Otimização de Sistemas

Prof. Sandro Jerônimo de Almeida, PhD.

Soluções de Problemas por Sistemas de Equações Lineares

Introdução

- Podemos resolver problemas de Programação Linear por meio de métodos de solução de sistemas de equações lineares

- Esse processo de resolução é base para o método *Simplex*

Variáveis de Folga

- Transformando inequações em equações

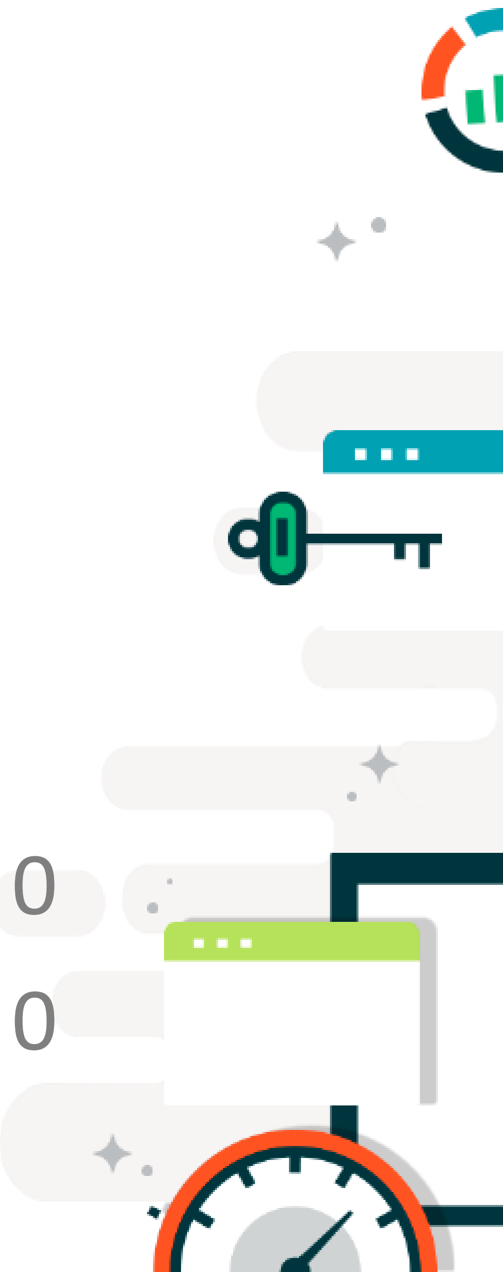
  UTILIZAÇÃO <= DISPONIBILIDADE

- Introduzindo a FOLGA DE RECURSOS, teremos

  UTILIZAÇÃO + FOLGA = DISPONIBILIDADE

- Isso significa:

- UTILIZAÇÃO < DISPONIBILIDADE, implicar FOLGA > 0
- UTILIZAÇÃO = DISPONIBILIDADE, implicar FOLGA = 0



Exemplo

$$\textbf{Maximizar}\ \text{Lucro} = 4X_1 + 1X_2$$

Sujeito a:

$$2X_1 + 3X_2 \leq 12$$

$$2X_1 + 1X_2 \leq 8$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Definindo Sistema de Equações Lineares

Maximizar Lucro = $4X_1 + 1X_2$

Sujeito a:

$$2X_1 + 3X_2 \leq 12$$
$$2X_1 + 1X_2 \leq 8$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$2X_1 + 3X_2 + 1X_3 = 12$$
$$2X_1 + 1X_2 + 1X_4 = 8$$

INSERÇÃO DE VARIÁVEIS DE FOLGA

Sistema de Equações Lineares (SEL)

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 + 1X_3 = 12 \\ 2X_1 + 1X_2 + 1X_4 = 8 \end{cases}$$

| n = n° Incógnitas = 4

| m = n° de equações = 2

- **Problema**: o número de incógnitas é superior ao número de equações (n > m).

SISTEMAS DE EQUAÇÕES INDETERMINADO.

Sistema de Equações Lineares (SEL)

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 + 1X_3 = 12 & \text{| n = n° Incógnitas} \quad = 4 \\ 2X_1 + 1X_2 + 1X_4 = 8 & \text{| m = n° de equações} = 2 \end{cases}$$

- **Solução**: como as variáveis, incluindo as de folga, devem ser positivas ou nulas, então podemos anular *(n-m)* variáveis e calcular as demais pelo sistema.
- Neste caso: (4-2) = 2 variáveis podem ser tornar **zero**.

Sistema de Equações Lineares (SEL)

- Um método de solução consiste em zerar sistematicamente *(n-m)* variáveis e calculando os valores das outras.
- A solução será aquela cujas variáveis levam ao maior valor da função objetivo

Sistema de Equações Lineares (SEL)

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 + 1X_3 = 12 \\ 2X_1 + 1X_2 + 1X_4 = 8 \end{cases}$$

| n = n° Incógnitas = 4

| m = n° de equações = 2

- **Combinações | Maximizar Lucro** $= 4X_1 + X_2 + 0X_3 + 0X_4$

	Sistema 1	Sistema 2	Sistema 3	Sistema 4	Sistema 5	Sistema 6
Variáveis Não-Básicas	$X_1 = 0$	$X_1 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_2 = 0$	$X_3 = 0$
	$X_2 = 0$	$X_3 = 0$	$X_4 = 0$	$X_3 = 0$	$X_4 = 0$	$X_4 = 0$
Variáveis Básicas	$X_3 =$ _	$X_2 =$ _	$X_2 =$ _	$X_1 =$ _	$X_1 =$ _	$X_1 =$ _
	$X_4 =$ _	$X_4 =$ _	$X_3 =$ _	$X_4 =$ _	$X_3 =$ _	$X_2 =$ _
Lucro						

Sistema de Equações Lineares (SEL)

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 + 1X_3 = 12 \\ 2X_1 + 1X_2 + 1X_4 = 8 \end{cases}$$

| n = n° Incógnitas = 4

| m = n° de equações = 2

- **Combinações** | **Maximizar Lucro** $= 4X_1 + X_2 + 0X_3 + 0X_4$

	Sistema 1	Sistema 2	Sistema 3	Sistema 4	Sistema 5	Sistema 6
Variáveis Não-Básicas	$X_1 = 0$	$X_1 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	**$X_2 = 0$**	$X_3 = 0$
	$X_2 = 0$	$X_3 = 0$	$X_4 = 0$	$X_3 = 0$	**$X_4 = 0$**	$X_4 = 0$
Variáveis Básicas	$X_3 = 12$	$X_2 = 4$	$X_2 = 8$	$X_1 = 6$	**$X_1 = 4$**	$X_1 = 3$
	$X_4 = 8$	$X_4 = 4$	$X_3 = -12$	$X_4 = -4$	**$X_3 = 4$**	$X_2 = 2$
Lucro	0	4	INVIÁVEL	INVIÁVEL	**16**	14

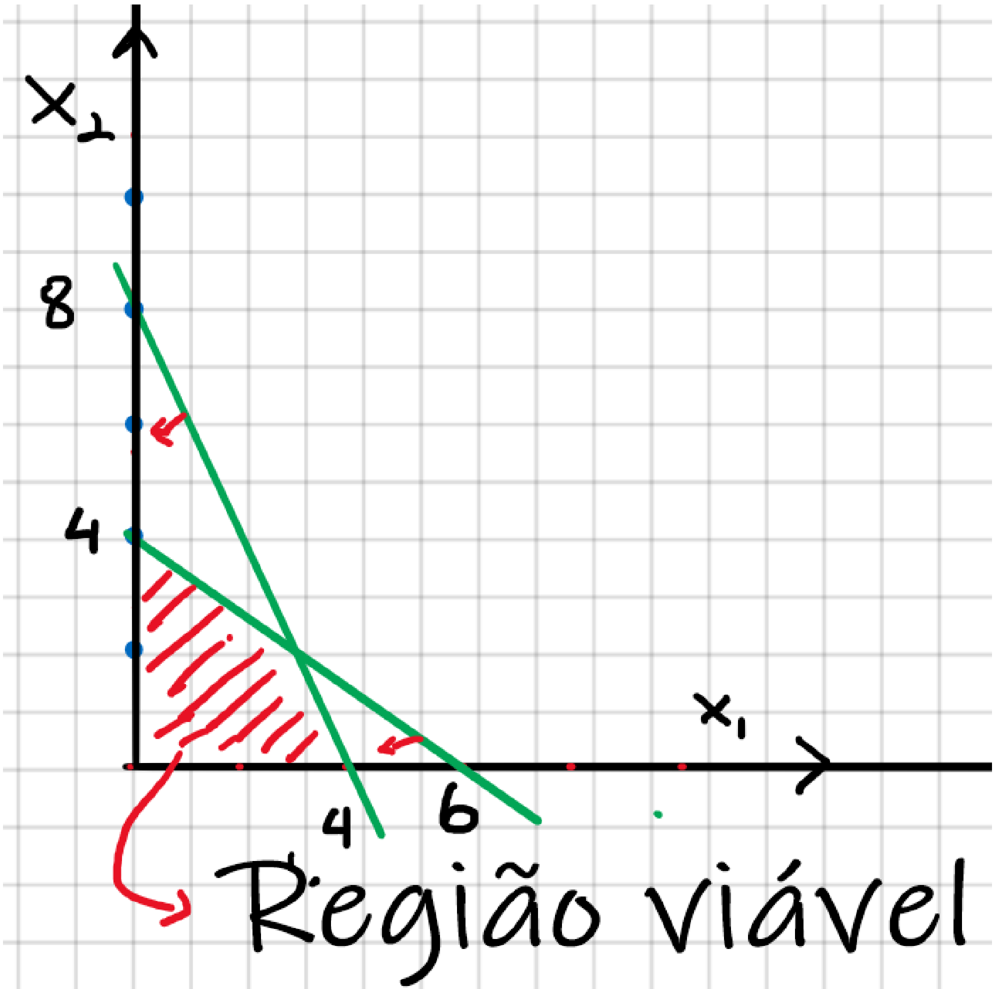
SOLUÇÃO ÓTIMA

Sistema de Equações Lineares (SEL)

Maximizar Lucro = $4X_1 + 1X_2$

Sujeito a:

$$2X_1 + 3X_2 \leq 12$$
$$2X_1 + 1X_2 \leq 8$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$



Sistema de Equações Lineares (SEL)

- Qual seria a complexidade computacional de um algoritmo baseado no método de sistemas de equações lineares?

Sistema de Equações Lineares (SEL)

- Complexidade proporcional ao número de combinações
- Relembrando: $C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$
- Fazendo substituições

  k = *(n-m)* = n°de variáveis a serem anuladas

  p = *n* = n°de variáveis | m = n° de equações

  $$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)! \times n-(n-m)!}$$

Sistema de Equações Lineares (SEL)

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 + 1X_3 = 12 \\ 2X_1 + 1X_2 + 1X_4 = 8 \end{cases}$$

| n = n° Incógnitas = 4

| m = n° de equações = 2

- Conferindo o número de S.E.L.

  - n°de variáveis anuláveis = n-m = *(4-2)* = 2

  - n°de variáveis (n) = 4

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)! \times n-(n-m)!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6 \text{ sistemas}$$

Exercício

Maximizar $Z = 3X_1 + 5X_2$

Sujeito a:

$$1X_1 \leq 4$$

$$1X_2 \leq 6$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

- Determine o número de S.E.L.

  - n°de variáveis (n) = ________ | n° de Equações (m): _______

  - n°de variáveis anuláveis = *n-m* = ________

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)! \times n-(n-m)!} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

- Determine a solução ótima do problema!

Exercício

Maximizar $Z = 3X_1 + 5X_2 + 0X_3 + 0X_4$

Sujeito a:

$1X_1 + X_3 = 4$

$1X_2 + X_4 = 6$

$3X_1 + 2X_2 + X_5 = 18$

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

#Sistema	X1	X2	X3	X4	X5	Z
1	**0**	**0**	**4**	**6**	**18**	**0**
2	**0**		**0**			
3	**0**			**0**		
4	**0**				**0**	
5		**0**	**0**			
6		**0**		**0**		
7		**0**			**0**	
8			**0**	**0**		
9			**0**		**0**	
10				**0**	**0**	