Trabalho 1 - Exercícios - EST 640 - Prof. L.A.P.

1. Sendo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ verifique as seguintes propriedades:

   a) $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$;
   b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$;
   c) $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$;
   d) $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ e $\mathbf{AA}'$ são simétricas.

2. Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Obtenha as inversas de $\mathbf{A}$ e de $\mathbf{B}$.

3. Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $k = 2$ verifique as propriedades de matrizes inversas:

   a) $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$;
   b) $(\mathbf{A}^{-1})' = (\mathbf{A}')^{-1}$;
   c) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$;
   d) $(\mathbf{A}k)^{-1} = (k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}(\mathbf{A})^{-1}$.

4. O traço de uma matriz quadrada $(\mathbf{A}_{(n)})$ é definido como *a soma dos elementos da sua diagonal principal*. Isto é, $tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Usando as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ do exercício anterior verifique as seguintes propriedades:

   a) $tr(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}) \pm tr(\mathbf{B})$;
   b) $tr(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A}')$;
   c) $tr(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA}) = tr(\mathbf{B})$;
   d) $tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$, se as dimensões são favoráveis;
   e) $tr(\mathbf{AA}') = \sum_{i,j} a_{ij}^2$.

5. Dado o vetor $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ e a matriz $\mathbf{J}_{(4)}$ cujos elementos são todos iguais a 1.

   a) Verifique que $\mathbf{y}'\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{4} y_i^2$;
   b) Obtenha $\mathbf{yy}'$;

c) Obtenha $\mathbf{y}'\mathbf{J}\mathbf{y}$.

6. Dado o sistema de equações lineares $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases}$

   a) Escreva o sistema na forma matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{g}$;

   b) Encontre a solução do sistema $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}$;

   c) Pré-multiplique ambos os membros de $\mathbf{Ax} = \mathbf{g}$ por $\mathbf{A}'$ e obtenha $\mathbf{A}'\mathbf{Ax} = \mathbf{A}'\mathbf{g}$;

   d) Obtenha a solução do novo sistema através de $\mathbf{x} = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{g}$;

   e) Compare os resultados de (b) e (d).

7. Seja o vetor coluna $\mathbf{j} = [1\ 1\ 1 ... 1]'$ de dimensão $n \times 1$ ou $p \times 1$ e a matriz $\mathbf{A}_{n \times p}$. Pede-se:

   a) Mostre, algebricamente, que $\mathbf{j}'\mathbf{A}$ fornece o vetor dos totais de colunas de $\mathbf{A}$;

   b) Mostre, algebricamente, que $\mathbf{Aj}$ fornece o vetor dos totais das linhas de $\mathbf{A}$;

   c) Prepare um pequeno exemplo numérico em que $\mathbf{A}$ é uma matriz 3×4 e verifique seus resultados apresentados nos itens (a) e (b).

8. Pode-se mostrar que, se $y = [y_1\ y_2\ ... y_n]'$ é um vetor de n observações, então a média e a variância dessas observações seriam, em notação matricial, dadas por:

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\mathbf{j}'\mathbf{y} \ e \ s^2 = \frac{1}{n-1}\mathbf{y}'\left(\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{J}\right)\mathbf{y},$$

   onde $\mathbf{j}$ é um vetor $n \times 1$ de 1's e $n = \mathbf{j}'\mathbf{j}$; $\mathbf{I}_{(n)}$ é a matriz identidade; e $\mathbf{J}_{n \times n}$ é uma matriz com todos os seus elementos iguais a 1. Pede-se: prepare um pequeno exemplo numérico em que $\mathbf{y}$ é um vetor com 4 observações e calcule sua média e variância a partir da notação dada acima.

9. (Extra - MS e DS Estatística) Mostre que, se $\mathbf{y} = [y_1\ y_2\ ... y_n]'$ é um vetor de n observações, então a média e a variância dessas observações seriam, em notação matricial, dadas por:

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\mathbf{j}'\mathbf{y} \ e \ s^2 = \frac{1}{n-1}\mathbf{y}'\left(\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{J}\right)\mathbf{y},$$

   onde $\mathbf{j}$ é um vetor $n \times 1$ de 1's e $n = \mathbf{j}'\mathbf{j}$; $\mathbf{I}_{(n)}$ é a matriz identidade; e $\mathbf{J}_{n \times n}$ é uma matriz com todos os seus elementos iguais a 1.