Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas e Informática
Departamento de Ciência da Computação
Curso de Ciência da Computação

Algoritmos em Grafos

Parte 3

Raquel Mini

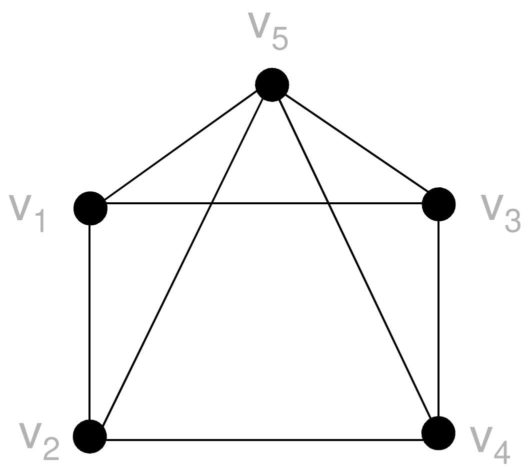
raquelmini@pucminas.br

Coloração

Deo – páginas 165 até 169 e 186 até 190

Coloração de Grafos

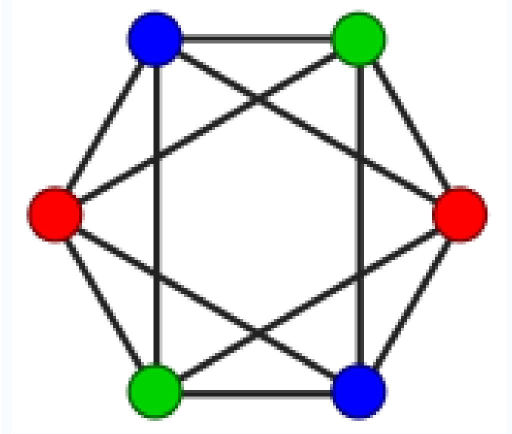
- Dado um grafo G, como pintar seus vértices com várias cores de maneira que vértices adjacentes são pintados com cores diferentes? Qual é o menor número de cores necessárias?



- Dado um grafo G sem autoloops, uma coloração de G é uma atribuição de cores aos vértices de G de maneira que cores diferentes são atribuídas a vértices adjacentes

Coloração de Grafos

- Se existe uma coloração para um grafo G que utiliza K cores, então G é um grafo K-colorido
- O número cromático de um grafo G, denotado por X(G), é o menor número K para o qual G é K-colorido



X(G) = 3

Coloração de Grafos

- Observações
  - Não precisamos considerar grafos desconexos porque as cores utilizadas em um componente não tem efeito sobre as do outro componente
  - Arestas paralelas não afetam a coloração
  - Grafo não pode ter *autoloops*

GRAFOS CONEXOS SIMPLES

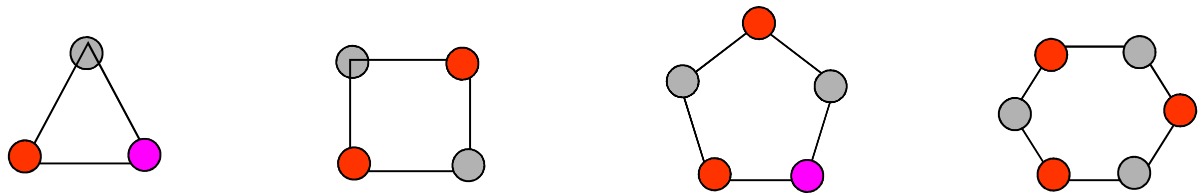
Coloração de Grafos

- O que podemos dizer sobre o número cromático dos seguintes grafos?
  - grafo que consiste de um único vértice
  - grafo com pelo menos uma aresta
  - grafo completo K_n
  - grafo bipartido
  - árvore com 2 ou mais vértices

- Todo grafo 2-cromático é bipartido?
- Todo grafo 2-cromático é uma árvore?

Coloração de Circuitos

- Um grafo consistindo simplesmente de um circuito com $n \geq 3$ vértices é 2-cromático se n é par e 3-cromático se n é impar



- Um grafo simples G com pelo menos uma aresta é 2-cromático se, e somente se, G não contiver circuitos de tamanho ímpar

Coloração de Grafos

- Se d é o maior grau dos vértices de um grafo simples G então

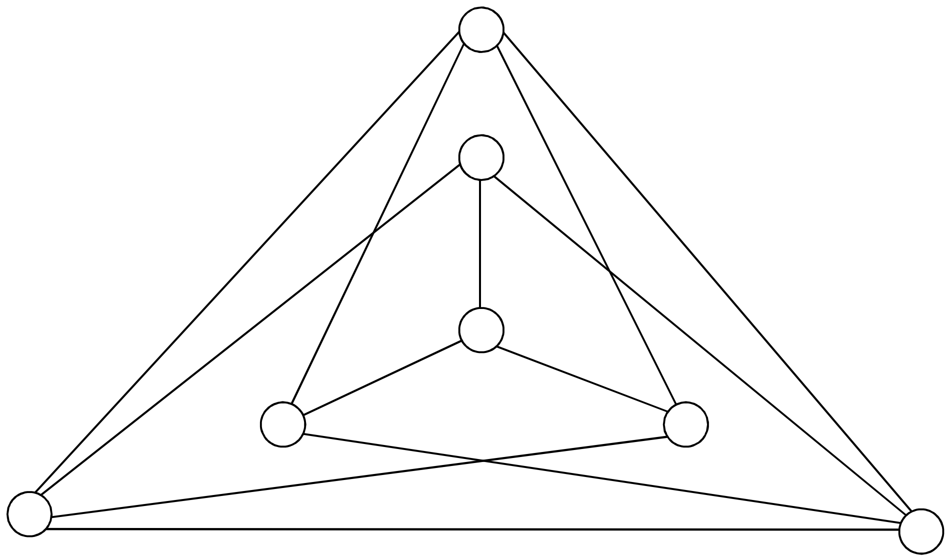
$$X(G) \leq d+1$$

- Se d é o maior grau dos vértices de um grafo simples G, tal que G não contém um grafo circuito com um número ímpar de vértices e nem um grafo completo, de $d+1$ vértices, então

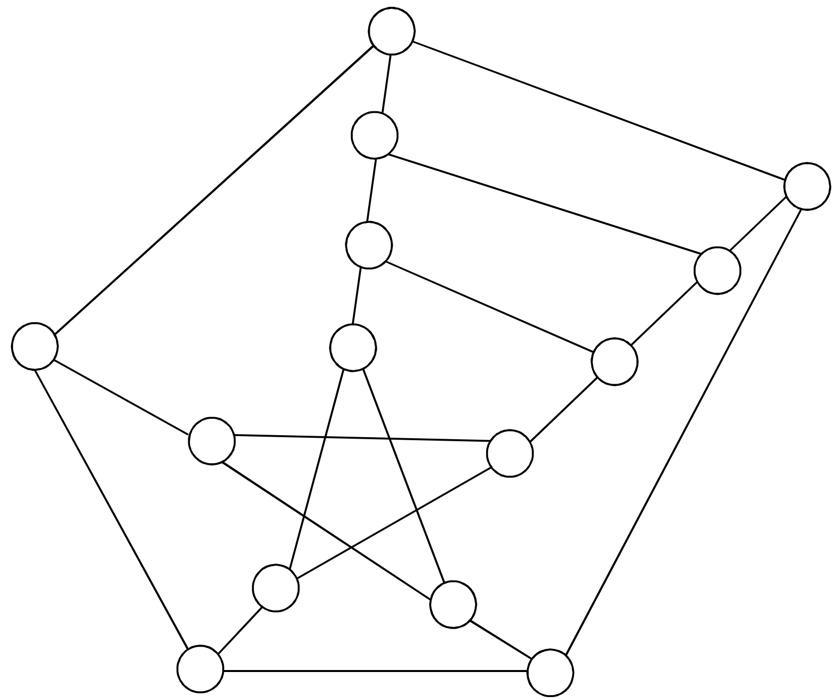
$$X(G) \leq d$$

Exercícios

19. Qual é o número cromático dos seguintes grafos?



a)



b)

Coloração de Arestas

- Uma coloração de arestas de um grafo simples `G` é uma atribuição de cores às arestas de `G` de maneira que cores diferentes são atribuídas a arestas adjacentes
- Se existe uma coloração de arestas para um grafo `G` que utiliza `K` cores, então, `G` é um grafo `K-colorido` de arestas
- O índice cromático de um grafo `G`, denotado por `X'(G)` é o menor número `K` para qual `G` é `K-colorido` de arestas

Coloração de Arestas

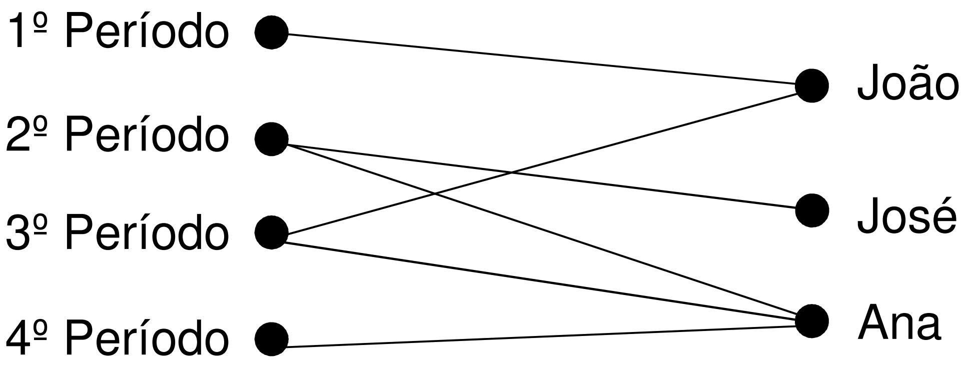
- Se G é um grafo simples cujo vértice de maior grau tem grau d, então

$$d \leq X'(G) \leq d+1$$

- Qual é a coloração de arestas do K_n?

Coloração de Arestas

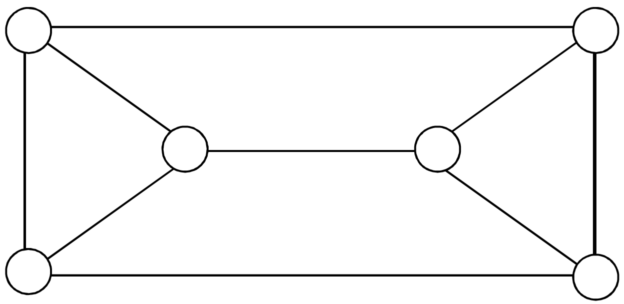
- Três professores lecionam disciplinas em 4 períodos do curso:



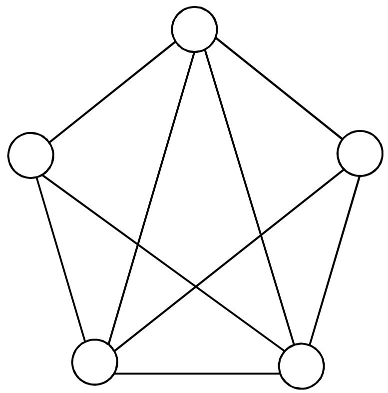
Como alocar horários para as aulas, sem que haja conflito para os professores e para as turmas?

Exercícios

20. Mostre que se um grafo bipartido possui algum circuito, esse deve ser de tamanho par.
21. Qual é o índice cromático do C_n?
22. Qual é o índice cromático do K_n?
23. Encontre o $X'(G)$ para os seguintes grafo G:



(a)



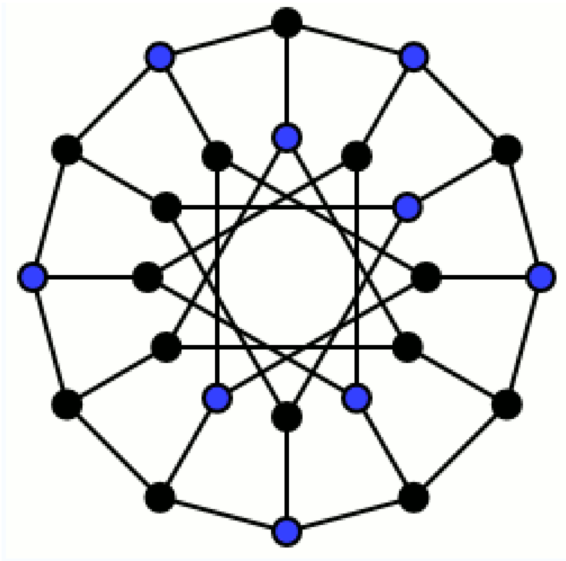
(b)

Independência
Dominância
Casamento

Deo – páginas 169 até 173 e 177 até 182

Conjunto Independente

- Uma coloração de um grafo induz a um particionamento dos vértices em subconjuntos de vértices chamados conjunto independentes
- Conjunto independente: conjunto de vértices do grafo no qual nenhum par de vértices do conjunto é adjacente



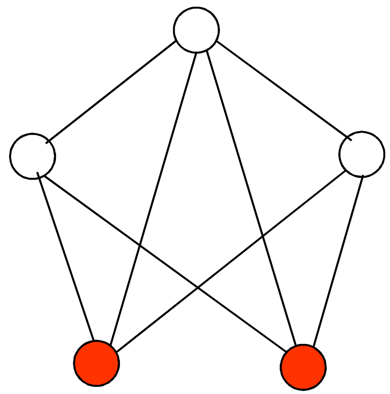
Conjunto Independente

- <u>Conjunto independente máximo:</u> conjunto independente no qual nenhum vértice pode ser adicionado sem destruir a independência

- <u>Número de independência:</u> número de vértices do maior conjunto independente máximo do grafo ($\beta(G)$)

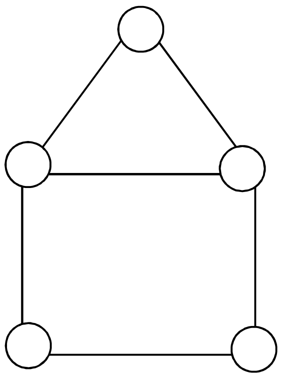
Conjunto Dominante

- <u>Conjunto dominante:</u> conjunto de vértices do grafo que "dominam" todos os vértices do grafo: um vértice v pertence ao conjunto dominante ou é adjacente a um vértice que pertence.
- <u>Conjunto dominante mínimo:</u> conjunto dominante com o menor número de vértices. $\alpha(G)$

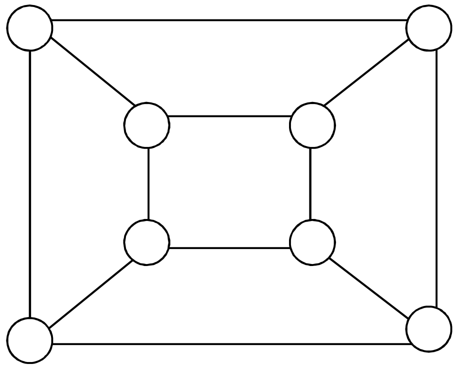


Exercícios

25. Encontre um conjunto dominante mínimo em cada um dos seguintes grafos:



(a)



(b)

Exercícios

26. Prove que a seguinte afirmativa é verdadeira ou mostre um exemplo que a torne falsa “em qualquer grafo conexo e simples, o conjunto dominante mínimo é sempre menor ou igual ao conjunto independente máximo”.

Exercícios

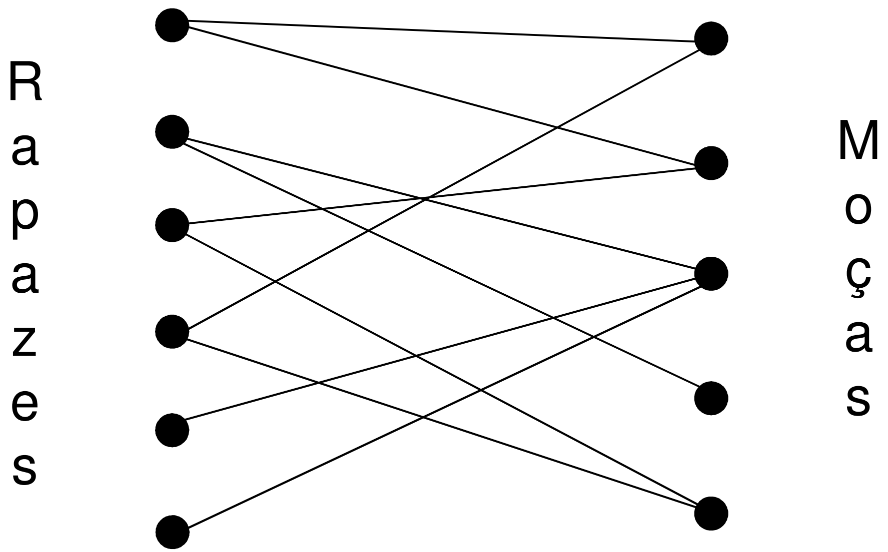
27. Considere um conjunto $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ de n atividades propostas que desejam usar um mesmo recurso o qual só pode ser utilizado por uma única atividade de cada vez. Cada atividade a_i tem um tempo de início s_i e um tempo de término f_i. O problema de seleção de atividades consiste em selecionar um subconjunto de tamanho máximo de atividades que podem ser executadas (mutuamente compatíveis). Modele este problema utilizando Teoria dos Grafos e proponha uma solução para ele.

Exercícios

28. Florianópolis é uma cidade que possui 42 praias. Para garantir a segurança dos veranistas o Corpo de Bombeiros sugeriu ao Governo do Estado o estabelecimento de bases de operação de busca, salvamento e atendimentos emergenciais. Contudo, dada a escassez de recursos, o Governo do Estado não julga viável implementar estas bases em todas as praias. Desta forma, ele solicitou um estudo ao Corpo de Bombeiros visando definir um conjunto de praias candidatas, considerando que uma vez implantada uma base numa das praias esta base pode atender a todas as praias vizinhas que estejam a menos de 5 km dela via estrada. Como se poderia identificar este conjunto de praias candidatas? Modele este problema utilizando Teoria dos Grafos e proponha uma solução para ele.

Casamento

- Uma agência de casamentos tem cadastrados `r` rapazes e `m` moças que desejam se casar. A agência detectou a seguinte afinidade entre eles:



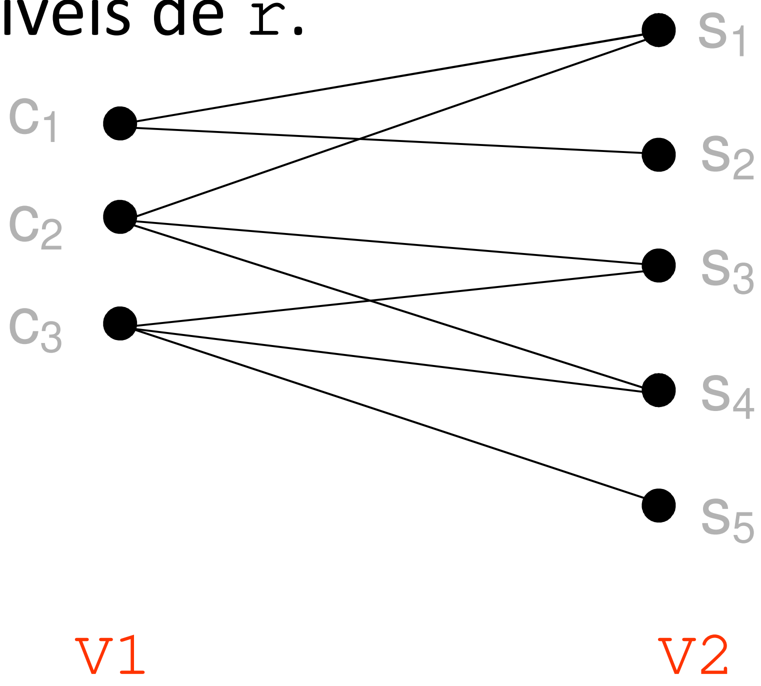
Como maximizar o número de casamentos?

Casamento

- Um <u>casamento</u> em um grafo é um conjunto de arestas no qual nenhum par de arestas do grafo é adjacente
- <u>Casamento máximo</u> é um casamento no qual nenhuma aresta pode ser incluída
- <u>Casamento completo</u> (em grafos bipartidos) é um casamento no qual todos os vértices de um dos conjuntos são casados a algum vértice do outro conjunto

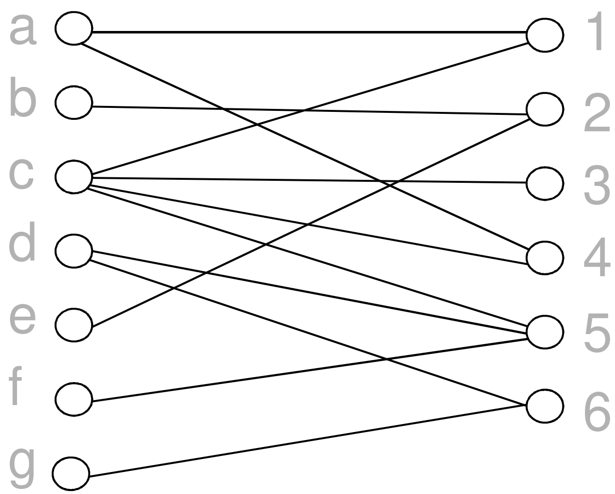
Casamento

- Um casamento completo de `V1` em `V2` em um grafo bipartido `G` existe se, e somente se, todo subconjunto de `r` vértices de `V1` for coletivamente adjacente a `r` ou mais vértices de `V2` para todos os valores possíveis de `r`.



Exercícios

24. Encontre um casamento máximo e um casamento completo para o seguinte grafo bipartido.

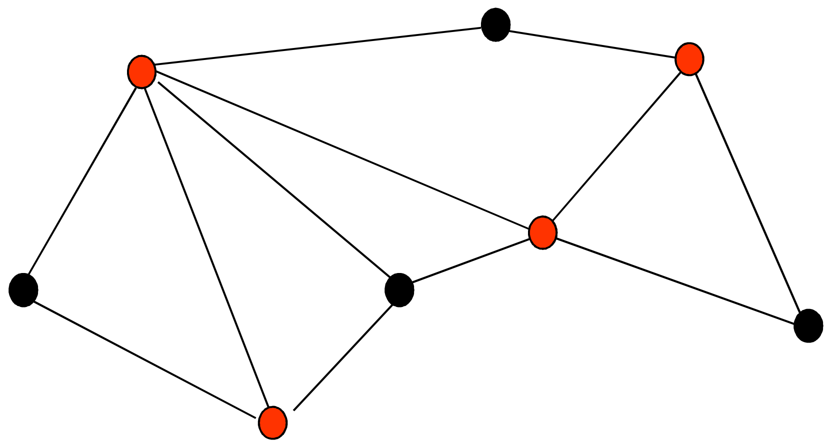


Coberturas

Deo – páginas 182 até 186

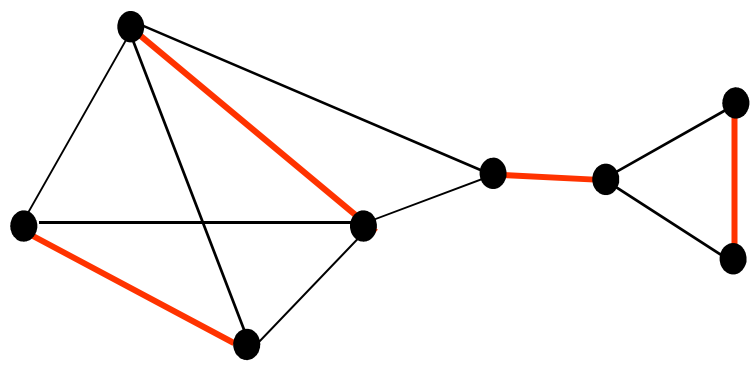
Cobertura de Vértices

- Em um grafo `G`, um conjunto `g` de vértices é chamado de cobertura de vértices se todas as arestas de `G` são incidentes a pelo menos um vértice de `g`
- Se este conjunto é o menor com tal propriedade dizemos que `g` é uma cobertura mínima de vértices



Cobertura de Arestas

- Em um grafo G, um conjunto e de arestas é chamado de cobertura de aresta se todos os vértices de G são incidentes a pelo menos uma aresta de e
- Se este conjunto é o menor com tal propriedade dizemos que e é uma cobertura mínima de aresta



Exercícios

25. Um subconjunto de vértices, C, de um grafo simples, G, é um clique se existir uma aresta entre todos os pares de vértices distintos em C, ou seja, todo par de vértices de um clique é adjacente. O que representa em um conjunto de vértices que é um clique em G? Qual é o nome dado a este conjunto? Justifique.
26. Se G é um grafo conexo, mostre que existe uma sequência de arestas que passa todas as arestas de G exatamente 2 vezes e termina no vértice inicial.

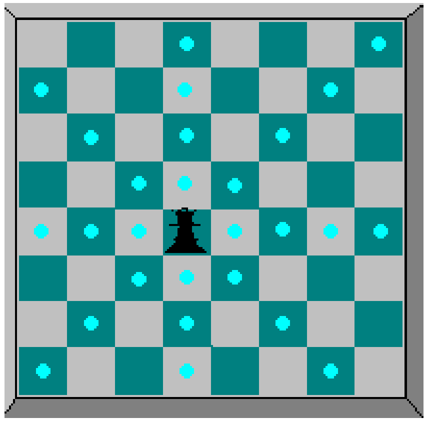
Exercícios

27. Quantos vértices existem em uma cobertura mínima de vértices de grafos bipartidos, grafos completos e grafos circuitos?
28. Podemos dizer que o número de vértices de uma cobertura mínima de vértices é sempre maior ou igual ao número de vértices do conjunto dominante mínimo? Justifique.
29. Dado um grafo conexo G, quais arestas estarão sempre presentes em todas as coberturas de aresta de G?
30. Dê exemplos de grafos que não possuem cobertura de aresta.

Modelagens

Exemplo 1

- A rainha é a peça mais poderosa do jogo de Xadrez. Numa jogada ela pode mover-se tantas casas quantas quiser em qualquer direção vertical, horizontal ou diagonal, desde que não haja nenhuma outra peça que obstrua sua passagem. O desenho que se segue mostra uma posição particular da rainha, juntamente com as 27 possibilidades de movimento. Estas 27 casas (além daquela onde a rainha está) estão sob o domínio da rainha. Qualquer outra peça que estivesse numa destas casas estaria sob ataque da rainha em questão.



Exemplo 1 (cont.)

- Encontre o número máximo de rainhas que podem ser colocadas em um tabuleiro de forma que nenhuma rainha ataque a outra. Modele este problema utilizando Teoria dos Grafos e proponha uma solução para ele.
- Encontre o menor número de rainhas que podem ser colocadas em um tabuleiro de forma que toda posição não ocupada seja atacada. Modele este problema utilizando Teoria dos Grafos e proponha uma solução para ele.

Exemplo 2

- Uma empresa possui `N` tarefas a serem executadas e `K` funcionários já contratados. Muitas das tarefas são complexas e exigem trabalho especializado, de modo que a partir das características de cada funcionários e de cada tarefa, a empresa já designou quais funcionários estarão responsáveis por quais tarefas. Se todos os funcionários designados para uma determinada tarefa estiverem disponíveis, esta tarefa poderá ser executada em uma hora. A empresa deseja saber o número mínimo de horas que serão necessários para que todas as tarefas sejam executadas. Modele este problema utilizando teoria de grafos e proponha uma solução para ele.

Exemplo 3

- Suponha que N candidatos a uma vaga devem ser entrevistados individualmente por profissionais de uma empresa.
- Os entrevistadores são escolhidos de acordo com a área de atuação que o candidato está pleiteando
- Como determinar o número mínimo de períodos de entrevista considerando que cada profissional entrevista individualmente cada candidato?
- Como determinar o número mínimo de períodos de entrevista considerando que todos os profissionais entrevistam conjuntamente todos os candidatos no mesmo período.

Exemplo 4

- Existem $2n$ meninas que toda manhã vão andando para o colégio em grupo de 2. Encontre o número de dias que serão necessários para que cada garota saia exatamente 1 vez com todas as outras meninas.

Exemplo 5

- Neste ano, Maria ficou responsável pela organização da quadrilha do seu bairro. Sabe-se que existem `n` meninas e `n` meninos dispostos a participar. Ela gostaria de saber de quantas maneiras possíveis ela poderia fazer o agrupamento dos casais de forma que nenhum casal de repita de um agrupamento para o outro. Modele este problema utilizando teoria dos grafos e proponha uma solução para ele.

Exemplo 6

- Suponha que n times estão participando de uma competição na qual cada time deve jogar exatamente uma vez contra cada um dos outros $n-1$ times. Assumindo que qualquer quantidade de jogos com qualquer quantidade de times pode ser jogado simultaneamente, quantas rodadas serão necessárias para finalizar este torneio? Modele este problema utilizando teoria de grafos e proponha uma solução para ele.

Exemplo 7

- O Rio de Janeiro está preparando uma campanha de vacinação. O mapa a seguir mostra a localização de postos de vacinação e arestas ligando postos cujo tempo de deslocamento seja menor que 15 minutos. Cada posto de vacinação pode ser transformado em um posto de coordenação e distribuição de vacinas. Para facilitar a logística, um ponto de coordenação pode atender todos os postos de vacinação cujo tempo de deslocamento seja menor que 15 minutos. Qual é o número mínimo de postos de coordenação necessários? Modele este problema utilizando a teoria dos grafos e proponha uma solução para ele.

Exemplo 7 (cont.)

Exemplo 8

- Uma escola deve programar a distribuição dos exames especiais de forma que os alunos não tenham que fazer mais do que um exame por dia. Existem oito disciplinas no curso e a secretaria organizou um quadro que marca com um asterisco as disciplinas que possuem alunos em comum. Qual é o número mínimo de dias de exame necessários? Modele este problema utilizando Teoria do Grafos e proponha uma solução para ele.

Exemplo 8 (cont.)

	Português	Matemática	História	Geografia	Inglês	Biologia	Química	Física
Português	-	*	-	*	-	*	*	*
Matemática		-	*	-	-	-	*	*
História			-	*	-	-	-	*
Geografia				-	*	*	-	*
Inglês					-	*	-	-
Biologia						-	*	-
Química							-	*
Física								-

Exemplo 9

- Em uma creche há 10 crianças matriculadas, porém, nunca estão todas ao mesmo tempo na creche. É necessário planejar os escaninhos em que os pais deixam as refeições das crianças. A tabela a seguir apresenta a permanência de cada criança (enumeradas de 1 a 10) na creche nos horários entre 7:00 e 12:00 – o horário em que a creche funciona. Um asterisco indica que uma determinada criança está na creche no horário indicado, e deve ter um escaninho reservado para sua refeição. Modele o problema utilizando a teoria de grafos e determine o número mínimo de escaninhos necessários para que cada criança tenha um escaninho individual.

Exemplo 9 (cont.)

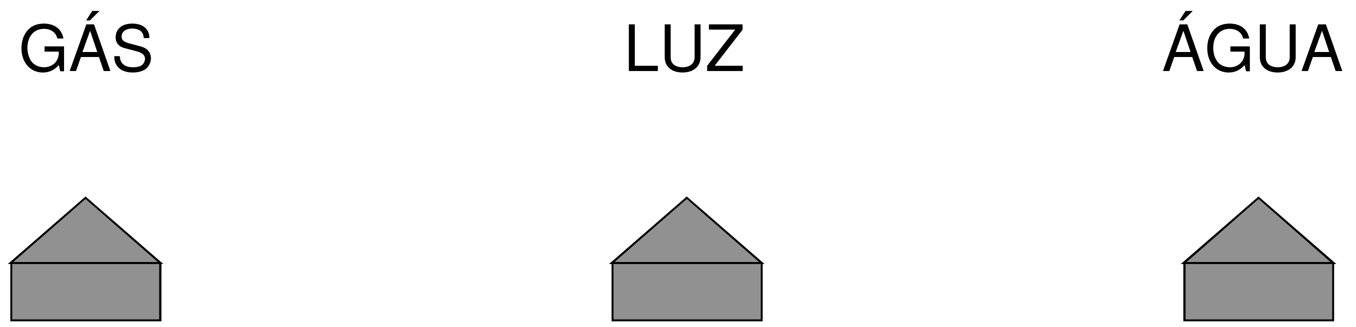
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
07:00	*	-	-	-	*	-	-	*	-	-
08:00	*	*	*	-	*	-	-	*	-	-
09:00	*	*	*	-	-	*	-	*	-	*
10:00	*	*	-	-	-	*	*	-	*	*
11:00	*	-	-	*	-	-	*	-	*	*
12:00	-	-	-	*	-	-	-	-	*	*

Exemplo 10

- Existem n experimentos biológicos sendo processados e_1; e_2; ...; e_i em determinado laboratório. Cada um desses experimentos possui várias lâminas de ensaio que devem ser mantidas refrigeradas segundo uma temperatura constante em um intervalo de temperatura $[l_i; h_i]$. A temperatura pode ser fixada livremente dentro do intervalo, contudo, uma vez fixada, não mais poderá ser alterada, sob pena de destruir os elementos biológicos. Dados os intervalos e sabendo-se que cada refrigerador é grande o suficiente para preservar todas as lâminas de todos os experimentos, cada refrigerador deverá funcionar em apenas uma temperatura. Modele o problema utilizando a teoria de grafos e determine o menor número possível de refrigeradores capazes de atender ao laboratório.

Planaridade e Dualidade

Planaridade

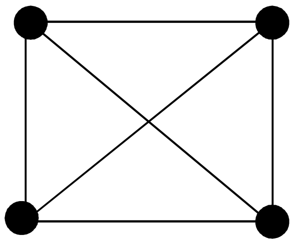


- É possível levar gás, luz e água às três residências sem cruzamento de tubulações?

- É possível desenhar um determinado grafo no plano sem cruzamento de arestas?

Planaridade

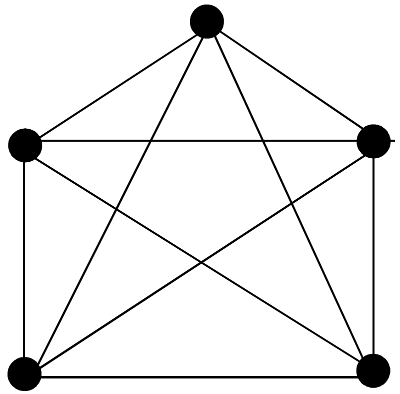
- Grafo planar: um grafo G é planar se existir uma representação gráfica de G no plano sem cruzamento de arestas



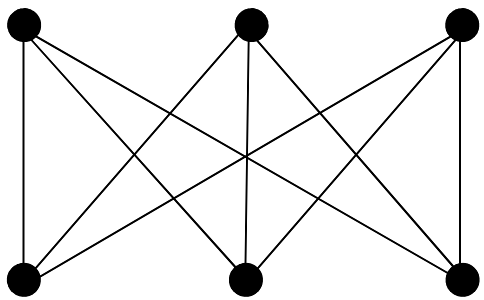
K_4 é planar?

Planaridade

- Grafos de Kuratowski: K_5 e $K_{3,3}$



K_5: grafo não planar com o menor número de vértices



$K_{3,3}$: grafo não planar com o menor número de arestas

Planaridade

- Propriedades em comum entre K_5 e $K_{3,3}$:
  1. Ambos são regulares
  2. Ambos são não planares
  3. A remoção de uma aresta ou um vértice torna o grafo planar
  4. K_5 é o grafo não-planar com o menor número de vértices e o $K_{3,3}$ com o menor número de arestas

Planaridade

- Qualquer grafo planar simples pode ter sua representação planar utilizando apenas linhas retas

- Região (ou face): uma representação gráfica planar de um grafo divide o plano em regiões ou faces. Cada região é caracterizada pelas arestas que a contornam

- Região infinita: é a porção infinita do plano que não é contornada por arestas

Planaridade

- Fórmula de Euler: seja G um grafo conectado planar com n vértices e e arestas. O número de faces do grafo é $f = e - n + 2$

- Em um grafo simples, conectado e planar com n vértices, e arestas e f faces, tem-se que:

$$\frac{3}{2} f \leq e \leq 3n - 6$$

Condição necessária,
mas não suficiente
para que um grafo seja planar

Exercícios

31. Prove matematicamente que os grafos K_5 e $K_{3,3}$ não são planares.

32. Prove que em um grafo planar com n vértices, existe pelo menos 1 vértice de grau menor ou igual a 5.

Exercícios

33. Encontre o número de arestas de um grafo no qual toda região é limitada por exatamente k arestas.

34. Mostre que se um grafo simples G tem pelo menos 11 vértices, ambos G e seu complemento não podem ser planares.

Detecção de Planaridade

- Um grafo desconectado é planar se e somente se cada um de seus componentes for planar

- Se G é um grafo planar, então, a inclusão ou remoção de:
  - arestas paralelas
  - loops
  - vértices de grau 2 (arestas em série) não afetam a planaridade de G

Detecção de Planaridade

- Redução elementar

```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou
arestas em série faça
    remova loops
    remova as arestas paralelas
    contraia as arestas em série
fim enquanto
```

Detecção de Planaridade

- Após a aplicação do algoritmo de redução o grafo resultante H_i é:
  1. Uma única aresta, ou
  2. Um grafo completo com 4 vértices, ou
  3. Um grafo simples com $n \geq 5$ e $e \geq 7$

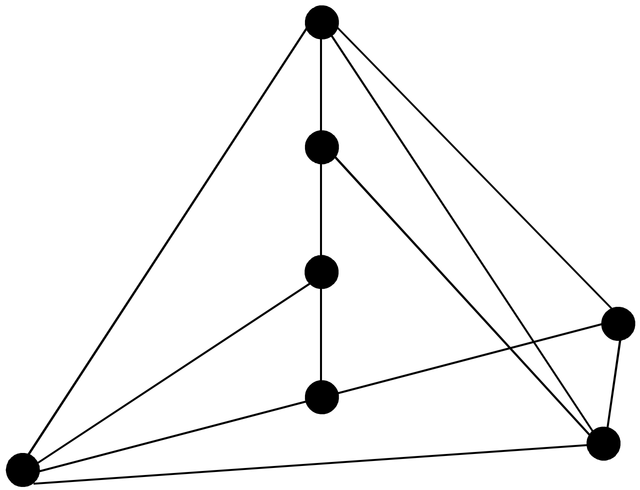
- Se H_i cair nas condições 1 ou 2 ele é planar, senão devemos continuar investigando

Detecção de Planaridade

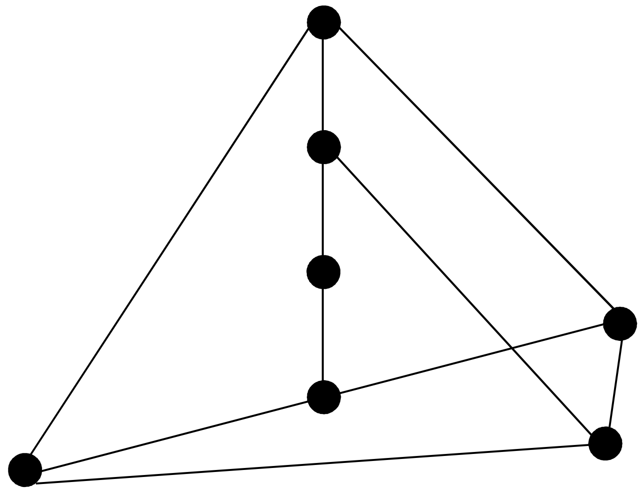
- Grafos homeomorfos: dois grafos G_1 e G_2 são homeomorfos se os grafos H_1 e H_2 obtidos a partir da redução elementar de G_1 e G_2 respectivamente forem isomorfos

Detecção de Planaridade

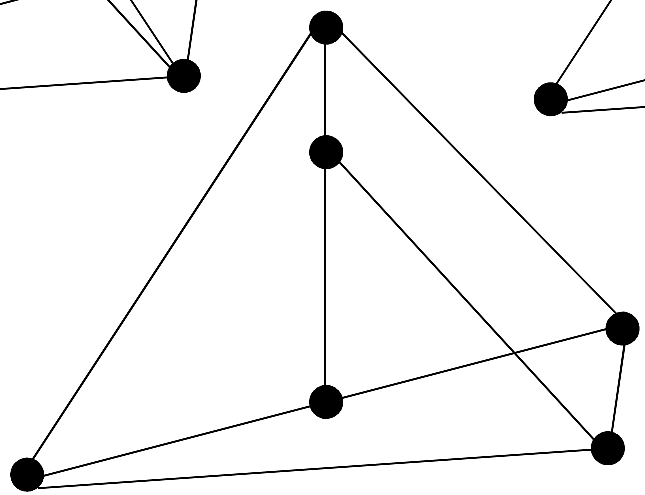
- Um grafo G é planar se e somente se nenhum subgrafo seu for homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$



G



subgrafo de G



contração do subgrafo

Dualidade

- Dado um grafo `G` planar, o grafo `G*`, chamado dual de `G`, é construído da seguinte forma:
  - para cada face `f` de `G`, `G*` tem um vértice
  - una os vértices de G* da seguinte forma
    - se 2 regiões f_i e f_j são adjacentes (possuem alguma aresta em comum) coloque uma aresta entre v_i e v_j interceptando a aresta em comum
    - se existirem mais de uma aresta em comum entre f_i e f_j coloque uma aresta entre v_i e v_j para cada aresta em comum
    - se uma aresta está inteiramente em uma região, f_k, coloque um loop no vértice vk.

Dualidade

- Existe uma correspondência um-para-um entre as arestas do grafo G e do seu dual G*: uma aresta de G* intercepta uma aresta de G.

G	G*
número de faces	
número de vértices	
número de arestas	
loop	
aresta paralela	
vértice pendente	
aresta em série	
circuito	

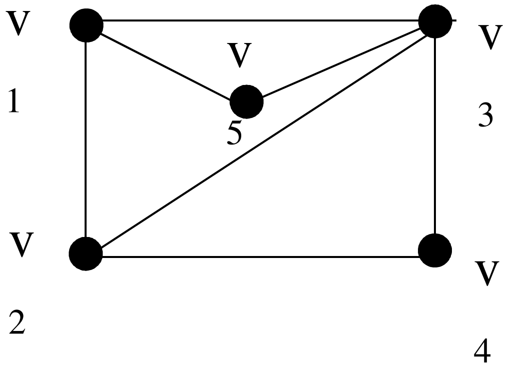
Dualidade

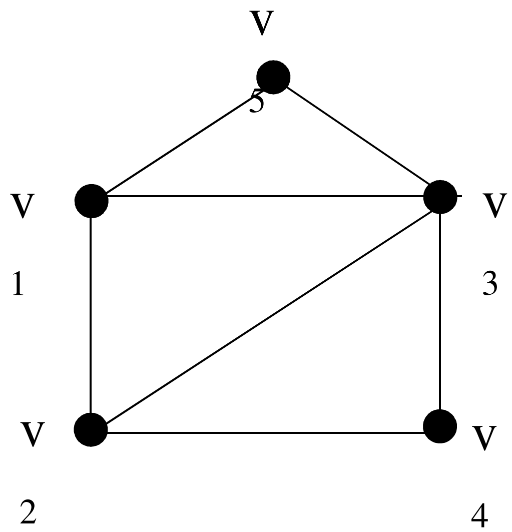
- O número de arestas que limitam a região F_i em G é igual ao grau do vértice v_i em G*
- O grafo G* também é planar
- O grafo G também é dual de G*, então dizemos que G e G* são grafos duais
- Relações

$$n^* = f$$
$$e^* = e$$
$$f^* = n$$
$$r^* = \mu$$
$$\mu^* = r$$

Dualidade

- Todo dual de G é isomorfo a G*?





- Cada representação planar de um grafo G tem seu dual.

Exercícios

35. Um grafo planar e simples no qual nenhuma aresta pode ser adicionada sem destruir sua planaridade (mantendo o grafo simples) é chamado de grafo planar maximal. Prove que toda região de um grafo planar maximal é um triângulo.

36. Mostre que o dual do K_4 é o próprio K_4. Dê outro exemplo de um grafo que é igual ao seu dual.

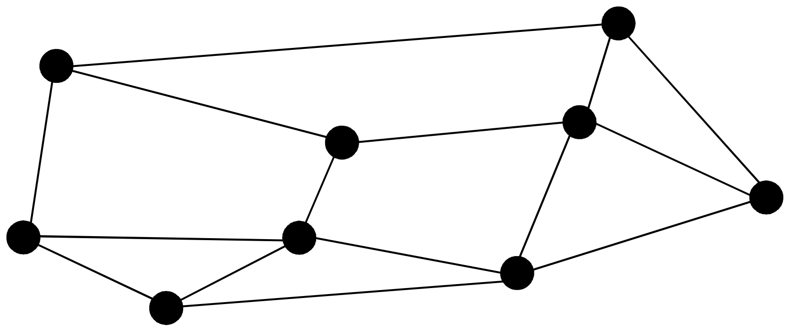
Exercícios

37. Encontre o número de faces de um grafo planar com n vértices, e arestas e k componentes.

38. Prove se a seguinte afirmativa é verdadeira ou falsa e justifique: “Qualquer grafo que tenha n vértices ($n \leq 5$) e 1 vértice de grau 2 é planar”.

Coloração de Faces

- Quantas cores são necessárias para colorir as faces de um grafo planar ?



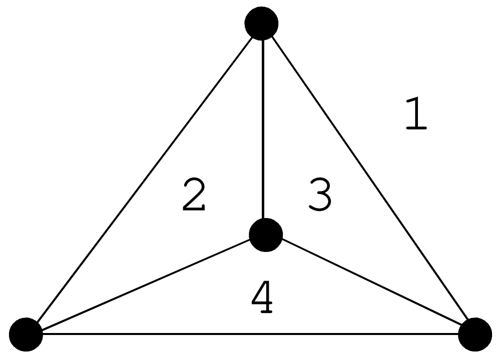
Coloração de Faces

- Se pegarmos o dual de G, G*, a coloração de vértices de G equivale à coloração de faces de G*. G é K-cromático de vértices se, e somente se, G* for K-cromático de faces

COLORAÇÃO DE MAPAS UTILIZANDO O MENOR NÚMERO DE CORES

Coloração de Faces

- TEOREMA: Todo grafo planar pode ser colorido com 4 cores: PROBLEMA DAS QUATRO CORES (provado em 1976)



4-cromático

Coloração de Faces

- TEOREMA: Um grafo planar G pode ter as faces coloridas com 2 cores se, e somente se, G for Euleriano.