Lista 1: Análise Real - Instituto de Matemática e Estatística - Universidade de São Paulo (IME-USP)

Luiz Paulo Tavares Gonçalves

2025-01-12

5. Dê um exemplo de uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que seja injetora mas não sobrejetora.

Uma função $f : X \to Y$ é dita injetora se, e somente se, $f(x_1) = f(x_2)$ implica em $x_1 = x_2$. Formalmente:

$$\forall x_1, x_2 \in X, (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$$

Por sua vez, uma função $f : X \to Y$ é sobrejetora se a imagem é igual ao contradomínio:

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \text{ tal que } f(x) = y$$

Então, podemos tomar a função como exemplo:

$$f(n) = n + 1$$

Se $f(x_1) = f(x_2)$, então:

$$x_1 + 1 = x_2 + 1$$

$$x_1 + 1 - (1) = x_2 + 1 - (1)$$

$$x_1 = x_2$$

Ou seja, se essas entradas diferentes resultam na mesma saída, a única maneira disso acontecer é se as entradas forem de fato iguais. Observe que, por exemplo, o valor 0 em $\mathbb{N}$ não é atingido pela função, pois nunca há um $n \in \mathbb{N}$ tal que $n+1 = 0$. Então, não é sobrejetora, pois a imagem é diferente do contradomínio.

6. Dê um exemplo de uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que seja sobrejetora mas não injetora.

Podemos tomar a definição de função injetora e sobrejetora que foram dadas no exerícios anterior. Assim, podemos tomar a função como exemplo de não injetora:

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

A não "injetividade" dessa função é fácil de verificar. Observe que 2 é par e retorna $(2/2 = 1)$, agora pegue 1 que, é ímpar, então, $f(2) = f(1) = 1$. Ou seja, entradas diferentes produziram a mesma saída. É não injetora! Assim como, todo número $y \in \mathbb{N}$ (seja ímpar ou par) pode ser obtido como saída de $f(n)$. Isso prova que f é sobrejetora.

8. Prove por indução que, dados $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, tem-se

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + \ |x_n|$$

Base da indução, vamos tomar $k = 1$

$$|x_1| \leq |x_2|$$

Verificamos que com $k = 1$ é válido, agora, vamos levantar a hipótese com $k = n$

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + \ |x_n|$$

Agora, precisamos provar:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + \ |x_{k+1}|$$

Definimos que: $S_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$. Assim: $S_k + x_{k+1}$.

Com a desigualdade triangular para qualquer $a, b \in \mathbb{R}$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Aplicando S_k e x_{k+1}, temos:

$$|S_k + x_{k+1}| \leq |S_k| + |x_{k+1}|$$

Assim:

$$|S_k + x_{k+1}| \leq (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k|) + |x_{k+1}|$$
$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + \ |x_{k+1}|$$

10. Prove que para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq -1$ vale a desigualdade

$$(1+x)^r \geq 1 + rx, \forall r \in \mathbb{N}$$

Podemos provar por indução. Tomando $r = 1$

$$(1+x)^1 \geq 1 + 1x = (1+x) \geq (1+x)$$

Tomando $r = k$ como hipótese de indução:

$$(1+x)^k \geq 1 + kr$$

Em $r = k + 1$:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$$

Pelas propriedades da potência, temos:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x)$$

Logo, temos:

$$(1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x)$$

$$(1+kx)(1+x) = 1 + x + kx + kx^2 = 1 + (k+1)x + kx^2.$$

Como $kx^2 \geq 0$ para $x \geq -1$, temos:

$$1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$$

Portanto:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x.$$

4.Dados dois números naturais a, b mostre que existe natural m tal que ma > b.

Ou seja, $a, b \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $ma > b$

Escolhendo um m grande suficiente, ma supera qualquer b. Como escolher m suficientemente grande?

$$m = \frac{b}{a} + 1$$

Como a divisão $\frac{b}{a}$ mostra quantas vezes a cabe dentro de b, adicionando mais 1 o produto ma torna-se maior que b. Ou seja, isso prova que existe natural m tal que $ma > b$. Ou seja:

$$ma > b$$
$$(\frac{b}{a} + 1) * a > b$$