Notatki z ITO

Kacper Filipek

Regresja

Regresja liniowa

Dla równania danego wzorem $y = ax + b$, współczynniki prostej regresji dla zaobserwowanych danych są dane wzorami

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x}$$

gdzie
$\overline{x}$ - średnia z x
$\overline{y}$ - średnia z y
x_i, y_i - zaobserwowane dane

Regresja liniowa wielowymiarowa

$$X \cdot a = y - e$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{1,1} & x_{2,1} & \dots & x_{K,1} \\ 1 & x_{1,2} & x_{2,2} & \dots & x_{K,2} \\ 1 & x_{1,3} & x_{2,3} & \dots & x_{K,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1,2} & x_{2,2} & \dots & x_{K,N} \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_K \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}$$

Aby obliczyć macierz a, należy zastosować macierze pseudolosową według równania

$$a = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot y$$

Regresja nieliniowa

$$X \cdot a = y - e$$

$$\begin{bmatrix} 1 & g(x_1) \\ 1 & g(x_2) \\ 1 & g(x_3) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & g(x_N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}$$

Aby obliczyć macierz a, należy zastosować macierze pseudolosową według równania

$$a = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot y$$

Liczby zespolone

Najważniejsze własności:

- $i^2 = -1$
- $e^{i\varphi} = cos\varphi + i \sin \varphi$
- $|e^{i\varphi}| = 1$
- $|z| = \sqrt{(\mathrm{re}\, z)^2 + (\mathrm{im}\, z)^2}$
- $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$
- Liczba ma n pierwiastków zespolonych n-tego stopnia.

Wzór na k-ty pierwiastek zespolony n-tego stopnia z liczby z:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \right)$$

gdzie $k = \{1, 2, 3, \ \dots \ n - 1\}$

Szereg Taylora

$$y(x) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

gdzie $y^{(n)}$ - n-ta pochodna funkcji y

Szereg Fouriera

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{x}(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi f_T t \cdot n} \, dt$$

Wielomiany Czebyszewa

Wzor rekurencyjny:

- $T_0(x) = 1$
- $T_1(x) = x$
- $T_n(x) = 2x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$, dla $n \geqslant 2$

Wielomiany Czebyszewa mają n-tego stopnia mają na przedziale n równo rozmieszczonych miejsc zerowych określonych wzorem:

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi \, (k - 0.5)}{n}\right)$$

Oraz $n + 1$ ekstremów w punktach określonych wzorem

$$x_m = \cos\left(\frac{\pi \cdot m}{n}\right)$$

dla
$k = 1, 2 \ \dots \ n$
$m = 0, 1 \ \dots \ n$

Wielomiany Legendre'a

Wzór ogólny:

- $L_0(x) = 1$
- $L_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2-1)^n \right)$

  Wzór rekurencyjny:

- $L_0(x) = 1$
- $L_1(x) = x$
- $L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x \cdot L_n(x) - \frac{n}{n+1} \cdot L_{n-1}(x)$

Rozwiązywanie wielomianów stopni wyższych

Wzory Cardano

Wzory Cardano pozwalają obliczyć pierwiastki wielomianu trzeciego stopnia, jeśli wielomian jest unormowany, czyli współczynnik przy największej potędze jest równy 1.
Dla wielomianu w postaci $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ wzory Cardano mają następującą postać:

$$y = x + \frac{a_2}{3} \Rightarrow y^3 + (3p) \cdot y + 2q = 0$$

$$p = \frac{3a_1 - a_2^2}{9} \quad q = \frac{a_2^3}{27} - \frac{a_1 a_2}{6} + \frac{a_0}{2}$$

$$D = q^2 + p^3$$

$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} \quad v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}$$

$$y_1 = u + v, \quad y_{2,3} = -\frac{1}{2}(u+v) \pm j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)$$

$$x = y - \frac{a_2}{3}$$

Wzory Ferrari

Rozkłady

Rozkład Gaussa

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa dana jest wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

gdzie

- σ - odchylenie standardowe
- μ - średnia
- $\exp a = e^a$