1.25 a.

Simetria conjugada:

$(v,w)_d = \sum_{k=1}^{m} d_k v_k w_k$, mas sabemos que $d_k, v_k, w_k \in \mathbb{R}$, então vale a comutatividade

$(v,w)_d = \sum_{k=1}^{m} d_k w_k v_k$, novamente utilizando de $d_k, v_k, w_k \in \mathbb{R}$, temos que $x = \overline{x}$ se $x \in \mathbb{R}$, então

$(v,w)_d = \sum_{k=1}^{m} \overline{d_k}\, \overline{w_k}\, \overline{v_k}$, utilizando, por fim, das propriedades de conjugação, temos

$(v,w)_d = \overline{\sum_{k=1}^{m} d_k w_k v_k} = \overline{(w,v)_d}$

Linearidade do primeiro argumento:

Suponha $u \in \mathbb{R}^m$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Daí fazemos

$$(av + bu, w)_d = \sum_{k=1}^{m} d_k (av_k + bu_k) w_k = \sum_{k=1}^{m} [d_k a v_k w_k + d_k b u_k w_k] = \sum_{k=1}^{m} d_k a v_k w_k + \sum_{k=1}^{m} d_k b u_k w_k =$$

$$= a \sum_{k=1}^{m} d_k v_k w_k + b \sum_{k=1}^{m} d_k u_k w_k = a(v,w)_d + b(u,w)_d .$$

Definibilidade positiva:

$(v, v)_d = \sum_{k=1}^{m} d_k v_k^2$, mas sabemos que $x^2 \geq 0$ se $x \in \mathbb{R}$ e, por definição, $d_k > 0$ para $1 \leq k \leq m$. Além disso, se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, então $x + y \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}$. Daí segue

$d_k v_k^2 \geq 0$, $1 \leq k \leq m$

$(v, v)_d = \sum_{k=1}^{m} d_k v_k^2 \geq 0$

Suponha, por contradição, que $(v, v)_d = 0$ e $v \neq \vec{0}$. Temos

$(v, v)_d = \sum_{k=1}^{m} d_k v_k^2$

Por definição, $d_k > 0$ para $1 \leq k \leq m$ e pelo menos um $v_k \neq 0$ para $1 \leq k \leq m$. Como $v_k \in \mathbb{R}$ e, portanto, $v_k^2 > 0$, sabemos que pelo menos um $(d_k v_k^2) > 0$, então $(v, v)_d > 0$, uma contradição. Para o caso em que mais de um $v_k \neq 0$, temos mais de um $(d_k v_k^2) > 0$ e, se $x > 0$ e $y > 0$, $x + y > 0, x, y \in \mathbb{R}$, portanto $(v, v)_d > 0$ e chegamos novamente numa contradição.

Dessa forma, está provado que $(v, v)_d \geq 0$ e $(v, v) = 0$ se e somente se $v = \vec{0}$

Mostrada a validade do produto interno definido em questão, escrevemos sua norma associada.

$$\|v\|_d = \sqrt{(v,v)_d} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} d_k v_k^2}$$

b. Não ortogonalidade no produto interno canônico:

$$(v_1, v_2) = \sum_{k=1}^{n} v_{1k} v_{2k} = 2.5 + 1.(-2) = 8 \neq 0$$

Como $(v_1, v_2) \neq 0$, temos que o conjunto S não é ortogonal sob esse produto interno.

Ortogonalidade no produto interno $(,)_d$:

$$(v_1, v_2) = \sum_{k=1}^{n} d_k v_{1k} v_{2k} = 1.2.5 + 5.1.(-2) = 0$$

Como o produto interno de todos os vetores em S, dois a dois, é nulo, no caso $(v_1, v_2)_d = 0$, então S é ortogonal sob $(,)_d$

R. $\sqrt{(v_1, v_1)} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\sqrt{(v_1, v_1)_d} = \sqrt{1 \cdot 2^2 + 5 \cdot 1^2} = \sqrt{9} = 3$

Como $2^2 = 4$ e $3^2 = 9$, temos $2 < \sqrt{5} < 3$, portanto $\sqrt{(v_1, v_1)_d} > \sqrt{(v_1, v_1)}$ e $\|v_1\|_d > \|v_1\|$

$\sqrt{(v_2, v_2)} = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

$\sqrt{(v_2, v_2)_d} = \sqrt{1 \cdot 5^2 + 5 \cdot (-2)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Como $5^2 = 25$ e $6^2 = 36$, $5 < \sqrt{29} < 6$, e como já vimos que $\sqrt{5} > 2$, temos que, $3\sqrt{5} > 6$ e, dessa forma, $\sqrt{(v_2, v_2)_d} > \sqrt{(v_2, v_2)}$ e $\|v_2\|_d > \|v_2\|$

d. Começamos com a prova de que S é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Vetores LI:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0 \iff a_i = 0 \quad i = 1, 2$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 5a_2 = 0 & (\mathrm{I}) \\ a_1 - 2a_2 = 0 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

$(\mathrm{I}) - 2(\mathrm{II})$:

$$9a_2 = 0$$

$$a_2 = 0$$

(II):

$$a_1 - 2a_2 = 0$$

$$a_1 = 2a_2 = 0$$

A solução do sistema linear em questão é $a_1 = a_2 = 0$, portanto, v_1 e v_2 são LI.

Gerador de $\mathbb{R}^2$:

Para provar isso, basta que $span(v_1, v_2) \subseteq \mathbb{R}^2$, o que é verdade porque toda combinação linear de v_1 e v_2 pertence a $\mathbb{R}^2$, e provar que $\mathbb{R}^2 \subseteq span(v_1, v_2)$. Para essa segunda parte, fazemos:

$$w \in \mathbb{R}^2, \quad w = (w_1, w_2) = x_1 v_1 + x_2 v_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = w_1 & (I) \\ x_1 - 2x_2 = w_2 & (II) \end{cases}$$

$(I) - 2(II)$:

$$x_2 = \frac{w_1 - 2w_2}{9}$$

(II):

$$x_1 = w_2 + 2x_2 = \frac{5w_2 + 2w_1}{9}$$

Pela solução do sistema, vemos que sempre é possível escrever $w \in \mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vetores de S e, portanto, $\mathbb{R}^2 \subseteq span(v_1, v_2)$. Daí segue que $span(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2$

Como os vetores de S são geradores de $\mathbb{R}^2$ e LI, S é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Em particular, sabendo que S é base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ sob o produto interno $(\,,)_d$, temos:

$$a_K = \frac{(w, v_K)}{(v_K, v_K)} \quad \text{para} \quad w = \sum_{K=1}^{n} a_K v_K$$

$$a_1 = \frac{(w, v_1)_d}{(v_1, v_1)_d} = \frac{1.(-2).2 + 5.5.1}{9} = \frac{7}{3}$$

$$a_2 = \frac{(w, v_2)_d}{(v_2, v_2)_d} = \frac{1.(-2).5 + 5.5.(-2)}{9.5} = \frac{6.5.(-2)}{9.5} = \frac{-4}{3}$$

Para conferir os coeficientes encontrados, fazemos

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 = \frac{7}{3}(2,1) + \left(\frac{-4}{3}\right)(5,-2) = \left(\frac{14}{3} - \frac{20}{3}, \frac{7}{3} + \frac{8}{3}\right) = (-2,5)$$

1.31. Sendo S uma base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ e dados os coeficientes a_k, $1 \leq k \leq n$, que descrevem um vetor $w \in \mathbb{R}^n$ qualquer na forma $w = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k$, sendo v_k os vetores de S, temos

$$\|w\|^2 = (w, w) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j, \sum_{k=1}^{n} a_k v_k\right)$$

Usando da linearidade do produto interno em $\mathbb{R}^n$, temos

$$\|w\|^2 = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(v_j, \sum_{k=1}^{n} a_k v_k\right)$$

Usando agora da simetria conjugada e de novo da linearidade do produto interno em $\mathbb{R}^n$, segue

$$\|w\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j \bar{a}_k \overline{(v_k, v_j)}$$

Usando novamente a simetria conjugada

$$\|w\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j \bar{a}_k (v_j, v_k)$$

Por fim, sabendo que $\|u\|^2 = (u, u)$ para $u \in \mathbb{R}^n$, sabendo que S é ortogonal e que $x \cdot \bar{x} = |x|^2, x \in \mathbb{C}$

$$\|w\|^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k \bar{a}_k (v_k, v_k) = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \|v_k\|^2$$

E a identidade de Parseval está devidamente generalizada $\square$

1.33. O produto interno canônico em $M_{m,n}(\mathbb{C})$ é dado por

$$(A,B) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}\overline{b_{j,k}}$$

Daí mostraremos a ortogonalidade das formas básicas de onda $\mathcal{E}_{m,n,k,l} \in M_{m,n}(\mathbb{C})$:

$$(\mathcal{E}_{m,n,k,l}, \mathcal{E}_{m,n,p,q}) = \sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{n} e^{i2\pi\left(k\frac{a}{m}+l\frac{b}{n}\right)}\overline{e^{i2\pi\left(p\frac{a}{m}+q\frac{b}{n}\right)}} =$$

$$= \sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{n} e^{i2\pi\left(k\frac{a}{m}+l\frac{b}{n}\right)-i2\pi\left(p\frac{a}{m}+q\frac{b}{n}\right)} =$$

$$= \sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{n} e^{i2\pi\left(k\frac{a}{m}-p\frac{a}{m}+l\frac{b}{n}-q\frac{b}{n}\right)} =$$

$$= \sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{n} e^{i2\pi\left((k-p)\frac{a}{m}+(l-q)\frac{b}{n}\right)} =$$

Mas sabemos que $\sum_{a=1}^{m} e^{i2\pi k \frac{a}{m}} = 0$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $m > 1$. Intuitivamente é como se estivéssemos caminhando no círculo unitário completo em frações $\frac{k}{m}$, portanto sempre tendo senos e cossenos que se cancelam. Algebricamente, podemos entender o somatório como uma soma de PG finita de razão $e^{i2\pi k \frac{1}{m}}$.

Daí, segue

$$\sum_{a=1}^{m} e^{i2\pi k \frac{a}{m}} = \frac{e^{i2\pi k \frac{1}{m}}\left(1 - e^{i2\pi k \frac{m}{m}}\right)}{1 - e^{i2\pi k \frac{1}{m}}}$$

Mas $e^{i2\pi k} = 1$, pois $\cos(2\pi k) = 1$ e $\operatorname{sen}(2\pi k) = 0$, para $k \in \mathbb{Z}$. Daí, temos

$$\sum_{a=1}^{m} e^{i2\pi k \frac{a}{m}} = \frac{e^{i2\pi k \frac{1}{m}}(1-1)}{1 - e^{i2\pi k \frac{1}{m}}} = 0$$, com $m > 1$ por hipótese

Dessa forma, e sabendo que $(k-p), (l-q) \in \mathbb{Z}$, segue

$$\left(\varepsilon_{m,n,k,l}, \varepsilon_{m,n,p,q}\right) = \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=1}^{n} e^{i2\pi(k-p)\frac{a}{m}} \cdot e^{i2\pi(l-q)\frac{b}{n}} = \sum_{a=1}^{m} e^{i2\pi(k-p)\frac{a}{m}} \sum_{b=1}^{n} e^{i2\pi(l-q)\frac{b}{n}} = 0$$

Vale notar que o caso $m=1$ e $n=1$ não nos interessa, uma vez que $k \neq p$ ou $l \neq q$ por hipótese, então sempre temos $\sum_{a=1}^{m} e^{i2\pi(k-p)\frac{a}{m}}$ ou $\sum_{b=1}^{n} e^{i2\pi(l-q)\frac{b}{n}}$ valendo zero.

Agora para $(\mathcal{E}_{m,m,k,l}, \mathcal{E}_{m,m,k,l})$, temos:

$$(\mathcal{E}_{m,m,k,l}, \mathcal{E}_{m,m,k,l}) = \sum_{a=1}^{m} e^{i2\pi(k-k)\frac{a}{m}} \sum_{b=1}^{m} e^{i2\pi(l-l)\frac{b}{m}} = \sum_{a=1}^{m} 1 \sum_{b=1}^{m} 1 = mm$$

2.3/4.

DFT y $(N=4)$:

$$X_0 = \sum_{m=0}^{N-1} y_m e^{-i2\pi 0\frac{m}{N}} = \sum_{m=0}^{N-1} y_m = 1+2+0-1=2$$

$$X_1 = \sum_{m=0}^{N-1} y_m e^{-i2\pi\cdot 1\cdot\frac{m}{N}} = 1\cdot 1 + 2\cdot(-i) + 0\cdot(-1) + (-1)\cdot i = 1-3i$$

$$X_2 = \sum_{m=0}^{N-1} y_m e^{-i2\pi 2\frac{m}{N}} = 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 1 + (-1)(-1) = 0$$

$$X_3 = \sum_{m=0}^{N-1} y_m e^{-i2\pi 3\frac{m}{N}} = 1\cdot 1 + 2\cdot i + 0\cdot(-1) + (-1)\cdot(-i) = 1+3i$$

IDFT w $(N=4)$:

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \left(e^{j2\pi k\frac{0}{N}}, e^{j2\pi k\frac{1}{N}}, e^{j2\pi k\frac{2}{N}}, e^{j2\pi k\frac{3}{N}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(3\cdot(1,1,1,1) + (1+j)(1,j,-1,-j) + 1(1,-1,1,-1) + (1-j)(1,-j,-1,j)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left((3,3,3,3) + (1+j,-1+j,-1-j,1-j) + (1,-1,1,-1) + (1-j,-1-j,-1+j,1+j)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left((6,0,2,4)\right) = \left(\frac{3}{2},0,\frac{1}{2},1\right)$$

2.6. A DFT de e_j é dada por

$$X_k = \sum_{m=0}^{N-1} e_{j_m} \, e^{-i2\pi k \frac{m}{N}} = 0 + 0 + \ldots + 1 \cdot e^{-i2\pi k \frac{j-1}{N}} + 0 + \ldots + 0 = e^{-i2\pi k \frac{j-1}{N}}, \text{ para } 0 \leq k \leq N-1$$

Agora a magnitude de cada coeficiente é dada por

$$|X_k| = \sqrt{\cos^2\left(2\pi k \frac{j-1}{N}\right) + \operatorname{sen}^2\left(2\pi k \frac{j-1}{N}\right)} = \sqrt{1} = 1$$

Percebemos, pela primeira parte do exercício, que a DFT(e_j) é exatamente igual a $\overline{E_{N,k}}$ com $k = j-1$.

Digitalizado com CamScanner