1.12. Fechado sob adição: (Todas as provas usam o fato de que $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial)

Tome $u, v \in L^2(\mathbb{N})$. Fazendo $u + v$, temos:

$u + v = (u_0 + v_0, u_1 + v_1, \ldots)$

→ Uma vez que sabemos que $x + y \in \mathbb{R}$ se $x, y \in \mathbb{R}$.

Basta agora provar que $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k + v_k|^2 < \infty$. Em se tratando de quadrados, podemos aproveitar o fato de que $|x+y|^2 = (x+y)^2$ para $x, y \in \mathbb{R}$, isso porque

se $x + y \geq 0$, então $|x+y| = x+y$ e $|x+y|^2 = (x+y)^2$

se $x + y = a < 0$, então $(x+y)^2 = a^2 = ((-1)|a|)^2 = |a|^2 = |x+y|^2$

Basta, então, provar que $\sum_{k=0}^{\infty} (u_k + v_k)^2 < \infty$. Expandindo $(u_k + v_k)^2$, temos

$(u_k + v_k)^2 = u_k^2 + 2u_k v_k + v_k^2$

Sabemos também que $(u_k - v_k)^2 \geq 0$ e expandindo o quadrado, temos

$(u_k - v_k)^2 = u_k^2 - 2u_k v_k + v_k^2$

Utilizando a desigualdade anterior e as duas expansões, temos

$(u_k + v_k)^2 \leq (u_k + v_k)^2 + (u_k - v_k)^2$

$(u_k + v_k)^2 \leq 2u_k^2 + 2v_k^2$

Mas por hipótese, sabemos que $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^2 < \infty$ e $\sum_{k=0}^{\infty} |v_k|^2 < \infty$. Além disso,

se $x \geq 0$, então $x = |x|$ e $x^2 = |x|^2$

se $x < 0$, então $x^2 = ((-1)|x|)^2 = |x|^2$.

então $\sum_{k=0}^{\infty} u_k^2 < \infty$ e $\sum_{k=0}^{\infty} v_k^2 < \infty$. Daí, temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} (u_k + v_k)^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} (2u_k^2 + 2v_k^2)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2u_k^2 + \sum_{k=0}^{\infty} 2v_k^2$$

$$\leq 2\sum_{k=0}^{\infty} u_k^2 + 2\sum_{k=0}^{\infty} v_k^2$$

Como se $x < \infty$, $2x < \infty$ para $x \in \mathbb{R}^+$, e se $x < \infty$ e $y < \infty$, $x + y < \infty$ para $x, y \in \mathbb{R}^+$, então

$$\sum_{k=0}^{\infty} (u_k + v_k)^2 \leq 2\sum_{k=0}^{\infty} u_k^2 + 2\sum_{k=0}^{\infty} v_k^2 < \infty$$

Denote $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

E está provado que o conjunto é fechado sob adição.

Fechado sob multiplicação de escalar:

Tome $u \in L^2(\mathbb{N})$. Sabemos que $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^2 < \infty$ e que $\sum_{k=0}^{\infty} u_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^2 < \infty$. Daí seguimos para a multiplicação por escalar:

$\alpha u = (\alpha u_0, \alpha u_1, \alpha u_2, \ldots)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Basta agora provar que $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha u_k|^2 < \infty$, uma vez que sabemos que $xy \in \mathbb{R}$ se $x, y \in \mathbb{R}$. Fazemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha u_k|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha u_k)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^2 u_k^2 = \alpha^2 \sum_{k=0}^{\infty} u_k^2$$

Como sabemos que $\sum_{k=0}^{\infty} u_k^2 < \infty$, e se $\alpha < \infty$, então $\alpha . \alpha = \alpha^2 < \infty$, temos

$$\alpha^2 \sum_{k=0}^{\infty} u_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha u_k|^2 < \infty$$

Propriedades: $\forall u, v, w \in L^2(\mathbb{N})$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(a) (comutatividade)

$u + v = (u_0 + v_0, u_1 + v_1, \ldots)$ e sabemos que se $x, y \in \mathbb{R}$, então $x + y = y + x$. Daí, temos

$$u + v = (u_0 + v_0, u_1 + v_1, \ldots) = (v_0 + u_0, v_1 + u_1, \ldots) = v + u$$

(b) (associatividade)

$(u+v)+w = ((u_0+v_0)+w_0, (u_1+v_1)+w_1, \dots)$ e sabemos que se $x, y, z \in \mathbb{R}$, então $(x+y)+z = x+(y+z)$. Daí, segue

$$(u+v)+w = ((u_0+v_0)+w_0, (u_1+v_1)+w_1, \dots) = (u_0+(v_0+w_0), u_1+(v_1+w_1), \dots) = u+(v+w)$$

(c) (el. neutro +)

Tomando $\vec{0} = (0, 0, 0, \dots)$, temos que $0 \in \mathbb{R}$ e $\sum_{k=0}^{\infty} |0|^2 = 0 < \infty$, portanto $\vec{0} \in L^2(\mathbb{N})$. Fazemos agora

$u + \vec{0} = (u_0+0, u_1+0, \dots)$ e sabemos que $x+0 = x$ se $x \in \mathbb{R}$. Daí, segue

$$u+\vec{0} = (u_0+0, u_1+0, \dots) = (u_0, u_1, \dots) = u$$

(d) (el. neutro ·)

Tomando $u \in L^2(\mathbb{N})$ e $1 \in \mathbb{R}$, temos $1.u = (1.u_0, 1.u_1, \dots)$ e sabemos que $1.x = x$ para $x \in \mathbb{R}$. Daí segue

$$1.u = (1.u_0, 1.u_1, \dots) = (u_0, u_1, \dots) = u$$

(e) (inverso aditivo)

Tomando $u, -u \in L^2(\mathbb{N})$ com $u = (u_0, u_1, \dots)$ e $-u = (-u_0, -u_1, \dots)$, temos

$$u + (-u) = (u_0 - u_0, u_1 - u_1, \dots) = (0, 0, \dots) = \vec{0},$$ portanto temos inverso aditivo para todo vetor de $L^2(\mathbb{N})$

(f) (associatividade escalar)

Tomando $u \in L^2(\mathbb{N})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos

$$(\alpha\beta)u = ((\alpha\beta)u_0, (\alpha\beta)u_1, \dots) = (\alpha(\beta u_0), \alpha(\beta u_1), \dots) = \alpha(\beta u)$$

↳ Pela associatividade dos reais

(g) (distributiva)

Tomando $u, v \in L^2(\mathbb{N})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos

$$(\alpha + \beta)u = ((\alpha+\beta)u_0, (\alpha+\beta)u_1, \dots) = (\alpha u_0 + \beta u_0, \alpha u_1 + \beta u_1, \dots) = \alpha u + \beta u$$

↳ Pela distributividade dos reais

$$\alpha(u + v) = (\alpha(u_0 + v_0), \alpha(u_1 + v_1), \dots) = (\alpha u_0 + \alpha v_0, \alpha u_1 + \alpha v_1, \dots) = \alpha u + \alpha v$$

↳ Pela distributividade dos reais

E está provado que $L^2(\mathbb{N})$ é um espaço vetorial $\square$

Partindo do pressuposto de que $L^\infty(\mathbb{N})$ é um espaço vetorial, sabemos que $L^2(\mathbb{N})$ é um subespaço de $L^\infty(\mathbb{N})$ porque $L^2(\mathbb{N})$ é um espaço vetorial e todos seus elementos estão em $L^\infty(\mathbb{N})$. Isso porque uma condição necessária para que $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^2 < \infty$ é que $|u_k| < \infty$ para $k = 0, 1, \ldots$. Em particular $|u_k| < M_k$ para algum $M_k \in \mathbb{R}$, portanto, se $u \in L^2(\mathbb{N})$, então $u \in L^\infty(\mathbb{N})$.

1.13 a. Unicidade do elemento de identidade aditiva.

Suponha que a identidade aditiva não é única e tome u e v identidades aditivas de um espaço vetorial V tal que $u \neq v$

Pelo axioma (c) (el. neutro +), temos:

$$u + v = u$$

Ainda pelo axioma (c) (el. neutro +), temos:

$$u + v = v + u$$

Mas por hipótese, u também é identidade aditiva, portanto

$$u + v = v + u = v$$

Dessa forma,

$$u = u + v = v + u = v$$

E chegamos na contradição $u = v$, portanto para quaisquer identidades aditivas u, v de um espaço vetorial V, temos que $u = v$ e está provada a unicidade da identidade aditiva $\square$

1.13. b.

1. $(1+0)u = 1u + 0u$ (distributiva)

2. $1u = u + 0u$

↳ (el. neutro.)

↳ $(1+0) = 1$, nos reais

3. $u = u + 0u$

↳ (el. neutro.)

4. $u + (-u) = (u + (-u)) + 0u$

↳ Escolhendo o vetor $(u + (-u)) \in V$ e usando a igualdade em 3

5. $0 = 0 + 0u$

↳ (inverso aditivo)

↳ (inverso aditivo)

6. $0 = 0u$

↳ (el. neutro +)

c. Tome $v \in V$. Daí se segue

1. $v + (-1)v = (1)v + (-1)v$ (multiplicação por escalar)

2. $(1)v + (-1)v = (1+(-1))v$ (distributiva)

3. $(1+(-1))v = 0v$ $(1+(-1)=0$ nos reais$)$

4. $0v = 0$ (pelo exercício anterior 1.13.(b))

E se $v + (-1)v = 0$, $(-1)v$ é inverso aditivo v e está provado o exercício $\square$

1.18. Da equação 1.22 e da definição da operação de transposição, tiramos que

$$E_{m,k} = \begin{bmatrix} e^{2\pi i k 0/m} \\ \vdots \\ e^{2\pi i k(m-1)/m} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_{m,l}^T = \begin{bmatrix} e^{2\pi i l 0/m} & \dots & e^{2\pi i l(m-1)/m} \end{bmatrix}$$

Daí, pela definição da operação de multiplicação de matrizes, de dimensões $m \times 1$ e $1 \times m$ que resultam numa matriz $m \times m$, temos

$$E_{m,k} \cdot E_{m,l}^T = \begin{bmatrix} e^{2\pi i (k0/m + l0/m)} & \dots & e^{2\pi i (k0/m + l(m-1)/m)} \\ \vdots & \ddots & \\ e^{2\pi i (k(m-1)/m + l0/m)} & \dots & e^{2\pi i (k(m-1)/m + l(m-1)/m)} \end{bmatrix}$$

Que é exatamente equivalente à definição de $\mathcal{E}_{m,n,k,l}$ na forma matricial (1.25) do livro

$$\mathcal{E}_{m,n,k,l}(r,s) = e^{2\pi i (kr/m + ls/m)} \qquad \text{com } r = 0, \dots, m-1 \text{ e } s = 0, \dots, m-1$$

1.19. a. Tomando $g(x,y)$, $x(t)$ e $y(t)$ como definidos no exercício, temos

$$g(t) = e^{2\pi i(p(x_0+tu_1)+q(y_0+tu_2))} = e^{2\pi i(px_0+ptu_1+qy_0+qtu_2)} = e^{2\pi i px_0} \cdot e^{2\pi i qy_0} \cdot e^{2\pi i(pu_1+qu_2)t} =$$

Daí percebemos que $e^{2\pi i px_0} \cdot e^{2\pi i qy_0}$ é um número complexo que não depende de t, portanto A. Tomando agora o produto interno euclidiano canônico, temos $u \cdot v = (u_1, u_2, \ldots, u_n)(v_1, v_2, \ldots, v_n) =$

$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$ com $u, v \in \mathbb{R}^n$. Daí se segue

$$g(t) = A e^{2\pi i(pu_1+qu_2)t} = A e^{2\pi i(v \cdot u)t}$$

Além disso, pela definição de produto interno, temos $v \cdot u = \|v\|\|u\| \cos\theta$, com θ sendo o ângulo entre v e u, e $\|u\| = 1$ por hipótese. Daí chegamos a

$$g(t) = A e^{2\pi i(\|v\|\|u\| \cos\theta)t} = A e^{2\pi i \|v\| \cos(\theta) t}$$

E está provado o exercício $\square$

b. A direção da reta L é dada pelo vetor u, dessa forma, se L é ortogonal a v, temos que $v \cdot u = 0$ pela definição de ortogonalidade. Daí se segue

$$g(t) = A\,e^{2\pi i (v \cdot u) t} = A\,e^{2\pi i\, 0 t} = A = e^{2\pi i (p x_0 + q y_0)}$$

Da última igualdade, notamos que, se L é ortogonal a v, $g(t)$ depende apenas de v e do ponto arbitrário (x_0, y_0), mantendo-se constante na direção do vetor u, portanto constante em L $\square$

c. $g(t) = A\,e^{2\pi i \|v\| \cos(\theta) t} = A\,e^{2\pi i \sqrt{p^2+q^2} \cos(\theta) t}$

↳ Pela norma canônica no espaço euclidiano

Portanto a frequência de g é $\sqrt{p^2+q^2}\cos(\theta)$ em termos de p, q e θ e em função de t.

d. O valor de θ que maximiza a frequência de $g(t)$ é $\theta = 0$, pois $\cos(\theta) = 1$ e $\sqrt{p^2+q^2} \cdot 1 \geqslant \sqrt{p^2+q^2}\cos(x)$ para $x \in [0, 2\pi[$. Dessa forma, percebe-se que quando os vetores v e u têm a mesma direção e sentido, temos a oscilação mais rápida possível caminhando em t. Esse valor faz sentido quando comparado com o resultado do exercício b, isso porque aquele exercício tratava do caso de não oscilação em t por conta da ortogonalidade de v e u, enquanto esse exercício trata do caso em que os vetores alinham-se na mesma direção e sentido.

Baseado no valor de θ que maximiza a frequência de oscilação em $g(t)$, temos que a maior frequência é $\sqrt{p^2+q^2} \cdot \cos 0 = \sqrt{p^2+q^2}$.

e. A frequência de uma onda de duas variáveis é dada pela soma das frequências em cada uma das mesmas, isso porque percorremos simultaneamente as ondas unidimensionais em x e y e temos que ser capazes de percorrer as frequências em ambas as direções. Dessa forma, a frequência de f é dada por $p+q$ e seu comprimento de onda é $\frac{1}{p+q}$.

1.21. Tome $E_{N,N-k}$

$$E_{N,N-k} = \begin{bmatrix} e^{2\pi i(N-k)0/N} \\ \vdots \\ e^{2\pi i(N-k)(N-1)/N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2\pi i 0 - 2\pi i k 0/N} \\ \vdots \\ e^{2\pi i (N-1) - 2\pi i k(N-1)/N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{e^{2\pi i 0}}{e^{2\pi i k 0/N}} \\ \vdots \\ \dfrac{e^{2\pi i (N-1)}}{e^{2\pi i k(N-1)/N}} \end{bmatrix}$$

Mas sabemos que $e^{2\pi i x} = 1$ se $x \in \mathbb{Z}$, então

$$E_{N,N-k} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{e^{2\pi i k 0/N}} \\ \vdots \\ \dfrac{1}{e^{2\pi i k(N-1)/N}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2\pi i k 0/N} \\ \vdots \\ e^{-2\pi i k(N-1)/N} \end{bmatrix} = \overline{E_{N,k}}$$

E está provado que $\overline{E_{N,k}} = E_{N,N-k}$ $\square$

1.22. Da equação 1.26, temos

$$\mathcal{E}_{m,n,k,l} = E_{m,k} E^T_{n,l}$$

Do exercício anterior e da utilização de propriedades de complexos conjugados, segue

$$\overline{\mathcal{E}_{m,n,k,l}} = \overline{E_{m,k} E^T_{n,l}} = \overline{E_{m,k}}\,\overline{E^T_{n,l}} = \overline{E_{m,k}}\,\overline{E_{n,l}}^T = E_{m,m-k} E^T_{n,n-l}$$

Daí segue também que

$$E_{m,m-k} E^T_{n,n-l} = \mathcal{E}_{m,n,m-k,n-l}$$

Portanto chegamos às relações

$$\overline{\mathcal{E}_{m,n,k,l}} = E_{m,m-k} E^T_{n,n-l} \quad e \quad \overline{\mathcal{E}_{m,n,k,l}} = \mathcal{E}_{m,n,m-k,n-l}$$

Digitalizado com CamScanner