

Otimização de Sistemas

Prof. Sandro Jerônimo de Almeida, PhD.



Simplex Duas Fases



Problema

- O processo do simplex exige uma solução básica inicial (as variáveis devem ser positivas).
- Restrições do tipo \geq ou $=$ levam o problema a não ter uma solução básica inicial



Exemplo

$$\text{Minimizar } Z = 16X_1 + 12X_2 + 5X_3$$

Sujeito a:

$$8X_1 + 4X_2 + 4X_3 \geq 16$$

$$4X_1 + 6X_2 \geq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

- Invertendo as inequações para usar no Simplex teremos:

$$\text{Minimizar } Z = 16X_1 + 12X_2 + 5X_3$$

Sujeito a:

$$-8X_1 - 4X_2 - 4X_3 \leq -16$$

$$-4X_1 - 6X_2 \leq -12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



Exemplo

$$\text{Minimizar } Z = 16X_1 + 12X_2 + 5X_3$$

Sujeito a:

$$8X_1 + 4X_2 + 4X_3 \geq 16$$

$$4X_1 + 6X_2 \geq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

- Inserindo variáveis de folga

$$\text{Minimizar } Z = 16X_1 + 12X_2 + 5X_3 + 0X_4 + 0X_5$$

Sujeito a:

$$-8X_1 - 4X_2 - 4X_3 + 1X_4 = -16$$

$$-4X_1 - 6X_2 + 1X_5 = -12$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

Resolvendo com o Simplex, teremos:

$$X_4 = -16$$

$$X_5 = -12$$

Solução básica inicial inviável!

Simplex Duas Fases

- Criação de variáveis artificiais
 - Uma para cada restrições do tipo \geq ou $=$
- 1º Fase: descobrir a solução básica inicial
- 2º Fase: resolver o problema com o método simplex



Simplex Duas Fases

- Passo 1: após introduzidas as variáveis de folga ou de excesso, introduzir variável artificial para cada restrição do tipo \geq ou $=$

$$\text{Minimizar } Z = 16X_1 + 12X_2 + 5X_3 + 0X_4 + 0X_5$$

Sujeito a:

$$8X_1 + 4X_2 + 4X_3 - 1X_4 = 16$$

$$4X_1 + 6X_2 - 1X_5 = 12$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$



Simplex Duas Fases

- Passo 1: após introduzidas as variáveis de folga ou de excesso, introduzir variáveis artificiais - uma para cada restrições do tipo \geq ou $=$

$$8X_1 + 4X_2 + 4X_3 - 1X_4 + X^a_1 = 16$$

$$4X_1 + 6X_2 - 1X_5 + X^a_2 = 12$$

Variáveis de excesso

X_4 e X_5

Variáveis artificiais

X^a_1 e X^a_2

Simplex Duas Fases

- Passo 2: cria-se uma nova função objetivo artificial usando as restrições que possuam variáveis artificiais
 - soma-se os coeficientes da variáveis originais e de folga
 - Zero para os coeficientes da variáveis artificiais
 - Soma dos termos independentes para o novo Z^a

$$8X_1 + 4X_2 + 4X_3 - 1X_4 + X^a_1 = 16$$

$$4X_1 + 6X_2 - 1X_5 + X^a_2 = 12$$

$$\text{Função Objetivo: } - (12X_1 + 10X_2 + 4X_3 - 1X_4 - 1X_5 + 0X^a_1 + 0X^a_2 = 28)$$

Artificial (Z^a)

Simplex Duas Fases

- Passo 3: monta-se o quadro Simplex adicionando a função objetivo artificial na última linha

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X^a_1	X^a_2	b
X^a_1	8	4	4	-1	0	1	0	16
X^a_2	4	6	0	0	-1	0	1	12
Z	-16	-12	-5	0	0	0	0	0
Z^a	-12	-10	-4	1	1	0	0	-28

Simplex Duas Fases

- Passo 4: Aplica-se o simplex normalmente, assumindo a última linha como a função objetivo. Quando a solução ótima for atingida, dois casos podem acontecer:
 - a) $Z^a = 0$ | Neste caso foi obtida uma solução básica inicial do problema, e o processo deve continuar (2° fase), desprezando-se as variáveis artificiais e os elementos da última linha.
 - b) $Z^a \neq 0$ | Neste caso o problema original não tem solução viável, o que significa que as restrições devem ser inconsistentes



Simplex Duas Fases

- Resolvendo – Quadro 1



Entra: ??

Sai: ??

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X^a_1	X^a_2	b
X^a_1	8	4	4	-1	0	1	0	16
X^a_2	4	6	0	0	-1	0	1	12
Z	-16	-12	-5	0	0	0	0	0
Z^a	-12	-10	-4	1	1	0	0	-28

Simplex Duas Fases

■ Resolvendo – Quadro 1



Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X^a_1	X^a_2	b
X^a_1	8	4	4	-1	0	1	0	16
X^a_2	4	6	0	0	-1	0	1	12
Z	-16	-12	-5	0	0	0	0	0
Z^a	-12	-10	-4	1	1	0	0	-28

Simplex Duas Fases

- Resolvendo – Quadro 2

Entra: ??

Sai: ??

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X^a_1	X^a_2	b
X_1	1	1/2	1/2	-1/8	0	1/8	0	2
X^a_2	0	4	-2	1/2	-1	-1/2	1	4
Z	0	-4	3	-2	0	2	0	32
Z^a	0	-4	2	-1/2	1	3/2	0	-4

Simplex Duas Fases

- Resolvendo – Quadro 2



Entra: ??
Sai: ??



Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X^a_1	X^a_2	b
X_1	1	1/2	1/2	-1/8	0	1/8	0	2
X^a_2	0	4	-2	1/2	-1	-1/2	1	4
Z	0	-4	3	-2	0	2	0	32
Z^a	0	-4	2	-1/2	1	3/2	0	-4

Simplex Duas Fases

- Resolvendo – Quadro 3

Solução Ótima encontrada!

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X^a_1	X^a_2	b
X_1	1	0	$3/4$	$-3/16$	$1/8$	$3/16$	$-1/8$	$3/2$
X_2	0	1	$-1/2$	$1/8$	$-1/4$	$-1/8$	$1/4$	1
Z	0	0	1	$-3/2$	-1	$3/2$	1	36
Z^a	0	0	0	0	0	1	1	0

Simplex Duas Fases

- Resolvendo – Quadro 3

Deve-se desprezar as variáveis artificiais e função objetivo artificial.

Final da Fase 1

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X^a_1	X^a_2	b
X_1	1	0	$3/4$	$-3/16$	$1/8$	$3/16$	$-1/8$	$3/2$
X_2	0	1	$-1/2$	$1/8$	$-1/4$	$-1/8$	$1/4$	1
Z	0	0	1	$-3/2$	-1	$3/2$	1	36
Z^a	0	0	0	0	0	1	1	0

Simplex Duas Fases

- Fase 2 – Resolver pelo Simplex normalmente...

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b
X_1	1	0	$3/4$	$-3/16$	$1/8$	$3/2$
X_2	0	1	$-1/2$	$1/8$	$-1/4$	1
Z	0	0	1	$-3/2$	-1	36

