Otimização de Sistemas

Prof. Sandro Jerônimo de Almeida, PhD.

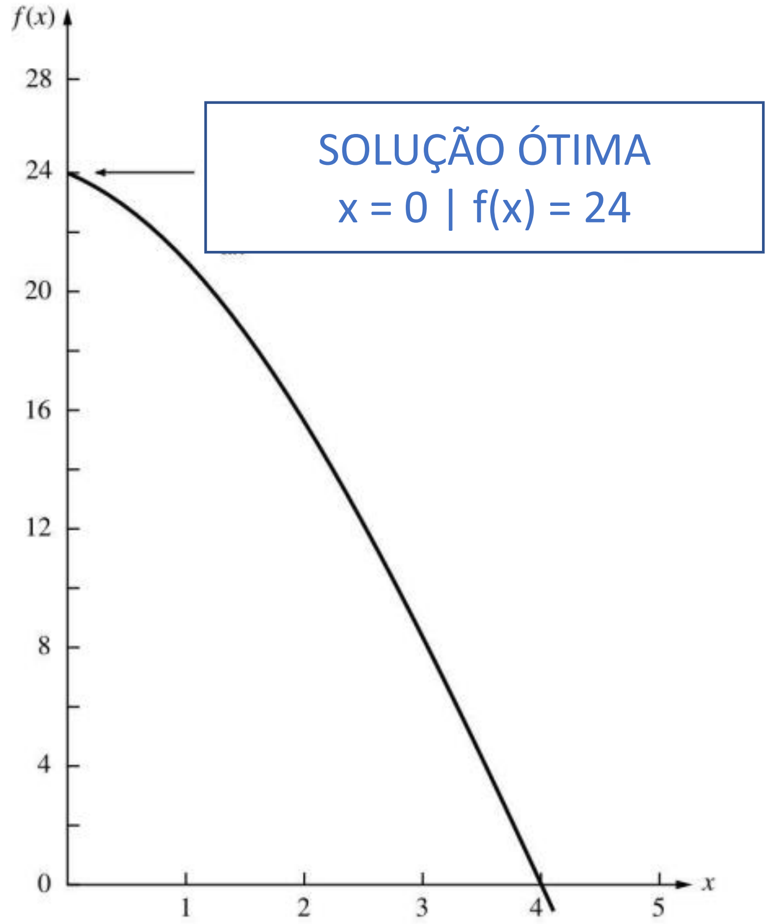
Programação Não Linear
Otimização Irrestrita

Programação Não Linear

Otimização Irrestrita

Maximize	$f(x) = 24 - 2x - x^2,$
subject to	$x \geq 0.$

para $x_j \geq 0$



Programação Não Linear

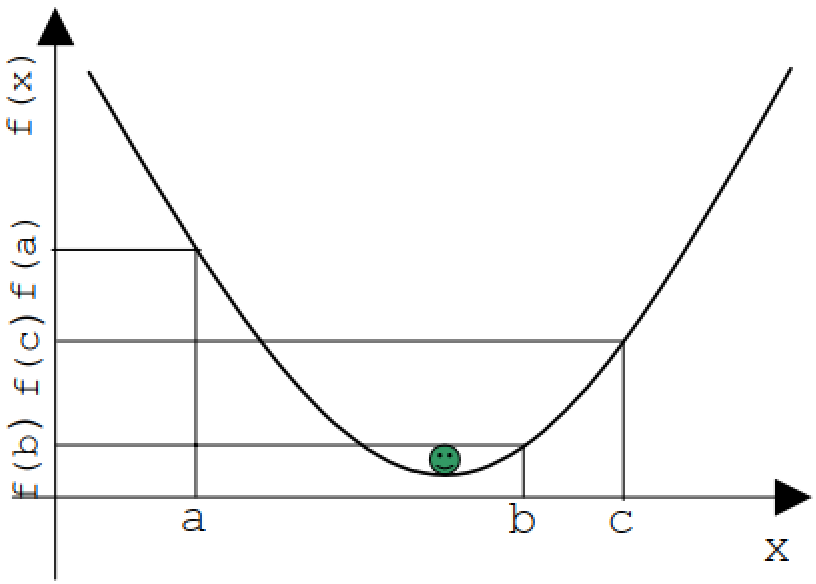
Otimização Irrestrita – Um método Simples

Consiste nos seguintes passos:

- 1)“chutar” 3 pontos (a,b,c).
- 2)Escolher um ponto x entre a e b ou entre b e c.

Supondo que escolhemos entre b e c:

- 3)Se f(b) < f(x) ⇒ 3 novos pontos são (a,b,x).
- 4)Senão ⇒ 3 novos pontos são (b,x,c).
- 5)Repetir processo até precisão desejada.



Programação Não Linear

Otimização Irrestrita – Um método Simples

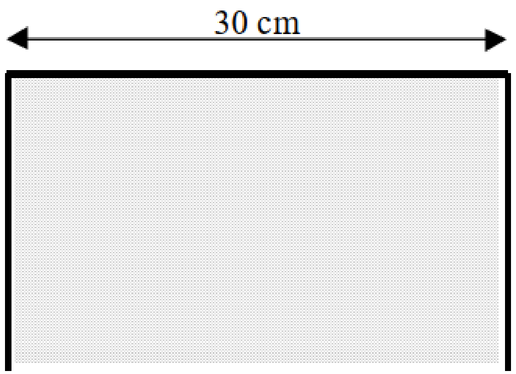
Problema do Método apresentado

- Extremamente dependente da inicialização (problema comum aos Métodos determinísticos).
- Função precisa ser avaliada em muitos pontos $\Rightarrow$ alto custo computacional.
- Informação da derivada da função permite alcançar o extremo com menor número de avaliações da função $\Rightarrow$ melhor eficiência computacional.

Programação Não Linear

Otimização Irrestrita – Exemplo

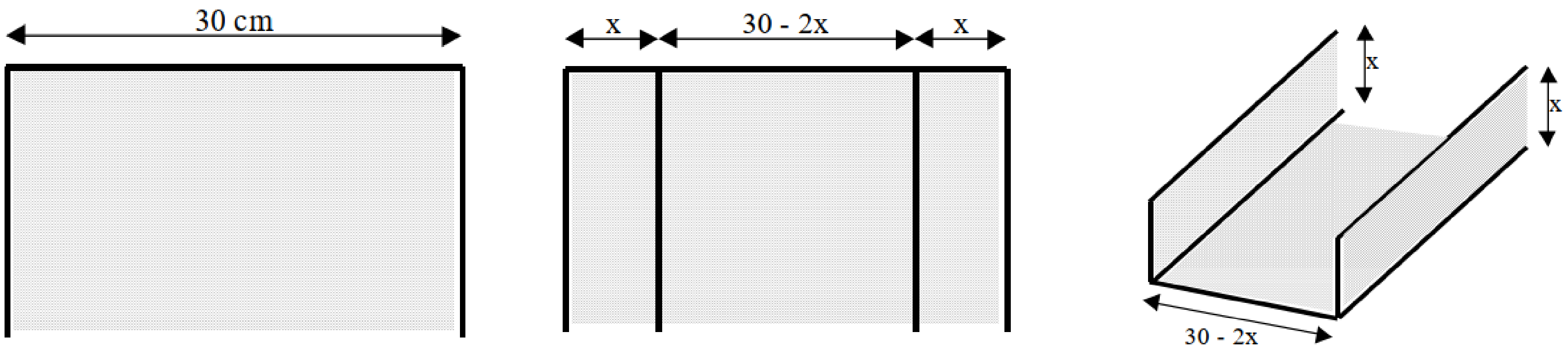
- De uma longa folha de metal de 30 cm de largura deve-se fazer uma calha dobrando as bordas perpendicularmente à folha. Quantos centímetros devem ser dobrados de cada lado de modo que a calha tenha capacidade máxima ?



Programação Não Linear

Otimização Irrestrita – Exemplo

- De uma longa folha de metal de 30 cm de largura deve-se fazer uma calha dobrando as bordas perpendicularmente à folha. Quantos centímetros devem ser dobrados de cada lado de modo que a calha tenha capacidade máxima ?



- Quanto deve medir ***x*** para que a calha tenha capacidade máxima ?

Programação Não Linear

Otimização Irrestrita – Exemplo

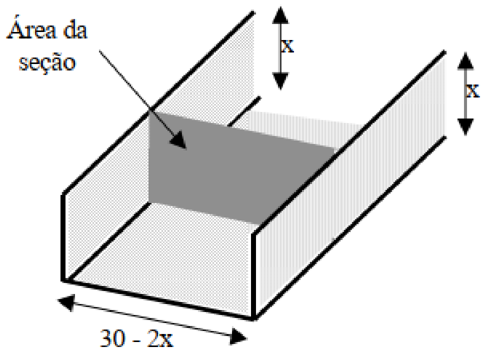
- A capacidade de escoamento de água da calha é, formalmente, a vazão
- $Q(A, v) = A.v$

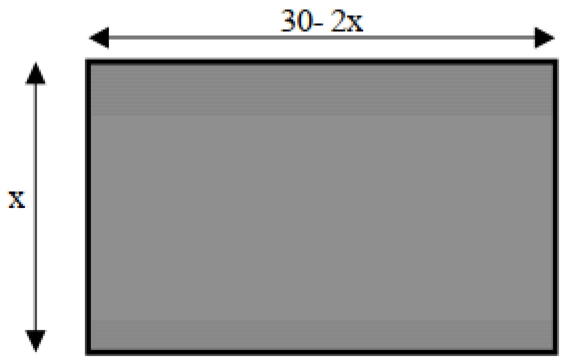
  $Q(A,v)$ é a vazão (cm^3/s);

  A é a área da seção (cm^2); e

  v é a velocidade do fluído (cm/s).

- Supondo v constante, a vazão torna-se diretamente proporcional à área da seção. Portanto, maximizando A implica em maximizar Q(A,v).





Maximizar

$$f(x) = x.(30-2x) = 30x-2x^2$$

Sujeito a: x>0

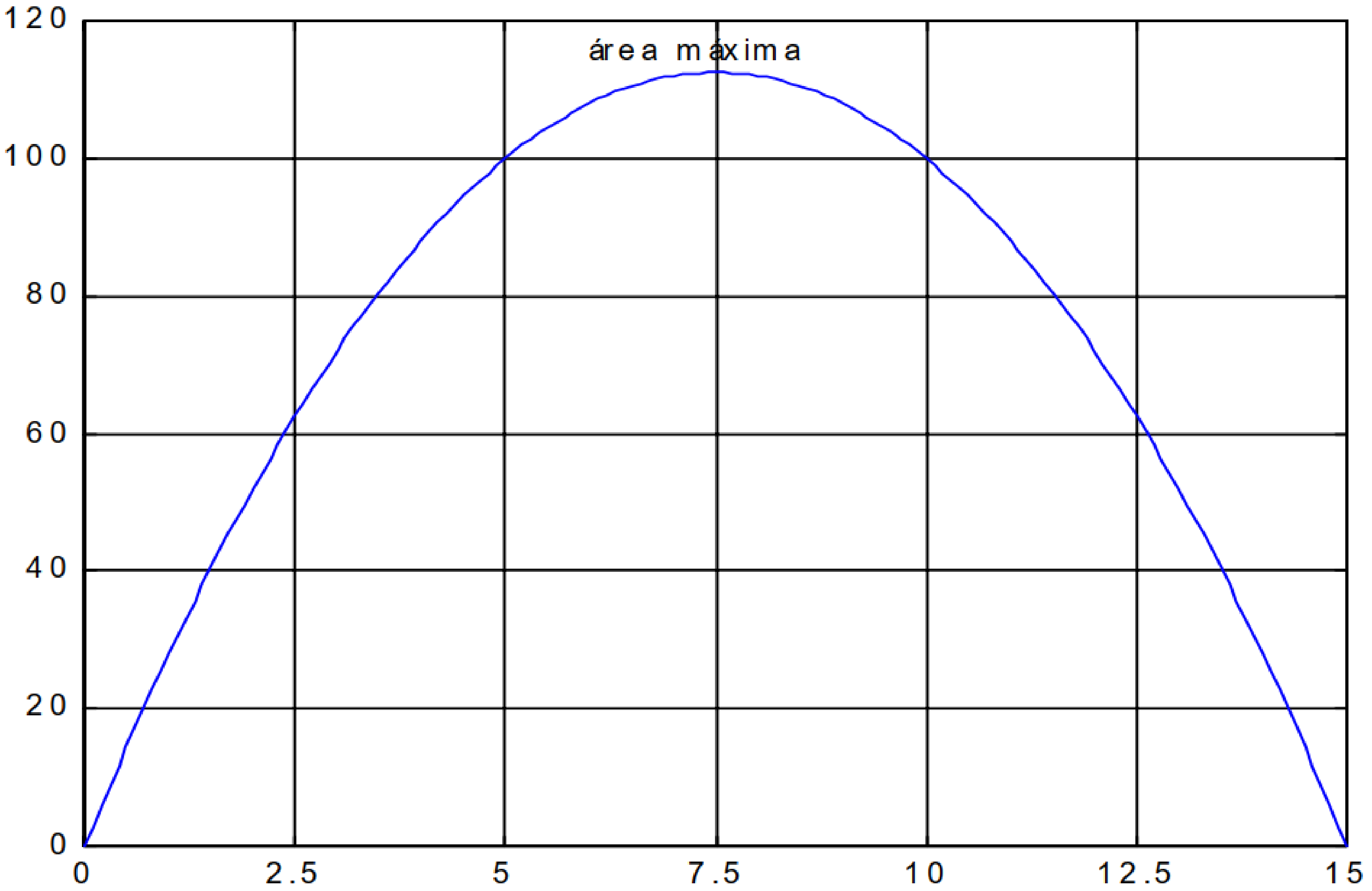
Programação Não Linear

Otimização Irrestrita – Exemplo

Maximizar

$f(x) = x.(30-2x) = 30x-2x^2$

Sujeito a: x>0



Programação Não Linear

Derivada e Gradiente

- Problema com uma variável (1-D): derivada fornece a informação da taxa de variação da função: $f'(x)$
- Problema com *N* variáveis (N-D): o vetor gradiente fornece a direção da maior taxa de variação da função.

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

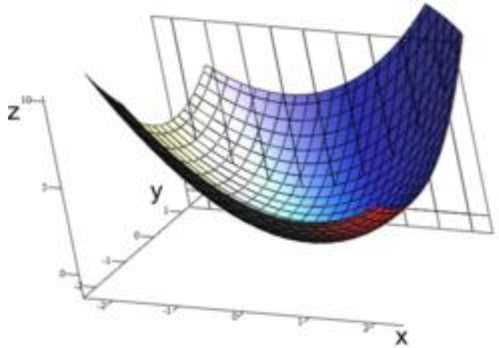
Programação Não Linear

Vetor Gradiente - Definição

O gradiente de uma função *f*, denotado por ∇f ou **grad** *f*, é a função vetorial cujas componentes são as derivadas parciais, ou seja,

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Exemplo: f(x,y) = $x^2 + xy + y^2$.



$$\nabla f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 2y + x \end{bmatrix}$$

2 elementos no vetor

Programação Não Linear

Exercício – Vetor Gradiente

- Determine o vetor gradiente de $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

Programação Não Linear

Exercício – Vetor Gradiente

- Determine o vetor gradiente de $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$
- Derivadas parciais　　　　　　　　Vetor gradiente

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4y$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 + 2xy^3 \\ 3x^2y^2 - 4y \end{bmatrix}$$

Programação Não Linear

Método do Gradiente (ou Cauchy ou método descendente)

- Método consiste em procurar o máximo (ou mínimo) na direção de maior taxa de crescimento (ou decrescimento) da Função Objetivo a partir de uma solução (ponto) inicial X_0
- Maximização: $X_{i+1} = X_i + t.\nabla f\ (X_i)$
- Minimização: $X_{i+1} = X_i - t.\nabla f\ (X_i)$
- *t* é o “tamanho do passo” | *i* é o número da iteração
- $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$

1789 – 1857

Programação Não Linear

Resolvendo o problema da calha com método gradiente (1D)

Maximizar $f(x) = x.(30-2x) = 30x-2x^2$
Sujeito a: $x>0$

Teremos:
$\nabla f(x) = f'(x) = 30 - 4x$
$X_{i+1} = X_i + t.\nabla f(X_i)$
Resíduo $= |X_{i+1} - X_i|$

Assumindo: $t = 0.1$ | *Ponto inicial:* $x_0 = -3$
Condição de parada: Resíduo $<= 0.0007$

Programação Não Linear

Resolvendo o problema da calha com método gradiente

Maximizar $f(x) = x.(30-2x) = 30x-2x^2$
Sujeito a: $x>0$

Assumindo: $t = 0.1$ | *Ponto inicial:* $x_0 = -3$
Condição de parada: Resíduo $< = 0.0007$

Teremos:

$\nabla f\ (x) = f'(x) = 30 - 4x$

$X_{i+1} = X_i + t.\nabla f\ (X_i)$

Resíduo $= |X_{i+1} - X_i|$

1° Iteração $x_0 = -3$ $x_1 = -3 + 0.1(30 - 4(-3)) = 1.2$ Resíduo = 4.2	2° iteração $x_1 = 1.2$ $x_2 =$

Programação Não Linear

Resolvendo o problema da calha com método gradiente

Maximizar $f(x) = x.(30-2x) = 30x-2x^2$
Sujeito a: $x>0$

Assumindo: $t = 0.1$ | *Ponto inicial:* $x_0 = -3$
Condição de parada: Resíduo $< = 0.0007$

Teremos:
$\nabla f(x) = f'(x) = 30 - 4x$
$X_{i+1} = X_i + t.\nabla f(X_i)$
Resíduo $= |X_{i+1} - X_i|$

1° Iteração $x_0 = -3$ $x_1 = -3 + 0.1(30 - 4(-3)) = 1.2$ Resíduo = 4.2	2° iteração $x_1 = 1.2$ $x_2 = 1.2 + 0.1(30 - 4(1.2)) = 3.72$ Resíduo = 2.52
3° iteração $x_2 = 3.72$ $x_3 =$	

Programação Não Linear

Resolvendo o problema da calha com método gradiente

Maximizar $f(x) = x.(30-2x) = 30x-2x^2$
Sujeito a: $x>0$

Assumindo: $t = 0.1$ | *Ponto inicial:* $x_0 = -3$
Condição de parada: Resíduo $< = 0.0007$

Teremos:

$\nabla f\ (x) = f'(x) = 30 - 4x$

$X_{i+1} = X_i + t.\nabla f\ (X_i)$

Resíduo $= |X_{i+1} - X_i|$

1° Iteração $x_0 = -3$ $x_1 = -3 + 0.1(30 - 4(-3)) = 1.2$ Resíduo = 4.2	2° iteração $x_1 = 1.2$ $x_2 = 1.2 + 0.1(30 - 4(1.2)) = 3.72$ Resíduo = 2.52
3° iteração $x_2 = 3.72$ $x_3 = 3.72 + 0.1(30 - 4(3.72))$ $= 5.232$ Resíduo = 1.512	19° iteração $x_{18} = 7.4982$ $x_{19} =$

Programação Não Linear

Resolvendo o problema da calha com método gradiente

Maximizar $f(x) = x.(30-2x) = 30x-2x^2$
Sujeito a: $x>0$

Assumindo: $t = 0.1$ | *Ponto inicial:* $x_0 = -3$
Condição de parada: Resíduo $< = 0.0007$

Teremos:

$\nabla f\ (x) = f'(x) = 30 - 4x$

$X_{i+1} = X_i + t.\nabla f\ (X_i)$

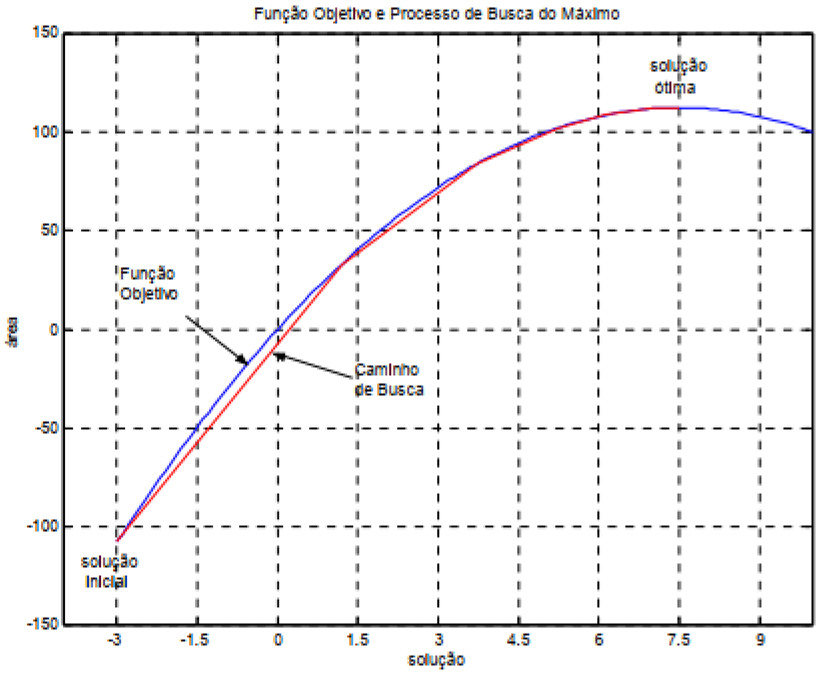
Resíduo $= |X_{i+1} - X_i|$

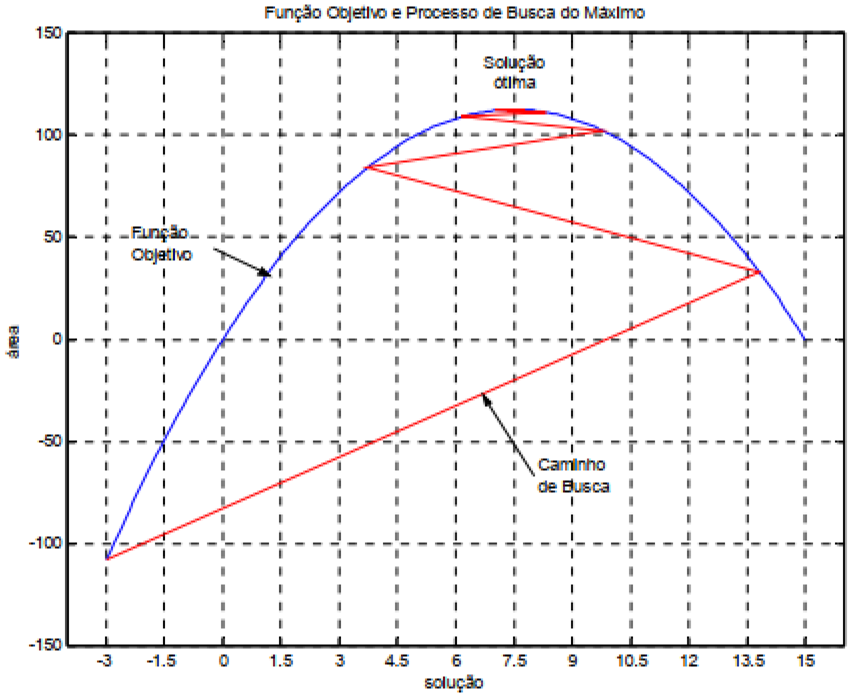
1° Iteração $x_0 = -3$ $x_1 = -3 + 0.1(30 - 4(-3)) = 1.2$ Resíduo = 4.2	2° iteração $x_1 = 1.2$ $x_2 = 1.2 + 0.1(30 - 4(1.2)) = 3.72$ Resíduo = 2.52
3° iteração $x_2 = 3.72$ $x_3 = 3.72 + 0.1(30 - 4(3.72))$ $= 5.232$ Resíduo = 1.512	19° iteração $x_{18} = 7.4982$ $x_{19} = 7.4982+0.1(30 - 4(7.4982))$ $= 7.4989$ Resíduo = 0.0007

Programação Não Linear

Resolvendo o problema da calha com método gradiente

O gráfico da esquerda mostra o "caminho de busca (trajetória)" da solução ótima realizada pelo algoritmo para t = 0.1 e o da direita para t = 0.4.





Exercício

- Faça a 1° iteração do método gradiente na busca da solução do seguinte problema: *Max* $f(x,y) = 5x^2 + 5y^2 + xy + 2y$. Assuma o ponto inicial (3,3) e $t = 0{,}1$

Exercício

- Faça a 1° iteração do método gradiente na busca da solução do seguinte problema: *Max* $f(x,y) = 5x^2 + 5y^2 + xy + 2y$. Assuma o ponto inicial (3,3) e $t = 0{,}1$
- *Vetor gradiente (formado pelas derivadas parciais de f)*

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10x + y \\ 10y + x + 2 \end{bmatrix}$$

- Aplicando: $X_{i+1} = X_i + t.\nabla f\,(X_i)$

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + 0{,}1 \begin{bmatrix} 10x + y \\ 10y + x + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + 0{,}1 \begin{bmatrix} 33 \\ 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3{,}3 \\ 3{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}3 \\ 6{,}5 \end{bmatrix}$$

- Resíduo: distância euclidiana entre (3,3) e (6.3, 6.5)

Programação Não Linear

Método gradiente – Existe um tamanho de *t* ótimo?

- A solução ótima será alcançada mais rapidamente quanto menos a função objetivo for avaliada
- Artifício: aplicar o gradiente para achar o tamanho de *t*

$Z(t) = x + t.\nabla f\ (x) = x + t.f'(X)$ - substituindo $Z(t)$ em $f(x)$, teremos:

$g(t) = f(Z(t))$

- Igualando a derivada de $g(t)$ (em relação a t) a zero ($g'(t)=0$) e então resolvendo para t, encontra-se uma função que descreve os valores ótimos de t para cada solução x

Programação Não Linear

Resolvendo o problema da calha com *t* ótimo

- $Z(t) = x + t.\nabla f(x) = x + t.f'(X)$

  $Z(t) = x + t\,(30-4x)$

- Substituindo Z(t) em *f*, teremos:

  $g(t) = f(Z(t)) = 30x + 900t - 240xt - 2x^2 + 16x^2t + 480xt^2 - 1800t^2 - 32x^2t^2$

  $g'(t) = 900 - 240x + 16x^2 + 960xt - 3600t - 64x^2t$

$$t = \frac{-16x^2 + 240x - 900}{960x - 3600 - 64x^2} = \begin{cases} 0.25 \forall x \in \Re \neq 7.5 \\ \not\in t \quad \text{para} \quad x = 7.5 \end{cases}$$

Neste caso específico, o valor de t será constante, ou seja, t=0.25 valerá para qualquer x diferente de 7.5

1° Iteração

$x_0 = -3$

$x_1 = -3 + 0.25(30 - 4(-3))$

$= 7.5$

Programação Não Linear

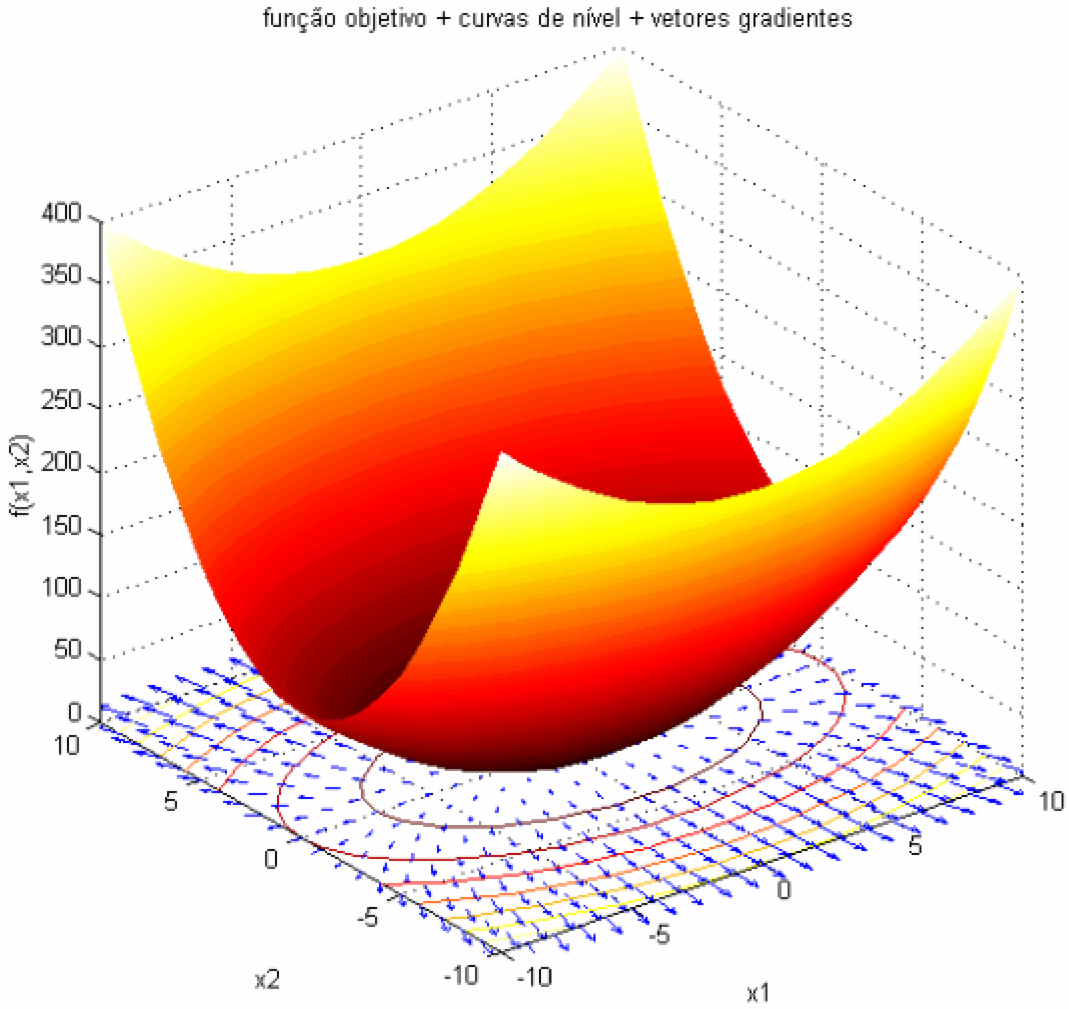
Exemplo 2D

$$\text{Min} \qquad f(X) = x_1^2 + 3x_2^2$$

Vetor Gradiente / Derivadas parciais

$$\nabla f(X) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(X) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 6x_2 \end{bmatrix}$$



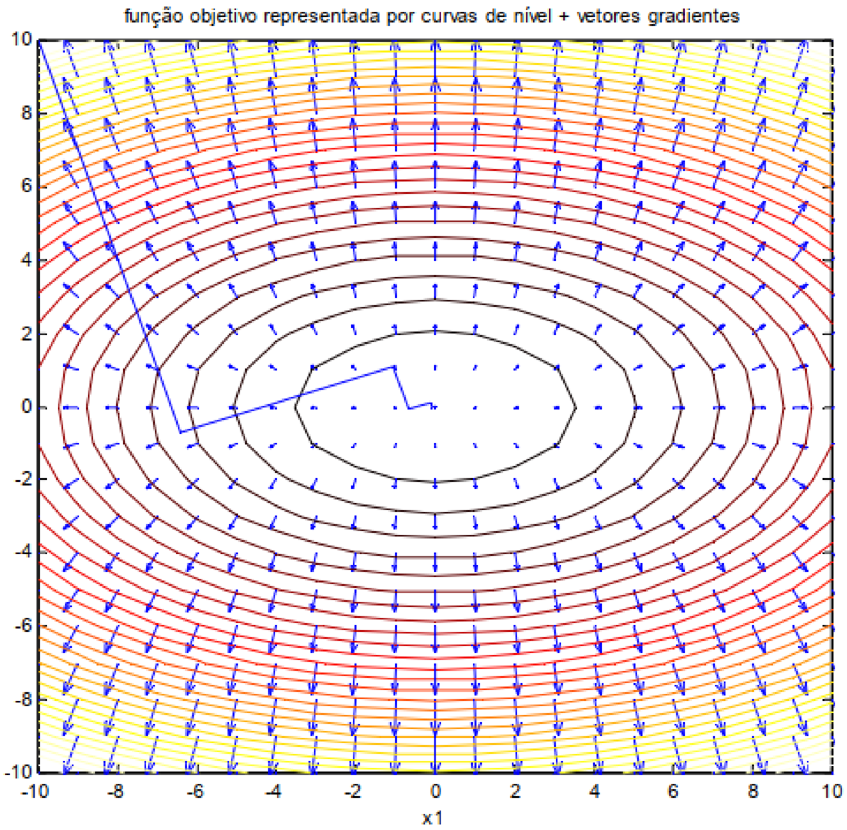
Programação Não Linear

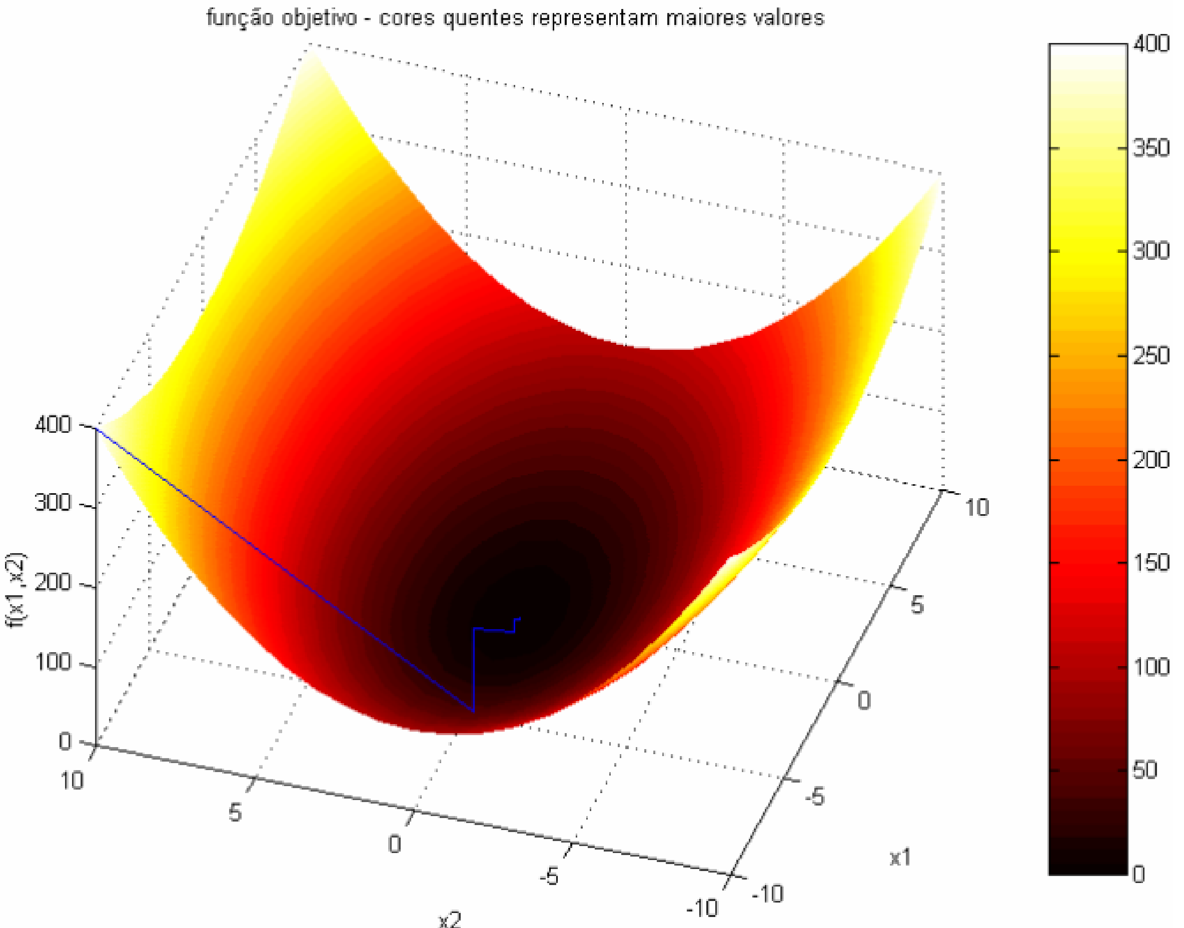
Exemplo 2D – Busca a partir do ponto (-10, 10)

$$\text{Min} \qquad f(X) = x_1^2 + 3x_2^2$$

$$\nabla f(X) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(X) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 6x_2 \end{bmatrix}$$





Programação Não Linear

$$\text{resíduo} = \sqrt{\left(x_1(i+1) - x_1(i)\right)^2 + \left(x_2(i+1) - x_2(i)\right)^2}$$

Resolvendo o exemplo 2D com *t* ótimo

$$\begin{bmatrix} x_1(i+1) \\ x_2(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \end{bmatrix} - t.\begin{bmatrix} 2x_1(i) \\ 6x_2(i) \end{bmatrix}$$

Fazendo

$$z(t) = \begin{bmatrix} x_1(i+1) \\ x_2(i+1) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g(t) = f(z(t))$$

$$g(t) = f(z(t)) = (1 - 2t)^2 x_1^2 + 3(1 - 6t)^2 x_2^2$$

$$g'(t) = 2(1 - 2t)x_1^2(-2) + 6(1 - 6t)x_2^2(-6) = 0$$

Teremos: $$t = \frac{x_1^2 + 9x_2^2}{2x_1^2 + 54x_2^2}$$

Neste problema para cada valor de x e y poderemos ter um t.

x_1	x_2	tamanho passo	iteração
-10.0000	10.0000	-	0
-6.4286	-0.7143	0.1786	1
-1.0714	1.0714	0.4167	2
-0.6888	-0.0765	0.1786	3
-0.1148	0.1148	0.4167	4
-0.0738	-0.0082	0.1786	5
-0.0123	0.0123	0.4167	6
-0.0079	-0.0009	0.1786	7
-0.0013	0.0013	0.4167	8
-0.0008	-0.0001	0.1786	9
-0.0001	0.0001	0.4167	10

Exercício

- Faça a 1° iteração do método gradiente na busca da solução do seguinte problema: *Max* $f(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - xy - 2y$. Assuma o ponto inicial (0,0) e *determine o t ideal para essa iteração.*

Exercício

- 1° iteração do método gradiente na busca da solução do seguinte problema: *Max f(x,y) = 5x² + 5y² - xy - 2y.* Assumindo o ponto inicial (0,0) e *calculando o t ideal*

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10x - y \\ 10y - x - 2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(0{,}0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Z(t)} = \begin{bmatrix} 0 + t(0) \\ = +t(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2t \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{f(Z(}t\mathrm{))} = \mathrm{f}(0{,}-2t) = \ 20t^2 + 4t$$

Sendo $\mathrm{g}(t) = \mathrm{f(Z(}t\mathrm{))}$ e derivando *g(t)*

$$\mathrm{g}'(t) = 40t + 4 = 0$$

$$t = -\frac{1}{10}$$

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \left[0, \frac{1}{5}\right]$$

Exercício

- Faça a 2° iteração do método gradiente na busca da solução do seguinte problema: *Max* $f(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - xy - 2y$. Assuma o ponto anterior $\left[0, \frac{1}{5}\right]$ e *determine o t* ideal. Verifique se o *t* se mantém o mesmo da iteração anterior

Exercício

- 2° iteração do método gradiente na busca da solução do seguinte problema: *Max f(x,y) = 5x² + 5y² - xy - 2y.* Assumindo o ponto anterior $\left[0, \frac{1}{5}\right]$ e *calculando o t ideal*

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10x - y \\ 10y - x - 2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(0, \frac{1}{5}) = \left[-\frac{1}{5}, 0\right]$$

$$\mathrm{Z(t)} = \left[0 + t(-\frac{1}{5}), \frac{1}{5} + t(0)\right]$$

$$= \left[-\frac{t}{5}, \frac{1}{5}\right]$$

$$\mathrm{f(Z(}t\mathrm{))} = \mathrm{f}(-\frac{t}{5}, \frac{1}{5}) = \frac{1}{5}(t^2 + \frac{t}{5} - 1)$$

Sendo $\mathrm{g}(t) = \mathrm{f(Z(}t\mathrm{))}$ e derivando *g(t)*

$$\mathrm{g}'(t) = \frac{1}{5}\left(2t + \frac{1}{5}\right) = 0 \mid t = -\frac{1}{10}$$

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \left[0, \frac{1}{5}\right] - \frac{1}{10}\left[-\frac{1}{5}, 0\right] = \left[\frac{1}{50}, \frac{1}{5}\right]$$

Programação Não Linear

Método de Newton (ou Newton-Raphson)

- Desenvolvido por Isaac Newton e Joseph Raphson
- Em Cálculo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Encontra raízes de uma função diferenciável

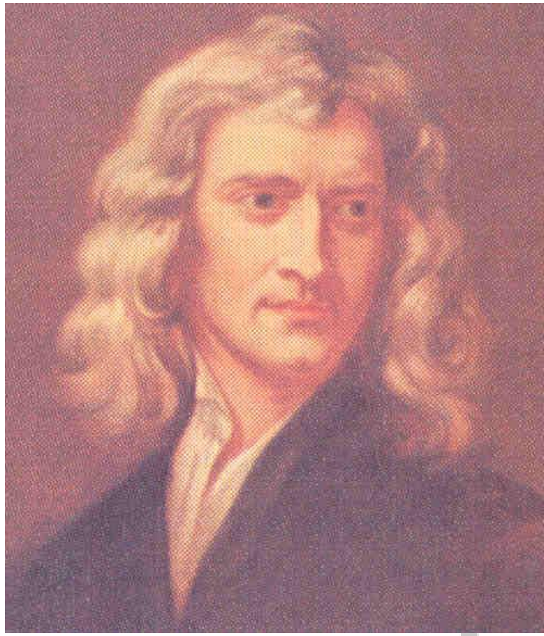
- Em Otimização:

(minimização)

$$x_{k+1} = x_k - \underbrace{\frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}}_{\textit{Passo } t}$$

Encontra raízes de uma função derivada (f') usando a derivada 2° (f'')

- Dependendendo da inicialização pode não chegar ao resultado (não há garantia de solução)



1642 – 1727

Programação Não Linear

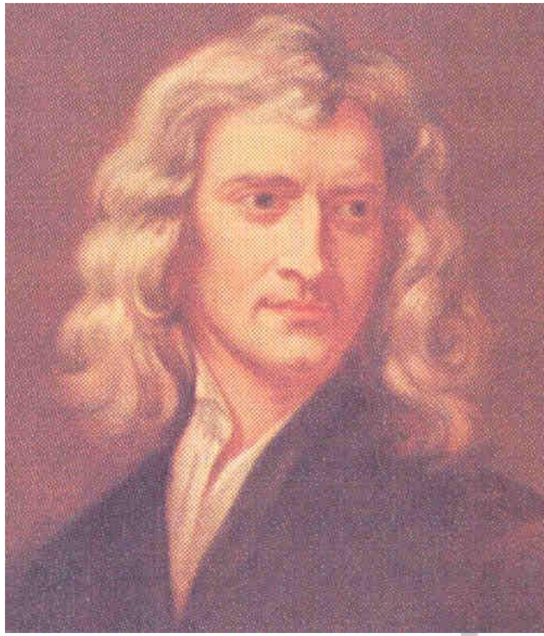
Método de Newton (ou Newton-Raphson)

- Exemplo: $f(x) = x^2$ | Vamos assumir Ponto inicial x=2

  Derivada de $f(x) = f'(x) = 2x$

- Passo: $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \rightarrow$$

- Iterações



1642 – 1727

Programação Não Linear

Método de Newton (ou Newton-Raphson)

- Exemplo: $f(x) = x^2$ | Vamos assumir Ponto inicial $x=2$

  Derivada de $f(x) = f'(x) = 2x$

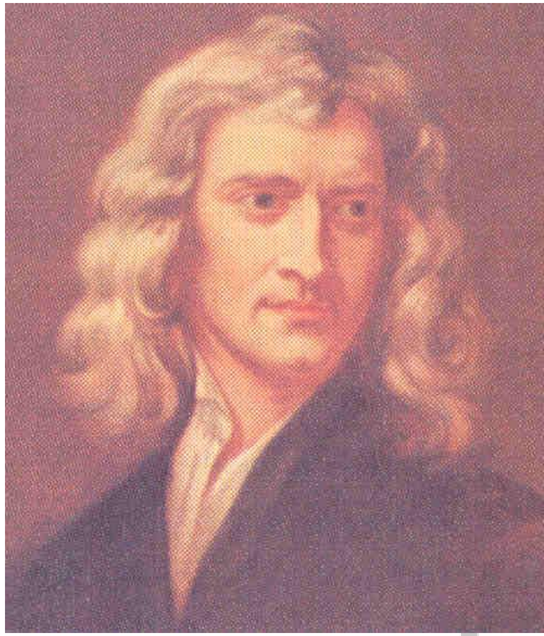
- Passo:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2}{2x_k}$$

- Iterações

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2}{2x_0} = 2 - \frac{2^2}{2 \times 2} = 2 - 1 = 1$$

$$x_2 = ?$$



1642 – 1727

Programação Não Linear

Método de Newton (ou Newton-Raphson)

- Exemplo: $f(x) = x^2$ | Vamos assumir Ponto inicial x=2

  Derivada de $f(x) = f'(x) = 2x$

- Passo:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2}{2x_k}$$

- Iterações

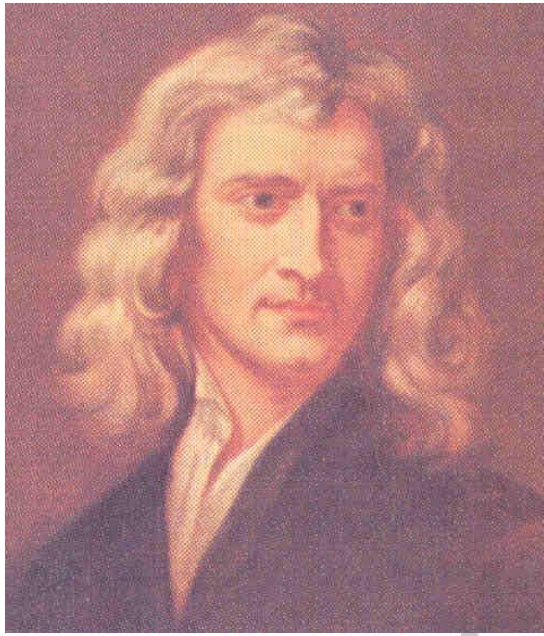
$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2}{2x_0} = 2 - \frac{2^2}{2 \times 2} = 2 - 1 = 1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2}{2x_1} = 1 - \frac{1^2}{2 \times 1} = 1 - 0.5 = 0.5$$

$x_3 = ?$

$x_4 = ?$

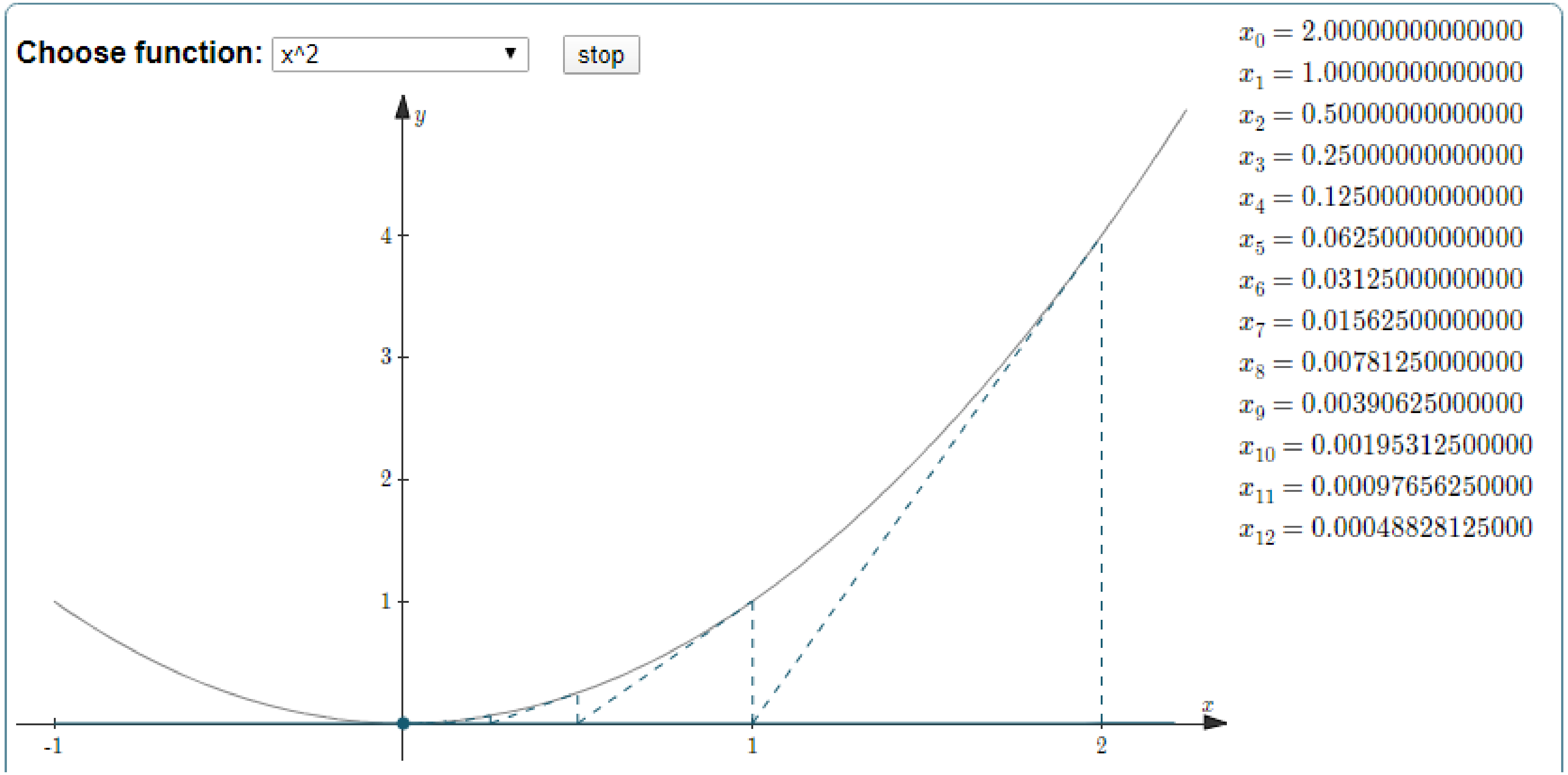
$x_5 = ?$

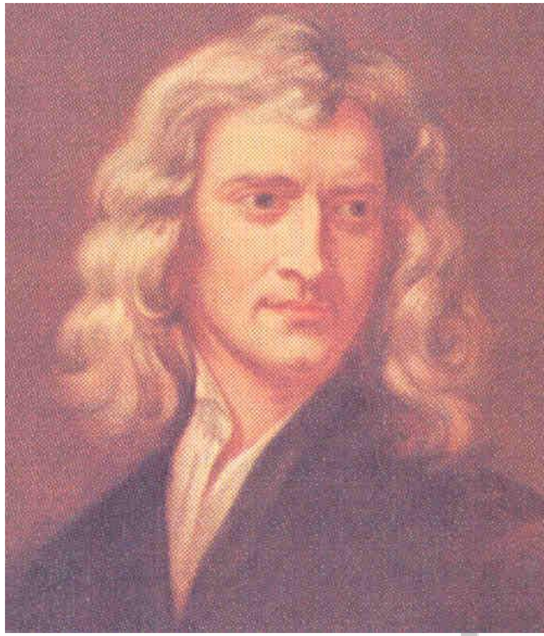


1642 – 1727

Programação Não Linear

Método de Newton (ou Newton-Raphson)





1642 – 1727

Exemplos interativo: https://www.intmath.com/applications-differentiation/newtons-method-interactive.php
Exemplos numéricos: https://www.math24.net/newtons-method/

Programação Não Linear

Método de Newton (ou Newton-Raphson)

- Exemplo Minimização: $f(x) = 4 + 8x^2 - x^4$ | Ponto inicial x=3

  Derivada primeira $f'(x) = 0 + 8(2)x - 4x^3 = 16x - 4x^3$
  Derivada segunda $f''(x) = 16 - 4(3)x^2 = 16 - 12x^2$

<u>Equação 1</u>

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{4 + 8x_k^2 - x_k^3}{16x_k - 4x_k^3}$$

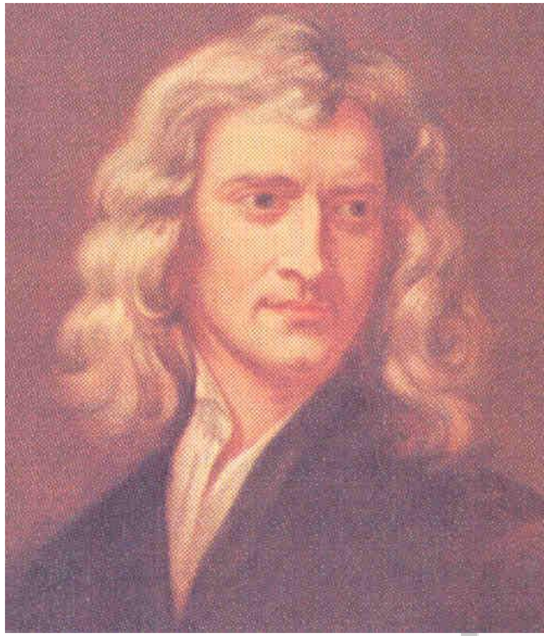
x_1 =2,917 .... x_2 =2,9107
MÁXIMO

<u>Equação 2 (Usando derivada 2ª)</u>

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{16x_k - 4x_k^3}{16 - 12x_k^2}$$

x_1 =2,347 .... x_4 =2
MÍNIMO



1642 – 1727

Exemplos: https://jmahaffy.sdsu.edu/courses/f00/math122/lectures/newtons_method/newtonmethodeg.html

Programação Não Linear

Método de Newton (ou Newton-Raphson)

- N-Dimensões

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

Vetor gradiente $\nabla f\ (x_k)$

Matriz Hessiana (n X n) das derivadas parciais de segunda ordem da função

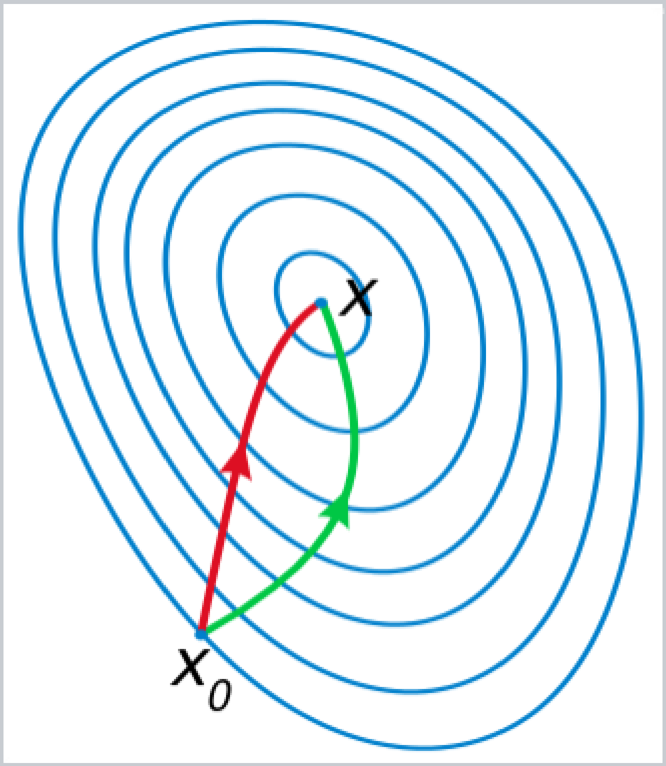
$$H\left[f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\, \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\, \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

$$x_{k+1} = x_k - H^{-1}\nabla f(x_k)$$

Programação Não Linear

Método Gradiente (Cauchy) x Método de Newton

- **Método de Cauchy**: lento, cauteloso. Tem garantia de convergência para soluções ótimas em condições muito gerais.
- **Método de Newton**: rápido, arrojado. Se for iniciado perto de uma solução ótima, pode ser excelente, mas pode divergir se partir de pontos ruins.
- **Métodos modernos**: "intermediários" entre os dois procurando unir as vantagens de ambos.



Gradiente
Newton