Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Dois Vizinhos
Estrada para Boa Esperança, km 04, Comunidade São Cristóvão – Dois Vizinhos – PR – 85660-000

MATEMÁTICA A
ÁLGEBRA LINEAR

Lilian de Souza Vismara
Mestre Eng. Elétrica – ESSC / USP
Licenciada em Matemática – UFSCar

GEOMETRIA ANALÍTICA (GA),
&
ÁLGEBRA LINEAR

Lilian de Souza Vismara
Mestre Eng. Elétrica – ESSC / USP
Licenciada em Matemática – UFSCar

Tentando “desvendar” a relação entre álgebra matricial, sistemas lineares, álgebra de vetores, trigonometria e geometria analítica...

Sistema linear

- Discutir um sistema linear (S) significa:
  - efetuar um estudo de (S) visando classificá-lo quanto ao número de soluções, isto é:

SISTEMA LINEAR

POSSÍVEL

(tem solução)

IMPOSSÍVEL

(não tem solução)

DETERMINADO

(solução ÚNICA)

INDETERMINADO

(INFINITAS soluções)

Plano cartesiano em $\mathbb{R}^2$

- Do mesmo modo que os pontos de uma reta são associados a números reais, os pontos de um plano podem ser associados a pares de números reais.
- Dá-se o nome de par a qualquer conjunto de dois elementos. Um par ordenado *(x,y)* é um par munido de uma ordem definida pela relação:
- Assim, por exemplo, o par (2,3) é diferente do par (3,2), ainda que {2,3} = {3,2}.
- Indica-se por $\mathbb{R}^2$ o conjunto de todos os pares ordenados *(x,y)* onde *x* e *y* são números reais ou seja:

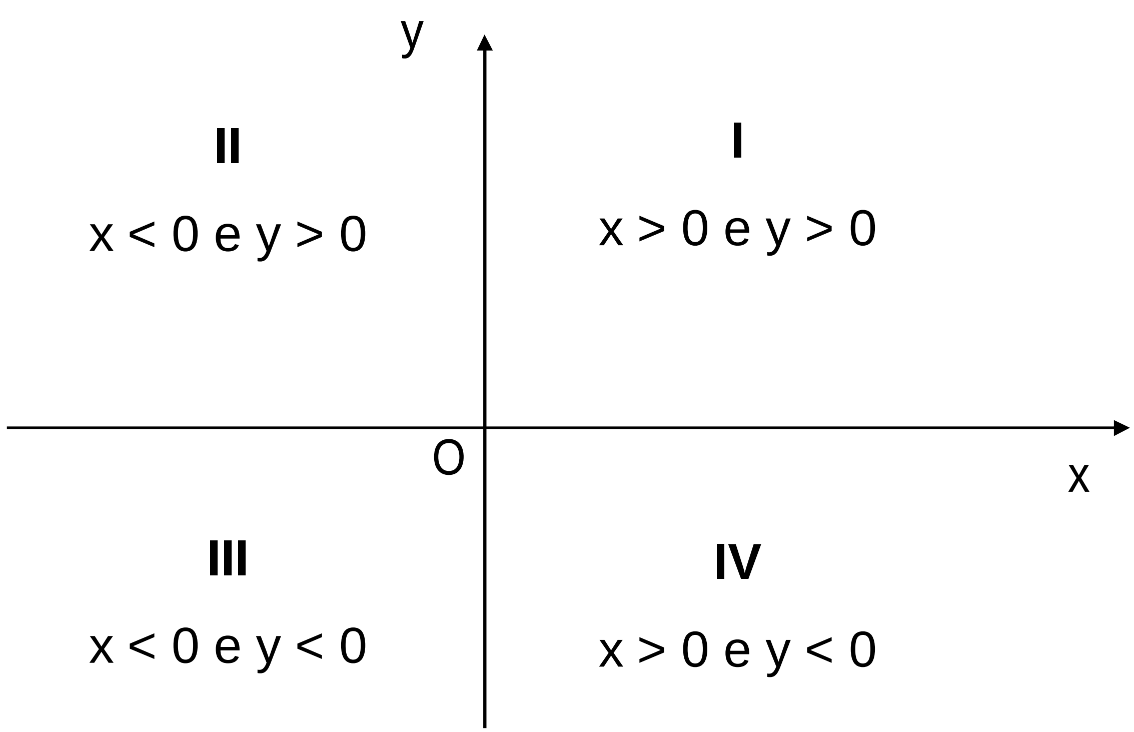
$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$$

Plano cartesiano em $\mathbb{R}^2$

- Em um plano, fixamos duas retas numeradas perpendiculares entre si que se interceptam na origem.
- Convenciona-se que a reta horizontal, com sentido positivo para a direita é o **eixo *Ox***, chamado eixo das **abscissas**, enquanto que a reta vertical, com sentido positivo para cima é o **eixo *Oy***, chamado de eixo das **ordenadas**.
- De modo natural, estabelece-se uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano com o conjunto $\mathbb{R}^2$.

Plano cartesiano em $\mathbb{R}^2$

- O par de eixos ortogonais divide o plano em quatro regiões, denominadas *quadrantes* que são enumeradas no sentido anti-horário, indicadas pelos símbolos I,II,III e IV como mostra a figura:



Exercícios propostos:

1) Determine a e b reais de modo que (a +3, b - 2) = (7,1).

2) Determine t real de modo que o ponto pertença:

a) ao eixo x; b) ao eixo y;

c) ao quadrante I; d) ao quadrante IV.

3) Dados os pontos A = (3,-3) ,B = (3,7) e C = (-2,2). Utilize o teorema de Pitágoras para mostrar que o triângulo ABC é retângulo.

Equações lineares no plano:

- Sejam dados três números reais *a*, *b* e *c*, com *a* e *b* não ambos nulos. Uma equação linear de variáveis reais *x* e *y* é uma igualdade do tipo:

$$ax + by + c = 0$$

As constantes *a*, *b* e *c* são denominadas coeficientes da equação.

Diz-se também que a equação linear é a equação da reta de um plano cartesiano.

Solução de equações lineares no plano:

- Diz-se que um par ordenado (x_0 , y_0) é solução da equação se e somente se $x = x_0$ e $y = y_0$ transformam a equação:

$$ax + by + c = 0$$

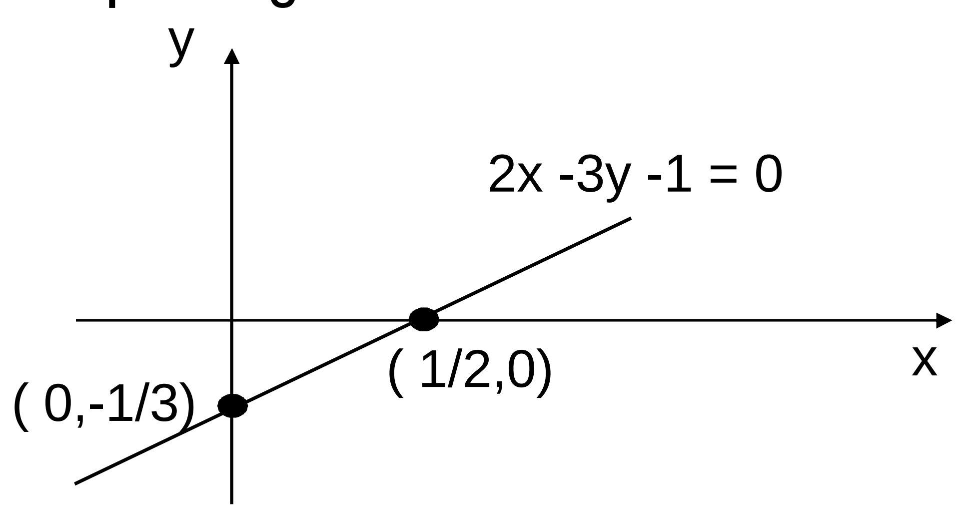
numa identidade, ou seja:

$$a x_0 + b y_0 + c = 0$$

- Por exemplo, os pares (2,1), (0,-1/3) e (1/2,0) são soluções da equação 2x - 3y -1 = 0, enquanto que (3,1) não é.

Geometria analítica e equações lineares no plano:

- A Geometria Plana nos ensina que para traçar uma reta é suficiente que sejam conhecidos somente dois pontos distintos da mesma.
- No exemplo anterior vimos que (0,-1/3) e (1/2,0) são pontos da reta 2x -3y -1 = 0 assim podemos traçá-la como mostra a figura que segue:



Reta de equação 2x - 3y -1 = 0

Trigonometria, GA e equações lineares no plano:

- Alem das formas cartesiana e reduzida, uma reta pode ser ainda representada pela forma *ponto – coeficiente angular:*

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

onde (x_0,y_0) é um ponto dado e m é o coeficiente angular da reta.

- Ou ainda: uma reta não vertical que passa por dois pontos distintos (x_1,y_1) e (x_2,y_2) tem coeficiente angular:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Exercícios propostos:

4) Trace as retas das equações:

a) $y = 3$ b) $x = 2$ c) $y = 2x$.

5) Escreva uma equação para a reta dos pontos $A = (1,3)$ e $B = (2, -1)$

6) Qual é o ângulo referente ao coeficiente angular *m* da reta obtida na questão 5?

Sistemas Lineares de duas equações e duas incógnitas: Interpretação Geométrica

- Geometricamente, resolver um sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

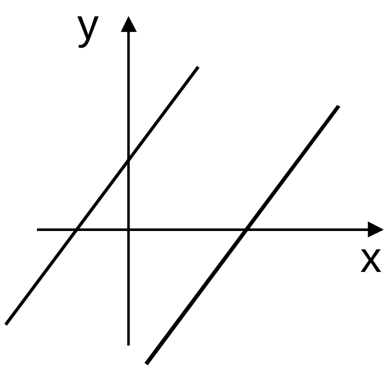
é obter a interseção entre duas retas de equações:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1 \ e \ a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

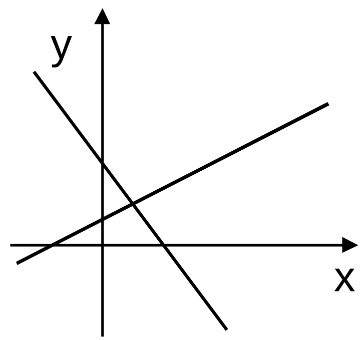
- Sabemos que um tal sistema, quando possui solução, pode ter **uma** *ou* **infinitas soluções**.

Sistemas Lineares de duas equações e duas incógnitas: Interpretação Geométrica

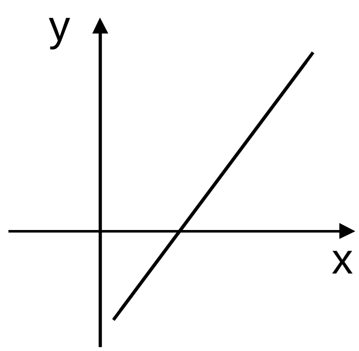
- Em termos geométricos, teremos uma das três situações:



Retas paralelas: sistema impossível



Retas concorrentes: sistema possível com solução única



Retas coincidentes: sistema possível com infinitas soluções

Exercícios propostos:

7) Resolva o sistema abaixo e interprete geometricamente.

a)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \\ 2x - 8y = 0 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Referências

Referências utilizadas:
Matemática: construção e significado. 1. ed. Coordenação técnica José Luiz P. Mello, Editora responsável Juliane Matsubara Barroso. São Paulo: Moderna, 2005. Volume único.
GASPAR, A. **FÍSICA.** Volume único. São Paulo: Editora Ática, 2008.
SILVA, R. T. **Notas de aula de Física**. 2002.

Referencias Básicas:
KOLMAN, B. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações.** Rio de Janeiro: LTC, 6 ed., 1998.
HOWARD, A. **Álgebra Linear com Aplicações** Rio de Janeiro: Bookman, 8ed, 2001.
LAY, D. C. **Álgebra linear e suas aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2 ed., 1999

Referências Complementares:
BOLDRINI, C. R. **Álgebra linear**. São Paulo: Harbra, 1984
IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática Elementar.** São Paulo: Saraiva,1993.
STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. São Paulo: McGraw-Hill, 2ed.,1987.
http://www.mat.ufmg.br/~regi/gaalt/gaalt00.pdf
http://www.labma.ufrj.br/~gregorio/livro/al2.pdf


OBRIGADA !