Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Bacharelado em Ciência da Computação
Projeto e Análise de Algoritmos – 2º Semestre de 2018
Profª. Raquel Mini

1ª PROVA

Nome:____
Valor: 30 pontos

1. (8 pontos) Prove se as seguintes igualdades são corretas ou incorretas.

a) $n! = \Omega(n^n)$
b) $20n^3 + 10n\log n + 5 = O(n^3)$
c) $2^n n + 2^n n \log n = \Theta(2^n)$
d) $3\log n + \log(n^{10}) = O(\log n)$
e) $\dfrac{2n^3}{\log n + 1} = O(n^3)$
f) $0{,}001n^3 + 4n^2 = \Omega(n^2)$
g) $2^{100} = O(1)$
h) $2^n = \Theta(e^n)$

2. (8 pontos) Considere o problema de verificar quais pares dos n vetores de números inteiros S_1, S_2, S_3, ..., S_n, cada um com n elementos, são disjuntos (não possuem elementos em comum). Considerando o algoritmo para resolver esse problema apresentado abaixo e também que a operação relevante seja a comparação entre dois elementos dos vetores, responda às seguintes perguntas:

```
for each set Si
   for each other set Sj
      for each element p of Si
         Determine whether p also belongs to Sj
      if no element of Si belongs to Sj then
         Report that Si and Sj are disjoint
```

a) O número de vezes que a operação relevante é realizada depende somente do tamanho da entrada (e não da configuração da entrada)? Explique.
b) Qual é a configuração de entrada que leva ao pior caso desse algoritmo?
c) Quantas vezes a operação relevante é executada no pior caso? Estabeleça um somatório ou uma relação de recorrência para indicar o número de vezes que a operação relevante é executada e resolva este somatório ou relação de recorrência.
d) Represente o número de vezes que a operação relevante é executada utilizando a notação assintótica Θ.

3. (8 pontos) Considerando que a operação relevante seja o número de vezes que a operação soma é executada, responda às seguintes questões:

a) O que a função faz?
b) Escreva a equação de recorrência que descreve o comportamento da função.

c) Converta esta equação de recorrência para um somatório.
d) Forneça a fórmula fechada para este somatório.
e) Escreva a fórmula fechada em notação Θ. Justifique.

```
int Recursiva (int n) {
   if (n <= 0)
      return (1);
   else
      return (Recursiva(n-1) + Recursiva(n-1));
}
```

4. (6 pontos) Use o teorema mestre, se possível, para apresentar limites assintóticos firmes para as seguintes recorrências. Justifique suas respostas.

a) $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$ b) $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \log n$ c) $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

Teorema Mestre

- Sejam as constantes $a \geq 1$ e $b > 1$ e $f(n)$ uma função definida nos inteiros não-negativos pela recorrência:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

onde a fração n/b pode significar $\lfloor n/b \rfloor$ ou $\lceil n/b \rceil$. A equação de recorrência $T(n)$ pode ser limitada assintoticamente da seguinte forma:

1. Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$, então $\boxed{T(n) = \Theta(n^{\log_b a})}$
2. Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $\boxed{T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)}$
3. Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$ e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e para n suficientemente grande, então $\boxed{T(n) = \Theta(f(n))}$

Fórmulas:

$\log n = \log_2^n$	$a^{\log_b^n} = n^{\log_b^a}$	$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$	$2^{\log n} = n$
$a = b^{\log_b^a}$	$n^{\frac{1}{\log n}} = n^{\log_n^2} = 2$	$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$
$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$	$\sum_{i=1}^{n} ia^i = \frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(a-1)^2}$	$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$4^{\log n} = 2^{2\log n} = 2^{\log n^2} = n^2$
$1 \prec \log\log n \prec \log n \prec n^{\varepsilon} \prec n \prec n^{c} \prec n^{\log n} \prec c^{n} \prec n^{n} \prec c^{c^n}$ onde ε e c são constantes arbitrárias com $0 < \varepsilon < 1 < c$			