AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Teoria sygnałów

Wykład 9

Dr inż. Przemysław Korohoda
Katedra Elektroniki, AGH, Kraków

home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2

UPEL: TS 2022

Temat wykładu

1. Transformacja Gabora.
2. Krótkoczasowa transformacja Fouriera.
3. Transformacja falkowa.
4. Widmowa gęstość mocy i energii.
5. Przetwarzanie sygnałów losowych.
6. Korelacja dla sygnałów deterministycznych.
7. Filtracja sygnałów o zadanej gęstości widmowej.
8. Modulacja sygnałów.

Transformacja Gabora

Dennis Gabor (1900-1979) – fizyk węgierski (mieszkał i pracował w Anglii), który za wynalezienie holografii otrzymał nagrodę Nobla (1971), zajmował się m.in. analizą czasowo-częstotliwościową.

$$\boxed{X^{G}(f,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot w(\tau-t)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot\tau}\, d\tau}$$

gdzie:

$$w(t)=e^{-\pi\cdot t^{2}}$$

czyli okno Gaussa:

$$\boxed{w(t)=e^{-\pi\cdot t^{2}} \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\longleftrightarrow}} W(f)=e^{-\pi\cdot f^{2}}}$$

Transformacja odwrotna:

$$\boxed{x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X^{G}(f,t)\cdot e^{+j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}\, df}$$

– jeden punkt nad osią *t* jest reprezentowany przez całą funkcję nad osią *f*, ponieważ dla każdego punktu *t* może być inna funkcja nad osią *f*

... widać nadmiarowość ?

W innym zapisie:

$$X^{G}(f,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot \phi_{t}(f,\tau)\, d\tau$$

gdzie: $\phi_{t}(f,\tau)=e^{-\pi\cdot(\tau-t)^{2}-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot\tau}$

Transformacja Gabora

$$X^{G}(f,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot w(\tau-t)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot\tau}\, d\tau$$

$$w(t)=e^{-\pi\cdot t^{2}}$$

$$x(t)=\cos(2\cdot\pi\cdot f_{0}\cdot t)$$

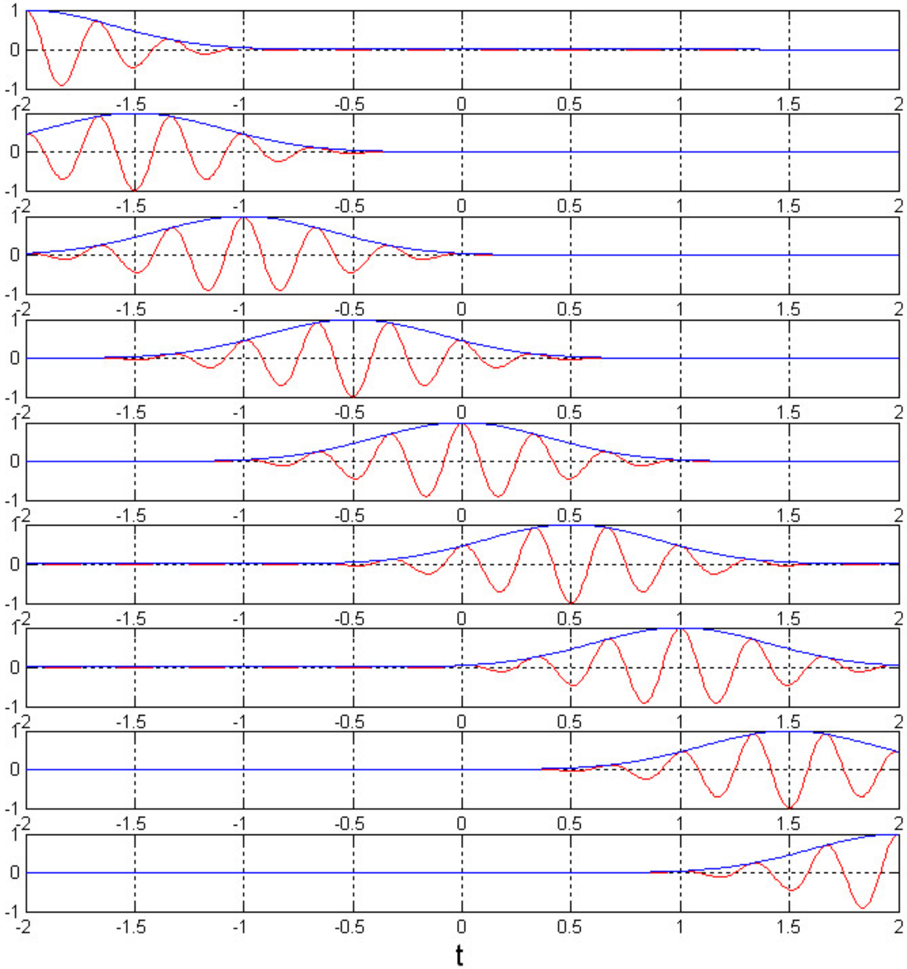
f_0=3Hz

$$\boxed{X^{G}(f,t_{0})=X_{0}(f)\Big|_{x_{0}(t)=x(t)\cdot w(t-t_{0})}}$$

$$\boxed{X_{0}(f)=CFT\left[x_{0}(t)\right]}$$

$$\boxed{w(0)=1\Rightarrow x_{0}(t_{0})=x(t_{0})}$$

$$\boxed{x(t)\Big|_{t=t_{0}}=CFT^{-1}\left[X^{G}(f,t_{0})\right]}$$

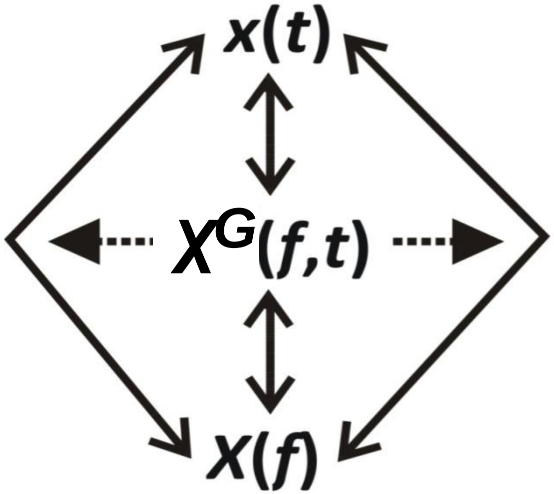


Transformacja Gabora

Nadmiarowość !

$$X^{G}(f,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot w(\tau-t)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot \pi \cdot f\cdot \tau}\; d\tau$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X^{G}(f,t)\cdot e^{+j\cdot 2\cdot \pi \cdot f\cdot t}\; df$$



Czyli transformatę Gabora można wyliczyć od strony *x*(*t*) i od strony *X*(*f*)

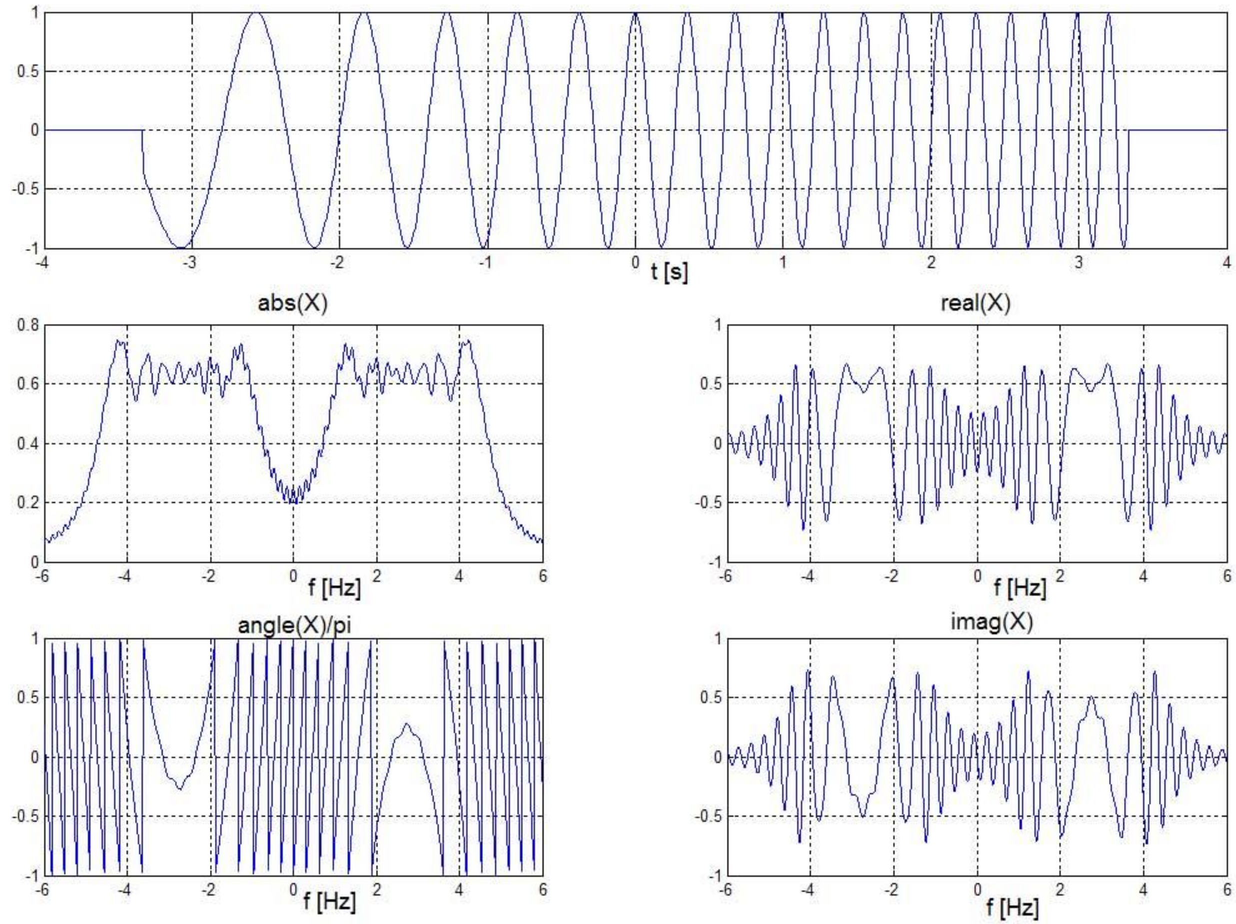
lub, w nieco innym zapisie (bez całek):

$$X^{G}(f,t)=CFT_{\tau\rightarrow f}\left[x(\tau)\cdot w(\tau-t)\right]$$

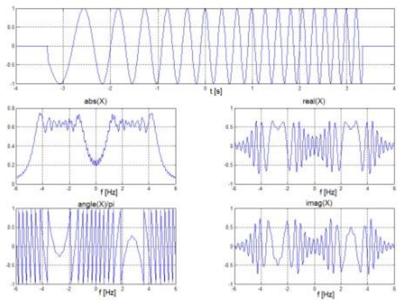
$$x(t)=CFT^{-1}_{f\rightarrow t}\left[X^{G}(f,t)\right]$$

Transformacja Gabora

Przykładowy sygnał

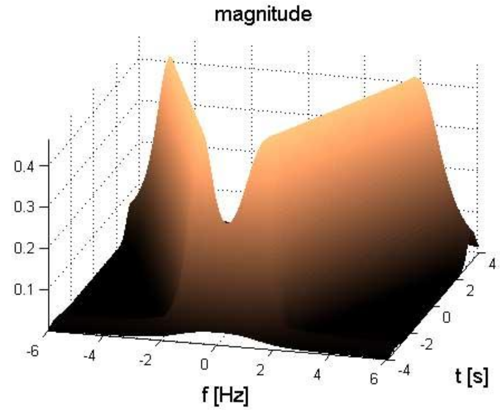


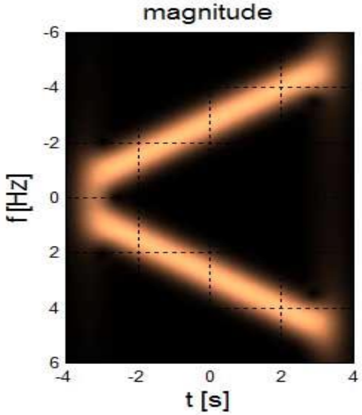
Transformacja Gabora



$$X^{G}(f,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot w(\tau-t)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot \pi\cdot f\cdot \tau}\, d\tau$$

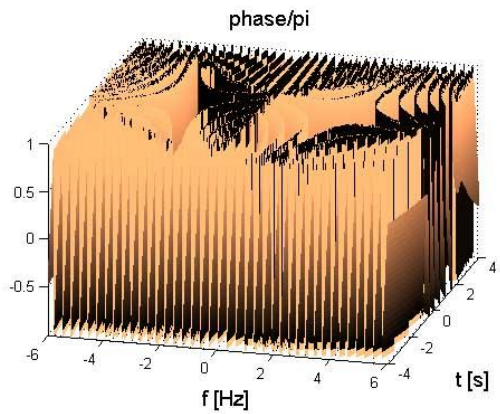
$$X^{G}(f,t)=CFT_{\tau\to f}\left[x(\tau)\cdot w(\tau-t)\right]$$

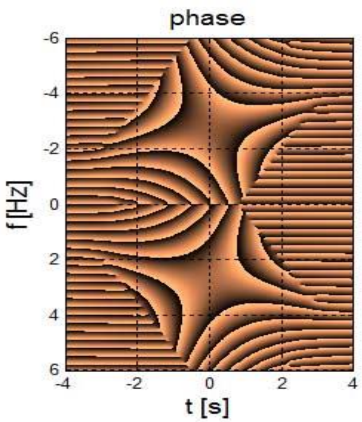




$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X^{G}(f,t)\cdot e^{+j\cdot 2\cdot \pi\cdot f\cdot t}\, df$$

$$x(t)=CFT^{-1}_{f\to t}\left[X^{G}(f,t)\right]$$





Transformacja Gabora - zmiana rozdzielczości

$$X^G(f,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot w_a(\tau-t)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot\tau}\,d\tau$$

$$\boxed{w_a(t)=\frac{1}{a}\cdot w\left(\frac{t}{a}\right)}$$

$$\boxed{a>0}$$

$$\boxed{w(t)=e^{-\pi\cdot t^2}}$$

Nadal zachodzi: $\int_{-\infty}^{+\infty} w_a(t)\,dt=1$

$$\boxed{w_a(t)=\frac{1}{a}\cdot e^{-\frac{\pi\cdot t^2}{a^2}}}$$

$$\boxed{x\left(\frac{t}{a}\right)\xleftrightarrow[ICFT]{CFT}|a|\cdot X(a\cdot f)}$$

Do dziedziny transformaty Gabora można zatem dołożyć trzecią zmienną:

$$\boxed{X^G(f,t,a)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot w_a(\tau-t)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot\tau}\,d\tau}$$

Lokalna (krótko-czasowa) Ciągła Transformacja Fouriera (*ang. ST-CFT* lub: *STFT*)

Przyjmujemy okno *w*(*t*) - jest to zazwyczaj parzysta funkcja rzeczywista, a wtedy:

$$\boxed{X^{W}(f,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot w(\tau-t)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot\tau}\, d\tau}$$

... ponownie widać ogromną nadmiarowość!

Transformata CFT iloczynu sygnałów to splot ich transformat w dziedzinie *f*:

$$X^{W}(f,t)=X(f)*\left[W(f)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}\right]$$

Zatem z def. splotu:

$$\boxed{X^{W}(f,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(v+f)\cdot W(v)\cdot e^{+j\cdot 2\cdot\pi\cdot v\cdot t}\, dv}$$

W*(*f*) – parzyste, zatem możemy podstawić -*v* zamiast *v

A jest to przecież ICFT z iloczynu transformat (z dziedziny *v* do *t*), zatem:

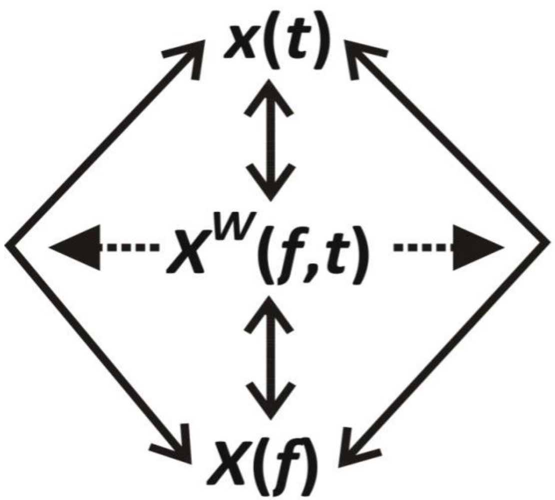
$$X^{W}(f,t)=\left[x(t)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}\right]*w(t)$$

Analogicznie dla transformacji Gabora, bo jest to przypadek szczególny tych rozważań.

Lokalna (krótko-czasowa) Ciągła Transformacja Fouriera (*ang. ST-CFT* lub w skrócie: *STFT*)

$$X^W(f,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot w(t-\tau)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot \pi \cdot f \cdot \tau}\, d\tau$$

$$X^W(f,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(v+f)\cdot W(v)\cdot e^{+j\cdot 2\cdot \pi \cdot v \cdot t}\, dv$$



lub (z przemienności splotu):

$$X^W(f,t) = e^{-j\cdot 2\cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(v)\cdot W(v-f)\cdot e^{+j\cdot 2\cdot \pi \cdot v \cdot t}\, dv$$

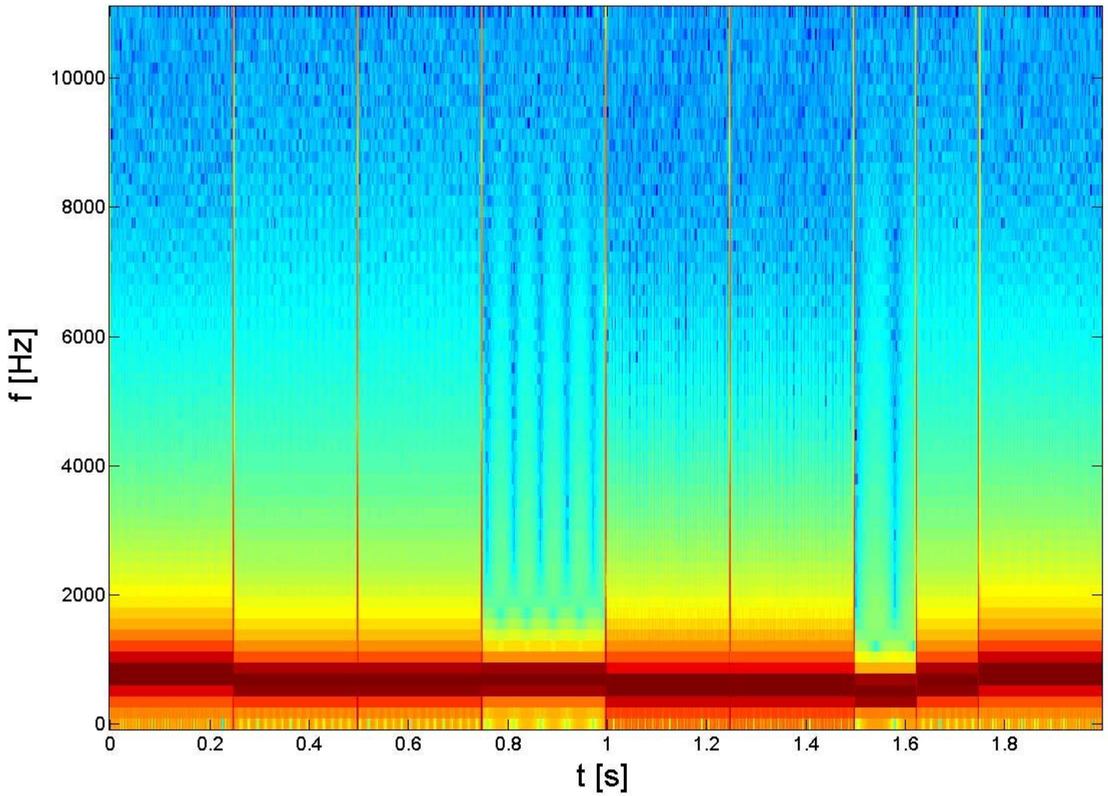
Transformacja odwrotna:

$$x(t) = \frac{1}{w(0)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X^W(f,t)\cdot e^{+j\cdot 2\cdot \pi \cdot f \cdot t}\, df$$

$$X(f) = \frac{1}{W(0)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X^W(f,t)\, dt$$

Lokalna analiza częstotliwościowa

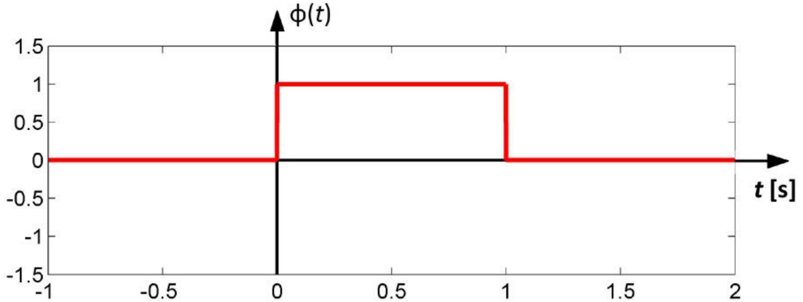
Przykład dla prostej melodii (wykres pokazuje tylko moduł)

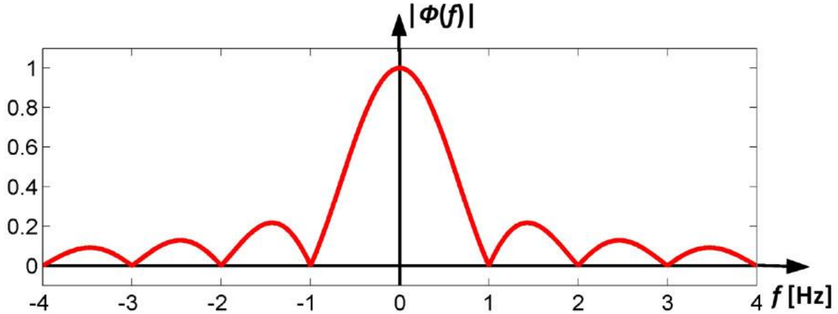


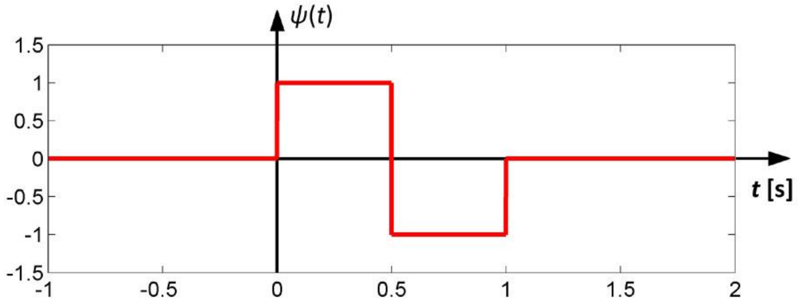
Uwaga - wykres powstał dla danych wynikowych „nieco” zdyskretyzowanych.

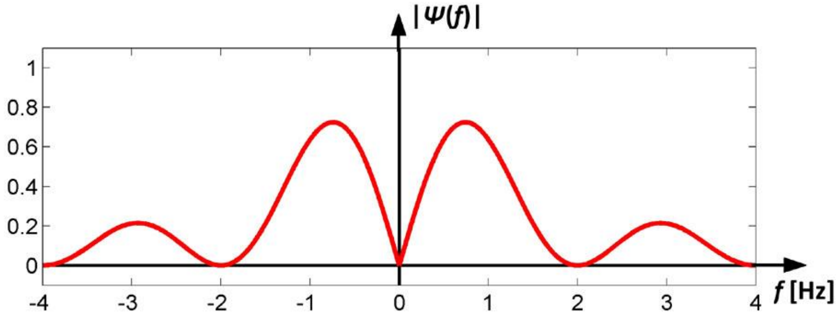
Transformacja falkowa

Baza Haara, funkcja skalująca i falka oraz ich widma amplitudowe:









$$h_\phi(t) = \phi(-t) \quad \Rightarrow \quad H_\phi(f) = \Phi(-f) = \overline{\Phi(f)}$$

$$\Phi(f) = \mathrm{sinc}\left(\pi \cdot f\right) \cdot e^{-j\cdot\pi\cdot f}$$

$$h_\psi(t) = \psi(-t) \quad \Rightarrow \quad H_\psi(f) = \Psi(-f) = \overline{\Psi(f)}$$

$$\Psi(f) \quad = \quad j \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot f\right) \cdot e^{-j\cdot\pi\cdot f}$$

Transformacja falkowa (ciągła)
(*ang. CWT: Continuous Wavelet Transform*)

Przyjmujemy filtr o zerowej wartości średniej, pasmowo-przepustowy:

$$h_\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$$

$$\boxed{H_\psi(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} h_\psi(t)\, dt = 0}$$

Transformacja w przód:

$$\boxed{\tilde{x}_\psi(a,t) \; = \; \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h_\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) d\tau}$$

$$x(t) \in L^2(\mathbf{R}); \quad a \in \mathbf{R}_+$$

Transformacja odwrotna:

$$\boxed{x(t) \; = \; \frac{1}{c_\psi} \cdot \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{a^2 \cdot \sqrt{a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_\psi(a,\tau) \cdot \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) d\tau \, da}$$

$$\boxed{\psi(t) = h_\psi(-t)}$$

Przy czym (co daje dodatkowy warunek dla filtru):

$$\boxed{c_\psi = 2 \cdot \int_{0}^{+\infty} \frac{\left|H_\psi(f)\right|^2}{f} df < \infty}$$

lub

$$\boxed{c_\psi = 2 \cdot \int_{0}^{+\infty} \frac{\left|\Psi(f)\right|^2}{f} df < \infty}$$

Transformacja falkowa (ciągła)

Interpretacja splotowa:

$$\tilde{x}_{\psi}(a,t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h_{\psi}\left(\frac{t-\tau}{a}\right) d\tau$$

$$\boxed{\tilde{x}_{\psi}(a,t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot x(t) * h_{\psi}\left(\frac{t}{a}\right)}$$

filtr analizujący

$$x(t) = \frac{1}{c_{\psi}} \cdot \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{a^2 \cdot \sqrt{a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_{\psi}(a,\tau) \cdot \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) d\tau \, da$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{c_{\psi}} \cdot \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{a^2 \cdot \sqrt{a}} \cdot \left[\tilde{x}_{\psi}(a,t) * \psi\left(\frac{t}{a}\right)\right] da}$$

$$\psi(t) = h_{\psi}(-t)$$

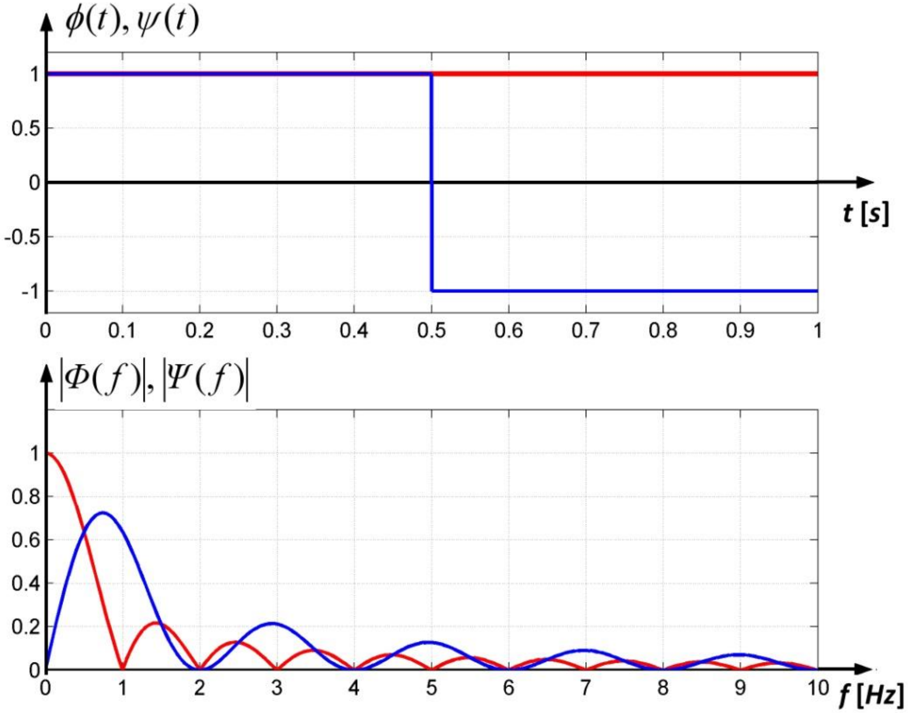
filtr odtwarzający

... widać ogromną nadmiarowość!

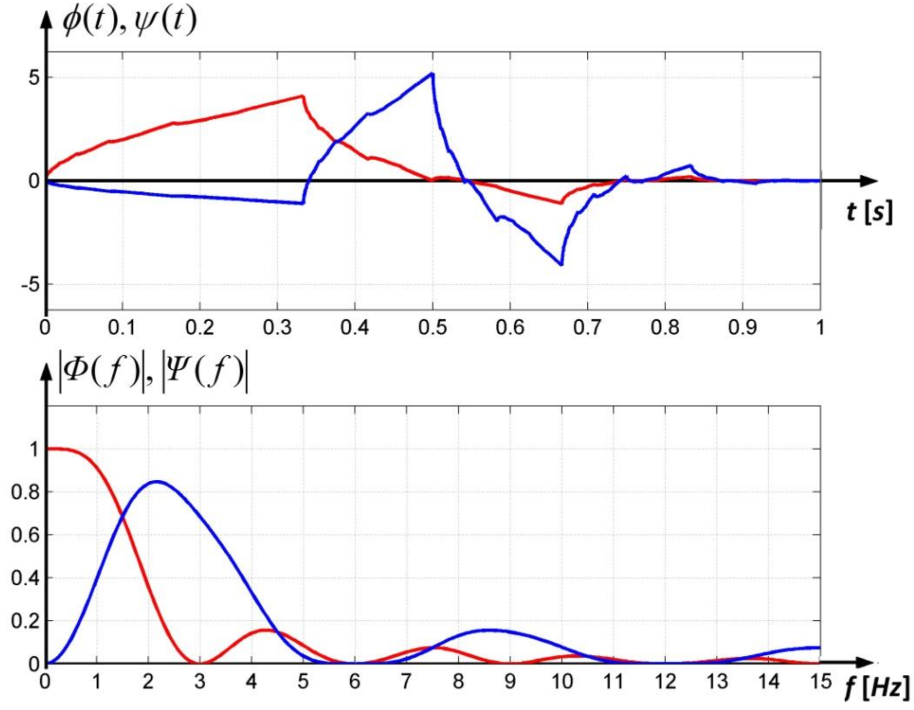
Zatem funkcja skalująca nie jest do niczego potrzebna (?)

Funkcje falkowe (falki) i funkcje skalujące

Dla falki Haara (falka 1. wg I.Daubeshies):



Dla falki 2. wg I.Daubechies:

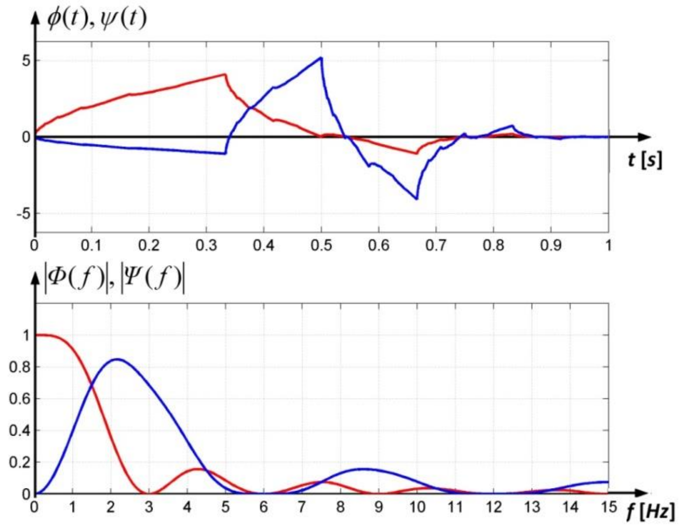


Jest wiele różnych falek (i odpowiednich dla nich funkcji skalujących).

Funkcje falkowe (falki) i funkcje skalujące

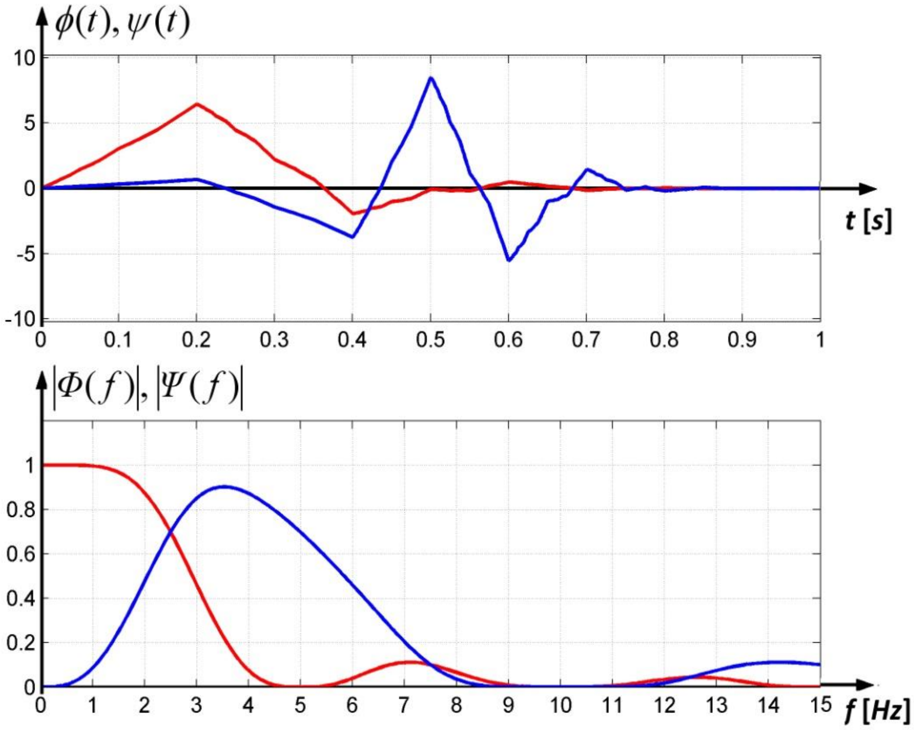
Powtórzmy:

funkcja skalująca <-> filtr dolnoprzepustowy
funkcja falkowa <-> filtr pasmowo-przepustowy

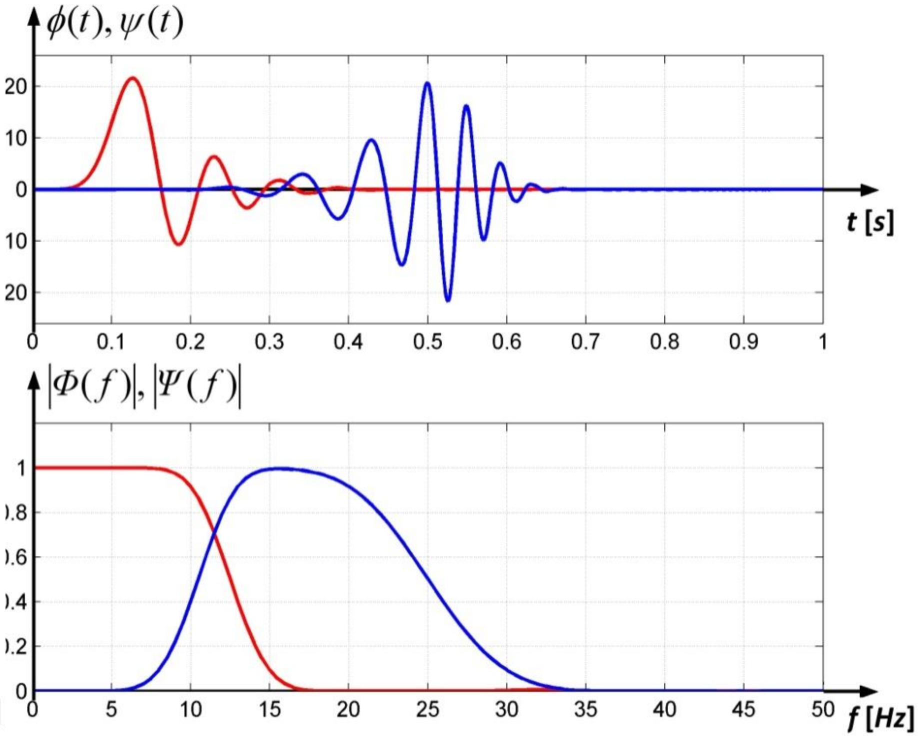


Funkcje falkowe (falki) i funkcje skalujące

Dla falki 3. wg I.Daubechies:



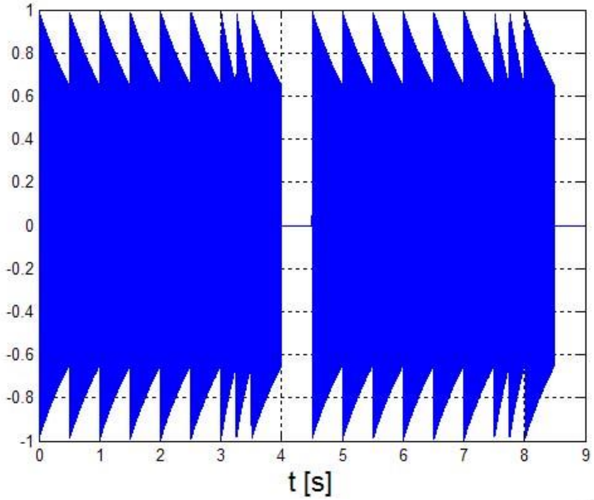
Dla falki 12. wg I.Daubechies:

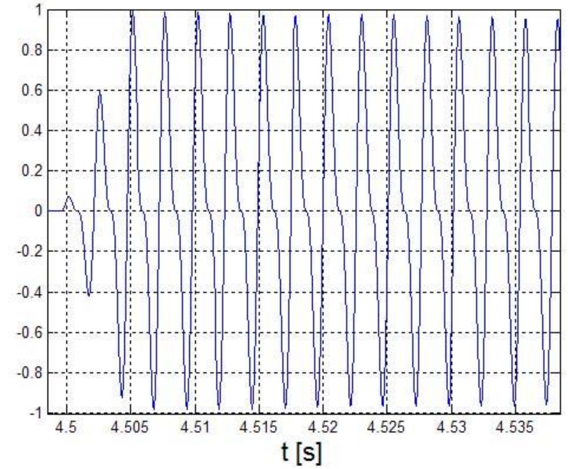


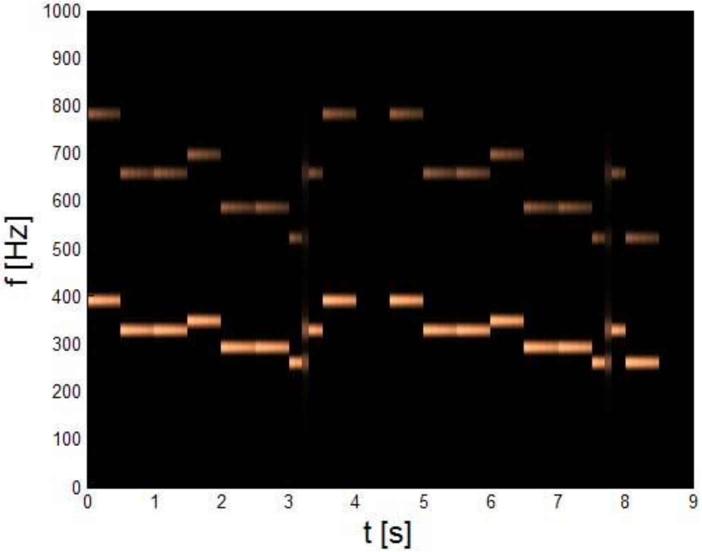
Jest wiele różnych falek (i odpowiednich dla nich funkcji skalujących).

Przykład:
sygnał i transformata STFT, z oknem Hanna

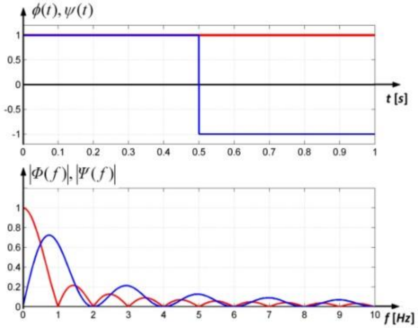
Sygnał – „melodyjka”



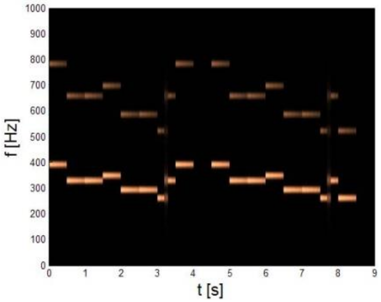




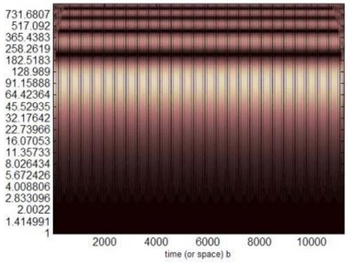
Falka nr 1, test cosinusoidy



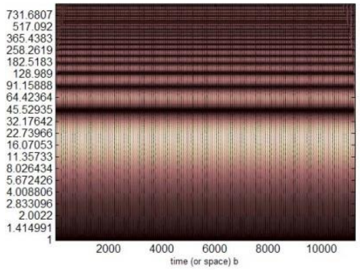
STFT



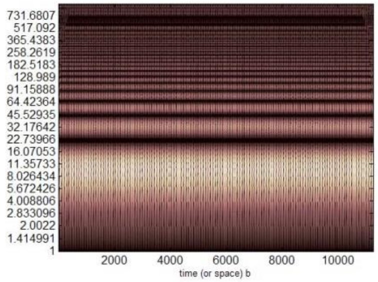
100Hz

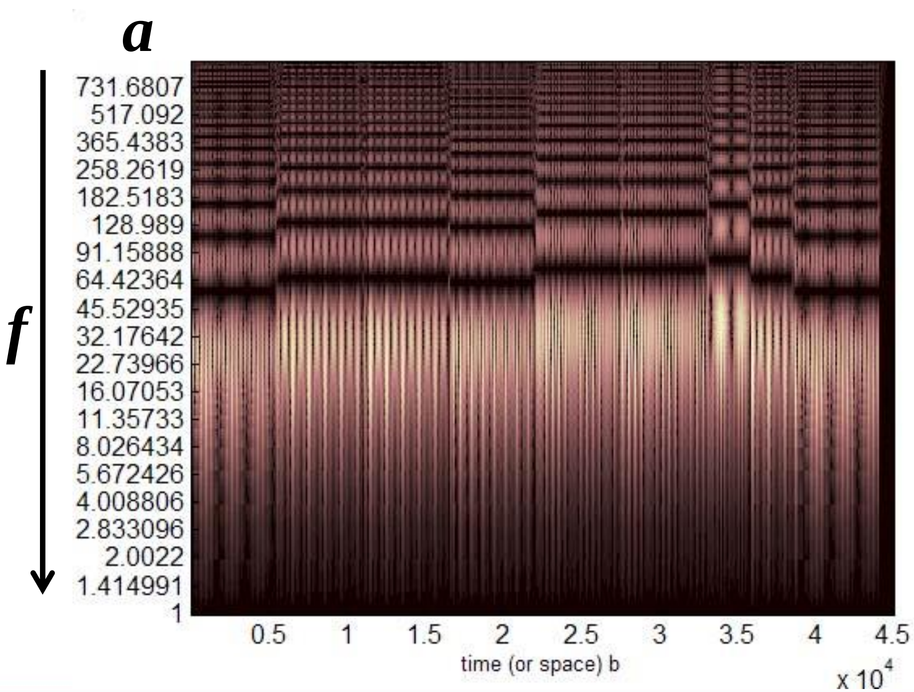


500Hz



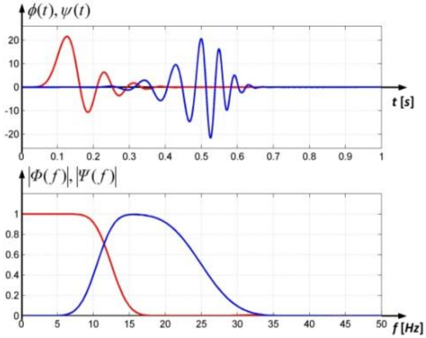
1000Hz



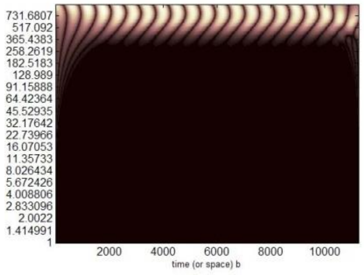


... i wynik dla naszej melodii.

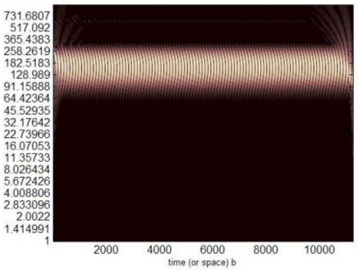
Falka nr 12, test cosinusoidy



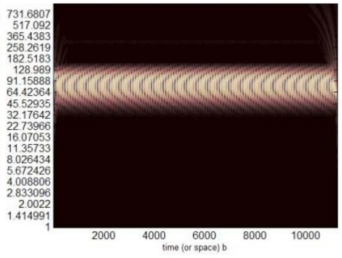
10Hz



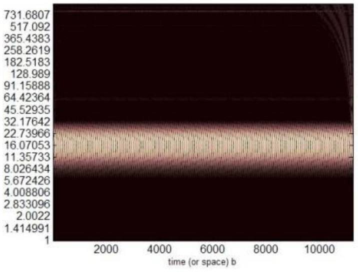
50Hz



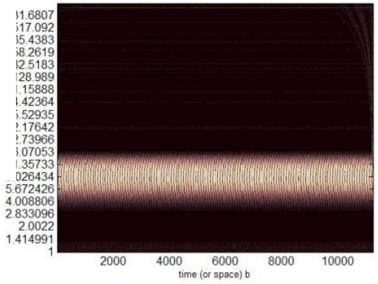
100Hz

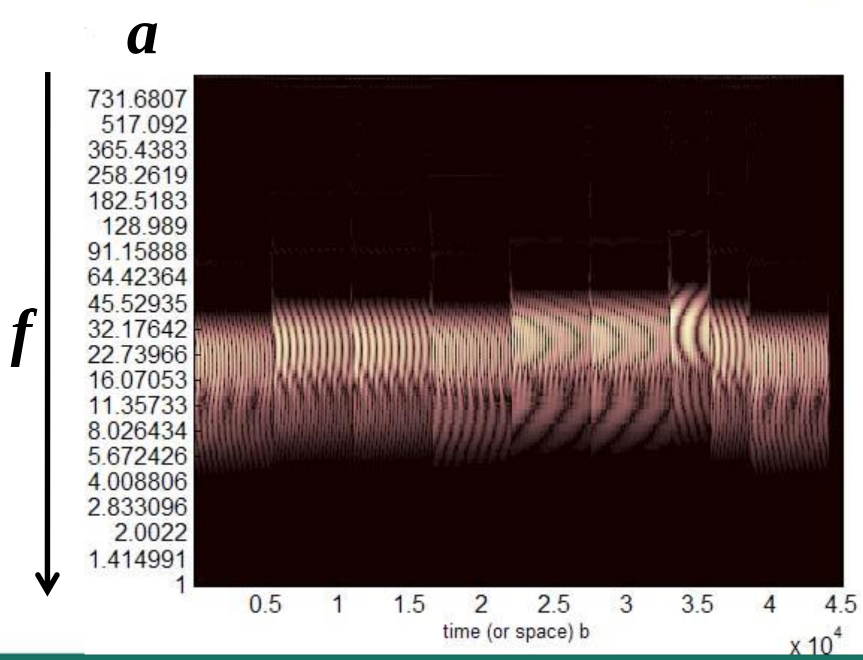


500Hz



1000Hz





… i wynik dla naszej melodii.

Wybrane funkcje (wybrane wartości skali)

Wybieramy ciąg filtrów (falek) na różnych poziomach *k*:

$$\psi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{a_k}} \cdot \psi\left(\frac{t}{a_k}\right) \quad : \quad a_k = 2^k \qquad k \in \mathbf{Z}$$

czyli:

$$\psi_k(t) = 2^{\frac{-k}{2}} \cdot \psi\left(2^{-k} \cdot t\right) \qquad k \in \mathbf{Z}$$

$$h_\psi(t) = \psi(-t) \quad \Rightarrow \quad H_\psi(f) = \Psi(-f) = \overline{\Psi(f)}$$

Analogicznie możemy utworzyć ciąg funkcji skalujących:

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{a_k}} \cdot \varphi\left(\frac{t}{a_k}\right) \quad : \quad a_k = 2^k \qquad k \in \mathbf{Z}$$

czyli:

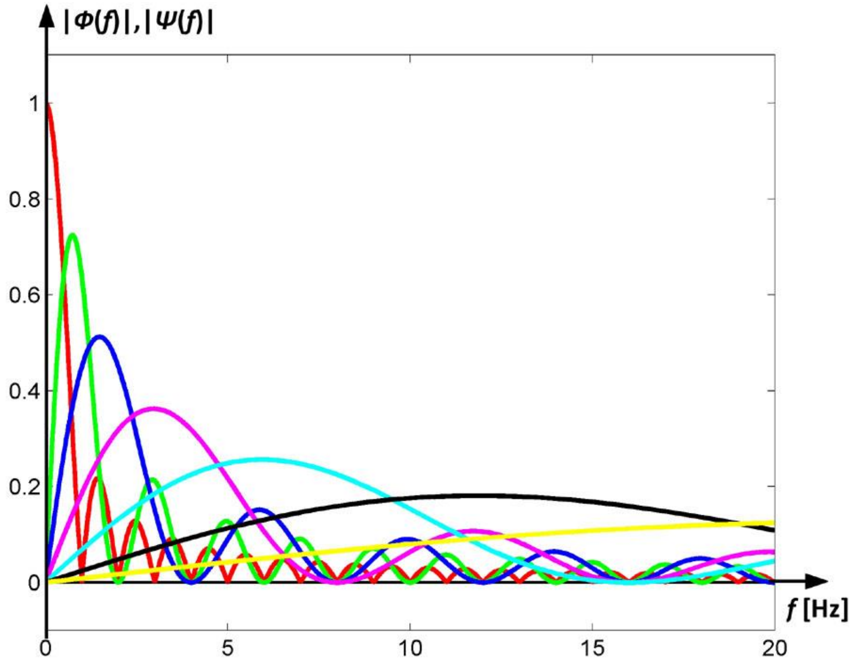
$$\varphi_k(t) = 2^{\frac{-k}{2}} \cdot \varphi\left(2^{-k} \cdot t\right) \qquad k \in \mathbf{Z}$$

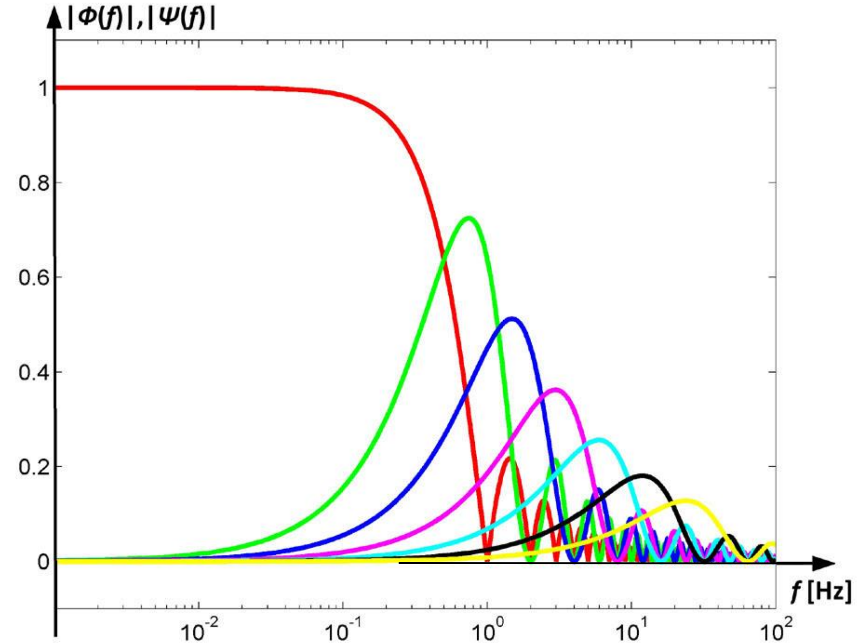
$$h_\varphi(t) = \varphi(-t) \quad \Rightarrow \quad H_\varphi(f) = \Phi(-f) = \overline{\Phi(f)}$$

Falki (i funkcje skalujące) są unormowane w dziedzinie czasu.

Widma amplitudowe ciągu funkcji (filtrów)

Dla ciągu falek Haara (Daubechies nr 1) i jednej funkcji skalującej:





Funkcja skalująca dla *k*=0, a następnie ciąg falek dla kolejnych *k*, liczonych „w dół", czyli: 0, -1, -2, -3, -4, …

Widać, że w tym przypadku nie można „ładnie" podzielić przedziałów częstotliwości, za to funkcje (filtry) są bardzo proste.

Wybrane funkcje (wybrane wartości skali) - wersja bez normalizacji

Wybieramy ciąg filtrów (falek) na różnych poziomach *k*:

$$\psi_k(t) = \frac{\sqrt{2}}{a_k} \cdot \psi\left(\frac{t}{a_k}\right) \quad : \quad a_k = 2^k \qquad k \in \mathbf{Z}$$

czyli:

$$\psi_k(t) = \frac{\sqrt{2}}{2^k} \cdot \psi\left(2^{-k} \cdot t\right) \qquad k \in \mathbf{Z}$$

$$h_\psi(t) = \psi(-t) \quad \Rightarrow \quad H_\psi(f) = \Psi(-f) = \overline{\Psi(f)}$$

Analogicznie możemy utworzyć ciąg funkcji skalujących:

$$\varphi_k(t) = \frac{\sqrt{2}}{a_k} \cdot \varphi\left(\frac{t}{a_k}\right) \quad : \quad a_k = 2^k \qquad k \in \mathbf{Z}$$

czyli:

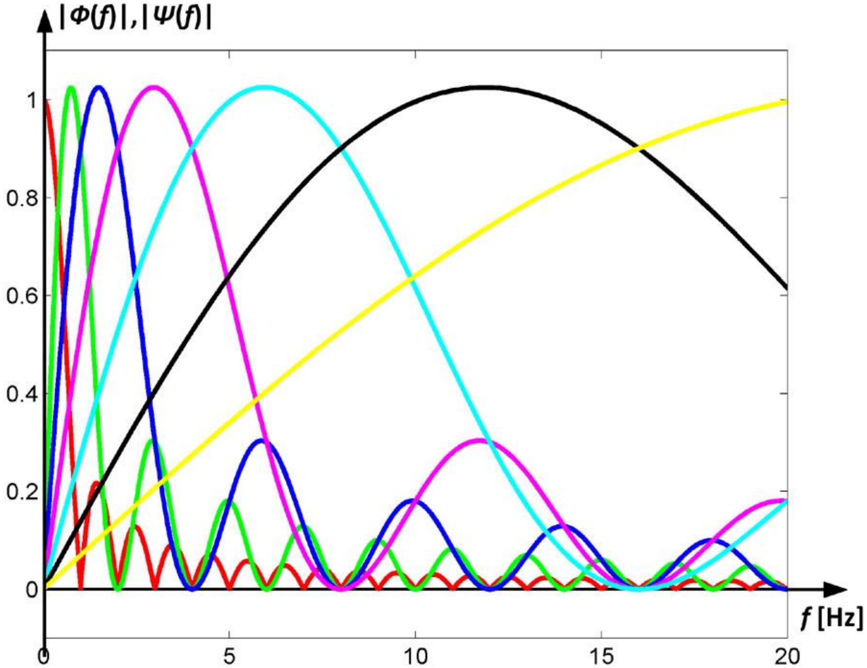
$$\varphi_k(t) = \frac{\sqrt{2}}{2^k} \cdot \varphi\left(2^{-k} \cdot t\right) \qquad k \in \mathbf{Z}$$

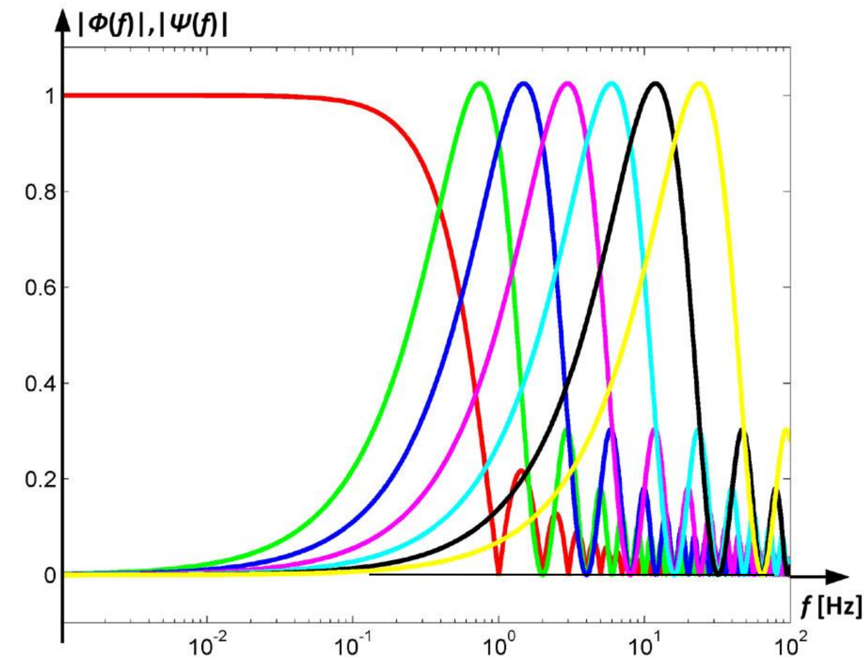
$$h_\varphi(t) = \varphi(-t) \quad \Rightarrow \quad H_\varphi(f) = \Phi(-f) = \overline{\Phi(f)}$$

Falki i funkcje skalujące <u>nie są</u> już unormowane w dziedzinie czasu.

Widma amplitudowe ciągu funkcji (filtrów)

Zmodyfikowany ciąg falek Haara (nieunormowanych) i funkcja skalująca:





Funkcja skalująca dla *k*=0, a następnie ciąg falek dla kolejnych (licząc „w dół”) *k*, czyli: 0, -1, -2, -3, -4, …

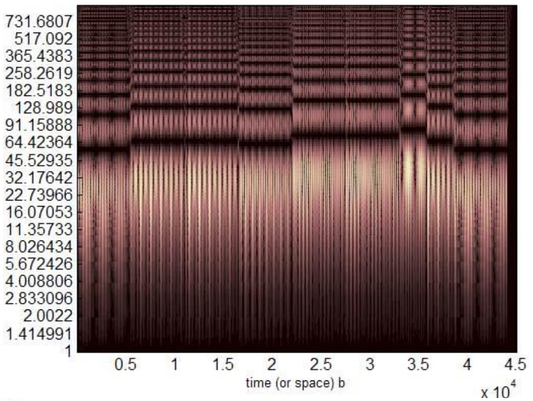
Relacje między parametrami falek

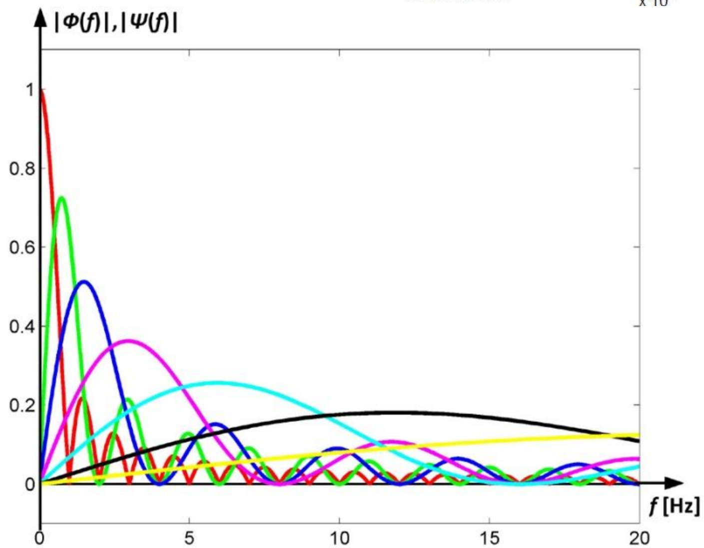
a

+

k ***f***

-





$$\boxed{\psi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{a_k}} \cdot \psi\left(\frac{t}{a_k}\right) \quad : \quad a_k = 2^k \qquad k \in \mathbf{Z}}$$

Czyli zapisując wprost:

$$\boxed{\psi_k(t) = 2^{\frac{-k}{2}} \cdot \psi\left(2^{-k} \cdot t\right) \qquad k \in \mathbf{Z}}$$

$+\infty$	$+\infty$	0	0	
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
$a=2^k$	k	f	Δf	**„szerokość" filtru**
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
0	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	

Analogicznie dla funkcji skalujacych.

Podział diadyczny

W ten sposób możemy utworzyć bazę falkową na różnych poziomach *k*:

$$\psi_{k,n}(t) = 2^{\frac{-k}{2}} \cdot \psi\left(2^{-k} \cdot t - n\right)$$
$$k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}$$

$$\psi_{k,n}(t) = 2^{\frac{-k}{2}} \cdot \psi\left(2^{-k} \cdot (t - n \cdot \Delta t)\right) \quad : \quad \Delta t = 2^{k}$$
$$k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}$$

Analogicznie możemy utworzyć układ funkcji skalujących (to także jest baza) na różnych poziomach *k*:

$$\varphi_{k,n}(t) = 2^{\frac{-k}{2}} \cdot \varphi\left(2^{-k} \cdot t - n\right)$$
$$k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}$$

(Pod)przestrzenie sygnałów

Baza falkowa:

$$\boxed{\psi_{k,n}(t) = 2^{\frac{-k}{2}} \cdot \psi\left(2^{-k} \cdot t - n\right) \qquad k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}}$$

generuje (pod)przestrzeń W_k

Baza funkcji skalujących:

$$\boxed{\varphi_{k,n}(t) = 2^{\frac{-k}{2}} \cdot \varphi\left(2^{-k} \cdot t - n\right) \qquad k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}}$$

generuje (pod)przestrzeń V_k

Przy czym zachodzi następująca zależność dla sumowania się (pod)przestrzeni:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\ldots \rightarrow & V_{-3} & \rightarrow & V_{-2} & \rightarrow & V_{-1} & \rightarrow & V_0 & \rightarrow & V_{+1} & \rightarrow & V_{+2} & \rightarrow \ldots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& W_{-2} & & W_{-1} & & W_0 & & W_{+1} & & W_{+2} & & W_{+3} &
\end{array}$$

Ogólnie: $\boxed{V_{k-1} = V_k \oplus W_k}$ **ponieważ:** $\boxed{V_k \perp W_k}$

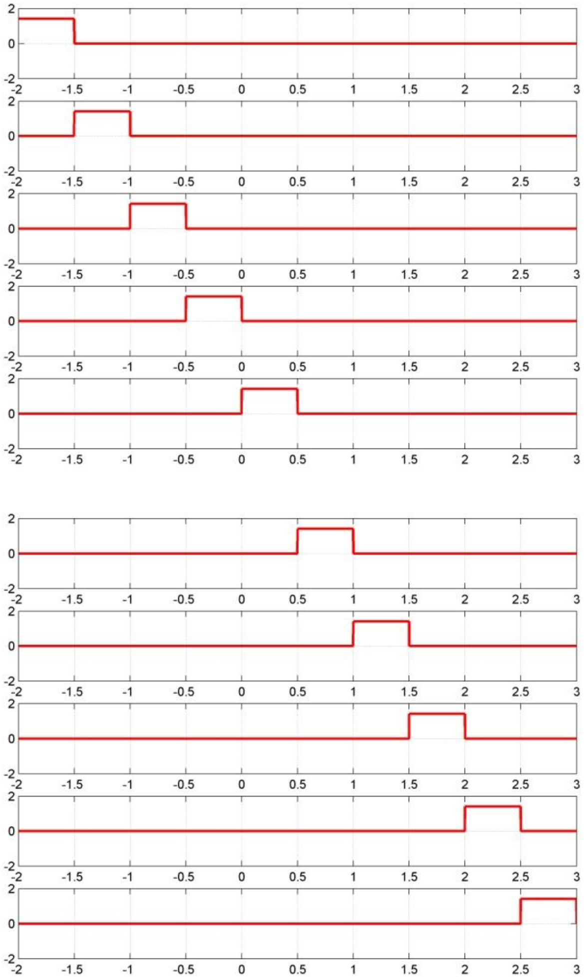
Baza falkowa

Przykład dla falek Haara

Fragment bazy dla V_{-1} :

$\varphi_{-1,-4}(t)$, $\varphi_{-1,-3}(t)$, $\varphi_{-1,-2}(t)$, $\varphi_{-1,-1}(t)$, $\varphi_{-1,0}(t)$

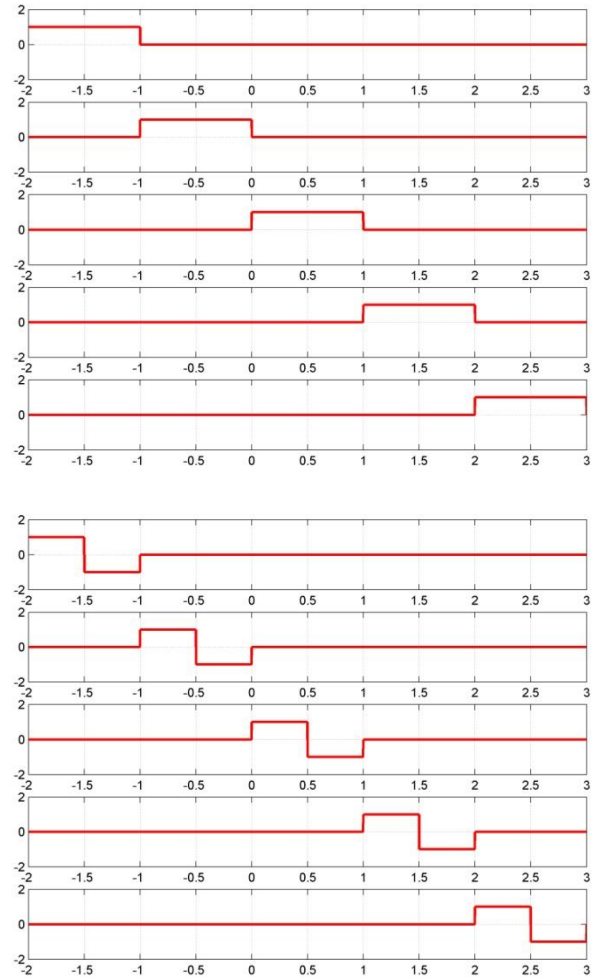
$\varphi_{-1,1}(t)$, $\varphi_{-1,2}(t)$, $\varphi_{-1,3}(t)$, $\varphi_{-1,4}(t)$, $\varphi_{-1,5}(t)$



Fragmenty baz dla V_0 i W_0 :

$\varphi_{0,-2}(t)$, $\varphi_{0,-1}(t)$, $\varphi_{0,0}(t)$, $\varphi_{0,1}(t)$, $\varphi_{0,2}(t)$

$\psi_{0,-2}(t)$, $\psi_{0,-1}(t)$, $\psi_{0,0}(t)$, $\psi_{0,1}(t)$, $\psi_{0,2}(t)$



Transformacja falkowa (WT)
(ciągły sygnał, dyskretna transformata)

Ogólnie:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\dots \to & V_{-3} & \to & V_{-2} & \to & V_{-1} & \to & V_0 & \to & V_{+1} & \to & V_{+2} & \to & \dots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& W_{-2} & & W_{-1} & & W_0 & & W_{+1} & & W_{+2} & & W_{+3} & &
\end{array}$$

Przykładowo:

$$\begin{array}{ccccc}
V_{-5} & \to & V_{-4} & \to & V_{-3} \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
W_{-4} & & W_{-3} & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
x(t) & = & \left(\sqrt{2}\right)^4 \cdot \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} w_{-4,n} \cdot \psi(16 \cdot t - n) & + & \left(\sqrt{2}\right)^3 \cdot \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} w_{-3,n} \cdot \psi(8 \cdot t - n) & + & \left(\sqrt{2}\right)^3 \cdot \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} v_{-3,n} \cdot \varphi(8 \cdot t - n) \\
\downarrow\in & & \downarrow\in & & \downarrow\in & & \downarrow\in \\
V_{-5} & & W_{-4} & & W_{-3} & & V_{-3}
\end{array}$$

Kolejne elementy powyższej sumy to sygnały wzajemnie ortogonalne.

Transformata, to w tym przypadku zestaw współczynników:

$$\boxed{v_{-3,n}, \quad w_{-3,n}, \quad w_{-4,n} \quad : \quad n \in Z}$$

Moc i energia sygnału

Moc chwilowa wydzielana na oporze *R*:

$$P(t) = \frac{U^2(t)}{R}$$

Jeżeli przyjmiemy:

$$R = 1\Omega$$

$$x(t) = U(t)$$

To możemy mówić o mocy (chwilowej) i energii sygnału na odcinku *T*:

$$P_x(t) = |x(t)|^2 \qquad E_x(t_0, t_0+T) = \int_{t_0}^{t_0+T} P_x(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2\, dt$$

Całkowita energia sygnału:

$$\mathbf{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt$$

Moc średnia sygnału (uśrednienie po czasie)

Dla sygnału o skończonym czasie trwania moc średnia jest następująca:

$$\mathbf{P}_x = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \left|x(t)\right|^2 \, dt \quad gdy \quad x(t) = 0 \quad dla \quad t \notin \left[t_0\,, t_0 + T\right]$$

Uwaga – uśrednianie jest tutaj tylko po odcinku *T*.

Dla sygnału okresowego ze wzorcem x_0, określonym na okresie *T*:

$$\mathbf{P}_x = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left|x(t)\right|^2 \, dt = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left|x_0(t)\right|^2 \, dt$$

…z wykorzystaniem współczynników szeregu Fouriera:

$$\mathbf{P}_x = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \left|x(t)\right|^2 \, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n\right|^2$$

…a co gdy sygnał nie jest okresowy?

$$\boxed{\mathbf{P}_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \left|x(t)\right|^2 \, dt}$$

Co jednak może nie dać skończonego wyniku…

Widmowa gęstość mocy

Dla sygnału okresowego $x(t)$ ze wzorcem okresu $x_0(t)$:

(gdy $x_0(t)$ jest określone jedynie na okresie T)

$$X_0(f) = \int_{-T/2}^{+T/2} x_0(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t}\, dt = \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t}\, dt$$

z tw. Parsevala (o zachowaniu energii przez *CFT*):

$$\int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X_0(f)|^2\, df$$

$$\boxed{P_x(f) = \frac{1}{T} |X_0(f)|^2 \quad \left[\frac{W}{Hz}\right]}$$

$$P_x(f) = \frac{1}{T} \cdot \left(\mathrm{Re}^2[X_0(f)] + \mathrm{Im}^2[X_0(f)] \right) = \frac{1}{T} \cdot X_0(f) \cdot \overline{X_0(f)} \quad \left[\frac{W}{Hz}\right]$$

Dla dowolnego sygnału $x(t)$:

$$X_T(f) = \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t}\, dt$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X_T(f)|^2\, df$$

$$\boxed{P_x(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \quad \left[\frac{W}{Hz}\right]}$$

O ile ten wynik jest skończony...

Moc średnia:

$$\boxed{\mathbf{P}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(f)\, df}$$

Widmowa gęstość mocy

Zestawienie wzorów:

Okresowy sygnał:

$$P_x(f) = \frac{1}{T}\left|X_0(f)\right|^2 \quad \left[\frac{W}{Hz}\right]$$

$$P_x(\omega) = \frac{1}{T}\left|X_0(\omega)\right|^2 \quad \left[\frac{W}{rad/s}\right]$$

Dowolny sygnał:

$$P_x(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left|X_T(f)\right|^2 \quad \left[\frac{W}{Hz}\right]$$

$$P_x(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left|X_T(\omega)\right|^2 \quad \left[\frac{W}{rad/s}\right]$$

Moc średnia:

$$\mathbf{P}_x = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} P_x(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(f)\,df \quad [W]$$

Widmowa gęstość energii

$$\boxed{E_x(f) = \left|X(f)\right|^2 \quad \left[\frac{J}{Hz}\right]}$$

$$\boxed{E_x(\omega) = \left|X(\omega)\right|^2 \quad \left[\frac{J}{rad/s}\right]}$$

Energia całkowita:

$$\boxed{\mathbf{E}_x = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} E_x(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(f)\,df \quad [J]}$$

Proces losowy (stochastyczny)

$\hat{x}(t): \quad p_t(x)$

funkcja rozkładu gęstości prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej ciągłej (lub prawdopodobieństwo - dla zmiennej losowej dyskretnej)

zależy od dwóch zmiennych:
***x* – wartości zmiennej losowej;**
***t* – chwili czasu.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_t(x)\,dx = 1$$

Sygnał powstaje jako *k*-ta realizacja procesu losowego:

$$\hat{x}(t)\Big|_k = x(t)$$

Przykłady: sygnał stały, sygnał okresowy, sygnał fluktuacyjny.

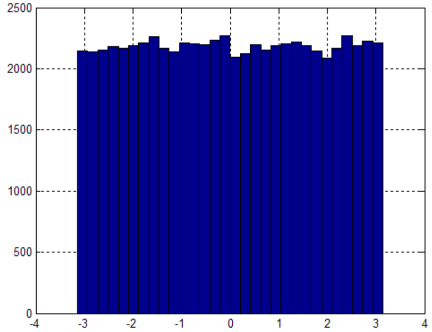
W części dotyczącej procesów losowych zakładamy, że proces jest rzeczywisty (tzn. o zerowej części urojonej), chyba że będzie określone inaczej.

Przykład: okresowy sygnał losowy

$$\hat{x}(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \hat{\varphi}_0)$$

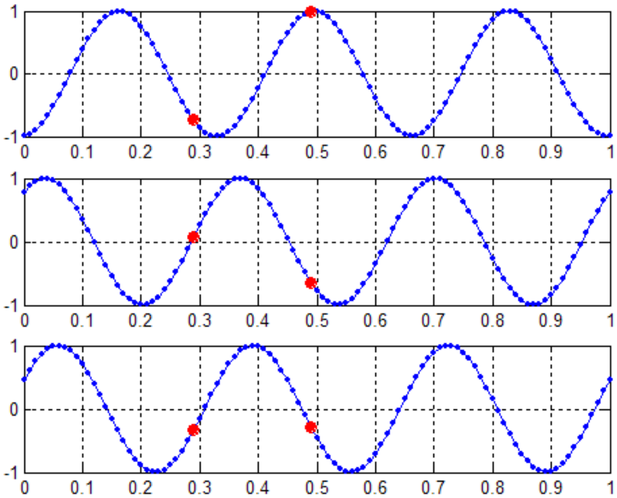
$$\varphi_0 \in [-\pi \, , \pi)$$

Histogram dla fazy

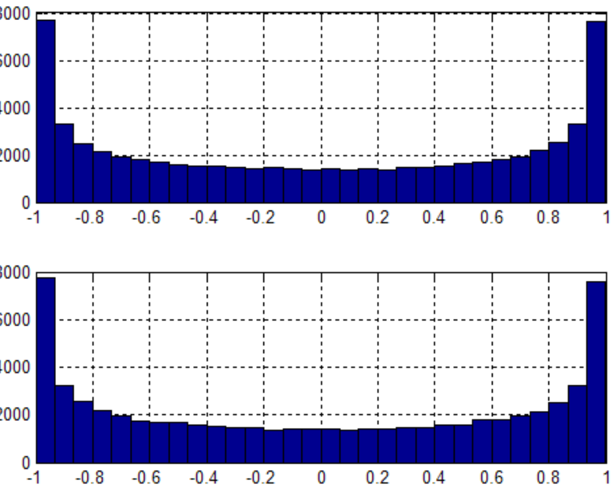


```
N=2^16;
p=rand(1,N)*2*pi-pi;
...
x=cos(2*pi*f0*t-p(n));
```

Trzy realizacje procesu



Rozkłady (histogramy) dla dwóch przykładowych punktów *t*

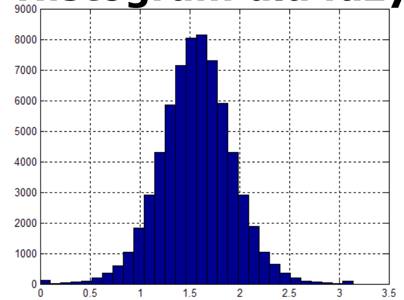


Inny przykład (nr 2)

$$\hat{x}(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \hat{\varphi}_0)$$

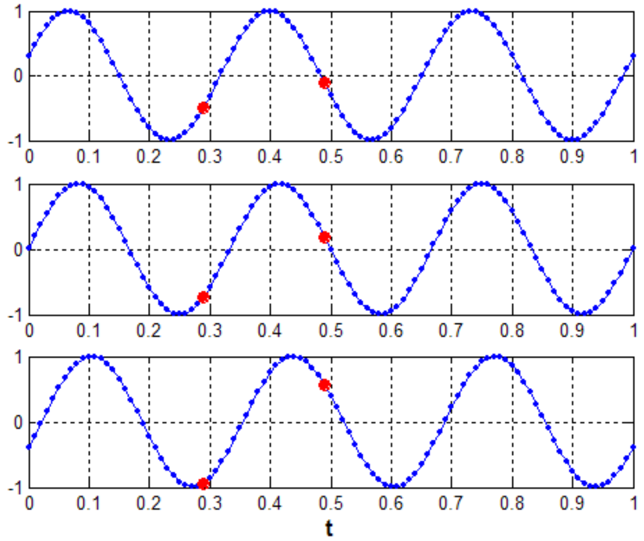
$$\varphi_0 \in [0, \pi)$$

Histogram dla fazy

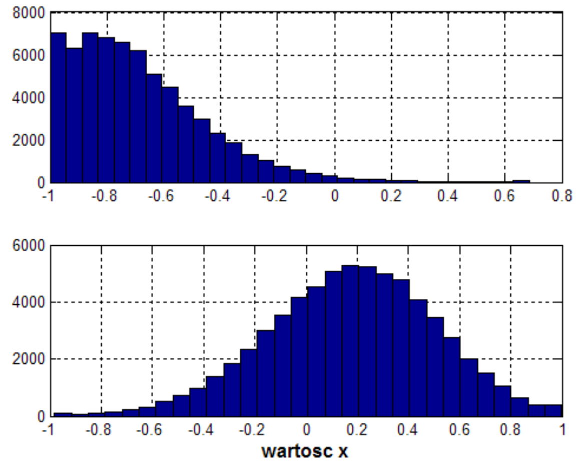



```
q=randn(1,N)/3; q(q>1)=1;
q(q<-1)=-1; p=acos(q);
...
x=cos(2*pi*f0*t-p(n));
```

Trzy realizacje procesu



Rozkłady (histogramy) dla dwóch przykładowych punktów *t*



Rozkłady łączne dla dwóch chwil czasu

Przyjmijmy następujące oznaczenia dla wartości procesu w dwóch chwilach *t*:

$$x_1 = x(t_1)$$

$$x_2 = x(t_2)$$

wtedy:

$$p_{t_1,t_2}(x_1, x_2)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p_{t_1,t_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = 1}$$

to funkcja rozkładu gęstości prawdopodobieństwa – łączna dla dwóch zmiennych losowych: x_1 i x_2, określona dla wartości czasu t_1 i t_2.

(Auto)korelacja procesu losowego

$$x_1 = x(t_1)$$
$$x_2 = x(t_2)$$

$$r_{\hat{x}}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot p_{t_1,t_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

Ogólnie dla danego procesu jest to funkcja dwóch zmiennych (t_1 i t_2).

Wartość oczekiwana:

$$\mathrm{E}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_t(x)\, dx$$

Średnia: $$\mathrm{E}[x(t)] = \mu_{\hat{x}}(t)$$

Wariancja:
(odchylenie standardowe do kwadratu)

$$\mathrm{E}[(x(t) - \mu_{\hat{x}}(t))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_{\hat{x}}(t))^2 \cdot p_t(x)\, dx$$

$$\mathrm{E}[(x(t) - \mu_{\hat{x}}(t))^2] = \sigma_{\hat{x}}^2(t)$$

Procesy stacjonarne i ergodyczne

Proces jest stacjonarny, gdy wszystkie jego parametry - zarówno rozkładu, jak i wzajemne zależności - nie zależą od czasu.

Proces jest stacjonarny w szerszym (mniej restrykcyjnym) sensie, gdy jego wartość oczekiwana oraz autokorelacja (kowariancja) nie zależą od czasu.

Proces jest ergodyczny, gdy jego parametry wyznaczone z pojedynczej realizacji (zwykle nieskończonej) są takie same jak dla dowolnej chwili czasu.

Procesem stacjonarnym, ale na pewno nie ergodycznym, jest np. sygnał stały, ale o losowej wartości początkowej (można założyć dowolny rozkład).

Procesem ergodycznym może być np. sygnał sinusoidalny o równomiernym rozkładzie fazy początkowej (warto sprawdzić, czy na pewno).
Ponadto są nimi sygnały tworzone przez generatory typu rand i randn.

Proces stacjonarny w szerszym sensie

Dla procesu stacjonarnego w szerszym sensie (inaczej: słabo stacjonarnego) wartość oczekiwana (średnia chwilowa)

$$\mathrm{E}[x(t)] = \mu_{\hat{x}}(t) = \mu_{\hat{x}}$$

nie zależy od czasu.

Moc i energia procesu

Moc chwilowa procesu:

$$P_{\hat{x}}(t) = \mathrm{E}[|x(t)|^2]$$

$$P_{\hat{x}}(t) = \sigma_{\hat{x}}^2(t) + \mu_{\hat{x}}^2(t)$$

Moc średnia procesu w czasie *T*:

$$P_{\hat{x}}(t_0, t_0 + T) = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} P_{\hat{x}}(t)\, dt$$

Energia procesu w czasie *T*:

$$E_{\hat{x}}(t_0, t_0 + T) = \int_{t_0}^{t_0+T} P_{\hat{x}}(t)\, dt$$

Uwaga na trzy symbole: *E* **,** E oraz **E.**

Twierdzenie Wienera-Chinczyna

Dla procesu losowego, stacjonarnego co najmniej w szerszym sensie, widmowa gęstość mocy jest transformatą Fouriera autokorelacji procesu:

$$\boxed{P_{\hat{x}}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{\hat{x}}(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt}$$

$$\boxed{P_{\hat{x}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{\hat{x}}(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt}$$

1. **Widmowa gęstość mocy procesu jest nieujemną funkcją rzeczywistą.**

2. **Dla procesów rzeczywistych jest to ponadto funkcja parzysta.**

Szum biały (kolorowy) gaussowski... Co to jest?

Korelacja dwóch sygnałów (deterministycznych)

$$\boxed{R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot\overline{y(\tau - t)}\,d\tau}$$

Druga wersja:

$$\boxed{R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(\tau)}\cdot y(\tau + t)d\tau}$$

Uwaga: nie dzielimy przez czas!

Uwaga – korelacja to nie to samo co współczynnik korelacji (gdzie jest unormowanie!).

Czyli autokorelacja dla sygnału *x*(*t*):

$$\boxed{R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot\overline{x(\tau - t)}\,d\tau}$$

Uwaga: wyżej określona korelacja oraz autokorelacja to także sygnały.

Funkcja widmowej gęstości energii sygnału (deterministycznego)

$$\boxed{R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot\overline{x(\tau - t)}\, d\tau}$$

$$\boxed{E_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(t)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t} dt}$$

Ponieważ dla rzeczywistego sygnału *x*(*t*):

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot x(\tau - t)\, d\tau \quad \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} \quad X(f)\cdot\overline{X(f)} = \left|X(f)\right|^2 = E_x(f)}$$

Przemienność korelacji (?)

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot\overline{y(\tau-t)}\,d\tau \quad \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} \quad X(f)\cdot\overline{Y(f)}}$$

Przypomnijmy:

$$\boxed{\overline{x(t)} \quad \leftrightarrow \quad \overline{X(-f)}}$$

Czyli w ogólności korelacja (w obu wersjach) nie jest przemienna!

Może być przemienna jedynie dla sygnałów rzeczywistych parzystych, ponieważ wtedy widmo Fouriera jest rzeczywiste.

W drugiej wersji:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(\tau)}\cdot y(\tau+t)\,d\tau \quad \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} \quad \overline{X(f)}\cdot Y(f)}$$

Filtracja sygnału o zadanej widmowej gęstości mocy lub energii

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f) \qquad \overline{Y(f)} = \overline{H(f)} \cdot \overline{X(f)}$$

czyli:

$$Y(f) \cdot \overline{Y(f)} = H(f) \cdot \overline{H(f)} \cdot X(f) \cdot \overline{X(f)}$$

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 \cdot |X(f)|^2$$

Zatem dla funkcji widmowej gęstości energii:

$$\boxed{E_y(f) = |H(f)|^2 \cdot E_x(f)}$$

Dla procesu losowego:

$$\boxed{E_{\hat{y}}(f) = |H(f)|^2 \cdot E_{\hat{x}}(f)}$$

Podobnie dla funkcji widmowej gęstości mocy:

$$\boxed{P_y(f) = |H(f)|^2 \cdot P_x(f)}$$

$$\boxed{P_{\hat{y}}(f) = |H(f)|^2 \cdot P_{\hat{x}}(f)}$$

Modulacja amplitudy

Modulacja dwuwstęgowa z falą nośną:

$$y(t) \quad = \quad A \cdot \left[1 + m \cdot x(t)\right] \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0)$$

$$0 < m < 1$$

Dla: $\varphi_0 = 0$

$$y(t) \quad = \quad A \cdot \left[1 + m \cdot x(t)\right] \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

Zatem:

$$y(t) \quad = \quad A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + A \cdot m \cdot x(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

… i w dziedzinie Fouriera:

$$Y(f) \quad = \quad \frac{A}{2} \cdot \left(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\right) \quad + \quad \frac{A \cdot m}{2} \cdot X(f - f_0) + \frac{A \cdot m}{2} \cdot X(f + f_0)$$

Modulacja amplitudy

Modulacja dwuwstęgowa bez fali nośnej:

$$y(t) \quad = \quad A \cdot x(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0)$$

Często przyjmuje się, że: $\varphi_0 = 0$

wtedy:

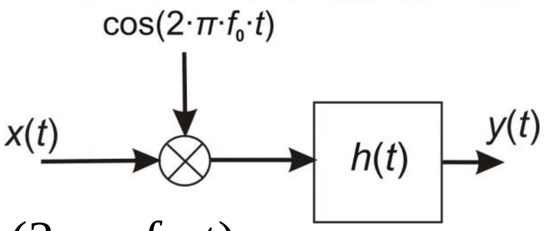
$$Y(f) \quad = \quad \frac{A}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \left(e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (f_0 - f) \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (f_0 + f) \cdot t} \right) dt$$

Zatem ostatecznie w dziedzinie Fouriera:

$$Y(f) \quad = \quad \frac{A}{2} \cdot X(f - f_0) + \frac{A}{2} \cdot X(f + f_0)$$

Modulacja amplitudy

Modulacja dwuwstęgowa bez fali nośnej

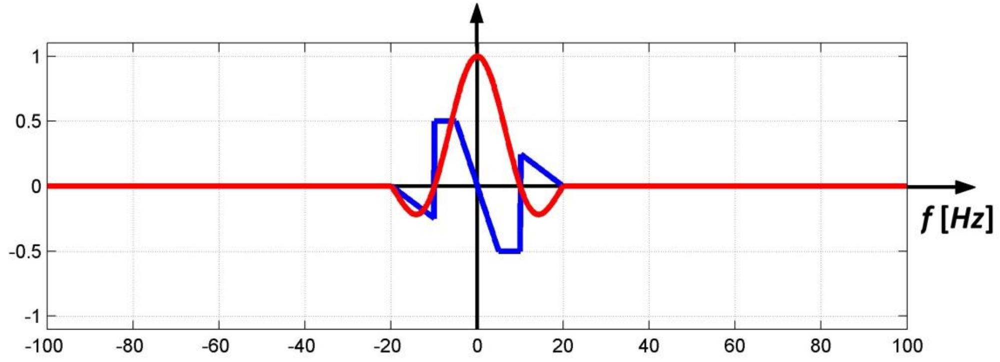


W tym przypadku przyjmujemy: $h(t) = \delta(t)$

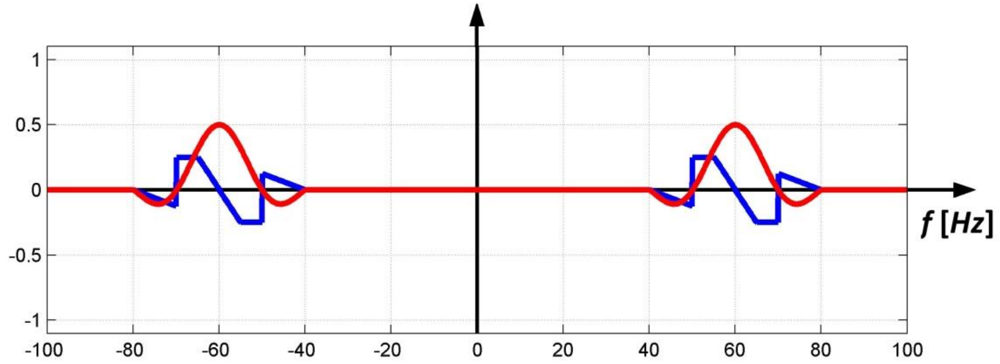
czyli: $H(f) = 1$

$$y(t) \quad = \quad x(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) * \delta(t) = x(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

Widmo rzeczywiste i urojone dla *x*(*t*)

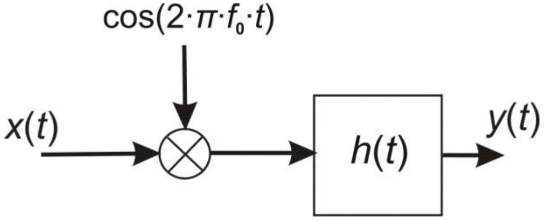


Widmo rzeczywiste i urojone dla *y*(*t*)



Modulacja amplitudy

Modulacja jednowstęgowa



W tym przypadku przyjmujemy (a):

$$H(f) = 1 - \Pi\left(\frac{f}{2 \cdot f_0}\right)$$

czyli:

$$h(t) = \delta(t) - 2 \cdot f_0 \cdot \mathrm{sinc}(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

albo (b):

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2 \cdot f_0}\right)$$

i wtedy:

$$h(t) = 2 \cdot f_0 \cdot \mathrm{sinc}(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

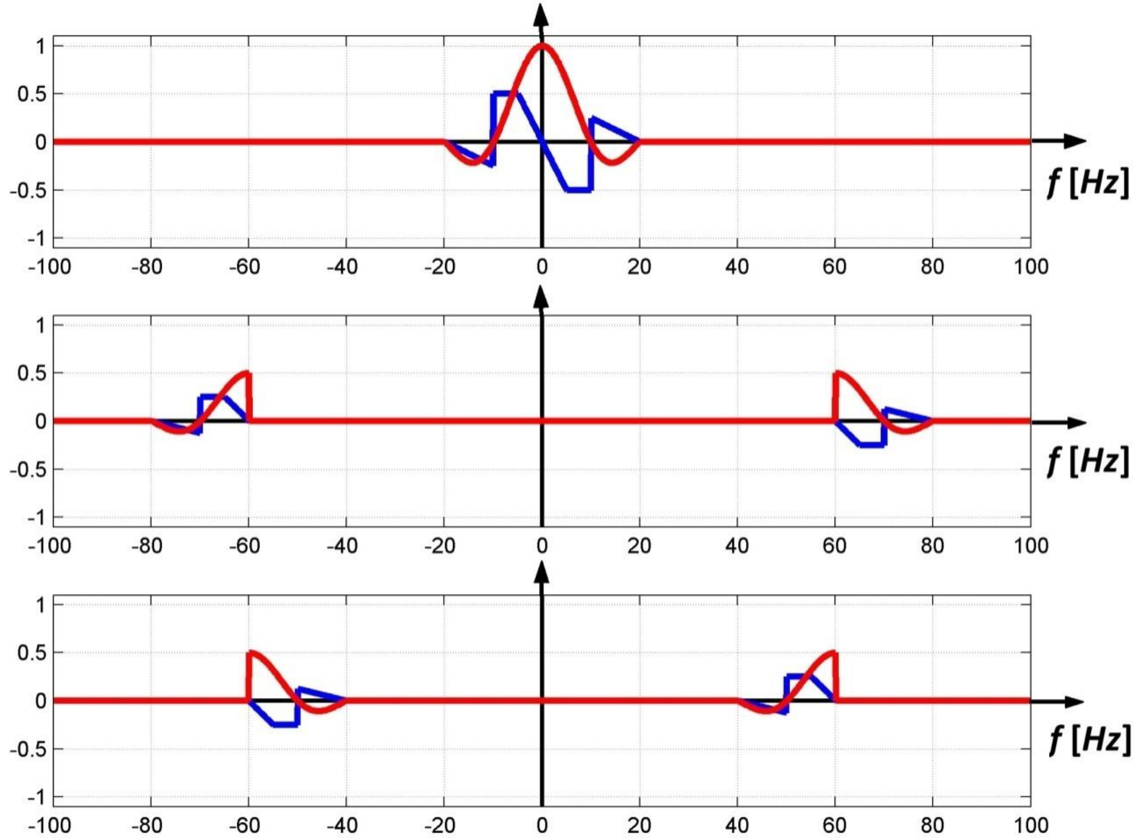
Modulacja amplitudy

Modulacja jednowstęgowa

Widmo rzeczywiste i urojone dla $x(t)$

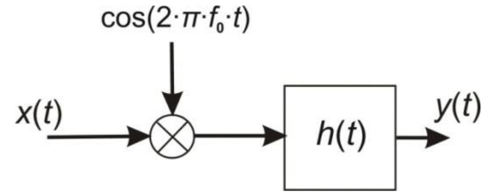
Widmo rzeczywiste i urojone dla $y(t)$ - wariant (a)

Widmo rzeczywiste i urojone dla $y(t)$ - wariant (b)



Modulacja amplitudy

Modulacja jednowstęgowa



$$y(t) \;=\; h(t) * \left[x(t)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t)\right] \;=\;$$ **podstawmy wariant (a)**

$$= \left[\delta(t) - 2\cdot f_0\cdot \mathrm{sinc}(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t)\right] * \left[x(t)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t)\right] \;=$$

$$= x(t)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) - \left[\frac{1}{2}\cdot x^H(t)\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) + \frac{1}{2}\cdot x(t)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t)\right]$$

$$\boxed{y(t) \;=\; \frac{1}{2}\cdot x(t)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) - \frac{1}{2}\cdot x^H(t)\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t)}$$

$$\boxed{X^H(f) \;=\; -j\cdot\mathrm{sgn}(f)\cdot X(f)}$$

Gdyby przyjąć filtr (b):

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2\cdot f_0}\right)$$

to otrzymalibyśmy:

$$\boxed{y(t) \;=\; \frac{1}{2}\cdot x(t)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) + \frac{1}{2}\cdot x^H(t)\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t)}$$

Modulacja fazy

Sygnał zmodulowany:

Modulacja ta jest nieliniowa!

$$y(t) = \cos(\varphi(t))$$

$$y(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0 + x(t) \cdot P\right)$$

$$P \in (0\,,\,2 \cdot \pi)$$

Przykładowo dla sygnału dwustanowego (*ang. PSK*):

Phase Shift Keying

$$x(t) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \cdot \Pi\left(\frac{t - n \cdot T}{T}\right)$$

$$a_n \in \{0,1\}$$

Modulacja fazy

Przykład *PSK*:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \Pi\left(\frac{t - n \cdot T}{T}\right)$$
$$a_n \in \{0,1\}$$

dla *P=π*

Metoda bezpośrednia:

$$y_0(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0)$$
$$y_1(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0 + \pi)$$

Czyli jak to zapisać?

Metoda różnicowa:

$$x_d(t) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n \cdot \Pi\left(\frac{t - n \cdot T}{T}\right)$$
$$b_n \in \{0,1\}$$

$$b_n = \begin{cases} 1 & dla \quad a_n \neq a_{n-1} \\ 0 & dla \quad a_n = a_{n-1} \end{cases}$$

Często przyjmuje się: $\boxed{\varphi_0 = 0}$

Modulacja fazy

Przykład *PSK*:

Rozważmy następujący sygnał:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot \Pi\left(\frac{t - n \cdot T - 1/2}{T}\right)$$

$$a_n \in \{0,1\}$$

Zakładając dodatkowo, że:

$$a_n = \begin{cases} 1 & dla \quad n \geq 0 \\ 0 & dla \quad n < 0 \end{cases}$$

W takim przypadku sygnał zmodulowany może być opisany następująco:

$$y(t) = u(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \pi) + u(-t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

Modulacja fazy

Kontynuacja przykładu:

$$\boxed{y(t) = u(t)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\pi) + u(-t)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t)}$$

$$\boxed{\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\pi) = \cos\left(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot\left(t+\frac{\pi}{2\cdot\pi\cdot f_0}\right)\right) \quad\Rightarrow\quad t_0 = -\frac{\pi}{2\cdot\pi\cdot f_0}}$$

$$Y(f) = U(f) * \left[\frac{1}{2}\cdot\left(\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)\right)\cdot e^{+j\cdot\pi}\right] + U(-f) * \left[\frac{1}{2}\cdot\left(\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)\right)\right]$$

$$\boxed{U(f) = \frac{1}{2}\cdot\delta(f) - j\cdot\frac{1}{2\cdot\pi\cdot f}} \qquad \boxed{e^{+j\cdot\pi} = e^{-j\cdot\pi} = -1}$$

$$\begin{aligned} Y(f) = & -\frac{1}{4}\cdot\left(\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)\right) + j\cdot\left(\frac{1}{4\cdot\pi\cdot(f+f_0)} + \frac{1}{4\cdot\pi\cdot(f-f_0)}\right) + \\ & + \frac{1}{4}\cdot\left(\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)\right) + j\cdot\left(\frac{1}{4\cdot\pi\cdot(f+f_0)} + \frac{1}{4\cdot\pi\cdot(f-f_0)}\right) = \\ & = j\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\pi\cdot(f+f_0)} + \frac{1}{2\cdot\pi\cdot(f-f_0)}\right) \end{aligned}$$

Modulacja fazy

$$y(t) = u(t)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\pi)+u(-t)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t)$$

Kontynuacja przykładu:
(inny sposób wyliczenia widma)

$$y(t) = -\operatorname{sgn}(t)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t)$$

$$Y(f) = -\left[-j\cdot\frac{1}{\pi\cdot f}\right]*\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)\right)\right] = j\cdot\left[\frac{1}{2\cdot\pi\cdot(f+f_0)}+\frac{1}{2\cdot\pi\cdot(f-f_0)}\right]$$

Jak widać, w widmie nie ma częstotliwości nośnej!

Modulacja fazy

Jeszcze jedno spojrzenie na *PSK* z dwustanowym sygnałem prostokątnym:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot \Pi\left(\frac{t - n\cdot T}{T}\right)$$

$$a_n \in \{0,1\}$$

Oznaczmy przez A zbiór indeksów *n*, dla których a_n=1, wtedy możemy wprowadzić dwa sygnały pomocnicze:

$$x_1(t) = \sum_{k\in\mathbf{A}} \Pi\left(\frac{t - k\cdot T}{T}\right) = x(t) \qquad x_2(t) = \sum_{k\notin\mathbf{A}} \Pi\left(\frac{t - k\cdot T}{T}\right) = 1 - x(t)$$

Zatem sygnał zmodulowany:

$$y(t) \quad = \quad \cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t + \pi)\cdot x(t) \quad + \quad \cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t)\cdot\left(1 - x(t)\right)$$

... można go zatem zinterpretować jako sumę dwóch sygnałów, których nośne różnią się fazą o *π*, zmodulowanych amplitudowo:

$$y(t) \quad = \quad y_1(t) \quad + \quad y_2(t)$$

Ta interpretacja umożliwia wyciąganie wniosków, co do widma sygnału zmodulowanego *PSK*.

Modulacja częstotliwości

Sygnał zmodulowany:

$$y(t) \quad = \quad \cos\left(\varphi(t)\right)$$

$$2\cdot\pi\cdot f(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t) = 2\cdot\pi\cdot f_0 + 2\cdot\pi\cdot K\cdot x(t) = 2\cdot\pi\cdot\left(f_0 + K\cdot x(t)\right)$$

$$y(t) \quad = \quad \cos\left(2\cdot\pi\cdot(f_0\cdot t + K\cdot\int_0^t x(\tau)\,d\tau) + \varphi_0\right)$$

$$\boxed{\varphi_0 = 0}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\frac{d}{dt}\varphi(t) = f_0 + K\cdot x(t)$$

Modulacja ta jest nieliniowa!

Modulacja częstotliwości

Przykład (*ang. FSK*):

Frequency Shift Keying

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot \Pi\left(\frac{t - n \cdot T}{T}\right)$$

$$a_n = \pm 1$$

Dla a_n=+1, *K*=Δ*f* (dewiacja częstotliwości):

$$y_{+1}(t) \quad = \quad \cos\left(2 \cdot \pi \cdot (f_0 + \Delta f) \cdot t\right)$$

Dla a_n=-1, *K*=Δ*f*:

$$y_{-1}(t) \quad = \quad \cos\left(2 \cdot \pi \cdot (f_0 - \Delta f) \cdot t\right)$$

Widmo lokalne zawiera tylko te dwie częstotliwości:

$$f_G = f_0 + \Delta f$$
$$f_D = f_0 - \Delta f$$

Modulacja częstotliwości

Jeszcze jedno spojrzenie na *FSK* z dwustanowym sygnałem prostokątnym:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot \Pi\left(\frac{t - n \cdot T}{T}\right)$$

$$a_n \in \{-1, 1\}$$

Oznaczmy przez A zbiór indeksów *n*, dla których a_n=1 oraz prze B zbiór indeksów, dla których a_n=-1, wtedy:

$$x_1(t) = \sum_{k \in \mathbf{A}} \Pi\left(\frac{t - k \cdot T}{T}\right) \qquad x_2(t) = \sum_{k \in \mathbf{B}} \Pi\left(\frac{t - k \cdot T}{T}\right)$$

Zatem sygnał zmodulowany:

$$y(t) \quad = \quad \cos\big(2 \cdot \pi \cdot (f_0 + \Delta f) \cdot t\big) \cdot x_1(t) \quad + \quad \cos\big(2 \cdot \pi \cdot (f_0 - \Delta f) \cdot t\big) \cdot x_2(t)$$

... można go zatem zinterpretować jako sumę dwóch sygnałów zmodulowanych amplitudowo:

$$y(t) \quad = \quad y_1(t) \quad + \quad y_2(t)$$

Ta interpretacja umożliwia wyciąganie wniosków, co do widma sygnału zmodulowanego *FSK*.

Zapraszam na ćwiczenia ...
lub do laboratorium…