Otimização de Sistemas

Prof. Sandro Jerônimo de Almeida, PhD.

Programação Não Linear
Fundamentos

Programação Linear *vs* Não-Linear

- Os modelos empregados em Programação Linear são, como o próprio nome diz, lineares (tanto a função-objetivo quanto as restrições)
- Essa é uma das maiores restrições impostas sobre um modelo de Programação
- Em grande parte das aplicações, modelos lineares refletem apenas aproximações dos modelos reais
- Fenômenos físicos ou econômicos são geralmente melhor representados por modelos não-lineares

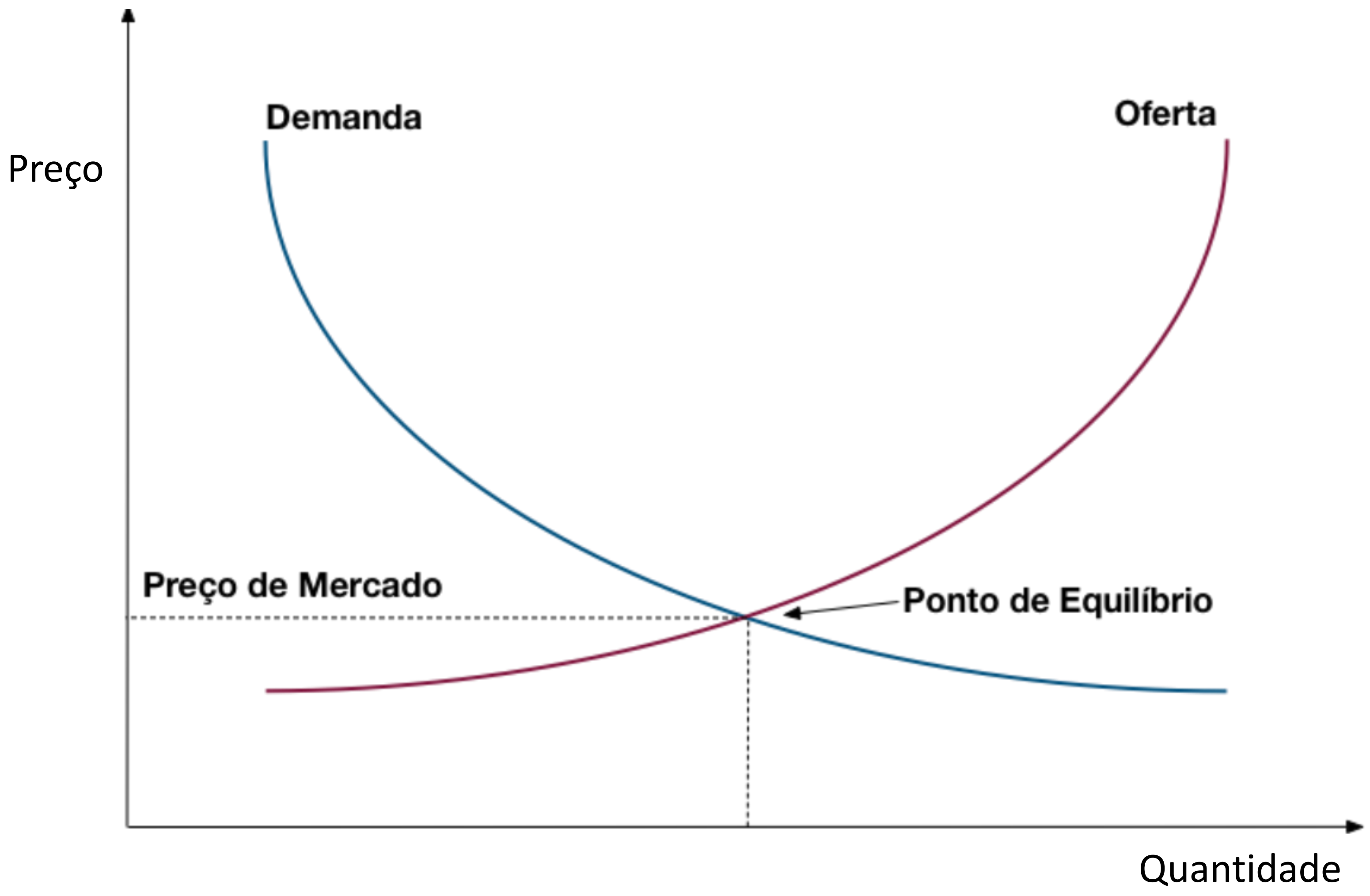
Categorias de Não-Linearidade

- Relações observadas empiricamente, tais como variações não-proporcionais em custos, resultados de processos e características de qualidade.

  > Simplesmente cortar “o mais barato” aumenta o lucro?

- Relações deduzidas estruturalmente, que englobam fenômenos físicos, deduzidos matematicamente e regras administrativas

Exemplo de Não-Linearidade



Programação Não Linear

Formulação/Modelo

- Variáveis de decisão

  $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$

- Maximizar f(x)

  Sujeito a:

  $g_i(x) \leq b_i$, para i = 1, 2, ..., m

  e $x \geq 0$

- f(x) e/ou g_i (x) são funções não lineares

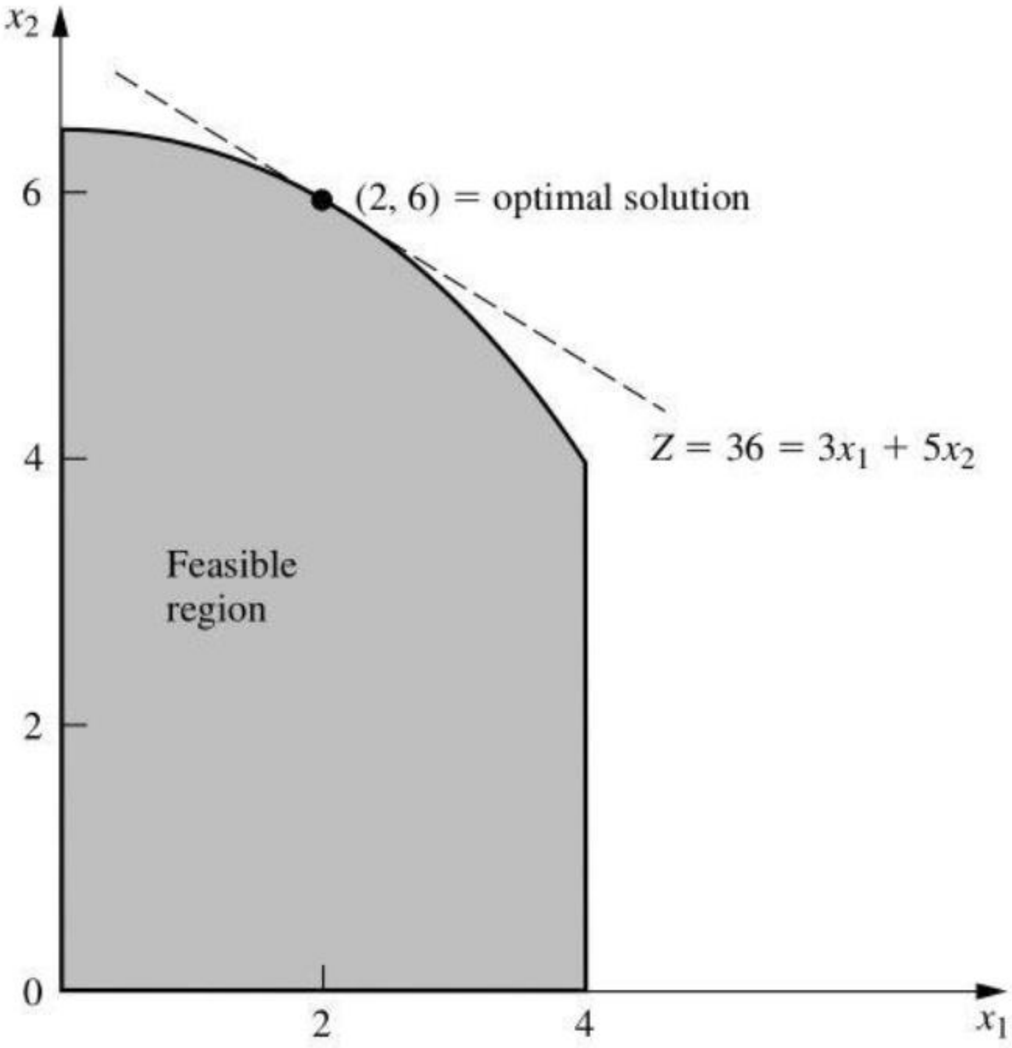
Problema pode ser de minimização

- Minimizar f(x)
- $g_i(x) \geq b_i$

Exemplo de Modelo de PPNL

Restrição não linear

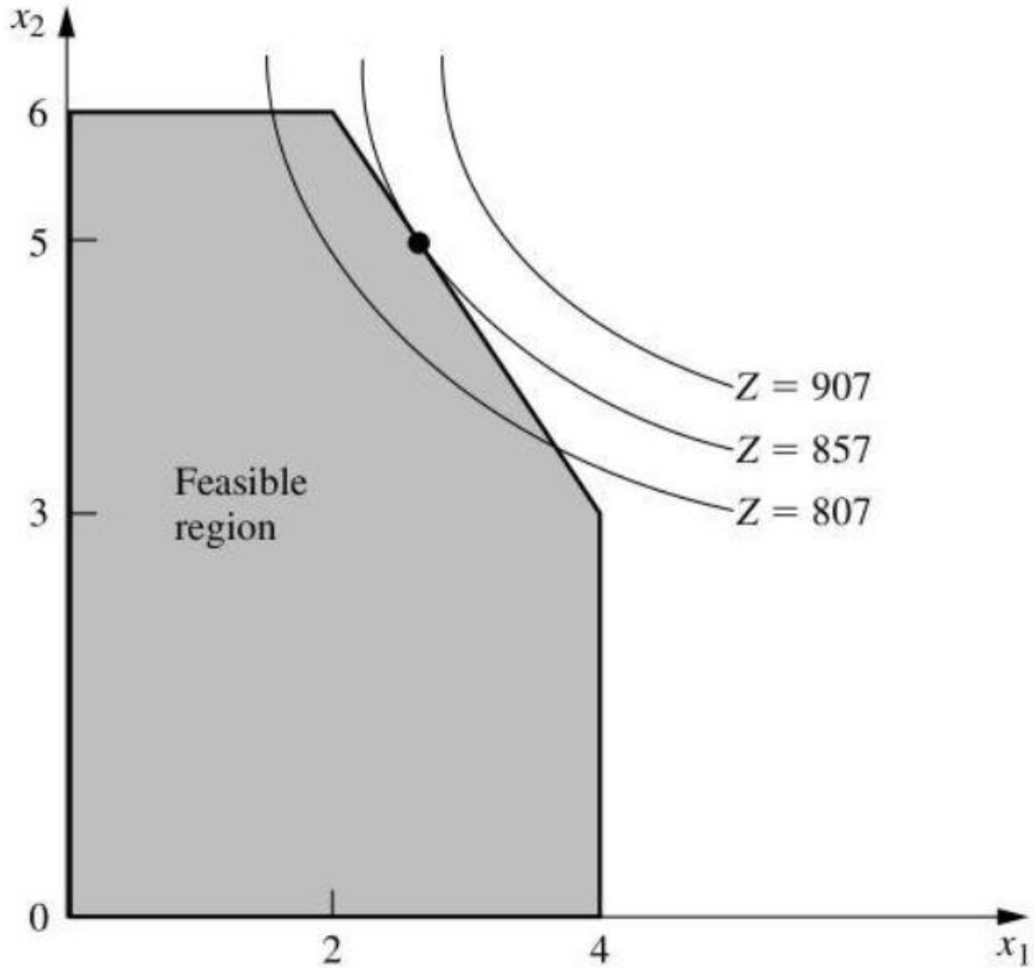
$$
\begin{array}{lrl}
\text{Maximize} & Z = 3x_1 + 5x_2, & \\
\text{subject to} & x_1 & \leq \quad 4 \\
 & 9x_1^2 + 5x_2^2 & \leq 216 \\
\text{and} & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0
\end{array}
$$



Exemplo de Modelo de PPNL

Função objetivo não linear

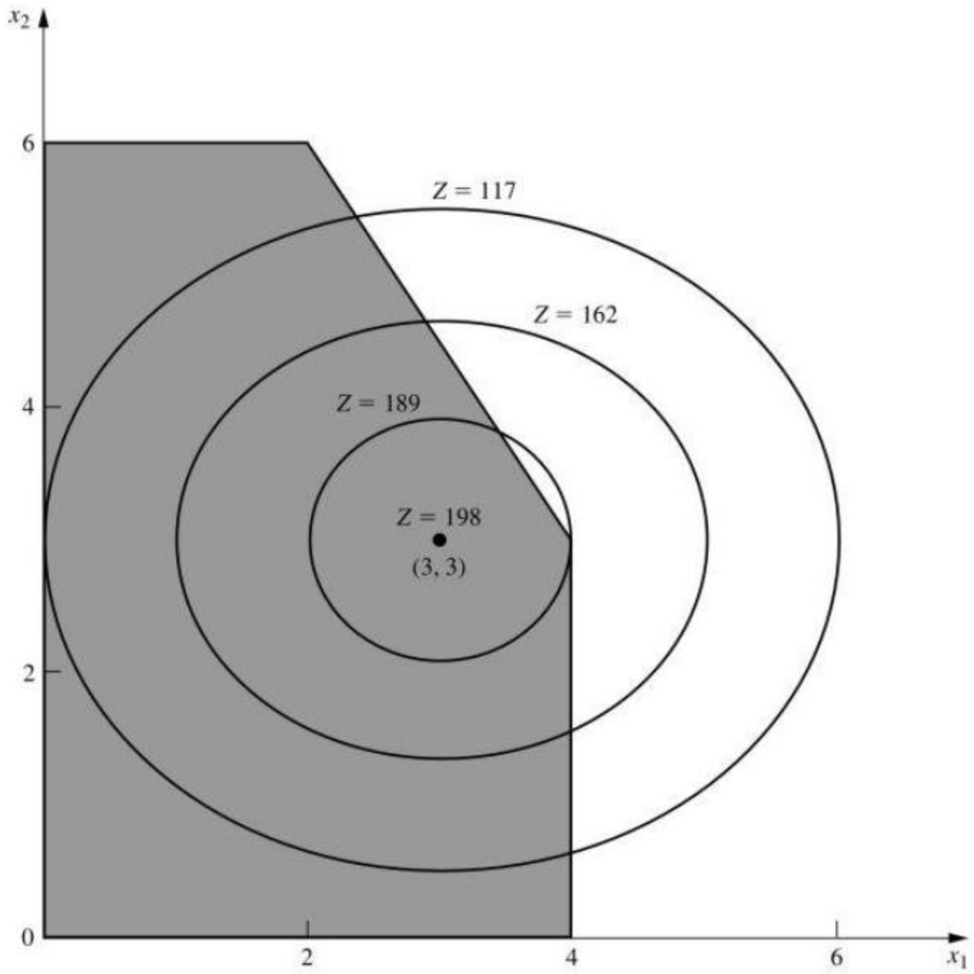
Maximize	$Z = 126x_1 - 9x_1^2 + 182x_2 - 13x_2^2,$
subject to	$x_1 \leq 4$
	$2x_2 \leq 12$
	$3x_1 + 2x_2 \leq 18$
and	$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$



Exemplo de Modelo de PPNL

Função objetivo não linear

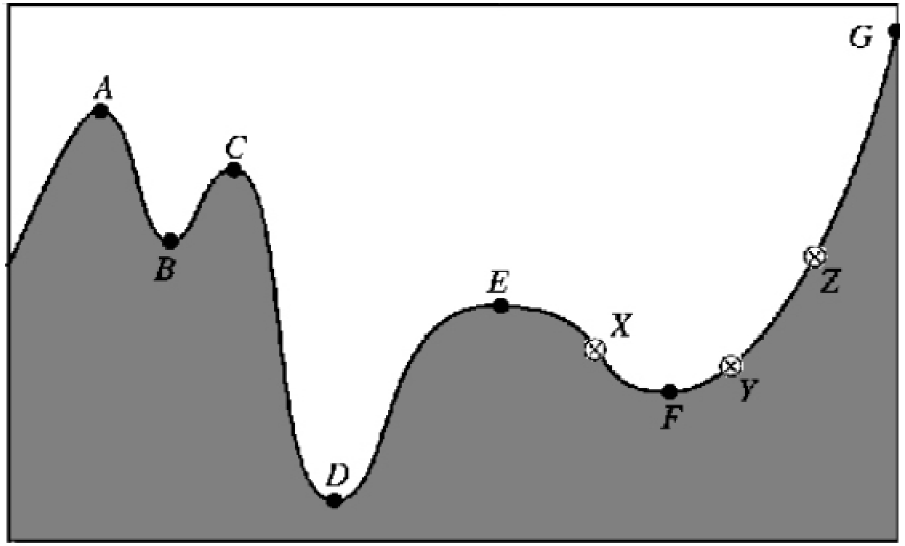
Maximize	$Z = 54x_1 - 9x_1^2 + 78x_2 - 13x_2^2,$	
subject to	$x_1 \leq 4$	
	$2x_2 \leq 12$	
	$3x_1 + 2x_2 \leq 18$	
and	$x_1 \geq 0,$	$x_2 \geq 0$

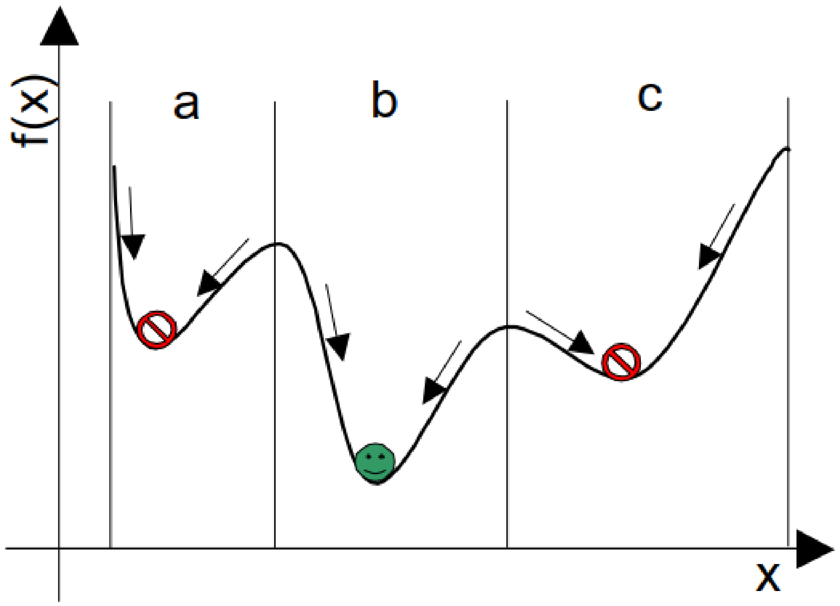


Programação Não Linear

Tipos de problemas e métodos

- Modelos sem restrições – Otimização Irrestrita
- Modelos com restrições
- Modelos com múltiplos pontos de mínimo/máximo





Programação Não Linear

Tipos de problemas e métodos

- Modelos sem restrições – Otimização Irrestrita
- Modelos com restrições
- Modelos com múltiplos pontos de mínimo/máximo

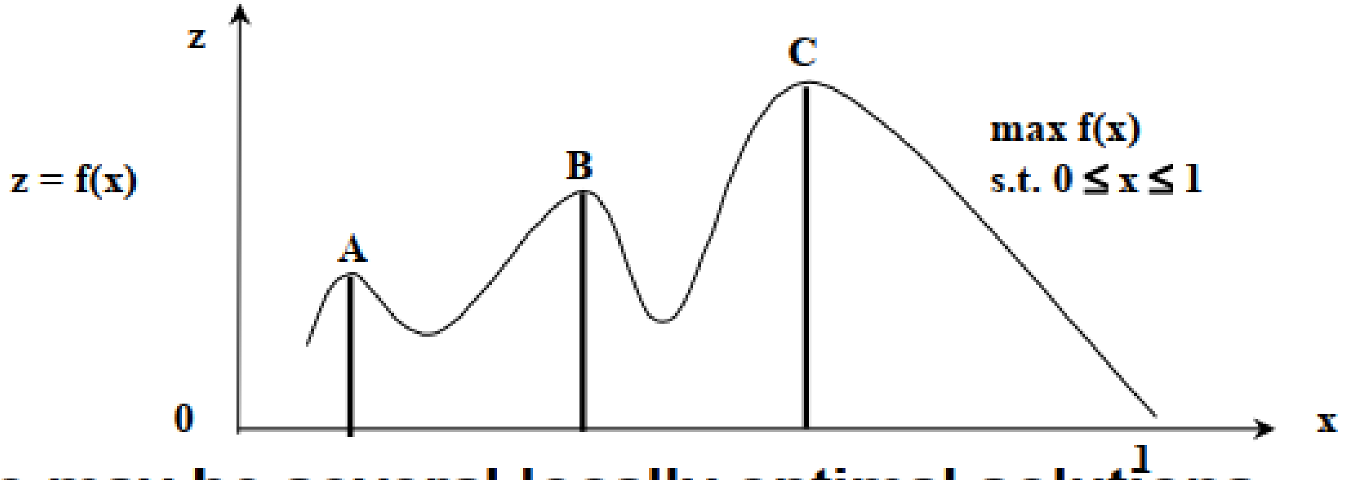
- **Importante**: o principal conceito envolvido em Programação Não-Linear é o de taxa de variação

  $\Rightarrow$ derivadas e gradientes

Local vs. Global Optima

Def'n: Let x be a feasible solution, then

- x is a ***global max*** if $f(x) \geq f(y)$ for every feasible y.
- x is a ***local max*** if $f(x) \geq f(y)$ for every feasible y sufficiently close to x (i.e., $x_j - \varepsilon \leq y_j \leq x_j + \varepsilon$ for all j and some small ε).

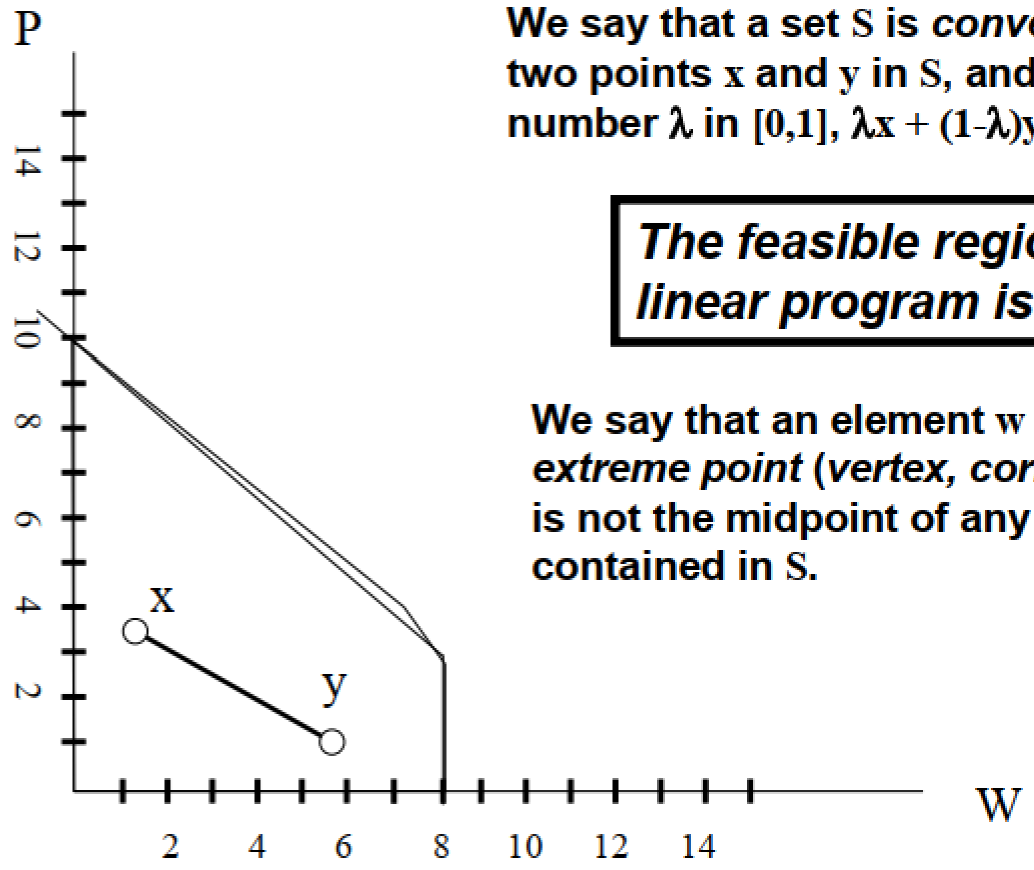


There may be several locally optimal solutions.

When is a locally optimal solution also globally optimal?

- We are minimizing. The objective function is convex. The feasible region is convex.

Convexity and Extreme Points



We say that a set S is *convex*, if for every two points x and y in S, and for every real number λ in [0,1], $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$.

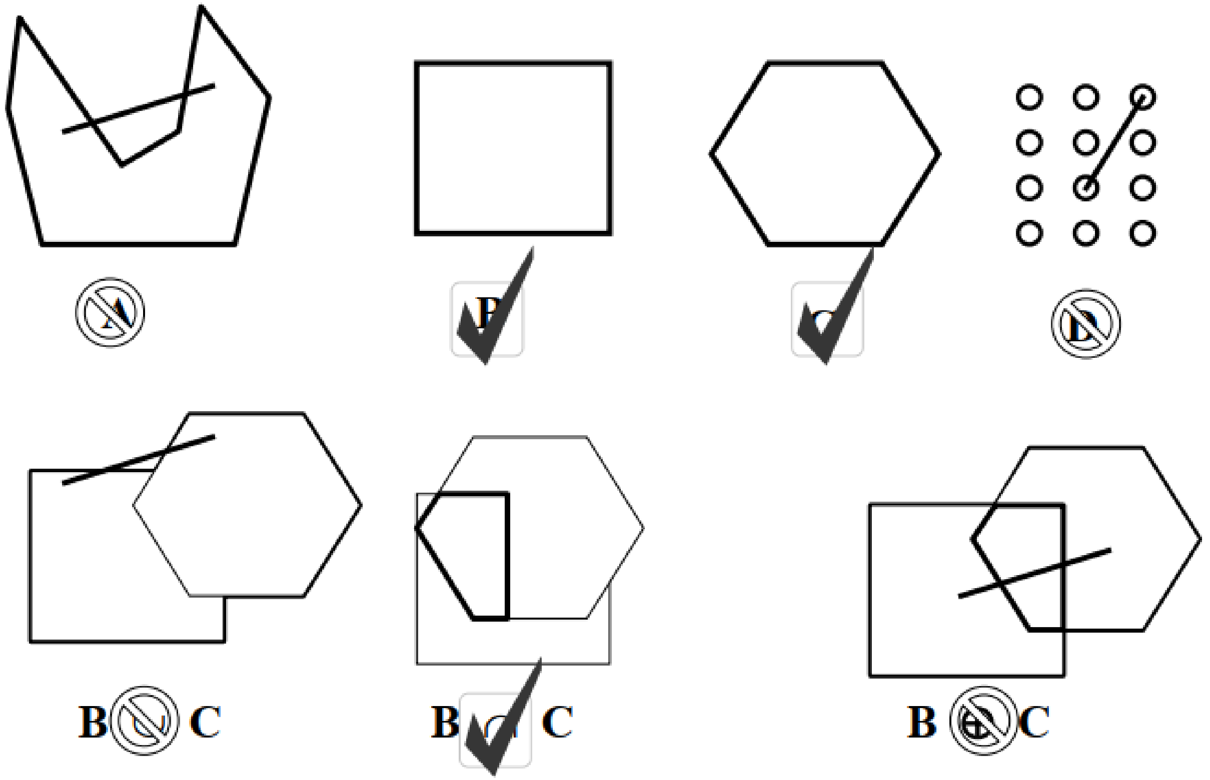
The feasible region of a linear program is convex.

We say that an element $w \in S$ is an *extreme point* (*vertex, corner point*), if w is not the midpoint of any line segment contained in S.

Recognizing convex feasible regions

- If all constraints are linear, then the feasible region is convex
- The intersection of convex regions is convex
- If for all feasible x and y, the midpoint of x and y is feasible, then the region is convex (except in totally non-realistic examples.)

Which are convex?



Exercício – Modelagem PPLN

Problema de Localização

- O Gerente de Projetos de Infraestrutura de Redes de uma Universidade tem que instalar um Roteador Wireless para atender a três prédios dentro do compus (usuários com notebooks e smartphones). Para uma boa qualidade de serviço, o roteador não pode ficar a mais de 100 metros do centro de cada bloco. Considere as seguintes localizações/coordenadas

Prédio	X	Y
Prédio I	-50	100
Prédio J	20	10
Prédio L	100	50

- Apresente um modelo de otimização para determinar a localização ótima do roteador

Exercício – Problema de Localização

Dados

```
data;

set N := PredioI PredioJ PredioL;

#Localizações
param:      x    y :=
  PredioI   -50  100
  PredioJ   20   10
  PredioL   100  50;

param d_min := 100;
```

ProblemaLocalizacao.dat

Comandos

1) ampl: model ProblemaLocalizacao.mod
2) ampl: data ProblemaLocalizacao.dat
3) ampl: solve
4) ampl: display x_r, y_r;

Modelo

```
set N;

param d_min; # Distância Minima
param x {i in N}; # vetor de posicoes x
param y {i in N}; # vetor de posicoes y

#Variáveis de decisao
var x_r >=0;
var y_r >=0;

#Minimizar a soma das distâncias euclidianas
minimize distancias:
sum {i in N} sqrt((x[i]- x_r)^2 + (y[i]- y_r)^2);

#distancia minima para cada prédio
subject to distancia {i in N}:
sqrt((x[i]- x_r)^2 + (y[i]- y_r)^2) <= d_min;
```

ProblemaLocalizacao.mod

Resposta

19 iterations, objective 201.0122877

x_r = 23.3923 | y_r = 32.0767

Least Square Problem

Applications in model constructions, statistics (e.g., linear regression), neural networks, etc.

We consider a linear measurement model, i.e., we stipulate that an (output) quantity of interest $y \in \mathbb{R}$ can be expressed as a linear function $y \approx a^T x$ of input $a \in \mathbb{R}^n$ and model parameters $x \in \mathbb{R}^n$. Our goal is to find the vector of parameters x which provide the "best fit" for the available set of input-output pairs (a_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$. If "fit" is measured by sum of squared errors between estimated and measured outputs, solution to the following optimization problem

$$
\begin{array}{cll}
\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\min} & \sum_{i=1}^m (v_i)^2 & = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m (y_i - a_i^T x)^2 \quad = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - y\|_2^2, \\
\text{s.t.} & v_i = y_i - a_i^T x, \quad i = 1, \ldots, m &
\end{array}
$$

provides the best fit. Here, A is the matrix with rows a_i^T.

Markowitz Portfolio Optimization Model

Suppose one has the opportunity to invest in n assets. Their future returns are represented by random variables, $R_1, \ldots, R_n$, whose expected values and covariances, $\mathrm{E}[R_i]$, $i = 1, \ldots, n$ and $\mathrm{Cov}(R_i, R_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$, respectively, can be estimated based on historical data and, possibly, other considerations. At least one of these assets is a risk-free asset.

Suppose x_i, $i = 1, \ldots, n$, are the fractions of your wealth allocated to each of the assets (that is, $x \geq 0$ and $\sum_{i=1}^n x_i = 1$). The return of the resulting portfolio is a random variable $\sum_{i=1}^n x_i R_i$ with mean $\sum_{i=1}^n x_i \mathrm{E}[R_i]$ and variance $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \mathrm{Cov}(R_i, R_j)$. A portfolio is usually chosen to optimize some measure of a tradeoff between the expected return and the risk, such as

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^n x_i \mathrm{E}[R_i] - \mu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \mathrm{Cov}(R_i, R_j) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x \geq 0, \end{array}$$

where $\mu > 0$ is a (fixed) parameter reflecting the investor's preferences in the above tradeoff. Since it is hard to assess anybody's value of μ, the above problem can (and should) be solved for a variety of values of μ, thus generating a variety of portfolios on the *efficient frontier*.