Otimização de Sistemas

Prof. Sandro Jerônimo de Almeida, PhD.

Otimização Combinatória

Definição

- A otimização combinatória lida com técnicas e abordagens que visam encontrar "objetos ótimos" a partir de um conjunto finito de (grafos, redes, conjuntos parcialmente ordenados)

- Geralmente busca maneiras eficiente de alocar recursos para problemas complexos

Classes de Problemas

- Polinomiais (P) – utiliza-se algoritmos polinomiais para uma classes de problemas mais simples, como caminho mais curto, árvore de menor diâmetro, fluxo e caminhos, *matching*, grafo bipartite, etc. $O(n^2)$, $O(n^3)$...
- NP-Completo - geralmente são utilizados algoritmos aproximados (heurísticas), que executam em tempo polinomial e entregam soluções "próximas" a ótima. $O(2^n)$, $O(n!)$, $O(n^n)$

Alguns Problemas Combinatoriais

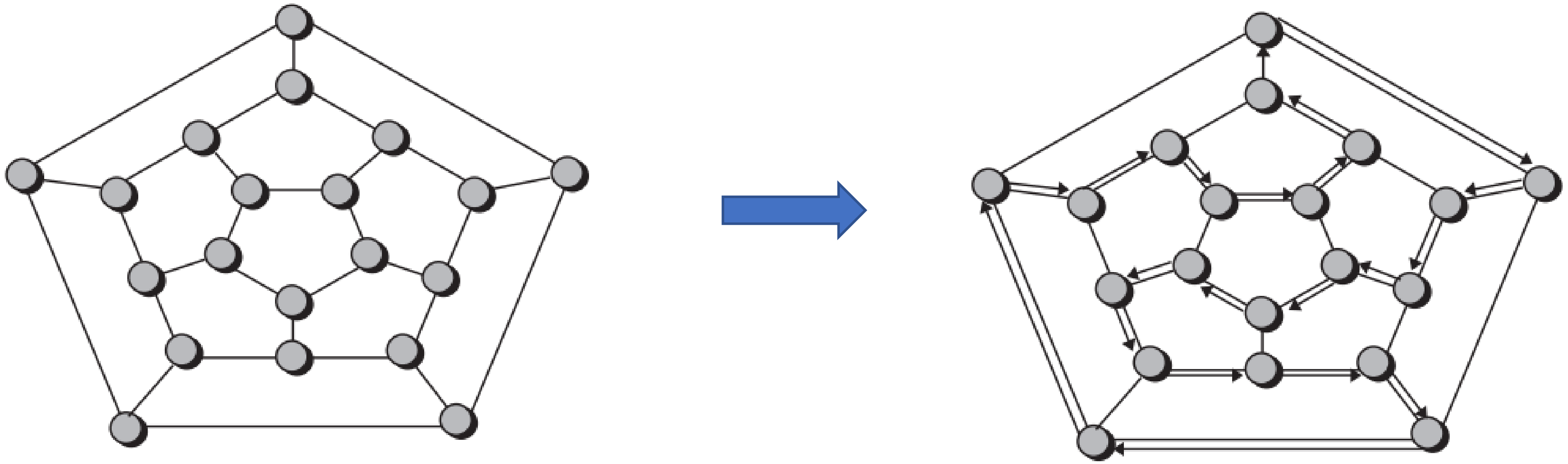
- Árvore geradora mínima
- Problema do caixeiro viajante (PCV)
- Problema de roteirização de veículo (PRV)
- Problema da mochila
- Problema de alocação de Armas-Alvos

Alguns Problemas Combinatoriais

- *Minimum Spanning Tree (MTS)*
- *Travelling salesman problem (TSP)*
- *Vehicle routing problem (VRP)*
- *Knapsack problem (KP)*
- *Weapon target assignment problem (WTA)*

Problema do Caixeiro Viajante

- O problema do caixeiro viajante (PCV) é um dos mais tradicionais e conhecidos problemas
- O objetivo do PCV é encontrar, em um grafo G = (N, A), o caminho hamiltoniano de menor custo
- No jogo de Hamilton (*Around the World - 1857*), o desafio consistia em encontrar uma rota através dos vértices do dodecaedro que iniciasse e terminasse em uma mesma cidade sem nunca repetir uma visita



Problema do Caixeiro Viajante

- Exemplo – Matriz de Distâncias

Origem/ Destino	Nova Iorque	Miami	Dallas	Chicago
Nova Iorque	--	1334	1559	809
Miami	1334	--	1343	1397
Dallas	1559	1343	--	921
Chicago	809	1397	921	--

- Formulação: variáveis de Decisão

Origem/ Destino	Nova Iorque	Miami	Dallas	Chicago
Nova Iorque	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}
Miami	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}
Dallas	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}
Chicago	X_{41}	X_{42}	X_{43}	X_{44}

Problema do Caixeiro Viajante

- Formulação

- Variáveis de decisão

Origem/ Destino	Nova Iorque	Miami	Dallas	Chicago
Nova Iorque	--	1334	1559	809
Miami	1334	--	1343	1397
Dallas	1559	1343	--	921
Chicago	809	1397	921	--

Problema do Caixeiro Viajante

- Formulação

Origem/ Destino	Nova Iorque	Miami	Dallas	Chicago
Nova Iorque	--	1334	1559	809
Miami	1334	--	1343	1397
Dallas	1559	1343	--	921
Chicago	809	1397	921	--

- Variáveis de decisão

X_{ij} = decide se haverá caminho ou não (0 ou 1) entre as cidade *i* e *j*

$$\text{Minimizar } Z = 0\,X_{11} + 1334\,X_{12} + 1559\,X_{13} + 809\,X_{14}$$
$$+\,1334\,X_{21} + 0\,X_{22} + 1343\,X_{23} + 1397\,X_{24}$$
$$+\,1559\,X_{31} + 1343\,X_{32} + 0\,X_{33} + 921\,X_{34}$$
$$+\,809\,X_{41} + 1397\,X_{42} + 921\,X_{43} + 0\,X_{44}$$

Problema do Caixeiro Viajante

- Formulação

Origem/ Destino	Nova Iorque	Miami	Dallas	Chicago
Nova Iorque	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}
Miami	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}
Dallas	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}
Chicago	X_{41}	X_{42}	X_{43}	X_{44}

- Restrições

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 1$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 1$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 1$$
$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 1$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 1$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 1$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 1$$
$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 1$$

$X_{ij} \in \{0,1\} \mid i, j = $ {Nova Iorque, Miami, Dallas, Chicago}

Problema do Caixeiro Viajante

- Formulação de *Dantzig-Fulkerson-Johnson (DFJ)*

$$\text{(PCV1) Minimizar } z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \in N$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in N$$

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \qquad \forall S \subset N$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i, j \in N$$

Detalhes

- X_{ii} não existe
- n-1 variáveis
- $O(2^n)$ restrições

- S é um subgrafo de G, em que |S| representa o número de vértices desse subgrafo

Problema da Mochila

- Formulação geral - *Knapsack problem (PK)*

$$\text{(PK) Maximizar } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq \text{b}$$

$$x_j \geq 0 \text{ e inteiro.}$$

Problema da Mochila

- *Apenas 1 item disponível - (PKI)*

$$\text{(PKI) Maximizar } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq b$$

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \ldots, n$$

Problema da Mochila

- *Quantidade limitada de Itens - (PKL)*

$$(\text{PKL})\ \text{Maximizar}\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq b$$

$$x_j \leq l_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$x_j \in \mathfrak{I}^+$$

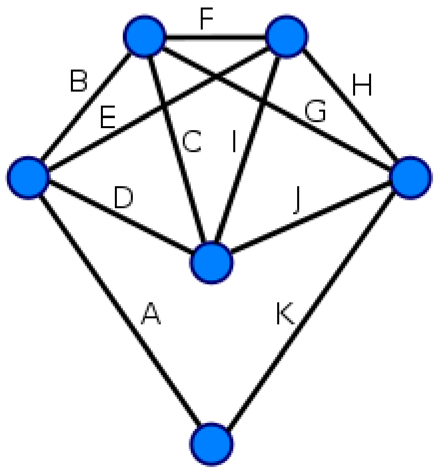
Problema do Carteiro Chinês

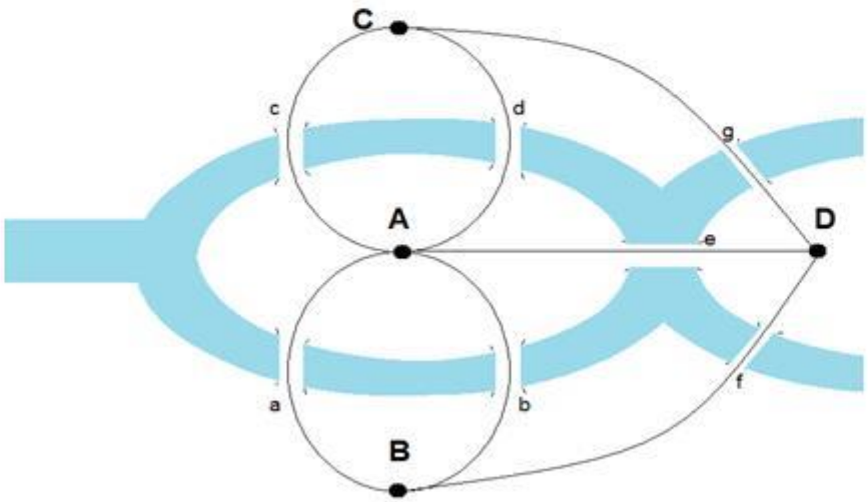
- O PCC é um problema de otimização que objetiva cobrir com um passeio (ou tour) todos os arcos do grafo, minimizando a distância total percorrida.

- O passeio do carteiro distingue-se do circuito (ou ciclo) *euleriano* por nele ser permitida, se necessária, a repetição de arestas.

Circuito Euleriano (1736)

- Encontrar um caminho sobre um grafo G que contenha toda aresta de G exatamente uma vez





Problema do Carteiro Chinês

- Formulação (grafo não direcionado)

$$\text{(PCC1) Minimizar } z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ji} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

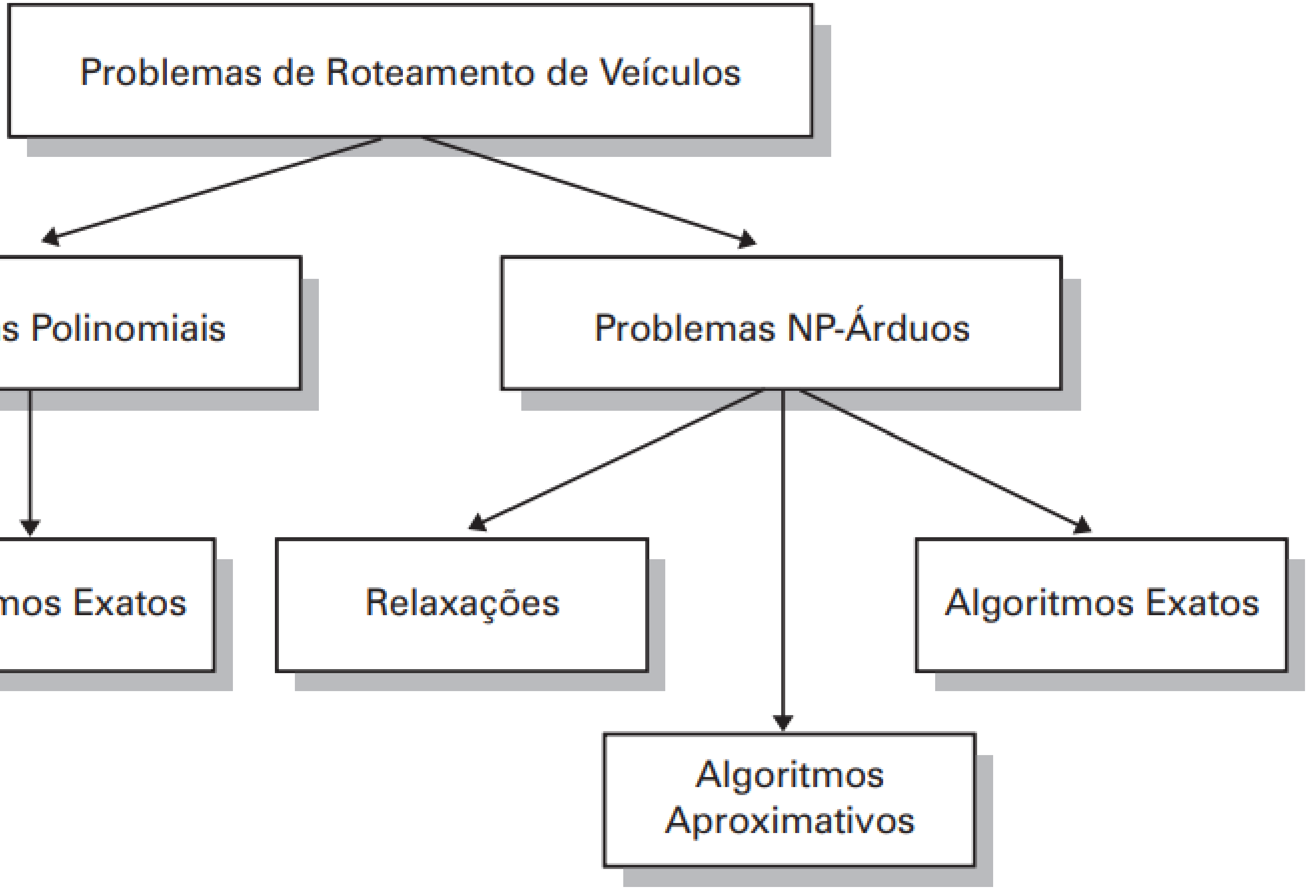
$$x_{ij} + x_{ji} \geq 1 \qquad \forall (i, j) \in A$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro}$$

$x_{ij} \equiv$ número de vezes em que a aresta (i, j) é percorrida de i para j;
$c_{ij} \equiv$ comprimento ou o custo da aresta (i, j).

Problemas de Roteamento de Veículos

- Estratégias



Algoritmos Aproximados

Heurísticas

- Nem sempre precisamos da melhor solução.
- Reduzem o tempo de execução ao sacrificar a ideia de perfeição.
- Embora exista uma chance do algoritmo aproximado entregar uma solução ruim, se o algoritmo for bom, isso raramente acontecerá.

Problema da Mochila Múltipla Binária

Exercício: apresente a formulação geral

- O problema da mochila múltipla (PMM) consiste em colocar *n* itens em *m* mochilas. Cada mochila *i* possui uma capacidade de peso b*i* que não pode ser ultrapassada. Cada item *j* possuem um peso w_j e um valor c_j . O objetivo é colocar (escolher) itens nas mochilas de forma a maximizar o valor a ser carregado na mochila. Considere o seguinte cenário ilustrativo:

Mochilas disponíveis:

Mochila	Capacidade (Kg)
A	12
B	10
C	7
D	3
E	9

Itens disponíveis em estoque:

Itens	Valor (R$)	Peso (Kg)
1	70	6
2	30	3
3	28	3
4	40	4
5	13	2
6	12	2
7	100	12

Problema da Mochila Múltipla Binária

- O problema da mochila múltipla (PMM) consiste em colocar *n* itens em *m* mochilas. Cada mochila *i* possui uma capacidade de peso b*i* que não pode ser ultrapassada. Cada item *j* possuem um peso w_j e um valor c_j . O objetivo é colocar (escolher) itens nas mochilas de forma a maximizar o valor a ser carregado na mochila. Considere o seguinte cenário ilustrativo:

Resolução

Problema da Mochila Múltipla Binária

- O problema da mochila múltipla (PMM) consiste em colocar *n* itens em *m* mochilas. Cada mochila *i* possui uma capacidade de peso b*i* que não pode ser ultrapassada. Cada item *j* possuem um peso w_j e um valor c_j . O objetivo é colocar (escolher) itens nas mochilas de forma a maximizar o valor a ser carregado na mochila. Considere o seguinte cenário ilustrativo:

Resolução

$$\text{(PKM) Maximizar } z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_j x_{ij}$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \le b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le 1 \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n.$$

Problema da Mochila Múltipla Com múltiplos itens

Exercício: apresente a formulação geral

- O problema da mochila múltipla (PMM) consiste em colocar *n* itens em *m* mochilas. Cada mochila *i* possui uma capacidade de peso b*i* que não pode ser ultrapassada. Cada item *j* possuem um peso w_j , um valor c_j e a quantidade em estoque l_j. O objetivo é colocar (escolher) itens nas mochilas de forma a maximizar o valor a ser carregado na mochila. Considere o seguinte cenário ilustrativo:

Mochilas disponíveis:

Mochila	Capacidade (Kg)
A	12
B	10
C	7
D	3
E	9

Itens disponíveis em estoque:

Itens	Valor (R$)	Peso (Kg)	Quantidade disponível
1	70	6	4
2	30	3	3
3	28	3	6
4	40	4	7
5	13	2	2
6	12	2	5
7	100	12	1