt{3}}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\dfrac{230}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = \dfrac{230^2}{2} \Rightarrow h = \dfrac{230\sqrt{2}}{2} \rightarrow \dfrac{230\sqrt{2}}{2}$ m

$V = \dfrac{230^2 \cdot \dfrac{230\sqrt{2}}{2}}{3} = \dfrac{230^3\sqrt{2}}{6} \rightarrow \dfrac{230^3\sqrt{2}}{6}\ \text{m}^3$

100. $V = 5^3 + \dfrac{5^2 \cdot (8 - 5)}{3} = 150 \rightarrow 150\ \text{m}^3$

$1\ \text{m}^3 = 1000\ \text{L} \Rightarrow 150\ \text{m}^3 = 150\,000\ \text{L}$

101. $A_b = 6 \cdot \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 6\sqrt{3} = 6 \cdot \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$\ell^2 = 4 \Rightarrow \ell = 2 \rightarrow 2$ cm

$6 \cdot \dfrac{2g}{2} = 12 \Rightarrow g = 2 \rightarrow 2$ cm

$m = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \rightarrow \sqrt{3}$ cm

$2^2 = h^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 1 \Rightarrow h = 1 \rightarrow 1$ cm

$V = \dfrac{6\sqrt{3} \cdot 1}{3} = 2\sqrt{3} \rightarrow 2\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

102. $\dfrac{12}{6} = \dfrac{8}{a} \Rightarrow a = 4 \rightarrow 4$ cm

$m = \dfrac{4}{2} = 2 \rightarrow 2$ cm

$g^2 = 6^2 + 2^2 \Rightarrow g^2 = 40 \Rightarrow g = 2\sqrt{10} \rightarrow 2\sqrt{10}$ cm

$A_\ell = 4 \cdot \dfrac{4 \cdot 2\sqrt{10}}{2} = 16\sqrt{10} \rightarrow 16\sqrt{10}\ \text{cm}^2$

$A_b = 4^2 = 16 \rightarrow 16\ \text{cm}^2$

$A_t = 16\sqrt{10} + 16 \simeq 66{,}6 \rightarrow$ aproximadamente $66{,}6\ \text{cm}^2$

$V = \dfrac{16 \cdot 6}{3} = 32 \rightarrow 32\ \text{cm}^3$

103. $\dfrac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Rightarrow \ell^2 = 16 \Rightarrow \ell = 4 \rightarrow 4$ cm

Como $AV = 2 \cdot VX$, temos: $AV = 2 \cdot 4 = 8 \rightarrow 8$ cm

$g = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

$m = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

$\left(4\sqrt{3}\right)^2 = h^2 + \left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \dfrac{128}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \dfrac{\sqrt{384}}{3} = \dfrac{8\sqrt{6}}{3} \rightarrow \dfrac{8\sqrt{6}}{3}$ cm

$A_b = \dfrac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \rightarrow 16\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

$V_t = \dfrac{16\sqrt{3} \cdot \dfrac{8\sqrt{6}}{3}}{3} = \dfrac{128\sqrt{2}}{3} \rightarrow \dfrac{128\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}^3$

$V_{\text{parte}} = \dfrac{V_t}{2} = \dfrac{\dfrac{128\sqrt{2}}{3}}{2} = \dfrac{128\sqrt{2}}{6} =$

$= \dfrac{64\sqrt{2}}{3} \rightarrow \dfrac{64\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}^3$

104. a) $\dfrac{3}{7{,}5} = \dfrac{x}{7{,}5} \Rightarrow x = 3 \rightarrow 3$ cm

$A_b = (2 \cdot 3)^2 = 36 \rightarrow 36\ \text{cm}^2$

b) Sejam g, g_1 e g_2 os apótemas da pirâmide, do tronco e da pirâmide menor, respectivamente.

$g^2 = (7{,}5)^2 + (7{,}5)^2 \Rightarrow g^2 = \dfrac{225}{2} \Rightarrow g = \dfrac{15\sqrt{2}}{2}$

$\dfrac{7{,}5}{3} = \dfrac{\dfrac{15\sqrt{2}}{2}}{g_1} \Rightarrow g_1 = 3\sqrt{2} \rightarrow 3\sqrt{2}$ cm

$g_2 = g - g_1 \Rightarrow g_2 = \dfrac{15\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{2} = 4{,}5\sqrt{2} \rightarrow 4{,}5\sqrt{2}$ cm

$A_\ell = 4 \cdot \dfrac{(15 + 6) \cdot 4{,}5\sqrt{2}}{2} \simeq 267{,}3 \rightarrow$

$\rightarrow$ aproximadamente $267{,}3\ \text{cm}^2$

c) $A_B = 15^2 = 225 \rightarrow 225\ \text{cm}^2$

$A_t = 225 + 36 + 267{,}3 = 528{,}3 \rightarrow 528{,}3\ \text{cm}^2$

105. $A_B = 5^2 = 25 \rightarrow 25\ \text{dm}^2$

$A_b = 2^2 = 4 \rightarrow 4\ \text{dm}^2$

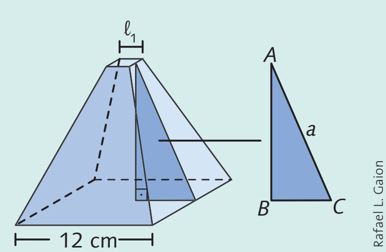
$\dfrac{5 - 2}{2} = 1{,}5 \rightarrow 1{,}5$ dm

apótema do tronco: $(2{,}5)^2 = (1{,}5)^2 + a^2 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$A_\ell = 4 \cdot \dfrac{(5 + 2) \cdot 2}{2} = 28 \rightarrow 28\ \text{dm}^2$

$A_t = 25 + 4 + 28 = 57 \rightarrow 57\ \text{dm}^2$

106.

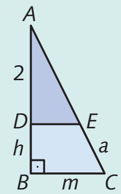


- $A_b = \ell_1^{\,2} \Rightarrow 4 = \ell_1^{\,2} \Rightarrow \ell_1 = 2 \rightarrow 2$ cm
- Pelo teorema de Pitágoras, no $\triangle ABC$:

  $a^2 = 12^2 + (6 - 1)^2 \Rightarrow a^2 = 169 \Rightarrow a = 13 \rightarrow 13$ cm
- $A_t = A_\ell + A_B + A_b \Rightarrow A_t = 4 \cdot \dfrac{(12 + 2) \cdot 13}{2} + 12^2 + 4 \Rightarrow$

  $\Rightarrow A_t = 512 \rightarrow 512\ \text{cm}^2$

107.



Rafael L. Gaion

$A_B = 9 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \rightarrow 3$ m

$m = \dfrac{3}{2}$ m

$A_b = 4 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow c = 2 \rightarrow 2$ m

$DE = \dfrac{2}{2} = 1 \rightarrow 1$ m

$\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{DE}{AD} \Rightarrow \dfrac{\frac{3}{2}}{2 + h} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow h = 1 \rightarrow 1$ m

$(AE)^2 = 2^2 + 1^2 \Rightarrow AE = \sqrt{5} \rightarrow \sqrt{5}$ m

$\dfrac{AE}{DE} = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{5}}{1} = \dfrac{\sqrt{5} + a}{\frac{3}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ m

$A_\ell = 4 \cdot \dfrac{(3 + 2) \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = 5\sqrt{5} \rightarrow 5\sqrt{5}$ m^2

$A_t = 9 + 4 + 5\sqrt{5} =$

$= 13 + 5\sqrt{5} \simeq 24{,}18 \rightarrow$ aproximadamente 24,18 m^2

108. $A_B = \dfrac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \rightarrow 16\sqrt{3}$ dm^2

$A_b = \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \rightarrow 9\sqrt{3}$ dm^2

$A_\ell = 3 \cdot \dfrac{(8 + 6) \cdot \sqrt{3}}{2} = 21\sqrt{3} \rightarrow 21\sqrt{3}$ dm^2

$A_t = 16\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 21\sqrt{3} =$

$= 46\sqrt{3} \simeq 79{,}67 \rightarrow$ aproximadamente 79,67 dm^2

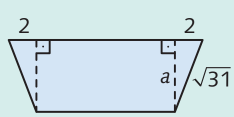
109. Resposta pessoal. Possível resposta: as bases de um tronco de pirâmide são em formatos de dois pentágonos regulares, cujos lados medem 5 cm e 3 cm, respectivamente. Sabendo que essas bases são paralelas e que o apótema do tronco da pirâmide mede 10 cm, determine:

a) a área das bases desse tronco de pirâmide.

b) a área total do tronco da pirâmide.

110. $A_b = 6 \cdot \dfrac{10^2\sqrt{3}}{4} = 150\sqrt{3} \rightarrow 150\sqrt{3}$ cm^2

$\dfrac{14 - 10}{2} = 2 \rightarrow 2$ cm



Rafael L. Gaion

$\left(\sqrt{31}\right)^2 = a^2 + 2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 3\sqrt{3} \rightarrow 3\sqrt{3}$ cm

$A_\ell = 6 \cdot \dfrac{(14 + 10) \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 216\sqrt{3} \rightarrow 216\sqrt{3}$ cm^2

$A_t = 150\sqrt{3} + 216\sqrt{3} = 366\sqrt{3} = 622{,}2 \rightarrow 622{,}2$ cm^2

111. Resolução na página **269**.

112. Resolução na página **270**.

113. $A_b = 4^2 = 16 \rightarrow 16$ cm^2

$A_B = 10^2 = 100 \rightarrow 100$ cm^2

$V = \dfrac{21}{3} \cdot \left(\sqrt{16 \cdot 100} + 16 + 100\right) = 1\,092 \rightarrow 1\,092$ cm^3

114. $A_b = 3^2 = 9 \rightarrow 9$ cm^2

$A_B = 4^2 = 16 \rightarrow 16$ cm^2

$V = \dfrac{1{,}5}{3} \cdot \left(\sqrt{9 \cdot 16} + 9 + 16\right) = 18{,}5$ m$^3 \rightarrow 18{,}5$ m^3

Como 1 m^3 equivale a 1 000 L, logo, 18,5 = 18 500 L

Vazão: $\dfrac{18\,500}{75} \simeq 246{,}7 \rightarrow$ aproximadamente 246,7 L/min

115. alternativa **b**

Sendo a e a_1 as medidas das bases, temos:

$\dfrac{H}{\frac{H}{2}} = \dfrac{a}{a_1} \Rightarrow a = 2a_1$

$A_b = a_1^2$

$A_B = a^2 \Rightarrow A_B = (2a_1)^2 = 4a_1^2 = 4A_b$

$V_p = \dfrac{A_b \cdot \frac{H}{2}}{3} = \dfrac{A_b \cdot H}{6}$

$V_T = \dfrac{\frac{H}{2}}{3} \cdot \sqrt{A_b \cdot A_B} + A_b + A_B \Rightarrow$

$\Rightarrow V_T = \dfrac{H}{6} \cdot \left(\sqrt{A_b \cdot 4A_b} + A_b + 4A_b\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow V_T = \dfrac{H}{6} \cdot \left(\sqrt{4(A_b)^2} + 5A_b\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow V_T = 7 \cdot \dfrac{H \cdot A_b}{6} = 7 \cdot V_p$

Como $V_T = 672$ mL, temos: $672 = 7 \cdot V_p \Rightarrow$

$\Rightarrow V_p = 96 \rightarrow 96$ mL

116. Resolução na página **270**.

117. $A_b = 5^2 = 25 \rightarrow 25$ cm^2

$A_B = 9^2 = 81 \rightarrow 81$ cm^2

$V = \dfrac{h_t}{3} \cdot \left(\sqrt{A_b \cdot A_B} + A_b + A_B\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \dfrac{6}{3} \cdot \left(\sqrt{25 \cdot 81} + 25 + 81\right) = 302 \rightarrow 302$ cm^3

118. **a)** $h_t = \dfrac{2}{5} \cdot 10 = 4 \rightarrow 4$ cm

$A_b = 4^2 = 16 \rightarrow 16$ cm^2

$A_B = 8^2 = 64 \rightarrow 64$ cm^2

$V_{tronco} = \dfrac{h_t}{3} \cdot \left(\sqrt{A_b \cdot A_B} + A_b + A_B\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{tronco} = \dfrac{4}{3} \cdot \left(\sqrt{16 \cdot 64} + 16 + 64\right) = \dfrac{448}{3} \rightarrow \dfrac{448}{3}$ cm^3

b) $V = V_{caixa} - V_{tronco} = 10^3 - \dfrac{448}{3} = \dfrac{2\,552}{3} \rightarrow \dfrac{2\,552}{3}$ cm^3

Capítulo 3 Corpos redondos

Em algumas situações, considerou-se $\pi = 3{,}14$. Nesses casos, a medida obtida não será exata, pois utilizamos uma aproximação para o número irracional π. Sendo assim, entende-se que a medida 78,5 cm² obtida na resolução do item **a** para o círculo A da tarefa **1**, não é exata.

1. a) $A: \pi \cdot 5^2 \simeq 3{,}14 \cdot 25 \simeq 78{,}5 \rightarrow$ aproximadamente 78,5 cm²
$B: \pi \cdot (9{,}5)^2 \simeq 3{,}14 \cdot 90{,}25 \simeq 283{,}385 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 283,385 cm²
$C: \pi \cdot (0{,}7)^2 \simeq 3{,}14 \cdot 0{,}49 \simeq 1{,}5386 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 1,5386 cm²

b) $A: A_s = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot 78{,}5$

- 25°
$A_s = \dfrac{25°}{360°} \cdot 78{,}5 \simeq 5{,}45 \rightarrow$ aproximadamente 5,45 cm²
- 70°
$A_s = \dfrac{70°}{360°} \cdot 78{,}5 \simeq 15{,}26 \rightarrow$ aproximadamente 15,26 cm²
- 230°
$A_s = \dfrac{230°}{360°} \cdot 78{,}5 \simeq 50{,}15 \rightarrow$ aproximadamente 50,15 cm²

$B: A_s = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot 283{,}385$

- 25°
$A_s = \dfrac{25°}{360°} \cdot 283{,}385 \simeq 19{,}68 \rightarrow$ aproximadamente 19,68 cm²
- 70°
$A_s = \dfrac{70°}{360°} \cdot 283{,}385 \simeq 55{,}10 \rightarrow$ aproximadamente 55,10 cm²
- 230°
$A_s = \dfrac{230°}{360°} \cdot 283{,}385 \simeq 181{,}05 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 181,05 cm²

$C: A_s = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot 1{,}5386$

- 25°
$A_s = \dfrac{25°}{360°} \cdot 1{,}5386 \simeq 0{,}11 \rightarrow$ aproximadamente 0,11 cm²
- 70°
$A_s = \dfrac{70°}{360°} \cdot 1{,}5386 \simeq 0{,}30 \rightarrow$ aproximadamente 0,30 cm²
- 230°
$A_s = \dfrac{230°}{360°} \cdot 1{,}5386 \simeq 0{,}98 \rightarrow$ aproximadamente 0,98 cm²

2. alternativa **e**

Seja A a área que desejamos calcular. Assim:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left[\underbrace{\frac{\pi \cdot 1^2}{2}}_{\substack{\text{área de}\\ \text{semicircunferência}\\ \text{de centro } O}} - \underbrace{\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\substack{\text{área de}\\ \text{circunferência de}\\ \text{raio } r = \frac{OB}{2}}} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$$

Portanto, a área desejada é igual a $\dfrac{\pi}{8}$ u.a.

3. Resolução na página **271**.

4. alternativa **d**

Considere:

A: área do círculo

A_s: área sombreada

A_n: área não sombreada no interior dos círculos

Assim:

$A_s = A + 4 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot A = 2A$

$A_n = 4 \cdot \dfrac{3}{4} \cdot A = 3A$

Portanto, $\dfrac{A_s}{A_n} = \dfrac{2A}{3A} = \dfrac{2}{3}$.

5. Resolução na página **271**.

6. Resposta pessoal. Possível resposta: considere os objetos **A** e **B** em formato de cilindro reto, cujas alturas são, respectivamente, 13 cm e 7 cm. A área da superfície do objeto **A** é quantas vezes maior do que a área da superfície do objeto **B**?

7. Resposta pessoal. Possível resposta:

a) Qual é a área total desse cilindro?

b) Qual é a área lateral desse cilindro?

c) A soma das áreas totais dos cilindros dos itens **a** e **b** é maior do que a área total desse cilindro?

8. Resolução na página **271**.

9. Sejam r, h e A_t o raio da base, a altura e a área total do tambor, respectivamente. Assim:

$A_t = 2\pi r(h + r) \Rightarrow 1{,}9 \cdot \pi = 2\pi r(1{,}4 + r) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}95 = 1{,}4r + r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 + 1{,}4r - 0{,}95 = 0 \left\langle \begin{array}{l} r_1 = 0{,}5 \\ r_2 = -1{,}9 \text{ (não convém)} \end{array} \right.$

Portanto, o diâmetro é dado por: $d = 2 \cdot 0{,}5 = 1 \rightarrow 1$ m

10. Cilindro obtido pela rotação em torno do lado:

- maior (A): $r = 4$ cm; $h = 7$ cm;
- menor (B): $r = 7$ cm; $h = 4$ cm.

a) Cilindro A:

- $A_\ell = 2\pi \cdot 4 \cdot 7 \simeq 175{,}84 \rightarrow$ aproximadamente 175,84 cm²
- $A_b = \pi \cdot 4^2 \simeq 50{,}24 \rightarrow$ aproximadamente 50,24 cm²

Cilindro B:

- $A_\ell = 2\pi \cdot 7 \cdot 4 \simeq 175{,}84 \rightarrow$ aproximadamente 175,84 cm²
- $A_b = \pi \cdot 7^2 \simeq 153{,}86 \rightarrow$ aproximadamente 153,86 cm²

b) Cilindro A: $A_{t_A} = 175{,}84 + 2 \cdot 50{,}24 \simeq 276{,}32 \rightarrow$

$\rightarrow$ aproximadamente 276,32 cm²

Cilindro B: $A_{t_B} = 175{,}84 + 2 \cdot 153{,}86 \simeq 483{,}56 \rightarrow$

$\rightarrow$ aproximadamente 483,56 cm²

Diferença entre as áreas totais:

$$A_{t_B} - A_{t_A} = 483{,}56 - 276{,}32 = 207{,}24$$

Portanto, a diferença entre as áreas totais é 207,24 cm².

11. Denotando a área lateral por A_ℓ, e a altura por h, temos:

$$A_\ell = 2\pi rh \Rightarrow 240\pi = 12\pi h \Rightarrow h = 20$$

Portanto, a altura é 20 cm.

12. Denotando a área total por A_t, e o raio da base por r, temos:

$A_t = 2\pi r(\underbrace{h}_{2r} + r) \Rightarrow 114\pi = 2\pi r \cdot 3r \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = \dfrac{114\pi}{6\pi} \Rightarrow r^2 = 19 \Rightarrow r = \sqrt{19} \rightarrow \sqrt{19}$ cm

Assim, a área da base é dada por:

$$A_b = \pi \cdot \left(\sqrt{19}\right)^2 = 19\pi$$

Portanto, a área da base é 19π cm².

13. Calculando o volume V, temos:

$V = \pi \cdot \left(\dfrac{0{,}70}{2}\right)^2 \cdot 1{,}30 \simeq 0{,}5 \rightarrow 0{,}5$ m³

Assim, a capacidade do tanque, em litros, é dada por:

$\begin{array}{lcl} 1 \text{ m}^3 & \text{———} & 1000 \text{ L} \\ 0{,}5 \text{ m}^3 & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow \dfrac{1}{0{,}5} = \dfrac{1000}{x} \Rightarrow x = 500$

Portanto, a capacidade do tanque é 500 L.

14. Resposta pessoal. Possível resposta: desprezando o volume das ferragens utilizadas, calcule o volume de concreto utilizado na construção de 4 estruturas como essa.

15. Seja h a altura do cilindro. Assim:

$V = 48\pi \Rightarrow \pi r^2 h = 48\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot h\right)^2 \cdot h = 48\pi \Rightarrow h^3 = 1728 \Rightarrow h = 12$

Assim, a altura mede 12 cm.

$A_t = 2\pi r(h + r) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 2\pi \cdot \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot \left(12 + \frac{1}{6} \cdot 12\right) = 56\pi$

Portanto, a área total desse cilindro é 56π cm^2.

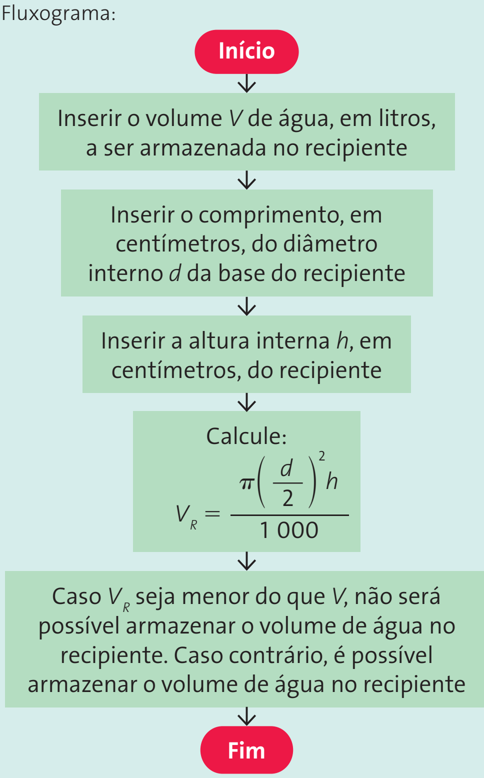
16. Algoritmo:

Início

1. Inserir o volume V de água, em litros, a ser armazenada no recipiente.
2. Inserir o comprimento, em centímetros, do diâmetro interno d da base do recipiente.
3. Inserir a altura interna h, em centímetros, do recipiente.
4. Calcule: $V_R = \dfrac{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h}{1\,000}$.
5. Caso V_R seja menor do que V, não será possível armazenar o volume de água no recipiente. Caso contrário, é possível armazenar o volume de água no recipiente.

Fim

Fluxograma:



17. Como 400 mL = 400 cm^3, temos que:

$V = \pi r^2 \underbrace{h}_{2r} \Rightarrow 400 = \pi \cdot r^2 \cdot 2r \Rightarrow r^3 = \frac{200}{\pi} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \simeq 4$

$h = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \simeq 8$

Portanto, a embalagem deve ter raio de aproximadamente 4 cm e altura de aproximadamente 8 cm.

18. Resposta pessoal. Possível resposta: sejam 10 cm, 6 m e 57 000 L, respectivamente, os valores de p, d e c.

19. verdadeira: **b**, **c**, **e**; falsa: **a**, **d**

a) Falsa, pois:

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 = 160\pi$

Logo, a capacidade é 160π mL.

b) Verdadeira, pois:

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 14 = 224\pi$

Logo, a capacidade é 224π mL.

c) Verdadeira, pois:

$2V_m = 2\pi r^2 h_m = 2\pi \cdot 4^2 \cdot 12 = 384\pi$

e

$V_g + V_p = \pi r^2 \cdot (h_g + h_p) = \pi \cdot 4^2 \cdot 24 = 384\pi$

Portanto, as capacidades são iguais a 384π mL.

d) Falsa, pois:

$3V_p = 3 \cdot 160\pi = 480\pi$

e

$2V_g = 2 \cdot 224\pi = 448\pi$

Desse modo, ele não terá lucro.

e) Verdadeira, pois:

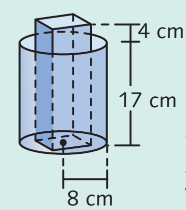
$2V_m + V_p = 384\pi + 160\pi = 554\pi$

e

$V_g + 2V_p = 244\pi + 2 \cdot 160\pi = 544\pi$

Portanto, as capacidades são iguais a 544π mL.

20. Calculando os volumes do recipiente, da parte submersa do prisma e da água no recipiente, temos:



Rafael L. Gaion

- volume do recipiente:

  $V_c = \pi \cdot 8^2 \cdot 17 \simeq 3\,416{,}32 \rightarrow$ aproximadamente 3 416,32 cm^3
- volume da parte submersa do prisma:

  $\begin{array}{ccc} 525 \text{ cm}^3 & \text{———} & 21 \text{ cm} \\ V_s & \text{———} & 17 \text{ cm} \end{array} \Rightarrow \frac{525}{V_s} = \frac{21}{17} \Rightarrow$

  $\Rightarrow V_s = 425 \rightarrow 425$ cm^3
- volume de água (N) no recipiente:

  $N = V_c - V_s = 3\,416{,}32 - 425 = 2\,991{,}32 \rightarrow 2\,991{,}32$ cm^3

Assim, o nível de água no recipiente (h), antes do prisma ser colocado em seu interior, é dado por:

$V = \pi r^2 h \Rightarrow 2\,991{,}32 = 3{,}14 \cdot 8^2 \cdot h \Rightarrow h \simeq 14{,}89$

Portanto, a altura do nível da água é aproximadamente 14,89 cm.

21. a) Calculando os volumes do paralelepípedo e do cilindro, em centímetros cúbicos, temos:

- volume do paralelepípedo:

  $V_p = c \cdot \ell \cdot h = 7 \cdot 7 \cdot 10 \simeq 490 \rightarrow 490$ cm^3
- volume do cilindro:

  $V_c = \pi r^2 h = 3{,}14 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 \cdot 10 = 384{,}65 \rightarrow$

  $\rightarrow$ aproximadamente 384,65 cm^3

b) $V = \pi r^2 h \Rightarrow (490 - 384{,}65) = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot 5 \Rightarrow r^2 \simeq 6{,}71 \Rightarrow$

$\Rightarrow r \simeq 2{,}59$

Portanto, o raio mede, aproximadamente, 2,59 cm.

22. alternativa **a**

Para que seja mantido o mesmo volume, temos de diminuir o espaço entre as graduações à medida que a largura do cilindro aumenta, de modo que a área da base seja igual para todos os segmentos circulares definidos por essas graduações. Logo, a graduação deve diminuir à medida que se aproxima do centro da base.

23. Calculando o volume, temos:

$$V = \pi r^2 h \simeq 3{,}14 \cdot \left(\frac{0{,}08}{2}\right)^2 \cdot 300 \simeq 1{,}5072 \rightarrow 1{,}5072\ \text{m}^3$$

Assim, a quantidade aproximada de litros necessária é dada por:

$$\begin{array}{rcl} 1\ \text{m}^3 & \text{———} & 1\,000\ \text{L} \\ 1{,}5072\ \text{m}^3 & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = 1\,507{,}2$$

Portanto, são necessários aproximadamente 1 507,2 L de água para encher totalmente o tubo.

24. Cilindro obtido pela rotação em torno do lado:
menor (A): $r = 10$ cm; $h = 4$ cm
maior (B): $r = 4$ cm; $h = 10$ cm

a) • $V_B = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 \simeq 502{,}4 \rightarrow$ aproximadamente 502,4 cm^3
• $V_A = \pi \cdot 10^2 \cdot 4 \simeq 1\,256 \rightarrow$ aproximadamente 1 256 cm^3

b) $A_{t_A} = 2\pi r \cdot (h + r) \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \cdot (4 + 10) \simeq 879{,}2 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 879,2 cm^2

$A_{t_B} = 2\pi r \cdot (h + r) \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot (10 + 4) \simeq 351{,}68 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 351,68 cm^2

25. Temos que 6 mL = 6 000 mm^3. Assim:

$$6\,000 = \pi \cdot \left(\frac{20}{2}\right)^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{6\,000 \cdot 4}{400 \cdot \pi} \simeq 19{,}1$$

Portanto, o êmbolo se desloca aproximadamente 19,1 mm.

26. alternativa **a**

Como a capacidade da lata de tinta vermelha (V_v) é $\frac{2}{7}$ da capacidade da lata de tinta amarela (V_A), o volume de tinta amarela que sobrou na lata é dado por:

$$V_A - \underbrace{\left(2 \cdot \frac{2}{7} V_A\right)}_{\text{volume utilizado de tinta amarela}} = \frac{3}{7} V_A$$

Assim, a altura que corresponde ao volume de tinta amarela que restou na lata é dada por:

$$\begin{array}{rcl} V_A & \text{———} & 30\ \text{cm} \\ \frac{3}{7} V_A & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x \cdot V_A = 30 \cdot \frac{3}{7} \cdot V_A \Rightarrow x \simeq 12{,}86$$

Portanto, a altura do nível da tinta amarela restante na lata é aproximadamente 12,86 cm.

27. Calculando a geratriz g, em centímetros, temos:
$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow 12^2 = r^2 + 9^2 \Rightarrow r^2 = 63 \Rightarrow$
$\Rightarrow r \simeq 7{,}94 \rightarrow$ aproximadamente 7,94 cm

a) $A_\ell = \pi r g \simeq 3{,}14 \cdot 7{,}94 \cdot 12 \simeq 299{,}18 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 299,18 cm^2

b) $A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (7{,}94)^2 \simeq 197{,}96 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 197,96 cm^2

c) $\dfrac{360°}{\alpha} = \dfrac{2\pi g}{2\pi r} \Rightarrow \dfrac{360°}{\alpha} \simeq \dfrac{2\pi \cdot 12}{2\pi \cdot 7{,}94} \Rightarrow \alpha \simeq 238{,}2°$

Como 0,2° • 60' = 12', temos: 238,2° = 238°12'

28. Resposta pessoal. Possível resposta: qual é a quantidade mínima de papel a ser utilizada na confecção de cada um desses chapéus?

29. a) $g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = 2^2 + 6^2 \Rightarrow g^2 = 40 \Rightarrow g = 2\sqrt{10} \Rightarrow$
$\Rightarrow g \simeq 6{,}32 \rightarrow$ aproximadamente 6,32 cm

b) $A_t = \pi r(g + r) \simeq 3{,}14 \cdot 2 \cdot (6{,}32 + 2) \simeq 52{,}25 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 52,25 cm^2

30. Comparando as áreas totais, temos:

$$\pi \cdot \frac{6}{2} \cdot \left(5 + \frac{6}{2}\right) = \pi \cdot \frac{8}{2} \cdot \left(x + \frac{8}{2}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 24\pi = 4\pi x + 16\pi \Rightarrow 4\pi x = 8\pi \Rightarrow x = 2$$

Portanto, o valor de x é 2 cm.

31. Resolução na página **271**.

32. Resposta pessoal. Possível resposta: seja $r = 3{,}5$ cm e $h = 8$ cm, determine:

a) a medida da geratriz.
b) a área da base.
c) a área total.

33. Calculando a geratriz do cone, temos:

$$g^2 = \left(\frac{24}{2}\right)^2 + 9^2 = 225 \Rightarrow g = 15 \rightarrow 15\ \text{cm}$$

Assim:

$$A_t = \pi r(g + r) \simeq 3{,}14 \cdot \left(\frac{24}{2}\right) \cdot \left[15 + \left(\frac{24}{2}\right)\right] \simeq 1\,017{,}36$$

Portanto, a área total é aproximadamente 1 017,36 cm^2.

34. Calculando a altura e a geratriz desse cone, temos:
$h = 2d = 2 \cdot (2r) = 4r$
e
$g^2 = r^2 + h^2 = r^2 + (4r)^2 = 17r^2 \Rightarrow g \simeq 4{,}1 \cdot r$
Assim:
$A_\ell = \pi r g \Rightarrow 102{,}5\pi = 4{,}1 \cdot r^2 \pi \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$
Portanto, o raio da base é 5 cm.

35. Calculando a área lateral do cone, em cm^2, temos:

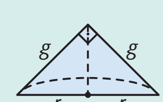
$A_\ell = \pi r g \simeq 3{,}14 \cdot \left(\dfrac{6}{2}\right) \cdot 14 \simeq 131{,}88 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 131,88 cm^2

Assim, a quantidade de papel utilizada para embalar cada sorvete é dada por: $2 \cdot A_\ell \simeq 2 \cdot 131{,}88 \simeq 263{,}76$

Portanto, a quantidade mínima de papel que será usada é aproximadamente 263,76 cm^2.

36. Sejam A_p a área total do paralelepípedo sem a circunferência de diâmetro 4 cm e A_c a área lateral do cone. Assim:
$A_p = 2 \cdot (4 \cdot 8 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 8) - 3{,}14 \cdot 2^2 =$
$= 171{,}44 \rightarrow 171{,}44\ \text{cm}^2$
e
$A_c = 3{,}14 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2^2 + 5^2}\right) = 6{,}28 \cdot \sqrt{29} =$
$= 33{,}8492 \rightarrow 33{,}8492\ \text{cm}^2$
Logo: $A_p + A_c = 171{,}44 + 33{,}8492 = 205{,}2892$
Portanto, a área total da figura é 205,2892 cm^2.

37. alternativa **e**



Rafael L. Gaion

$$(2r)^2 = g^2 + g^2 \Rightarrow 4r^2 = 2g^2 \Rightarrow r^2 = \frac{g^2}{2} \Rightarrow r = g\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, segue que a medida do ângulo central é dada por:

$$\frac{360°}{\alpha} = \frac{2\pi g}{2\pi r} \Rightarrow \frac{360°}{\alpha} = \frac{g}{g\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha = 360° \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha \simeq 255°$$

38. Resolução na página **271**.

39. Pela fórmula do volume do cilindro, temos:

$V_{\text{cilindro}} = \pi r_1^2 \cdot h_1 = \pi \cdot 5^2 \cdot 19 = 475\pi \to 475\pi \text{ cm}^3$

Assim, segue que:

$$V_{\text{cilindro}} = V_{\text{cone}} \Rightarrow 475\pi = \frac{\pi r_2^2 \cdot h_2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 475\pi = \frac{\pi \cdot \left(\frac{20}{2}\right)^2 \cdot h_2}{3} \Rightarrow h_2 \simeq 14{,}25$$

Portanto, a altura do cone é aproximadamente 14,25 cm.

40. Como o cilindro é equilátero, então $g = 2r$. Logo:

$$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow (2r)^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \left(\frac{18}{2}\right)^2 = \left(\frac{18}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 243 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h \simeq 15{,}59 \to 15{,}59 \text{ cm}$$

Assim, segue que:

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} \simeq \frac{3{,}14 \cdot \left(\frac{18}{2}\right)^2 \cdot 15{,}59}{3} \simeq 1\,321{,}72$$

Portanto, o volume do cone é aproximadamente 1 321,72 cm³.

41. a) $V_{\text{cone}} = \dfrac{\pi r^2 \cdot h}{3} \simeq \dfrac{3{,}14 \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^2 \cdot 0{,}5}{3} \simeq 0{,}52 \to$

$\to$ aproximadamente 0,52 m³

b) $V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^2 \cdot 3 \simeq 9{,}42 \to$

$\to$ aproximadamente 9,42 m³

$V_{\text{total}} = 0{,}52 + 9{,}42 = 9{,}94 \to 9{,}94 \text{ m}^3$

Assim, a capacidade do reservatório, em litros, é dada por:

$$\begin{array}{ccc} 1 \text{ m}^3 & \text{———} & 1\,000 \text{ L} \\ 9{,}94 \text{ m}^3 & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow \frac{1}{9{,}94} = \frac{1\,000}{x} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 9\,940$, ou seja, 9 940 L

Portanto, a capacidade desse reservatório é de 9 940 L.

c) • Área da base (tampa):

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^2 \simeq 3{,}14 \to$

$\to$ aproximadamente 3,14 m²

• Área lateral da parte cilíndrica:

$A_{\ell_1} = 2\pi rh \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot \left(\frac{2}{2}\right) \cdot 3 \simeq 18{,}84 \to$

$\to$ aproximadamente 18,84 m²

• Área lateral da parte cônica:

$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 + (0{,}5)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow g^2 = 1{,}25 \Rightarrow g \simeq 1{,}12$, ou seja, aproximadamente 1,12 m

$A_{\ell_2} = \pi rg = 3{,}14 \cdot \left(\frac{2}{2}\right) \cdot 1{,}12 \simeq 3{,}52 \to$

$\to$ aproximadamente 3,52 m²

Assim, a área da superfície externa é dada por:

$A = A_b + A_{\ell_1} + A_{\ell_2} = 3{,}14 + 18{,}84 + 3{,}52 = 25{,}5 \to 25{,}5 \text{ m}^2$

42. alternativa **b**

• volume de água no recipiente **I**: $\dfrac{1}{2}V_{\text{I}} = \dfrac{A_b \cdot h}{2}$

• volume do recipiente **II**: $V_{\text{II}} = \dfrac{A_b \cdot h}{3}$

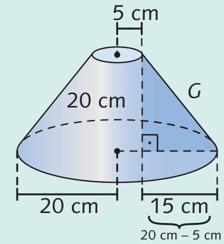
Temos que:

• $\dfrac{A_b \cdot h}{2} > \dfrac{A_b \cdot h}{3}$

• $\dfrac{A_b \cdot h}{2} - \dfrac{A_b \cdot h}{3} = \dfrac{\overbrace{A_b \cdot h}^{V_{\text{I}}}}{6} = \dfrac{1}{6} \cdot V_{\text{I}}$

Portanto, o volume do recipiente **II** será totalmente preenchido e sobrará um volume correspondente a $\dfrac{1}{6}$ do volume no recipiente **I**.

43. a)



$G^2 = 20^2 + 15^2 \Rightarrow G^2 = 625 \Rightarrow G = 25 \to 25 \text{ cm}$

• $A_\ell = \pi G(r + r')$

$A_\ell \simeq 3{,}14 \cdot 25 \cdot (20 + 5) \simeq 1\,962{,}5 \to$

$\to$ aproximadamente 1 962,5 cm²

• $A_B = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot 20^2 \simeq 1\,256 \to$

$\to$ aproximadamente 1 256 cm²

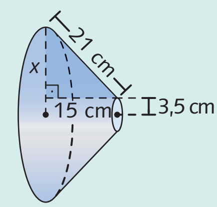
• $A_b = \pi r'^2 \simeq 3{,}14 \cdot 5^2 \simeq 78{,}5 \to$

$\to$ aproximadamente 78,5 cm²

• $A_t = A_\ell + A_B + A_b \simeq 1\,962{,}5 + 1\,256 + 78{,}5 \simeq 3\,297$

Portanto, a área total é aproximadamente 3 297 cm².

b)



Ilustrações: Rafael L. Gaion

$21^2 = 15^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 216 \Rightarrow x \simeq 14{,}7$

$r = x + 3{,}5 \simeq 14{,}7 + 3{,}5 \simeq 18{,}2 \to 18{,}2 \text{ cm}$

• $A_\ell = \pi G(r + r')$

$A_\ell \simeq 3{,}14 \cdot 21 \cdot (18{,}2 + 3{,}5) \simeq 1\,430{,}9 \to$

$\to$ aproximadamente 1 430,9 cm²

• $A_B = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (18{,}2)^2 \simeq 1\,040{,}09 \to$

$\to$ aproximadamente 1 040,09 cm²

• $A_b = \pi r'^2 \simeq 3{,}14 \cdot (3{,}5)^2 \simeq 38{,}46 \to$

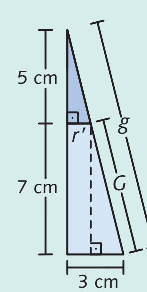
$\to$ aproximadamente 38,46 cm²

• $A_t = A_\ell + A_B + A_b$

$A_t \simeq 1\,430{,}9 + 1\,040{,}09 + 38{,}46 \simeq 2\,509{,}45$

Portanto, a área total é aproximadamente 2 509,45 cm².

44.



Rafael L. Gaion

a) • $\dfrac{3}{r'} = \dfrac{\overbrace{12}^{5+7}}{5} \Rightarrow 12r' = 15 \Rightarrow r' = 1{,}25$

• $G^2 = 7^2 + (3 - 1{,}25)^2 \Rightarrow G^2 \simeq 52{,}06 \Rightarrow G \simeq 7{,}22$

Portanto $r' = 1{,}25$ cm e G é aproximadamente 7,22 cm.

b) $A_\ell = \pi G(r + r') = 3{,}14 \cdot 7{,}22 \cdot (3 + 1{,}25) \simeq 96{,}35 \to$

$\to$ aproximadamente 96,35 cm²

c) Falsa, pois a reunião da área total do cone menor com a do tronco de cone é maior que a área total do cone maior. Isso ocorre porque adicionamos a área da base do cone menor e a área da base menor do tronco de cone, e essas duas bases não fazem parte da superfície externa do cone maior.

45. a) $r = r' \cdot 3 \Rightarrow r = 2 \cdot 3 = 6 \rightarrow 6$ cm

$G = r \cdot 3 \Rightarrow g = 6 \cdot 3 = 18 \rightarrow 18$ cm

- $A_\ell = \pi G(r + r') \Rightarrow A_\ell = \pi \cdot 18 \cdot (6 + 2) \simeq 452{,}16 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 452,16 cm^2
- $A_B = \pi r^2 \Rightarrow A_B = \pi \cdot 6^2 \simeq 113{,}04 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 113,04 cm^2
- $A_b = \pi r'^2 \Rightarrow A_b = \pi \cdot 2^2 \simeq 12{,}56 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 12,56 cm^2
- $A_t = A_\ell + A_B + A_b$
$A_t \simeq 452{,}16 + 113{,}04 + 12{,}56 \simeq 577{,}76$
Logo, a área total é aproximadamente 577,76 cm^2.

b) $r' = \dfrac{r}{3} \Rightarrow r' = \dfrac{3}{3} = 1 \rightarrow 1$ cm

$G = r \cdot 3 \Rightarrow G = 3 \cdot 3 = 9 \rightarrow 9$ cm

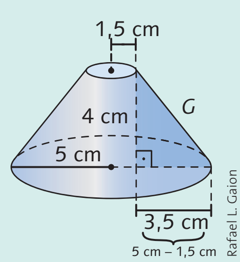
- $A_\ell = \pi G(r + r') \Rightarrow$
$\Rightarrow A_\ell = \pi \cdot 9 \cdot (3 + 1) \simeq 113{,}04 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 113,04 cm^2
- $A_B = \pi r^2 \Rightarrow A_B = \pi \cdot 3^2 \simeq 28{,}26 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 28,26 cm^2
- $A_b = \pi r'^2 \Rightarrow A_b = \pi \cdot 1^2 \simeq 3{,}14 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 3,14 cm^2
- $A_t = A_\ell + A_B + A_b$
$A_t \simeq 113{,}04 + 28{,}26 + 3{,}14 \simeq 144{,}44$
Portanto, a área total é aproximadamente 144,44 cm^2.

c) $r = \dfrac{G}{3} \Rightarrow r = \dfrac{27}{3} = 9 \rightarrow 9$ cm

$r' = \dfrac{r}{3} \Rightarrow r' = \dfrac{9}{3} = 3 \rightarrow 3$ cm

- $A_\ell = \pi G(r + r') \Rightarrow$
$\Rightarrow A_\ell = \pi \cdot 27 \cdot (9 + 3) \simeq 1\,017{,}36 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 1 017,36 cm^2
- $A_B = \pi r^2 \Rightarrow A_B = \pi \cdot 9^2 \simeq 254{,}34 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 254,34 cm^2
- $A_b = \pi r'^2 \Rightarrow A_b = \pi \cdot 3^2 \simeq 28{,}26 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 28,26 cm^2
- $A_t = A_\ell + A_B + A_b$
$A_t \simeq 1\,017{,}36 + 254{,}34 + 28{,}26 \simeq 1\,299{,}96$
Portanto, a área total é aproximadamente 1 299,96 cm^2.

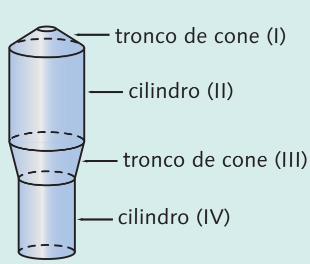
46.



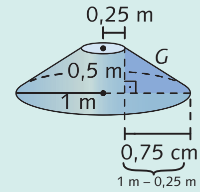
$G^2 = 4^2 + (3{,}5)^2 \Rightarrow G^2 = 28{,}25 \Rightarrow G \simeq 5{,}32 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 5,32 cm

$A_\ell = \pi G(r + r') \simeq 3{,}14 \cdot 5{,}32 \cdot (5 + 1{,}5) \simeq 108{,}58 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 108,58 cm^2

47.



- tronco de cone (I)



$G^2 = (0{,}5)^2 + (0{,}75)^2 \Rightarrow G \simeq 0{,}9$ m

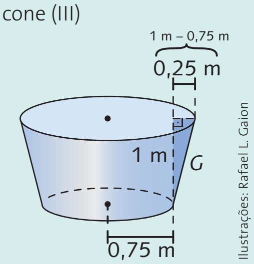
$A_{\ell_I} = \pi G(r + r') \simeq 3{,}14 \cdot 0{,}9 \cdot (1 + 0{,}25) \simeq 3{,}53 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 3,53 m^2

$A_{b_I} = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot (0{,}25)^2 \simeq 0{,}2 \rightarrow$ aproximadamente 0,2 m^2

- cilindro (II)

$A_{\ell_{II}} = 2\pi rh = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 2{,}5 = 15{,}7 \rightarrow 1{,}57$ m^2

- tronco de cone (III)



$G^2 = 1^2 + (0{,}25)^2 \Rightarrow G \simeq 1{,}03 \rightarrow 1{,}03$ m

$A_{\ell_{III}} = \pi G(r + r') \simeq 3{,}14 \cdot 1{,}03 \cdot (1 + 0{,}75) \simeq 5{,}66 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 5,66 m^2

- cilindro (IV)

$A_{\ell_{IV}} = 2\pi rh = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}75 \cdot 2 = 9{,}42 \rightarrow 9{,}42$ m^2

$A_{b_{IV}} = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot (0{,}75)^2 \simeq 1{,}77 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 1,77 m^2

A área da superfície é dada por:

$A = A_{\ell_I} + A_{b_I} + A_{\ell_{II}} + A_{\ell_{III}} + A_{\ell_{IV}} + A_{b_{IV}} \simeq 3{,}53 + 0{,}2 +$
$+ 15{,}7 + 5{,}66 + 9{,}42 + 1{,}77 = 36{,}28 \rightarrow 36{,}28$ m^2

Segue que $\dfrac{36{,}28}{7} \simeq 5{,}18$.

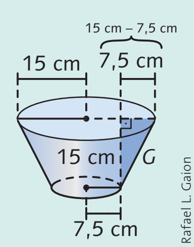
Assim, serão necessários aproximadamente 5,18 litros de tinta.

48. Resposta pessoal. Possível resposta: seja $r = 5$ cm, $r' = 3$ cm e $h_t = 8$ cm. Calcule:

a) a geratriz do tronco.

b) a área total do tronco.

49.



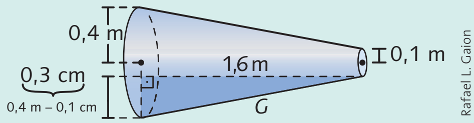
$G^2 = (15)^2 + (7{,}5)^2 \Rightarrow G^2 = 281{,}25 \Rightarrow G \simeq 16{,}77$ cm

- $A_\ell = \pi G(r + r') =$
$= 3{,}14 \cdot 16{,}77 \cdot (15 + 7{,}5) \simeq 1\,184{,}8 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 1 184,8 cm^2
- $A_b = \pi r'^2 = 3{,}14 \cdot (7{,}5)^2 \simeq 176{,}62 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 176,62 cm^2

Assim, a área da superfície externa é dada por:

$A = A_\ell + A_b \simeq 1\,184{,}8 + 176{,}62 \simeq 1\,361{,}42 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 1 361,42 cm^2

50.



$G^2 = (1{,}6)^2 + (0{,}3)^2 \Rightarrow G^2 = 2{,}65 \Rightarrow G \simeq 1{,}63 \rightarrow 1{,}63$ m

Assim, a quantidade de tecido utilizada é dada por:

$A_\ell = \pi G(r + r') \simeq 3{,}14 \cdot 1{,}63 \cdot (0{,}4 + 0{,}1) \simeq 2{,}56 \rightarrow$

$\rightarrow$ aproximadamente 2,56 m^2

51. Resolução na página **271**.

52. Como a medida da área é 40 cm^2, temos:

$$40 = \frac{(12 + 8) \cdot h}{2} \Rightarrow h = 4 \rightarrow 4 \text{ cm}$$

a) $V = \dfrac{\pi h_t}{3}(r^2 + r'r + r'^2) \Rightarrow V = \dfrac{\pi \cdot 4}{3} \cdot [12^2 + 8 \cdot 12 + 8^2] \Rightarrow$

$\Rightarrow V \simeq 1272{,}75 \rightarrow$ aproximadamente 1 272,75 cm^3

b) • cilindro

$V = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 \simeq 401{,}92 \rightarrow$

$\rightarrow$ aproximadamente 401,92 cm^3

• cone

$V = \dfrac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow V = \dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 4}{3} \simeq 66{,}99 \rightarrow$

$\rightarrow$ aproximadamente 66,99 cm^3

$V_{cilindro} + V_{cone} \simeq 401{,}92 + 66{,}99 \simeq 468{,}91 \rightarrow$

$\rightarrow$ aproximadamente 468,91 cm^3

53. $\begin{matrix} 1 \text{ m}^3 & \text{———} & 1\,000 \text{ L} \\ V & \text{———} & 440 \end{matrix} \Rightarrow \dfrac{1}{V} = \dfrac{1\,000}{440} \Rightarrow V = 0{,}44 \rightarrow 0{,}44$ m^3

$V = \dfrac{\pi h_t}{3}(r^2 + r \cdot r' + r'^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}44 = \dfrac{3{,}14 \cdot 1{,}10}{3} \cdot \left[\left(\dfrac{1{,}10}{2}\right)^2 + \dfrac{1{,}10}{2} \cdot r' + r'^2\right] \Rightarrow$

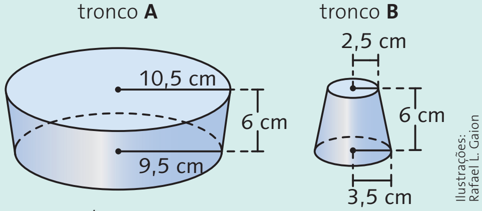
$\Rightarrow r'^2 + 0{,}55r' - 0{,}08 = 0 \begin{cases} r_1' \simeq 0{,}12 \\ r_2' \simeq -0{,}67 \quad (\text{não convém}) \end{cases}$

Portanto, o raio da base menor é, aproximadamente, 0,12 m.

54. Resposta pessoal. Possível resposta: de acordo com as medidas indicadas, determine o volume do tronco de cone reto.

55. O volume da forma é dado pela diferença entre os volumes de dois troncos de cone.

tronco **A** tronco **B**



• $V_A = \dfrac{\pi h_t}{3}(r^2 + r \cdot r' + r'^2)$

$V_A \simeq \dfrac{3{,}14 \cdot 6}{3} \cdot [(10{,}5)^2 + 10{,}5 \cdot 9{,}5 + (9{,}5)^2]$

$V_A \simeq 1\,885{,}57 \rightarrow$ aproximadamente 1 885,57 cm^3

• $V_B \simeq \dfrac{\pi h_t}{3}(r^2 + r \cdot r' + r'^2)$

$V_B \simeq \dfrac{3{,}14 \cdot 6}{3} \cdot [(3{,}5)^2 + 3{,}5 \cdot 2{,}5 + (2{,}5)^2]$

$V_B \simeq 171{,}13 \rightarrow$ aproximadamente 171,13 cm^3

Segue que:

$V = V_A - V_B \simeq 1\,885{,}57 - 171{,}13 \simeq 1\,714{,}44 \rightarrow$

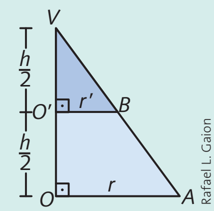
$\rightarrow$ aproximadamente 1 714,44 cm^3

Assim, a capacidade aproximada da forma, em litros, é dada por:

$\begin{matrix} 1 \text{ L} & \text{———} & 1\,000 \text{ cm}^3 \\ x & \text{———} & 1\,714{,}44 \text{ cm}^3 \end{matrix} \Rightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{1\,000}{1\,714{,}44} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \simeq 1{,}71 \rightarrow 1{,}71$ L

56. Considere a figura abaixo:



$\triangle VOA \sim \triangle VO'B \Rightarrow \dfrac{h}{r} = \dfrac{\frac{h}{2}}{r'} \Rightarrow r' = \dfrac{r}{2}$

• $V_{cone} = \dfrac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2}}{3} = \dfrac{\pi r^2 h}{24}$

• $V_{tronco} = \dfrac{\pi h_t}{3}(r^2 + r'r + r'^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{tronco} = \dfrac{\pi \cdot \frac{h}{2}}{3} \cdot \left[r^2 + \dfrac{r}{2} \cdot r + \left(\dfrac{r}{2}\right)^2\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{tronco} = \dfrac{7\pi r^2 h}{24}$

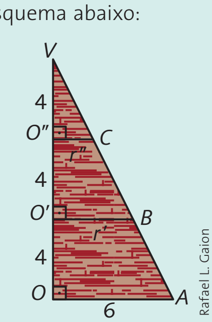
$$\frac{V_{cone}}{V_{tronco}} = \frac{\frac{\pi r^2 h}{24}}{\frac{7\pi r^2 h}{24}} = \frac{1}{7}$$

Portanto, a razão entre os volumes do cone e do tronco de cone é $\dfrac{1}{7}$.

57. Resolução na página **272**.

58. Resolução na página **272**.

59. Considere o esquema abaixo:



$\triangle VOA \sim \triangle VO'B \Rightarrow \dfrac{12}{6} = \dfrac{8}{r'} \Rightarrow r' = 4$ cm

$\triangle VOA \sim \triangle VO''C \Rightarrow \dfrac{12}{6} = \dfrac{4}{r''} \Rightarrow r'' = 2$ cm

Volume do cone

$V_{cone} = \dfrac{\pi r''^2 h}{3} \Rightarrow V_{cone} = \dfrac{\pi \cdot 2^2 \cdot 4}{3} \simeq 16{,}75 \rightarrow$

$\rightarrow$ aproximadamente 16,75 cm^3

tronco menor

$V = \dfrac{\pi \cdot 4}{3} \cdot (4^2 + 2 \cdot 4 + 2^2) \simeq 117{,}23 \rightarrow$

$\rightarrow$ aproximadamente 117,23 cm^3

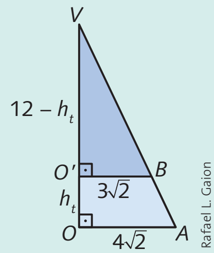
tronco maior

$V = \dfrac{\pi \cdot 4}{3} \cdot (6^2 + 4 \cdot 6 + 4^2) \simeq 318{,}19 \rightarrow$

$\rightarrow$ aproximadamente 318,19 cm^3

60. $A_B = 32\pi \Rightarrow \pi r^2 = 32\pi \Rightarrow r^2 = 32 \Rightarrow r = 4\sqrt{2} \rightarrow 4\sqrt{2}$ cm

$A_b = 18\pi \Rightarrow \pi r'^2 = 18\pi \Rightarrow r'^2 = 18 \Rightarrow r' = 3\sqrt{2} \rightarrow 3\sqrt{2}$ cm



$$\triangle VOA \sim \triangle VO'B \Rightarrow \frac{12}{4\sqrt{2}} = \frac{12 - h_t}{3\sqrt{2}} \Rightarrow h_t = 3 \rightarrow 3 \text{ cm}$$

$$V = \frac{\pi h_t}{3}\left(r^2 + r'r + r'^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi \cdot 3}{3} \cdot \left[\left(4\sqrt{2}\right)^2 + 3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} + \left(3\sqrt{2}\right)^2\right] = 74\pi$$

Portanto, o volume do tronco de cone é 74π cm³.

61. a) $V = \frac{4\pi r^3}{3} \simeq \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 15^3}{3} \simeq 14\,130 \rightarrow$

$\rightarrow$ aproximadamente 14 130 mm³

b) $C = 2\pi r \Rightarrow 14\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 7$ cm

$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 7^3}{3} \simeq 1436{,}03 \rightarrow$

$\rightarrow$ aproximadamente 1 436,03 cm³

c) $V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot \left(\frac{11}{2}\right)^3}{3} \simeq 696{,}56 \rightarrow$

$\rightarrow$ aproximadamente 696,56 cm³

d) Temos que:

$V_{cubo} = a^3 \Rightarrow 343 = a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{343} \Rightarrow a = 7$ cm

Como a esfera está inscrita no cubo:

$r = \frac{a}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5 \rightarrow 3{,}5$ cm

Assim, o volume da esfera é dado por:

$V = \frac{4\pi r^3}{3} \simeq \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot (3{,}5)^3}{3} \simeq 179{,}50 \rightarrow$

$\rightarrow$ aproximadamente 179,50 cm³

62. O volume da parte da cobertura é dado pela diferença entre o volume de uma semiesfera de diâmetro 3 m $\left(V_e\right)$ e o de uma de diâmetro 2,92 m $\left(V_i\right)$. Assim, segue que:

$$V_e - V_i = \frac{\frac{4\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3}{3}}{2} - \frac{\frac{4\pi \cdot \left(\frac{2{,}92}{2}\right)^3}{3}}{2}$$

$$V_e - V_i \simeq \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot (1{,}5)^3 - 4 \cdot 3{,}14 \cdot (1{,}46)^3}{6} \simeq 0{,}55$$

Portanto, o volume da parte da cobertura é, aproximadamente, 0,55 m³.

63. Resolução na página **272**.

64. alternativa **a**

Sejam A e V a área e o volume da esfera, respectivamente. Assim:

$A = 81\pi \Rightarrow \pi r^2 = 81\pi \Rightarrow r^2 = 81 \Rightarrow r = 9$ dm²

$V = \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow V = \frac{4\pi \cdot 9^3}{3} = 972\pi$

Portanto, o volume da esfera é 972π dm³.

65. Sejam V_A e V_B o volume das esferas A e B, respectivamente. Assim:

$$V_A = \frac{1}{8} \cdot V_B \Rightarrow \frac{4\pi r_A^3}{3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi r_B^3}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi \cdot 5^3}{3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi r_B^3}{3} \Rightarrow r_B^3 = 1000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_B = 10$$

Portanto, o raio da esfera B é 10 cm.

66. Sejam V_{cone}, $V_{cilindro}$ e $V_{semiesfera}$ o volume do cone, do cilindro e da semiesfera, respectivamente. Assim:

- $V_{cone} = \frac{3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 5}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 5^3}{3} = \frac{392{,}5}{3} \rightarrow \frac{392{,}5}{3}$ cm³
- $V_{cilindro} = 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 5 = 3{,}14 \cdot 5^3 = 392{,}5 \rightarrow 392{,}5$ cm³
- $V_{semiesfera} = \frac{\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 5^3}{3}}{2} = \frac{785}{6} \rightarrow \frac{785}{6}$ cm³

$$V_{cone} + V_{cilindro} + V_{semiesfera} = \frac{392{,}5}{3} + 392{,}5 + \frac{785}{6} \simeq 654{,}167$$

Portanto, o volume do sólido é aproximadamente 654,167 cm³.

67. Volume de 8 esferas:

$V = 8 \cdot \frac{4\pi(1{,}2)^3}{3} \simeq 57{,}88 \rightarrow$ aproximadamente 57,88 cm³

Como 400 mL = 400 cm³ e o prisma tem a base com a forma de um quadrado de lado 5 cm, temos:

$$\underbrace{57{,}88}_{\substack{\text{volume das}\\ \text{8 esferas}}} + \underbrace{400}_{\substack{\text{volume de}\\ \text{água}}} = 5 \cdot 5 \cdot h \Rightarrow h \simeq 18{,}32$$

Logo, a altura atingida foi aproximadamente 18,32 cm.

68. Sejam V_A e V_B o volume das esferas A e B, respectivamente. Temos:

a) $V_B = \frac{4\pi r_B^3}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_B = \frac{4\pi \cdot \left(\frac{110}{100} r_A\right)^3}{3} = \frac{133{,}1}{100} \cdot \frac{4\pi r_A^3}{3} =$$

$$= \frac{133{,}1}{100} \cdot V_A$$

O volume da esfera B será 33,1% maior do que o da esfera A.

b) $V_B = \frac{4\pi r_B^3}{3} \Rightarrow V_B = \frac{4\pi(2r_A)^3}{3} = \frac{4\pi\left(\frac{200}{100} r_A\right)^3}{3} =$

$$= \frac{800}{100} \cdot \frac{4\pi r_A^3}{3} = \frac{800}{100} \cdot V_A$$

O volume da esfera B será 800% maior do que o da esfera A.

69. alternativa **b**

O volume de perfume no frasco é dado por:

$$V_p = \frac{1}{4} \cdot V_{esfera} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4\pi r^3}{3} =$$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 4^3}{3} \simeq 66{,}99 \rightarrow$ aproximadamente 66,99 cm³

Como 66,99 cm³ = 66,99 mL, segue que:

$$\frac{66{,}99}{2} \simeq 33{,}49$$

Logo, o maior período de tempo é 31 dias.

70. alternativa **b**

Seja r o raio da boca dos recipientes e h a altura dos líquidos. V_1 é o volume do cone de raio $\frac{r}{2}$ e altura h, V_2 é o volume da semiesfera de raio r e V_3 é o volume do cone de raio r e altura h. Assim:

- $V_1 = \dfrac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot h}{3} = \dfrac{\pi r^2 h}{12}$

- $V_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{2\pi r^3}{3}$

- $V_3 = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

Note que a altura do líquido corresponde ao raio da semiesfera, ou seja, $r = h$. Logo:

$$\underbrace{\frac{\pi r^3}{12}}_{V_1} < \underbrace{\frac{\pi r^3}{3}}_{V_3} < \underbrace{\frac{2\pi r^3}{3}}_{V_2}$$

71. alternativa **c**

Inicialmente, calculamos o volume da esfera:

$V_s = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 4^3}{3} = 256 \rightarrow 256\ \text{cm}^3$

Assim, o volume do porta-joias é:

$V_p = 1000 - 256 = 744 \rightarrow 744\ \text{cm}^3$

Logo, a massa do porta-joias é dada por:

$m = dv \Rightarrow m = 0{,}85 \cdot 744 = 632{,}4$

Portanto, a massa aproximada é 632 gramas.

72. alternativa **a**

- Volume do cilindro (V_c):

  $V_c = \pi r^2 h = 3 \cdot 2^2 \cdot 4 = 48 \rightarrow 48\ \text{m}^3$

- Volume da esfera (V_e):

  $V_e = \dfrac{4\pi r^3}{3} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2^3}{3} = 32 \rightarrow 32\ \text{m}^3$

  Assim, a capacidade do tanque é dada por:

  $V_c + V_e = 48 + 32 = 80 \rightarrow 80\ \text{m}^3$

73. Seja V o volume da joia. Assim:

$V = \dfrac{4 \cdot 3{,}14 \cdot (1{,}5)^3}{3} = 14{,}13$

Logo, pela definição de densidade, temos:

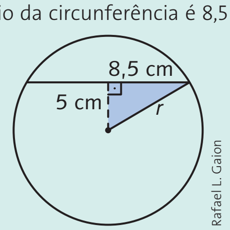
$d = \dfrac{229}{14{,}13} \simeq 16{,}2 < 19{,}3$

Portanto, a joia não é maciça.

- A joia afunda, pois a densidade é maior do que a da água.

74. $C = 2\pi r \Rightarrow 17\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 8{,}5 \rightarrow 8{,}5$ cm

Portanto, o raio da circunferência é 8,5 cm.



Segue que: $r^2 = 5^2 + (8{,}5)^2 \Rightarrow r^2 = 97{,}25 \Rightarrow r \simeq 9{,}86$

Portanto, o raio da esfera é aproximadamente 9,86 cm.

a) $A = 4\pi r^2 \simeq 4 \cdot 3{,}14 \cdot (9{,}86)^2 \simeq 1\,221{,}08 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 1 221,08 cm^2

b) $A_c = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (9{,}86)^2 \simeq 305{,}27 \rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 305,27 cm^2

75. $\dfrac{V}{2} = 18\pi \Rightarrow \dfrac{\frac{4\pi r^3}{3}}{2} = 18\pi \Rightarrow \dfrac{2\pi r^3}{3} = 18\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3 \rightarrow 3$ cm

Assim, a área da superfície da semiesfera é dada por:

$\dfrac{A_{\text{esfera}}}{2} + A_{\text{círculo}} =$

$= \dfrac{4\pi r^2}{2} + \pi r^2 \simeq \dfrac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 3^2}{2} + 3{,}14 \cdot 3^2 \simeq 84{,}78 \rightarrow$

$\rightarrow$ aproximadamente 84,78 cm^2

76. Sejam:

S_A: área da superfície da esfera A

S_B: área da superfície da esfera B

a) $S_B = 4\pi r_B^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_B = 4\pi\left(\dfrac{130}{100} r_A\right)^2 = \dfrac{169}{100} \cdot 4\pi r_A^2 = \dfrac{169}{100} \cdot S_A$

A área da superfície da esfera B será 69% maior do que a da esfera A.

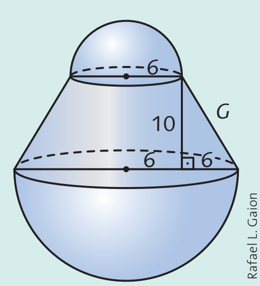
b) $S_B = 4\pi r_B^2 \Rightarrow S_B = 4\pi \cdot (2r_A)^2 = 4\pi\left(\dfrac{200}{100} r_A\right)^2 =$

$= \dfrac{400}{100} \cdot 4\pi r_A^2 = \dfrac{400}{100} \cdot S_A$

A área da superfície da esfera B será 400% maior do que a da esfera A.

77. Resposta pessoal. Possível resposta: calcule a área da superfície da esfera inscrita no cubo cuja aresta mede 5 cm.

78.
- Semiesfera menor:
  $2A = 4\pi r'^2 \Rightarrow 2A = 4\pi \cdot 6^2 \Rightarrow A \simeq 226{,}08 \rightarrow$
  $\rightarrow$ aproximadamente 226,08 cm^2
- Semiesfera maior:
  $2A = 4\pi r^2 \Rightarrow 2A = 4\pi \cdot 12^2 \Rightarrow A \simeq 904{,}32 \rightarrow$
  $\rightarrow$ aproximadamente 904,32 cm^2
- Tronco de cone:



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$G^2 = 10^2 + 6^2 \Rightarrow G^2 = 136 \Rightarrow G \simeq 11{,}66$

$A_\ell = \pi G(r + r') \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell \simeq \pi \cdot 11{,}66 \cdot (12 + 6) \simeq 659{,}02 \rightarrow$

$\rightarrow$ aproximadamente 659,02 cm^2

$A_{\text{menor}} + A_{\text{maior}} + A_\ell \simeq 226{,}08 + 904{,}32 + 659{,}02 = 1789{,}42$

Portanto, a área do sólido é, aproximadamente, 1789,42 cm^2.

79. Seja A a área da superfície da esfera.

a) Temos:

$A \simeq 4 \cdot 3{,}14 \cdot (4{,}7)^2 \simeq 277{,}45$

Logo, a área da esfera é aproximadamente 277,45 cm².

b) Temos:

$80\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 40$

Assim:

$A \simeq 4 \cdot 3{,}14 \cdot (40)^2 \simeq 20\,096$

Logo, a área da esfera é aproximadamente 20 096 mm².

80. Seja r a medida do raio da esfera. Assim:

$2\,034 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot r^2 \Rightarrow r^2 = \dfrac{2\,034}{12{,}56} \Rightarrow r \simeq 12{,}72$

Portanto, o raio da esfera mede, aproximadamente, 12,72 cm.

81.
- diâmetro 9 cm

$A = 4\pi r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot \left(\dfrac{9}{2}\right)^2 = 254{,}34 \rightarrow 254{,}34 \text{ cm}^2$

$254{,}34 \text{ cm}^2 \rightarrow 0{,}025434 \text{ m}^2$

custo: $C = 7{,}35 \cdot A = 7{,}35 \cdot 0{,}025434 \simeq 0{,}19 \rightarrow$ R\$ 0,19

- diâmetro 12 cm

$A = 4\pi r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot \left(\dfrac{12}{2}\right)^2 = 452{,}16 \rightarrow 452{,}16 \text{ cm}^2$

$452{,}16 \text{ cm}^2 \rightarrow 0{,}045216 \text{ m}^2$

custo: $C = 7{,}30 \cdot A = 7{,}30 \cdot 0{,}045216 \simeq 0{,}33 \rightarrow$ R\$ 0,33

- diâmetro 15 cm

$A = 4\pi r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot \left(\dfrac{15}{2}\right)^2 = 706{,}50 \rightarrow 706{,}50 \text{ cm}^2$

$706{,}50 \text{ cm}^2 \rightarrow 0{,}07065 \text{ m}^2$

custo: $C = 6{,}84 \cdot A = 6{,}84 \cdot 0{,}07065 \simeq 0{,}48 \rightarrow$ R\$ 0,48

- diâmetro 18 cm

$A = 4\pi r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot \left(\dfrac{18}{2}\right)^2 = 1\,017{,}36 \rightarrow 1\,017{,}36 \text{ cm}^2$

$1\,017{,}36 \text{ cm}^2 \rightarrow 0{,}101736 \text{ m}^2$

custo: $C = 6{,}50 \cdot A = 6{,}50 \cdot 0{,}101736 \simeq 0{,}66 \rightarrow$ R\$ 0,66

a) Bola com 9 cm de diâmetro.

b) Bola com 18 cm de diâmetro.

82. alternativa **a**

$A_{total} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi \rightarrow 100\pi \text{ m}^2$

Assim, a área do furo é dada por:

$$\begin{array}{ccc} 100\,\pi & \text{———} & 360° \\ x & \text{———} & 72° \end{array} \Rightarrow \frac{100\pi}{x} = \frac{360°}{72°}$$

$\Rightarrow x = 20\pi$

Portanto, a área do furo é 20π m².

83. alternativa **b**

Tanto a projeção de Mercator quanto a projeção de Gall-Peters têm os paralelos e os meridianos perpendiculares, o que é uma característica das projeções cilíndricas.

84. verdadeira: **a**, **c**, **e**; falsa: **b**, **d**, **f**

a) Verdadeira.

b) Falsa, pois o alongamento é no sentido norte-sul e o achatamento é no sentido leste-oeste.

c) Verdadeira.

d) Falsa, pois as formas são mantidas, e não as áreas.

e) Verdadeira.

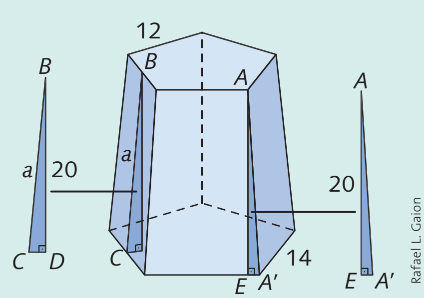
f) Falsa, pois as deformações aumentam quando se aproximam da linha do Equador.

85. alternativa **c**

Observe que as projeções de Mercator e Peters são cilíndricas devido à perpendicularidade dos paralelos e dos meridianos. Além disso, é uma projeção horizontal, por isso a projeção apresentada na alternativa **c** é a mais adequada.

Resoluções do capítulo **2**

111.



- Pelo teorema de Pitágoras, no $\triangle BCD$:

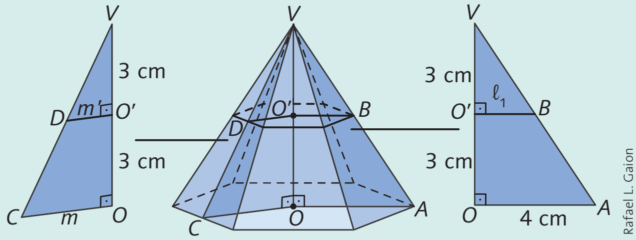
$a^2 = 20^2 + (10 - 8)^2 \Rightarrow a^2 = 404 \Rightarrow a = 2\sqrt{101} \rightarrow 2\sqrt{101}$ cm

- Pelo teorema de Pitágoras, no $\triangle AA'E$:

$$(AA')^2 = a^2 + \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{2}\right)^2 \Rightarrow (AA')^2 \simeq \left(2\sqrt{101}\right)^2 + \left(\frac{14-12}{2}\right)^2 \Rightarrow (AA')^2 \simeq 405 \Rightarrow AA' \simeq 20{,}12 \rightarrow \text{aproximadamente } 20{,}12 \text{ cm}$$

$$A_t = A_\ell + A_B + A_b \Rightarrow A_t \simeq 5 \cdot \frac{(12+14) \cdot 2\sqrt{101}}{2} + 5 \cdot \frac{14 \cdot 10}{2} + 5 \cdot \frac{12 \cdot 8}{2} \Rightarrow A_t \simeq 1\,896{,}5 \rightarrow \text{aproximadamente } 1\,896{,}5 \text{ cm}^2$$

112.



$\Delta VOA \sim \Delta VO'B \Rightarrow \dfrac{OA}{VO} = \dfrac{O'B}{VO'} \Rightarrow \dfrac{4}{6} = \dfrac{\ell_1}{\frac{6}{2}} \Rightarrow \ell_1 = 2 \rightarrow 2$ cm

$m = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \rightarrow 2\sqrt{3}$ cm

$m' = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \rightarrow \sqrt{3}$ cm

Pelo teorema de Pitágoras, no $\triangle VOC$:

$(VC)^2 = 6^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow (VC)^2 = 48 \Rightarrow$

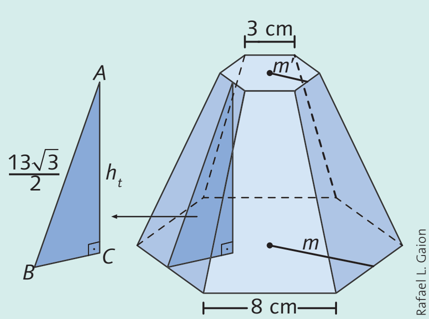
$\Rightarrow VC = 4\sqrt{3} \rightarrow 4\sqrt{3}$ cm

$\triangle VOC \sim \triangle VO'D \Rightarrow \dfrac{VC}{VO} = \dfrac{VD}{VO'} \Rightarrow \dfrac{4\sqrt{3}}{6} = \dfrac{VD}{3} \Rightarrow VD = 2\sqrt{3} \rightarrow 2\sqrt{3}$ cm

$A_t = A_\ell + A_B + A_b \Rightarrow A_t = 6 \cdot \dfrac{(2+4)\cdot\left(4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\right)}{2} + \dfrac{6 \cdot 4^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{6 \cdot 2^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 66\sqrt{3} \rightarrow 66\sqrt{3}$ cm^2

116.



$A_b = \dfrac{6 \cdot 3^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{27\sqrt{3}}{2} \rightarrow \dfrac{27\sqrt{3}}{2}$ cm^2

$A_B = \dfrac{6 \cdot 8^2\sqrt{3}}{4} = 96\sqrt{3} \rightarrow 96\sqrt{3}$ cm^2

$m = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \rightarrow 4\sqrt{3}$ cm

$m' = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm

Pelo teorema de Pitágoras, no $\triangle ABC$:

$\left(\dfrac{13\sqrt{3}}{2}\right)^2 = h_t^2 + \left(4\sqrt{3} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow h_t^2 = 108 \Rightarrow h_t = 6\sqrt{3} \rightarrow 6\sqrt{3}$ cm

$V = \dfrac{h_t}{3} = \left(\sqrt{A_b \cdot A_B} + A_b + A_B\right) \Rightarrow V = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\sqrt{\dfrac{27\sqrt{3}}{2} \cdot 96\sqrt{3}} + \dfrac{27\sqrt{3}}{2} + 96\sqrt{3}\right) = 873 \rightarrow 873$ cm^3

3. Seja A a medida de área desejada.

a) Temos:

$$A = \pi \cdot \left[\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 2^2\right] = 5\pi \simeq 15{,}7$$

Portanto, a área desejada é aproximadamente 15,7 cm².

b) Temos:

$$A = \pi \cdot (3 + 0{,}8 + 1{,}5)^2 - \pi \cdot \left[(0{,}8 + 1{,}5)^2 - (1{,}5)^2\right] = 25{,}05\pi \simeq 78{,}657$$

Portanto, a área desejada é aproximadamente 78,657 cm².

c) Temos:

$$A = \frac{95}{360} \cdot \pi \cdot \left[\left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2} - 0{,}4\right)^2\right] + \frac{360 - 95}{360} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2}{2} - 0{,}4\right)^2 \simeq 0{,}434\pi \simeq 1{,}363$$

Portanto, a área desejada é aproximadamente 1,363 m².

d) Temos:

$$A = \frac{45}{360} \cdot \pi \cdot \left[\left(\frac{10}{2}\right)^2 - (1 + 1{,}5)^2\right] + \frac{360 - 45}{360} \cdot \pi \cdot \left[(1 + 1{,}5)^2 - (1{,}5)^2\right] \simeq 5{,}844\pi \simeq 18{,}350$$

Portanto, a área desejada é aproximadamente 18,350 cm².

5. Temos que: $\begin{cases} 80 \text{ mm} = 0{,}08 \text{ m} \\ 62 \text{ mm} = 0{,}062 \text{ m} \end{cases}$

O número máximo de cortes é dado por $\frac{1{,}2}{A}$, em que A é a área da coroa, equivalente a um corte.

Segue que:

$$\frac{1{,}2}{A} = \frac{1{,}2}{\pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)} \simeq \frac{1{,}2}{3{,}14 \cdot \left[\left(\frac{0{,}08}{2}\right)^2 - \left(\frac{0{,}062}{2}\right)^2\right]} \simeq 598$$

Portanto, poderão ser feitos, no máximo, 598 cortes com um único disco.

8. Área da superfície externa:

$$A_t = A_\ell + 2A_b = 2\pi \cdot \left(\frac{11}{2}\right) \cdot 10 + 2\pi \cdot \left(\frac{11}{2}\right)^2 \simeq 170{,}5 \cdot 3{,}14 \simeq 535{,}37 \rightarrow 535{,}37 \text{ m}^2$$

Segue que: $\frac{535{,}37}{8} \simeq 67$

Portanto, são necessários aproximadamente 67 litros de tinta.

31. Calculando a área total, em cm², do cilindro e do cone, temos:

- cilindro

$$A_t = 2\pi r(h + r) \Rightarrow A_t = 2\pi \cdot \frac{10}{2} \cdot \left(10 + \frac{10}{2}\right) = 150\pi \rightarrow 150\pi \text{ cm}^2$$

- cone

$$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 + 10^2 \Rightarrow g^2 = 125 \Rightarrow g = 5\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$A_t = \pi r(g + r) \Rightarrow A_t = \pi \cdot \frac{10}{2} \cdot \left(5\sqrt{5} + \frac{10}{2}\right) = 25\left(\sqrt{5} + 1\right)\pi \rightarrow 25\left(\sqrt{5} + 1\right)\pi \text{ cm}^2$$

Assim:

$$\frac{A_{t_{\text{cilindro}}}}{A_{t_{\text{cone}}}} = \frac{150\pi}{25\left(\sqrt{5} + 1\right)\pi} = \frac{3}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \simeq 1{,}85$$

Portanto, a razão entre as áreas totais é, aproximadamente, 1,85.

38. a) $V = \dfrac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \dfrac{3{,}14 \cdot \left(\frac{12}{2}\right)^2 \cdot 15}{3} \simeq 565{,}2 \rightarrow$ aproximadamente 565,2 cm³

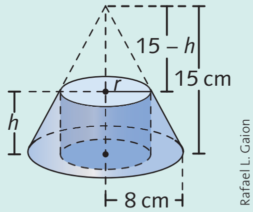
b) $g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow 25^2 = r^2 + 17^2 \Rightarrow r^2 = 336$

$V = \dfrac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \dfrac{3{,}14 \cdot 336 \cdot 17}{3} \simeq 5\,978{,}36 \rightarrow$ aproximadamente 5 978,36 cm³

51. a) $V = \dfrac{\pi h_t}{3}(r^2 + r \cdot r' + r'^2) \simeq \dfrac{3{,}14 \cdot 2}{3} \cdot \left[3^2 + 3 \cdot 0{,}8 + (0{,}8)^2\right] \simeq 25{,}2 \rightarrow$ aproximadamente 25,2 cm³

b) $V = \dfrac{\pi h_t}{3}(r^2 + r \cdot r' + r'^2) \simeq \dfrac{3{,}14 \cdot 12{,}5}{3} \cdot \left[(4{,}8)^2 + 4{,}8 \cdot 2{,}5 + (2{,}5)^2\right] \simeq 540{,}21 \rightarrow$ aproximadamente 540,21 cm³

57. Considere a figura abaixo:



Temos que:

$$\pi(8^2 - r^2) = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \Rightarrow 64 - r^2 = \frac{2}{3} \cdot 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{64}{3} \Rightarrow r = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{r}{8} = \frac{15 - h}{15} \Rightarrow \frac{\frac{8\sqrt{3}}{3}}{8} = \frac{15 - h}{15} \Rightarrow h = 5\left(3 - \sqrt{3}\right)$$

O volume V do novo sólido pode ser obtido subtraindo do volume do cone de raio 8 cm e altura 15 cm (V_{I}) o volume do cone de raio r e altura $15 - h$ (V_{II}) e o do cilindro de raio r e altura h (V_{III}).

$$V = V_{\text{I}} - V_{\text{II}} - V_{\text{III}} = \left(\frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 15}{3}\right) - \left[\frac{\pi \cdot r^2 \cdot (15 - h)}{3}\right] - (\pi \cdot r^2 \cdot h) =$$

$$320\pi - \left\{\frac{\pi \cdot \frac{64}{3} \cdot \left[15 - 5\left(3 - \sqrt{3}\right)\right]}{3}\right\} - \left[\pi \cdot \frac{64}{3} \cdot 5\left(3 - \sqrt{3}\right)\right] = 320\pi - \frac{320\sqrt{3}\pi}{9} - \left(320\pi - \frac{320\sqrt{3}\pi}{3}\right) \simeq 386{,}75$$

Portanto, o volume do novo sólido é, aproximadamente, 386,75 cm^3.

58. Usando a fórmula do volume do tronco de cone, temos:

$$V = \frac{\pi h_t}{3}(r^2 + r \cdot r' + r'^2) \simeq \frac{3{,}14 \cdot 10}{3} \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{0{,}3}{2}\right) + \left(\frac{0{,}3}{2}\right)^2\right] \simeq 3{,}64$$

Logo, o volume de concreto utilizado é, aproximadamente, 3,64 m^3.

63. Sejam V_{externo} e V_{interno} os volumes, da esfera de borracha de raios 18 cm e 15 cm, respectivamente. Assim:

$$V = V_{\text{externo}} - V_{\text{interno}} \simeq \left[\frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot \left(\frac{18}{2}\right)^3}{3}\right] - \left[\frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot \left(\frac{15}{2}\right)^3}{3}\right] \simeq 1\,285{,}83$$

Portanto, o volume de borracha usado na fabricação da bola é aproximadamente 1 285,83 cm^3.

ISBN: 978-65-5763-035-8

9 786557 630358