Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
ICEI - Curso de Ciência da Computação
Disciplina: Tópicos em Computação: Deep Learning em Visão Computacional
Prof. Alexei Machado

Lista No 1

A- Fundamentos Matemáticos

1. *Propriedades básicas de expoentes.* Identifique abaixo quais igualdades estão corretas:

   - $x^a y^a = (xy)^a$
   - $\frac{a}{x+y} = \frac{a}{x} + \frac{a}{y}$
   - $(x^a)^b = x^{ab}$
   - $(x/y)^a = x^a/y^b$
   - $(x+y)^a = x^a + y^a$
   - $x^a y^b = (xy)^{a+b}$
   - $(-x)^2 = -x^2$
   - $\sqrt{x^2+y^2} = |x| + |y|$
   - $\frac{x+y}{a} = \frac{x}{a} + \frac{y}{a}$

2. *Propriedades básicas das funções exp e log.*

   - Esboce o gráfico das funções $f(x) = \log(3x+1)$ e $f(x) = \exp(3x)$. Identifique o maior domínio na reta em que as funções podem ser definidas.
   - Obtenha as derivadas $f'(x)$ das duas funções acima.
   - Verifique quais das seguintes igualdades são válidas:
     - $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.
     - $\log(x+y) = \log(x) \times \log(y)$.
     - $\exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y)$.
     - $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.
     - $\log(x/y) = \log(x) - \log(y)$.
     - $\exp(xy) = (\exp(x))^y$.
     - $\exp(xy) = \exp(x) + \exp(y)$.

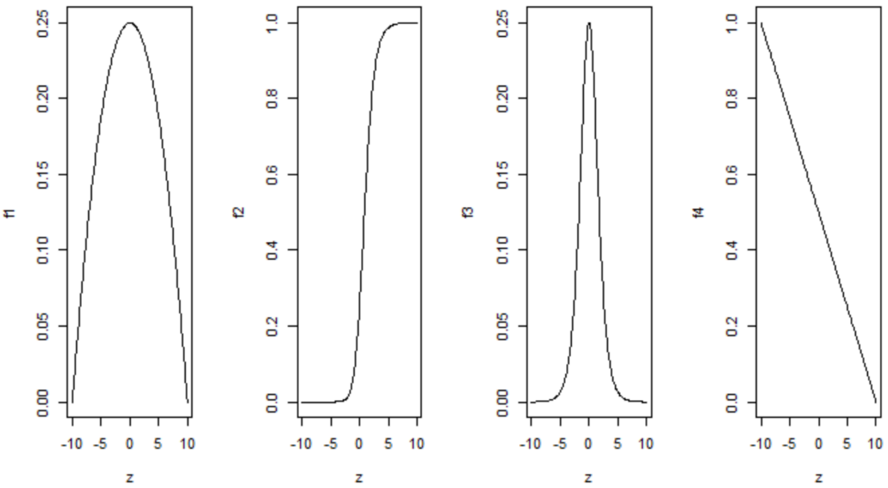


Figura 1.1: Qual desses gráficos representa a a função derivada $f'(z)$ da função logística $f(z) = 1/(1 + \exp(-z))$?

3. A função logística $f(z) = 1/(1 + \exp(-z))$ é fundamental na análise de dados.
   - Esboce o gráfico da função logística considerando o intervalo $z \in (-3, 3)$.
   - Apenas olhando o gráfico de $f(z)$, sem fazer nenhum cálculo, diga: (a) qual o ponto z em que a derivada atinge o valor máximo; (b) a medida que $z \to \infty$, o valor da derivada $f'(z)$ vai para que valor? (c) e quando $z \to -\infty$?
   - Apenas olhando o gráfico de $f(z)$, sem fazer nenhum cálculo, diga dos gráficos apresentados na Figura **??** representa a função derivada $f'(z)$.
   - Obtenha a expressão matemática de $f'(z)$ e mostre que ela pode ser expressa como $f'(z) = f(z)(1 - f(z))$.

4. Dada a função

$$\mathcal{L}(a, y) = -(y \log(a) + (1 - y) \log(1 - a))$$

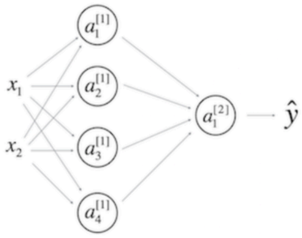
e sendo a = *sigmoide(z)*, demonstre as seguintes derivadas:

$$\partial L(a, y) / \partial a = -\frac{y}{a} + \frac{1-y}{1-a}$$

$$\partial L(a, y) / \partial z = a - y$$

B- MLP

1- Considere a rede com uma camada escondida mostrada abaixo:



Assumindo que cada neurônio de uma camada [l] aplica uma função $f(Z^{[l]}) = A^{[l]}$ onde Z é calculado como $W^{[l]}A^{[l-1]} + b^{[l]}$ e que a entrada pode ser escrita como a camada zero: $A[0] = \mathbf{x}$.

a) Quais são as dimensões de $W^{[1]}$, $b^{[1]}$, $W^{[2]}$ e $b^{[2]}$?

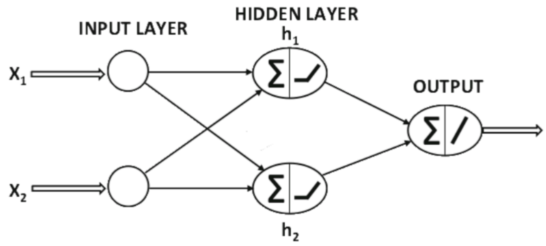
b) Quais são as dimensões de $Z^{[1]}$ e $A^{[1]}$?

2- Uma MLP possui 10 unidades de entrada, 50 unidades na camada escondida e 10 unidades na camada de saída (sem contar o bias). Deseja-se substituir a camada escondida por 2, cada uma com n unidades, sem aumentar o número total de pesos da rede original. Qual o valor máximo de n?

3- Considere uma rede neural com dois inputs X_1 e X_2 e com duas camadas escondidas, cada uma com dois nós. Assuma que os pesos estão distribuídos de forma que os nós em cima na camada aplicam a sigmóide na soma dos seus inputs e que os nós em baixo aplicam a função tanh em seus inputs. O nó de saída aplica a ReLU na soma dos dois inputs. Desenhe esta rede. Escreva a saída dessa rede neural como uma função de x_1 e x_2 em forma fechada.

4- Suponha que você tenha uma sequência de dados com duas features binárias, isto é, $X = \{(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}), ..., (x_1^{(n)}, x_2^{(n)})\}$, onde $x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \in \{0, 1\}$. Imagine uma rede neural com 3 nós, como na figura abaixo, todos utilizam a função de ativação $ReLU(x)$, o último nó (output) deve retornar 0 se o resultado é Falso e um valor maior que zero se o resultado é Verdadeiro. Mostre como você pode usar esta rede para calcular $XOR(x_1, x_2)$. Ou seja, mostre os pesos dos parâmetros dos nós $h1, h2$ e output para calcular o XOR.

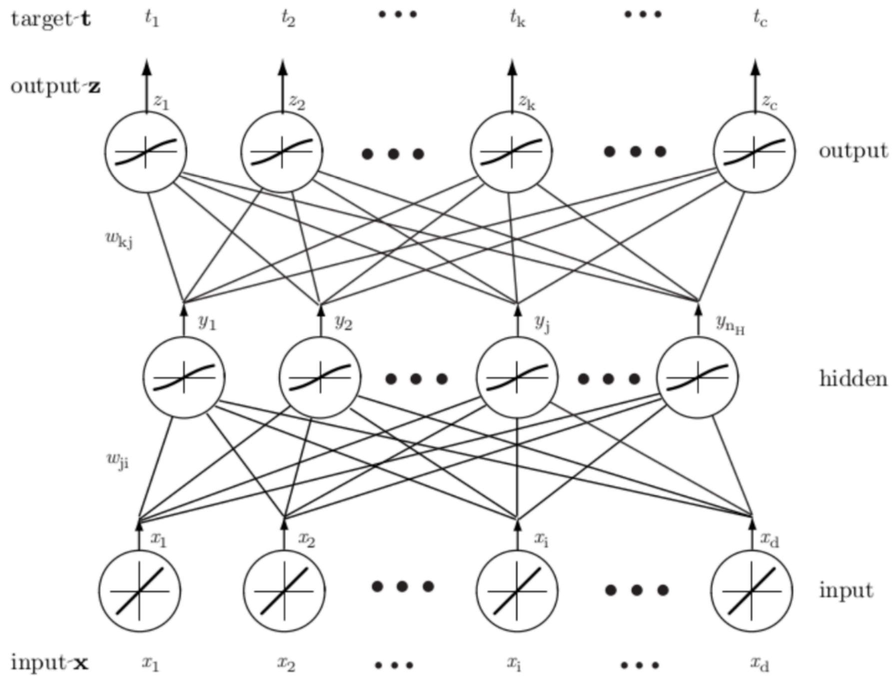
Lembre-se que, o $XOR(x_1, x_2)$, também chamado de *ou exclusivo*, é Verdadeiro quando $x_1 = 1$ OU $x_2 = 1$, porém é Falso quando $x_1 = 1$ E $x_2 = 1$ e quando $x_1 = 0$ E $x_2 = 0$.



5- Suponha que todos os nós de uma rede neural utilizam uma função de ativação linear, isto é, $g(x) = x$. Mostre que, quando utilizada essa função, qualquer rede neural com 2 camadas é equivalente a uma rede de 1 camada. Verifique intuitivamente que esse resultado é válido independentemente do número de camadas (não precisa fazer contas).

Esse tipo de rede consegue classificar corretamente inputs de acordo com o XOR (problema 4)?

6- Considere uma rede padrão de 3 camadas cuja entrada $\mathbf{x}$ possui dimensão $d \times 1$, a primeira camada da rede possui d unidades de entrada e possui somente uma ativação linear do tipo $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, a camada escondida possui n_H unidades escondidas e a camada final possui c unidades de saída e o bias.



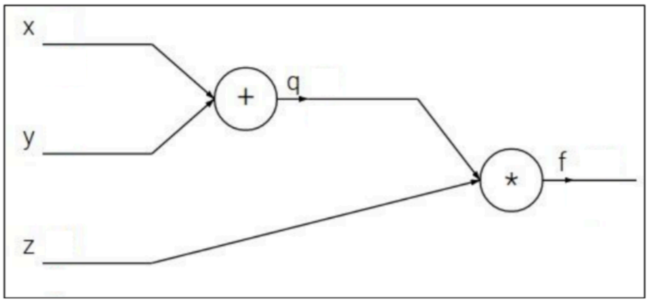
a) Qual o número total de pesos que existem na rede?

PUC Minas

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
ICEI - Curso de Ciência da Computação
Disciplina: Tópicos em Computação: Deep Learning em Visão Computacional
Prof. Alexei Machado

C- Grafos Computacionais

1- Seja a função $f(x, y, z) = (x + y)z$. dada pelo diagrama da figura abaixo.



a) Calcule as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial q}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y},$$

b) Mostre passo a passo o calculo do backpropagation, considerando as entradas $x = -2, y = 5, z = -4$

2- Seja a função $f(w, x) = \frac{1}{1+e^{-(w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2)}}$, onde $w_0 = 2.0, x_0 = -1.0, w_1 = -3.0, x_1 = -2.0, w_2 = -3$. Construa o diagrama assim como na questão (1) e refaça os passos das letras (a) e (b).