INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DAS VARIÁVEIS DUAIS

As variáveis duais podem receber uma interpretação econômica muito interessante, que leva ao cálculo da utilidade marginal (preço-sombra, valor marginal etc.) dos recursos. Vamos efetuar essa análise por meio de um exemplo. Tome o seguinte enunciado:

Uma indústria dispõe de três recursos, A, B e C, em quantidades limitadas. Com esses recursos, a indústria pretende produzir dois produtos que chamaremos de PROD.1 e PROD.2. A Tabela 4.1 dá a utilização unitária de cada recurso em cada um dos produtos e a disponibilidade de cada recurso.

Tabela 4.1: Utilização unitária e disponibilidade dos recursos

RECURSO	DISPONIBILIDADE	RECURSO GASTO PARA FAZER 1 UNIDADE DE PROD. 1	PROD. 2
A	14	1	2
B	9	1	1
C	56	7	4

A indústria sabe que cada unidade produzida do PROD.1 dá uma margem de lucro unitária de \$5 e cada unidade produzida do PROD.2 dá uma margem de lucro de \$6. O problema de programação da produção da empresa é determinar a quantidade a ser produzida do PROD.1 e do PROD.2 de modo a maximizar a margem de lucro total.

Em termos matemáticos, o problema pode ser colocado da seguinte maneira:

Problema 1

Maximizar $Z = 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2$

Sujeito a:

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 14 \quad \text{(Recurso A)}$$
$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 9 \quad \text{(Recurso B)}$$
$$7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 56 \quad \text{(Recurso C)}$$

com x_1 e $x_2 \geq 0$

Por outro lado, vamos supor que a indústria tenha a alternativa de vender os recursos A, B e C, em vez de empregá-los na produção dos dois produtos.

O problema que se coloca agora é encontrar o valor da unidade de cada recurso. É evidente que a venda dos recursos deve fornecer um ganho pelo menos igual ao obtido com a utilização deles na produção. Vamos chamar:

y_1: valor do recurso A por unidade
y_2: valor do recurso B por unidade
y_3: valor do recurso C por unidade.

O valor total do estoque de recursos é:

$$14 \cdot y_1 + 9 \cdot y_2 + 56 \cdot y_3$$

Em termos dessa avaliação dos recursos, cada um dos produtos pode também ser avaliado, levando-se em conta a utilização dos recursos por unidade fabricada. Assim, como o PROD.1 gasta 1 unidade do recurso A, 1 unidade do recurso B e 7 unidades do recurso C, sua avaliação, em termos do *conteúdo de recursos*, é:

$$1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 7 \cdot y_3.$$

Assim também, a avaliação de PROD.2 é:

$$2 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 4 \cdot y_3$$

É claro que essas avaliações dos produtos não podem ser inferiores às margens unitárias de lucro fornecidas por cada um. Sendo assim, podemos escrever:

$$1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 7 \cdot y_3 \geq 5 \text{ (margem de lucro do Produto 1)}$$
$$2 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 4 \cdot y_3 \geq 6 \text{ (margem de lucro do Produto 2)}$$

Nesse tipo de problema, o gerente tem interesse em determinar o valor mínimo do estoque total, respeitando as restrições de que as avaliações dos produtos sejam pelo menos iguais aos lucros unitários fornecidos. Em forma matemática, temos:

Problema 2

Minimizar $z = 14 \cdot y_1 + 9 \cdot y_2 + 56 \cdot y_3$

Sujeito a:

$$1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 7 \cdot y_3 \geq 5$$
$$2 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 4 \cdot y_3 \geq 6$$

com y_1, y_2 e $y_3 \geq 0$

De acordo com as definições dadas anteriormente, o Problema 1 é o *primal* e o Problema 2 é o *dual*. Assim, as variáveis duais podem ser interpretadas como as avaliações unitárias dos recursos, relativas às contribuições de cada um para a obtenção do lucro total. Isso significa que, resolvidos os problemas, as variáveis duais indicam as variações que ocorrem no valor da função objetivo do primal, para variações unitárias nos níveis dos recursos.