Vale para 1, para 2, para 3, ... Vale sempre?

As afirmações abaixo, sobre números naturais, são verdadeiras para os números 1, 2, 3 e muitos outros. Perguntamos: elas são verdadeiras **sempre**?

Verdadeiro ou falso?

1. $\forall\, n \in N,\, n < 100$.
2. $\forall\, n \in N,\, n^2 + n + 41$ é um número primo.
3. $\forall\, n \in N^*,\, 991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito.
4. $\forall\, n \in N^*$, a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.
5. $\forall\, n \in N^*,\, 2n + 2$ é a soma de dois números primos.

Vejamos:

1. "$n < 100$" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e outros, mas torna-se falsa para qualquer número natural maior do que 99. Portanto,

"$\forall\, n \in N,\, n < 100$" é uma sentença *falsa*.

2. "$n^2 + n + 41$ é um número primo" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e outros. De fato, ela é verdadeira para todos os números naturais menores do que 40 (o que foi verificado por Euler em 1772). Porém, o número

$40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 41 \times 41$ não é primo, mostrando que a sentença

"$\forall\, n \in N,\, n^2 + n + 41$ é um número primo" é uma sentença *falsa*.

3. "$991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e, mesmo após muitas e muitas tentativas, não se acha um número que a torne falsa.

Pudera! O *menor* número natural n para o qual $991n^2 + 1$ é um quadrado perfeito é

12 055 735 790 331 359 447 442 538 767 e, portanto, a sentença

"$\forall\, n \in N^*$, $991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito" é *falsa*.

4. "A soma dos n primeiros números ímpares é n^2" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e, como no caso anterior, após muitas e muitas tentativas, não se acha um número natural que a torne falsa. Neste caso, tal número não existe, pois, como veremos adiante, essa sentença é *verdadeira sempre*.

5. "$2n + 2$ é a soma de dois números primos" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e, como nos dois exemplos anteriores, após muitas e muitas tentativas, não se encontra um número natural que a torne falsa. Mas agora temos uma situação nova: ninguém, até hoje, encontrou um número que tornasse a sentença falsa e ninguém, até hoje, sabe demonstrar que a sentença é verdadeira sempre.

A sentença é a famosa conjetura de Goldbach feita em 1742, em uma carta dirigida a Euler:

Todo inteiro par, maior do que 2, é a soma de dois números primos.

Não se sabe, até hoje, se essa sentença é verdadeira ou falsa.

Em suma, dada uma afirmação sobre números naturais, se encontrarmos um contra-exemplo, saberemos que a afirmação não é sempre verdadeira. E se não acharmos um contra-exemplo? Nesse caso, suspeitando que a afirmação seja verdadeira sempre, uma possibilidade é tentar demonstrá-la recorrendo ao princípio da indução.

Princípio da indução finita

"Seja S um conjunto de números naturais, com as seguintes propriedades:

1. $0 \in S$

2. $\forall\, k \in N$, se $k \in S$, então $k + 1 \in S$.

Nessas condições, $S = N$."

Vamos ver como esse princípio nos permite demonstrar que é verdadeira a sentença 4: "$\forall\, n \in N^*$, a soma dos n primeiros números ímpares é n^2".

Demonstração

Seja S o conjunto dos números naturais n para os quais a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

1. $1 \in S$, pois a soma dos 1 primeiros números ímpares é $1 = 1^2$.

2. Vamos supor que $k \in S$, isto é, que a soma dos k primeiros números ímpares seja k^2.

Vamos provar que $k + 1 \in S$, isto é, que a soma dos $k + 1$ primeiros números ímpares é $(k + 1)^2$.

Estamos supondo que $1 + 3 + 5 + ... + 2k - 1 = k^2$ e queremos provar que

$1 + 3 + 5 + ... + 2k + 1 = (k + 1)^2$. Basta observar que

$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

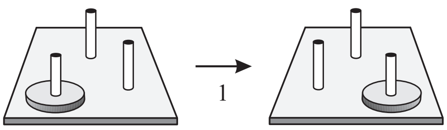
O princípio da indução nos garante, agora, que $S = IN^*$, ou seja, a afirmação "a soma dos n primeiros ímpares é n^2" é verdadeira para todos os números naturais maiores do que zero.

Uma lenda

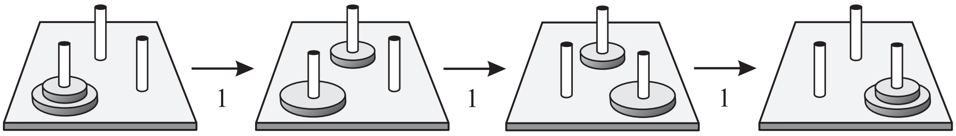
Após a criação do mundo, em um mosteiro escondido na Índia, o Grande Criador colocou uma placa de bronze e nela fixou três bastões cobertos de diamantes. Em um dos bastões, em ordem decrescente de tamanho, colocou 64 discos de ouro. E assim disse aos monges: "Transfiram esta pilha de discos para outro bastão, movendo, ininterruptamente, um disco de cada vez e nunca permitindo que um disco fique acima de um menor. Quando terminarem esta tarefa e os 64 discos estiverem em outro bastão, este templo se reduzirá a pó e com um estrondo de trovões o mundo acabará".

Dizem os sábios que o mundo foi criado há 4 bilhões de anos aproximadamente e os monges, desde a criação, estão movendo os discos na razão de um disco por segundo. Será que veremos o mundo acabar?

Como é muito difícil imaginar os movimentos feitos com uma pilha de 64 discos, imaginemos uma pilha com *Um disco*: a transferência se dá com apenas 1 movimento: $m_1 = 1$.

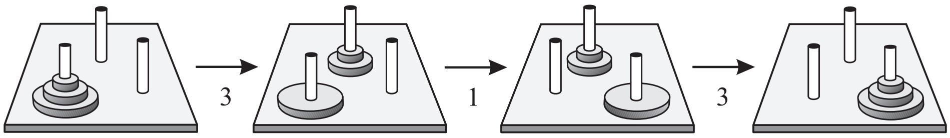


Dois discos

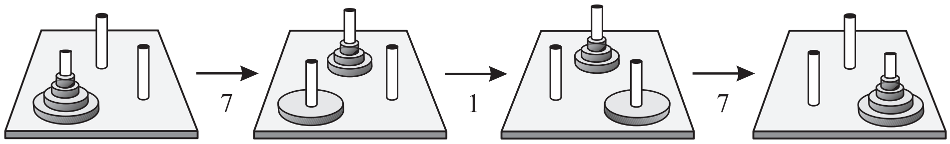


Para 2 discos, a transferência requer 3 movimentos: $m_2 = 3$.

Três discos: $m_3 = 7$.



Quatro discos: $m_4 = 15$.



Já podemos deduzir como deslocar n discos com um menor número possível de movimentos. Para tal, observe que o deslocamento do maior disco, do bastão em que se encontra inicialmente para um outro, requer que esse segundo bastão esteja vazio, pois o maior disco não pode ficar sobre um menor. Como, para se mover o maior disco, nenhum outro pode estar sobre ele, todos os outros discos terão que estar no terceiro bastão. Assim, a estratégia com menor número de movimentos será: movem-se $n - 1$ discos para o bastão de trás, com m_{n-1} movimentos; em seguida, move-se o n-ésimo disco para o outro bastão da frente, com 1 movimento; finalmente movem-se os $n - 1$ discos do bastão de trás para o da frente, com m_{n-1} movimentos. Tem-se:

$$m_n = m_{n-1} + 1 + m_{n-1} = 2m_{n-1} + 1$$

Façamos uma tabela com o número de discos e o número de movimentos mínimo para mudá-los de um bastão para outro:

n	1	2	3	4	5	6	...
m_n	1	3	7	15	31	63	...

Precisamos descobrir o valor de m_{64} porque, m_{64} segundos após a criação do mundo, ele acabará e já se passaram 4 bilhões de anos!

Observando a segunda linha da tabela, vemos que os seus números são, a menos de 1: 2, 4, 8, 16, 32, 64, ou seja, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, o que nos leva a fazer a seguinte conjetura:

$$m_n = 2^n - 1$$

Essa sentença é verdadeira para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ mas será verdadeira sempre?

Tentemos demonstrá-la por indução.

Seja S o conjunto dos números naturais n tais que n discos são movidos com $2^n - 1$ movimentos.

1. $1 \in S$, pois para 1 disco necessitamos de $1 = 2^1 - 1$ movimentos.

2. Vamos supor que $k \in S$, isto é, k discos são removidos com $2^k - 1$ movimentos.

Vamos provar que $k + 1 \in S$, isto é, que $m_{k+1} = 2^{k+1} - 1$.

Já vimos que $m_{k+1} = 2m_k + 1$.

$$m_{k+1} = 2^k - 1 + 1 + 2^k - 1 = 2 \,.\, 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1,$$

e isso mostra que $k + 1 \in S$.

O princípio da indução nos garante que n discos podem sempre ser removidos com $2^n - 1$ movimentos e, em particular, $m_{64} = 2^{64} - 1$.

E assim ficamos sabendo que, $2^{64} - 1$ segundos após a criação do mundo, ele terminará. Com um pouco mais de Matemática ficaremos sabendo se isso ocorrerá logo.

Façamos alguns cálculos.

Quantos segundos tem um ano?

Resposta:

$$60 \times 60 \times 24 \times 365\frac{1}{4} = 31\,557\,600 < 2^{25} = 1024 \times 1024 \times 32 = 33\,554\,432.$$

Exagerando, vamos supor que os monges façam 2^{25} movimentos por ano (na verdade fazem uns milhões a menos). Com isso, o mundo acabará em $\frac{2^{64}}{2^{25}} = 2^{39}$ anos.

$$2^{39} = 2^{10} \text{ x } 2^{10} \text{ x } 2^{9} = 1\,024 \text{ x } 1\,024 \text{ x } 1\,024 \text{ x } 512 > 512 \text{ x } 10^{9}$$

Passaram-se até hoje 4 bilhões de anos, ou seja, 4 x 10^9 anos.

Podemos ficar tranqüilos – faltam mais do que 508 bilhões de anos para os monges terminarem sua tarefa – isso, supondo que eles não errem no caminho.

Baseado no artigo
Vale para 1, para 2, para 3, ...
Vale sempre?
Renate Watanabe, **RPM** 09