Otimização de Sistemas

Prof. Sandro Jerônimo de Almeida, PhD.

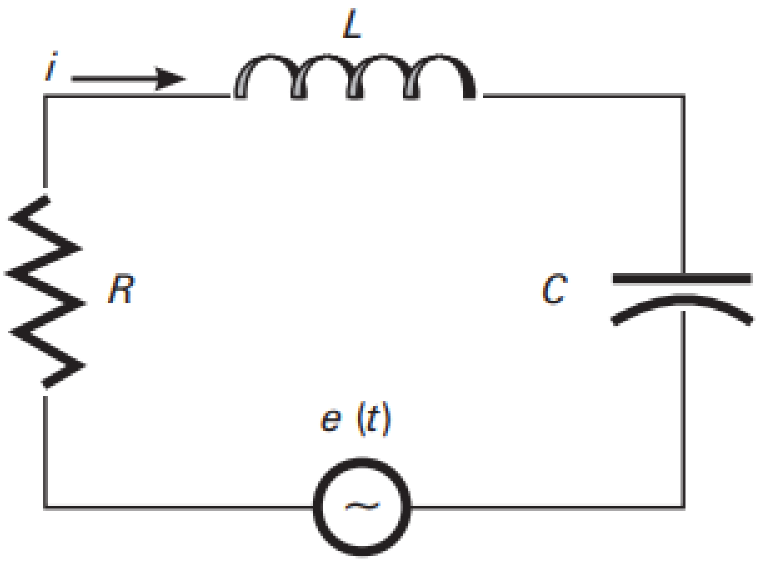
Dualidade

Conceito de Dualidade

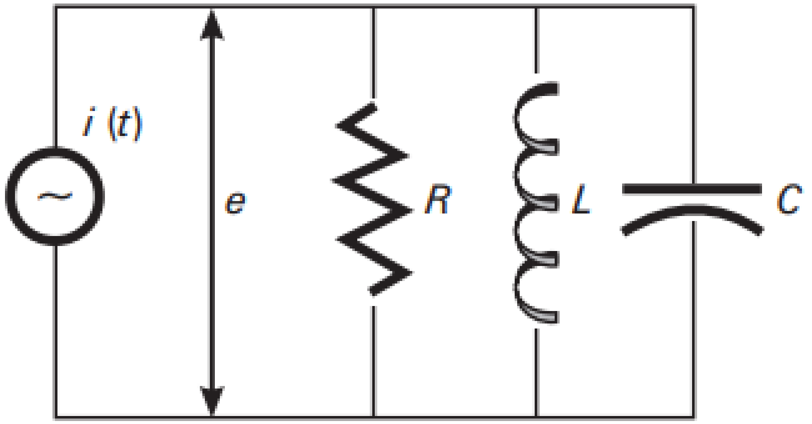
- Dualidade é um conceito amplo que engloba a possibilidade do tratamento de duas naturezas distintas de uma mesma entidade.

- Inúmeros fenômenos físicos e químicos podem ser representados por modelos cujas estruturas e comportamentos são iguais; contudo, podem ser interpretados de modo completamente diferente.

Exemplo – Circuitos Duais



Circuito 1



Circuito 2

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = e(t)$$

Tensão/corrente em função do tempo

$$C\frac{de}{dt} + Ge + \frac{1}{L}\int e\,dt = i(t)$$

Corrente/tensão em função do tempo

$$a\frac{dx}{dt} + bi + c\int u\,dt = y(t)$$

Equações possuem a mesma forma geral.
Portanto, são circuitos duais.

Programação Matemática

Modelo primal x dual - Condições

- Possuem funções objetivo simétricas, ou seja, se o primal for de minimização o dual será de maximização e vice-versa. Tipicamente:

  Maximizar => Primal

  Minimizar => Dual

- Possuem simetria na descrição das restrições, ou seja, se na forma canônica o primal possui restrições ≤ então o dual possuirá restrições ≥

Programação Matemática

Modelo primal x dual - Condições

- Os termos independentes no primal surgem como os coeficientes da função objetivo no dual e vice-versa
- O número de restrições do primal é igual ao número de variáveis do dual e vice-versa
- A matriz de restrição do primal é a transposta da matriz de restrição do dual e vice-versa
- As variáveis de ambos os problemas são não-negativas

Primal x Dual

- Maximizar $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$
  Sujeito a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3$$

com $x_i \ge 0$ para i = 1, 2 e 3.

- Minimizar $z = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3$
  Sujeito a:

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 \ge c_1$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 \ge c_2$$
$$a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 \ge c_3$$

com $y_i \ge 0$ para i = 1, 2 e 3.

Maximizar $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$

Sujeito a: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leqslant b_i$

para $i = 1, \ldots, m$, com $x_j \ge 0$ para $j = 1, \ldots, n$.

Minimizar $z = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i$

Sujeito a: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i \geqslant c_j$

para $j = 1, \ldots, n$, com $y_i \ge 0$ para $i = 1, \ldots, m$.

Exemplo

Primal

Maximizar $Z = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$

Sujeito a:

$$
\begin{aligned}
1 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 &\leq 18 \\
2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 &\leq 15 \\
5 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 &\leq 20 \\
1 \cdot x_2 &\leq 8
\end{aligned}
$$

x_1 e $x_2 \geq 0$

Dual

Minimizar $z = 18\, y_1 + 15\, y_2 + 20\, y_3 + 8y_4$

Sujeito a:

$$
\begin{aligned}
1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 5 \cdot y_3 \qquad\qquad &\geq 1 \\
5 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 - 2 \cdot y_3 + 1 \cdot y_4 &\geq 2
\end{aligned}
$$

y_1, y_2, y_3 e $y_4 \geq 0.$

Exercício 1

Primal

(P) Maximizar $z = 6x_1 + 2x_2 + x_3$

sujeito a:

$$x_1 - x_2 + 7x_3 \leq 4$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

Dual

Exercício 1

Primal

(P) Maximizar $z = 6x_1 + 2x_2 + x_3$

sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 7x_3 &\leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dual

(D) Minimizar $w = 4u_1 + 5u_2$

sujeito a:

$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2 &\geq 6 \\ -u_1 + 3u_2 &\geq 2 \\ 7u_1 + u_2 &\geq 1 \\ u_1 \geq 0,\ u_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Exercício 2

Primal

Dual

(P) Maximizar $z = 3x_1 + 4x_2$

sujeito a:

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 &\leq -1 \\
-x_1 + x_2 &\leq 0 \\
x_1 \geq 0,\ & x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Exercício 2

Primal

(P) Maximizar $z = 3x_1 + 4x_2$

sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq -1 \\ -x_1 + x_2 &\leq 0 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dual

(D) Minimizar $w = -u_1 + 0u_2$

sujeito a:

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &\geq 3 \\ -u_1 + u_2 &\geq 4 \\ u_1 \geq 0,\ u_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Interpretação Econômica

Primal

$$\text{Min } z = cx$$
$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

Modelos lineares de decisão e análise

Dual

$$\text{Max } w = ub$$
$$uA \leq c$$
$$u \geq 0$$

Informa qual o vetor de atividades x que minimiza o custo da produção das quantidades b_i dos produtos *i*.

Informa qual o vetor de preços *u* associado à máxima receita que pode ser obtida em condições não lucrativas (a receita associada a *u* é exatamente igual ao custo mínimo de produção).

Proposições

Sejam os modelos (P) e (D)

$$
\begin{array}{ll}
\text{(P)Min } z = cx & \text{(D) Max } w = ub \\
\quad \text{sujeito a:} & \quad \text{sujeito a:} \\
\quad\quad Ax \geq b & \quad\quad uA \leq c \\
\quad\quad\quad x \geq 0 & \quad\quad u \quad \geq 0
\end{array}
$$

- Se x e u são soluções viáveis dos problemas (P) e (D) respectivamente, então: $cx \geq ub$.
- Se x e u são soluções viáveis dos problemas (P) e (D), respectivamente, satisfazendo a $cx = ub$, então ambos são soluções ótimas dos correspondentes problemas.

Método Simplex-Dual

- Primeiro define-se quem sai e depois quem entra
- Variável que sai: é a variável básica com o valor mais negativo. (coluna b | termos independentes)
- Se todas as variáveis básicas tiverem valores positivos, a solução é ótima.

Método Simplex-Dual

Variável que entra: é escolhida entre as variáveis fora da base, da seguinte maneira:

- dividir os coeficientes da equação Z transformada pelos correspondentes coeficientes negativos da equação da variável que sai;
- a variável que entra é a que tem o menor valor entre os quocientes encontrados (problemas de minimização) ou o menor valor absoluto (problemas de maximização).
- Quando, em ambos os casos, não houver coeficientes negativos na linha da variável que sai da base, o problema não tem solução viável.

Exemplo

- Seja o seguinte problema Dual

  Minimizar $Z = 8x_1 + 12x_2$

  Sujeito a: $1x_1 + 2x_2 \geq 5$

  $1x_1 + 1x_2 \geq 3$

  $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$

- Resolva pelo método simplex-dual

Exemplo

Minimizar $Z = 8x_1 + 12x_2$

Sujeito a: $1x_1 + 2x_2 \geq 5$

$1x_1 + 1x_2 \geq 3$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$

Base	X1	X2	X3	X4	b		
X3	-1	-2	1	0	-5		
X4	-1	-1	0	1	-3		
Z	-8	-12	0	0	0		

Exemplo

Minimizar $Z = 8x_1 + 12x_2$

Sujeito a: $1x_1 + 2x_2 \geq 5$

$1x_1 + 1x_2 \geq 3$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;$

Base	X1	X2	X3	X4	b		
X3	-1	-2	1	0	-5		Sai: X3
X4	-1	-1	0	1	-3		Entra: X2
Z	-8	-12	0	0	0		

Exemplo

Minimizar $Z = 8x_1 + 12x_2$

Sujeito a: $1x_1 + 2x_2 \geq 5$

$1x_1 + 1x_2 \geq 3$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;$

Base	X1	X2	X3	X4	b		
X3	-1	-2	1	0	-5		Sai: X3
X4	-1	-1	0	1	-3		Entra: X2
Z	-8	-12	0	0	0		

Base	X1	X2	X3	X4	b		
X2	0,5	1	-0,5	0	2,5		
X4	-0,5	0	-0,5	1	-0,5		
Z	-2	0	-6	0	30		

Exemplo

Minimizar $Z = 8x_1 + 12x_2$

Sujeito a: $1x_1 + 2x_2 \geq 5$

$1x_1 + 1x_2 \geq 3$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;$

Base	X1	X2	X3	X4	b		
X3	-1	-2	1	0	-5		Sai: X3
X4	-1	-1	0	1	-3		Entra: X2
Z	-8	-12	0	0	0		

Base	X1	X2	X3	X4	b		
X2	0,5	1	-0,5	0	2,5		
X4	-0,5	0	-0,5	1	-0,5		Sai: X4
Z	-2	0	-6	0	30		Entra: X1

Exemplo

Minimizar $Z = 8x_1 + 12x_2$

Sujeito a: $1x_1 + 2x_2 \geq 5$

$1x_1 + 1x_2 \geq 3$

$x_1 \geq 0; \ x_2 \geq 0;$

Base	X1	X2	X3	X4	b		
X3	-1	-2	1	0	-5		Sai: X3
X4	-1	-1	0	1	-3		Entra: X2
Z	-8	-12	0	0	0		

Base	X1	X2	X3	X4	b		
X2	0,5	1	-0,5	0	2,5		
X4	-0,5	0	-0,5	1	-0,5		Sai: X4
Z	-2	0	-6	0	30		Entra: X1

Base	X1	X2	X3	X4	b	Condição de parada atingida X2 e X4 > 0
X2	0	1	0,5	0	2	
X4	1	0	1	-2	1	
Z	0	0	-4	-4	32	

Exemplo

Minimizar $Z = 8x_1 + 12x_2$

Sujeito a: $1x_1 + 2x_2 \geq 5$

$1x_1 + 1x_2 \geq 3$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;$

Base	X1	X2	X3	X4	b		
X3	-1	-2	1	0	-5		Sai: X3
X4	-1	-1	0	1	-3		Entra: X2
Z	-8	-12	0	0	0		

Base	X1	X2	X3	X4	b		
X2	0,5	1	-0,5	0	2,5		
X4	-0,5	0	-0,5	1	-0,5		Sai: X4
Z	-2	0	-6	0	30		Entra: X1

Base	X1	X2	X3	X4	b		Solução
X2	0	1	0,5	0	2		X2=2
X4	1	0	1	-2	1		X4=1
Z	0	0	-4	-4	32		Z=32

Exercício

- Seja o seguinte problema Primal

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + 6x_2$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeito a: } \quad & 2x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 4x_1 + 5x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0; \end{aligned}$$

- Obtenha o modelo dual
- Resolva pelo método simplex-dual