



**AGH**

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

# **Teoria sygnałów**

## **Wykład 1**

**Dr inż. Przemysław Korohoda  
Instytut Elektroniki, AGH, Kraków**

[home.agh.edu.pl/~korohoda/rok\\_2022\\_2023\\_zima/TS\\_EL\\_2](http://home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2)

**UPEL: TS 2022**

# **Plan wykładu**

- 1. Zasady współpracy i sposób oceniania.**
- 2. Czego będziemy się uczyć i dlaczego?**
- 3. Literatura pomocnicza.**
- 4. Ważne elementy pakietu MATLAB („stare i nowe”).**

# Zasady współpracy

- 1. Wykład (obecność?).**
- 2. Ćwiczenia tablicowe (kartkówki, aktywność).**
- 3. Laboratorium (Matlab) (kartkówki, aktywność, ...).**

**Egzamin (2 części – pamięciowa i zadaniowa).**

**Ocena końcowa – ocena z egzaminu, chyba że średnia pozostałych ocen różni się o stopień lub więcej.**

# Ważne sprawy na początek współpracy

**Laboratorium (praca w zespołach 2 osobowych, niekiedy pojedynczo):**

1. Obecność obowiązkowa, usprawiedliwianie nieobecności, system punktowy.
2. Swoje pliki umieszczamy tylko w odpowiednim folderze.
3. Zachowujemy układ edytorski pliku według zaleceń prowadzącego.
4. Stosujemy czytelne oznaczenia zmiennych (zgodnie z j.w.).
5. Jeżeli nie mamy fotograficznej pamięci, to robimy odpowiednie notatki.
6. Komputery w laboratorium nie są magazynem dla prac studentów.
7. Możliwość proponowania zagadnień (z rozsądnym wyprzedzeniem).

**Ćwiczenia:**

1. Obecność i zasady – stosowne spośród wymienionych dla laboratorium.
2. Należy się zgłaszać (różne osoby!) do rozwiązywania zadań  
– brak zgłoszeń = kartkówka.

**Zmiana budynku (?), terminarz zajęć. Problem „kwadransa akademickiego”.**

**Kontakt e-mailowy z osobami reprezentującymi:**

**a) wszystkich oraz b) każdą grupę laboratoryjną.**

**Strona WWW / UPEL.**

**Konsultacje !!! (Webex)**

# Główny temat

**TEORIA sygnałów czyli przede wszystkim (choć nie tylko):  
analiza Fouriera = częstotliwościowa.**

**Dlaczego teoria?**

## Literatura pomocnicza

1. **J. Szabatin:** Podstawy teorii sygnałów. WKiŁ, Warszawa 2004 i późniejsze wydania..
2. **M. Kantor, Z. Papir:** Modulacja i detekcja – zbiór zadań z rozwiązaniami. UWND AGH, Kraków 2008.
3. **Z. Papir:** Analiza częstotliwościowa sygnałów. UWND AGH, Kraków 1995
4. **H. Baher:** Analog and Digital Signal Processing, John Wiley 2001.
5. **J. Izydorczyk, G. Płonka, G. Tyma:** Teoria Sygnałów. Helion 1999, a także późniejsze wydania.
6. **A. Wojnar:** Teoria sygnałów. WNT, Warszawa 1980 (i późniejsze wydania).
7. **K.M. Snopek, Jacek M. Wojciechowski:** Sygnały i systemy. Zbiór zadań. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2010.
8. **T.Zieliński, P.Korohoda, R. Rumian (red.):** Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Podstawy, multimedia, transmisja. PWN, Warszawa 2014.

itp../itd..

# Wybrane narzędzia pakietu MATLAB (powtórzyć!)

Funkcje, które należy umieć wykorzystać (na początek):

- a) cos, sin, exp, abs, angle, real, imag, atan, atan2,
- b) plot, figure, clf,
- c) grid on/off, hold on/off, subplot, title, xlabel, ylabel, num2str, axis, xlim, ylim,
- d) clc, clear, close, format, find, pause, sound, soundsc, max, min, help, rand, eye, ones, zeros, length, size.

Ważne hasła:

- A. Zasady tworzenia nowych nazw.
- B. Zapis macierzowy.
- C. Indeksy.
- D. Wykresy.
- E. Tworzenie i korzystanie z własnych funkcji.
- F. Operowanie na ciągach znaków.
- G. Pętle (for, while).
- H. Rozgałęzienia (if, switch).
- I. Zmienne wbudowane.

## Warto też znać:

**Wybór indeksów przez wyrażenie warunkowe:**

np.  $x(t < 0) = 0$ ; % gdy  $x$  oraz  $t$  są analogicznymi zmiennymi;

**Funkcje:**

- a) **nargin, break, return;**
- b) **stairs, semilogx, semilogy, loglog;**
- c) **dir, type;**
  
- d) ***square, pulstran, rectpuls.***

## Tworząc m-plik...

**należy pamiętać o następujących zagadnieniach:**

- 1) metryczka (nazwa, „co i po co”, autor, data);**
- 2) „porządki wstępne”, czyli przygotowanie środowiska;**
- 3) część graficzna po części obliczeniowej (chyba, że...);**
- 4) wcięcia, spacje i puste linie;**
- 5) komentarze,**
- 6) sposób prezentowania wyników (graficznie, liczbowo, ...).**



AGH

***Zapraszam na ćwiczenia ...  
tablicowe lub laboratoryjne.***



**AGH**

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

# **Teoria sygnałów**

## **Wykład 2**

**Dr inż. Przemysław Korohoda  
Instytut Elektroniki, AGH, Kraków**

[home.agh.edu.pl/~korohoda/rok\\_2022\\_2023\\_zima/TS\\_EL\\_2](http://home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2)

**UPEL: TS 2022**

# **Plan wykładu**

- 1. Wprowadzenie do teorii sygnałów.**
- 2. Sygnał kosinusoidalny.**
- 3. Przekształcanie sygnałów.**
- 4. Sygnał schodkowy.**
- 5. Sygnały zespolone – sygnał harmoniczny.**
- 6. Wykresy sygnałów zespolonych.**

## Pytanie podstawowe

**Co to jest sygnał?  
... i po co się nim zajmować?**

## Przykłady sygnałów

Zmieniające się w czasie ciśnienie powietrza w określonym punkcie przestrzeni (sygnał akustyczny).

Wartość temperatury ciała pacjenta w czasie również stanowi przykład sygnału.

Wartość napięcia w danym punkcie przewodu (elektryczny sygnał telekomunikacyjny).

Wartość natężenia pola elektrycznego w danym punkcie przestrzeni (elektromagnetyczny sygnał telekomunikacyjny).

Wybrane kategorie sygnałów: codzienne (mowa, orientacja w przestrzeni itd.), rozrywkowe, telekomunikacyjne, medyczne, geofizyczne, astrofizyczne, wojskowe itd., itp.

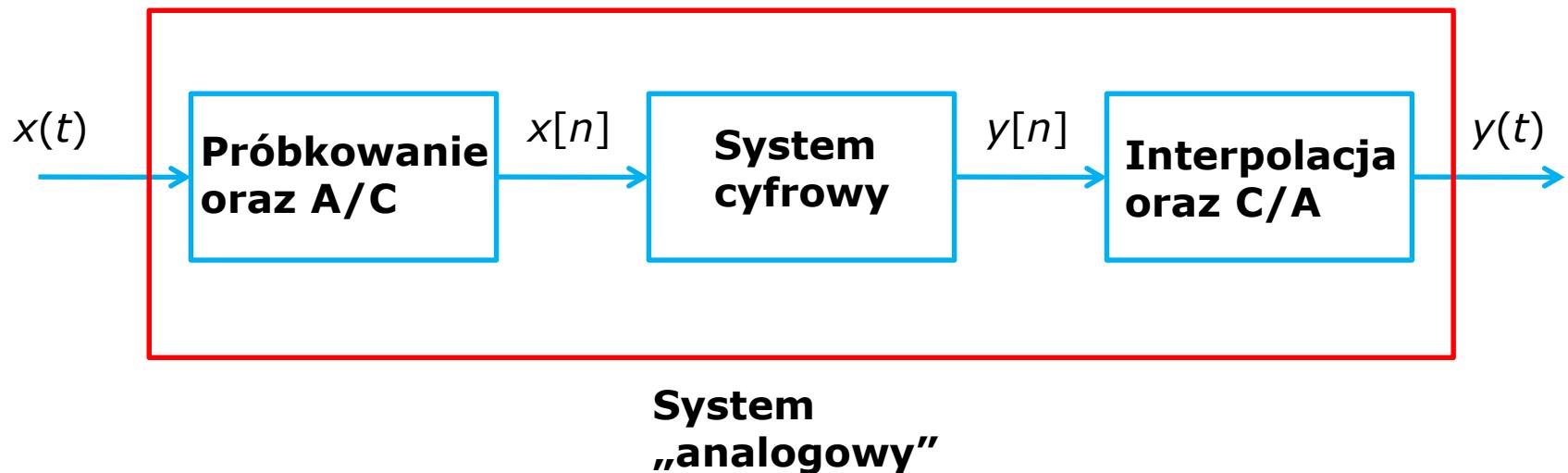
## Przetwarzanie sygnałów polega na...

**dostosowaniu do potrzeb użytkownika  
– człowieka lub „maszyny”.**

**Przykłady:**

- 1) usuwanie (redukcja) zakłócenia lub szumu,**
- 2) kodowanie/dekodowanie w celu efektywnej archiwizacji lub przesyłania,**
- 3) kodowanie/dekodowanie w celu zapewnienia tajemnicy,**
- 4) wydobywanie ukrytej informacji – np. pomiarowej, diagnostycznej,  
itd.**

# Sygnały analogowe i cyfrowe oraz ich przetwarzanie



**Po to by przetwarzać świadomie i celowo  
musimy znać...**

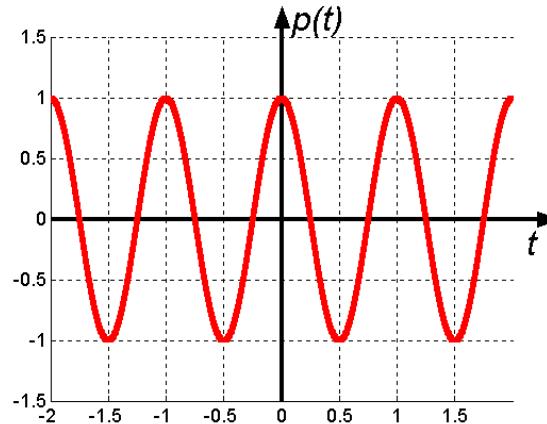
**...teorię sygnałów**

### **Matematyczny model sygnału**

**Przykładowo:**

**Zmieniające się w czasie ciśnienie powietrza w określonym punkcie przestrzeni (sygnał akustyczny) może być opisane jako funkcja czasu:**

$$p(t) = p_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$



**Często opis danego zjawiska w postaci matematycznego modelu prowadzi do interpretacji tego modelu jako sygnału.**

# Sygnały analogowe

**Sygnały na dziedzinie ciągłej, przyjmujące dowolne wartości (zazwyczaj rzeczywiste)**

**przykładowe oznaczenia:**

$$x(t), \quad s(t), \quad y(t), \quad h(t), \quad x_1(t), \quad y_{1,2}(t), \quad h(\tau), \quad y_A(\tau)$$

**dziedzina ciągła – np. czas:  $t, \tau$ ;**

**... lub płaszczyzna:**  $(q, \mu)$

## Wymiary sygnału

### Sygnal jednowymiarowy (ze względu na dziedzinę)

np. sygnał akustyczny (monofoniczny):

$$x(t), \quad s(t)$$

### Sygnal dwuwymiarowy (ze względu na dziedzinę)

np. obraz ciągły (monochromatyczny):

$$P(q, \mu)$$

lub wysokość powierzchni nad poziomem morza w zależności od położenia;

### Sygnal trójwymiarowy (ze względu na dziedzinę)

np. zmieniający się w czasie obraz ciągły (monochromatyczny):

lub gęstość materii w przestrzeni kosmicznej w otoczeniu gwiazdy, ciśnienie powietrza/wilgotność w atmosferze nad powierzchnią Ziemi.

$$V(q, \mu, t)$$

# Wymiary sygnału

## Sygnały wektorowe (składowe-komponenty powiązane przez dziedzinę)

np. akustyczny sygnał stereofoniczny:

$$x_{LR}(t) = \begin{bmatrix} x_L(t) \\ x_R(t) \end{bmatrix}$$

Sygnał  $x_{LR}$  jest jednowymiarowy ze względu na dziedzinę, a dwuwymiarowy ze względu na liczbę komponentów.

barwny sygnał wideo:

$$V_{RGB}(q, \mu, t) = \begin{bmatrix} V_R(q, \mu, t) \\ V_G(q, \mu, t) \\ V_B(q, \mu, t) \end{bmatrix}$$

Sygnał  $V_{RGB}$  jest trójwymiarowy ze względu na dziedzinę i trójwymiarowy ze względu na liczbę komponentów ( $R, G, B$ )

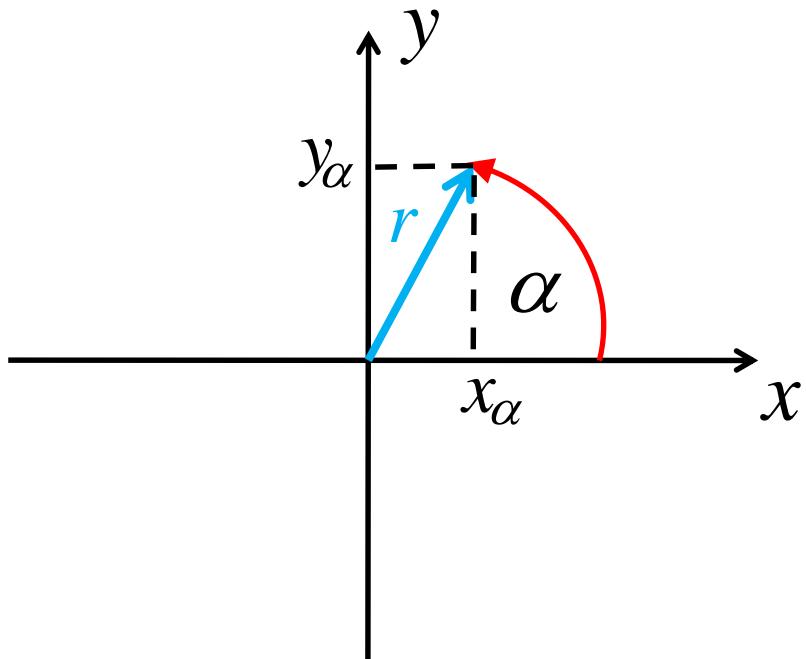
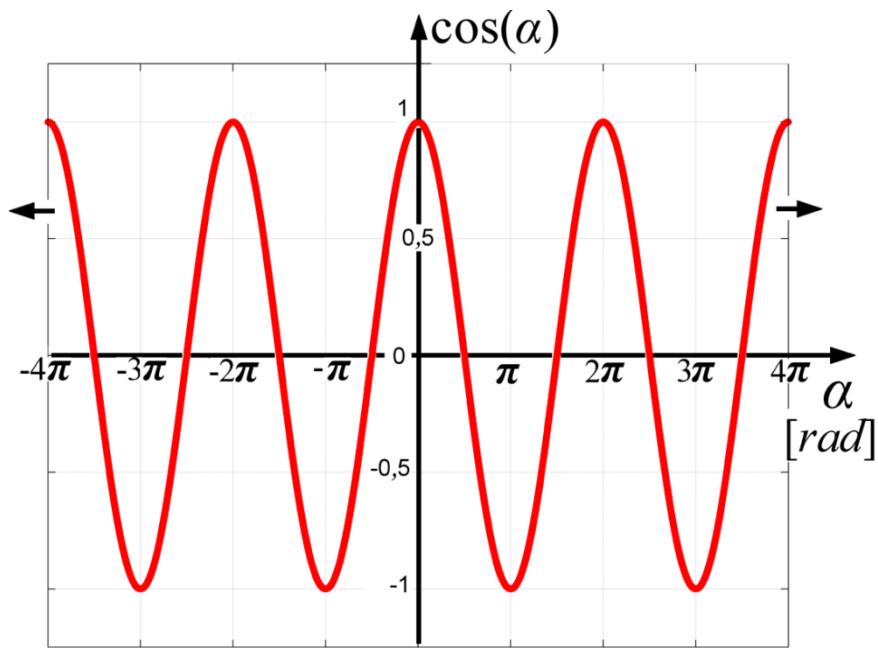
## Analogowy sygnał audio-wideo

Sygnal  $AV_{LR,RGB}$  jest *multimedialny* (dwa wymiary medialne: audio-wideo).

Oba media sa powiazane przez dziedzinę czasu, ale każdy z tych sygnałów ma inny wymiar dziedziny i inny wymiar wartości sygnału:

$$AV_{LR,RGB}(q, \mu, t) = \begin{bmatrix} V_{RGB}(q, \mu, t) \\ x_{LR}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_R(q, \mu, t) \\ V_G(q, \mu, t) \\ V_B(q, \mu, t) \\ x_L(t) \\ x_R(t) \end{bmatrix}$$

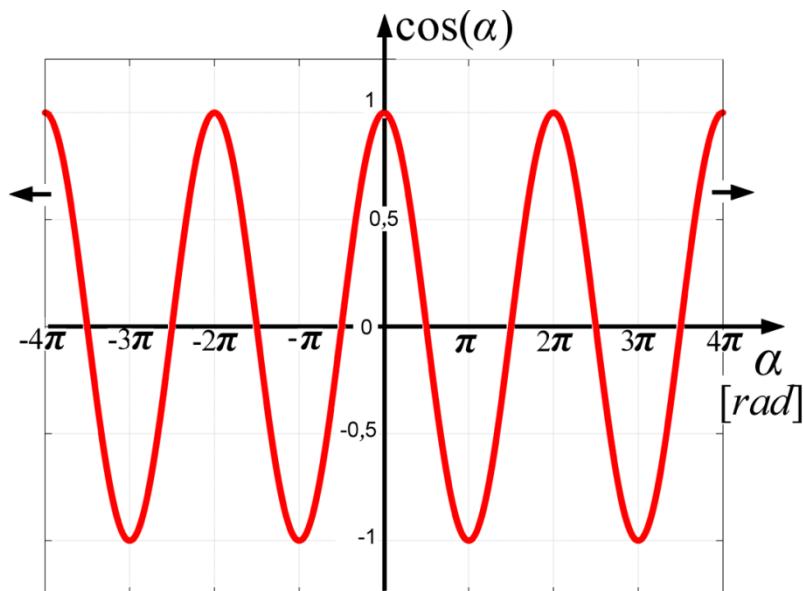
# Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny



$$\cos(\alpha) = \cos \alpha$$

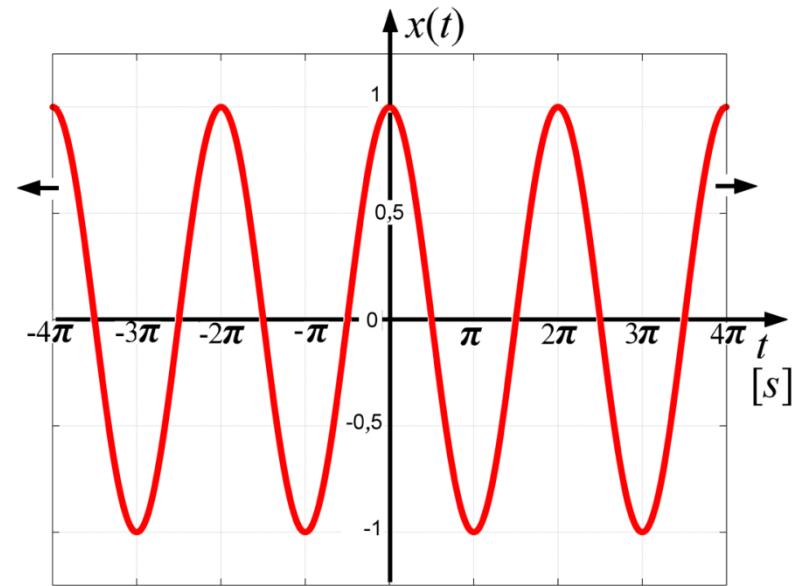
$$\alpha \in \Re$$

# Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny



$$\cos(\alpha) = \cos \alpha$$

$$\alpha \in \Re$$



$$x(t) = \cos(t) = \cos(1 \cdot t)$$

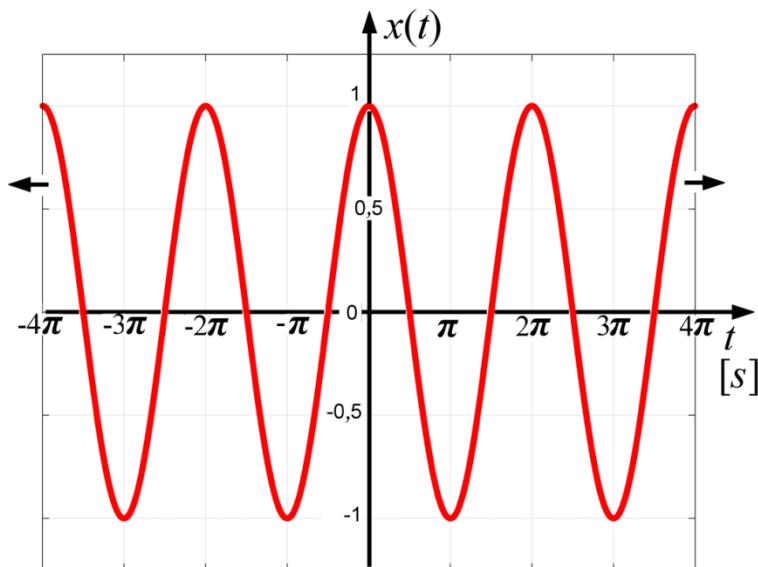
$$t \in \Re$$

$$1 = 1 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

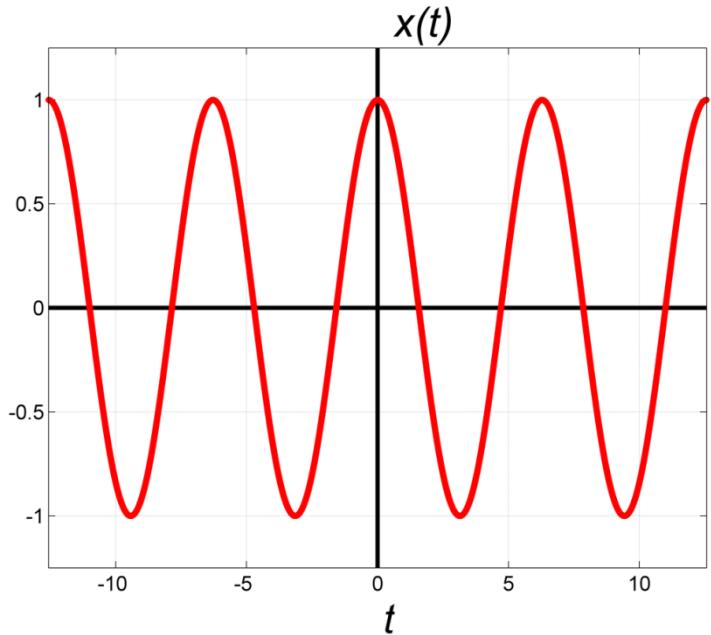
$$t = t [s]$$

# Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

## Okres kosinusoidy



**wykres dopracowany**



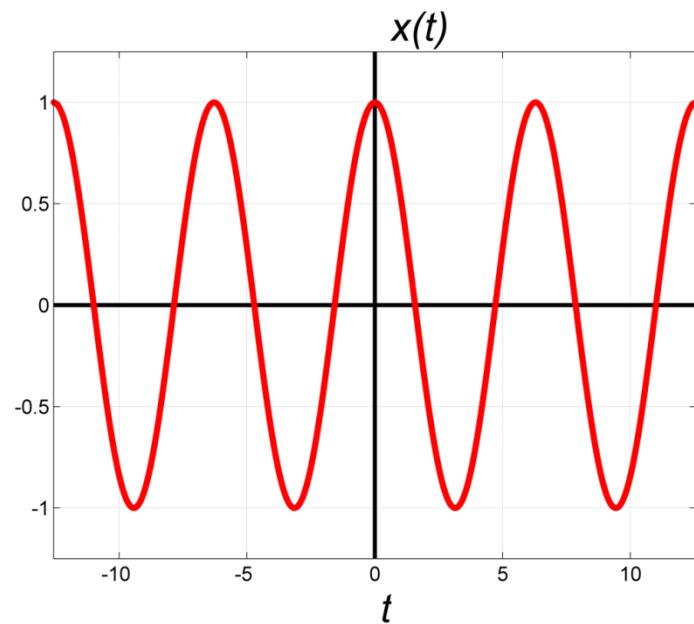
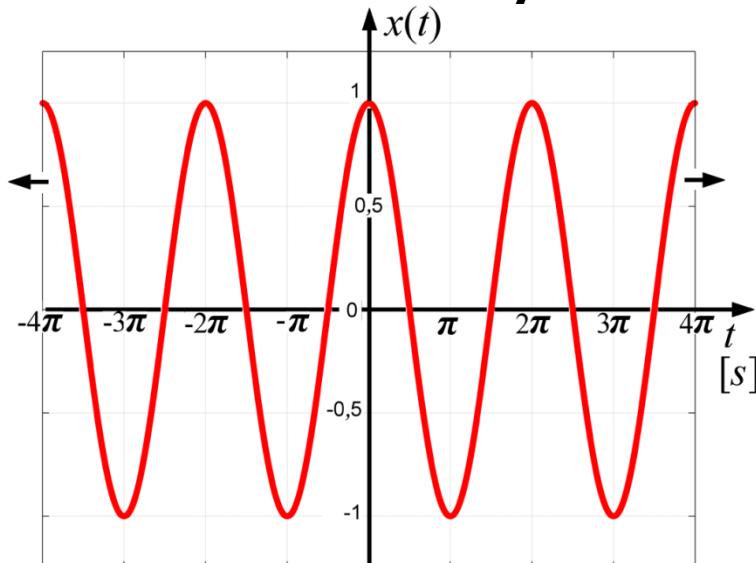
**wykres w wersji „szybkiej”**

$$x(t) = \cos(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot t\right) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T} \cdot t\right)$$

$t \in \Re$

# Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

## Częstotliwość kosinusoidy



$$x(t) = \cos(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T} \cdot t\right) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$$

$t \in \Re$

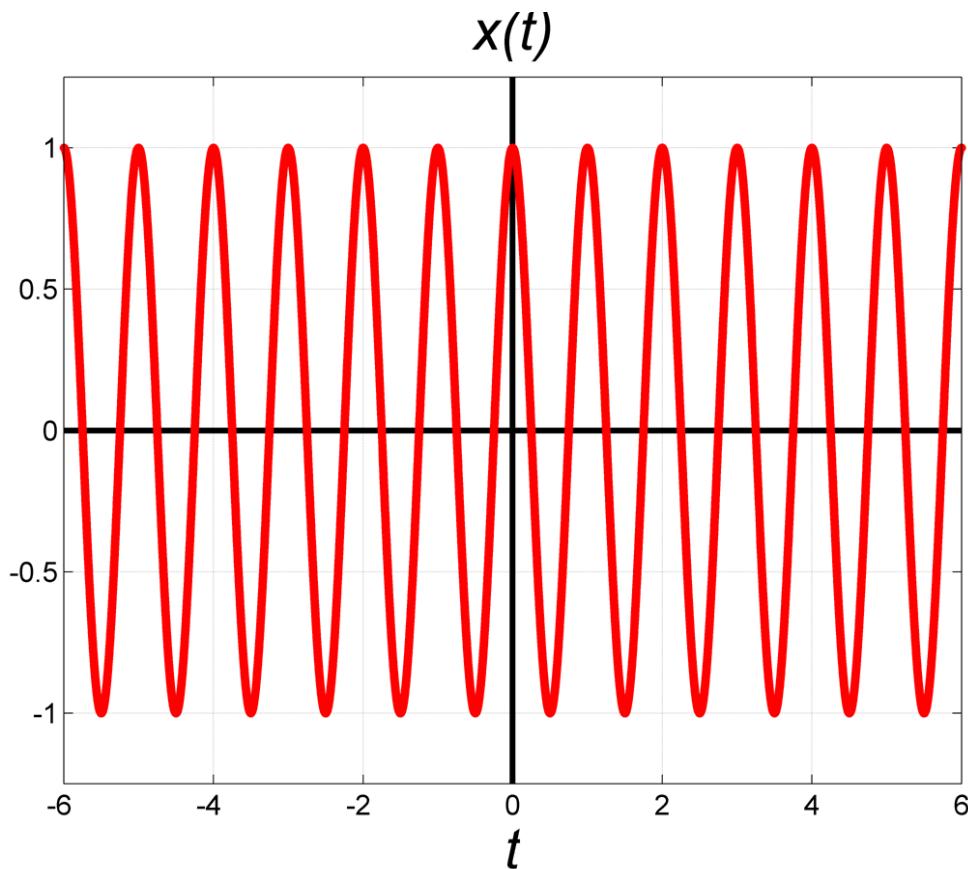
$$T = 2 \cdot \pi [s] \cong 6,28 s \cong 6,3 s$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} [Hz] \cong \frac{1}{6,3} Hz \cong 0,16 Hz$$

# Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

Okres i częstotliwość kosinusoidy - kolejny przykład



$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot t)$$
$$t \in \mathbb{R}$$

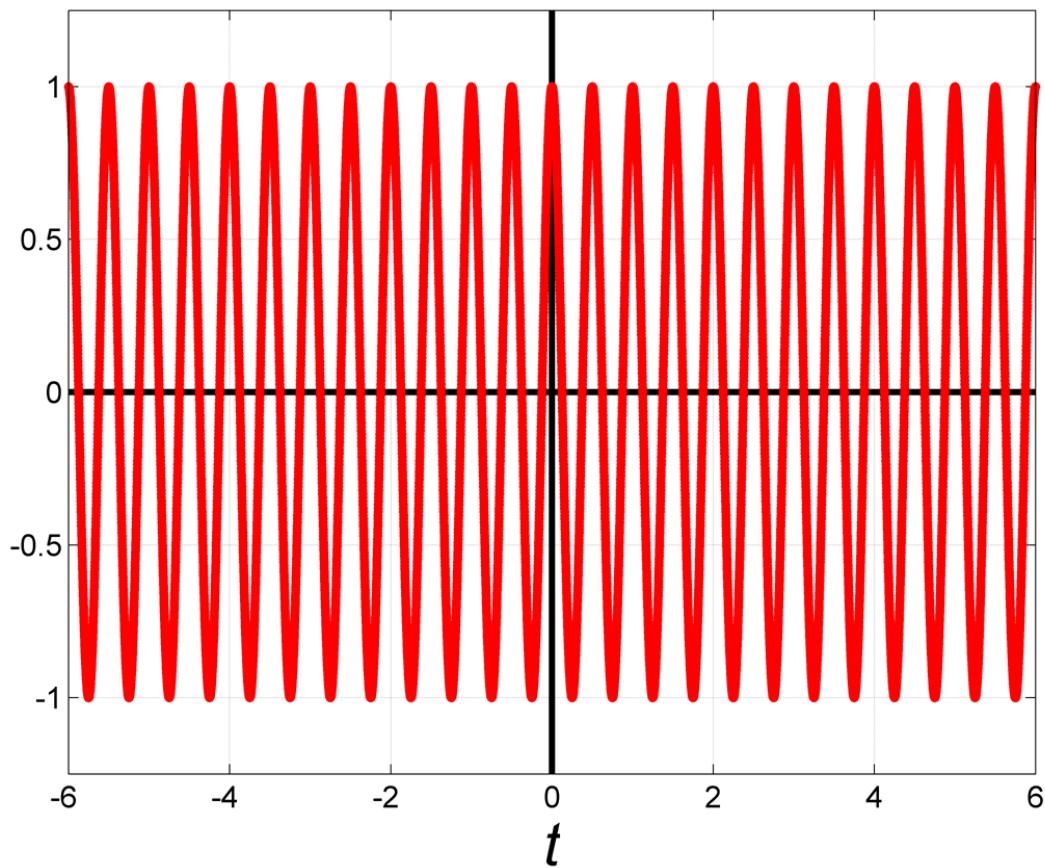
$$T = 1 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$f = 1 \text{ Hz}$$

# Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

Okres i częstotliwość kosinusoidy - kolejny przykład  
 $x(t)$



$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot t)$$
$$t \in \mathbb{R}$$

$$T = 0,5 \text{ s}$$

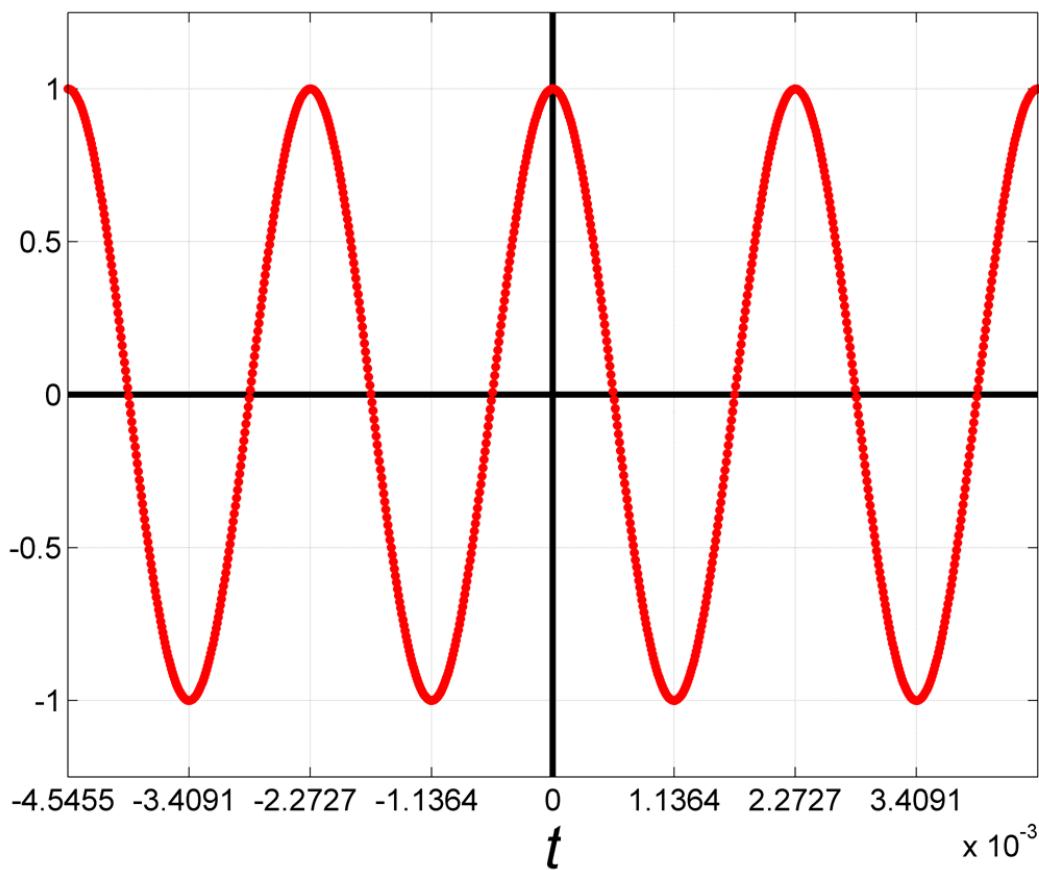
$$f = \frac{1}{T}$$

$$f = 2 \text{ Hz}$$

# Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

Okres i częstotliwość kosinusoidy - kolejny przykład

$x(t)$



$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot 440 \cdot t)$$
$$t \in \mathbb{R}$$

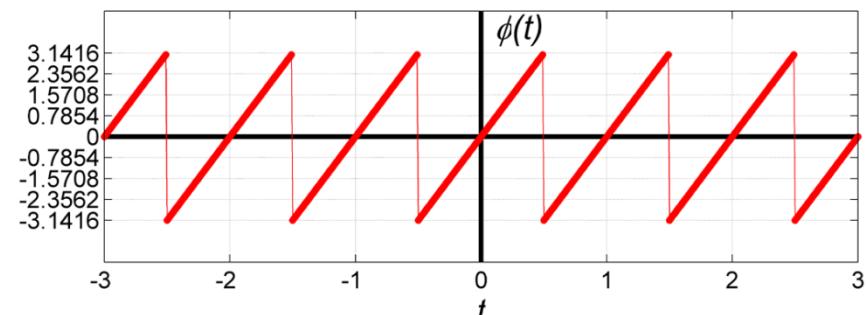
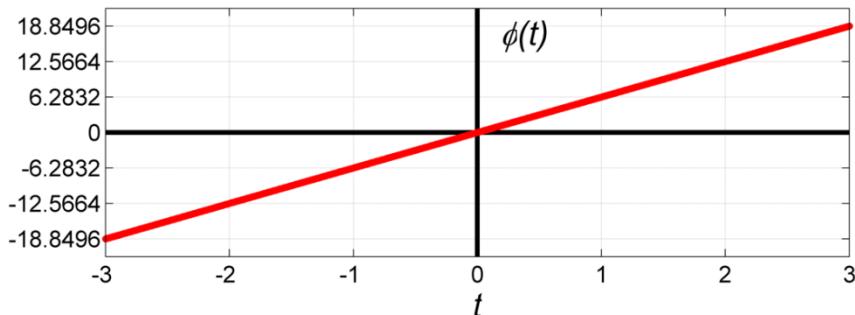
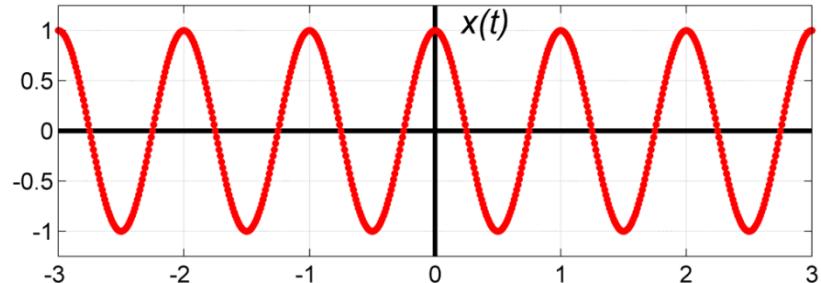
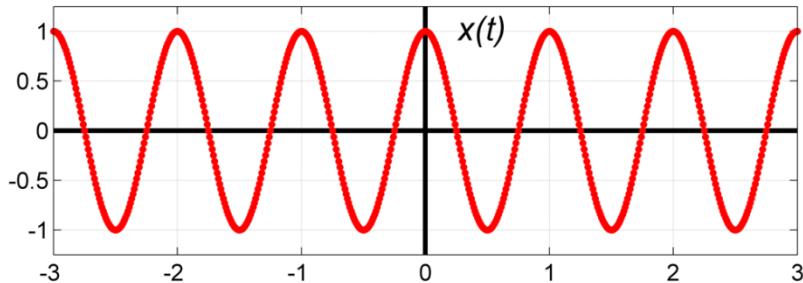
$$T = \frac{1}{440} s \cong 2,3 \text{ ms}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$f = 440 \text{ Hz} = 0,44 \text{ kHz}$$

# Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

## Funkcja fazy



$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$$

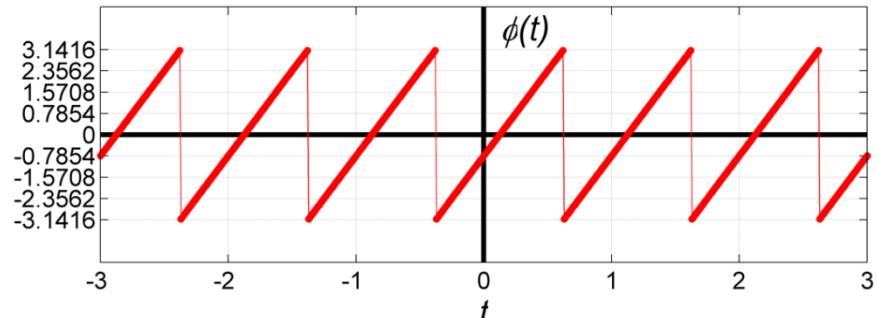
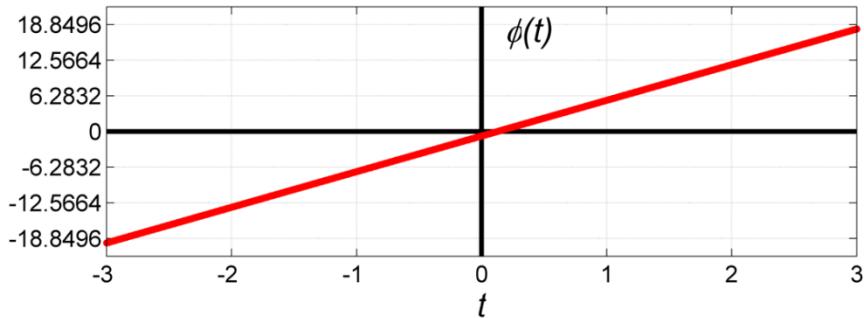
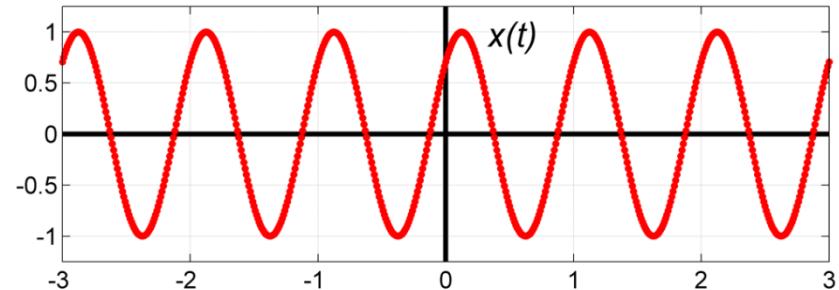
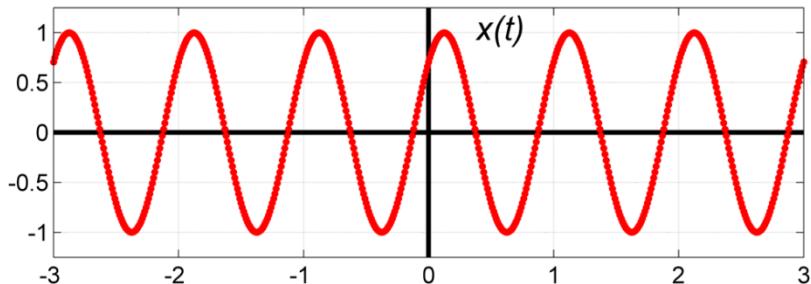
$$t \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = \cos(\phi(t))$$

$$\phi(t) = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t = \{ a = 2 \cdot \pi \cdot f \} = a \cdot t \text{ [rad]}$$

# Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

## Faza początkowa

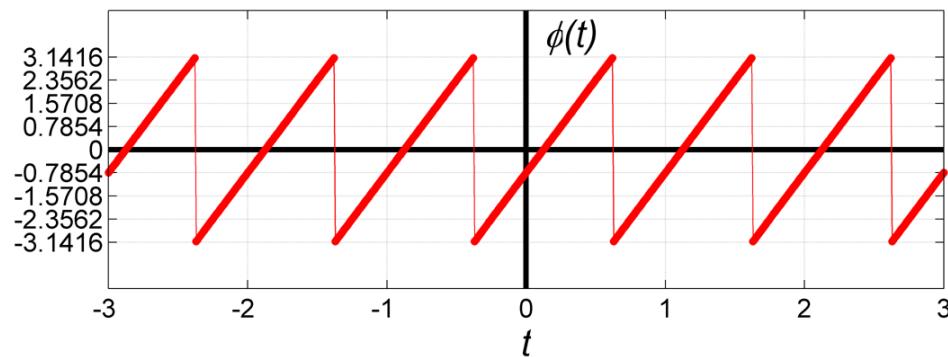
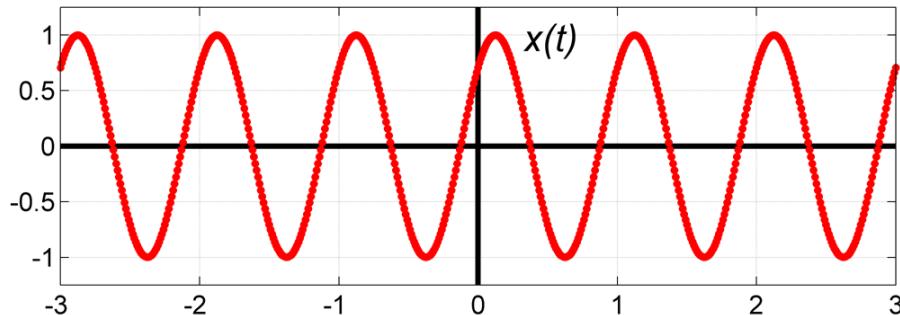


$$x(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\varphi(t) = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \frac{\pi}{4} = \begin{cases} a = 2 \cdot \pi \cdot f \\ b = -\frac{\pi}{4} \end{cases} = a \cdot t + b \text{ [rad]}$$

# Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

## Przesunięcie (opóźnienie) w dziedzinie czasu

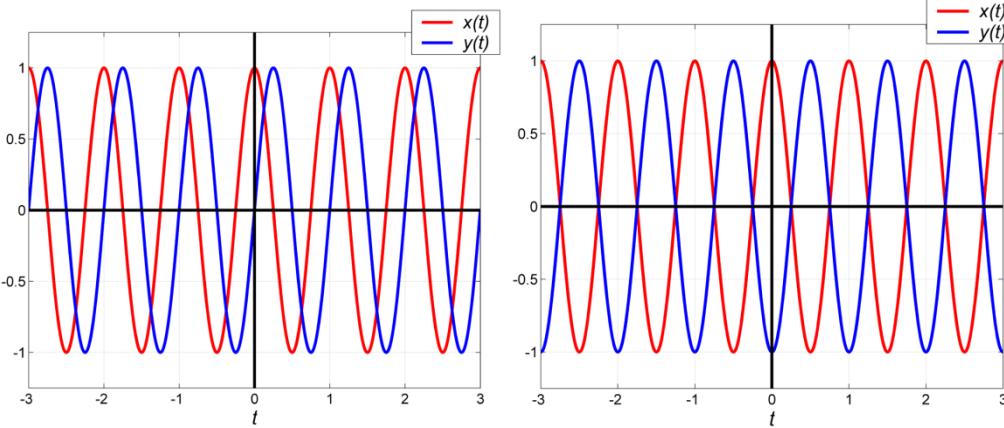


$$x(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \varphi_0\right) = \\ = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot (t - t_0)\right)$$

$$t_0 = \frac{\varphi_0}{2 \cdot \pi \cdot f} = \begin{cases} \text{w tym} \\ \text{przypadku} \end{cases} = \frac{1}{8} s$$

# Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

## Kosinus i sinus – wzajemne zależności



$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$$

$$y(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$$

$$y(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \pi) = -\cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$$

itd.

## Kosinus i sinus – ważne wartości

$$\cos(0 \text{ rad}) = \cos(0^\circ) = 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} \text{ rad}\right) = \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,87$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} \text{ rad}\right) = \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,71$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} \text{ rad}\right) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \text{ rad}\right) = \cos(90^\circ) = 0$$

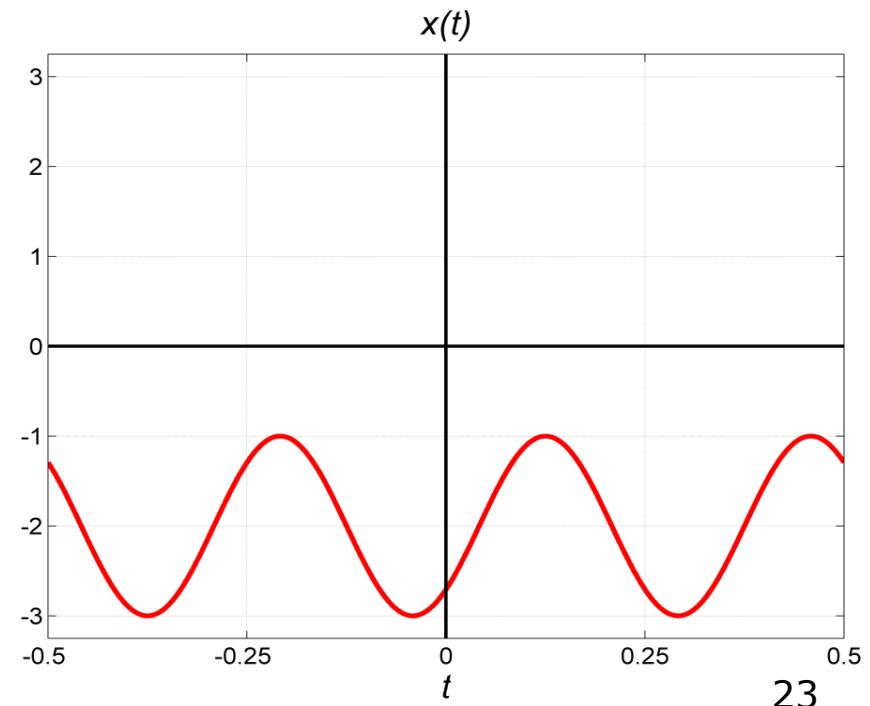
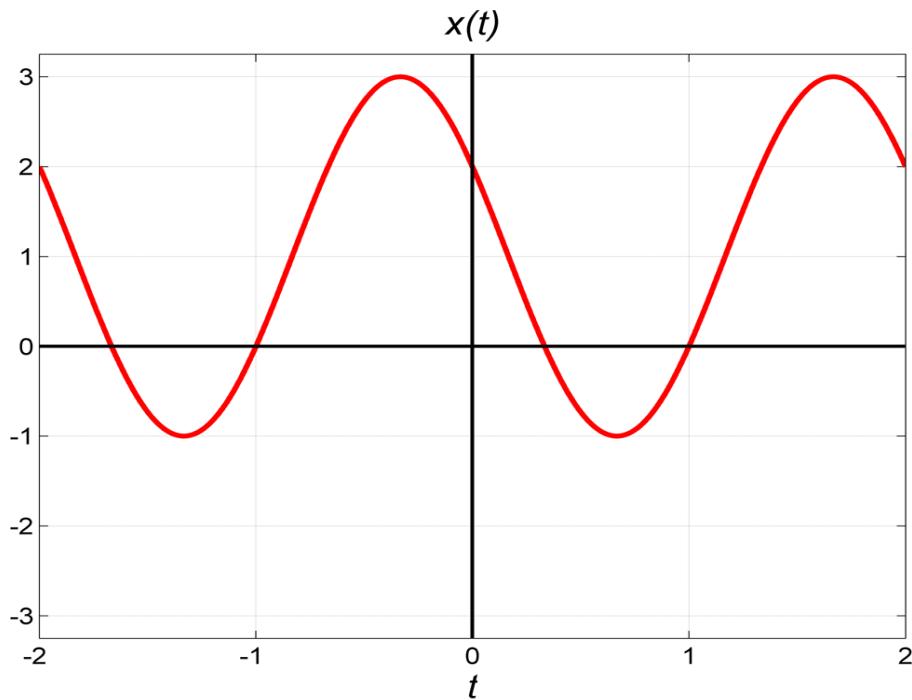
**plus: parzystość/nieparzystość, symetrie wykresu, okresowość**

# Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

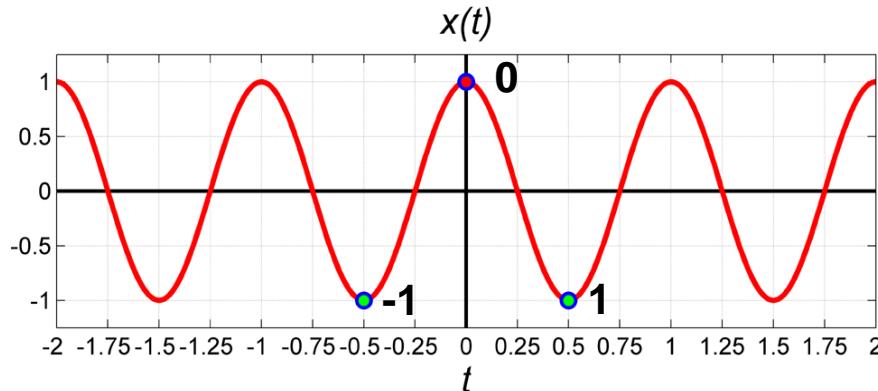
## Amplituda i składowa stała

$$x(t) = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \varphi) + B = A \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + B = A \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) + B$$

Rysowanie wykresów oraz odczytywanie parametrów sygnału z wykresu:



# Wartości sygnału kosinusoidalnego w wybranych punktach



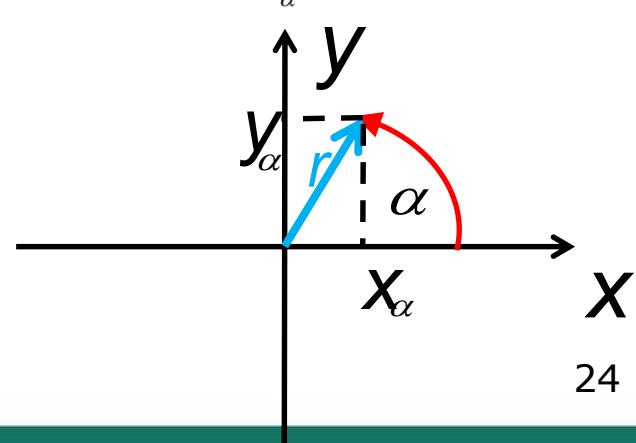
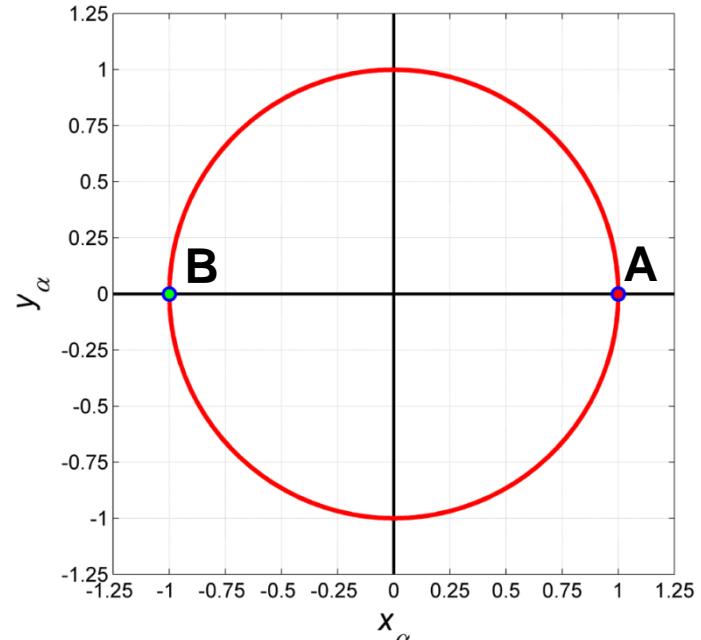
$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot t)$$

$$n \in \{-1, 0, 1\} \Leftrightarrow n = -1, 0, 1$$

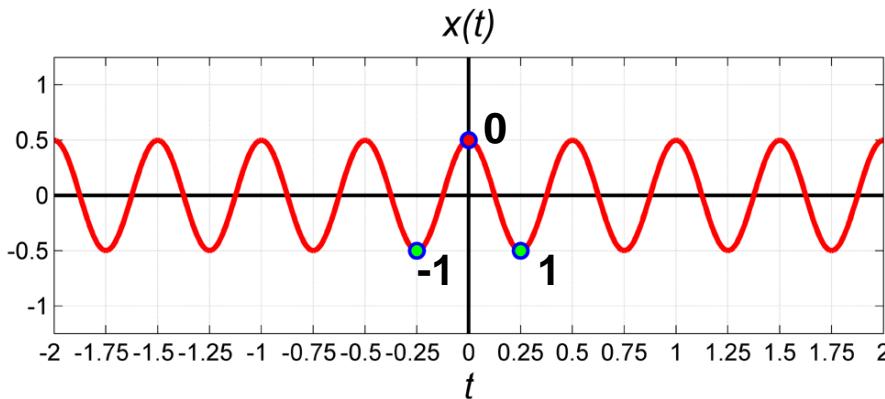
$$t_n \in \{-1/2, 0, 1/2\}$$

$$\varphi_n \in \{0, \pm \pi\}$$

$$x(t_n) \in \{-1, 1\}$$



# Wartości sygnału kosinusoidalnego w wybranych punktach



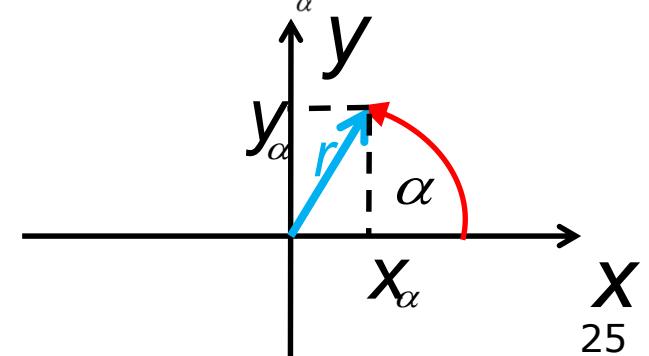
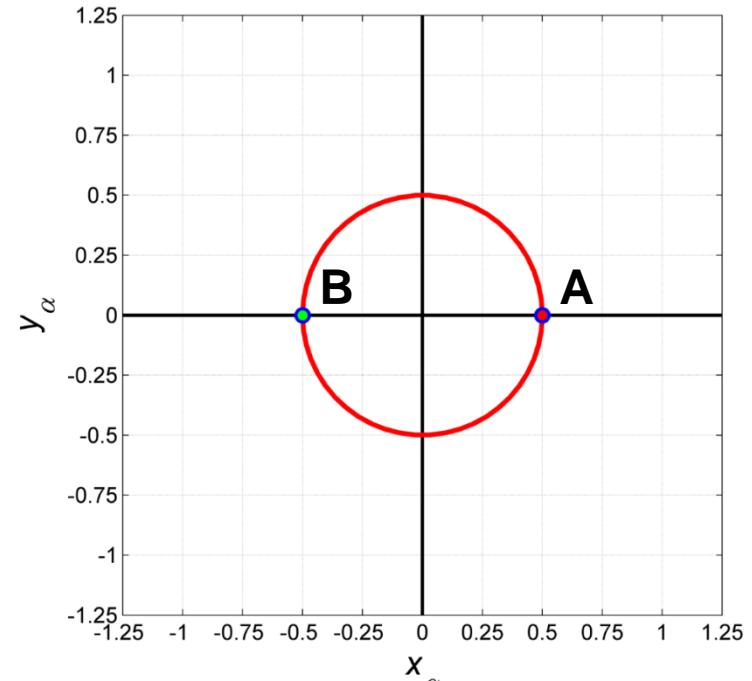
$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot t)$$

$$n \in \{-1, 0, 1\} \Leftrightarrow n = -1, 0, 1$$

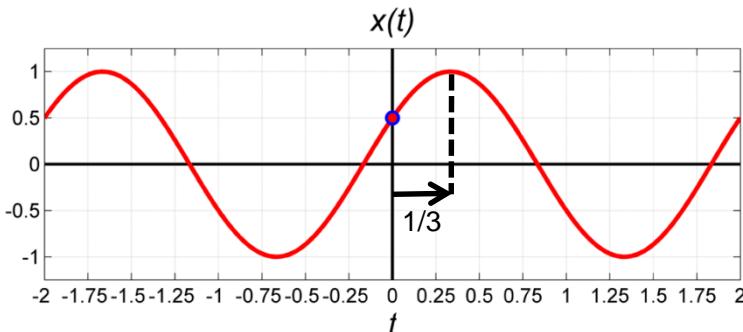
$$t_n \in \{-1/4, 0, 1/4\}$$

$$\varphi_n \in \{0, \pm \pi\}$$

$$x(t_n) \in \{-1/2, 1/2\}$$



# Wartości sygnału kosinusoidalnego w wybranych punktach

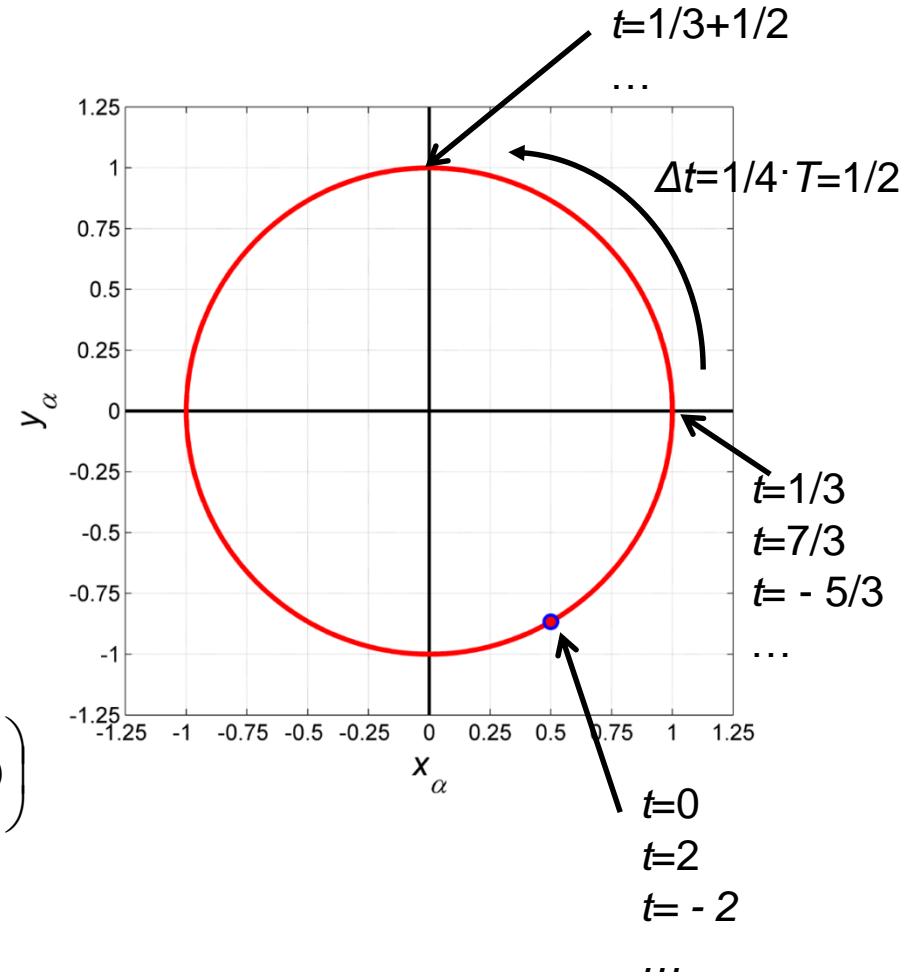


$$x(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot t - \frac{\pi}{3}\right)$$

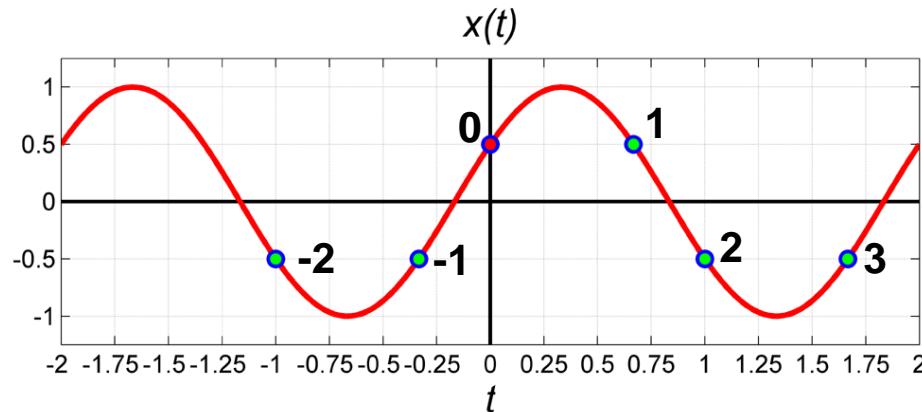
$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \Leftrightarrow T = 2$$

$$x(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot t - \varphi_0\right) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot (t - t_0)\right)$$

$$t_0 = \frac{\varphi_0}{2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{1}{3} s$$



# Wartości sygnału kosinusoidalnego w wybranych punktach



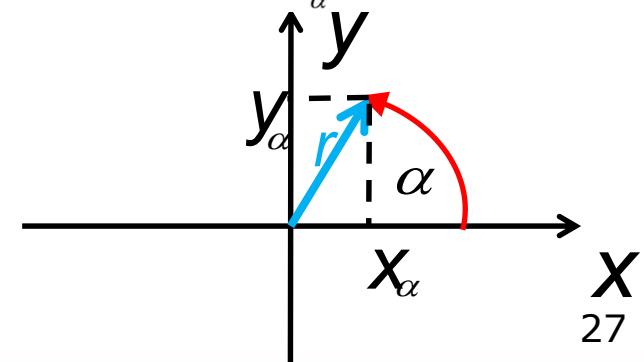
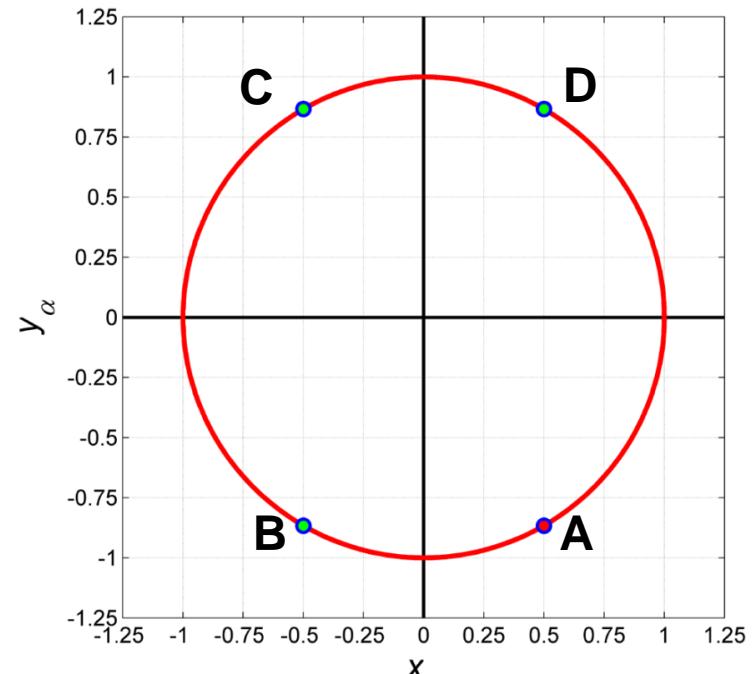
$$x(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$n \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \Leftrightarrow n = -2, -1, 0, \dots, 3$$

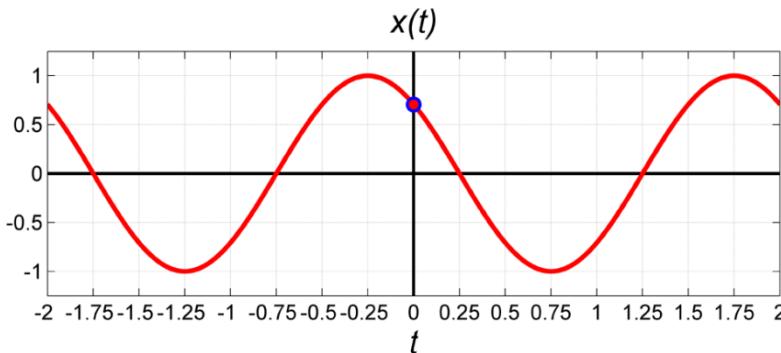
$$t_n \in \left\{-1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}\right\}$$

$$\varphi_n \in \left\{-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\} \rightarrow \left\{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$$

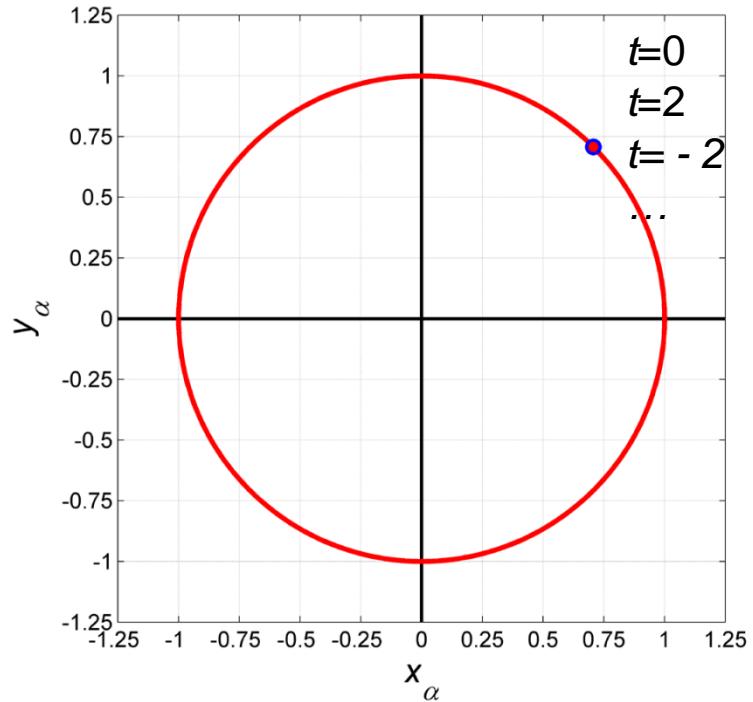
$$x(t_n) \in \{-1/2, 1/2\}$$



# Wartości sygnału kosinusoidalnego w wybranych punktach



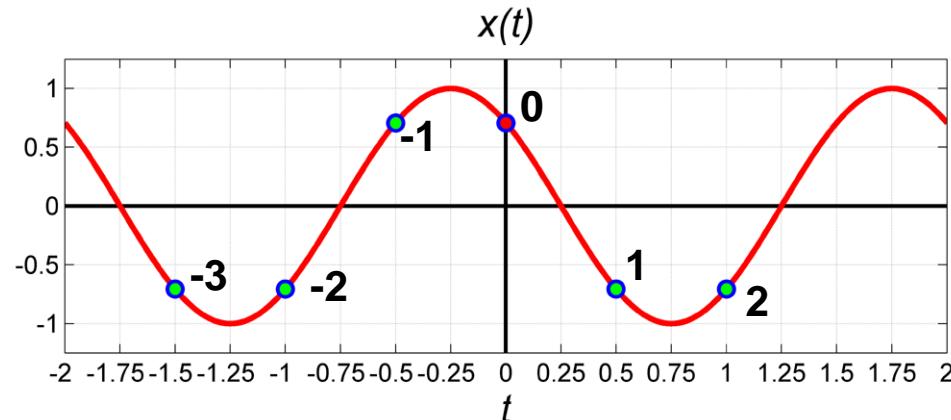
$$x(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$$



$$x(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot t - \varphi_0\right) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot (t - t_0)\right)$$

$$t_0 = \frac{\varphi_0}{2 \cdot \pi \cdot f} = -\frac{1}{4} s$$

# Wartości sygnału kosinusoidalnego w wybranych punktach



$$x(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$$

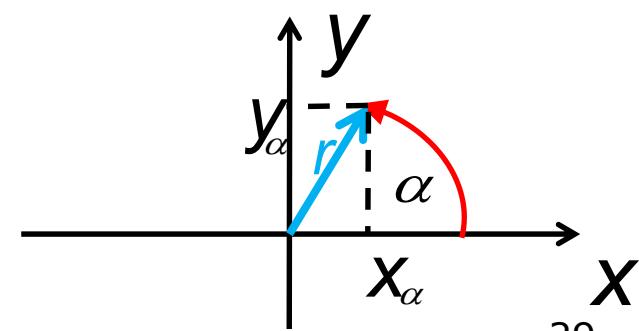
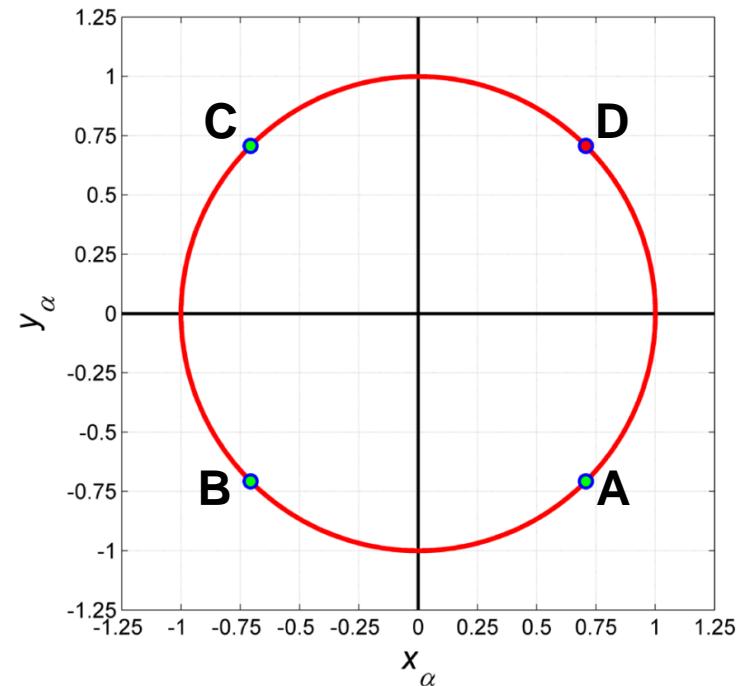
$$n \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\} \Leftrightarrow n = -3, -2, -1, \dots, 2$$

$$t_n \in \left\{ -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

$$\varphi_n \in \left\{ -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\} \rightarrow \left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$$

$$x(t_n) \in \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

Czy w tym przypadku odstęp między próbками na osi czasu jest stały?



# Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

Inna „częstotliwość”:

Dlaczego teraz jest  $f_0$ , a nie  $f$ ?

$$x(t) = A_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \varphi_0) = A_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t - \varphi_0) \quad : \quad \omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_0$$

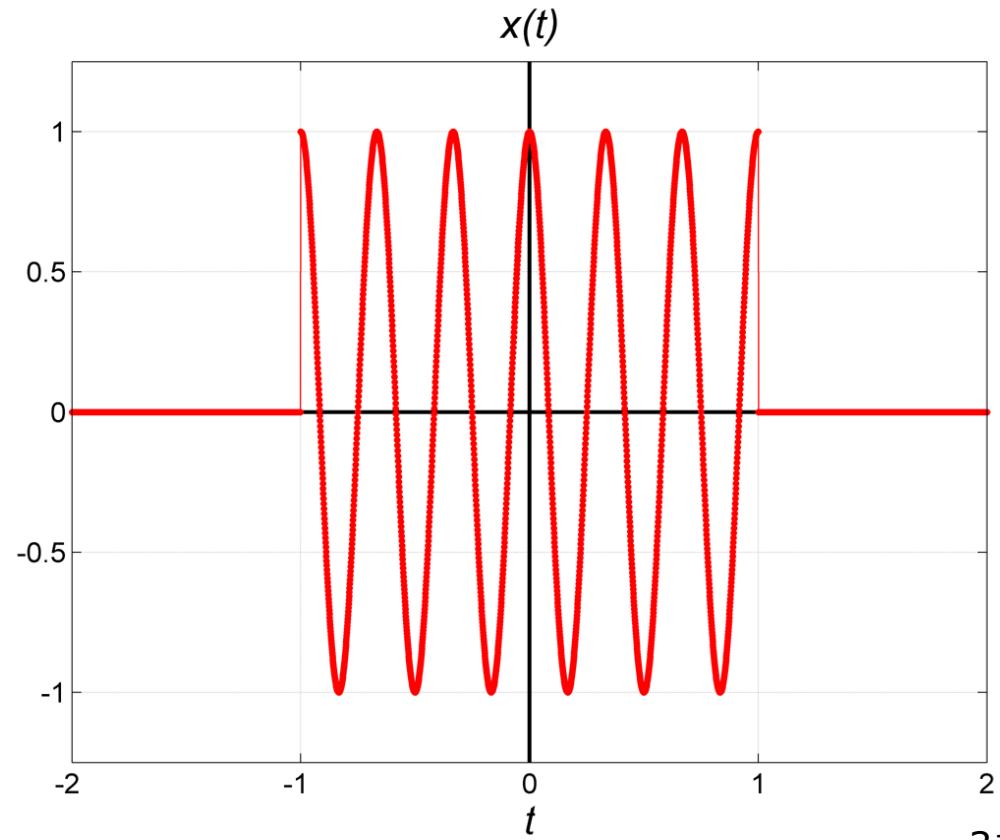
$$[\omega_0] = \text{rad} / \text{s} \quad (\text{ale tylko, gdy } t \text{ jest w sekundach!})$$

$f$  - częstotliwość, bez dodatkowych określeń (ang. frequency)

$\omega$  - pulsacja lub częstotliwość kołowa/kątowa/promieniowa (ang. circular/angular/radial)

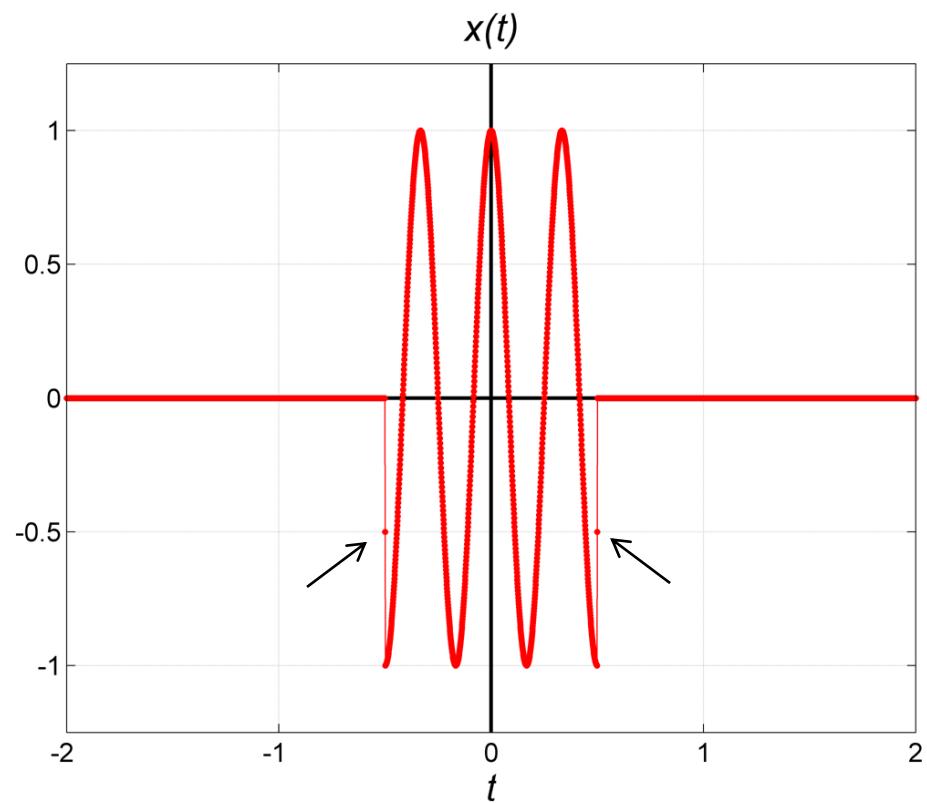
## „Prawdziwy” sygnał kosinusoidalny

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t) & \text{dla } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{dla } t \notin [-1,1] \end{cases}$$



# „Prawdziwy” sygnał kosinusoidalny

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t) & \text{dla } t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t) & \text{dla } |t| = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{dla } t \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$



# „Prawdziwy” sygnał kosinusoidalny i sygnał prostokątny

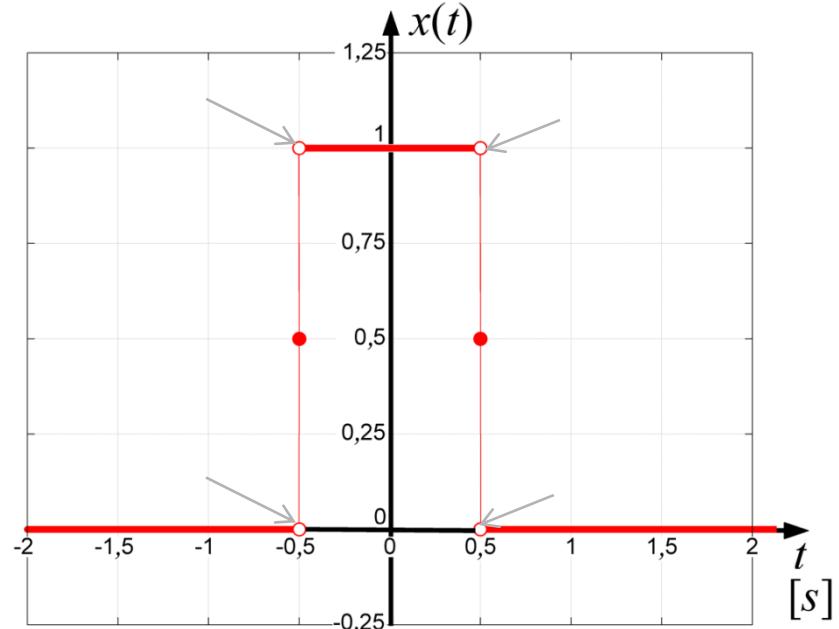
## Użyteczny zapis

$$x(t) = \Pi(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t)$$

gdzie

**Wersja dokładna**

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |t| < 1/2 \\ 1/2 & \text{dla } |t| = 1/2 \\ 0 & \text{dla } |t| > 1/2 \end{cases}$$



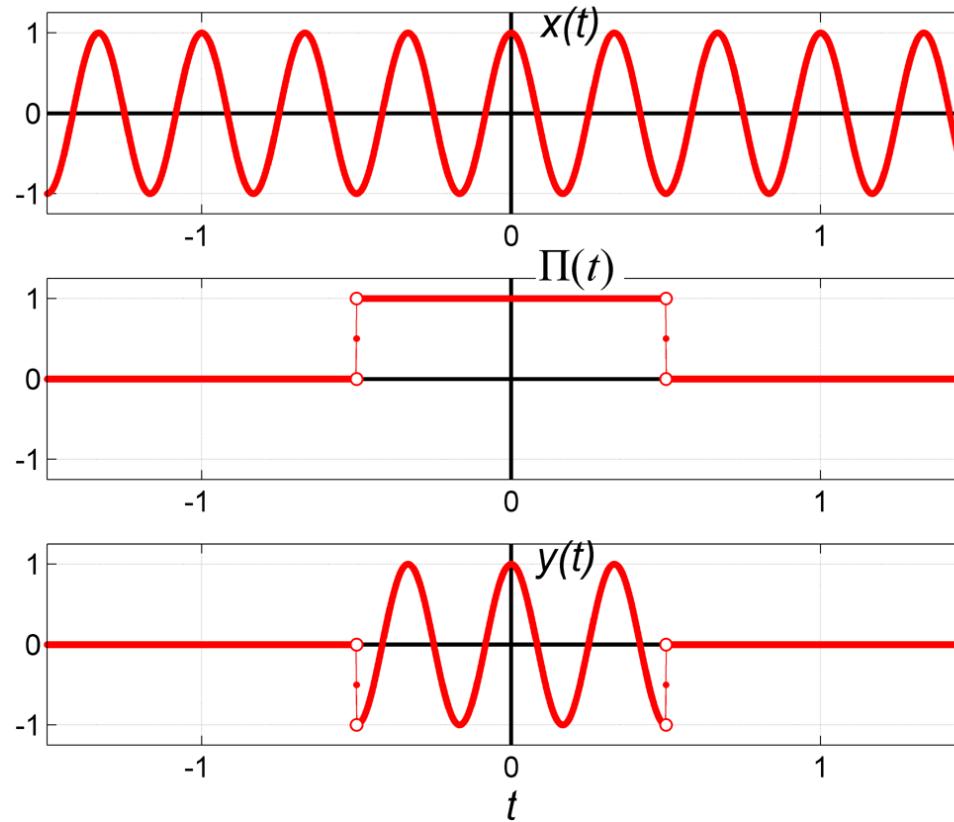
**W wersji uproszczonej wartości w punktach „przeskoków” przyjmujemy dowolnie.**

Uwaga – proszę nie mylić nazwy sygnału (duże pi:  $\Pi = \Pi(t)$ ) z wartością liczbową (małe pi:  $\pi=3,14\dots$ )

# „Prawdziwy” sygnał kosinusoidalny i sygnał prostokątny

$$y(t) = \Pi(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot t)$$

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot t)$$



# Przekształcenia sygnałów (funkcji)

a) zmiana skali wartości:  
(amplitudy)

$$x_1(t) = c \cdot x(t)$$

b) odwrócenie osi czasu:

$$x_2(t) = x(-t)$$

c) opóźnienie na osi czasu:

$$x_3(t) = x(t - t_d)$$

d) odwrócenie osi, a potem opóźnienie:

$$x_4(t) = x(-(t - t_d))$$

$$x(t) \xrightarrow{krok\ 1} x(-t) \xrightarrow{krok\ 2} x(-(t - t_d))$$

e) opóźnienie, a potem odwrócenie osi:

$$x_5(t) = x((-t) - t_d)$$

$$x(t) \xrightarrow{krok\ 1} x(t - t_d) \xrightarrow{krok\ 2} x((-t) - t_d)$$

f) zmiana skali osi czasu:

$$x_6(t) = x(c \cdot t) \quad : \quad c \neq 0$$

itd.

Jak pokazać te efekty na wykresach?

# Skalowanie sygnału i przesuwanie wzdłuż osi t

$$x(t) \rightarrow y(t) = a \cdot x(b \cdot t - c) = a \cdot x(b \cdot (t - c/b))$$

**Po przekształceniu wykres funkcji (sygnału):**

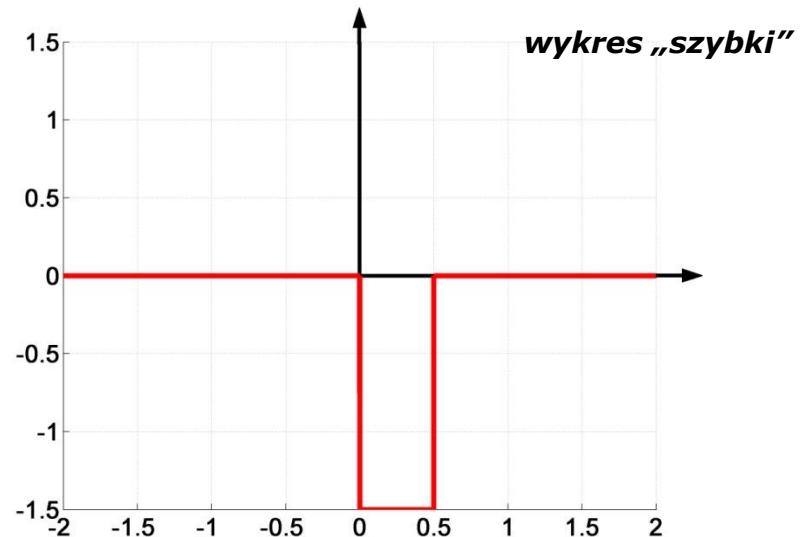
- 1) rozciąga się w pionie  $a$ -krotnie, gdy  $a$  jest ujemne, to ulega obróceniu wokół osi  $t$ ;
- 2) „ścisła” się w poziomie  $b$ -krotnie, gdy  $b$  jest ujemne, to ponadto odwracamy wykres nad osią  $t$ ;
- 3) punkt, który pierwotnie odpowiadał  $t=0$ , po przekształceniu odpowiada  $t=c/b$ .

**Na przykładzie impulsu prostokątnego:**

$$y(t) = a \cdot \Pi(b \cdot t - c) = a \cdot \Pi(b \cdot (t - c/b))$$

**dla konkretnych wartości:**

$$a = -1,5; \quad b = 2; \quad c = 0,5$$



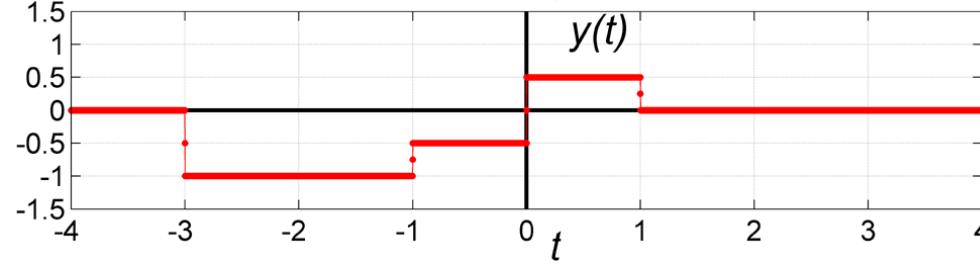
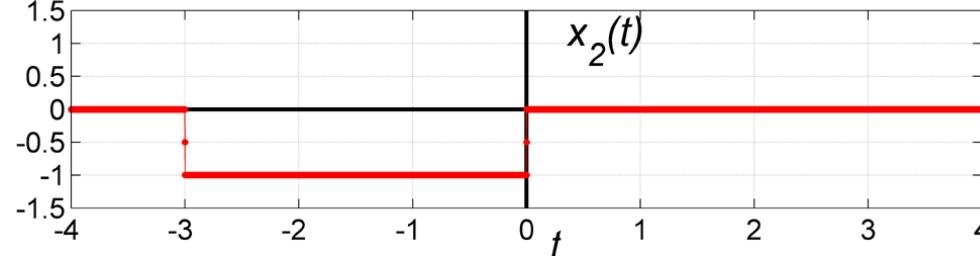
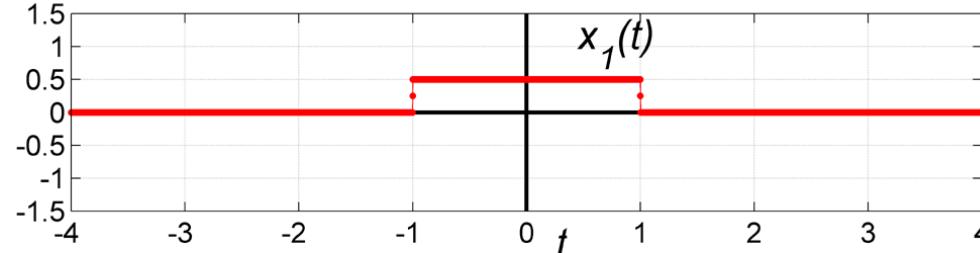
# Operacje na sygnałach – dodawanie graficzne

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \cdot \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$x_2(t) = -\Pi\left(\frac{t + 3/2}{3}\right)$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$t \in \Re$$



$$y(t) = -\Pi\left(\frac{t + 2}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \Pi\left(t + 1/2\right) + \frac{1}{2} \cdot \Pi\left(t - 1/2\right)$$

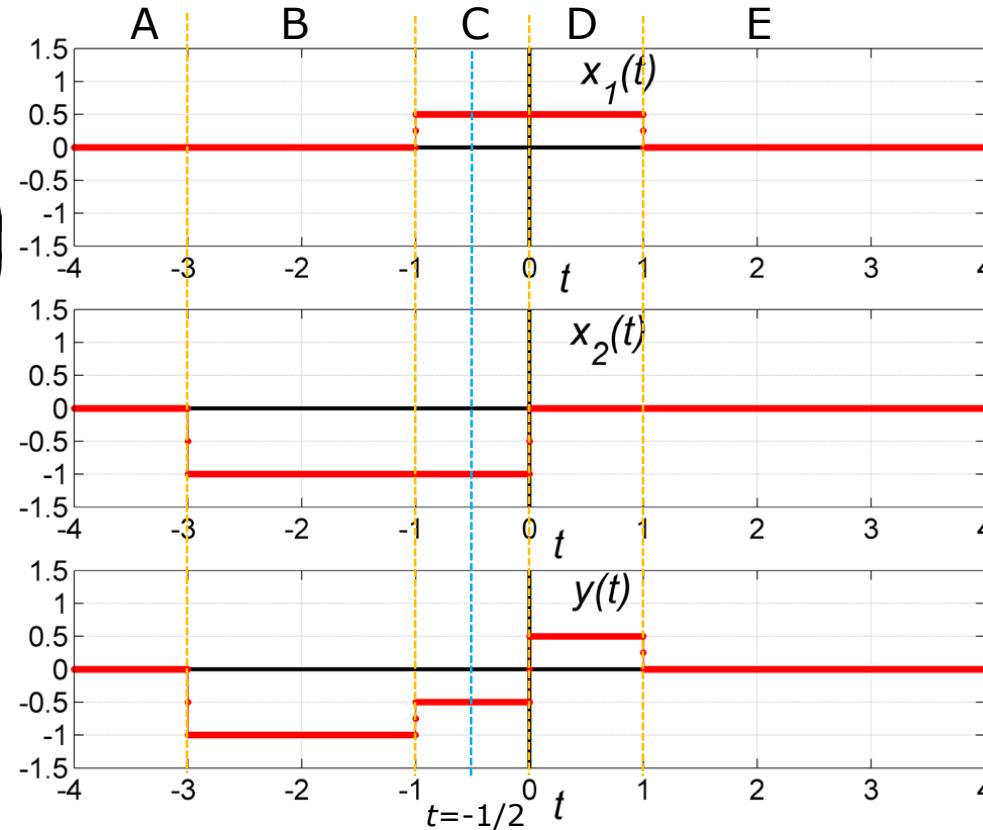
# Operacje na sygnałach – dodawanie graficzne

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \cdot \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$x_2(t) = -\Pi\left(\frac{t+3/2}{3}\right)$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$t \in \Re$$



A:  $t \in (-\infty, -3)$

B:  $t \in (-3, -1)$

C:  $t \in (-1, 0)$

D:  $t \in (0, 1)$

E:  $t \in (1, +\infty)$

$$y(t) = -\Pi\left(\frac{t+2}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \Pi\left(t+1/2\right) + \frac{1}{2} \cdot \Pi\left(t-1/2\right)$$

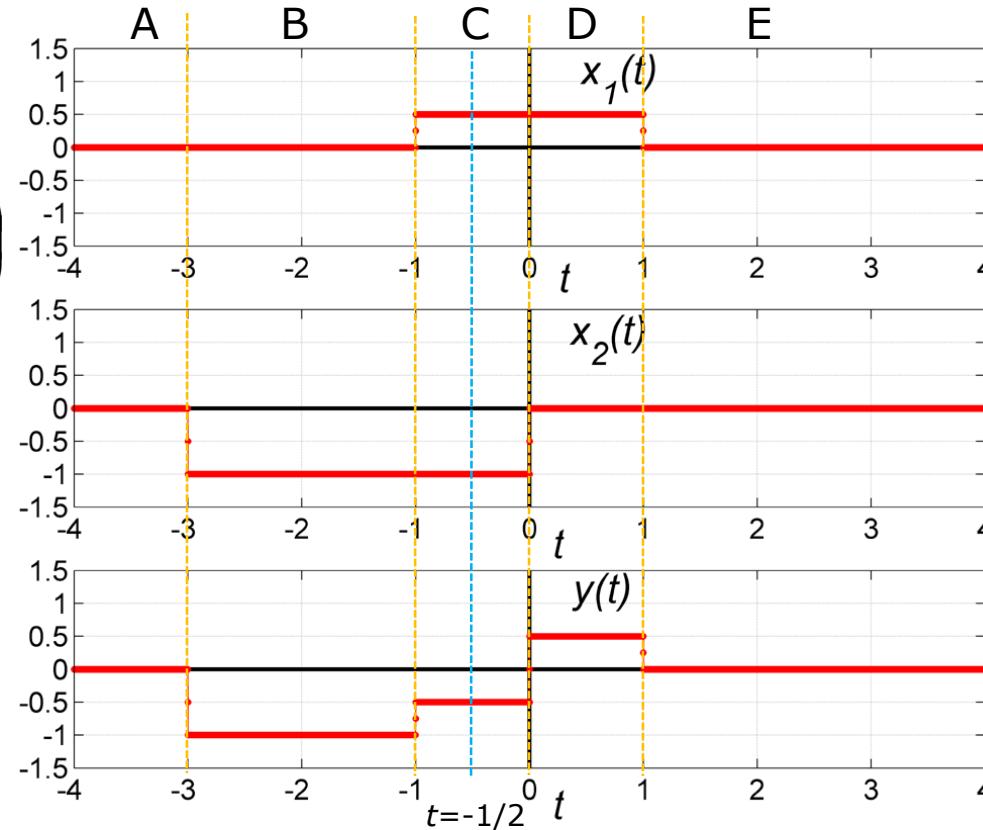
# Operacje na sygnałach – dodawanie graficzne

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \cdot \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$x_2(t) = -\Pi\left(\frac{t+3/2}{3}\right)$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$t \in \mathfrak{R}$$



A:  $t \in (-\infty, -3)$

B:  $t \in (-3, -1)$

C:  $t \in (-1, 0)$

D:  $t \in (0, 1)$

E:  $t \in (1, +\infty)$

$t$	B	C	D
$x_1(t)$	0	$1/2$	$1/2$
$x_2(t)$	-1	-1	0
$y(t)$	-1	$-1/2$	$1/2$

$$y(t) = -\Pi\left(\frac{t+2}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \Pi\left(t+1/2\right) + \frac{1}{2} \cdot \Pi\left(t-1/2\right)$$

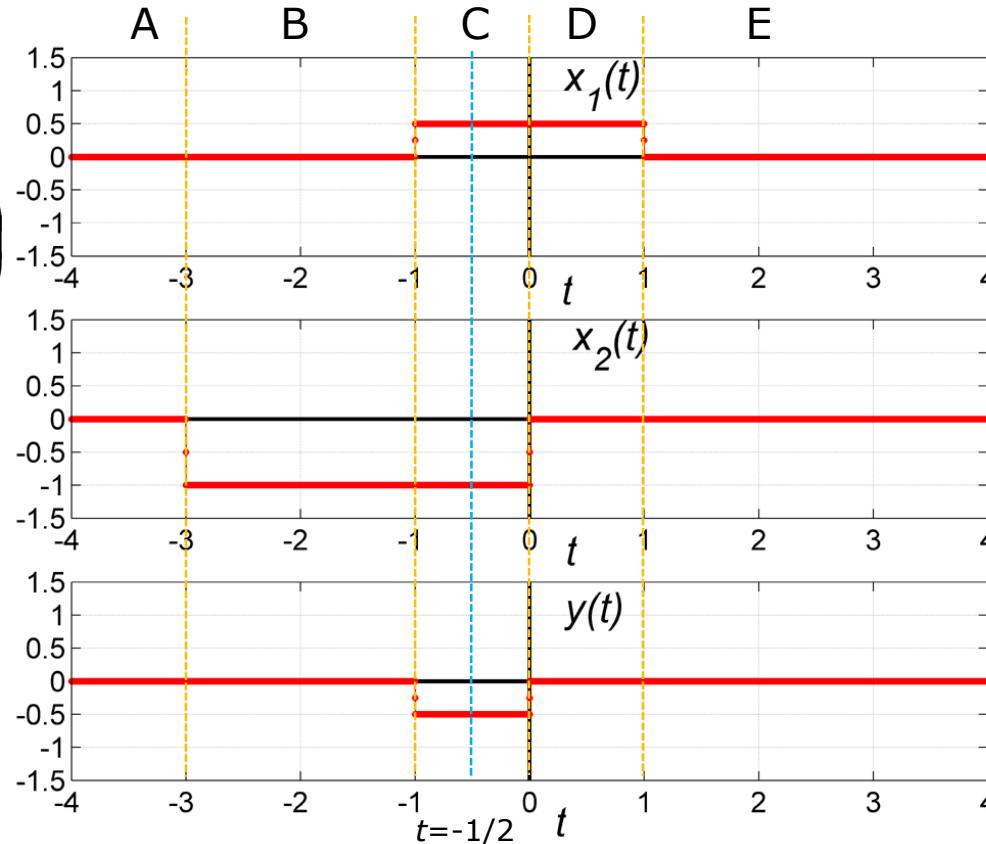
# Operacje na sygnałach – mnożenie graficzne

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \cdot \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$x_2(t) = -\Pi\left(\frac{t+3/2}{3}\right)$$

$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$$

$$t \in \mathfrak{R}$$



- A:  $t \in (-\infty, -3)$
- B:  $t \in (-3, -1)$
- C:  $t \in (-1, 0)$
- D:  $t \in (0, 1)$
- E:  $t \in (1, +\infty)$

$t$	B	C	D
$x_1(t)$	0	1/2	1/2
$x_2(t)$	-1	-1	0
$y(t)$	0	-1/2	0

$$y(t) = -\frac{1}{2} \cdot \Pi\left(t + 1/2\right)$$

# Sygnał schodkowy (model sygnału)

**Skonstruowany z odpowiednio przekształconych sygnałów elementarnych:**

$$x_0(t) = \Pi(t)$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^N c_n \cdot x_0\left(\frac{t-t_n}{T_n}\right)$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^N c_n \cdot \Pi\left(\frac{t-t_n}{T_n}\right)$$

**Niekiedy wygodnie jest podać zestaw parametrów opisujących taki sygnał w postaci tabelki, np. :**

$n$	$c_n$	$t_n$	$T_n$
1	1	-1	2
2	-2	2	3
3	2	4	1/2

**Jaki jest wykres tego przykładowego sygnału  $x(t)$ ?**

# Kolejny model sygnału

**Jak usłyszelibyśmy taki sygnał**

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t - 5/2}{5}\right) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 400 \cdot t) + \Pi\left(\frac{t - 13/2}{3}\right) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 800 \cdot t)$$

?

# Przybliżenie (aproksymacja) sygnału sygnałem schodkowym

$$\Delta t = \text{const}$$
$$t_n = n \cdot \Delta t$$

$$x_n = x(n \cdot \Delta t)$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cdot \Pi\left(\frac{t - t_n}{\Delta t}\right)$$

**Może nas także interesować sygnał określony tylko na pewnym odcinku osi czasu:**

$$y(t) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x_n \cdot \Pi\left(\frac{t - t_n}{\Delta t}\right)$$

**Jak to pokazać na wykresach?**

# Parzystość oraz nieparzystość funkcji

$$x(t) = x_{parz}(t) + x_{niep}(t)$$

**U nas zwykle dla rzeczywistej dziedziny,  
ale może być i inna (były symetryczna względem zera!).**

$$x_{parz}(t) = \frac{1}{2} \cdot [x(t) + x(-t)]$$

$$x_{niep}(t) = \frac{1}{2} \cdot [x(t) - x(-t)]$$

**Obserwacyjnie:  
odpowiednia symetria wykresu.**

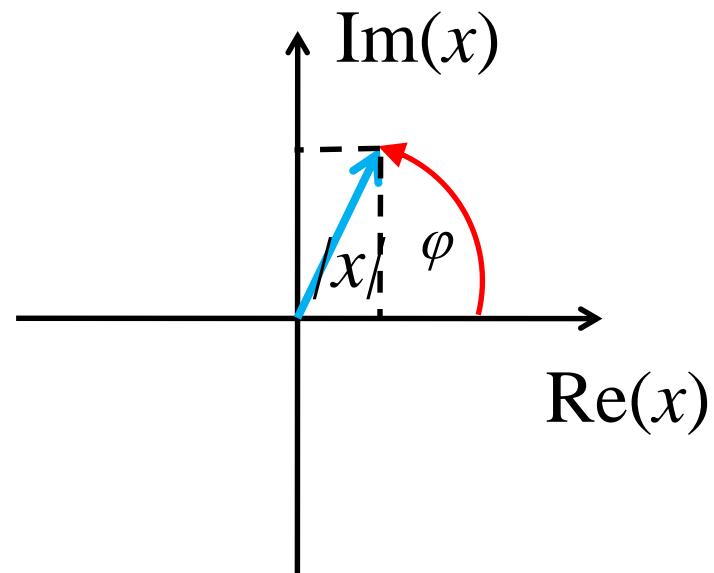
# Liczby zespolone

**Część rzeczywista i urojona:**

$$x \in C \Leftrightarrow x = a + j \cdot b : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}$$

$$a = \operatorname{Re}(x); b = \operatorname{Im}(x)$$

$$j = i : j^2 = -1$$



**Moduł i faza:**

$$x = a + j \cdot b = |x| \cdot e^{j \cdot \varphi(x)} : |x| \in \mathbb{R}_{0+} \wedge \varphi(x) \in \mathbb{R}$$

$$e = 2,7183\dots$$

**Okresowość fazy:**

$$e^{j \cdot \varphi} = e^{j \cdot (\varphi + 2k\pi)}$$

**ponieważ**

$$e^{j \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$$

$$|e^{j \cdot \varphi}| = 1$$

# Funkcje zespolone (tu: od zmiennej $t$ )

**Część rzeczywista i urojona:**

$$x(t) \in C \iff x(t) = a(t) + j \cdot b(t): a(t) \in \mathbb{R} \wedge b(t) \in \mathbb{R}$$

$$a(t) = \operatorname{Re}(x(t)); b(t) = \operatorname{Im}(x(t))$$

$$j = i : j^2 = -1$$

**Moduł i faza:**

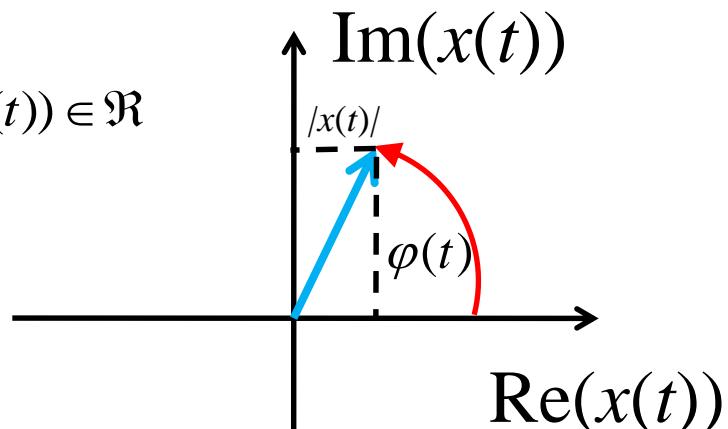
$$x(t) = a(t) + j \cdot b(t) = |x(t)| \cdot e^{j \cdot \varphi(x(t))}: |x(t)| \in \mathbb{R}_{0+} \wedge \varphi(x(t)) \in \mathbb{R}$$

**Okresowość fazy:**

$$e^{j \cdot \varphi(t)} = e^{j \cdot (\varphi(t) + 2 \cdot k \cdot \pi)}$$

**ponieważ**

$$e^{j \cdot \varphi(t)} = \cos(\varphi(t)) + j \cdot \sin(\varphi(t))$$



# Liczby i funkcje zespolone

Przeliczanie między wersjami opisu:

$$|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = |x| \cdot \cos(\varphi(x))$$

$$b = |x| \cdot \sin(\varphi(x))$$

$$\varphi(x) = \operatorname{atg}_\pi(x) = \operatorname{atg}_\pi(a, b)$$

---

$$|x(t)| = \sqrt{a(t)^2 + b(t)^2}$$

$$a(t) = |x(t)| \cdot \cos(\varphi(x(t)))$$

$$\varphi(x(t)) = \operatorname{atg}_\pi(x(t)) = \operatorname{atg}_\pi(a(t), b(t))$$

$$b(t) = |x(t)| \cdot \sin(\varphi(x(t)))$$

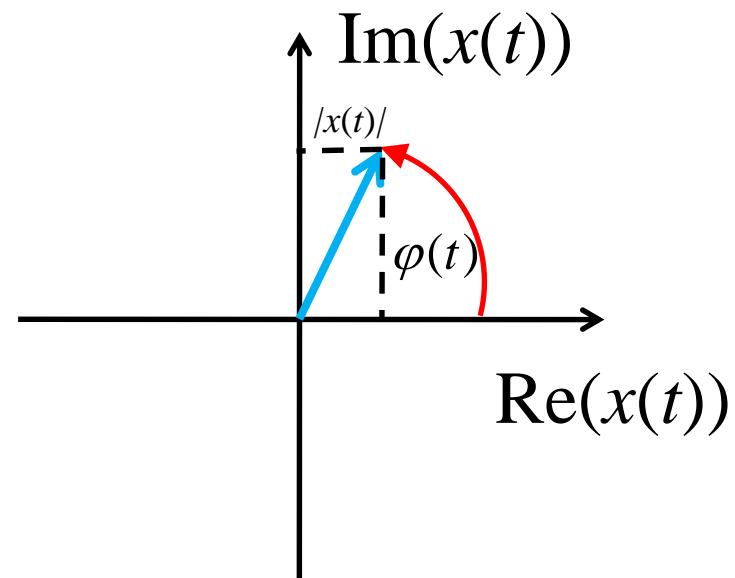
1. Dlaczego nie jest poprawne stosowanie zwykłego arcus tangensa?
2. Gdzie można napotkać wzór ze zwykłym atg? (ang.: atan)

# Powtórka z liczb zespolonych

**Arcus tangens 4-ćwiartkowy**

$$\operatorname{atg}_\pi(a, b) = \begin{cases} \operatorname{atg}\left(\frac{b}{a}\right) & \text{dla } a > 0 \\ \operatorname{atg}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{dla } a < 0 \wedge b \geq 0 \\ \operatorname{atg}\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{dla } a < 0 \wedge b < 0 \\ +\pi/2 & \text{dla } a = 0 \wedge b > 0 \\ -\pi/2 & \text{dla } a = 0 \wedge b < 0 \\ ? & \text{dla } a = 0 \wedge b = 0 \end{cases}$$

$x = a + j \cdot b$   
 $a = \operatorname{Re}(x); b = \operatorname{Im}(x)$



# Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

$$j^2 = -1$$

## Wzory Eulera

dla liczb

$$e^{j\cdot\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{j\cdot\varphi} + e^{-j\cdot\varphi}}{2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{j\cdot\varphi} - e^{-j\cdot\varphi}}{2 \cdot j}$$

dla funkcji

$$e^{j\cdot\varphi(t)} = \cos(\varphi(t)) + j \cdot \sin(\varphi(t))$$

$$\cos(\varphi(t)) = \frac{e^{j\cdot\varphi(t)} + e^{-j\cdot\varphi(t)}}{2}$$

$$\sin(\varphi(t)) = \frac{e^{j\cdot\varphi(t)} - e^{-j\cdot\varphi(t)}}{2 \cdot j}$$

# Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

## Małe przypomnienie

### Szereg potęgowy - McLaurina

$$x(t) = x(0) + \frac{x^{(1)}(t)}{1!} \cdot t^1 + \frac{x^{(2)}(t)}{2!} \cdot t^2 + \frac{x^{(3)}(t)}{3!} \cdot t^3 + \dots$$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{(n)}(t)}{n!} \cdot t^n$$

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} - \dots$$

$$\sin(\varphi) = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^9}{9!} - \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

**Ćw.: proszę zapisać te wzory z użyciem symbolu sumy.**

### Małe ćwiczenie na rozgrzewkę (z szeregow)

1. Proszę sprawdzić jedynkę trygonometryczną.
2. Proszę sprawdzić wzory Eulera.
3. Proszę sprawdzić wzory zastępcze dla:

$$\cos(2 \cdot \alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{\cos(\alpha/2) + 1}{2}$$

$$\sin(2 \cdot \alpha) = \dots$$

$$\sin^2(\alpha) = \dots$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \dots$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \dots$$

itd.

**A następnie punkty 1 i 3, ale ze wzorów Eulera.**

# Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

## Dygresja pomocnicza

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2 + a_3) \cdot (b_1 + b_2 + b_3) = \\ & = (a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_3) + (a_2 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_3) + (a_3 \cdot b_1 + a_3 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3) = \\ & = \left( \sum_{m=1}^3 a_m \right) \cdot \left( \sum_{n=1}^3 b_n \right) = \sum_{m=1}^3 \left[ a_m \cdot \sum_{n=1}^3 b_n \right] = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_m \cdot b_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2 + a_3 + \dots) \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + \dots) = \\ & = (a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_3 + \dots) + (a_2 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_3 + \dots) + (a_3 \cdot b_1 + a_3 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + \dots) + \dots = \\ & = \left( \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \right) \cdot \left( \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \left[ a_m \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \right] = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} a_m \cdot b_n \end{aligned}$$

Można na przykład przyjmować kolejne długości szeregów i obserwując efekty dojść do szeregów nieskończonych.

# Sygnał harmoniczny

$$x(t) = e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t} = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t) + j \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t)$$

$$|x(t)| = ?$$

$$\varphi(x(t)) = \varphi(t) = ?$$

**Wzory? Wykresy?**

$$\operatorname{Re}(x(t)) = ?$$

$$\operatorname{Im}(x(t)) = ?$$

A gdyby nieco zmodyfikować sygnał  $x(t)$ , otrzymując

$$x(t) \rightarrow y(t) = e^{j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t - \varphi_y)} ?$$

**Wzory? Wykresy?**

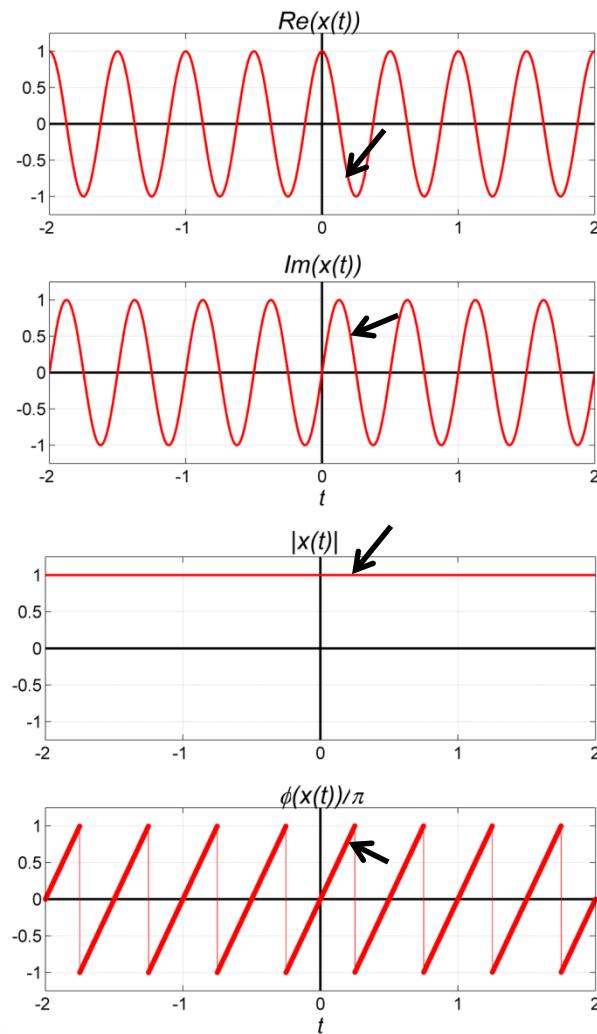
# Sygnał harmoniczny

**Wykresy**

$$f_x = 2 \text{ Hz}$$

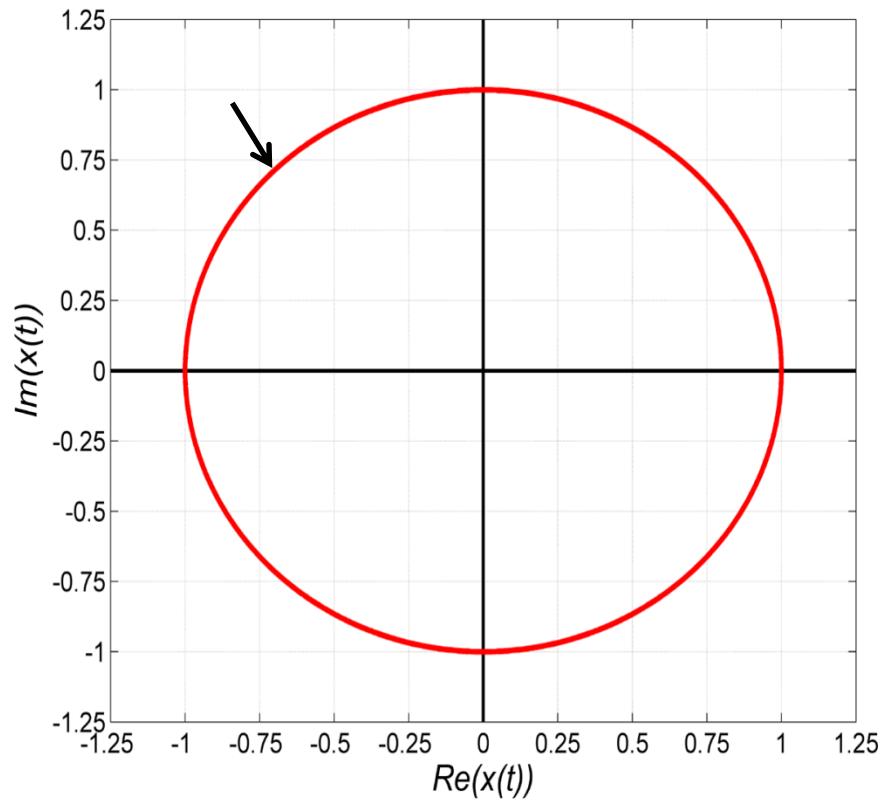
**Wybrany punkt:**

$$t = 3/16 \text{ s}$$



$$x(t) = e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t}$$

**Płaszczyzna zespolona**



## Do przemyślenia

**Jakie wykresy otrzymamy dla sygnału**

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t+1}{4}\right) + j \cdot \Pi\left(\frac{t-1}{4}\right) ?$$

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t+1}{4}\right) + j \cdot \Pi\left(\frac{t-1}{4}\right) = \Pi((t+1)/4) + j \cdot \Pi((t-1)/4)$$

**Jakie wykresy otrzymamy dla sygnału**

$$y(t) = -\Pi\left(t + \frac{1}{4}\right) + j \cdot \Pi\left(t - \frac{1}{4}\right) ?$$

$$y(t) = -\Pi\left(t + \frac{1}{4}\right) + j \cdot \Pi\left(t - \frac{1}{4}\right) = -\Pi(t+1/4) + j \cdot \Pi(t-1/4)$$

**Jakie wykresy otrzymamy dla sygnału**

$$x_1(t) = \Pi(4 \cdot t + 1) - j \cdot \Pi(4 \cdot t - 1) ?$$

**Wykresy: a) Re oraz Im od  $t$ , b) moduł oraz faza od  $t$ ,  
c) na płaszczyźnie zespolonej (Nyquista), czyli Im do Re.**

**Wstępnie rysujemy wykresy dla uproszczonego zapisu  $\Pi(t)$ ,  
dopiero potem uzupełniamy o wartości w „przeskokach”.**



AGH

*Zapraszam na ćwiczenia ...  
lub do laboratorium ...*



**AGH**

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

# **Teoria sygnałów**

## **Wykład 3**

**Dr inż. Przemysław Korohoda  
Instytut Elektroniki, AGH, Kraków**

[home.agh.edu.pl/~korohoda/rok\\_2022\\_2023\\_zima/TS\\_EL\\_2](http://home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2)

**UPEL: TS 2022**

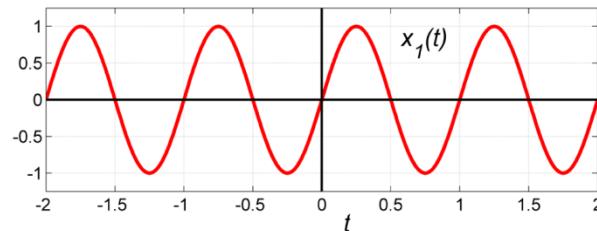
# Plan wykładu

- 1. Sygnał sinc.**
- 2. Ciągła transformacja Fouriera (CFT).**
- 3. Pary: sygnał-transformata.**
- 4. Własności CFT - twierdzenia.**

# Ważne sygnały - funkcja sinc

$$x_1(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot t)$$

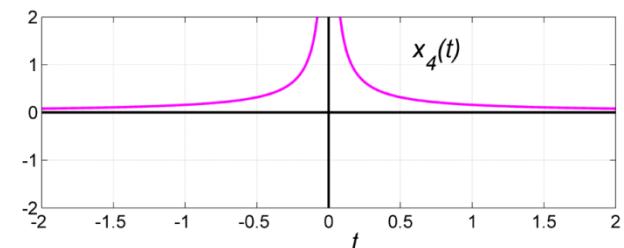
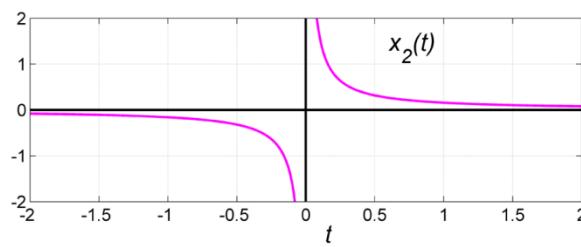
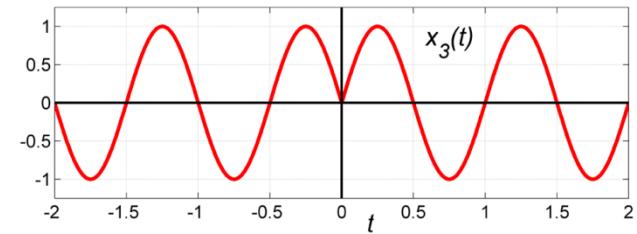
$$x_2(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot t}$$



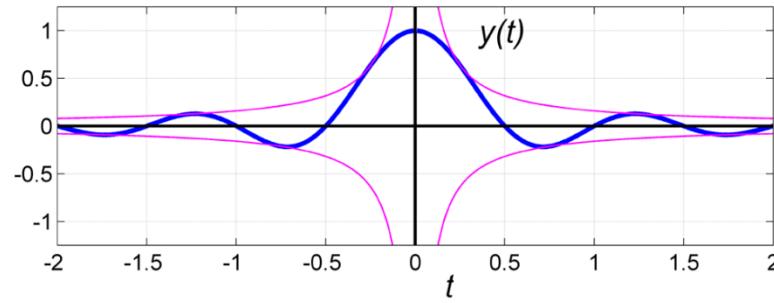
$$t \in \Re \setminus \{0\}$$

$$x_3(t) = x_1(|t|) = \sin(2 \cdot \pi \cdot |t|)$$

$$x_4(t) = x_2(|t|) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot |t|}$$



$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$$

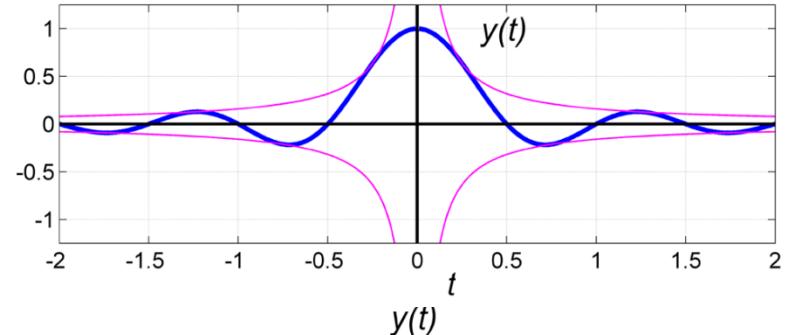


$$y(t) = x_3(t) \cdot x_4(t)$$

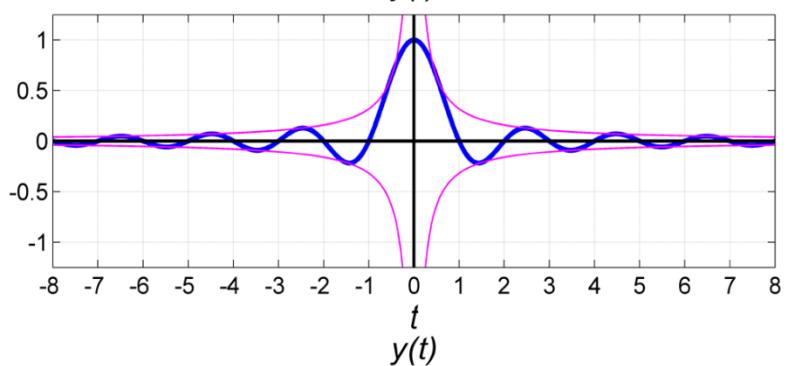
# Ważne sygnały - funkcja sinc (cd.)

$t \in \Re$

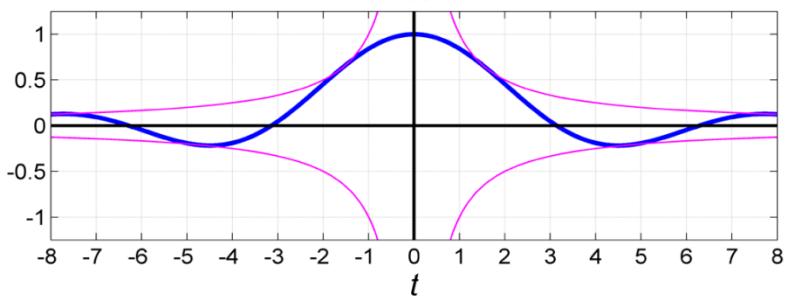
$$y(t) = \text{sinc}(2 \cdot \pi \cdot t) = \begin{cases} \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot t)}{2 \cdot \pi \cdot t} & \text{dla } t \neq 0 \\ 1 & \text{dla } t = 0 \end{cases}$$



$$y(t) = \text{sinc}(\pi \cdot t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi \cdot t)}{\pi \cdot t} & \text{dla } t \neq 0 \\ 1 & \text{dla } t = 0 \end{cases}$$



$$y(t) = \text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{dla } t \neq 0 \\ 1 & \text{dla } t = 0 \end{cases}$$



## Ważne sygnały - funkcja sinc (cd.)

Można tę funkcję (sygnał), podobnie jak i inne, określić na dowolnej dziedzinie „fizycznej”, np. ogólnie x:

$$f(x) = \text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Funkcja ta (sygnał) znana jest także pod nazwą Sa:

$$\text{Sa}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Niekiedy funkcja ta (sygnał) wprowadza mnożenie przez  $\pi$  w ramach przepisu:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi \cdot x)}{\pi \cdot x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

**tak jest np. w MATLAB'ie**

# Pytanie

**Co otrzymamy z okresowego powielenia sygnału sinc?**

**Np. tak:**

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi \cdot (t - n \cdot \Delta t))$$

- a)  $\Delta t = 1$
- b)  $\Delta t = 2$
- c)  $\Delta t = 7$
- d)  $\Delta t = 8$

# Elementy powtórkowe

## Całka z funkcji zespolonej

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \, dt &= \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| \cdot e^{j \cdot \varphi(x(t))} \, dt = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| \cdot [\cos(\varphi(x(t))) + j \cdot \sin(\varphi(x(t)))] \, dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| \cdot \cos(\varphi(x(t))) \, dt + j \cdot \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| \cdot \sin(\varphi(x(t))) \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}(x(t)) \, dt + j \cdot \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Im}(x(t)) \, dt \end{aligned}$$


---

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{j \cdot c \cdot t} \, dt = \left\{ \text{dla } c \neq 0 \right\} = \left[ \frac{e^{j \cdot c \cdot t}}{j \cdot c} \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{e^{j \cdot c \cdot t_2} - e^{j \cdot c \cdot t_1}}{j \cdot c}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{j \cdot c \cdot t} \, dt = \left\{ \text{dla } c = 0 \right\} = \int_{t_1}^{t_2} e^0 \, dt = [t]_{t_1}^{t_2} = t_2 - t_1$$

# **Ciągła Transformacja Fouriera**

## **= Całkowe Przekształcenie Fouriera**

### **(ang. Continuous Fourier Transform=CFT)**

**Wersja z  $f$  (częstotliwość w [Hz]):**

$$x(t) \xrightarrow{\text{CFT}} X(f)$$

$$\xleftarrow{\text{ICFT}}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$$

**Wersja z  $\omega$  (pulsacja w [rad/s]):**

$$x(t) \xrightarrow{\text{CFT}} X(\omega)$$

$$\xleftarrow{\text{ICFT}}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot e^{+j \cdot \omega \cdot t} d\omega$$

---

**Pod warunkiem, że powyższe wzory są zbieżne!**

---

**Istota CFT oraz ICFT (ang. Inverse CFT):**

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt \right] \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$$

Analogicznie dla  $X(f)$ , a także w obie strony dla  $\omega$  zamiast  $f$ .

## Komentarz

**Dlatego tak ważne jest, by studując problematykę funkcji, jak np. ich przekształcanie, nie przywiązywać się do tego, że dziedzina to czas, t. Analogiczne efekty uzyskamy przecież dla  $f$  lub  $\omega$ .**

**Jeszcze inny – dość często spotykany zapis:**

$$X(j \cdot \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(j \cdot \omega) \cdot e^{+j \cdot \omega \cdot t} d\omega$$

# Przykład wyliczenia $\text{CFT}(f)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$$

$$x(t) = \Pi(t)$$

$$X(f) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = \{f \neq 0\} = \left. \frac{1}{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \right|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{e^{-j \cdot \pi \cdot f} - e^{+j \cdot \pi \cdot f}}{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{e^{+j \cdot \pi \cdot f} - e^{-j \cdot \pi \cdot f}}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{\sin(\pi \cdot f)}{\pi \cdot f}$$


---

$$X(f=0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = \{f=0\} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 dt = 1$$

# Przykład wyliczenia CFT( $\omega$ )

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot e^{+j \cdot \omega \cdot t} d\omega$$

$$x(t) = \Pi(t)$$

$$X(\omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt = \left\{ \omega \neq 0 \right\} = \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{e^{-j \cdot \omega / 2} - e^{+j \cdot \omega / 2}}{-j \cdot \omega} = \frac{e^{+j \cdot \omega / 2} - e^{-j \cdot \omega / 2}}{j \cdot \omega} = \frac{\sin(\omega / 2)}{\omega / 2}$$


---

$$X(\omega = 0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt = \left\{ \omega = 0 \right\} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 dt = 1$$

## Spojrzenie wstecz

**Przypomnijmy, że wszystkie poznane funkcje mogą być określone na dowolnej dziedzinie, np. tak:**

$$\begin{aligned} & \Pi(t), \Pi(f), \Pi(\omega), \\ & \text{sinc}(t), \text{sinc}(f), \text{sinc}(\omega) \end{aligned}$$

**Może przy okazji warto się zastanowić, jaką funkcję otrzymamy z zapisu:**

$$\cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0)$$

**... i jaki będzie jej wykres.**

# Przykład wyliczenia ICFT

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$$

$$X(f) = \Pi(f)$$

$$x(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df = \{t \neq 0\} = \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot t} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{e^{j \cdot \pi \cdot t} - e^{-j \cdot \pi \cdot t}}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot t} = \frac{\sin(\pi \cdot t)}{\pi \cdot t}$$


---

$$x(t=0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df = \{t=0\} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 df = 1$$

# Przykład wyliczenia ICFT

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot e^{+j \cdot \omega \cdot t} d\omega$$

$$X(\omega) = \Pi(\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} d\omega = \quad \{t \neq 0\} \quad = \quad \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{j \cdot t} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \quad \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{j \cdot t / 2} - e^{-j \cdot t / 2}}{j \cdot 2 \cdot t / 2} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\sin(t / 2)}{t / 2}$$


---

$$x(t=0) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} d\omega = \quad \{t=0\} \quad = \quad \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 d\omega = \quad \frac{1}{2 \cdot \pi}$$

# Pary: sygnał-transformata

$$x(t) = \Pi(t) \quad \xrightarrow{\text{CFT}} \quad X(f) = \text{sinc}(\pi \cdot f)$$

$\xleftarrow{\text{ICFT}}$

$$x(t) = \Pi(t) \quad \xrightarrow{\text{CFT}} \quad X(\omega) = \text{sinc}(\omega/2)$$

$\xleftarrow{\text{ICFT}}$

$$x(t) = \text{sinc}(\pi \cdot t) \quad \xrightarrow{\text{CFT}} \quad X(f) = \Pi(f)$$

$\xleftarrow{\text{ICFT}}$

$$x(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \text{sinc}(t/2) \quad \xrightarrow{\text{CFT}} \quad X(\omega) = \Pi(\omega)$$

$\xleftarrow{\text{ICFT}}$

# Relacje między transformatami

$$X(\omega) = X(2 \cdot \pi \cdot f)$$

$$\Pi(\omega) = \Pi(2 \cdot \pi \cdot f)$$

$$\text{sinc}(\omega) = \text{sinc}(2 \cdot \pi \cdot f)$$

$$X(f) = X\left(\frac{\omega}{2 \cdot \pi}\right)$$

$$\Pi(f) = \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \pi}\right)$$

$$\text{sinc}(f) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2 \cdot \pi}\right)$$

# Właściwości CFT: liniowość

**Jeżeli  $N$  sygnałów posiada transformaty:**

$$x_1(t) \quad \xrightleftharpoons[\substack{ICFT}]{} \quad X_1(f)$$

$$x_2(t) \quad \xrightleftharpoons[\substack{ICFT}]{} \quad X_2(f)$$

.

$$x_N(t) \quad \xrightleftharpoons[\substack{ICFT}]{} \quad X_N(f)$$

**oraz weźmiemy ciąg  $N$  dowolnych liczb (rzeczywistych lub zespolonych):**

$$a_1, a_2, \dots, a_N$$

**to:**

$$a_1 \cdot x_1(t) + a_2 \cdot x_2(t) + \dots + a_N \cdot x_N(t) \quad \xrightleftharpoons[\substack{ICFT}]{} \quad a_1 \cdot X_1(f) + a_2 \cdot X_2(f) + \dots + a_N \cdot X_N(f)$$

**Jest to liniowość, wynikająca wprost z liniowości całki.**

**Analogicznie można tę właściwość zapisać dla CFT( $\omega$ ).**

# Właściwości CFT: zmiana skali osi czasu

**Jeżeli mamy parę sygnał-transformata:**  $x(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(f)$

**to:**  $dla \quad a \in \Re \setminus \{0\}: \quad x(a \cdot t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$

---

**Jeżeli mamy parę sygnał-transformata:**  $x(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(\omega)$

**to:**  $dla \quad a \in \Re \setminus \{0\}: \quad x(a \cdot t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

**Jak powyższe twierdzenie przejawia się na wykresach?**

# Dowód pierwszej wersji twierdzenia (część pierwsza)

$$x_1(t) = x(a \cdot t)$$

$$x(a \cdot t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$$

dla  $a \neq 0$

**Dla  $a > 0$ :**

$$X_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(a \cdot t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt \stackrel{a > 0}{=} \begin{cases} \tau = a \cdot t \Rightarrow t = \frac{\tau}{a} \\ \frac{1}{a} \cdot d\tau = dt \\ t \rightarrow \infty \Rightarrow \tau \rightarrow \infty \\ t \rightarrow -\infty \Rightarrow \tau \rightarrow -\infty \end{cases} = \frac{1}{a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{\tau}{a}} d\tau =$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f}{a} \cdot \tau} d\tau = \frac{1}{a} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$$

# Dowód pierwszej wersji twierdzenia (część druga)

$$x_1(t) = x(a \cdot t)$$

$$x(a \cdot t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$$

dla  $a \neq 0$

**Dla  $a < 0$ :**

$$X_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(a \cdot t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt \stackrel{a < 0}{=} \left\{ \begin{array}{l} \tau = a \cdot t \Rightarrow t = \frac{\tau}{a} \\ \frac{1}{a} \cdot d\tau = dt \\ t \rightarrow +\infty \Rightarrow \tau \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow -\infty \Rightarrow \tau \rightarrow +\infty \end{array} \right\} = -\frac{1}{a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{\tau}{a}} d\tau =$$

$$= \frac{1}{|a|} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f}{a} \cdot \tau} d\tau = \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$$

# Ciąg przekształceń:

**Dla:**  $a \neq 0$

$$x_1(t) = x(a \cdot t) \xrightarrow[\substack{\longleftarrow \\ ICFT}]{} X_1(f) = \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$$

**jeżeli:**  $b = 1/a$  **to:**

$$x_1(t) = x\left(\frac{t}{b}\right) \xrightarrow[\substack{\longleftarrow \\ ICFT}]{} X_1(f) = |b| \cdot X(b \cdot f)$$

**jeżeli:**

$x_2(t) = \frac{1}{|b|} \cdot x_1(t)$  **to:**

$$x_2(t) = \frac{1}{|b|} \cdot x\left(\frac{t}{b}\right) \xrightarrow[\substack{\longleftarrow \\ ICFT}]{} X_2(f) = X(b \cdot f)$$

**czyli:**

$$\frac{1}{|b|} \cdot x\left(\frac{t}{b}\right) \xrightarrow[\substack{\longleftarrow \\ ICFT}]{} X(b \cdot f)$$

# Właściwości CFT: zmiana skali osi $f$ lub $\omega$

**Jeżeli mamy parę sygnał-transformata:**  $x(t) \xleftrightarrow[CFT]{ICFT} X(f)$

**to:**  $dla a \in \Re \setminus \{0\}:$   $\frac{1}{|a|} \cdot x\left(\frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow[CFT]{ICFT} X(a \cdot f)$

---

**Jeżeli mamy parę sygnał-transformata:**  $x(t) \xleftrightarrow[CFT]{ICFT} X(\omega)$

**to:**  $dla a \in \Re \setminus \{0\}:$   $\frac{1}{|a|} \cdot x\left(\frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow[CFT]{ICFT} X(a \cdot \omega)$

**Jak powyższe twierdzenie przejawia się na wykresach?**

# Przykład zastosowania twierdzenia

$$x(a \cdot t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$$

**Na postawie następującej pary sygnał-transformata:**

$$\Pi(t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad \text{sinc}(\pi \cdot f)$$

**otrzymujemy, że:**

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad T \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot T)$$

# Szczególny przypadek

$$x(-t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad X(-f)$$

$$x(a \cdot t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$$

---

$$x(-t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad X(-\omega)$$

$$x(a \cdot t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

# Właściwości CFT: opóźnienie w czasie

**Jeżeli mamy parę sygnał-transformata:**  $x(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(f)$

**to:**  $x(t - t_d) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(f) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_d}$

---

**Jeżeli mamy parę sygnał-transformata:**  $x(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(\omega)$

**to:**  $x(t - t_d) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(\omega) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_d}$

# Dowód jednej z wersji twierdzenia

$$x(t - t_d) \xleftarrow[ICFT]{CFT} X(f) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_d}$$

$$x_1(t) = x(t - t_d)$$

$$X_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_d) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = \left\{ \begin{array}{l} \tau = t - t_d \Rightarrow t = \tau + t_d \\ d\tau = dt \\ t \rightarrow \infty \Rightarrow \tau \rightarrow \infty \\ t \rightarrow -\infty \Rightarrow \tau \rightarrow -\infty \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot (\tau + t_d)} d\tau = \\ = e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_d} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} d\tau = e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_d} \cdot X(f)$$

# Właściwości CFT: przesunięcie w dziedzinie $f$ lub $\omega$

**Jeżeli mamy parę sygnał-transformata:**

$$x(t) \quad \xleftrightarrow[CFT]{ICFT} \quad X(f)$$

**to:**  $x(t) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} \quad \xleftrightarrow[CFT]{ICFT} \quad X(f - f_0)$

---

**Jeżeli mamy parę sygnał-transformata:**

$$x(t) \quad \xleftrightarrow[CFT]{ICFT} \quad X(\omega)$$

**to:**  $x(t) \cdot e^{+j \cdot \omega_0 \cdot t} \quad \xleftrightarrow[CFT]{ICFT} \quad X(\omega - \omega_0)$

Odpowiednie dowody – analogicznie, jak poprzednio...

## Przykład

**Dla sygnału:**

$$x(t) = 2 \cdot \Pi\left(\frac{t-1}{3}\right)$$

**możemy zatem wyznaczyć transformatę CFT( $f$ ) na dwa sposoby:**

**a) z definicji CFT:**

$$X(f) = 2 \cdot \int_{-1/2}^{+5/2} e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = \dots$$

**b) ze znanych par (sygnał-transformata) i odpowiednich twierdzeń:**

$$X(f) = 2 \cdot 3 \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot 3) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot 1} = 6 \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot 3) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}$$

**Najpierw zmiana skali czasu, a potem opóźnienie.**

**Warto umieć porównać oba wyniki! Czyli zastosować odpowiednie przekształcenia.**

## Przykład (cd.)

**Gdyby w tym przykładzie najpierw zastosować opóźnienie, a potem zmianę skali osi czasu, to należałoby najpierw przekształcić odpowiednio sygnał, by jawnie otrzymać odpowiednie parametry:**

$$x(t) = 2 \cdot \Pi\left(\frac{t-1}{3}\right) = 2 \cdot \Pi\left(\frac{1}{3} \cdot t - \frac{1}{3}\right)$$

**Warto sprawdzić, czy otrzymamy ten sam wynik!**

# Transformata sygnału schodkowego

$$\Delta t = \text{const}$$

$$t_n = n \cdot \Delta t$$

$$x_n = x(n \cdot \Delta t)$$

**Przybliżenie sygnału  $x(t)$  sygnałem schodkowym:**

$$x_1(t) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x_n \cdot \Pi\left(\frac{t - t_n}{\Delta t}\right)$$

$$\Pi\left(\frac{t - t_d}{T}\right) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} T \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot T) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_d}$$

$$X_1(f) = \Delta t \cdot \sum_{n=n_1}^{n_2} x_n \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot \Delta t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n}$$

**Granice sumowania mogą się rozciągać do nieskończoności, ale nie muszą.**

# Wartość główna całki

**Na przykładzie sygnału sinusoidalnego:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt = ???$$

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt = 0$$

**Analogiczny wynik uzyskamy dla każdej funkcji nieparzystej.**

# Transformata sygnału rzeczywistego

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_{parz}(t) + x_{niep}(t)] \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} [x_{parz}(t) + x_{niep}(t)] \cdot [\cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) - j \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)] dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_{parz}(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt - j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x_{parz}(t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt + \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} x_{niep}(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt - j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x_{niep}(t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt = \{\text{V.p.}\} = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_{parz}(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt - j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x_{niep}(t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt = \\
 &= \operatorname{Re}(X(f)) + j \cdot \operatorname{Im}(X(f))
 \end{aligned}$$

# Transformata sygnału rzeczywistego

**Jeżeli:**

$$x(t) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CTF} \quad X(f)$$

**to:**

$$x_{parz}(t) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CTF} \quad \text{Re}(X(f))$$

$$x_{niep}(t) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CTF} \quad j \cdot \text{Im}(X(f))$$

**Analogicznie dla  $\omega$ .**

# Transformata sygnału rzeczywistego

$$\operatorname{Re}(X(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{parz}(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{parz}(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot (-f) \cdot t) dt = \operatorname{Re}(X(-f))$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(X(f)) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} x_{niep}(t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt \Rightarrow \operatorname{Im}(X(-f)) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x_{niep}(t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot (-f) \cdot t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_{niep}(t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt = -\operatorname{Im}(X(f))\end{aligned}$$

**Zatem część rzeczywista transformaty jest parzystą funkcją  $f$ , natomiast część urojona transformaty jest nieparzystą funkcją  $f$ .**

**Analogicznie pokazujemy, że**  
**część rzeczywista transformaty jest parzystą funkcją  $\omega$ ,**  
**natomiast część urojona transformaty jest nieparzystą funkcją  $\omega$ .**

... wykresy!

# Transformata sygnału rzeczywistego

$$X(f) = \operatorname{Re}(X(f)) + j \cdot \operatorname{Im}(X(f)) = |X(f)| \cdot e^{j \cdot \varphi(X(f))} : |X(f)| \in \mathfrak{R}_{0+} \wedge \varphi(X(f)) \in \mathfrak{R}$$

Z powyższej zależności wynika, że dla sygnału rzeczywistego także:

- a) moduł transformaty jest parzystą funkcją  $f$ ,
- b) faza transformaty jest nieparzystą funkcją  $f$ .

Analogicznie dla  $X(\omega)$ .

... wykresy!

Warto potwierdzić wykazane parzystości (symetrie wykresów) za pomocą dotychczas wyznaczonych par sygnał-transformata.

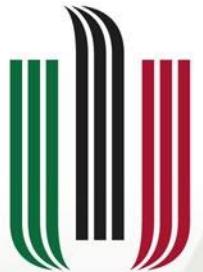
# **Podsumowanie**

- 1. Sygnał sinc.**
- 2. Ciągła transformacja Fouriera (CFT).**
- 3. Pary: sygnał-transformata.**
- 4. Własności CFT - twierdzenia.**



AGH

***Zapraszam na ćwiczenia ...  
lub do laboratorium ...***



**AGH**

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

# **Teoria sygnałów**

## **Wykład 4**

**Dr inż. Przemysław Korohoda  
Katedra Elektroniki, AGH, Kraków**

[home.agh.edu.pl/~korohoda/rok\\_2022\\_2023\\_zima/TS\\_EL\\_2](http://home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2)

**UPEL: TS 2022**

# Plan wykładu

- 1. Transformata CFT sygnału stałego -> delta Diraca.**
- 2. Kilka ważnych par „sygnał-transformata”.**
- 3. Parzystości CFT (cd.).**
- 4. Transformowanie sygnałów zespolonych.**
- 5. Splot – definicja, przykłady, własności.**
- 6. Więcej par „sygnał-transformata”.**
- 7. Szereg Fouriera (grzebień Diraca).**

# Transformata sygnału stałego

**Wyliczenie bezpośrednio z def. jest nieskuteczne:**

$$x(t) = c \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = ?$$

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} c \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = \\ &= c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt - j \cdot c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt = ? \end{aligned}$$

---

**Przypomnienie, wartość główna całki:**

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt = 0$$

# Transformata CFT( $f$ ) sygnału stałego

Rozważmy ciąg funkcji (sygnałów) :

$$\boxed{a > 0} \quad x_a(t) = \Pi\left(\frac{t}{a}\right) \quad \xrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad X_a(f) = a \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot a)$$

$a \rightarrow +\infty$

Oczywiście:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} x_a(t) = 1 \quad \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} X_a(f) = \delta(f)$$

**Bez dowodu:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi \cdot f) df = 1$$

... ale można to łatwo sprawdzić z użyciem Matlaba.

**Pseudo-funkcja (dystrybucja) delta Diraca:**

$$\delta(f) = \begin{cases} +\infty & \text{dla } f = 0 \\ 0 & \text{dla } f \neq 0 \end{cases} \quad \wedge \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) df = 1$$

Analogicznie można określić  $\delta(t)$  czy  $\delta(\omega)$ .

# Transformata CFT( $f$ ) sygnału stałego

Można też i tak:

$$x_a(t) = \text{sinc}\left(\pi \cdot \frac{t}{a}\right) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad X_a(f) = a \cdot \Pi(f \cdot a)$$

Bez dowodu:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} x_a(t) = 1 \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} X_a(f) = \delta(f)$$

... ale można to łatwo sprawdzić z użyciem Matlaba.

Oczywiście:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(f) df = 1$$

# Transformata CFT( $\omega$ ) sygnału stałego

$$x_a(t) = \text{sinc}\left(\pi \cdot \frac{t}{a}\right) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X_a(\omega) = a \cdot \Pi\left(\frac{\omega \cdot a}{2 \cdot \pi}\right)$$

$a \rightarrow +\infty$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} x_a(t) = 1 \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} X_a(\omega) = 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \pi}\right) d\omega = 2 \cdot \pi$$

**Kolejna para sygnał-transformata:**

$$x(t) = 1 \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = \delta(f)$$

$$x(t) = 1 \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(\omega) = 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega)$$

## Kolejne pary sygnał-transformata

**W podobny sposób możemy pokazać, że:**

$$x(t) = \delta(t) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = 1$$

$$x(t) = \delta(t) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(\omega) = 1$$

---

$$\text{dla dowolnych } \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 : \int_{t_d - \varepsilon_1}^{t_d + \varepsilon_2} \delta(t - t_d) dt = 1 \qquad \qquad \delta(t - t_d) \cdot x(t) = \delta(t - t_d) \cdot x(t_d)$$

$$\text{dlatego : } \int_{t_d - \varepsilon_1}^{t_d + \varepsilon_2} \delta(t - t_d) \cdot x(t) dt = x(t_d)$$

# Potwierdzenie wyznaczonych par sygnał-transformata

$$X(f) = \delta(f): \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot t} df = 1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) df = 1$$

$$X(\omega) = 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega): \quad x(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) \cdot e^{j \cdot 0 \cdot t} d\omega = 1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) d\omega = 1$$

$$x(t) = \delta(t): \quad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot 0} dt = 1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$x(t) = \delta(t): \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot 0} dt = 1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

# Przykłady innych par sygnał-transformata

**Korzystając z definicji lub odpowiednich twierdzeń można pokazać, że:**

$$c \quad \xleftrightarrow[CFT]{ICFT} \quad c \cdot \delta(f)$$

$$c \cdot \delta(t) \quad \xleftrightarrow[CFT]{ICFT} \quad c$$

$$e^{j \cdot 2\pi f_0 t} \quad \xleftrightarrow[CFT]{ICFT} \quad \delta(f - f_0)$$

$$\delta(t - t_d) \quad \xleftrightarrow[CFT]{ICFT} \quad e^{-j \cdot 2\pi f \cdot t_d}$$

$$c \quad \xleftrightarrow[CFT(\omega)]{ICFT(\omega)} \quad c \cdot 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega)$$

$$c \cdot \delta(t) \quad \xleftrightarrow[CFT(\omega)]{ICFT(\omega)} \quad c$$

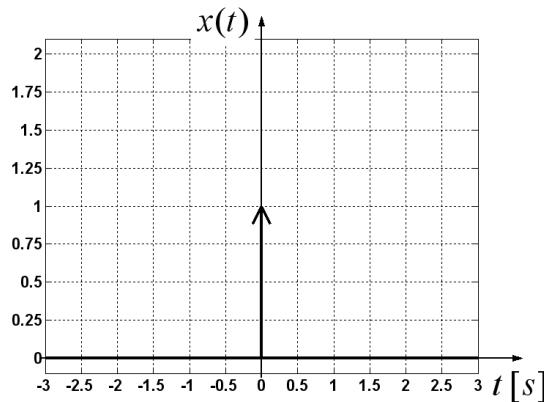
$$e^{j \cdot \omega_0 t} \quad \xleftrightarrow[CFT(\omega)]{ICFT(\omega)} \quad 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\delta(t - t_d) \quad \xleftrightarrow[CFT(\omega)]{ICFT(\omega)} \quad e^{-j \cdot \omega t_d}$$

**Sygnal harmoniczny (zespolony!):**  $e^{j \cdot 2\pi f_0 t} = e^{j \cdot \omega_0 t}$   
**Wykresy!**

# Graficzna ilustracja dla delty Diraca

$$x(t) = \delta(t)$$

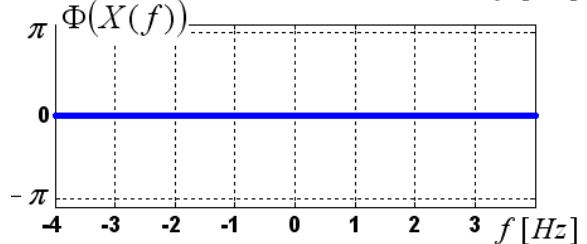
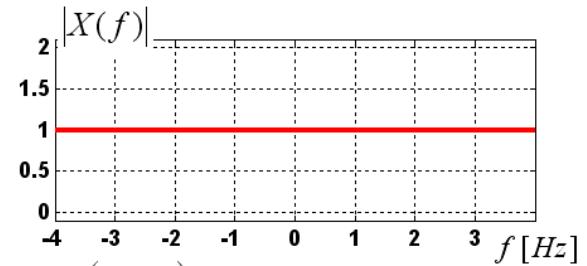
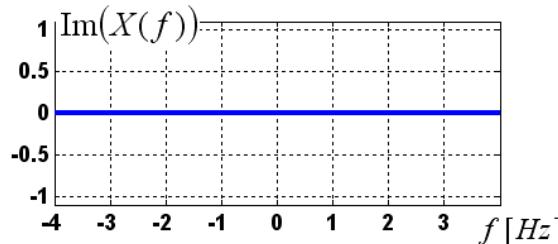
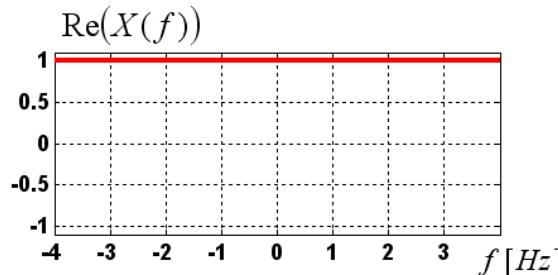


$$X(f) = 1$$



$$\operatorname{Re}(X(f)) = 1; \quad \operatorname{Im}(X(f)) = 0;$$

$$|X(f)| = 1; \quad \Phi(X(f)) = 0$$

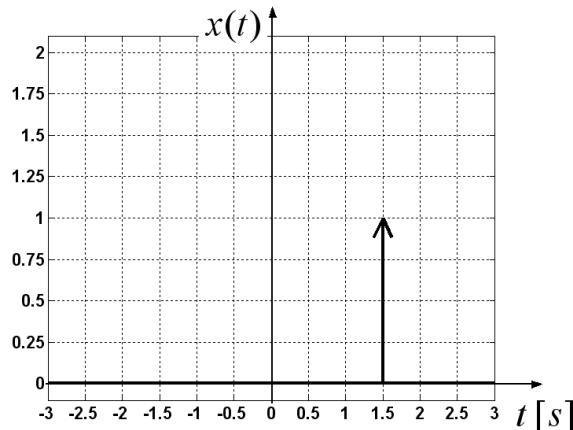


# Graficzna ilustracja dla delty Diraca (cd.)

$$t_0 = 1,5$$

$$X(f) = e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0}$$

$$x(t) = \delta(t - t_0)$$

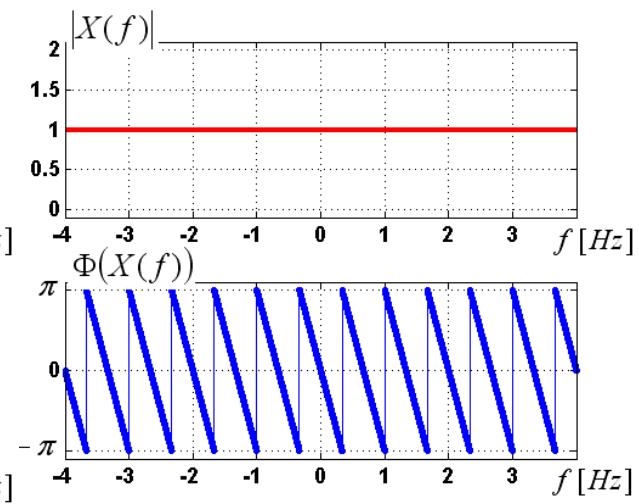
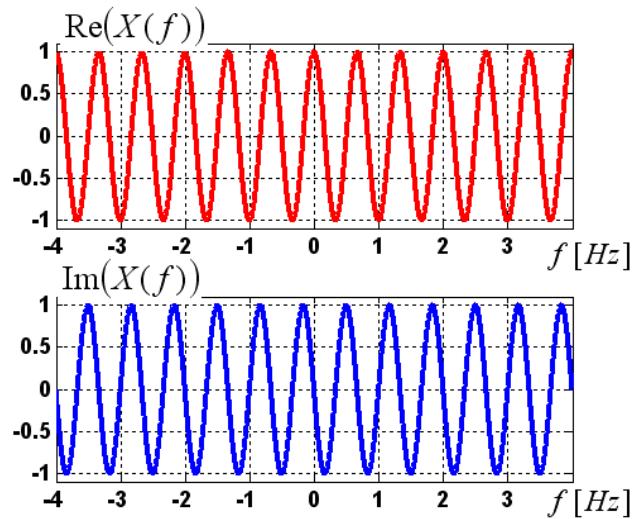


$$\operatorname{Re}(X(f)) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0)$$

$$\operatorname{Im}(X(f)) = -\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0)$$

$$|X(f)| = 1$$

$$\Phi(X(f)) = -2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0$$



# Typowe operacje na delcie Diraca

... przesuwanie, mnożenie przez liczbę, dodawanie itd.:

$$x(t) = \delta(t - t_0)$$

$$x(t) = \delta(t) + \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

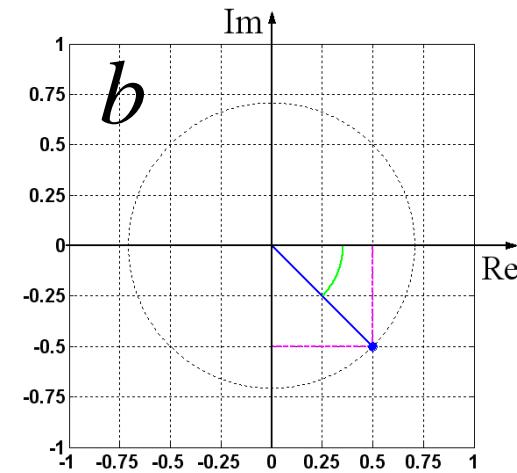
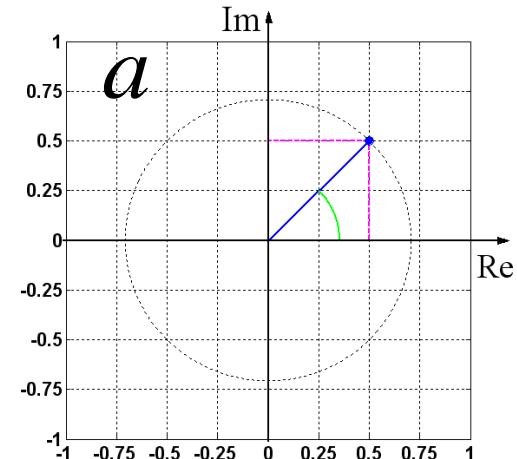
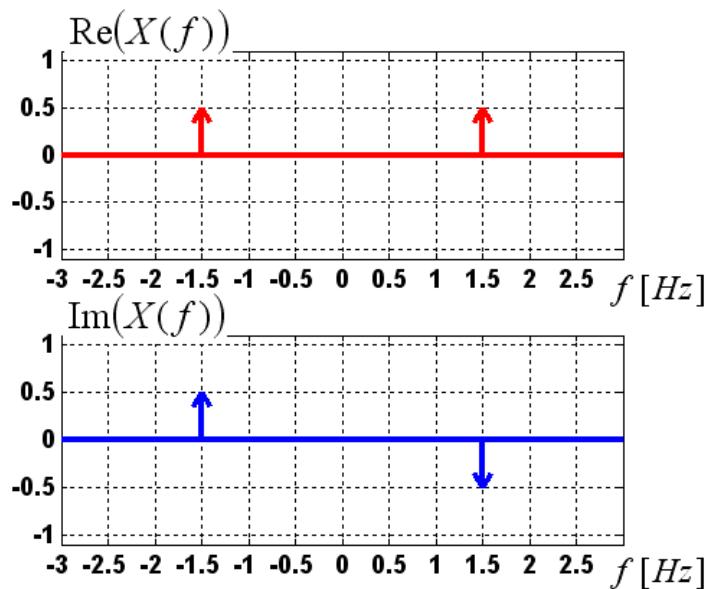
$$x(t) = 3 \cdot \delta(t) - 2 \cdot \delta(t - t_0) + \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

... analogicznie w dziedzinie  $f$ , czy  $\omega$  .

# Przykład ilustracji transformaty z deltami Diraca na płaszczyźnie zespolonej

$$X(f) = \left( \frac{1}{2} + j \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \delta(f + 1,5) + \left( \frac{1}{2} - j \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \delta(f - 1,5)$$

$$X(f) = a \cdot \delta(f + 1,5) + b \cdot \delta(f - 1,5)$$



# Dowód z wykorzystaniem nowych narzędzi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt \right] \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df d\tau$$

**...i następnie:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df d\tau =$$

$$\left\{ y(t) = \delta(t - \tau) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad Y(f) = e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df \right] d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = x(t)$$

## Inne ważne pary sygnał-transformata

Korzystając z definicji lub odpowiednich twierdzeń można także pokazać, że:

$$\cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad \frac{1}{2} \cdot [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

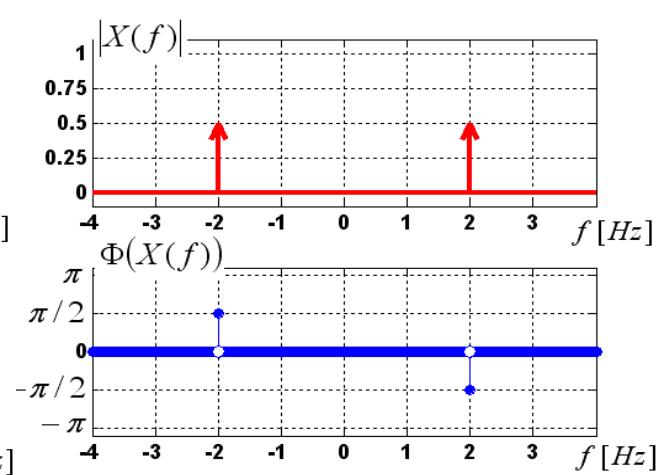
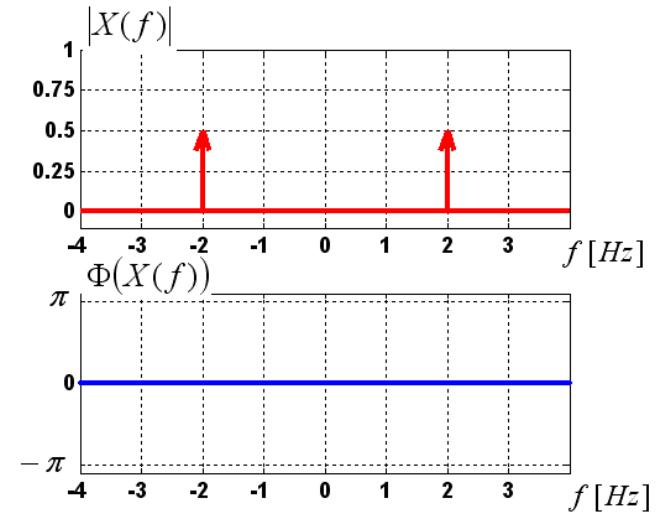
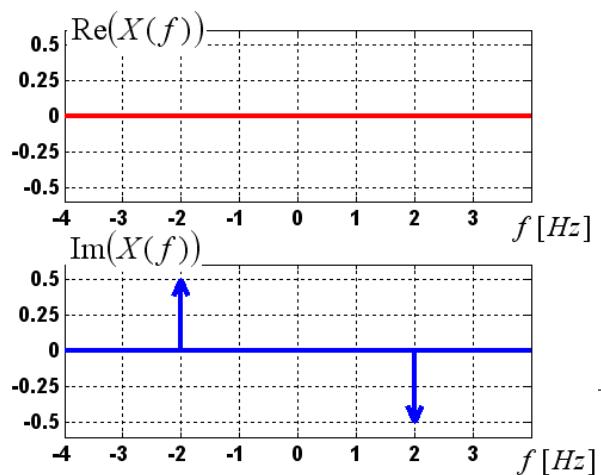
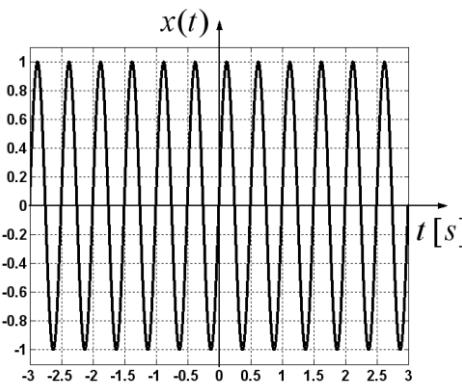
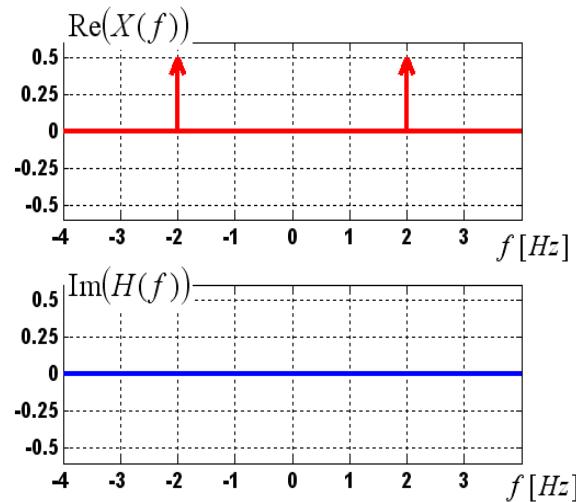
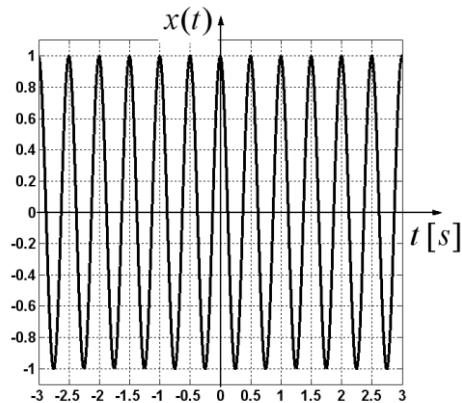
$$\sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad j \cdot \frac{1}{2} \cdot [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$$

---

$$\cos(\omega_0 \cdot t) \quad \xleftrightarrow[ICFT(\omega)]{CFT(\omega)} \quad \pi \cdot [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\sin(\omega_0 \cdot t) \quad \xleftrightarrow[ICFT(\omega)]{CFT(\omega)} \quad j \cdot \pi \cdot [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

# Przykładowe wykresy dla sygnałów cos/sin



## Inne ważne pary sygnał-transformata

Analogicznie „w drugą stronę”:

$$\frac{1}{2} \cdot [\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)] \xleftrightarrow[CFT]{ICFT} \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0)$$

$$j \cdot \frac{1}{2} \cdot [\delta(t - t_0) - \delta(t + t_0)] \xleftrightarrow[CFT]{ICFT} \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0)$$

---

$$\frac{1}{2} \cdot [\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)] \xleftrightarrow[CFT(\omega)]{ICFT(\omega)} \cos(\omega \cdot t_0)$$

$$j \cdot \frac{1}{2} \cdot [\delta(t - t_0) - \delta(t + t_0)] \xleftrightarrow[CFT(\omega)]{ICFT(\omega)} \sin(\omega \cdot t_0)$$

Warto dla tych kolejnych przykładów sprawdzić odpowiednie (nie)parzystości! 17

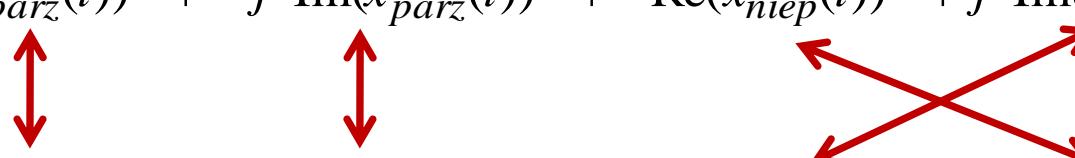
# Parzystości i nieparzystości (ogólnie)

**Po rozdzieleniu sygnału zespolonego oraz jego transformaty Fouriera na część parzystą i nieparzystą:**

$$x(t) = x_{parz}(t) + x_{niep}(t) \quad \xleftarrow[CFT]{ICFT} \quad X(f) = X_{parz}(f) + X_{niep}(f)$$

**Uwaga –  $X_{parz}$  to parzysta część transformaty, a nie transformata parzystej części sygnału!**

**można stwierdzić, że zachodzą następujące zależności:**

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re}(x_{parz}(t)) + j \cdot \text{Im}(x_{parz}(t)) + \text{Re}(x_{niep}(t)) + j \cdot \text{Im}(x_{niep}(t)) \\ X(f) &= \text{Re}(X_{parz}(f)) + j \cdot \text{Im}(X_{parz}(f)) + \text{Re}(X_{niep}(f)) + j \cdot \text{Im}(X_{niep}(f)) \end{aligned}$$


**Dla sygnału rzeczywistego wystarczy pominąć odpowiednie wartości urojone.**

Wykazanie wybranego powiązania stanowi bardzo dobre ćwiczenie rachunkowe.

**Dokładnie tak samo można określić zależności dla CFT( $\omega$ ).**

# Transformowanie sygnałów zespolonych

Dla zespolonego sygnału oraz jego transformaty Fouriera:

$$x(t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad X(f)$$

$$x(-t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad X(-f)$$

zachodzą następujące związki:

$$\overline{x(t)} \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad \overline{X(-f)}$$

$$\overline{x(-t)} \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad \overline{X(f)}$$

Dla zespolonego sygnału oraz jego transformaty Fouriera:

$$x(t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} \quad X(\omega)$$

$$x(-t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} \quad X(-\omega)$$

zachodzą następujące związki:

$$\overline{x(t)} \quad \xleftarrow[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} \quad \overline{X(-\omega)}$$

$$\overline{x(-t)} \quad \xleftarrow[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} \quad \overline{X(\omega)}$$

# Zależności między transformata w przód oraz odwrotną

Rozpisując odpowiednio wzory na transformaty można dojść do następujących obserwacji:

$$\begin{array}{ccc} p(t) & \xrightarrow{\text{CFT}} & q(f) \\ & \Downarrow & \\ \overline{q(t)} & \xleftarrow{\text{ICFT}} & \overline{p(f)} \end{array}$$

---

$$\begin{array}{ccc} p(t) & \xrightarrow{\text{CFT}(\omega)} & q(\omega) \\ & \Downarrow & \\ \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \overline{q(t)} & \xleftarrow{\text{ICFT}(\omega)} & \overline{p(\omega)} \end{array}$$

Analogiczne związki zajdą dla przejścia „w drugą stronę”.

**Na razie tylko w dziedzinie czasu:**

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau$$

**Interpretacja graficzna – patrz tablica...**

**Oznaczenie splotu:**

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau = (x_1 * x_2)(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

**Przemiennosć splotu:**

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau) \cdot x_2(\tau) d\tau$$

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$$

# Przykład oraz definicja funkcji lambda

$$x_1(t) = \Pi(t)$$

$$x_2(t) = \Pi(t)$$

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\tau) \cdot \Pi(t - \tau) d\tau = \Lambda(t)$$

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t + 1 & \text{dla } -1 < t \leq 0 \\ -t + 1 & \text{dla } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{dla } \text{pozost. } t \end{cases}$$

Analogicznie określamy funkcje lambda dla innych dziedzin.



AGH

## Dygresja: Funkcja lambda -> delta Diraca

$$\lim_{a \rightarrow 0+} \left( \frac{1}{a} \cdot \Lambda\left(\frac{t}{a}\right) \right) = \delta(t)$$

**W tym przypadku całka także jest „łatwa”:**

$$\frac{1}{a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda\left(\frac{t}{a}\right) dt = \frac{1}{a} \cdot a \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(\tau) d\tau = 1$$

**Dla porównania:**

$$\lim_{a \rightarrow 0+} \left( \frac{1}{a} \cdot \Pi\left(\frac{t}{a}\right) \right) = \delta(t)$$

**Ciągła:**

$$\frac{1}{a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t}{a}\right) dt = \frac{1}{a} \cdot a \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\tau) d\tau = 1$$

$$\lim_{a \rightarrow 0+} \left( \frac{1}{a} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi \cdot t}{a}\right) \right) = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi \cdot t}{a}\right) dt = \left\{ \begin{array}{l} \tau = \frac{t}{a} \\ dt = a \cdot d\tau \\ t \rightarrow \pm\infty \Leftrightarrow \tau \rightarrow \pm\infty \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \cdot a \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi \cdot \tau) d\tau = 1$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi \cdot t) dt = 1}$$

## Wnioski (kolejna dygresja)

$$\lim_{a \rightarrow 0+} \left( \frac{1}{a} \cdot \Lambda \left( \frac{t}{a} \right) \right) = \delta(t) \Rightarrow X(f) = \lim_{a \rightarrow 0+} \left( \text{sinc}^2(\pi \cdot f \cdot a) \right) = 1$$

$$\lim_{a \rightarrow 0+} \left( \frac{1}{a} \cdot \Pi \left( \frac{t}{a} \right) \right) = \delta(t) \Rightarrow X(f) = \lim_{a \rightarrow 0+} \left( \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot a) \right) = 1$$

$$\lim_{a \rightarrow 0+} \left( \frac{1}{a} \cdot \text{sinc} \left( \frac{\pi \cdot t}{a} \right) \right) = \delta(t) \Rightarrow X(f) = \lim_{a \rightarrow 0+} \left( \Pi(f \cdot a) \right) = 1$$

Analogicznie dla innych interesujących nas dziedzin.

# Właściwości splotu

**Łączność splotu:**

$$x_1(t) * x_2(t) * x_3(t) = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t) = x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)]$$

**Dwuliniowość splotu:**

$$[a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)] * x_3(t) = a \cdot [x_1(t) * x_3(t)] + b \cdot [x_2(t) * x_3(t)]$$

$$x_1(t) * [a \cdot x_2(t) + b \cdot x_3(t)] = a \cdot [x_1(t) * x_2(t)] + b \cdot [x_1(t) * x_3(t)]$$

**Twierdzenie o splocie:**

$$x_1(t) * x_2(t) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X_1(f) \cdot X_2(f)$$

$$x_1(t) * x_2(t) \quad \xleftrightarrow[ICFT(\omega)]{CFT(\omega)} \quad X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

# Splatanie z deltą Diraca

$$\begin{aligned}x(t) * \delta(t - t_d) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t_d) \cdot x(t - \tau) d\tau = \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t_d) \cdot x(t - t_d) d\tau = x(t - t_d) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t_d) d\tau = \\&= x(t - t_d)\end{aligned}$$

**czyli np.:**

$$\begin{aligned}x(t) * \sum_{n=1}^3 \delta(t - n \cdot \Delta t) &= \sum_{n=1}^3 x(t - n \cdot \Delta t) = \\&= x(t - \Delta t) + x(t - 2 \cdot \Delta t) + x(t - 3 \cdot \Delta t)\end{aligned}$$

## Kolejna para sygnał-transformata

$$\Pi(t) * \Pi(t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad \text{sinc}(\pi \cdot f) \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f)$$

**czyli:**

$$x(t) = \Lambda(t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad X(f) = \text{sinc}^2(\pi \cdot f)$$

---

$$\Pi(t) * \Pi(t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} \quad \text{sinc}(\omega/2) \cdot \text{sinc}(\omega/2)$$

**czyli:**

$$x(t) = \Lambda(t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} \quad X(\omega) = \text{sinc}^2(\omega/2)$$

# Splot w dziedzinie Fouriera

**Definiujemy go analogicznie:**

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(v) \cdot X_2(f-v) dv = X_1(f) * X_2(f)$$

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(w) \cdot X_2(\omega-w) dw = X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

**Splot w tych dziedzinach posiada te same właściwości, co w dziedzinie  $t$ :**  
**przemiennność, łączność, dwuliniowość, itd.**

**Odwrócone twierdzenie o splocie:**

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X_1(f) * X_2(f)$$

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \quad \xleftrightarrow[ICFT(\omega)]{CFT(\omega)} \quad \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

# **Wniosek: interpretacja Fouriera dla modulacji amplitudy**

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad Y(f) = X(f) * \left( \frac{1}{2} \cdot [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] \right)$$

$$X(f) * \left( \frac{1}{2} \cdot [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] \right) = \frac{1}{2} \cdot [X(f) * \delta(f + f_c)] + \frac{1}{2} \cdot [X(f) * \delta(f - f_c)]$$

**Twierdzenie o modulacji (amplitudy):**

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad Y(f) = \frac{1}{2} \cdot X(f + f_c) + \frac{1}{2} \cdot X(f - f_c)$$

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(\omega_c \cdot t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} \quad Y(\omega) = \frac{1}{2} \cdot X(\omega + \omega_c) + \frac{1}{2} \cdot X(\omega - \omega_c)$$

# Sygnał okresowy

$$x(t) = x(t + n \cdot T)$$

**$T$  – okres podstawowy (zwykle zakładamy  $T > 0$ )**

$$n = \dots - 2, -1, 0, 1, 2 \dots$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T)$$

**$x_0(t)$  – wzorzec okresu. Można założyć, że  $x_0(t)$  jest zerowe poza przyjętym odcinkiem  $t$  o długości  $T$ , ale w ogólności nie jest to konieczne.**

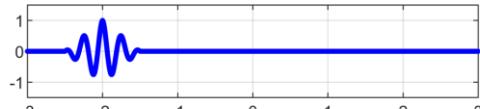
# Przykłady sygnałów okresowych

$T=1$

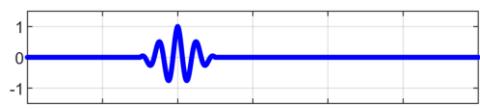
$x_0(t+3 \cdot T)$



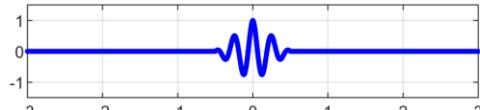
$x_0(t+2 \cdot T)$



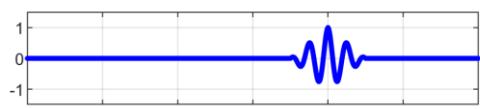
$x_0(t+T)$



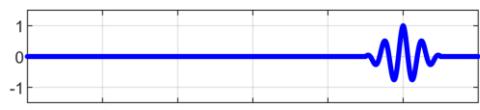
$x_0(t)$



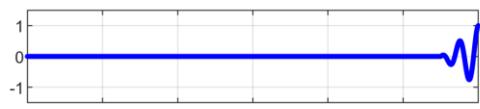
$x_0(t-T)$



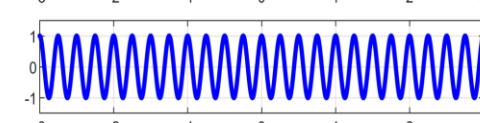
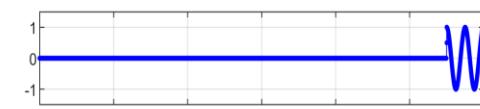
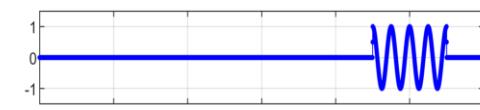
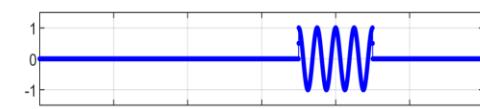
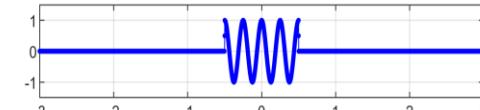
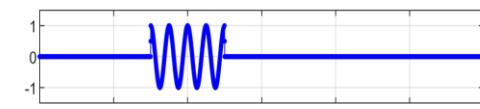
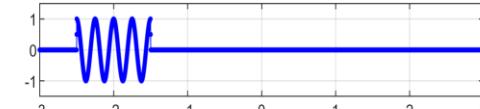
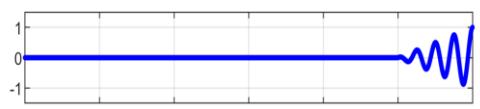
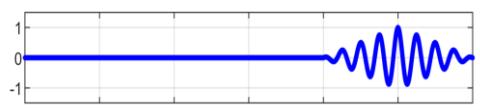
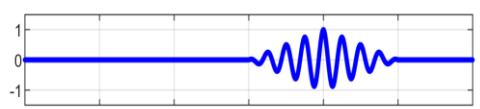
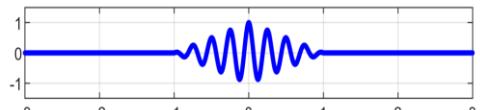
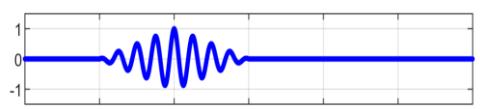
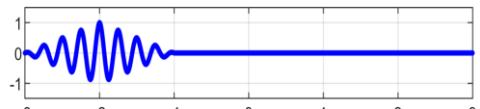
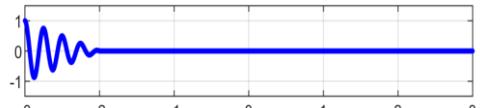
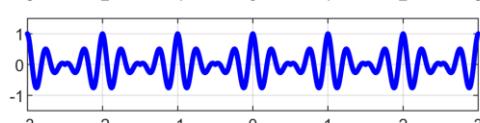
$x_0(t-2 \cdot T)$



$x_0(t-3 \cdot T)$



$x(t)$



# Sygnal okresowy

$$x(t) = x(t + n \cdot T)$$

$$n = \dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots$$

**$T$  – okres podstawowy (zwykle zakładamy  $T > 0$ )**

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T) = x_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot T) = x_0(t) * g_T(t)$$

**pseudo-funkcja: grzebień Diraca**

# Szereg Fouriera (wersja zespolona)

**Sygnal musi spełniać warunki Dirichleta!**

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_T \cdot t} \quad : \quad f_T = \frac{1}{T}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} \quad : \quad f_n = n \cdot f_T \quad \text{czyli:}$$

$$f_1 = f_T$$

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} dt$$

# Szereg Fouriera (wersja zespolona)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T)$$

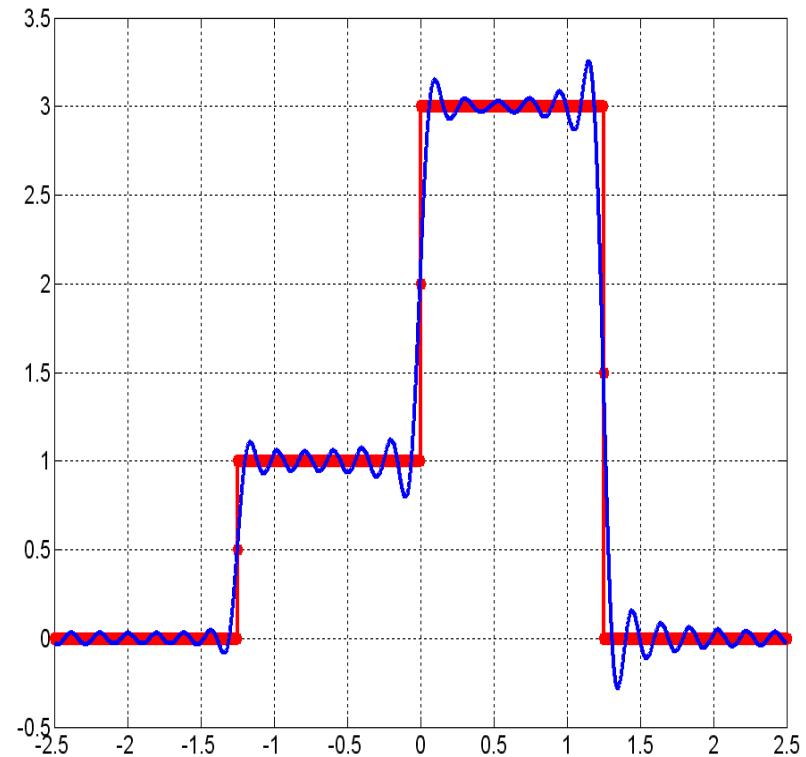
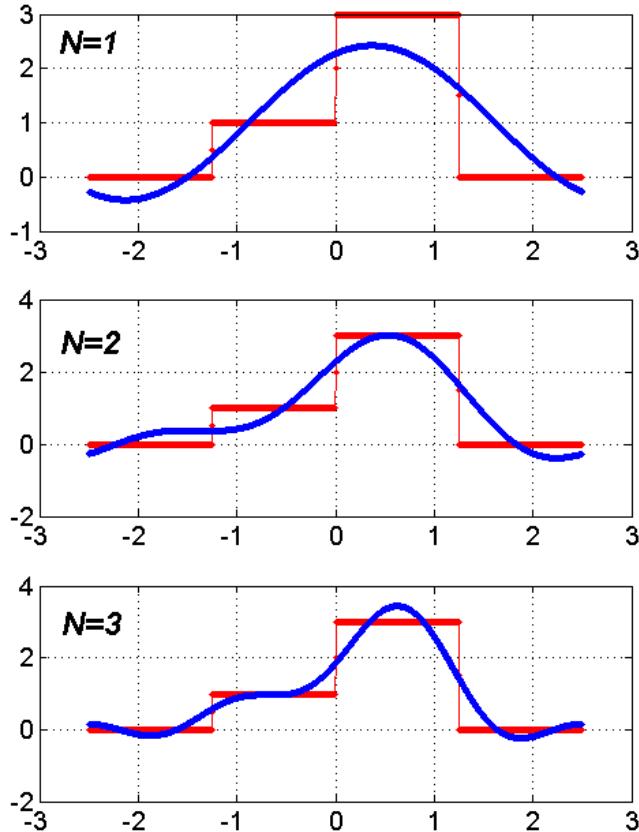
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot n \cdot \omega_T \cdot t} \quad : \quad \omega_T = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot \omega_n \cdot t} \quad : \quad \omega_n = n \cdot \omega_T$$

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0 + T} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega_n \cdot t} dt$$

# Przykład aproksymacji szeregiem Fouriera dla sygnałów schodkowych z okresem $T$

$T=5 \text{ s}$



# Szereg Fouriera w dziedzinie $f$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_0(f - n \cdot F)$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot n \cdot t_F} \quad : \quad t_F = \frac{1}{F}$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n} \quad : \quad t_n = n \cdot t_F$$

$$c_n = \frac{1}{F} \cdot \int_{f_0}^{f_0 + F} X(f) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n} \, df$$

# Szereg Fouriera w dziedzinie $\omega$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_0(\omega - n \cdot \Omega)$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot \omega \cdot n \cdot t_\Omega} \quad : \quad t_\Omega = \frac{1}{\Omega}$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot \omega \cdot t_n} \quad : \quad t_n = n \cdot t_\Omega$$

$$c_n = \frac{1}{\Omega} \cdot \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Omega} X(\omega) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_n} d\omega$$

# Przykład

$$x_0(t) = \Pi\left(\frac{t}{\Delta t}\right) \quad : \quad \Delta t < T$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T)$$

$n \neq 0$ :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot t / T} dt = \frac{1}{T} \cdot \left[ \frac{e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot t / T}}{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n / T} \right]_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} = \frac{1}{T} \cdot \frac{e^{-j \cdot \pi \cdot n \cdot \Delta t / T} - e^{+j \cdot \pi \cdot n \cdot \Delta t / T}}{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n / T} = \\ &= \frac{\Delta t}{T} \cdot \frac{e^{j \cdot \pi \cdot n \cdot \Delta t / T} - e^{-j \cdot \pi \cdot n \cdot \Delta t / T}}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \Delta t / T} = \frac{\Delta t}{T} \cdot \frac{\sin(\pi \cdot n \cdot \Delta t / T)}{\pi \cdot n \cdot \Delta t / T} \end{aligned}$$

$n = 0$ :

$$c_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot t / T} dt = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} 1 dt = \frac{\Delta t}{T}$$

**Czyli:**

$$c_n = \frac{\Delta t}{T} \cdot \text{sinc}(\pi \cdot n \cdot \Delta t / T)$$

## Porównanie szeregu i CFT

Dla ostatniego przykładu:

$$c_n = \frac{\Delta t}{T} \cdot \text{sinc}\left(\pi \cdot n \cdot \Delta t / T\right) \quad \Pi\left(\frac{t}{\Delta t}\right) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \Delta t \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot \Delta t)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot X_0(f_n)$$

**Porównując odpowiednie wzory bez trudu stwierdzamy, że jest to ogólna zależność**

**– w pierwszym podejściu można założyć, że sygnał  $x_0$  jest niezerowy tylko na odcinku o długości okresu, po którym całkujemy wyznaczając  $c_n$ .**

**Czyli dla sygnału rzeczywistego wartości  $c_n$  i  $c_{-n}$  są zawsze sprzężone. Można to także wykazać wprost ze wzoru na  $c_n$ .**

# Interpretacja szeregu Fouriera dla sygnału rzeczywistego

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} \quad : \quad f_n = n \cdot f_T$$

$$c_n = |c_n| \cdot e^{j \cdot \varphi_n} \quad e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) + j \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t)$$

$$c_n \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} + c_{-n} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_{-n} \cdot t} = c_n \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} + \overline{c_n} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} =$$

$$= |c_n| \cdot e^{j \cdot \varphi_n} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) + |c_n| \cdot e^{j \cdot \varphi_n} \cdot j \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) + \\ + |c_n| \cdot e^{-j \cdot \varphi_n} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) - |c_n| \cdot e^{-j \cdot \varphi_n} \cdot j \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) =$$

$$= 2 \cdot |c_n| \cdot [\cos(\varphi_n) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) - \sin(\varphi_n) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t)]$$

# Interpretacja szeregu Fouriera dla sygnału rzeczywistego

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} \quad : \quad f_n = n \cdot f_T$$

$$c_n = |c_n| \cdot e^{j \cdot \varphi_n}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot |c_n| \cdot [\cos(\varphi_n) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) - \sin(\varphi_n) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t)] &= \\ &= 2 \cdot |c_n| \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t + \varphi_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= |c_0| \cdot e^{j \cdot \varphi_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \cdot |c_n| \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t + \varphi_n) = \\ &= d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t - \beta_n) \end{aligned}$$

**Ważny wzorek:**

**Dla  $n > 0$ :**  $d_n = 2 \cdot |c_n|;$   $\beta_n = -\varphi_n$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$d_0 = c_0; \quad |d_0| = \pm d_0 \quad \wedge \quad (\beta_0 = 0 \vee \beta_0 = \pm \pi); \quad \beta_0 = \pm \varphi_0$$

# Interpretacja szeregu Fouriera

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} \quad : \quad f_n = n \cdot f_T$$

$$x(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t - \beta_n)$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) + b_n \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t)$$

**Dla  $n > 0$ :**  $a_n = 2 \cdot |c_n| \cdot \cos(\varphi_n); \quad b_n = -2 \cdot |c_n| \cdot \sin(\varphi_n)$

**Ważny wzorek:**

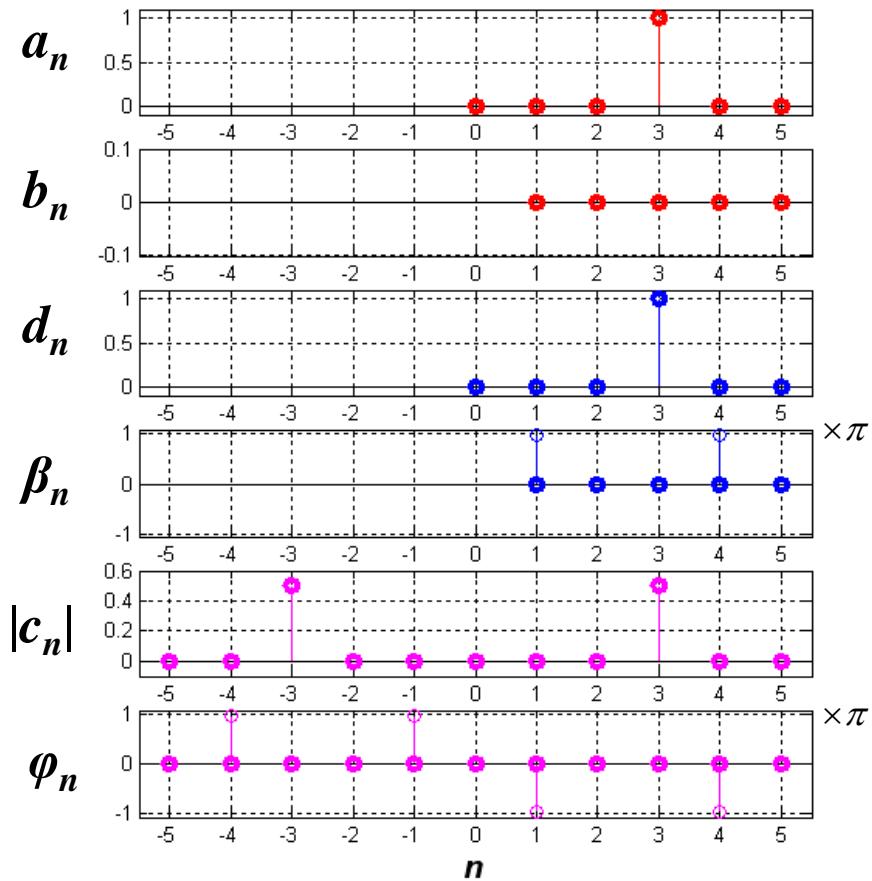
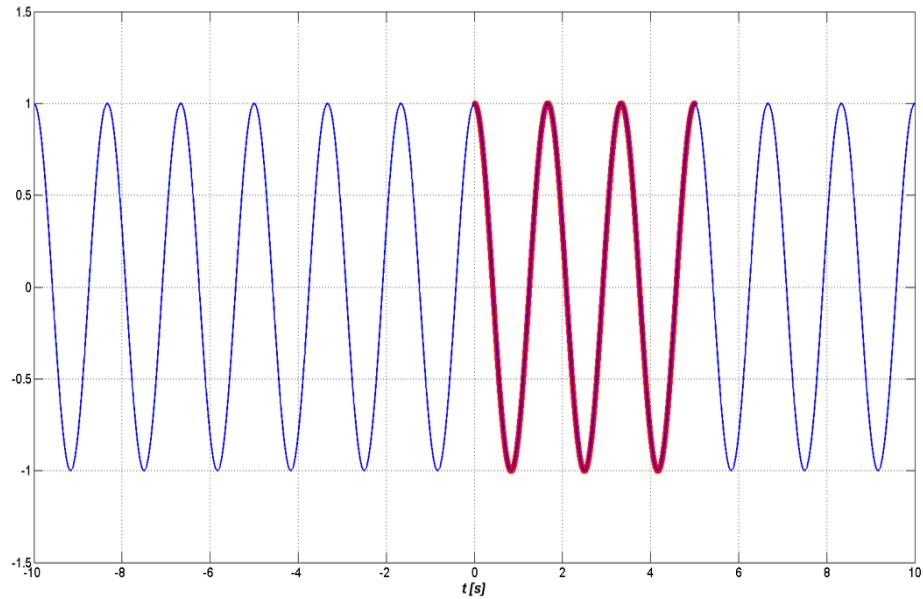
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$a_n = d_n \cdot \cos(\beta_n); \quad b_n = d_n \cdot \sin(\beta_n)$$

# Przykład wyznaczania szeregu Fouriera dla sygnału kosinusoidalnego o całkowitej liczbie okresów w odcinku $T$

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_s t + \varphi_s) & \text{dla } t \in (0, T) \\ \text{z war. Dirichleta} & \text{dla } t = 0 \text{ lub } t = T \end{cases}$$

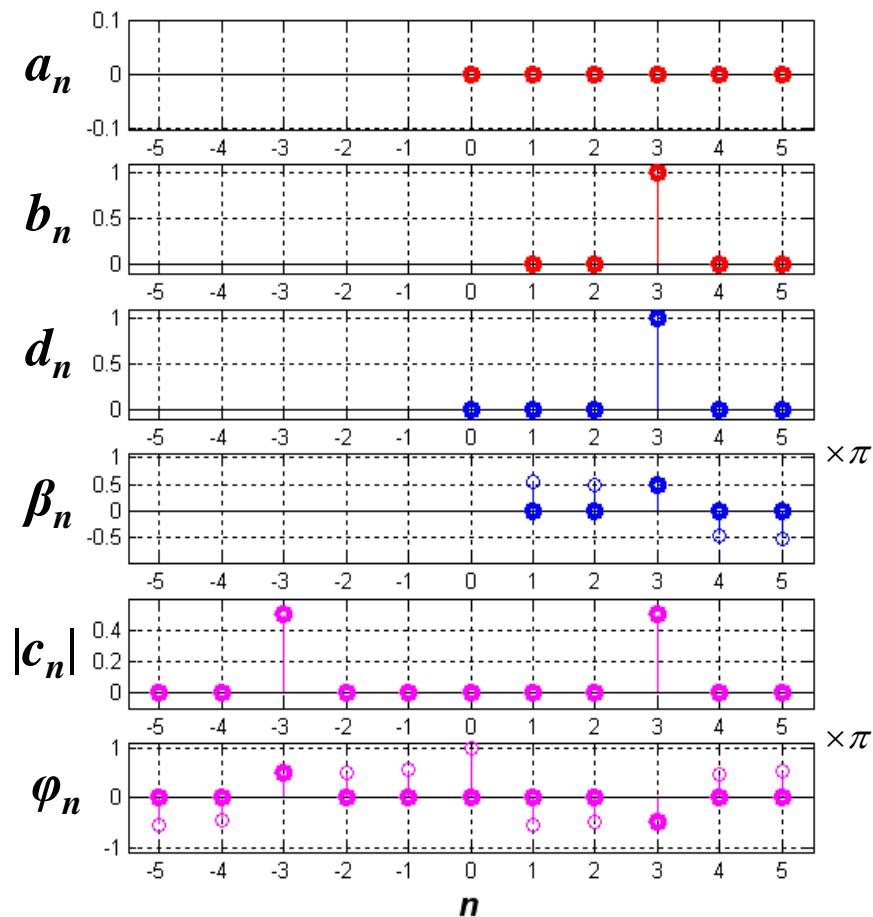
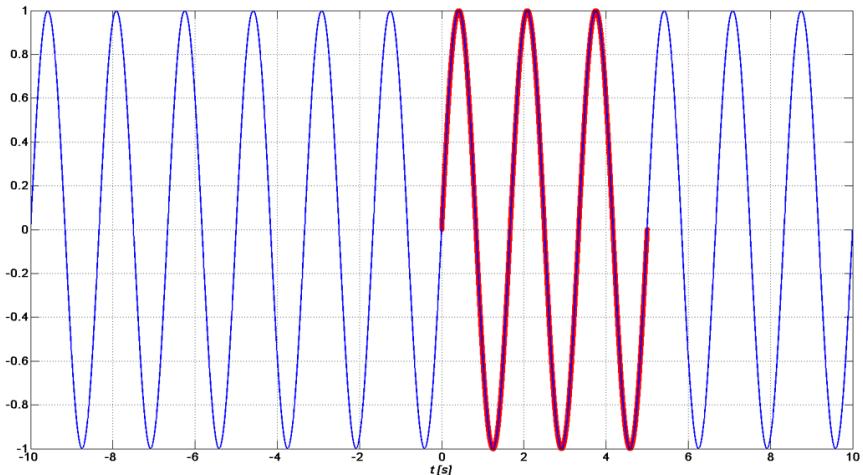
$f_s = 3 \cdot f_T; \quad \varphi_s = 0; \quad T = 5s;$



# Przykład wyznaczania szeregu Fouriera dla sygnału sinusoidalnego o całkowitej liczbie okresów w odcinku $T$

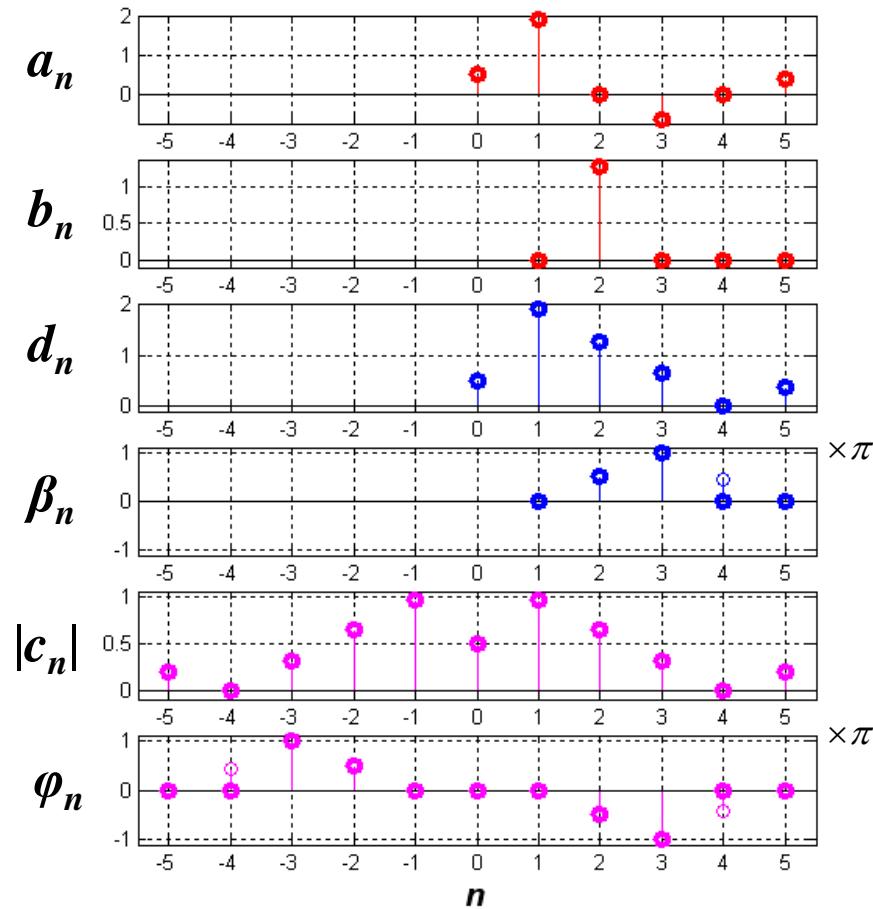
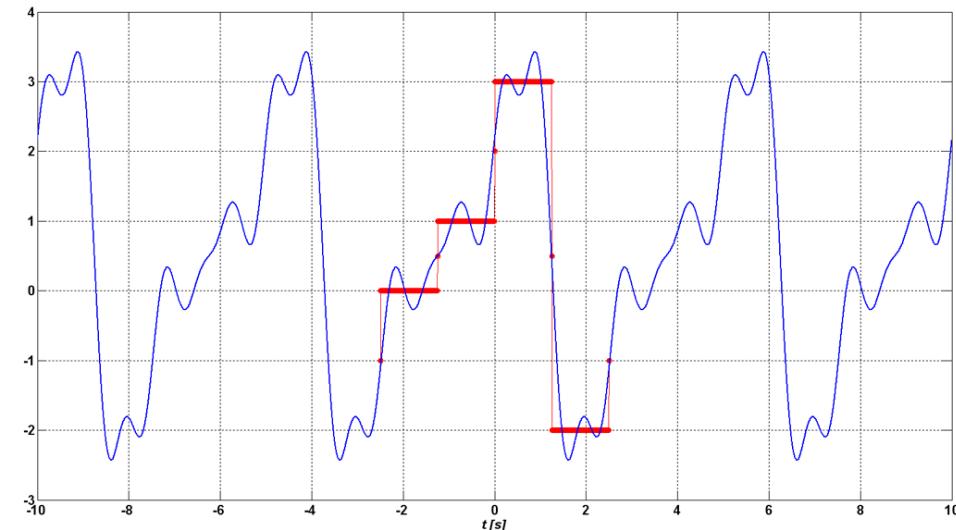
$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_s t + \varphi_s) & \text{dla } t \in (0, T) \\ \text{z war. Dirichleta} & \text{dla } t = 0 \text{ lub } t = T \end{cases}$$

$$f_s = 3 \cdot f_T; \quad \varphi_s = -\frac{\pi}{2}; \quad T = 5s;$$



# Przykład wyznaczania szeregu Fouriera dla sygnału schodkowego

$N=5$



# Wyliczenie pomocnicze

**Założenie, że (ko)sinusoida o częstotliwości  $f_s$  ma w całkowanym odcinku całkowitą liczbę okresów bardzo ułatwia całkowanie!**

$$t_2 - t_1 = T$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_s \cdot t) dt &= \frac{1}{2} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \cos(4 \cdot \pi \cdot n \cdot f_s \cdot t) + 1 dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (t_2 - t_1) = \frac{T}{2} \end{aligned}$$

**Ważny wzorek:**

$$\cos^2(\alpha) = \frac{\cos(2 \cdot \alpha) + 1}{2}$$

# Przykład

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot (t - t_d))$$

$$T = \frac{1}{f_T}$$

$$f_T = f_s$$

$$t_d = \frac{\varphi_d}{2 \cdot \pi \cdot f_s}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} \cos(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot (t - t_d)) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_T \cdot t} dt =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} \cos(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot t - \varphi_d) \cdot [\cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_T \cdot t) - j \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_T \cdot t)] dt =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} [\cos(\varphi_d) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot t) + \sin(\varphi_d) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot t)] \cdot [\cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_T \cdot t) - j \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_T \cdot t)] dt = \begin{cases} \text{dalej} \\ \text{tylko} \\ \text{dla} \\ n = 1 \end{cases} =$$

$$= \frac{\cos(\varphi_d)}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} \cos^2(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot t) dt - j \cdot \frac{\sin(\varphi_d)}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} \sin^2(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot t) dt = \left[ \frac{\cos(\varphi_d)}{T} - j \cdot \frac{\sin(\varphi_d)}{T} \right] \cdot \frac{T}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{-j \cdot \varphi_d}$$

Proszę sprawdzić samodzielnie, co otrzymamy dla:  $n = -1$  oraz dla  $n$  innych niż 1 lub -1.

## Przykład (cd.)

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot (t - t_d))$$

$$f_T = f_1 = f_s$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \cdot e^{-j \cdot \varphi_d}; \quad c_{-1} = \frac{1}{2} \cdot e^{+j \cdot \varphi_d}$$

dla  $n \neq 1 \text{ i } n \neq -1$  :  $c_n = 0$

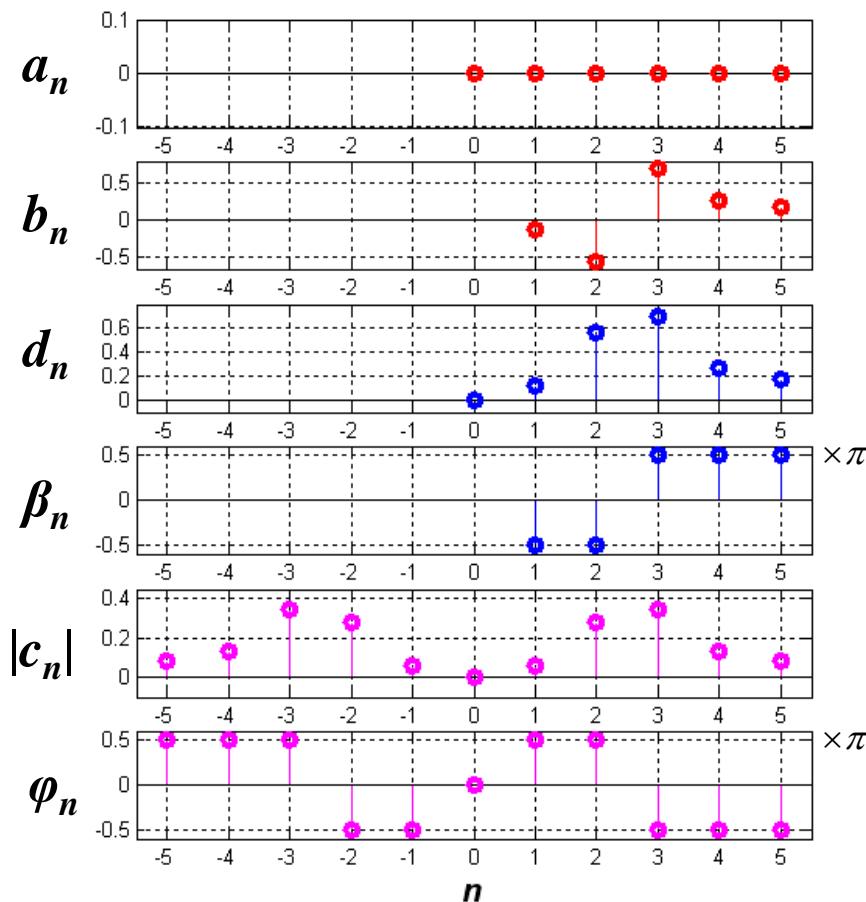
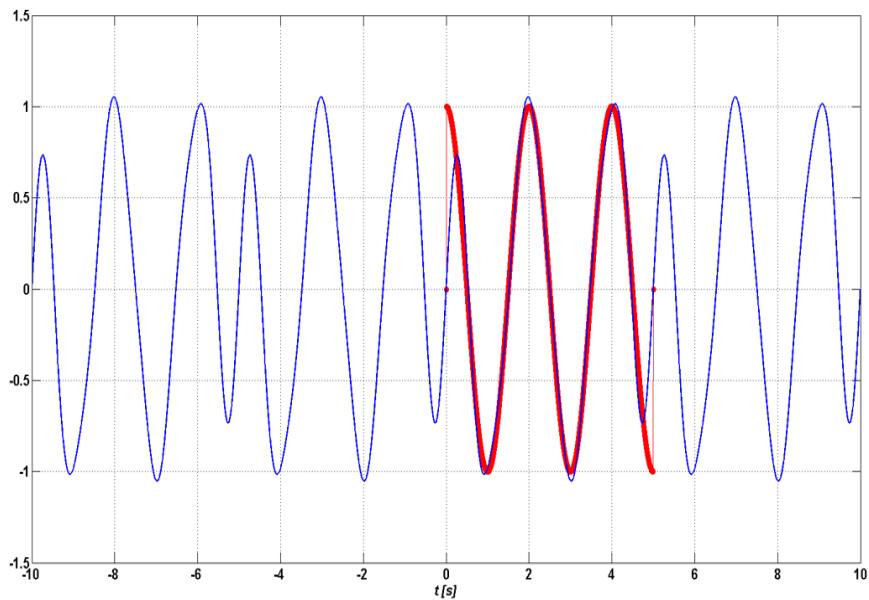
$$t_d = \frac{\varphi_d}{2 \cdot \pi \cdot f_s}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} = \frac{1}{2} \cdot e^{-j \cdot \varphi_d} \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t} + \frac{1}{2} \cdot e^{+j \cdot \varphi_d} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t} = \\ &= \frac{e^{+j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t - \varphi_d)} + e^{-j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t - \varphi_d)}}{2} = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t - \varphi_d) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot (t - t_d)) \end{aligned}$$

# Przykład wyznaczania szeregu Fouriera dla sygnału kosinusoidalnego o niecałkowitej liczbie okresów w odcinku $T$

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_s t + \varphi_s) & \text{dla } t \in (0, T) \\ \text{z war. Dirichleta} & \text{dla } t = 0 \text{ lub } t = T \end{cases}$$

$$f_s = 2.5f_T; \quad \varphi_s = 0; \quad T = 5s;$$



# Transformata CFT szeregu Fouriera

## Transformata sygnału okresowego

**Wyznaczmy transformatę dla szeregu Fouriera:**

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} \quad \xleftrightarrow{\begin{matrix} CFT \\ ICFT \end{matrix}} \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \delta(f - f_n)$$

**a zatem dla sygnału okresowego:**

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot X_0(f_n)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T) \quad \xleftrightarrow{\begin{matrix} CFT \\ ICFT \end{matrix}} \quad X(f) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_0(f_n) \cdot \delta(f - f_n)$$

**Można założyć wstępnie, że sygnał  $x_0$  jest niezerowy tylko na odcinku o długości  $T$ , ale generalnie nie jest to konieczne.**

# Analogiczne zależności „w drugą stronę”

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \delta(t + t_n) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n}$$

a zatem:

(po uwzględnieniu różnic wynikających z faktu stosowania tym razem ICFT, a nie – jak poprzednio – CFT)

$$x(t) = \frac{1}{F} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t_n) \cdot \delta(t - t_n) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_0(f - n \cdot F)$$

**Tym razem można wstępnie dla ułatwienia założyć, że transformata  $X_0(f)$  jest niezerowa tylko na odcinku o długości  $F$ , ale wzory są poprawne także w innym przypadku.**

# Transformata grzebienia Diraca

$$g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_n) \quad : \quad t_n = n \cdot T$$

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \delta(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} dt = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \delta(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot 0} dt = \frac{1}{T}$$

$$g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} \quad \xleftarrow[ICFT]{CFT} \quad G_T(f) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n/T)$$

$\Delta f = 1/T$

$$g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot T) \quad \xleftarrow[ICFT]{CFT} \quad G_T(f) = \Delta f \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n \cdot \Delta f)$$

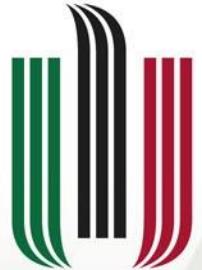
# Podsumowanie

- 1. Transformaty: sygnału stałego, delty Diraca, sygnału harmonicznego oraz cos/sin.**
- 2. Delta Diraca jako pseudo-funkcja graniczna ciągu funkcji – definicja i właściwości.**
- 3. Splot: definicja, twierdzenie o splocie, splot z deltą Diraca, transformata sygnału  $\Lambda(t)$ , twierdzenie o modulacji.**
- 4. Szereg Fouriera: różne wersje, efekt okresowości.**
- 5. Zależność szeregu i transformaty dla sygnału okresowego.**
- 6. Transformata szeregu Fouriera.**
- 7. Transformata pseudo-funkcji grzebienia Diraca.**



AGH

*Zapraszam na ćwiczenia ...  
lub do laboratorium ...*



**AGH**

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

# **Teoria sygnałów**

## **Wykład 5**

**Dr inż. Przemysław Korohoda  
Katedra Elektroniki, AGH, Kraków**

[home.agh.edu.pl/~korohoda/rok\\_2022\\_2023\\_zima/TS\\_EL\\_2](http://home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2)

**UPEL: TS 2022**

# Plan wykładu

- 1. Sygnał jako wektor.**
- 2. Iloczyn skalarny.**
- 3. Norma.**
- 4. Metryka.**
- 5. Aproksymacja sygnału w zadanej bazie.**
- 6. Baza kanoniczna, baza Haara i baza Walsha.**
- 7. Wyjaśnienie wzorów na współczynniki szeregu Fouriera.**

# Sygnał jako wektor

**Sygnały = funkcje określone na dziedzinie,  $D$ , zawartej w osi „czasu”.**

$$\mathbf{x}_1 \equiv x_1(t) : t \in D$$

$$\mathbf{x}_2 \equiv x_2(t) : t \in D$$

$$\mathbf{x}_3 \equiv x_3(t) : t \in D$$

$$\mathbf{x}_4 \equiv x_4(t) : t \in D$$

$$\mathbf{x} \equiv x(t) : t \in D$$

$$\mathbf{y} \equiv y(t) : t \in D$$

$$\mathbf{z} \equiv z(t) : t \in D$$

$$\mathbf{u} \equiv u(t) : t \in D$$

$$\mathbf{v} \equiv v(t) : t \in D$$

$$\mathbf{w} \equiv w(t) : t \in D$$

$$\mathbf{h} \equiv h(t) : t \in D$$

**Wektorowa przestrzeń liniowa nad ciałem  $L$ :**

$$(\mathbf{X}, (\mathbf{L}, +, \cdot), \oplus, \otimes) \quad a, b \in \mathbf{L}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X} \quad \wedge \quad \mathbf{y} \in \mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad a \otimes \mathbf{x} \oplus b \otimes \mathbf{y} \in \mathbf{X}$$

**Dla sygnałów można to zapisać (upraszczając symbole działań) tak:**

$$x(t) \in \mathbf{X} \quad \wedge \quad y(t) \in \mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \in \mathbf{X}$$

# Iloczyn skalarny ogólnie

## Odwzorowanie

$$\mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$$

**lub**

$$\mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{C}$$

$$\forall_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{X}} \quad \wedge \quad \forall_{a, b \in \mathbf{L}}$$

- 1)  $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \overline{\mathbf{y} \circ \mathbf{x}}$       -> **wniosek:**  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} \in \mathbf{R}$
- 2)  $(a \otimes \mathbf{x} \oplus b \otimes \mathbf{y}) \circ \mathbf{z} = a \cdot \mathbf{x} \circ \mathbf{z} + b \cdot \mathbf{y} \circ \mathbf{z}$
- 3)  $[\mathbf{x} \circ \mathbf{x} \geq 0] \quad \wedge \quad [\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}]$

... i wtedy jest to przestrzeń wektorowa **unitarna**.

# Iloczyn skalarny dla sygnałów

**W naszym przypadku będziemy stosować szczególną wersję:**

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \langle x(t), y(t) \rangle = \int_D x(t) \cdot \overline{y(t)} dt$$

**Ale można zaproponować nieskończenie wiele iloczynów skalarnych, np. takich:**

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \langle x(t), y(t) \rangle = \int_D x(t) \cdot \overline{y(t)} \cdot w(t) dt$$
$$w(t) > 0$$

# (Dwu)liniowość iloczynu skalarnego

Ta własność jest oczywista dla „naszego” iloczynu skalarnego.

$$\overline{\mathbf{x} \circ \mathbf{y}} = \overline{\mathbf{x}} \circ \overline{\mathbf{y}}$$

$$(a \otimes \mathbf{x} \oplus b \otimes \mathbf{y}) \circ \mathbf{z} = a \cdot \mathbf{x} \circ \mathbf{z} + b \cdot \mathbf{y} \circ \mathbf{z}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \circ (a \otimes \mathbf{y} \oplus b \otimes \mathbf{z}) &= \overline{(a \otimes \mathbf{y} \oplus b \otimes \mathbf{z}) \circ \mathbf{x}} = \overline{(a \otimes \mathbf{y} \oplus b \otimes \mathbf{z})} \circ \overline{\mathbf{x}} = \\ &= \overline{a} \cdot \overline{\mathbf{y}} \circ \overline{\mathbf{x}} + \overline{b} \cdot \overline{\mathbf{z}} \circ \overline{\mathbf{x}} = \overline{a} \cdot \mathbf{x} \circ \mathbf{y} + \overline{b} \cdot \mathbf{x} \circ \mathbf{z} \end{aligned}$$

**Dla zespolonych współczynników jest to antyliniowość, ale dla rzeczywistych współczynników jest to liniowość – czyli razem z aksjomatem (2) oznacza to dwuliniowość.**

**Szczególne przypadki:**

$$(a \cdot \mathbf{x}) \circ \mathbf{y} = a \cdot (\mathbf{x} \circ \mathbf{y})$$

$$\mathbf{x} \circ (a \cdot \mathbf{y}) = \overline{a} \cdot (\mathbf{x} \circ \mathbf{y})$$

# Przykład: sygnały schodkowe ze stałym odcinkiem $\Delta t$

$$D: \quad t \in [0, 4 \cdot \Delta t]$$

$$x(t) = x_1 \cdot \Pi\left(\frac{t - 0.5 \cdot \Delta t}{\Delta t}\right) + x_2 \cdot \Pi\left(\frac{t - 1.5 \cdot \Delta t}{\Delta t}\right) + x_3 \cdot \Pi\left(\frac{t - 2.5 \cdot \Delta t}{\Delta t}\right) + x_4 \cdot \Pi\left(\frac{t - 3.5 \cdot \Delta t}{\Delta t}\right)$$

$$y(t) = y_1 \cdot \Pi\left(\frac{t - 0.5 \cdot \Delta t}{\Delta t}\right) + y_2 \cdot \Pi\left(\frac{t - 1.5 \cdot \Delta t}{\Delta t}\right) + y_3 \cdot \Pi\left(\frac{t - 2.5 \cdot \Delta t}{\Delta t}\right) + y_4 \cdot \Pi\left(\frac{t - 3.5 \cdot \Delta t}{\Delta t}\right)$$


---

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} \circ \mathbf{y} &= \langle x(t), y(t) \rangle = \int_0^{4 \cdot \Delta t} x(t) \cdot \overline{y(t)} dt = \\
 &= \int_0^{\Delta t} x(t) \cdot \overline{y(t)} dt + \int_{\Delta t}^{2 \cdot \Delta t} x(t) \cdot \overline{y(t)} dt + \int_{2 \cdot \Delta t}^{3 \cdot \Delta t} x(t) \cdot \overline{y(t)} dt + \int_{3 \cdot \Delta t}^{4 \cdot \Delta t} x(t) \cdot \overline{y(t)} dt = \\
 &= \int_0^{\Delta t} x_1 \cdot \overline{y_1} dt + \int_{\Delta t}^{2 \cdot \Delta t} x_2 \cdot \overline{y_2} dt + \int_{2 \cdot \Delta t}^{3 \cdot \Delta t} x_3 \cdot \overline{y_3} dt + \int_{3 \cdot \Delta t}^{4 \cdot \Delta t} x_4 \cdot \overline{y_4} dt = \\
 &= \Delta t \cdot \sum_{n=1}^4 x_k \cdot \overline{y_k}
 \end{aligned}$$

**...to samo graficznie – na tablicy**



# Przykład: wielomiany określone na odcinkach,,czasu”

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t - 0.5 \cdot \Delta t}{\Delta t}\right) \cdot t^2 + \Pi\left(\frac{t - 1.5 \cdot \Delta t}{\Delta t}\right) \cdot t$$

$$D: \quad t \in [0, 2 \cdot \Delta t]$$

$$y(t) = \Pi\left(\frac{t - 0.5 \cdot \Delta t}{\Delta t}\right) \cdot (1-t) + \Pi\left(\frac{t - 1.5 \cdot \Delta t}{\Delta t}\right) \cdot 2 \cdot t^3$$

---

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \circ \mathbf{y} &= \langle x(t), y(t) \rangle = \int_0^{2 \cdot \Delta t} x(t) \cdot \overline{y(t)} dt = \\ &= \int_0^{\Delta t} x(t) \cdot \overline{y(t)} dt + \int_{\Delta t}^{2 \cdot \Delta t} x(t) \cdot \overline{y(t)} dt = \int_0^{\Delta t} t^2 \cdot (1-t) dt + \int_{\Delta t}^{2 \cdot \Delta t} 2 \cdot t \cdot t^3 dt = \\ &= \int_0^{\Delta t} t^2 - t^3 dt + 2 \cdot \int_{\Delta t}^{2 \cdot \Delta t} t^4 dt = \left[ \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} \right]_0^{\Delta t} + 2 \cdot \left[ \frac{t^5}{5} \right]_{\Delta t}^{2 \cdot \Delta t} = \frac{(\Delta t)^3}{3} - \frac{(\Delta t)^4}{4} + 2 \cdot \frac{(32-1) \cdot (\Delta t)^5}{5} = \\ &= \frac{(\Delta t)^3}{3} - \frac{(\Delta t)^4}{4} + 62 \cdot \frac{(\Delta t)^5}{5} \end{aligned}$$



AGH

## Przykład: sygnały typu cos/sin

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_1 \cdot t)$$

$$y(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_1 \cdot t)$$

$$D: \quad t \in [0, T]$$

$$f_1 = \frac{1}{T}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \circ \mathbf{y} &= \langle x(t), y(t) \rangle = \int_0^T x(t) \cdot \overline{y(t)} dt = \\ &= \int_0^T \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_1 \cdot t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_1 \cdot t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^T \cos(2 \cdot \pi \cdot (n+m) \cdot f_1 \cdot t) dt + \frac{1}{2} \cdot \int_0^T \cos(2 \cdot \pi \cdot (n-m) \cdot f_1 \cdot t) dt = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{dla } n = m \end{cases} \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

# Przykład: sygnały typu cos/sin (cd.)

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_1 \cdot t)$$

$$y(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_1 \cdot t)$$

$$D: \quad t \in [0, T]$$

$$f_1 = \frac{1}{T}$$

**Iloczyn funkcji trygonometrycznych można też zastąpić korzystając ze wzorów Eulera:**

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} \circ \mathbf{y} &= \langle x(t), y(t) \rangle = \int_0^T x(t) \cdot \overline{y(t)} dt = \\
 &= \int_0^T \frac{e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_1 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_1 \cdot t}}{2} \cdot \frac{e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_1 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_1 \cdot t}}{2} dt = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \int_0^T e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (n+m) \cdot f_1 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (n+m) \cdot f_1 \cdot t} + e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (n-m) \cdot f_1 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (n-m) \cdot f_1 \cdot t} dt = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{dla } n = m \end{cases}
 \end{aligned}$$

## Przykład: sygnały typu cos/sin (cd.)

$$D: t \in [0, T]$$

$$f_1 = \frac{1}{T}$$

Analogicznie dla pozostałych par typu:

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_1 \cdot t)$$

$$y(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_1 \cdot t)$$

$$x(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_1 \cdot t)$$

$$y(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_1 \cdot t)$$

$$\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

**lub ze wzorów Eulera...**



AGH

## Przykład: sygnały typu $\exp(j\varphi)$

$$x(t) = e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_1 \cdot t}$$

$$y(t) = e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_1 \cdot t}$$

$$D: \quad t \in [0, T]$$

$$f_1 = \frac{1}{T}$$

---

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \circ \mathbf{y} &= \langle x(t), y(t) \rangle = \int_0^T x(t) \cdot \overline{y(t)} dt = \\ &= \int_0^T e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_1 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_1 \cdot t} dt = \int_0^T e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (n-m) \cdot f_1 \cdot t} dt = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq m \\ T & \text{dla } n = m \end{cases} \end{aligned}$$



AGH

## Przykład: sygnały trójkątne

$$x(t) = 2 \cdot \Lambda\left(\frac{t-4}{4}\right)$$

$$D: t \in [0, 8]$$

$$y(t) = 3 \cdot \Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{t-6}{2}\right)$$

---

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \circ \mathbf{y} &= \langle x(t), y(t) \rangle = \int_0^T x(t) \cdot \overline{y(t)} dt = \int_0^8 x(t) \cdot y(t) dt \\ &= \int_0^2 x(t) \cdot y(t) dt + \int_2^4 x(t) \cdot y(t) dt + \int_4^6 x(t) \cdot y(t) dt + \int_6^8 x(t) \cdot y(t) dt = \\ &= 2 \cdot (1 \cdot 3) \cdot \frac{1}{3} + \left[ 2 \cdot (1 \cdot 3) \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (1 \cdot 3) \cdot \frac{1}{6} \right] + \left[ 2 \cdot (1 \cdot (-1)) \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (1 \cdot (-1)) \cdot \frac{1}{6} \right] + 2 \cdot (1 \cdot (-1)) \cdot \frac{1}{3} = \\ &= 2 + [3 + 1] + [-1 - 1/3] + (-2/3) = 6 - 2 = 4 \end{aligned}$$

wyjaśnienie skrótu myślowego na tablicy...

## Norma, czyli „długość wektora”

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$$
$$\mathbf{X} \ni \mathbf{x} \rightarrow \|\mathbf{x}\| \in \mathbf{R}_{0+}$$
$$a \in \mathbf{L}$$

1)  $\left[ \|\mathbf{x}\| \geq 0 \right] \wedge \left[ \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \right]$

2)  $\|\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

3)  $\|a \otimes \mathbf{x}\| = |a| \cdot \|\mathbf{x}\|$

## Przykład użytecznej normy...

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x} \circ \mathbf{x} = \langle x(t), x(t) \rangle$$

czyli:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \circ \mathbf{x}} = \sqrt{\langle x(t), x(t) \rangle}$$

**Przykład dla sygnału  $x(t)$ :**

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \|x(t)\|^2 = \|x(t)\|_{L^2}^2 = \int_D x(t) \cdot \overline{x(t)} dt$$

**Energia sygnału  $x(t)$ :**

$$Energia(x(t)) = \|x(t)\|_{L^2}^2 = \int_D |x(t)|^2 dt$$

# Ortogonalność wektorów

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos(\alpha)$$

**Uwaga – przy takim zapisie kosinus może się okazać zespolony!**

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = 0$$

gdy:

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \vee \quad \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \vee \quad \cos(\alpha) = 0$$

**...bo to wynika z definicji normy „powiązanej” z rozważanym iloczynem skalarnym.**

**Dwa wektory uznajemy za ortogonalne,  
gdy ich iloczyn skalarny jest zerowy:**

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = 0 \iff \mathbf{x} \perp \mathbf{y}$$

# Przykłady energii sygnału

$$D: \quad t \in [0, T]$$

$$f_1 = \frac{1}{T}$$

$$\|\cos(2\pi n f_1 t)\|^2 = \frac{T}{2}$$

$$\|\sin(2\pi n f_1 t)\|^2 = \frac{T}{2}$$

$$\|e^{j2\pi n f_1 t}\|^2 = T$$

## Odległość sygnałów (metryka)

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$$
$$\rho : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}_{0+}$$

$$1) \quad [\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0] \quad \wedge \quad [\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}]$$

$$2) \quad \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

$$3) \quad \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

## Przykład użytecznej metryki...

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{y})} = \sqrt{\langle x(t) - y(t), x(t) - y(t) \rangle}$$

... i teraz mamy już przestrzeń Hilberta.

Czyli w naszym przypadku:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\int_D (x(t) - y(t)) \cdot \overline{(x(t) - y(t))} dt} = \sqrt{\int_D |x(t) - y(t)|^2 dt}$$

Iloczyn skalarny, norma i metryka mogą być określone dla przestrzeni wektorowej funkcji określonych na dowolnej dziedzinie ( $t, f$  lub  $\omega$ ).

## Przykład wyznaczania odległości

$$X(f) = 2 \cdot \Pi(f - 0.5) + j \cdot 3 \cdot \Pi(f - 1.5)$$

$$Y(f) = \Pi(f - 0.5) - j \cdot 2 \cdot \Pi(f - 1.5)$$

$$D: f \in [0, 2]$$

$$X(f) - Y(f) = \Pi(f - 0.5) + j \cdot 5 \cdot \Pi(f - 1.5)$$

$$\begin{aligned} \rho^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^2 = \int_D (X(f) - Y(f)) \cdot \overline{(X(f) - Y(f))} df = \\ &= \int_0^2 [\Pi(f - 0.5) + j \cdot 5 \cdot \Pi(f - 1.5)] \cdot [\Pi(f - 0.5) - j \cdot 5 \cdot \Pi(f - 1.5)] df = \\ &= \int_0^1 1 df + \int_1^2 25 df = 26 \end{aligned}$$

**czyli:**  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{26}$

**czasem wykresy mogą być pomocne...**

# Zapis sygnału za pomocą „alfabetu” sygnałów „standardowych” (baza)

Reprezentacja:

**Baza: układ liniowo niezależnych wektorów.**

$$x(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cdot b_n(t)$$

Aproksymacja:

$$x(t) \cong \sum_{n=1}^N a_n \cdot b_n(t)$$

**Uwaga –  $N$  może być także „nieskończonością”.**

**Zwykle mamy „alfabet” czyli bazę, ale skąd wziąć współczynniki?**

# Sygnal (wektor) błędu aproksymacji

$$x(t) + e(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cdot b_n(t)$$

$$x_{apr}(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cdot b_n(t)$$

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^N a_n \cdot \mathbf{b}_n - \mathbf{e}$$

$$\mathbf{x}_{apr} = \sum_{n=1}^N a_n \cdot \mathbf{b}_n$$

$$\mathbf{e} = \sum_{n=1}^N a_n \cdot \mathbf{b}_n - \mathbf{x}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_{apr} - \mathbf{x}$$

## Rzut ortogonalny

Weźmy dowolny wektor bazy (o indeksie  $k$ ) i obie strony równania pomnożmy „skalarnie”:

$$\mathbf{x} = \left[ \sum a_n \cdot \mathbf{b}_n \right] - \mathbf{e} \quad \cancel{\circ \mathbf{b}_k} \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{b}_k = \left[ \sum a_n \cdot \mathbf{b}_n \circ \mathbf{b}_k \right] - \mathbf{e} \circ \mathbf{b}_k$$

Wektor błędu wziął się stąd, że nie udało się go zapisać za pomocą żadnego z wektorów bazowych, czyli że dla każdego  $k$ :

$$\mathbf{e} \circ \mathbf{b}_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e} \perp \mathbf{b}_k$$

Zatem do rozwiązania otrzymujemy równanie:

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{b}_k = \sum_{n=1}^N a_n \cdot \mathbf{b}_n \circ \mathbf{b}_k$$

# Rozwiązańe ogólne

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{b}_k = \sum_{n=1}^N a_n \cdot \mathbf{b}_n \circ \mathbf{b}_k$$

$k = 1, 2, \dots, N$

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{b}_1 = \sum a_n \cdot \mathbf{b}_n \circ \mathbf{b}_1$$

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{b}_2 = \sum a_n \cdot \mathbf{b}_n \circ \mathbf{b}_2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{b}_N = \sum a_n \cdot \mathbf{b}_n \circ \mathbf{b}_N$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \circ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{x} \circ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{x} \circ \mathbf{b}_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_N \circ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_N \circ \mathbf{b}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_N & \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_N & \dots & \mathbf{b}_N \circ \mathbf{b}_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

# Rozwiążanie dla bazy ortogonalnej

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \circ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{x} \circ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{x} \circ \mathbf{b}_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_N \circ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_N \circ \mathbf{b}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_N & \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_N & \dots & \mathbf{b}_N \circ \mathbf{b}_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{b}_N \circ \mathbf{b}_N \end{bmatrix}$$

czyli:

$$a_k = \frac{\mathbf{x} \circ \mathbf{b}_k}{\|\mathbf{b}_k\|^2}$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

# Rozwiążanie dla bazy ortonormalnej

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \circ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{x} \circ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{x} \circ \mathbf{b}_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_N \circ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_N \circ \mathbf{b}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_N & \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_N & \dots & \mathbf{b}_N \circ \mathbf{b}_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

czyli:

$$a_k = \mathbf{x} \circ \mathbf{b}_k$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

# Baza kanoniczna (ortonormalna)

$$D: t \in [0, 1]$$

$$V_n(t) = \Pi \left( \frac{t - (2 \cdot n - 1) / (2 \cdot N)}{1/N} \right)$$

$$n = 1, 2, \dots, N$$

**W razie potrzeby przesuwamy dziedzinę i/lub skalujemy  
– ale wtedy zazwyczaj zmienią się też wartości norm.**

**Normalizacja funkcji bazowej (gdyby okazała się konieczna):**

$$B_n(t) = \frac{V_n(t)}{\|V_n(t)\|}$$

# Baza Haara (ortonormalna)

$$H_{0,0}(t) = \Pi(t - 1/2)$$

$D: t \in [0, 1]$

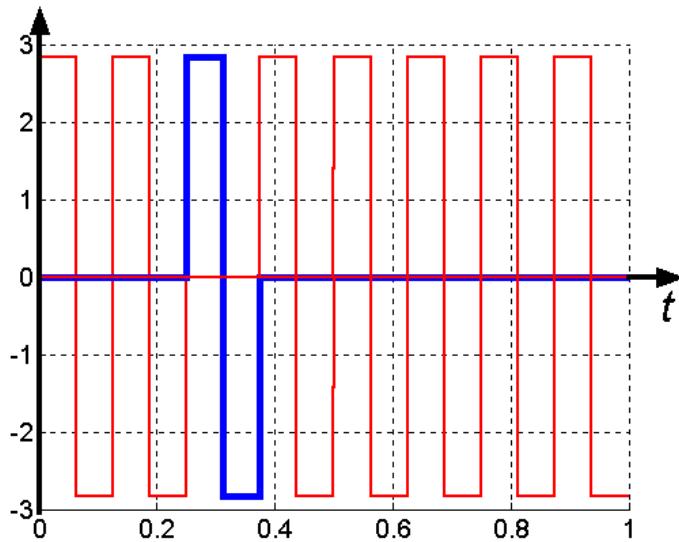
$$H_{0,1}(t) = \text{Haar}(t) = \Pi(2 \cdot (t - 1/4)) - \Pi(2 \cdot (t - 3/4))$$

Dla  $k > 0$ :

$$H_{k,m}(t) = 2^{k/2} \cdot \text{Haar}\left(2^k \cdot \left(t - \frac{m-1}{2^k}\right)\right)$$

$m = 1, 2, \dots, 2^k$

$k=3, m=3$



Czyli kolejne sygnały bazy:

$b_1(t) = H_{0,0}(t)$
$b_2(t) = H_{0,1}(t)$
$b_3(t) = H_{1,1}(t)$
$b_4(t) = H_{1,2}(t)$
$b_5(t) = H_{2,1}(t)$
$b_6(t) = H_{2,2}(t)$
...

# Baza Walsha (ortonormalna)

$$W_{0,0}(t) = \Pi(t - 1/2) \quad D: t \in [0, 1]$$

Czyli kolejne sygnały bazy:

$$W_{0,1}(t) = W_{0,0}(2 \cdot t) + (-1)^1 \cdot W_{0,0}(2 \cdot (t - 1/2))$$

$$W_{1,1}(t) = W_{0,1}(2 \cdot t) + (-1)^1 \cdot W_{0,1}(2 \cdot (t - 1/2))$$

$$W_{1,2}(t) = W_{0,1}(2 \cdot t) + (-1)^2 \cdot W_{0,1}(2 \cdot (t - 1/2))$$

$$b_1(t) = W_{0,0}(t)$$

$$b_2(t) = W_{0,1}(t)$$

$$b_3(t) = W_{1,1}(t)$$

$$b_4(t) = W_{1,2}(t)$$

$$b_5(t) = W_{2,1}(t)$$

$$b_6(t) = W_{2,2}(t)$$

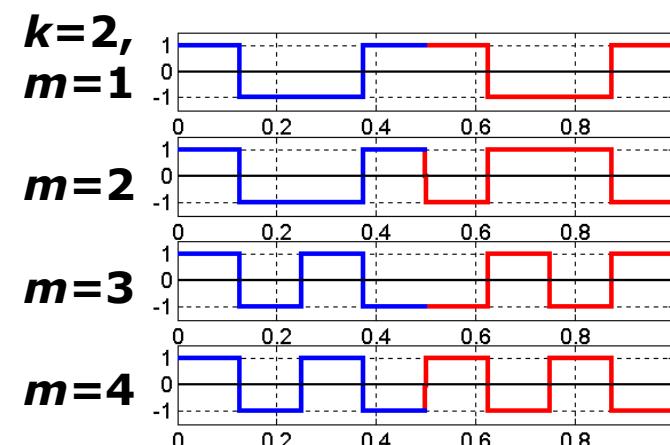
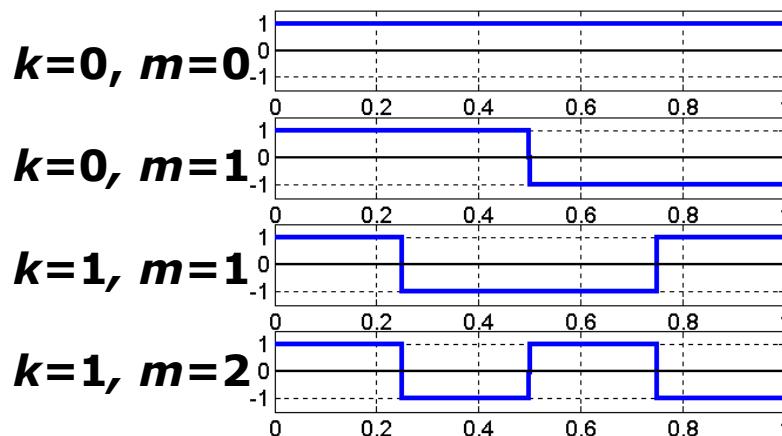
...

Dla  $k > 1$ :

$$W_{k,2 \cdot m-1}(t) = W_{k-1,m}(2 \cdot t) + (-1)^{m-1} \cdot W_{k-1,m}(2 \cdot (t - 1/2))$$

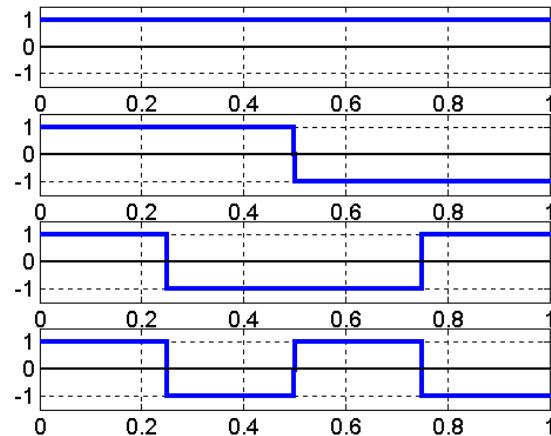
$$W_{k,2 \cdot m}(t) = W_{k-1,m}(2 \cdot t) + (-1)^m \cdot W_{k-1,m}(2 \cdot (t - 1/2))$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}$$

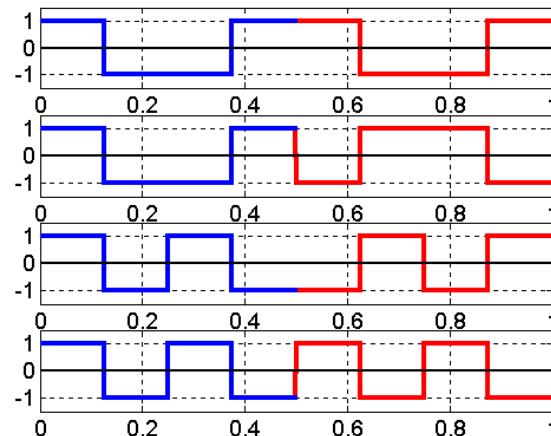


## Baza Walsha (cd.)

Jeden ze sposobów na uporządkowanie:



1  
10  
101  
1010  
  
10101  
101010  
101 0101  
10101010



# Szereg Fouriera (baza ortogonalna)

$$D: \quad t \in [t_0, t_0 + T]$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_T \cdot t} \quad : \quad f_T = \frac{1}{T}$$

$$c_n = \frac{\mathbf{x} \circ \mathbf{b}_n}{\|b_n(t)\|^2} = \frac{1}{\|b_n(t)\|^2} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \overline{b_n(t)} dt$$

$$b_n(t) = e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_T \cdot t}$$

$$\|\mathbf{b}_n\|^2 = T$$

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} dt$$

# Szereg Fouriera (cd.)

$$D: \quad t \in [t_0, t_0 + T]$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) + b_n \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t)$$

$$f_n = n \cdot f_T$$

**Dla  $n=0$ :**

$$\|1\|^2 = T$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$$

**Dla  $n > 0$ :**

$$\|\cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t)\|^2 = \frac{T}{2}$$

$$\|\sin(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t)\|^2 = \frac{T}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) dt$$

**Uwaga na inne na tym slajdzie znaczenie symbolu  $b$  !!!**

## Przypomnienie

**Te wszystkie rozważania można prowadzić dla funkcji określonych na DOWOLNEJ dziedzinie.**

# Podsumowanie

- 1. Sygnał jako wektor.**
- 2. Iloczyn skalarny.**
- 3. Norma.**
- 4. Metryka.**
- 5. Aproksymacja sygnału w zadanej bazie.**
- 6. Baza kanoniczna, baza Haara i baza Walsha.**
- 7. Wyjaśnienie wzorów na współczynniki szeregu Fouriera.**



AGH

*Zapraszam na ćwiczenia ...  
lub do laboratorium ...*



**AGH**

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

# **Teoria sygnałów**

## **Wykład 6**

**Dr inż. Przemysław Korohoda**  
**Katedra Elektroniki, AGH, Kraków**

[home.agh.edu.pl/~korohoda/rok\\_2022\\_2023\\_zima/TS\\_EL\\_2](http://home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2)

**UPEL: TS 2022**

# **Plan wykładu**

- 1. Zasady zachowania: iloczynu skalarnego, energii oraz odległości.**
- 2. Iloczyn skalarny w odniesieniu do splotu.**
- 3. Transformaty sygnałów pochodnej oraz całki.**
- 4. Sygnały skoku i znaku (sgn) oraz ich transformaty.**
- 5. Odwrotne transformaty „widm” określonych jako pochodna oraz całka.**
- 6. Transformata sygnału gaussowskiego.**
- 7. Zasada nieoznaczoności.**

# Właściwości **CFT/ICFT** (twierdzenia)

**Tw. Rayleigha, o zachowaniu iloczynu skalarnego**

$$\begin{array}{ccc}
 x(t), y(t) & \xleftrightarrow[CFT]{ICFT} & X(f), Y(f) \\
 & \downarrow & \\
 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \overline{y(t)} dt & = & \int\limits_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot \overline{Y(f)} df
 \end{array}$$

$$\boxed{< x(t) , y(t) > = < X(f) , Y(f) >}$$

$$\begin{array}{ccc}
 x(t), y(t) & \xleftrightarrow[CFT(\omega)]{ICFT(\omega)} & X(\omega), Y(\omega) \\
 & \downarrow & \\
 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \overline{y(t)} dt & = & \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot \overline{Y(\omega)} d\omega
 \end{array}$$

## Tw. Rayleigha - przykład

**Wyznaczanie całki sygnału:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi \cdot t) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(f) \cdot \delta(f + f_0) df = \Pi(-f_0)$$

**... co wynika z następujących zależności:**

$$\overline{e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}} = e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} \quad \wedge \quad e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \delta(f + f_0)$$

# Właściwości **CFT/ICFT** (twierdzenia – cd.)

## Tw. Parsevala o zachowaniu energii

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

$$\boxed{< x(t) , x(t) > = < X(f) , X(f) >}$$

---

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

# **Właściwości CFT/ICFT (twierdzenia – cd.)**

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \overline{y(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot \overline{Y(f)} df = \langle X(f), Y(f) \rangle$$

## **Tw. o zachowaniu odległości**

**Jeżeli:**  $x(t), y(t) \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(f), Y(f)$

**to w  $L^2$ :**

$$\rho(x(t), y(t)) = \rho(X(f), Y(f))$$

### **Dowód**

**z liniowością CFT:**

$$x(t) - y(t) \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(f) - Y(f)$$

**z zachowania iloczynu skalarnego przez CFT:**

$$\langle x(t) - y(t), x(t) - y(t) \rangle = \langle X(f) - Y(f), X(f) - Y(f) \rangle$$

**czyli:**

$$\|x(t) - y(t)\| = \|X(f) - Y(f)\|$$

**...a w ten sposób określiliśmy odległość.**

# Splot jako iloczyn skalarny

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau = \langle x(\tau), \overline{y(t - \tau)} \rangle$$

Zatem splot dwóch sygnałów  $x$  oraz  $y$  wyznaczony w punkcie  $t$  jest równy iloczynowi skalarnemu (liczonemu dla całej osi  $R$ ) sygnału  $x$  oraz sygnału  $y$  z odwróconą osią zmiennej niezależnej (np. czasu) i przesuniętemu o wartość  $t$ .

Dla rzeczywistego sygnału  $y(t)$ :

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau = \langle x(\tau), y(t - \tau) \rangle$$

# Dowód twierdzenia o splocie - przygotowanie

**Mała powtórka:**

$$x(t) \xrightarrow{\text{CFT}} X(f)$$

$$\xleftarrow{\text{ICFT}}$$

$$x(-t) \xrightarrow{\text{CFT}} X(-f)$$

$$\xleftarrow{\text{ICFT}}$$

$$x(t-t_0) \xrightarrow{\text{CFT}} X(f) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0}$$

$$\xleftarrow{\text{ICFT}}$$

**czyli:**

**1)**

$$x(-(t-t_0)) \xrightarrow{\text{CFT}} X(-f) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0}$$

$$\xleftarrow{\text{ICFT}}$$

**2)**

$$x(-t-t_0) \xrightarrow{\text{CFT}} X(-f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0}$$

$$\xleftarrow{\text{ICFT}}$$

$$x(-t-t_0) = x(-(t+t_0)) \quad 8$$

- 1) najpierw odwracamy oś „ $t$ ”, a następnie przesuwamy o  $t_0$ ,**
- 2) najpierw przesuwamy o  $t_0$ , a następnie odwracamy oś „ $t$ ”,**

# Dowód twierdzenia o splocie

$$x_1(t) \xrightarrow[CFT]{} X_1(f)$$

$$x_2(t) \xrightarrow[CFT]{} X_2(f)$$

$$x(-(t-t_0)) \xrightarrow[CFT]{} X(-f) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0}$$

$$\overline{X(f)}^{(**)} = X(-f)$$

$$-j \cdot f = j \cdot (-f)$$

$$\begin{aligned}
 x_1(t) * x_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau) d\tau \stackrel{(*)}{=} \langle x_1(\tau), x_2(t-\tau) \rangle = \\
 &= \langle X_1(f), X_2(-f) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(f) \cdot \overline{X_2(-f) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t}} df = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(f) \cdot X_2(f) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df
 \end{aligned}$$

(\*) – to przejście jest poprawne tylko dla rzeczywistego sygnału  $x_2(t)$   
 (\*\*\*) – ta równość jest poprawna tylko dla rzeczywistego sygnału  $x(t)$

# Dowód twierdzenia o splotie (dyskusja)

**Dlaczego przedstawiony dowód jest ważny  
także dla zespolonego sygnału  $x_2(t)$  ?**

**Ponieważ wszystkie wykorzystane operacje,  
czyli: splot, iloczyn skalarny oraz transformacja  
Fouriera (w obie strony) – są liniowe!**

$$x_1(t) = \operatorname{Re}(x_1) + j \cdot \operatorname{Im}(x_1)$$

$$x_2(t) = \operatorname{Re}(x_2) + j \cdot \operatorname{Im}(x_2)$$

$$\begin{aligned} x_1 * x_2 &= [\operatorname{Re}(x_1) + j \cdot \operatorname{Im}(x_1)] * [\operatorname{Re}(x_2) + j \cdot \operatorname{Im}(x_2)] = \\ &= \operatorname{Re}(x_1) * \operatorname{Re}(x_2) - \operatorname{Im}(x_1) * \operatorname{Im}(x_2) + j \cdot \operatorname{Re}(x_1) * \operatorname{Im}(x_2) + j \cdot \operatorname{Im}(x_1) * \operatorname{Re}(x_2) \end{aligned}$$

**zatem jest to kombinacja liniowa splotów sygnałów  
rzeczywistych.**

**Jeżeli dla każdego z nich twierdzenie jest prawdziwe,  
to jest prawdziwe również dla całości.**

# Dowód twierdzenia o splocie (dyskusja)

Ale można także od razu zastosować kompletny dowód dla sygnałów zespolonych.

$$x_1(t) = \operatorname{Re}(x_1) + j \cdot \operatorname{Im}(x_1)$$

$$x_2(t) = \operatorname{Re}(x_2) + j \cdot \operatorname{Im}(x_2)$$

i skorzystać dodatkowo z przytoczonej wcześniej zależności:

$$\boxed{\overline{x(-t)} \quad \longleftrightarrow_{\substack{CFT \\ ICFT}} \quad \overline{X(f)}}$$

Wtedy początek musiałby wyglądać tak:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau = \langle x_1(\tau), \overline{x_2(t - \tau)} \rangle \text{ itd.}$$



AGH

## Twierdzenia o transformacie pochodnej i całki

AGH

**Tw. o transformacie pochodnej pierwszego rzędu:**

$$\text{dla } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot X(f)$$

---

**Tw. o transformacie pochodnej wyższego rzędu:**

$$\text{dla } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} x^{(m)}(t) = 0 \quad : \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (\mathbf{m}) \text{ oznacza rząd pochodnej}$$

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^n \cdot X(f)$$

---

**Tw. o transformacie całki:**

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot X(f) \quad \text{dla } f \neq 0$$

*dla  $f = 0$  liczymy osobno*

**Uwaga – to tw. jest wynikiem odwrócenia tw. o pochodnej, zatem dla bezpieczeństwa jego stosowania należy sprawdzać odpowiedni warunek w granicy (lim) - w tym przypadku dla całki z  $X(f)$ .**

## Twierdzenia o transformacie odwrotnej dla pochodnej i całki

Analogiczne twierdzenia istnieją dla zależności „odwrotnej” (tj. *ICFT*).

**Tw. o odwrotnej transformacie dla „widma” określonego jako pochodna:**

$$\text{dla } \lim_{f \rightarrow \pm\infty} X^{(m)}(f) = 0 \quad : \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (m \text{ oznacza rząd pochodnej})$$

$$(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot t)^n \cdot x(t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad \frac{d^n}{df^n} X(f)$$

---

**Tw. o odwrotnej transformacie dla „widma” określonego jako całka:**

$$\text{dla } t \neq 0: \quad \frac{1}{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot t} \cdot x(t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad \int_{-\infty}^f X(v) dv$$

dla  $t = 0$  liczymy osobno

# Wyznaczanie trudnych (niezbieżnych) transformat przez przejście do granicy

**Przykładowo dla stałej (ponownie):**

$$x_a(t) = e^{-a|t|} \cdot 1 = e^{-a|t|}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} (x_a(t)) = 1 \quad (! a > 0)$$

**Ze wzoru całkowego otrzymujemy:**

$$\begin{aligned}
 X_a(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{+a \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{-t \cdot (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f - a)} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t \cdot (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f + a)} dt = \\
 &= \left[ \frac{1}{-(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f - a)} \cdot e^{-t \cdot (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f - a)} \right]_{-\infty}^0 + \left[ \frac{1}{-(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f + a)} \cdot e^{-t \cdot (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f + a)} \right]_0^{+\infty} = \\
 &= \frac{1}{a - j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} + \frac{1}{a + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{a + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f + a - j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}{a^2 + (2 \cdot \pi \cdot f)^2} = \frac{2 \cdot a}{a^2 + (2 \cdot \pi \cdot f)^2}
 \end{aligned}$$

## Przykład: transformata dla stałej (cd.)

$$X_a(f) = \frac{2 \cdot a}{a^2 + (2 \cdot \pi \cdot f)^2}$$

A teraz przechodzimy do granicy z parametrem  $a$ :

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} (x_a(t)) = 1$$

... a w dziedzinie Fouriera:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \left( \frac{2 \cdot a}{a^2 + (2 \cdot \pi \cdot f)^2} \right) \Bigg|_{f \neq 0} = 0$$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \left( \frac{2 \cdot a}{a^2 + (2 \cdot \pi \cdot f)^2} \right) \Bigg|_{f=0} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( \frac{2 \cdot a}{a^2} \right) = +\infty$$

Czyli nie ma przeciwwskazań, by była to delta Diraca...

## Transformata dla stałej (cd.)

**Wobec tego postawmy hipotezę:**

$$X(f) = c \cdot \delta(f)$$

**i wyznaczmy stałą  $c$  wyliczając transformatę odwrotną:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c \cdot \delta(f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df = c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot t} df = c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) df = c$$

**Przyjmując np.  $c=1$  otrzymujemy  $x(t)=1$ , zatem uzyskaliśmy ponownie, że:**

$$1 \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad \delta(f)$$

# Przykład: zastosowania tw. o pochodnej sygnału (choć założenie nie jest spełnione!)

$$\frac{d}{dt} \cos(2\pi f_0 t) = -\sin(2\pi f_0 t) \cdot (2\pi f_0)$$

ale dla  $a > 0$ :

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left( e^{-a|t|} \cdot \cos(2\pi f_0 t) \right) = 0$$

---

**Sprawdzamy, czy się zgodzi:**

$$j \cdot 2\pi f \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] \right] =$$

$$= j \cdot 2\pi f \cdot \frac{1}{2} \cdot [(-f_0) \cdot \delta(f + f_0) + (f_0) \cdot \delta(f - f_0)] =$$

$$= (2\pi f_0) \cdot \left[ -j \cdot \frac{1}{2} \cdot [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)] \right]$$



AGH

## Kolejny przykład (choć oryginalnej całki nie można wyliczyć!)

$$\int_{-\infty}^t \sin(2\pi f_0 \tau) d\tau = \left[ \frac{-\cos(2\pi f_0 \tau)}{2\pi f_0} \right]_{-\infty}^t = ?$$

...dla funkcji przybliżających sygnał (w granicy):

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^t e^{-a|\tau|} \cdot \sin(2\pi f_0 \tau) d\tau &= \left\{ e^{-a|\tau|} \rightarrow 1 \right\} = \\ &= \frac{-\cos(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0} - 0 = \frac{-\cos(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0} \end{aligned}$$

---

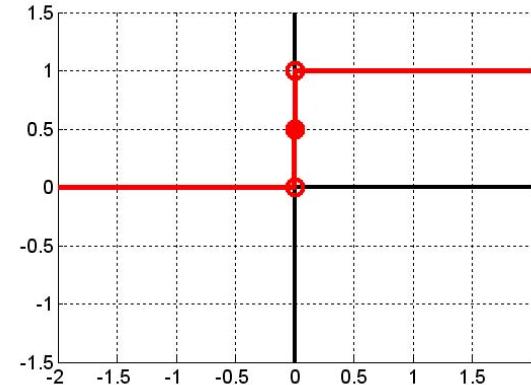
Sprawdzamy, czy się zgodzi:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{j \cdot 2\pi f} \cdot \left[ j \cdot \frac{1}{2} \cdot [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)] \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi f} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[ \left( \frac{1}{-f_0} \right) \cdot \delta(f + f_0) - \left( \frac{1}{f_0} \right) \cdot \delta(f - f_0) \right] = \frac{1}{2\pi f_0} \cdot \left[ -\frac{1}{2} \cdot [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] \right] \end{aligned}$$

# Skok jednostkowy (*ang. unit step*)

**Definicja precyzyjna:**

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ 1/2 & \text{dla } t = 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$



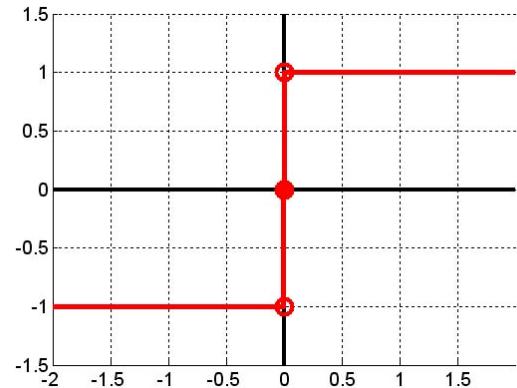
**często dla uproszczenia przyjmuje się, że w pojedynczym punkcie nieciągłości (skok), dla  $t=0$ , wartość sygnału można potraktować jako nieistotną (co nie zawsze jest słuszne) i wtedy otrzymujemy definicję**

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ 1/2 & \text{dla } t = 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases} \quad \cong \quad \begin{cases} 1 & \text{dla } t \geq 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases} \quad \cong \quad \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t \leq 0 \end{cases} \quad \cong \quad \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases} \quad \text{dla } t = 0 : \text{nieistotne}$$

# Funkcja znaku (*ang. sign, łac. signum*)

**Definicja precyzyjna:**

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t = 0 \\ -1 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$



**często dla uproszczenia przyjmuje się, że w pojedynczym punkcie nieciągłości (skok), dla  $t=0$ , wartość sygnału można potraktować jako nieistotną (co nie zawsze jest słuszne) i wtedy otrzymujemy definicję**

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t = 0 \\ -1 & \text{dla } t < 0 \end{cases} \cong \begin{cases} 1 & \text{dla } t \geq 0 \\ -1 & \text{dla } t < 0 \end{cases} \cong \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ -1 & \text{dla } t \leq 0 \end{cases} \cong \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ -1 & \text{dla } t < 0 \end{cases} \text{ dla } t = 0 : \text{nieistotne}$$

# Algebra sygnałów

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ 1/2 & \text{dla } t = 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t = 0 \\ -1 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$

$$u(t) \quad \cong \quad \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$

$$sgn(t) \quad \cong \quad \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ -1 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$

$$u(t) = \frac{1}{2} \cdot sgn(t) + \frac{1}{2}$$

$$sgn(t) = 2 \cdot u(t) - 1$$

# Algebra sygnałów (cd.)

$$\frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{sgn}(t) = 2 \cdot \delta(t)$$

$$\operatorname{sgn}(t) = -1 + 2 \cdot \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

$$\Pi(t) = u(t+1/2) - u(t-1/2)$$

$$u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2} - n \cdot T}{T}\right)$$

# Kolejne przykłady transformat

$$u(t) \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \frac{1}{2} \cdot \delta(f) + \begin{cases} \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} & \text{dla } f \neq 0 \\ 0 & \text{dla } f = 0 \end{cases} = \frac{1}{2} \cdot \delta(f) + \begin{cases} -j \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f} & \text{dla } f \neq 0 \\ 0 & \text{dla } f = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}(t) \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \begin{cases} \frac{1}{j \cdot \pi \cdot f} & \text{dla } f \neq 0 \\ 0 & \text{dla } f = 0 \end{cases} = \begin{cases} -j \cdot \frac{1}{\pi \cdot f} & \text{dla } f \neq 0 \\ 0 & \text{dla } f = 0 \end{cases}$$


---

$$u(t) \xleftarrow[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} \pi \cdot \delta(\omega) + \begin{cases} \frac{1}{j \cdot \omega} & \text{dla } \omega \neq 0 \\ 0 & \text{dla } \omega = 0 \end{cases} = \pi \cdot \delta(\omega) + \begin{cases} -j \cdot \frac{1}{\omega} & \text{dla } \omega \neq 0 \\ 0 & \text{dla } \omega = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}(t) \xleftarrow[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} \begin{cases} \frac{2}{j \cdot \omega} & \text{dla } \omega \neq 0 \\ 0 & \text{dla } \omega = 0 \end{cases} = \begin{cases} -j \cdot \frac{2}{\omega} & \text{dla } \omega \neq 0 \\ 0 & \text{dla } \omega = 0 \end{cases}$$

# Przykłady przekształceń weryfikujących

$$\text{sgn}(t) \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \begin{cases} \frac{1}{j \cdot \pi \cdot f} & \text{dla } f \neq 0 \\ 0 & \text{dla } f = 0 \end{cases} = \begin{cases} -j \cdot \frac{1}{\pi \cdot f} & \text{dla } f \neq 0 \\ 0 & \text{dla } f = 0 \end{cases}$$

$$u(t) \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \frac{1}{2} \cdot \delta(f) + \begin{cases} \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} & \text{dla } f \neq 0 \\ 0 & \text{dla } f = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \xrightarrow{\text{CFT}} \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot 1 + \frac{\delta(f)}{2} \cdot 1 \xrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \frac{1}{2} \cdot \text{sgn}(t) + \frac{1}{2} = u(t)$$

**Czasem wygodnie jest tak zapisać, więc sumujemy, ale pamiętajmy o ograniczeniach dziedziny (bo  $1/f$ )**

$$\frac{d}{dt} 1 \xrightarrow{\text{CFT}} (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f) \cdot \delta(f) = 0 \cdot \delta(f) = 0 \xrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} 0$$

$$\frac{d}{dt} u(t) \xrightarrow{\text{CFT}} (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f) \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \delta(f) + \frac{-j}{2 \cdot \pi \cdot f} \right] = 1 \xrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \delta(t)$$

# Przykład weryfikacji „z brakującym punktem”

**W dziedzinie sygnałów:**

$$\Pi(t) = u(t+1/2) - u(t-1/2)$$

$$u(t) \xleftrightarrow[CFT]{ICFT} \frac{1}{2} \cdot \delta(f) + \begin{cases} \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} & \text{dla } f \neq 0 \\ 0 & \text{dla } f = 0 \end{cases}$$

**A w dziedzinie transformaty CFT?**

$$\begin{aligned}
 u(t+1/2) - u(t-1/2) &\xrightarrow{CFT} \frac{1}{2} \cdot \delta(f) \cdot e^{j \cdot \pi \cdot f} - \frac{1}{2} \cdot \delta(f) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot f} + \begin{cases} \frac{e^{j \cdot \pi \cdot f}}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} - \frac{e^{-j \cdot \pi \cdot f}}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} & \text{dla } f \neq 0 \\ 0 & \text{dla } f = 0 \end{cases} = \\
 &= \delta(f) \cdot 0 + \begin{cases} \frac{\sin(\pi \cdot f)}{\pi \cdot f} & \text{dla } f \neq 0 \\ 0 & \text{dla } f = 0 \end{cases} \equiv \text{sinc}(\pi \cdot f)
 \end{aligned}$$

Czyli „prawie się zgadza”, ponieważ do wyjaśnienia pozostaje wartość dla  $f=0$  (czyli „izolowany punkt”).

# Inny przykład weryfikacji „z brakującym punktem”

$$\operatorname{sgn}(t) \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \begin{cases} \frac{1}{j \cdot \pi \cdot f} & \text{dla } f \neq 0 \\ 0 & \text{dla } f = 0 \end{cases} = \begin{cases} -j \cdot \frac{1}{\pi \cdot f} & \text{dla } f \neq 0 \\ 0 & \text{dla } f = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{sgn}(t) \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \begin{cases} (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f) \cdot \frac{1}{j \cdot \pi \cdot f} & \text{dla } f \neq 0 \\ (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f) \cdot 0 & \text{dla } f = 0 \end{cases} \equiv 2$$

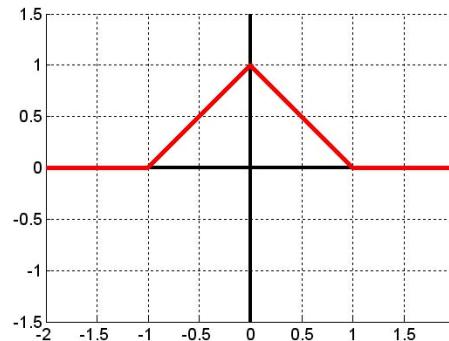
**Zatem przyjmujemy, że:**

$$\frac{d}{dt} \operatorname{sgn}(t) = 2 \cdot \delta(t)$$

# Kolejny przykład: transformata sygnału trójkątnego

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1 & \text{dla } t \in [-1; 0) \\ -t+1 & \text{dla } t \in [0; 1) \\ 0 & \text{dla pozostały} \end{cases}$$

$$x(t) = \Pi(t + 1/2) - \Pi(t - 1/2) \Rightarrow \Lambda(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$



$$X(f) = \operatorname{sinc}(\pi \cdot f) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{1}{2}} - \operatorname{sinc}(\pi \cdot f) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{1}{2}} =$$

$$= \operatorname{sinc}(\pi \cdot f) \cdot (e^{j \cdot \pi \cdot f} - e^{-j \cdot \pi \cdot f})$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot X(f) \quad \text{dla } f \neq 0$$

dla  $f = 0$  liczymy osobno

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftarrow{\text{CFT}} \begin{cases} \operatorname{sinc}(\pi \cdot f) \cdot \frac{e^{j \cdot \pi \cdot f} - e^{-j \cdot \pi \cdot f}}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} & (\text{dla } f \neq 0) \\ 1 (\text{wyliczone osobno}) & (\text{dla } f = 0) \end{cases} = \operatorname{sinc}^2(\pi \cdot f)$$

## Jeszcze jeden przykład

**Jeżeli:**

$$x(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = j \cdot \frac{1}{2} \cdot [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$$

**to:**

$$x(t) = -j \cdot \frac{1}{2} \cdot [\delta(t + t_0) - \delta(t - t_0)] \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0) \quad (1)$$

**Zobaczmy zatem jak wzór o pochodnej zafunkcjonuje na przykładzie:**

$$x(t) = \Pi(t) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = \text{sinc}(\pi \cdot f) \quad (2)$$

**ale jednocześnie:**

$$x(t) = \frac{d}{dt} \Pi(t) = \delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = j \cdot 2 \cdot \sin(\pi \cdot f) \quad (3)$$

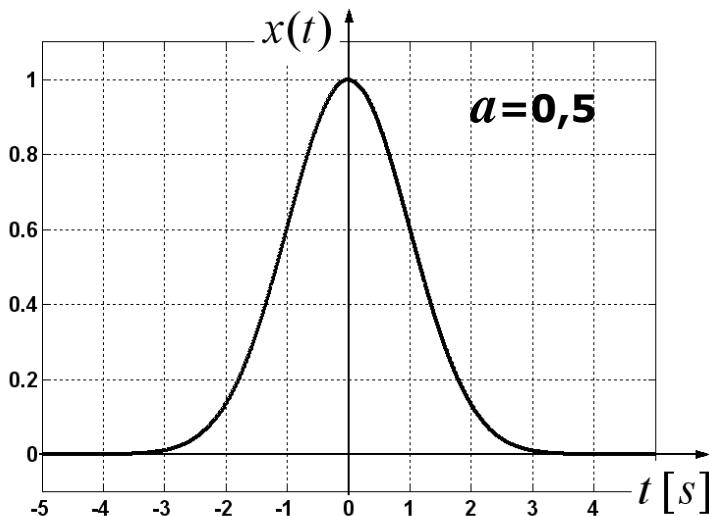
**czyli się zgadza**

**ponieważ zastosowanie twierdzenia do przykładu (2) daje:**

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{d}{dt} \Pi(t) &\quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f) = \\ &= j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{\sin(\pi \cdot f)}{\pi \cdot f} = j \cdot 2 \cdot \sin(\pi \cdot f) \end{aligned}$$

# Transformata sygnału Gaussa

$$x(t) = e^{-a \cdot t^2} \quad \wedge \quad a \in \Re_+$$



$$x(t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad X(f) = ?$$

**Wyznaczamy pochodną sygnału:**

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2 \cdot a \cdot t \cdot e^{-a \cdot t^2}$$

**Część powyższego wzoru zawiera przepis na sygnał:**

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2 \cdot a \cdot t \cdot x(t)$$

**Na podstawie tw. o transformacie pochodnej:**

$$\frac{dx(t)}{dt} \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot X(f)$$

**... korzystając z podobieństwa wzorów dla transformacji w przód i odwrotnej:**

$$j \cdot 2 \cdot \pi \cdot t \cdot x(t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad - \frac{dX(f)}{df}$$

# Transformata sygnału Gaussa (cd.)

**Na podstawie wymienionych zależności możemy zapisać, że:**

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2 \cdot a \cdot t \cdot x(t) \quad \xleftarrow[CFT]{ICFT} \quad j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot X(f) = -\frac{-2 \cdot a}{j \cdot 2 \cdot \pi} \cdot \frac{dX(f)}{df}$$

**Kolejne przekształcenia w dziedzinie transformaty:**

$$j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot X(f) = -j \cdot \frac{a}{\pi} \cdot \frac{dX(f)}{df}$$

**... pozwalają wyznaczyć ogólny wzór dla poszukiwanej transformaty:**

$$-2 \cdot \frac{\pi^2}{a} \cdot f \cdot X(f) = \frac{dX(f)}{df}$$

$$X(f) = b \cdot e^{-\frac{\pi^2}{a} \cdot f^2}$$

$$\frac{dX(f)}{df} = -2 \cdot \frac{\pi^2}{a} \cdot f \cdot X(f)$$

# Transformata sygnału Gaussa (dokończenie)

$$X(f) = b \cdot e^{-\frac{\pi^2}{a} \cdot f^2}$$

**Nie znamy jeszcze stałej b:**

$$X(0) = b$$

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a \cdot t^2} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a \cdot t^2} dt = ? = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

**dłaczego?**

**Skorzystamy z wiedzy o rozkładach gęstości prawdopodobieństwa:**

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} \quad \wedge \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$

**... zatem:**

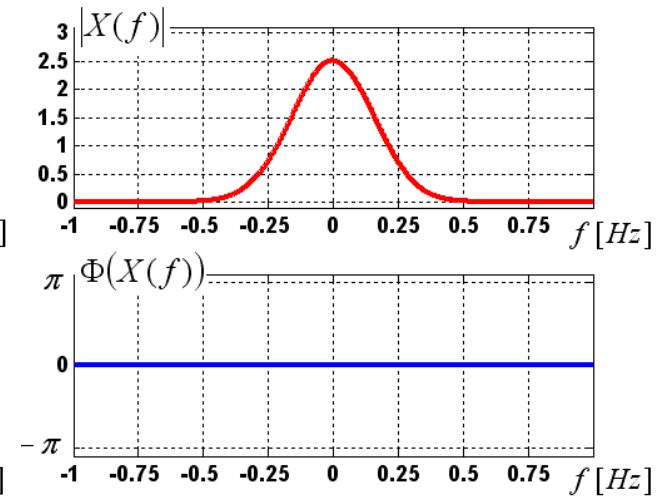
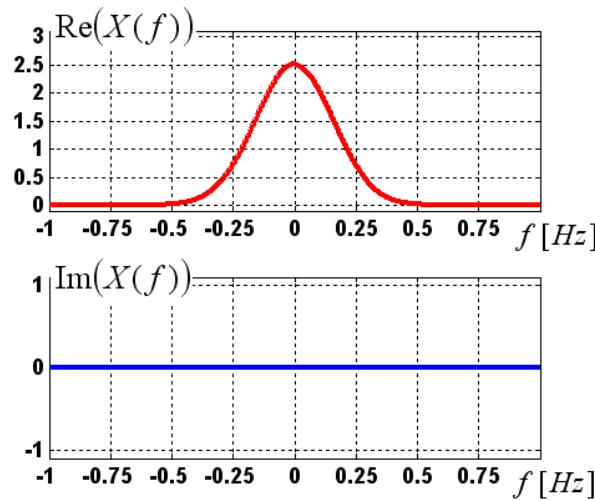
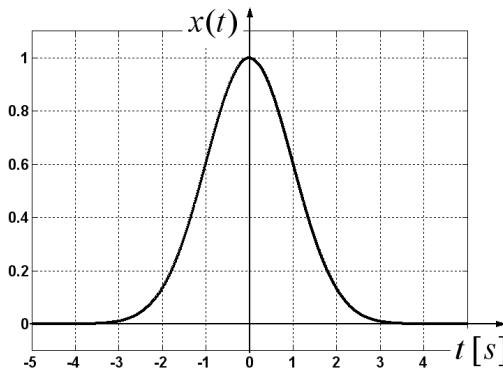
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a \cdot t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a \cdot t^2} d(t \cdot \sqrt{2 \cdot a}) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot \tau^2} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot a}} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \tau^2} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

# Transformata sygnału Gaussa (przykład)

... ma również postać funkcji Gaussa, tylko w dziedzinie  $f$ :

$$x(t) = e^{-a \cdot t^2} \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad X(f) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{\pi^2}{a} \cdot f^2}$$

**$a=0,5$**



# Transformata sygnału Gaussa (przykład)

$$x(t) = e^{-a \cdot t^2} \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{\pi^2}{a} \cdot f^2}$$

**Funkcja identyczna w obu dziedzinach:**

$$\text{dla } a = \pi$$

$$x(t) = e^{-\pi \cdot t^2} \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = e^{-\pi \cdot f^2}$$

**wtedy także:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df = 1$$

**...również:**

$$x(0) = 1 \quad \text{oraz} \quad X(0) = 1$$

# Zasada nieoznaczoności

**Klasyczna zasada nieoznaczoności Heisenberga dotyczy pary wartości: położenie i pęd lub energia i czas (dla cząstek nietrwałych).**

**Analogiczna zależność zachodzi w przypadku sygnału i jego transformaty.**

**Dla normy  $L^2$  generowanej przez iloczyn skalarny:**

$$\|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

**zachodzi własność analogiczna jak dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt = \frac{1}{\|x(t)\|^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = 1$$

## Zasada nieoznaczoności (cd.)

Dlatego w sposób analogiczny, jak wyznaczamy wartość średnią rozkładu, możemy wyznaczyć wartość średnią unormowanego rozkładu energii

dla sygnału:

$$t_\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt$$

i jego transformaty:

$$f_\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} f \cdot \frac{|X(f)|^2}{\|X(f)\|^2} df$$

Tak samo można określić odchylenia standardowe (albo ich kwadraty) dla obu rozkładów:

$$(t_\sigma)^2 = \frac{1}{\|x(t)\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_\mu)^2 \cdot |x(t)|^2 dt$$

$$(f_\sigma)^2 = \frac{1}{\|X(f)\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (f - f_\mu)^2 \cdot |X(f)|^2 df$$

Powyższe odchylenia standardowe są powiązane następującą zasadą nieoznaczoności:

$$t_\sigma \cdot f_\sigma \geq \frac{1}{2 \cdot (2 \cdot \pi)} = \frac{1}{4 \cdot \pi}$$

# Zasada nieoznaczoności (przykład 1)

Dla sygnału Gaussa i jego transformaty:

$$x(t) = e^{-a \cdot t^2} \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{\pi^2}{a} \cdot f^2}$$

więc:

$$|x(t)|^2 = e^{-2 \cdot a \cdot t^2} \quad \text{oraz} \quad |X(f)|^2 = \frac{\pi}{a} \cdot e^{-2 \cdot \frac{\pi^2}{a} \cdot f^2}$$

... porównajmy z podręcznikowym rozkładem Gaussa:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$

gdzie  $\mu$  oraz  $\sigma$  to odpowiednio: wartość średnia i odchylenie standardowe.

Zatem:

$$t_\mu = 0; \quad t_\sigma = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a}}$$

ostatecznie:

$$f_\mu = 0; \quad f_\sigma = \frac{\sqrt{a}}{2 \cdot \pi}$$

$$t_\sigma \cdot f_\sigma = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{4 \cdot \pi} \approx 0,0796$$

## Zasada nieoznaczoności (przykład 2)

$$x(t) = \Pi(t) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = \text{sinc}(\pi \cdot f)$$

więc:

$$|x(t)|^2 = (\Pi(t))^2 = \Pi(t) \quad \text{oraz} \quad |X(f)|^2 = \text{sinc}^2(\pi \cdot f)$$

**Normalizacja nie jest konieczna, ponieważ:**

$$\|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) dt = 1 \quad \Rightarrow \quad \|X(f)\|^2 = 1$$

**Ze względu na parzystość obu funkcji:**  $t_\mu = 0; \quad f_\mu = 0$

$$(t_\sigma)^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^2 dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}$$

$$(f_\sigma)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \cdot \frac{\sin^2(\pi \cdot f)}{\pi^2 \cdot f^2} df = \frac{1}{\pi^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2(\pi \cdot f) df \rightarrow +\infty$$

$$t_\sigma = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \approx 0,2887$$

## Zasada nieoznaczoności (przykład 3)

$$x(t) = \Lambda(t) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = \text{sinc}^2(\pi \cdot f)$$

$$|x(t)|^2 = (\Lambda(t))^2 \quad \text{oraz} \quad |X(f)|^2 = \text{sinc}^4(\pi \cdot f)$$

**Normalizacja jest konieczna, ponieważ:**

$$\|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda^2(t) dt = 2 \cdot \int_0^1 (1-t)^2 dt = 2 \cdot \int_0^1 t^2 dt = \frac{2}{3} \Rightarrow \|X(f)\|^2 = \frac{2}{3}$$

**Ze względu na parzystość obu funkcji:**  $t_\mu = 0; \quad f_\mu = 0$

$$(t_\sigma)^2 = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^1 t^2 \cdot (1-t)^2 dt = 3 \cdot \int_0^1 t^2 - 2 \cdot t^3 + t^4 dt = 3 \cdot \left[ \frac{t^3}{3} - 2 \cdot \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{10}$$

$$t_\sigma = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

## Zasada nieoznaczoności (cd. przykładu 3)

$$(f_\sigma)^2 = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^\infty f^2 \cdot \frac{\sin^4(\pi \cdot f)}{\pi^4 \cdot f^4} df = \frac{3}{\pi^4} \cdot \int_0^\infty \frac{\sin^4(\pi \cdot f)}{f^2} df = \frac{3}{\pi^2} \cdot \int_0^\infty \text{sinc}^2(\pi \cdot f) \cdot \sin^2(\pi \cdot f) df = ???$$

**Dygresja - pomocnicze wyprowadzenie wzoru:**

$$x(t) = \frac{d}{dt} \Lambda(t) = \Pi\left(t + \frac{1}{2}\right) - \Pi\left(t - \frac{1}{2}\right) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \text{sinc}^2(\pi \cdot f)$$

$$|x(t)|^2 = \Pi\left(\frac{t}{2}\right) \quad \text{oraz} \quad |X(f)|^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot \text{sinc}^4(\pi \cdot f)$$

$$\|x(t)\|^2 = \int_{-1}^1 dt = 2 \quad \Rightarrow \quad \|X(f)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} 4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot \text{sinc}^4(\pi \cdot f) df = 2$$

**czyli:**  $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \cdot \text{sinc}^4(\pi \cdot f) df = \frac{1}{2 \cdot \pi^2}$        $(f_\sigma)^2 = \frac{3}{4 \cdot \pi^2}$        $f_\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \pi}$

**ostatecznie:**  $t_\sigma \cdot f_\sigma = \sqrt{\frac{3}{10 \cdot 4 \cdot \pi^2}} \approx 0,0872$

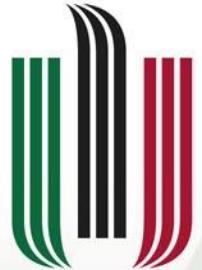
# **Podsumowanie**

- 1. Zasady zachowania: iloczynu skalarnego, energii oraz odległości.**
- 2. Iloczyn skalarny w odniesieniu do splotu.**
- 3. Transformaty sygnałów pochodnej oraz całki.**
- 4. Sygnały skoku i znaku (sgn) oraz ich transformaty.**
- 5. Odwrotne transformaty „widm” określonych jako pochodna oraz całka.**
- 6. Transformata sygnału gaussowskiego.**
- 7. Zasada nieoznaczoności.**



AGH

*Zapraszam na ćwiczenia ...  
lub do laboratorium ...*



**AGH**

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

# **Teoria sygnałów**

## **Wykład 7**

**Dr inż. Przemysław Korohoda  
Katedra Elektroniki, AGH, Kraków**

[home.agh.edu.pl/~korohoda/rok\\_2022\\_2023\\_zima/TS\\_EL\\_2](http://home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2)

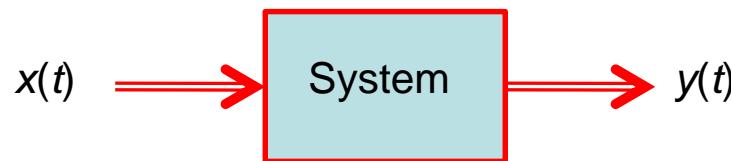
**UPEL: TS 2022**

# Główne tematy

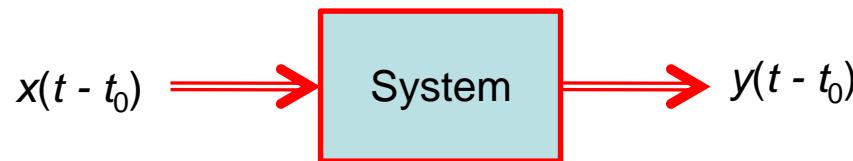
- 1. Systemy liniowe i stacjonarne.**
- 2. Odpowiedź impulsowa filtru.**
- 3. Transmitancja filtru i jej cechy.**
- 4. Filtr Butterwortha.**
- 5. Filtry Czebyszewa.**
- 6. Filtr eliptyczny.**
- 7. Przekształcanie filtrów.**
- 8. Przykłady charakterystyk filtrów.**

# System stacjonarny (ang. *Time Invariant*) = niezmienny w czasie

**Jeżeli:**



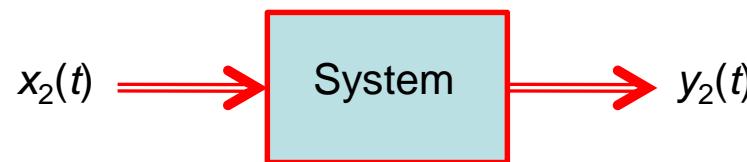
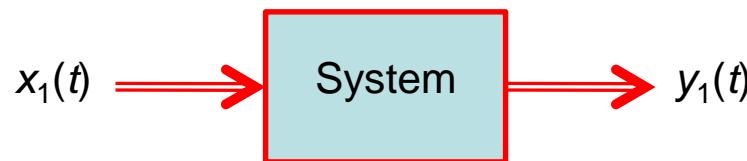
**to:**



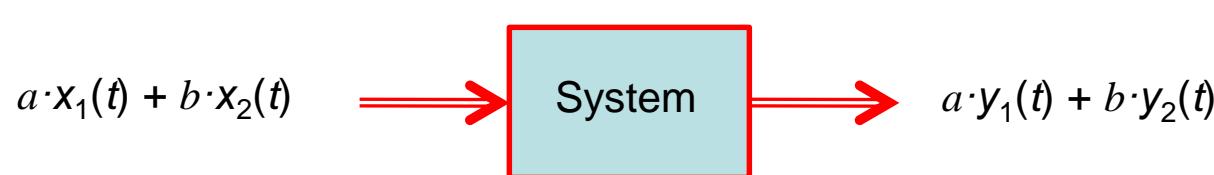
**dla dowolnego  $t_0$ .**

# System liniowy (*ang. Linear*)

**Jeżeli:**



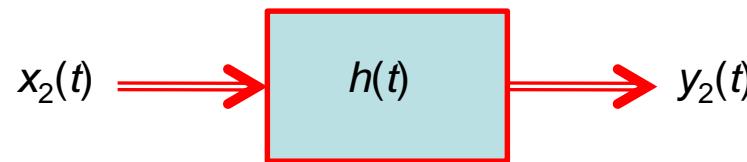
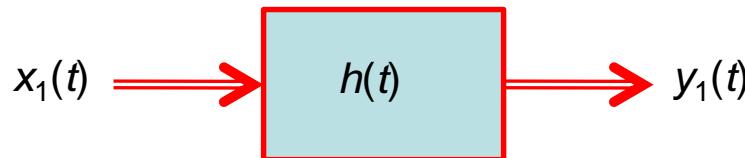
**to:**



**dla dowolnych liczb  $a$  i  $b$  (rzeczywistych, a nawet zespolonych!).**

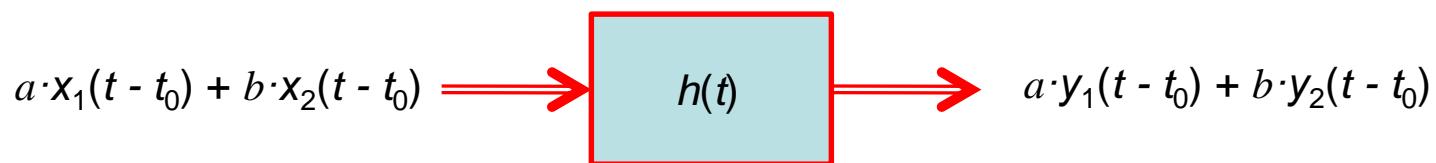
# System liniowy stacjonarny (*ang. Linear Time Invariant*) = LTI

Jeżeli:



**$h(t)$  – odpowiedź impulsowa**

to:



dla dowolnych  $t_0$  oraz  $a$  i  $b$  (jak poprzednio).

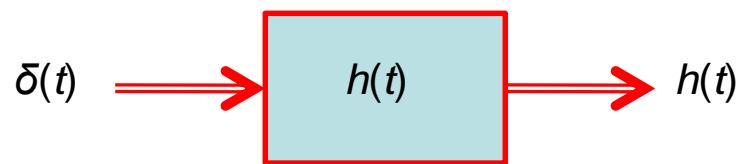
# Odpowiedź impulsowa

**Twierdzenie o splocie:**

$$\begin{array}{ccc} \text{Dziedzina sygnału (czasu)} & & \text{Dziedzina transformaty Fouriera (częstotliwości)} \\ x(t) * h(t) & \xrightleftharpoons[\quad ICFT \quad]{\quad CFT \quad} & X(f) \cdot H(f) \end{array}$$

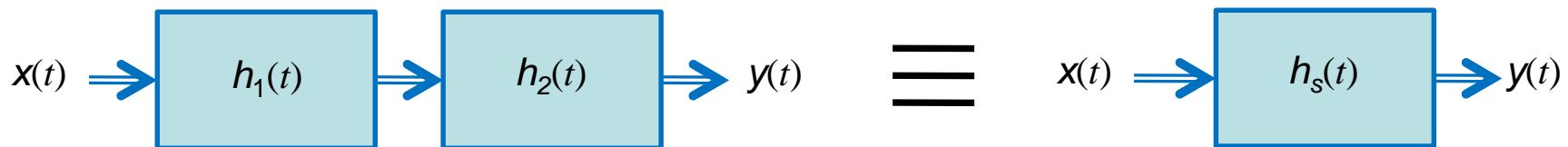
**Dla systemu liniowego, stacjonarnego (*LTI* = ang. *Linear Time Invariant*):**

**$h(t)$  – odpowiedź impulsowa**

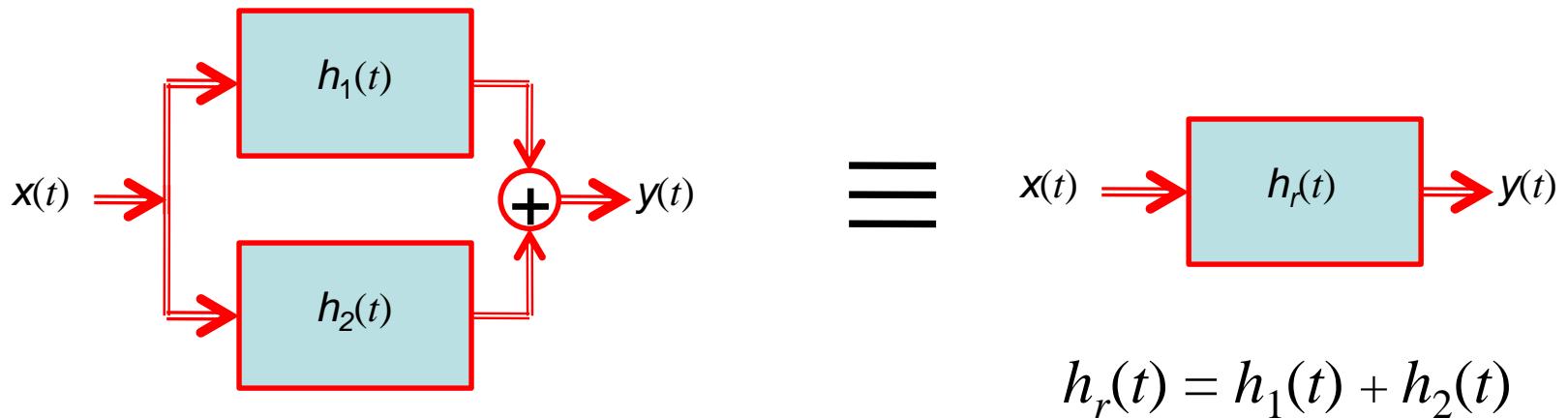


$$\delta(t) * h(t) = h(t)$$

# Połączenia systemów LTI w dziedzinie czasu



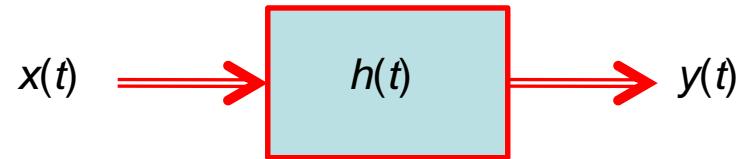
$$h_s(t) = h_1(t)*h_2(t)$$



$$h_r(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

# Dla systemów *LTI* można stosować różne, równoważne sposoby opisu

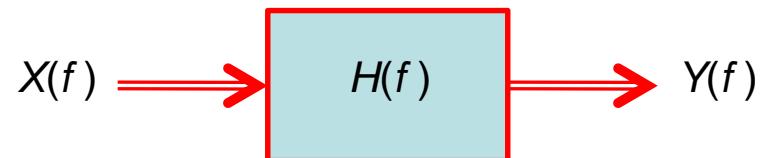
$$x(t) \xrightleftharpoons[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(f)$$



$$y(t) \xrightleftharpoons[\text{ICFT}]{\text{CFT}} Y(f)$$

$$h(t) \xrightleftharpoons[\text{ICFT}]{\text{CFT}} H(f)$$

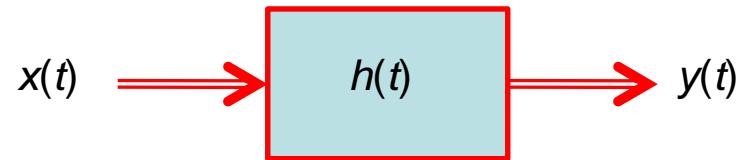
$$y(t) = x(t)*h(t)$$



$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

# Dla systemów *LTI* można stosować różne, równoważne sposoby opisu

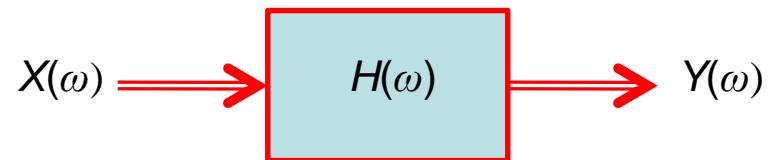
$$x(t) \xrightleftharpoons[CFT_{\omega}]{ICFT_{\omega}} X(\omega)$$



$$y(t) \xrightleftharpoons[CFT_{\omega}]{ICFT_{\omega}} Y(\omega)$$

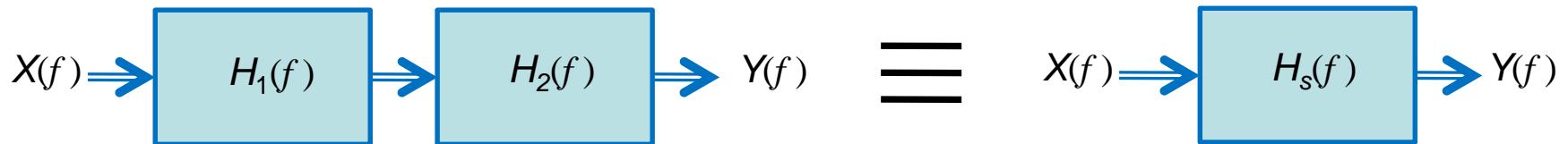
$$h(t) \xrightleftharpoons[CFT_{\omega}]{ICFT_{\omega}} H(\omega)$$

$$y(t) = x(t)*h(t)$$

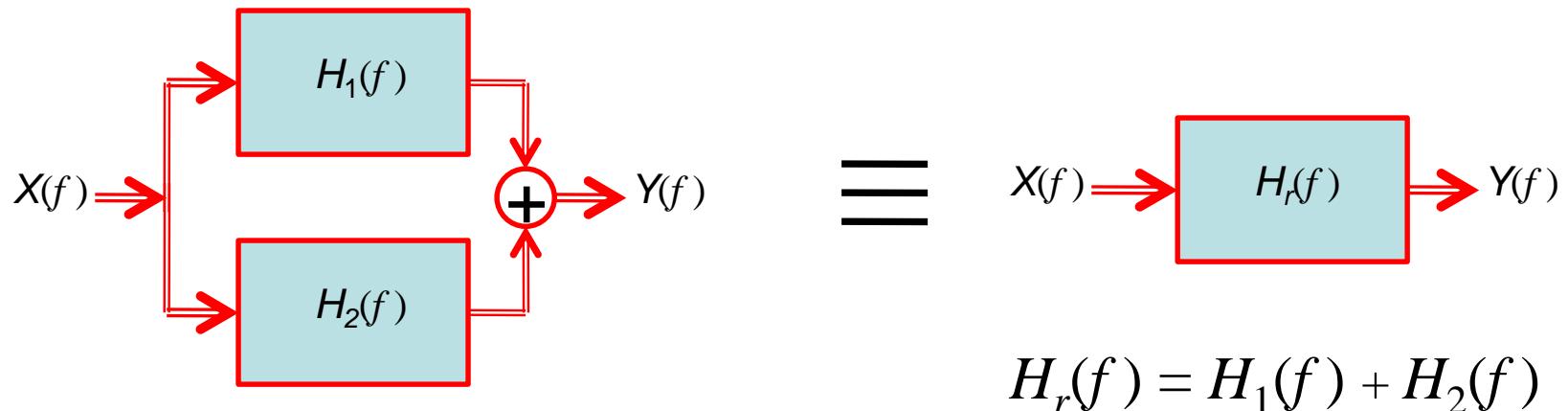


$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

# Połączenia systemów *LTI* w dziedzinie częstotliwości

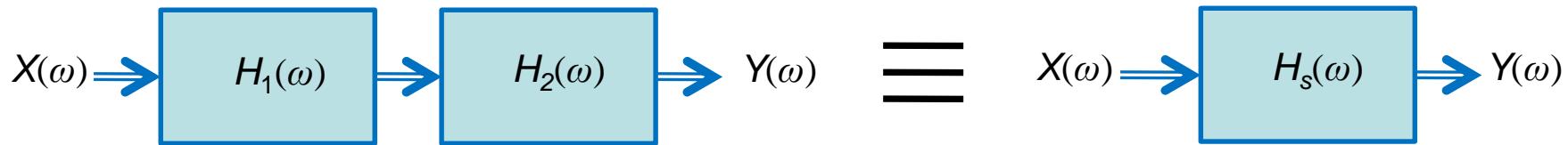


$$H_s(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$$



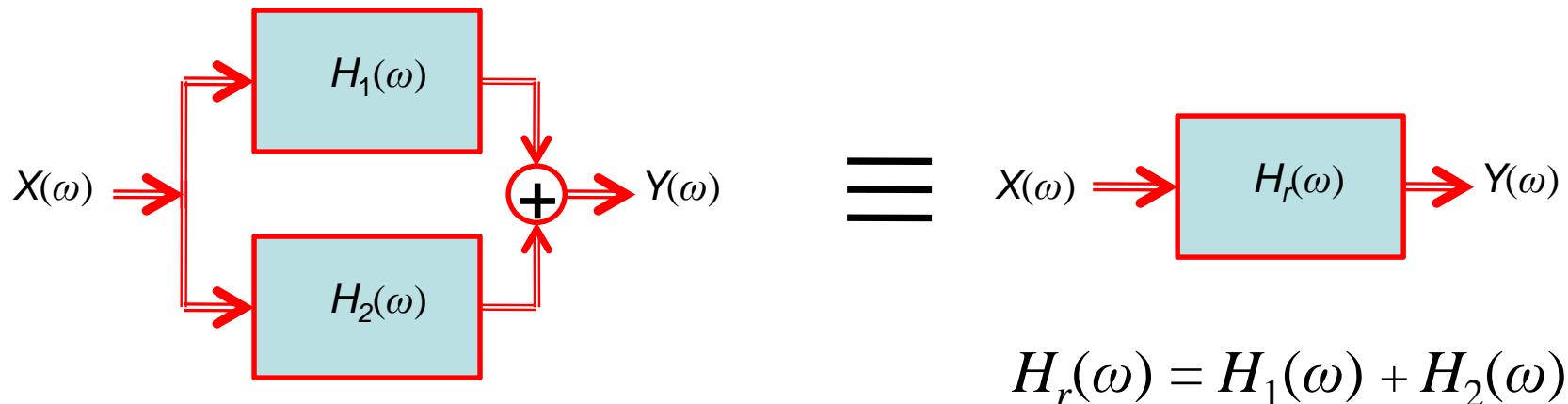
$$H_r(f) = H_1(f) + H_2(f)$$

# Połączenia systemów *LTI* w dziedzinie pulsacji



$$H_s(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega)$$


---



$$H_r(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega)$$

# Efekt przetwarzania (filtracji) opisany w dziedzinie częstotliwości

**System (filtr):**

$$H(f) = \operatorname{Re}(H(f)) + j \cdot \operatorname{Im}(H(f)) = |H(f)| \cdot e^{j \cdot \Phi(H(f))}$$

**Przetwarzanie (filtracja):**

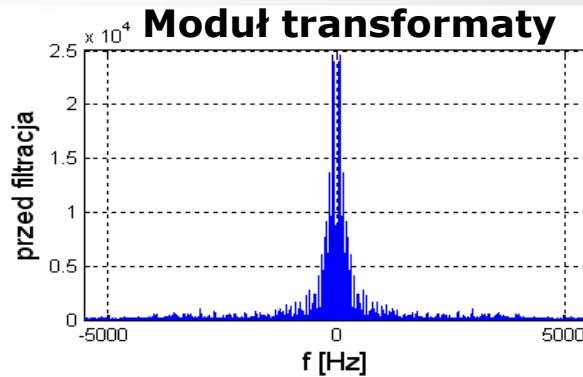
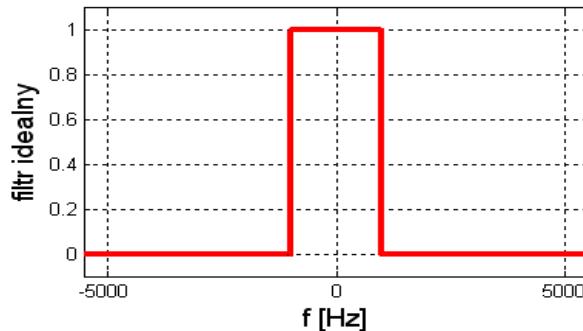
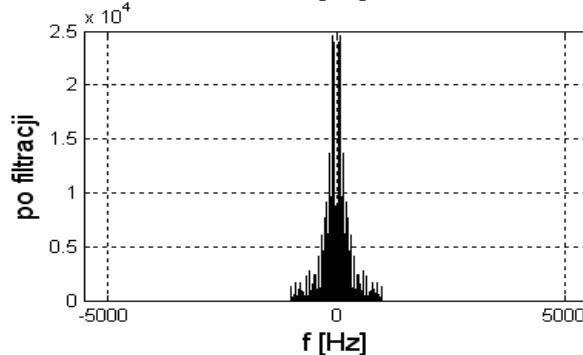
$$\begin{aligned} Y(f) &= |Y(f)| \cdot e^{j \cdot \varphi_Y(f)} = |X(f)| \cdot e^{j \cdot \varphi_X(f)} \cdot |H(f)| \cdot e^{j \cdot \varphi_H(f)} = \\ &= |X(f)| \cdot |H(f)| \cdot e^{j \cdot [\varphi_X(f) + \varphi_H(f)]} \end{aligned}$$

czyli:

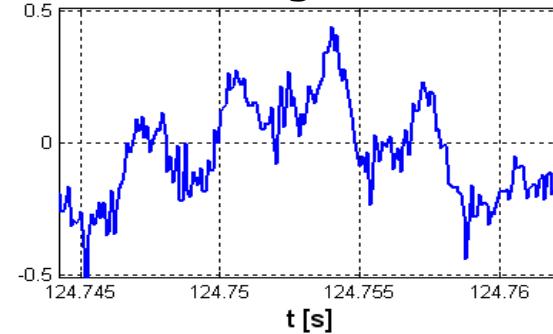
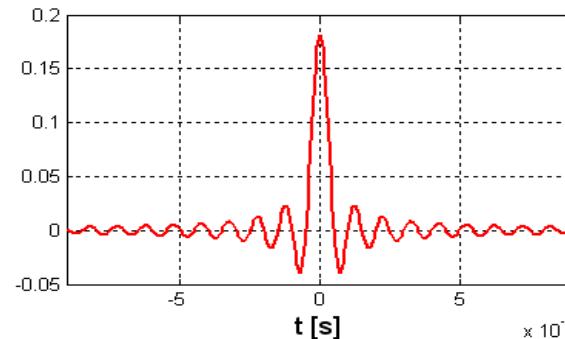
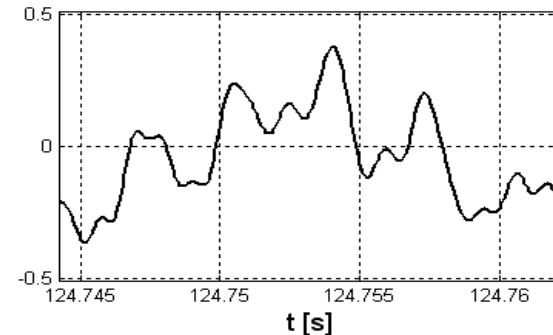
$$|Y(f)| = |X(f)| \cdot |H(f)|$$

$$\varphi_Y(f) = \varphi_X(f) + \varphi_H(f)$$

# Filtracja w dziedzinie transformaty Fouriera i czasu

 $|X(f)|$ 

 $|H(f)| = H(f)$ 

 $|Y(f)|$ 


**Przebiegi w czasie**


 $x(t)$ 

 $h(t)$ 

 $y(t)$

# Transformacja Laplace'a

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt$$

$$X(s) \in \mathbf{C}$$

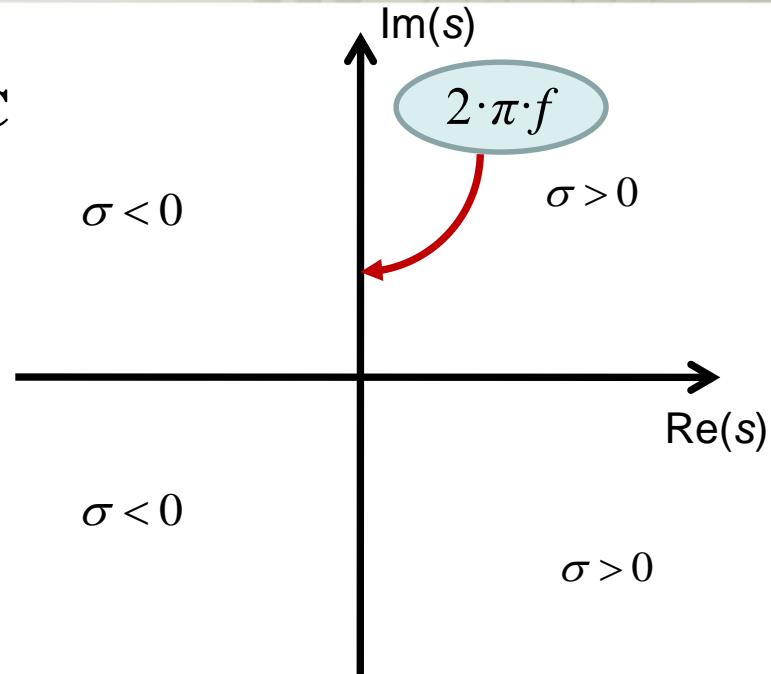
$$s = \sigma + j \cdot \omega$$

$$s = \sigma + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$\boxed{\text{Im}(s)=2 \cdot \pi \cdot f}$$

**Transformacja Fouriera:**

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt$$



**Transformacja Laplace'a jest liniowa!**

## Przykład wyliczenia dla

$$x(t) = u(t) \cdot e^{-a \cdot t}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} e^{-a \cdot t} \cdot e^{-s \cdot t} dt &= \int_0^{+\infty} e^{-(a + s) \cdot t} dt = \boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(a - s) \cdot t} = e^{j \cdot \text{Im}(a - s) \cdot t} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\text{Re}(a - s) \cdot t}} \\
 &= \{a - s \neq 0\} = \left[ -\frac{e^{(a - s) \cdot t}}{a - s} \right]_0^{+\infty} = \{\text{Re}(a - s) < 0\} = -\frac{1}{a - s}
 \end{aligned}$$

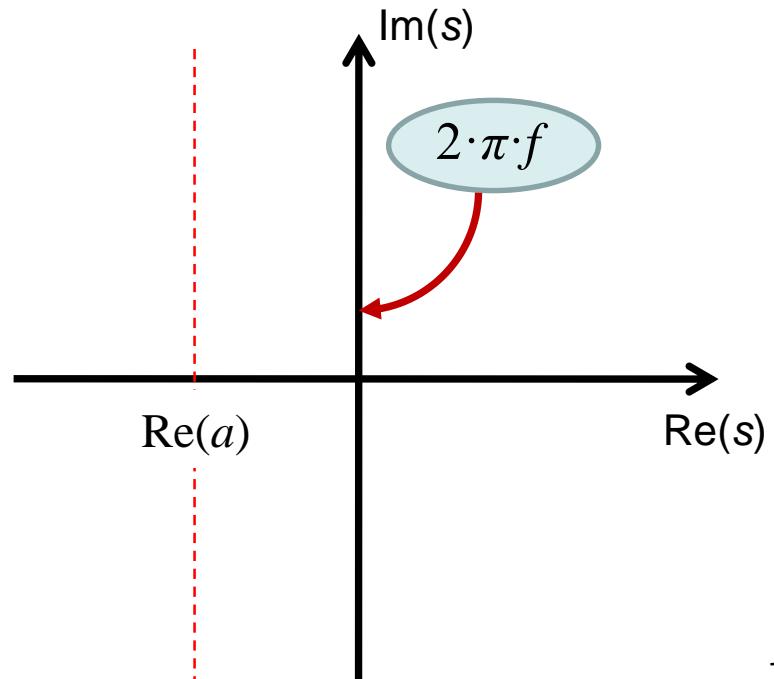
**Obszar zbieżności, OZ (ang. ROC = Region of Convergence):**

$$\text{Re}(a - s) < 0 \Rightarrow \text{Re}(s) > \text{Re}(a)$$

# Sygnal i jego transformata Laplace'a

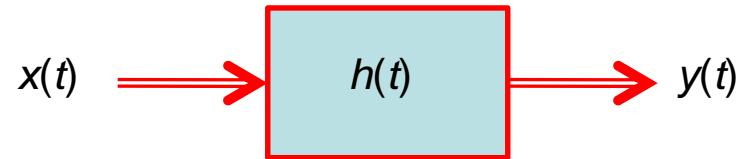
$$e^{-a \cdot t} \cdot u(t) \quad \xleftarrow[ILT]{LT} \quad \frac{1}{s - a} \quad : \quad \text{Re}(s) > \text{Re}(a)$$

**Sens transformaty Fouriera  
dla tego przypadku...**



# Dla systemów *LTI* można stosować różne, równoważne sposoby opisu

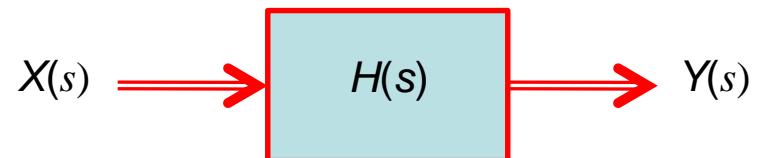
$$x(t) \xrightleftharpoons[ILT]{LT} X(s)$$



$$y(t) \xrightleftharpoons[ILT]{LT} Y(s)$$

$$y(t) = x(t)*h(t)$$

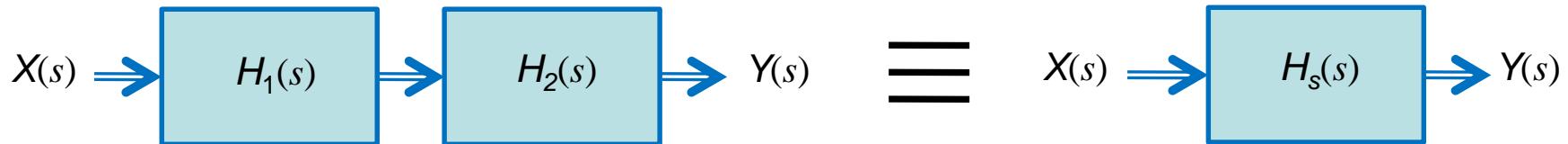
$$h(t) \xrightleftharpoons[ILT]{LT} H(s)$$



$$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

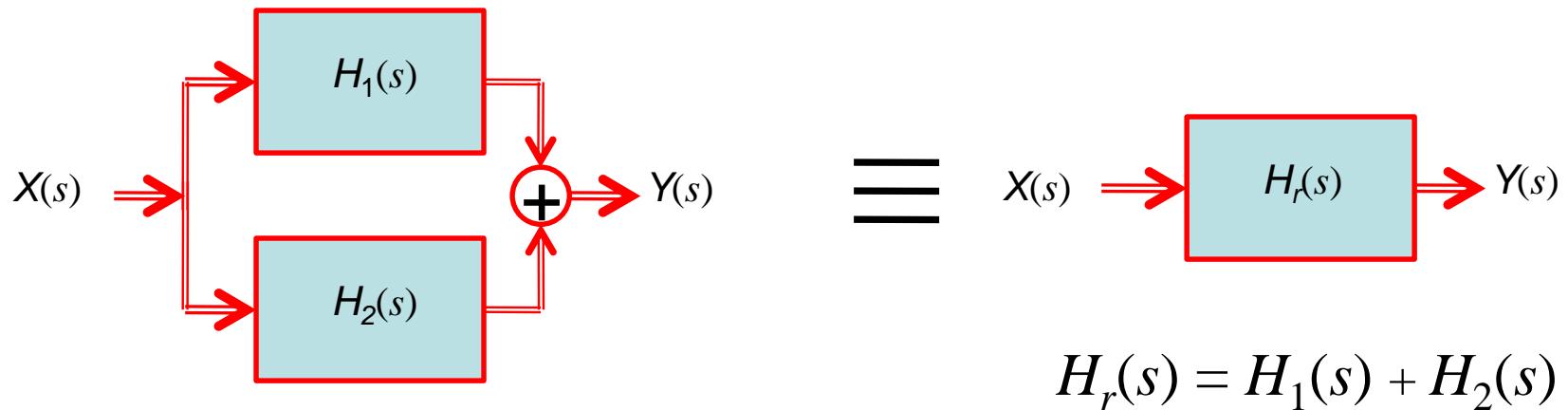
**Twierdzenie o splocie dla transformacji Laplace'a**

# Połączenia systemów LTI w dziedzinie Laplace'a



$$H_s(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$$


---



$$H_r(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

# Transmitancja systemu

**Twierdzenie o splocie**

$$x(t) * h(t) \xleftarrow[ILT]{LT} X(s) \cdot H(s)$$

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

**Transmitancja**

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \dots + b_M \cdot s^M}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \dots + a_N \cdot s^N}$$

$$H(s) = \frac{b_M}{a_N} \cdot \frac{(s - z_0) \cdot (s - z_1) \cdot \dots \cdot (s - z_{M-1})}{(s - p_0) \cdot (s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_{N-1})}$$

**... zera ( $z_m$ ) i bieguny ( $p_n$ ) transmitancji.**

# Rozkład transmitancji na ułamki proste

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \dots + b_M \cdot s^M}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \dots + a_N \cdot s^N}$$

Zwykle  $M < N$

... i wtedy rozkład na ułamki proste

dla  $p_k \neq p_l$

jest następujący:

$$H(s) = \frac{c_0}{s - p_0} + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \dots + \frac{c_{N-1}}{s - p_{N-1}}$$

**Recepta jest prosta:**

$$c_k = H(s) \cdot (s - p_k) \Big|_{s=p_k}$$

# Odpowiedź impulsowa systemu (LTI) o danej transmitacji

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \dots + b_M \cdot s^M}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \dots + a_N \cdot s^N}$$

$$H(s) = \frac{c_0}{s - p_0} + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \dots + \frac{c_{N-1}}{s - p_{N-1}}$$

$$H(s) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{c_n}{s - p_n} \quad \xrightarrow{\text{ILT}} \quad h(t) = u(t) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{p_n \cdot t}$$

$$e^{a \cdot t} u(t) \quad \xleftarrow[ILT]{LT} \quad \frac{1}{s - a} \quad : \quad \text{Re}(s) > \text{Re}(a)$$

# Związki między transmitancją w dziedzinie Laplace'a i Fouriera (pod warunkiem zgodności obszaru zbieżności)

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \dots + b_M \cdot s^M}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \dots + a_N \cdot s^N}$$

**Charakterystyki częstotliwościowe (Fouriera):**

$$H(s) \Big|_{s=j\cdot\omega} = H(\omega) = \frac{b_0 + b_1 \cdot (j \cdot \omega) + b_2 \cdot (j \cdot \omega)^2 + \dots + b_M \cdot (j \cdot \omega)^M}{1 + a_1 \cdot (j \cdot \omega) + a_2 \cdot (j \cdot \omega)^2 + \dots + a_N \cdot (j \cdot \omega)^N}$$

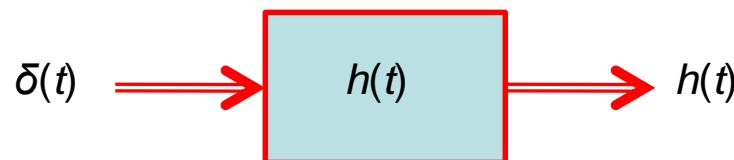
dla  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

$$H(s) \Big|_{s=j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} = H(f) = \frac{b_0 + b_1 \cdot (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f) + b_2 \cdot (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^2 + \dots + b_M \cdot (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^M}{1 + a_1 \cdot (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f) + a_2 \cdot (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^2 + \dots + a_N \cdot (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^N}$$

# Stabilność i przyczynowość filtru

Filtr LTI jest przyczynowy, gdy:  $h(t)=0$  dla  $t<0$

Wyjaśnienie:



$$\delta(t) * h(t) = h(t)$$

Idealny filtr (DP):  
 $H(f) = \Pi(f / (2 \cdot f_g))$   
nie jest przyczynowy !

---

Filtr jest **stabilny**, gdy ograniczony sygnał wejściowy daje zawsze ograniczony sygnał wyjściowy.

Filtr jest **asymptotycznie stabilny**, gdy z faktu, iż sygnał wejściowy od pewnej chwili staje się zerowy (i pozostaje taki aż do nieskończoności) wynika, że gdy  $t$  dąży do nieskończoności, to sygnał wyjściowy dąży do zera.

Jest tak, gdy:  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ , czyli, gdy:  $H(s): \operatorname{Re}(p_k) < 0$

# Filtr Butterwortha

**Założenie projektowe:**

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_g}\right)^{2N}} \Rightarrow |H(f)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_g}\right)^{2N}}} \quad (1)$$

**Charakterystyka maksymalnie płaska:  
pochodne wszystkich rzędów dążą do zera  
dla  $f \rightarrow 0$  oraz  $f \rightarrow \infty$**

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j \cdot \omega_g}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + (-1)^N \left(\frac{s}{\omega_g}\right)^{2N}} \quad (2)$$

**Można sprawdzić, że (2) sprowadza się do (1) po podstawieniu:  $s=j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$**

# Projektowanie filtru Butterwortha

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j \cdot \omega_g}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + (-1)^N \left(\frac{s}{\omega_g}\right)^{2N}}$$

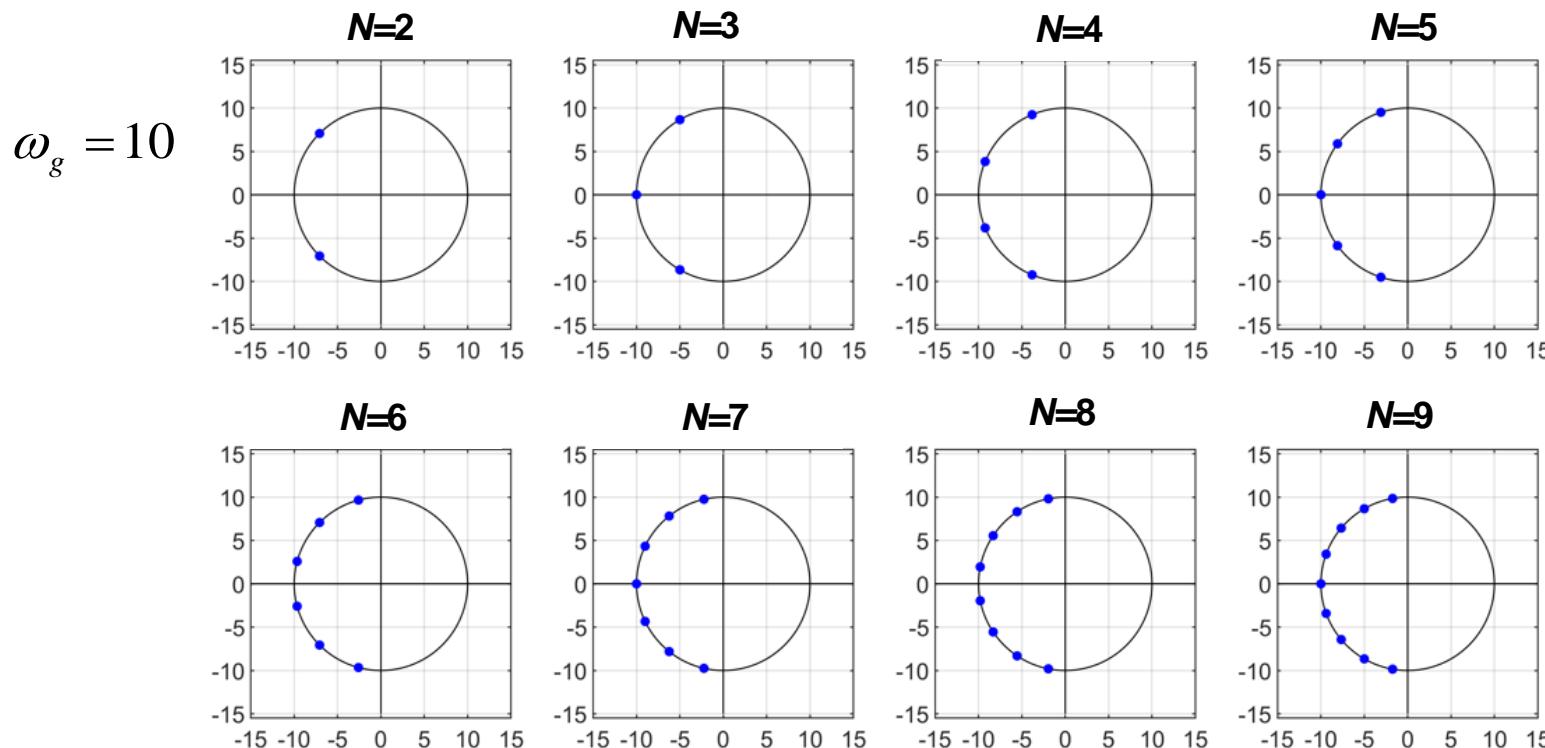


$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \dots + b_M \cdot s^M}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \dots + a_N \cdot s^N}$$

# Projektowanie filtru Butterwortha

**Dolnoprzepustowy ( $\omega_g = 2\pi f_g$  rad/s) filtr Butterwortha jest opisany w dziedzinie Laplace'a następująco:**

$$H(s) = \frac{(\omega_g)^N}{(s - p_0) \cdot (s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_{N-1})} = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{\omega_g}{s - p_k}$$



# Filtr Butterwortha - odpowiedź impulsowa

$$H(s) = \frac{c_0}{s - p_0} + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \dots + \frac{c_{N-1}}{s - p_{N-1}}$$

$$H(s) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{c_n}{s - p_n} \xrightarrow{\text{ILT}} h(t) = u(t) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{p_n \cdot t}$$

**Dla filtru 2. rzędu ( $f_g = 1$  Hz):**

$$h(t) = u(t) \cdot 2 \cdot (\pi \cdot \sqrt{2}) \cdot e^{-\sqrt{2} \cdot \pi \cdot t} \cdot \sin(\sqrt{2} \cdot \pi \cdot t)$$

**Dla filtru 3. rzędu ( $f_g = 1$  Hz):**

$$h(t) = u(t) \cdot \left[ 2 \cdot \pi \cdot e^{-2 \cdot \pi \cdot t} + e^{-\pi \cdot t} \cdot \left( \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{3}} \cdot \sin(\sqrt{3} \cdot \pi \cdot t) - 2 \cdot \pi \cdot \cos(\sqrt{3} \cdot \pi \cdot t) \right) \right]$$

# Filtr Butterwortha skala decybelowa i częstotliwość graniczna

$$A(f) = |H(f)|$$

$$A_{dB}(f) = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{A(f)}{A_{ref}} \right) [dB]$$

$$A_{dB}^2(f) = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{(A(f))^2}{(A_{ref})^2} \right) [dB]$$

$$f_g : A(f_g) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow A_{dB}(f_g) = -3dB$$

Tu zwykle przyjmujemy:  $A_{ref}=1$

$$10 \Leftrightarrow +20dB$$

$$2 \Leftrightarrow +6dB$$

$$\sqrt{2} \Leftrightarrow +3dB$$

$$1 \Leftrightarrow 0dB$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow -3dB$$

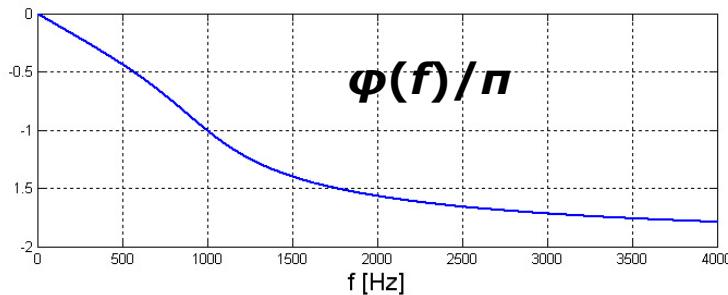
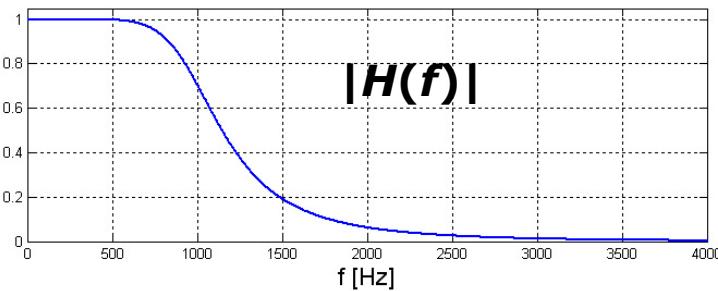
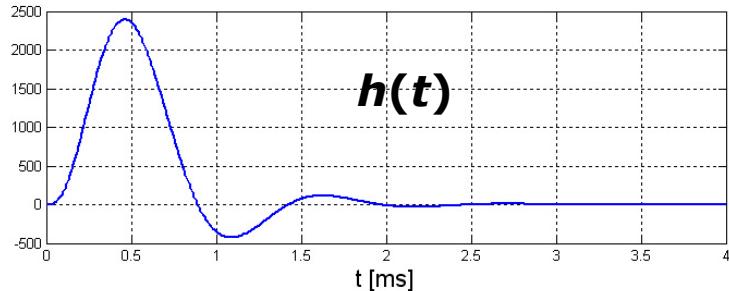
$$\frac{1}{2} \Leftrightarrow -6dB$$

$$\frac{1}{10} \Leftrightarrow -20dB$$

$$\frac{1}{100} \Leftrightarrow -40dB$$

$$\frac{1}{1000} \Leftrightarrow -60dB$$

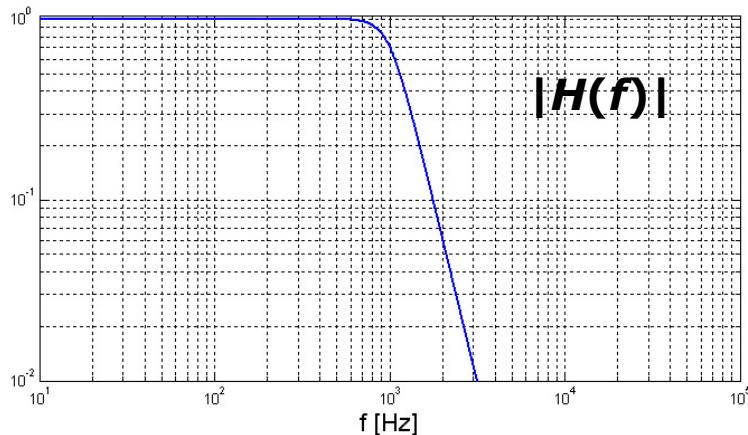
# Filtr Butterwortha przykłady



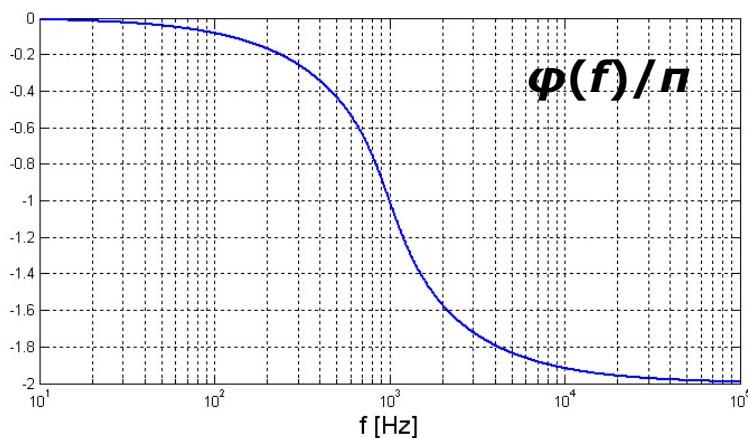
**Filtr Butterwortha, 4. rzędu,  
 $f_g = 1\text{kHz}$ .**

**Odpowiedź impulsowa  $h(t)$   
oraz ch-ki: amplitudowa i fazowa.**

# Filtr Butterwortha przykłady



$|H(f)|$



$\phi(f)/\pi$

**Filtr Butterwortha, 4. rzędu,  
 $f_g=1\text{kHz}$ .**

**Ch-ki: amplitudowa w skali  
logarytmicznej i fazowa  
w skali półlogarytmicznej.**

# Filtr Butterworth – zależność charakterystyk od rzędu filtru

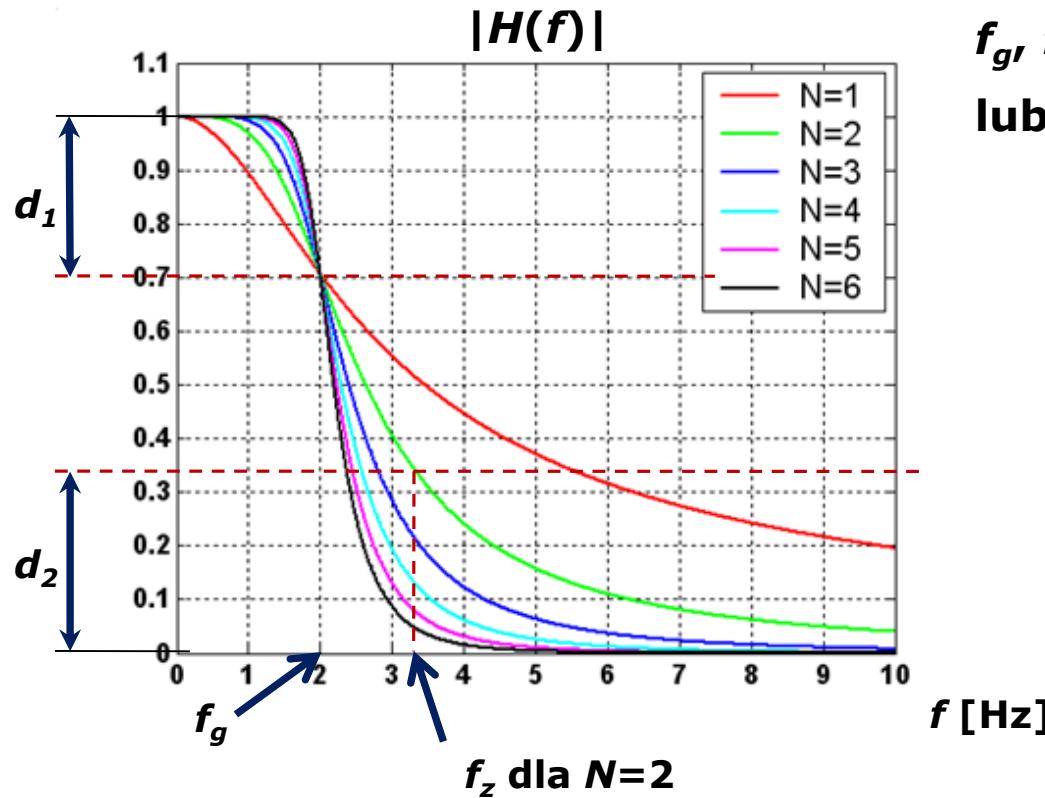
Porównanie wykresów charakterystyk amplitudowych dla kolejnych rzędów filtru:

$$f_g = 2\text{Hz}$$

Założenia projektowe:

$$f_g, f_z, d_2 \rightarrow N$$

$$\text{lub np.: } N, f_g, d_2 \rightarrow f_z$$



# Filtr dolnoprzepustowy Czebyszewa

**Typu I :**

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot C_N^2 \left( \frac{f}{f_g} \right)}$$

**Typu II :**

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot C_N^2 \left( \frac{f_z}{f_g} \right) / C_N^2 \left( \frac{f_z}{f} \right)}$$

**Wielomiany Czebyszewa:**

$$C_N(x) = \cos(N \cdot v) \quad : \quad \cos(v) = x$$

$$C_N(x) = \cosh(N \cdot v) \quad : \quad \cosh(v) = x$$

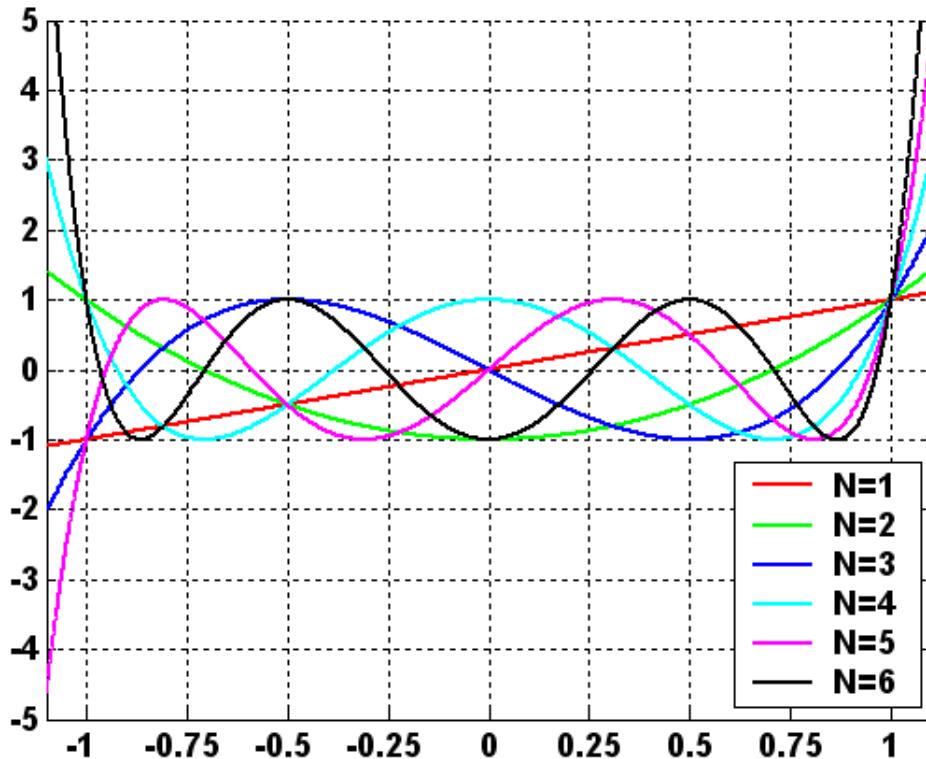
**czyli:**

$$C_N(x) = \cosh(N \cdot \cosh^{-1}(x))$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

# Filtr Czebyszewa - wielomiany Czebyszewa

$$C_N(x) = \cosh(N \cdot \cosh^{-1}(x))$$



$$C_1(x) = x$$

$$C_2(x) = 2 \cdot x^2 - 1$$

$$C_3(x) = 4 \cdot x^3 - 3 \cdot x$$

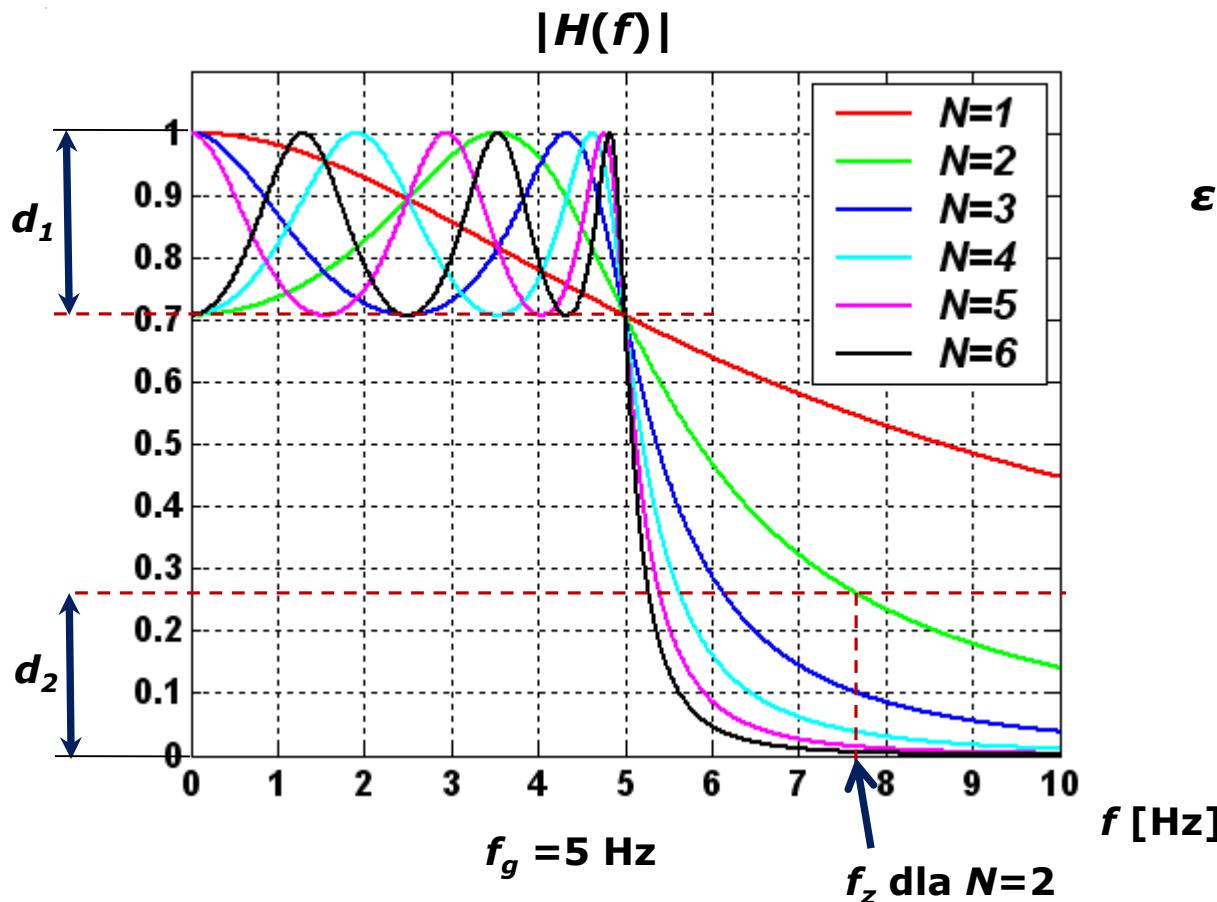
$$C_4(x) = 8 \cdot x^4 - 8 \cdot x^2 + 1$$

$$C_5(x) = 16 \cdot x^5 - 20 \cdot x^3 + 5 \cdot x$$

$$C_6(x) = 32 \cdot x^6 - 48 \cdot x^4 + 18 \cdot x^2 - 1$$

# Filtr Czebyszewa (typ I) - ograniczenia projektowe dla amplitudy

**Pasma: przepustowe, przejściowe i zaporowe.**

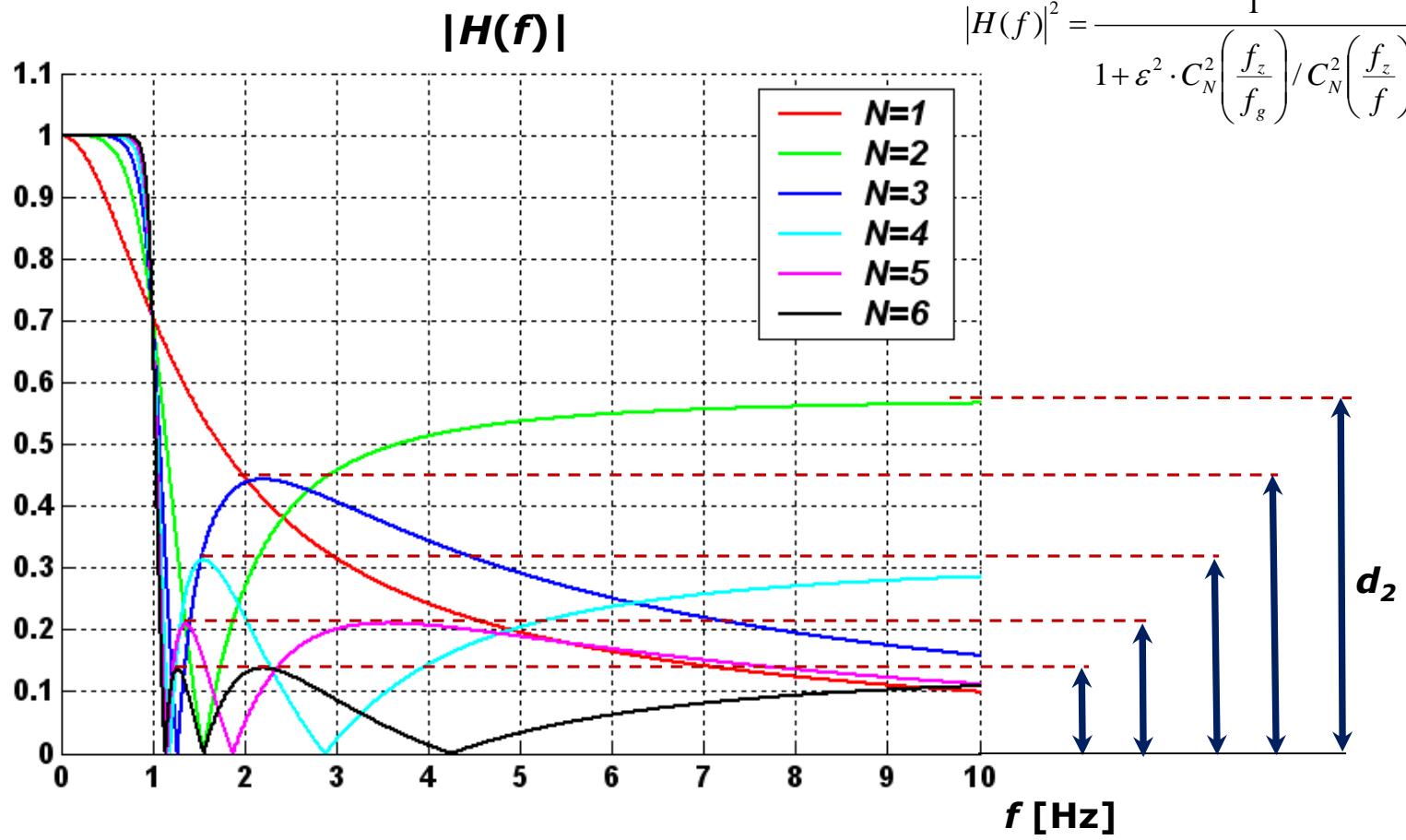


$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot C_N^2 \left( \frac{f}{f_g} \right)}$$

$$\varepsilon = 1$$

# Charakterystyki amplitudowe dla filtru Czebyszewa typu II

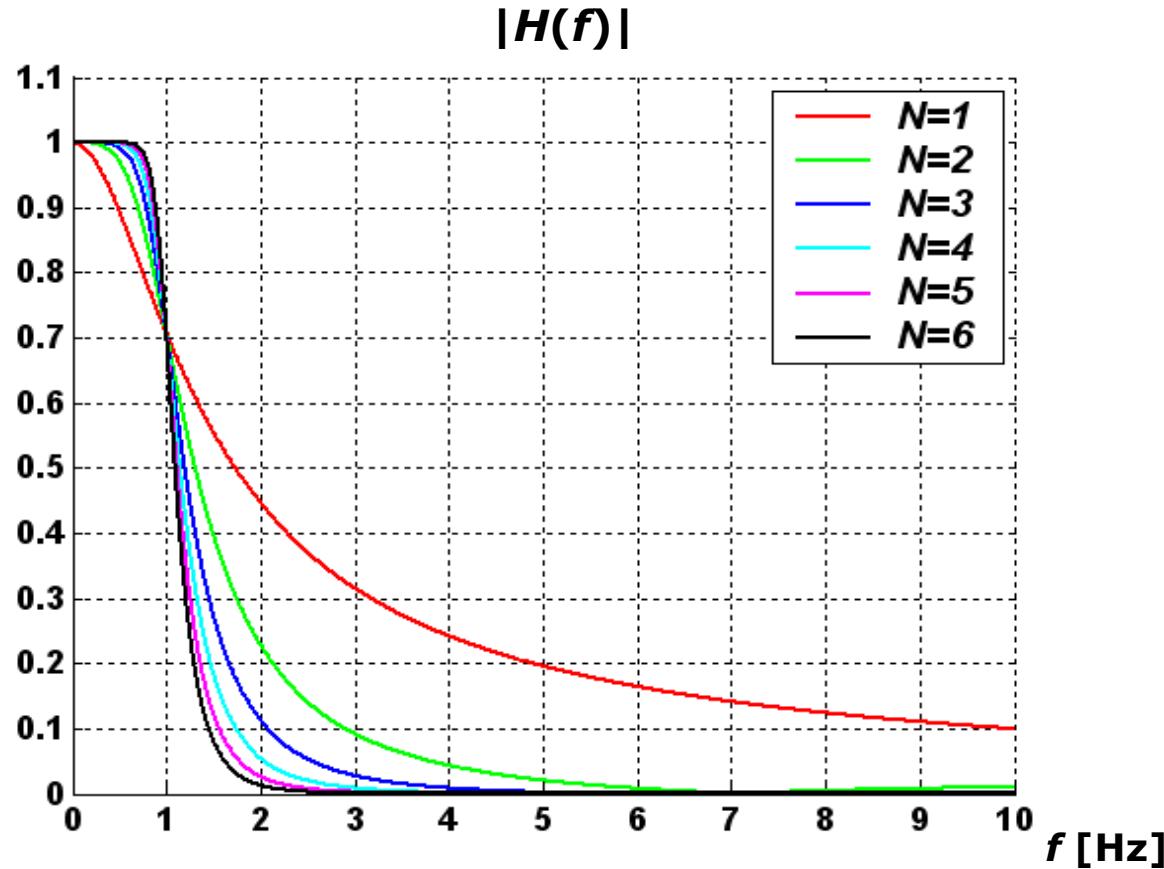
$$\begin{aligned} f_g &= 1 \text{ Hz} \\ f_z &= 1,1 \text{ Hz} \\ \varepsilon &= 1 \end{aligned}$$



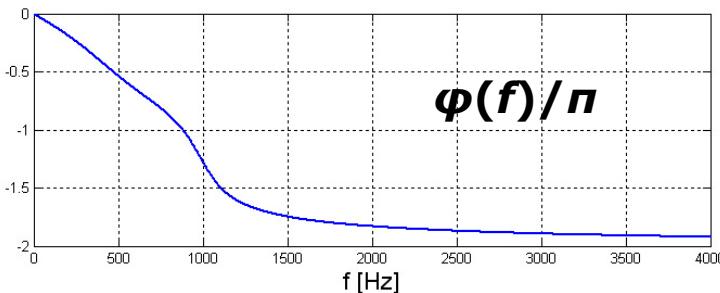
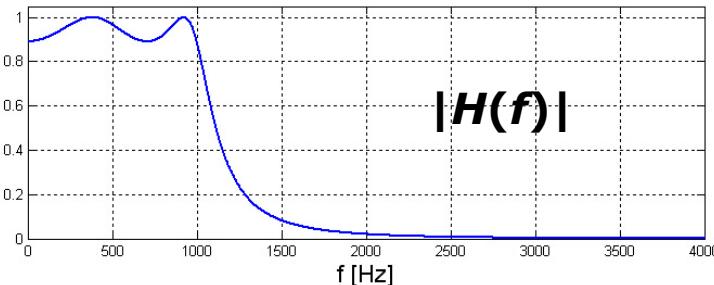
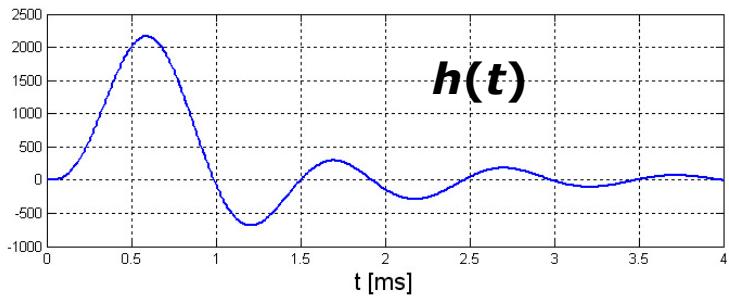
**Wartości:  $N$ ,  $d_2$  oraz  $f_g$  całkowicie określają filtr.**

# Charakterystyki amplitudowe dla filtra Czebyszewa typu II szerokie pasmo przejściowe

$f_g = 1 \text{ Hz}$   
 $f_z = 5 \text{ Hz}$   
 $\varepsilon = 1$



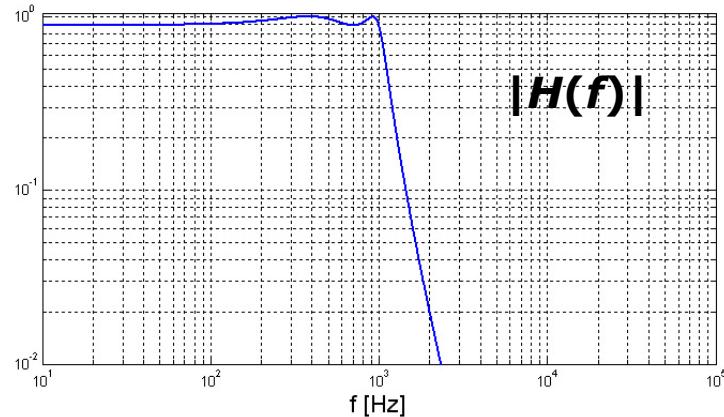
# Filtr Czebyszewa typu I przykład



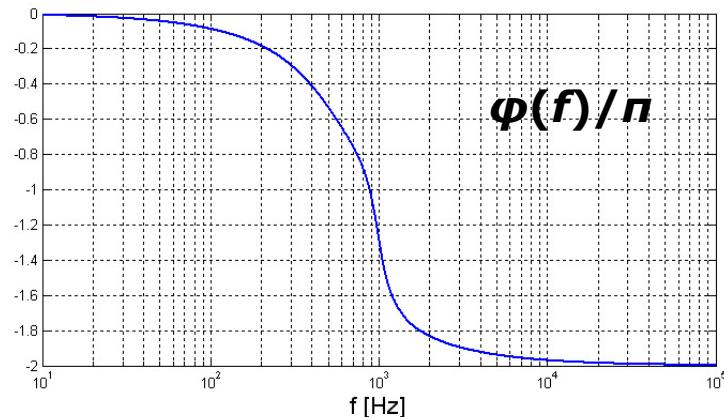
**Filtr Czebyszewa typu I, 4. rzędu,  
 $f_g = 1\text{kHz}$ ,  
maks. zafalowania w paśmie  
przepustowym: 1dB.**

**Odpowiedź impulsowa  $h(t)$   
oraz ch-ki: amplitudowa i fazowa.**

## Filtr Czebyszewa typu I, przykład (cd.)



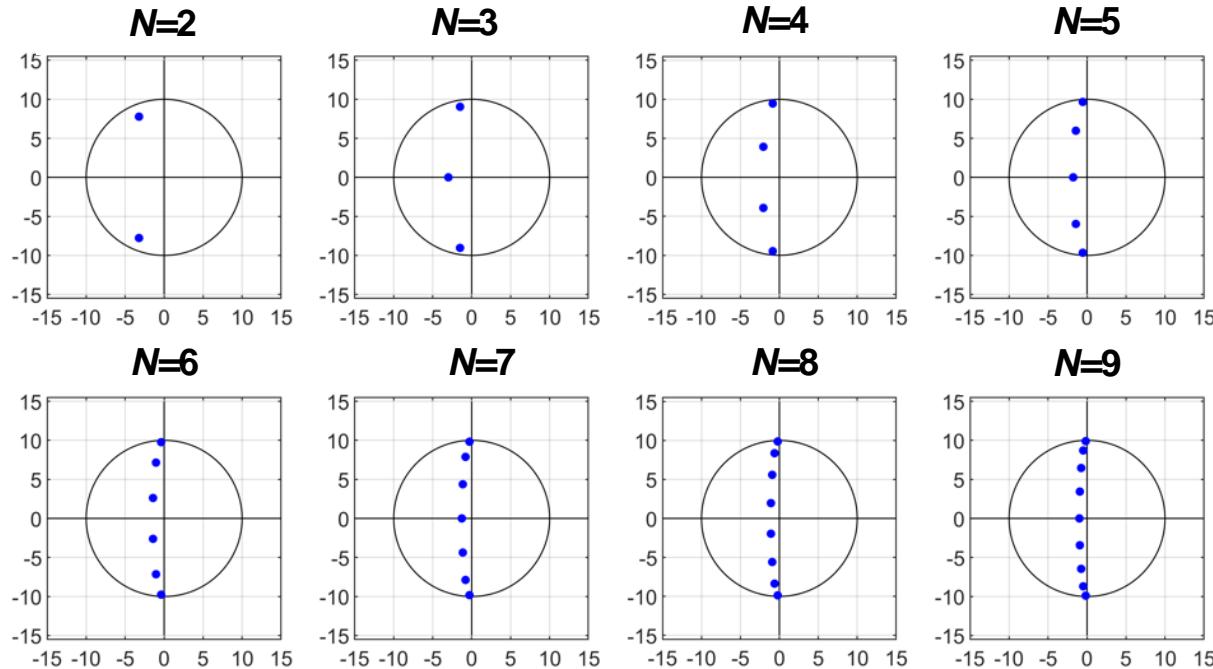
**Filtr Czebyszewa typu I, 4. rzędu,  
 $f_g=1\text{kHz}$ ,  
maks. zafalowania w paśmie  
przepustowym: 1dB.**



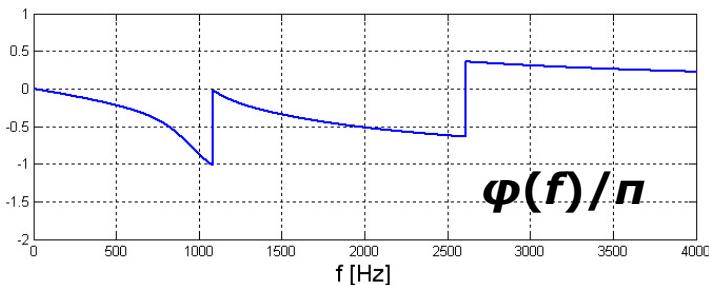
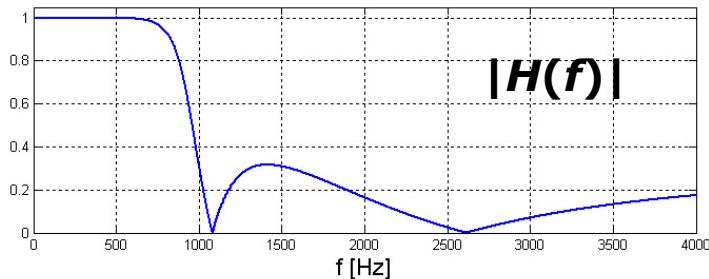
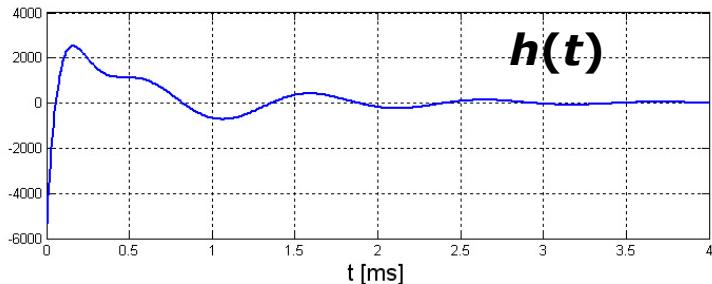
**Ch-ki: amplitudowa i fazowa  
w odpowiednich skalach  
logarytmicznych.**

# Filtr Czebyszewa typu I – rozmieszczenie biegunów

$\omega_g = 10$



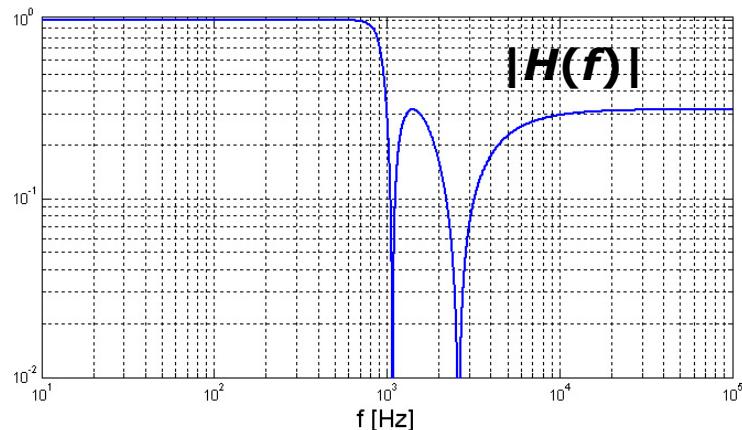
# Filtr Czebyszewa typu II przykład



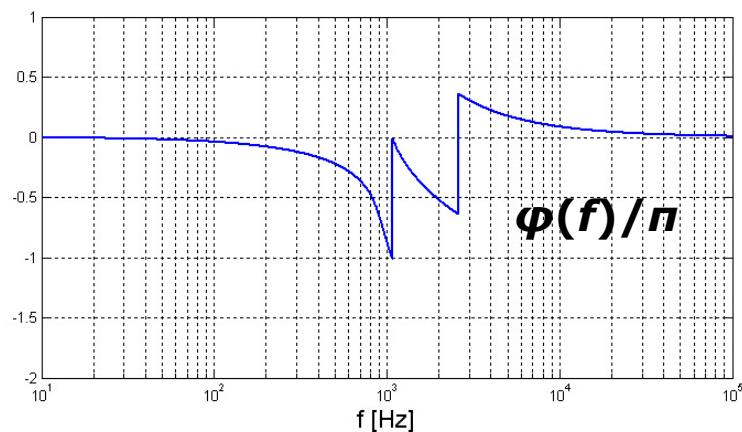
**Filtr Czebyszewa typu II, 4. rzędu,  
 $f_g=1\text{kHz}$ ,  
min. tłumienie w paśmie  
zaporowym: 10dB.**

**Odpowiedź impulsowa  $h(t)$   
oraz ch-ki: amplitudowa i fazowa.**

## Filtr Czebyszewa typu II, przykład (cd.)



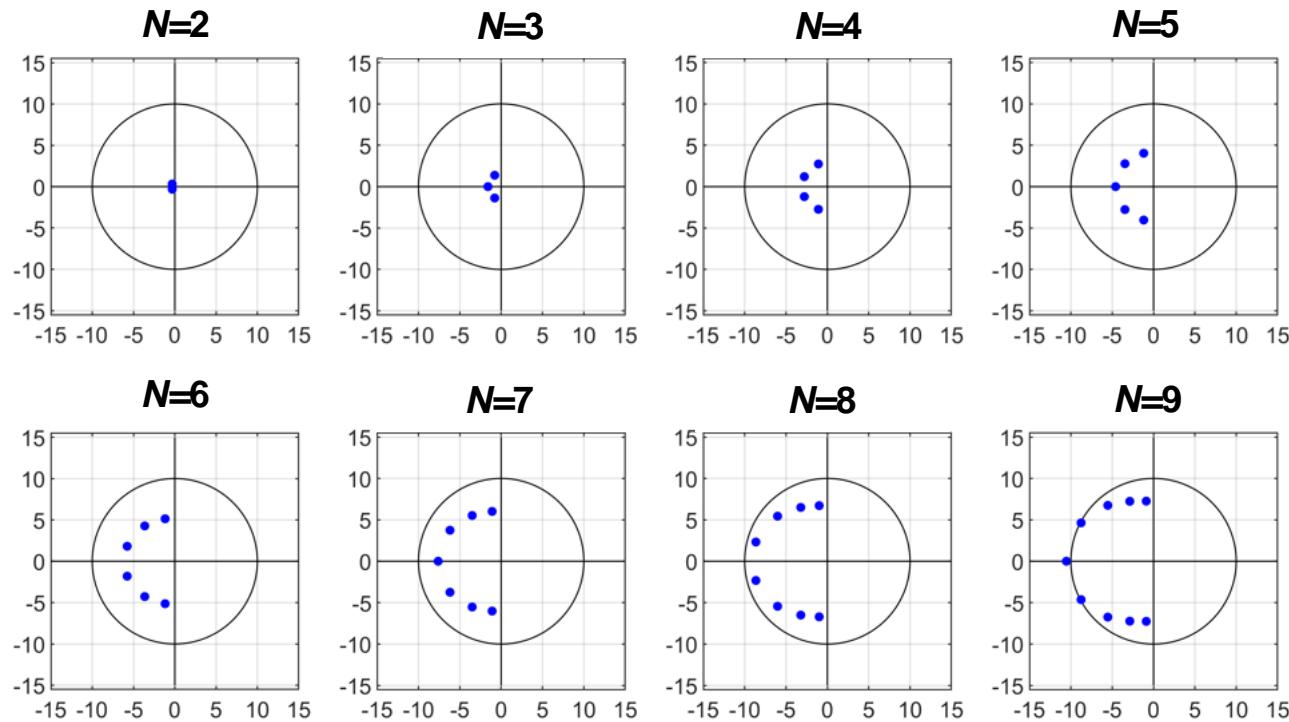
**Filtr Czebyszewa typu II, 4. rzędu,  
 $f_g = 1\text{kHz}$ ,  
min. tłumienie w paśmie  
zaporowym: 10dB.**



**Ch-ki: amplitudowa i fazowa  
w odpowiednich skalach logarytmicznych.**

# Filtr Czebyszewa typu II – rozmieszczenie biegunów

$\omega_g = 10$



## Filtr eliptyczny (Cauera)

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot U_N^2\left(\xi, \frac{f}{f_g}\right)}$$

gdzie:

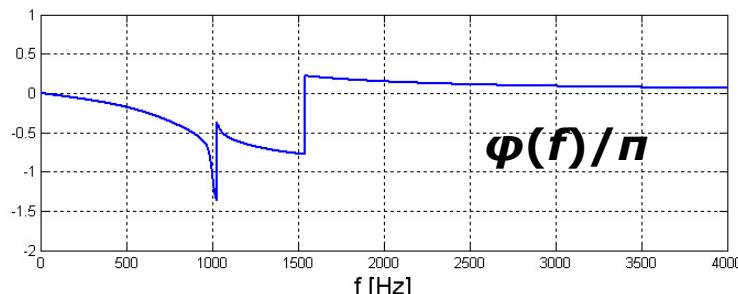
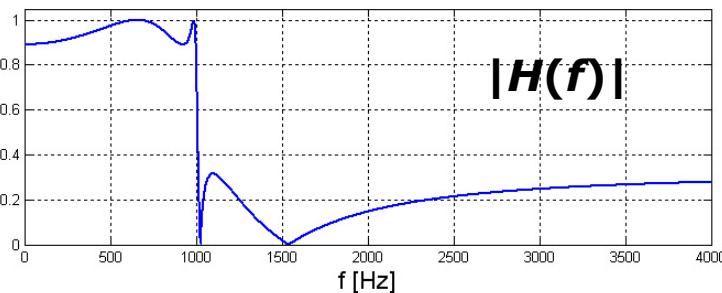
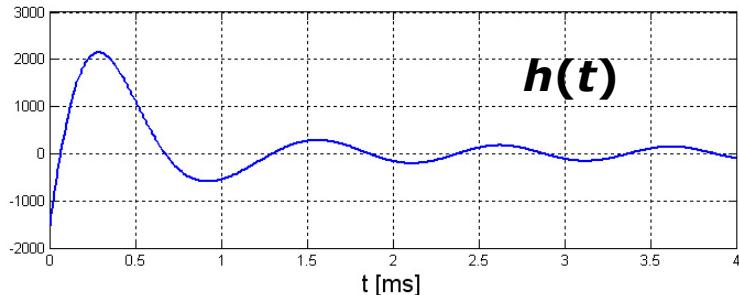
$$U_N(\xi, x)$$

to funkcja eliptyczna, zależna od parametru  $\xi$ .

Gdy ten parametr dąży do nieskończoności, to funkcja dąży do wielomianu Czebyszewa, czyli filtr staje się filtrem Czebyszewa typu I.

Wartości:  $N$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  oraz  $f_g$  całkowicie określają filtr.

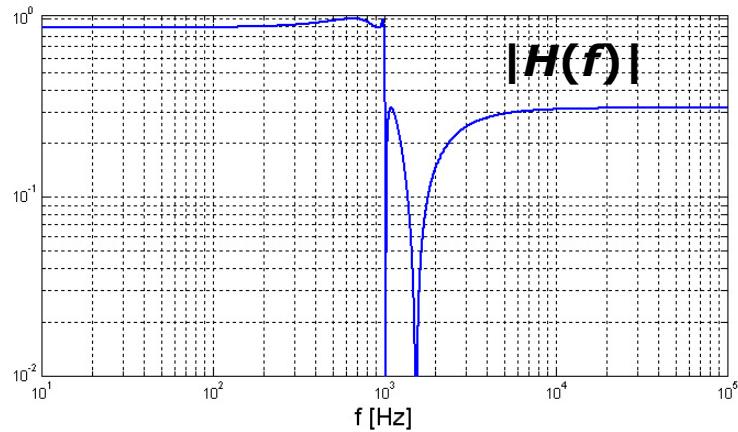
# Filtr eliptyczny (Cauera) przykład



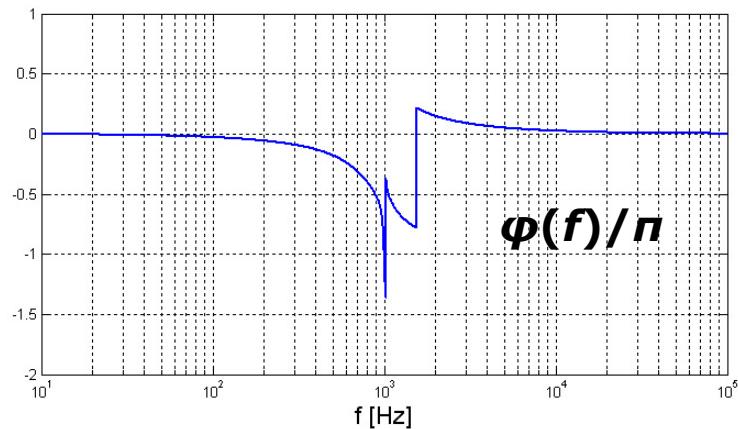
**Filtr eliptyczny, 4. rzędu,  
 $f_g=1\text{kHz}$ ,  
maks. zafalowanie w paśmie  
przepustowym: 1dB,  
min. tłumienie w paśmie  
zaporowym: 10dB,**

**Odpowiedź impulsowa  $h(t)$   
oraz ch-ki: amplitudowa i fazowa.**

## Filtr eliptyczny (Cauera), przykład (cd.)



**Filtr eliptyczny, 4. rzędu,  
 $f_g = 1\text{kHz}$ ,  
 maks. zafalowanie w paśmie  
 przepustowym: 1dB,  
 min. tłumienie w paśmie  
 zaporowym: 10dB,**

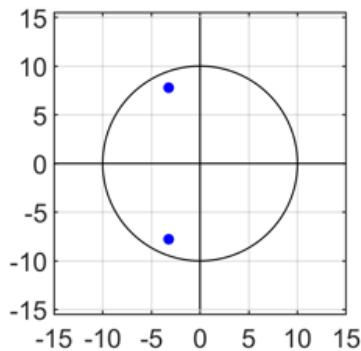


**Ch-ki: amplitudowa i fazowa  
 w odpowiednich skalach  
 logarytmicznych.**

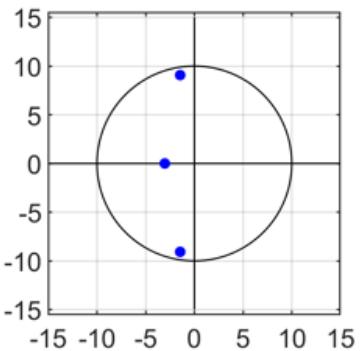
# Filtr eliptyczny – rozmieszczenie biegunów

$\omega_g = 10$

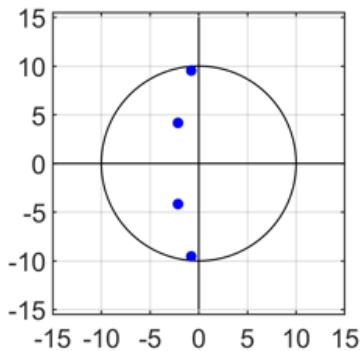
$N=2$



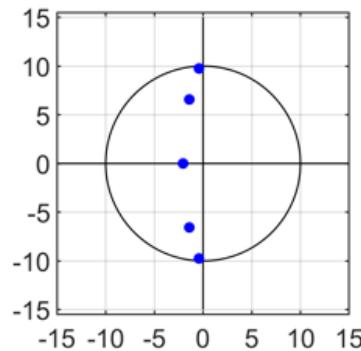
$N=3$



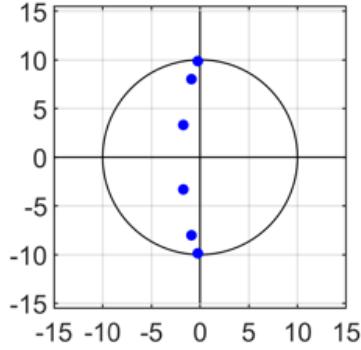
$N=4$



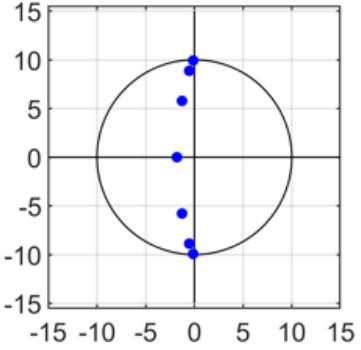
$N=5$



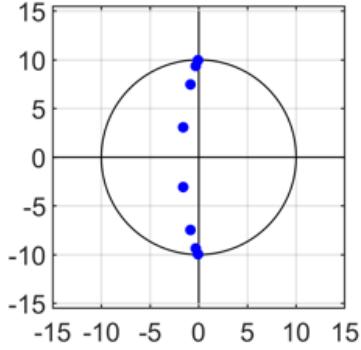
$N=6$



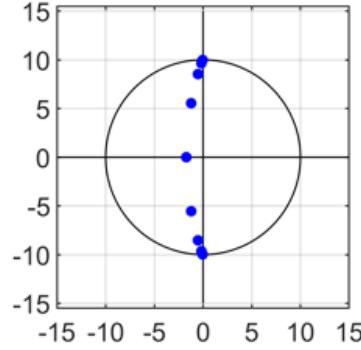
$N=7$



$N=8$



$N=9$



# Przeliczenia filtrów dolnoprzepustowych (FDP, $f_g=1\text{Hz}$ ) na inne postacie filtrów

$H_0(f)$ : FDP dla  $f_g = 1\text{Hz}$ ;

$$H_{FDP}(f) = H_0 \left( \frac{f}{f_g} \right)$$

$$H_{FGP}(f) = H_0 \left( -\frac{f_d}{f} \right)$$

$$H_{FPP}(f) = H_0 \left( \frac{f^2 - f_d \cdot f_g}{f \cdot (f_g - f_d)} \right) : f_g > f_d$$

$$H_{FPZ}(f) = H_0 \left( \frac{f \cdot (f_g - f_d)}{f_d \cdot f_g - f^2} \right) : f_g > f_d$$

Analogiczne przepisy dla „s” :

$$H_{FDP}(s) = H_0 \left( j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{s}{s_g} \right)$$

$$H_{FPP}(s) = H_0 \left( j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{s^2 - s_d \cdot s_g}{s \cdot (s_g - s_d)} \right) : f_g > f_d$$

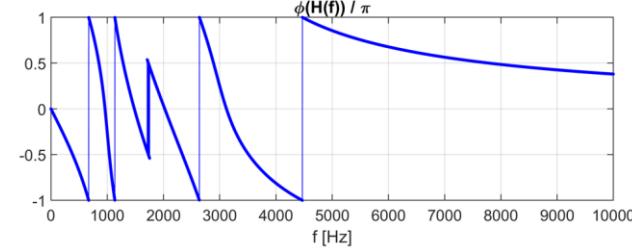
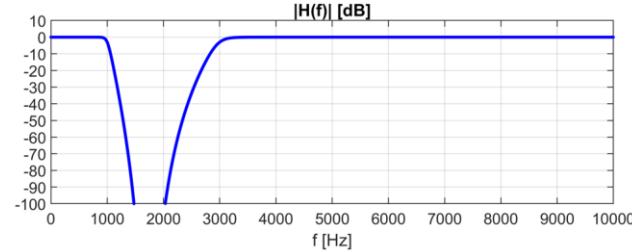
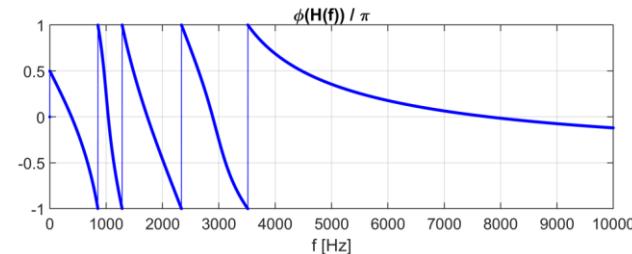
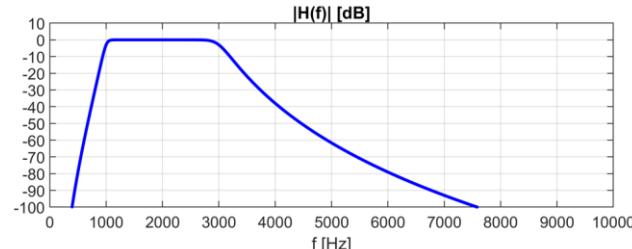
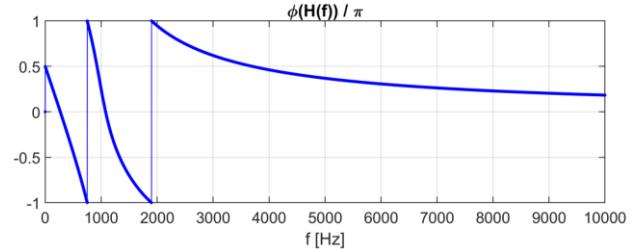
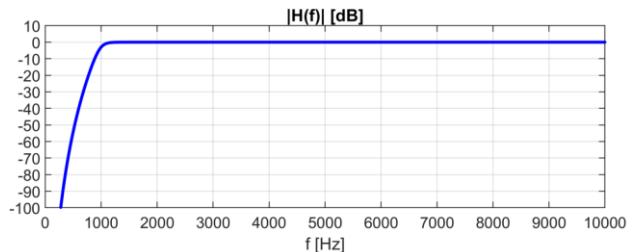
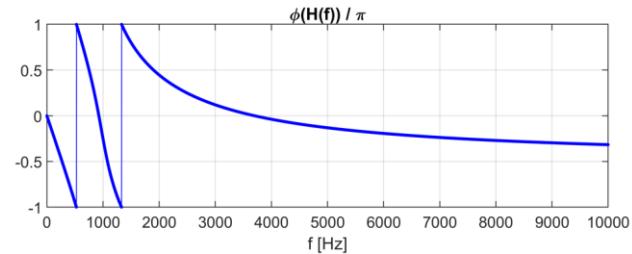
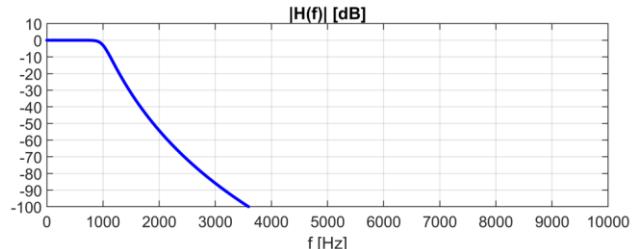
$$H_{FGP}(s) = H_0 \left( -j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{s_d}{s} \right)$$

$$H_{FPZ}(s) = H_0 \left( -j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{s \cdot (s_g - s_d)}{s^2 - s_d \cdot s_g} \right) : f_g > f_d$$

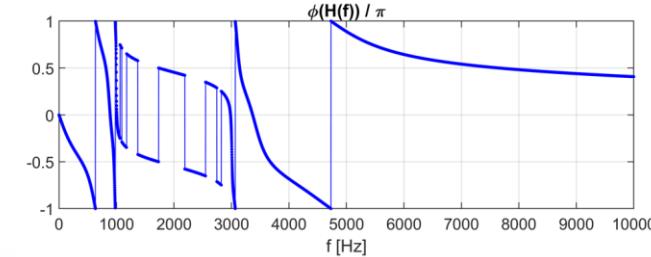
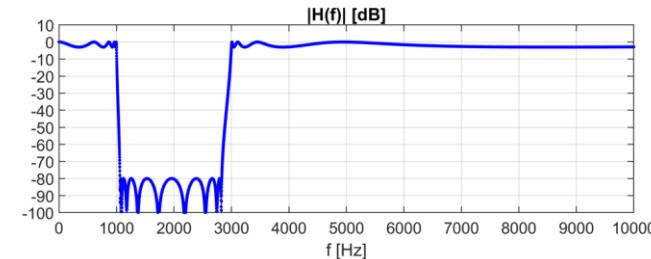
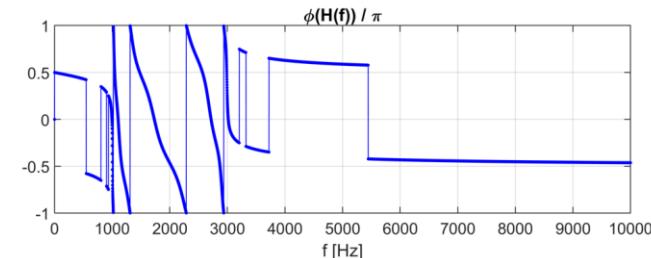
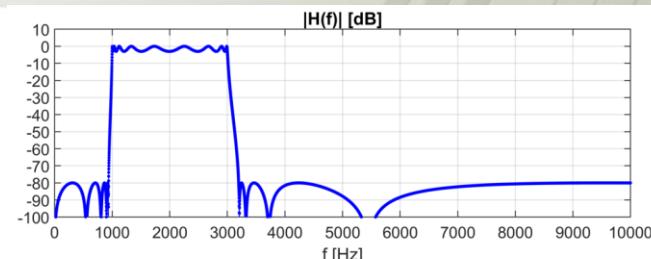
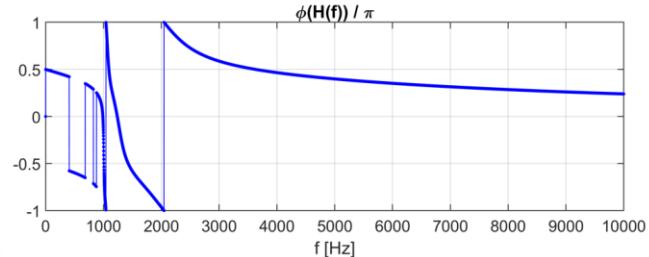
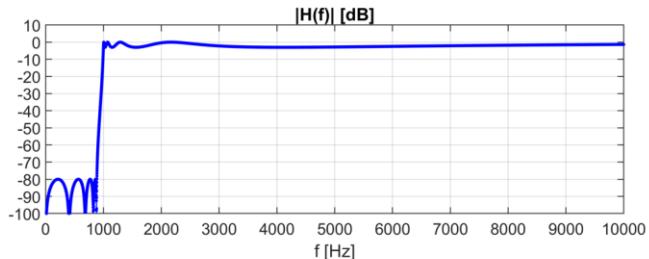
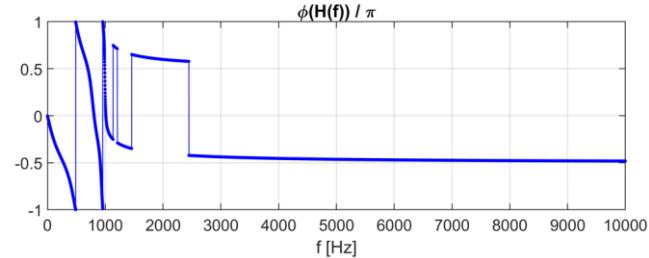
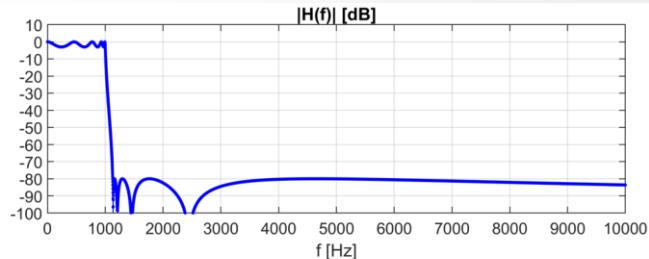
Podstawienie dla szczególnego przypadku :

$s = j \cdot \omega = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$

# Filtры Butterwortha 9. rzędu: DP (1 kHz), GP (1 kHz), PP (1 kHz – 3 kHz), PZ (1 kHz – 3 kHz)



# Filtry eliptyczne (Cauera) 9. rzędu: DP (1 kHz), GP (1 kHz), PP (1 kHz – 3 kHz), PZ (1 kHz – 3 kHz)



# **Podsumowanie**

- 1. Systemy liniowe i stacjonarne.**
- 2. Odpowiedź impulsowa filtru.**
- 3. Transmitancja filtru i jej cechy.**
- 4. Filtr Butterwortha.**
- 5. Filtry Czebyszewa.**
- 6. Filtr eliptyczny.**
- 7. Przekształcanie filtrów.**
- 8. Przykłady charakterystyk filtrów.**



AGH

*Zapraszam na ćwiczenia ...  
lub do laboratorium ...*



**AGH**

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

# **Teoria sygnałów**

## **Wykład 8**

**Dr inż. Przemysław Korohoda  
Katedra Elektroniki, AGH, Kraków**

[home.agh.edu.pl/~korohoda/rok\\_2022\\_2023\\_zima/TS\\_EL\\_2](http://home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2)

**UPEL: TS 2022**

# Temat wykładu

- 1. Okna definiowane w dziedzinie czasu.**
- 2. Okna definiowane w dziedzinie częstotliwości.**

# Efekt modulacji (zmiana długości okna)

$$x_1(t) = \cos(2\pi f_x \cdot t)$$

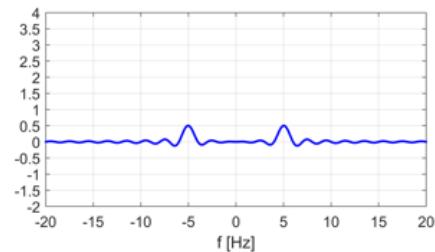
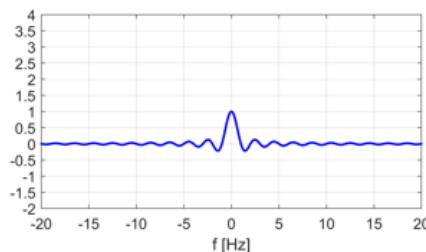
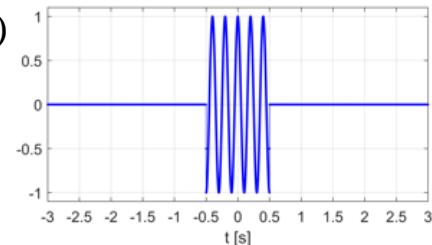
$$y(t)$$

$$X_2(f)$$

$$Y(f)$$

$$x_2(t) = \Pi(t / T)$$

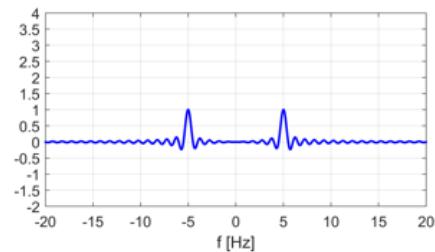
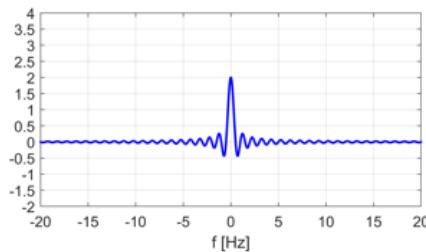
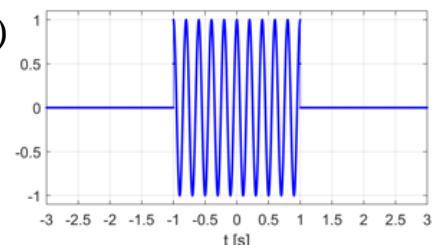
a)



$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$$

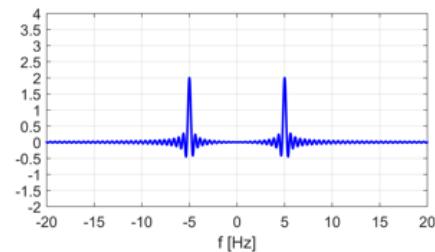
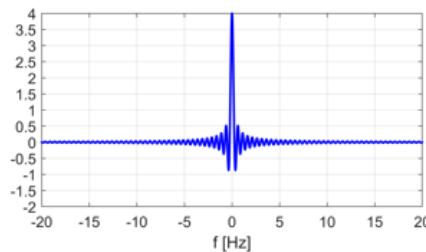
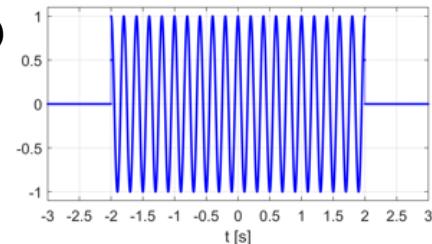
$$f_x = 5 \text{ Hz}$$

b)



- a)  $T = 1 \text{ s}$
- b)  $T = 2 \text{ s}$
- c)  $T = 4 \text{ s}$

c)



# Efekt modulacji (sygnał - „sprężynek”)

$$x_1(t) = \cos(2\pi f_x \cdot t)$$

$$x_2(t) = \Pi(t / T)$$

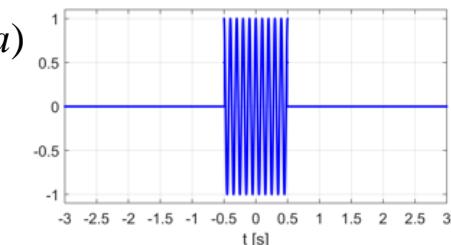
$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$$

a)  $T = 1$  s  
 $f_x = 10$  Hz

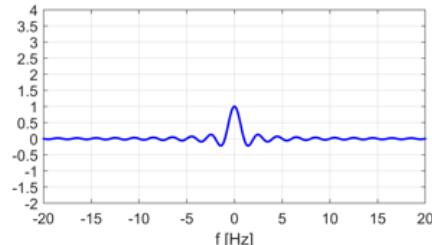
b)  $T = 2$  s  
 $f_x = 5$  Hz

c)  $T = 4$  s  
 $f_x = 2,5$  Hz

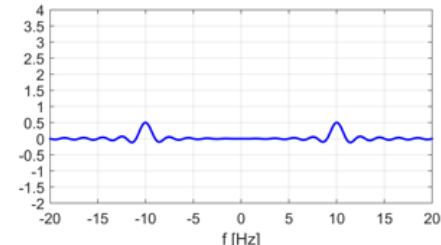
$y(t)$



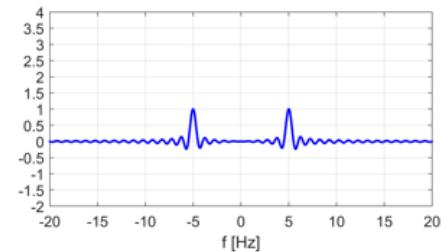
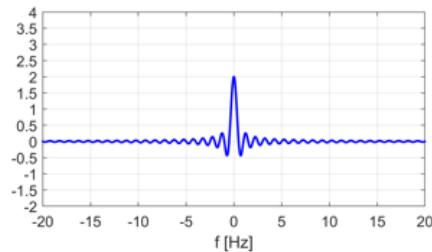
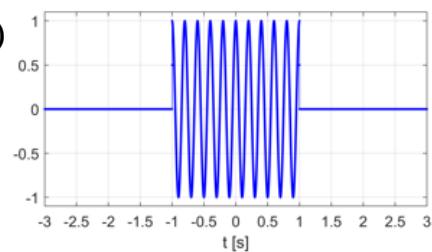
$X_2(f)$



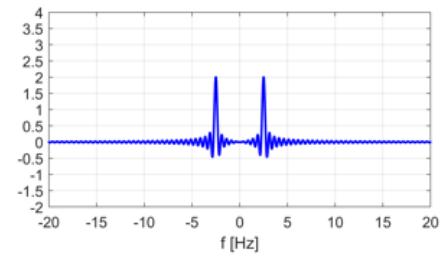
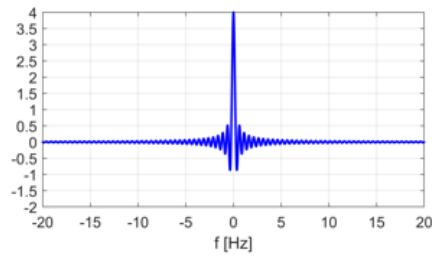
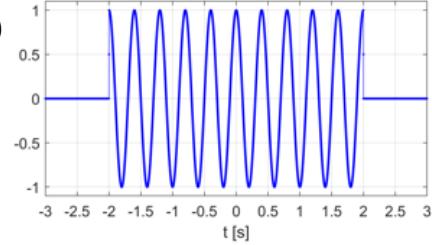
$Y(f)$



b)



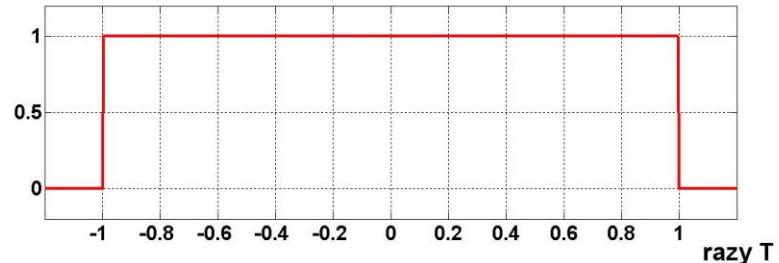
c)



# Okno prostokątne

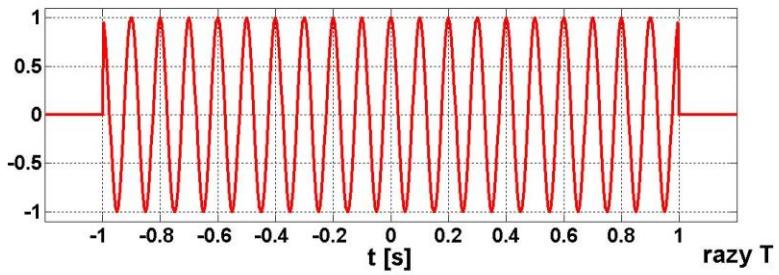
**Przebiegi czasowe okna oraz iloczynu okna i sygnału:**

$$w(t) = \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot T}\right)$$



$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

$$y(t) = x(t) \cdot w(t) = \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot T}\right) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$



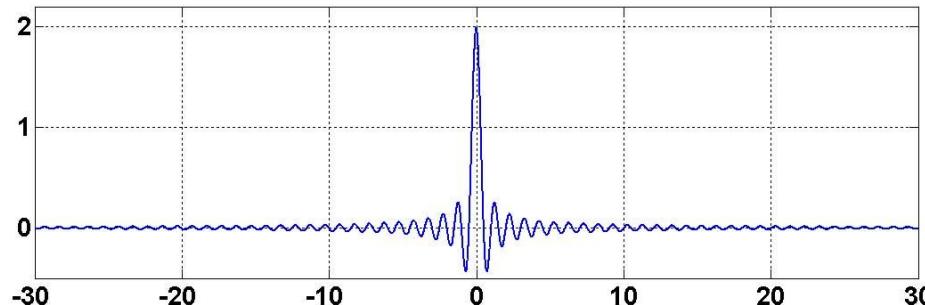
$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad X(f) = \frac{1}{2} \cdot [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

**Warto się zastanowić: co zależy od  $f_0$ , a co od  $T$  ?**

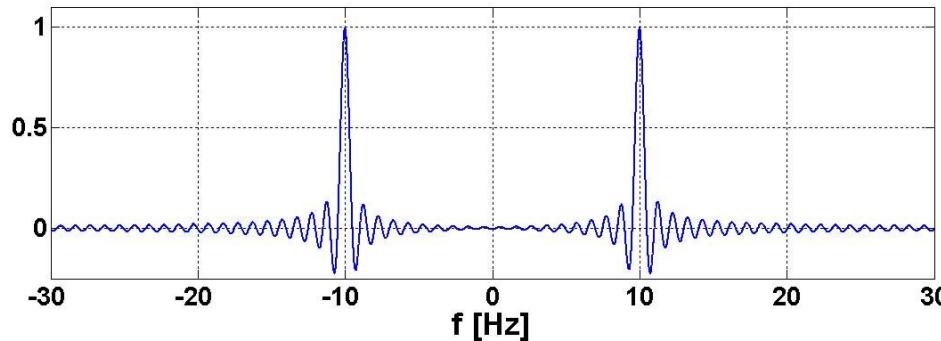
# Okno prostokątne

**Widma częstotliwościowe okna oraz iloczynu okna i sygnału:**

razy T



razy T



$$w(t) = \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot T}\right) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad W(f) = 2 \cdot T \cdot \text{sinc}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)$$

Ponieważ wszystkie sygnały są parzyste, więc widma mają tylko część rzeczywistą – dlatego nie pokazano wykresów zerowej części urojonej.

# Okno prostokątne – widma amplitudowe w dB

$$X_{dB} = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{x}{x_{ref}} \right)$$

**Często:  $x_{ref} = 1$**

$$x = 2 \cdot x_{ref} \quad \xleftrightarrow{dB} \quad x_{dB} = +6 \text{ dB}$$

$$x = \sqrt{2} \cdot x_{ref} \quad \xleftrightarrow{dB} \quad x_{dB} = +3 \text{ dB}$$

$$x = x_{ref} \quad \xleftrightarrow{dB} \quad x_{dB} = 0 \text{ dB}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x_{ref} \quad \xleftrightarrow{dB} \quad x_{dB} = -3 \text{ dB}$$

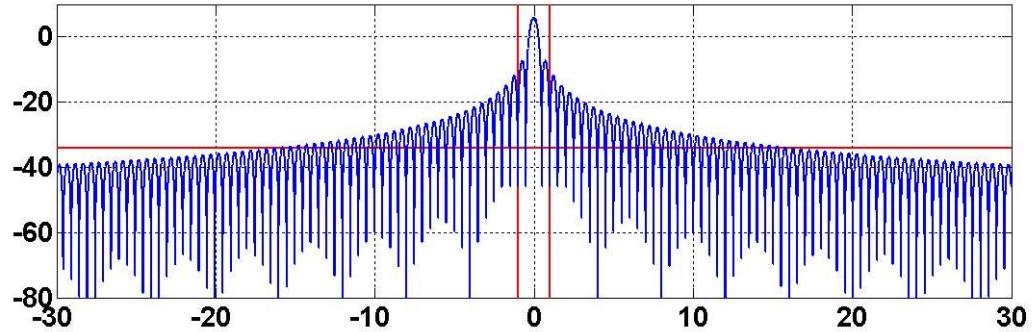
$$x = \frac{1}{2} \cdot x_{ref} \quad \xleftrightarrow{dB} \quad x_{dB} = -6 \text{ dB}$$

$$x = \frac{1}{10} \cdot x_{ref} \quad \xleftrightarrow{dB} \quad x_{dB} = -20 \text{ dB}$$

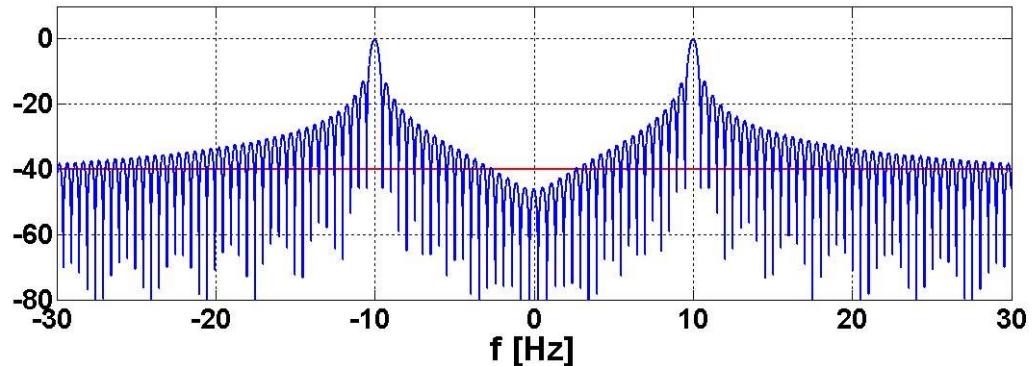
$$x = \frac{1}{100} \cdot x_{ref} \quad \xleftrightarrow{dB} \quad x_{dB} = -40 \text{ dB}$$

$$x = \frac{1}{1000} \cdot x_{ref} \quad \xleftrightarrow{dB} \quad x_{dB} = -60 \text{ dB}$$

[dB]



[dB]



$$w(t) = \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot T}\right) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad W(f) = 2 \cdot T \cdot \text{sinc}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)$$

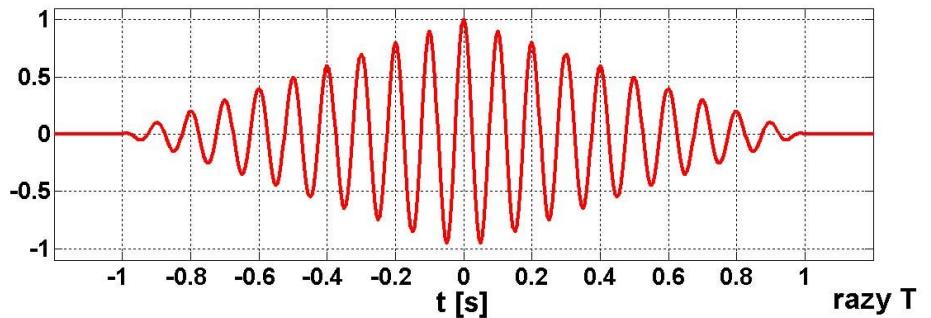
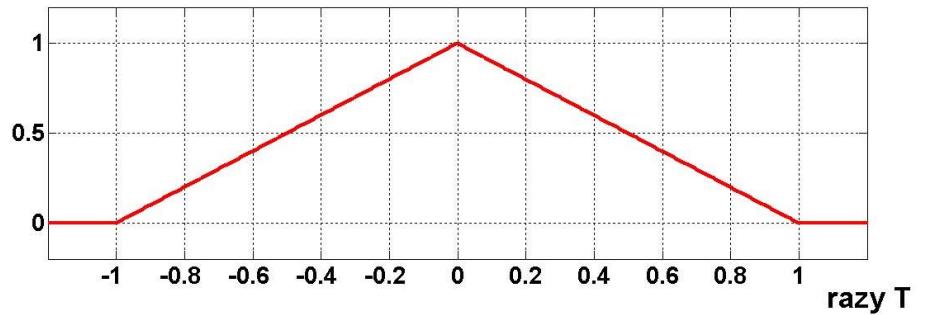
**Czerwone linie pokazują poziom -40dB  
w odniesieniu do maksimum oraz  $f_T=1/T$ .**

# Okno trójkątne (Bartletta)

$$w(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

$$y(t) = x(t) \cdot w(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

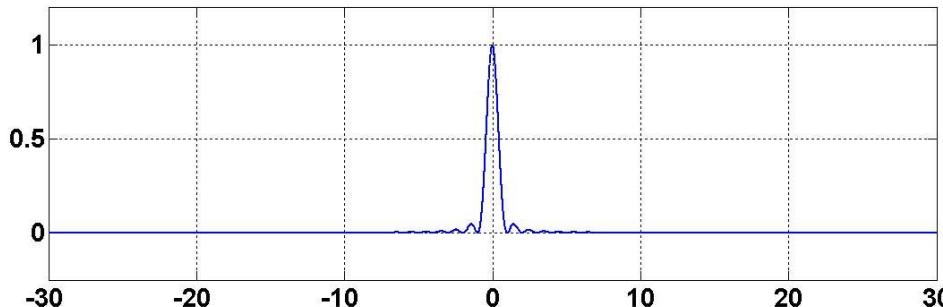


$$w(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad W(f) = T \cdot \operatorname{sinc}^2(\pi \cdot f \cdot T)$$

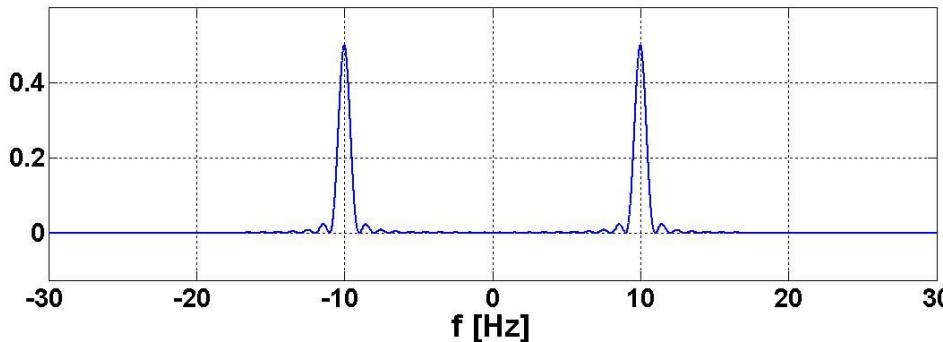
# Okno trójkątne (Bartletta)

Widma częstotliwościowe okna oraz iloczynu okna i sygnału:

razy T



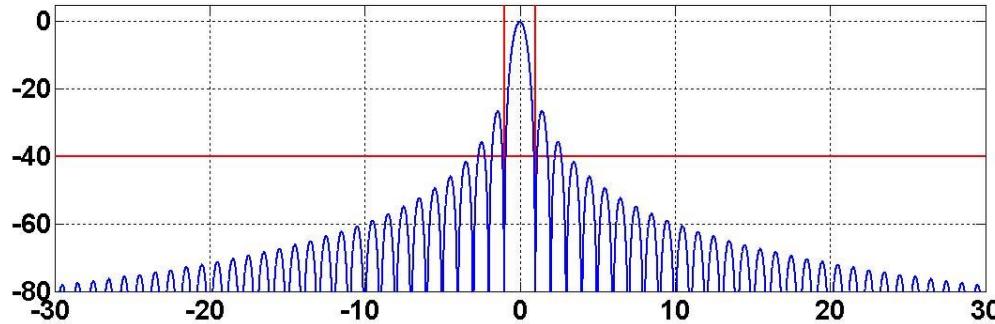
razy T



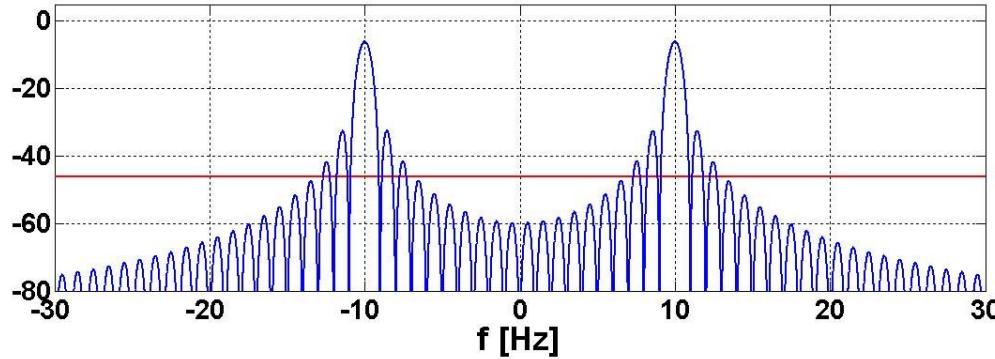
$$w(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad W(f) = T \cdot \text{sinc}^2(\pi \cdot f \cdot T)$$

# Okno Bartletta – widma amplitudowe w dB

[dB]



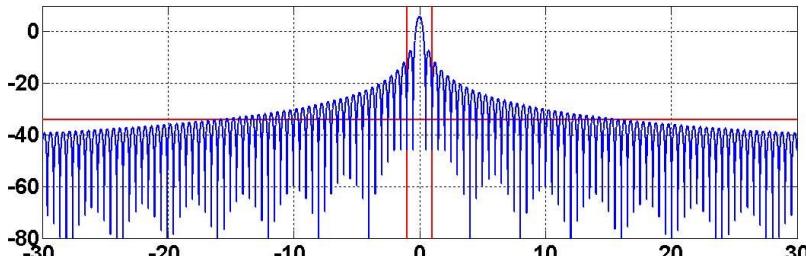
[dB]



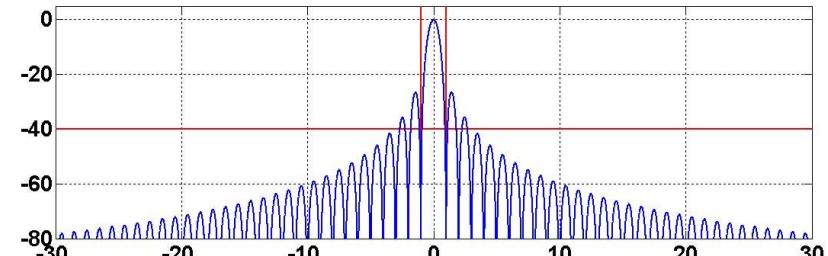
$$W(f) = T \cdot \text{sinc}^2(\pi \cdot f \cdot T) \cong \frac{\sin^2(\pi \cdot f \cdot T)}{\pi^2 \cdot f^2 \cdot T} \rightarrow (\bullet) \cdot \frac{1}{f^2}$$

# Porównanie okna prostokątnego i trójkątnego

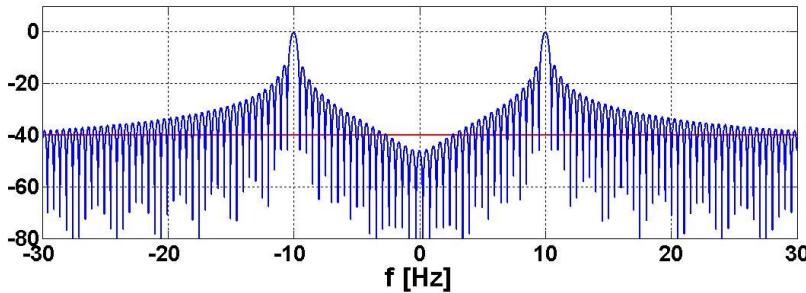
[dB]



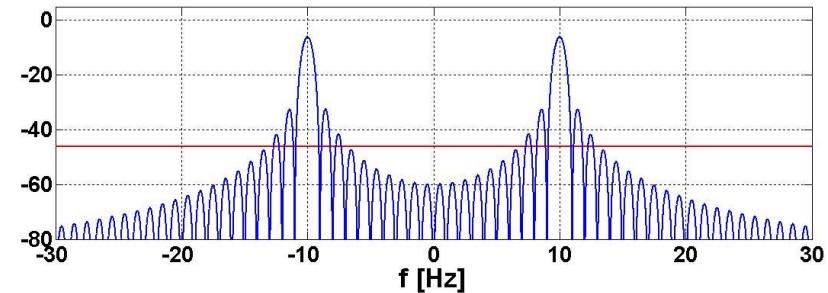
[dB]



[dB]



[dB]



$$w(t) = \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot T}\right) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad W(f) = 2 \cdot T \cdot \operatorname{sinc}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)$$

$$w(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad W(f) = T \cdot \operatorname{sinc}^2(\pi \cdot f \cdot T)$$

# Sygnal „podniesiony kosinus”

$$x(t) = [\cos(2 \cdot \pi \cdot t) + 1] \cdot \Pi(t) \quad \xleftarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = \left[ \frac{1}{2} \cdot (\delta(f+1) + \delta(f-1)) + \delta(f) \right] * \text{sinc}(\pi \cdot f)$$

$$X(f) = \frac{1}{2} \cdot [\text{sinc}(\pi \cdot (f+1)) + \text{sinc}(\pi \cdot (f-1))] + \text{sinc}(\pi \cdot f)$$

$$\sin(\pi \cdot (f+1)) = \sin(\pi \cdot f + \pi) = -\sin(\pi \cdot f)$$

$$\sin(\pi \cdot (f-1)) = \sin(\pi \cdot f - \pi) = -\sin(\pi \cdot f)$$

$$X(f) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{-\sin(\pi \cdot f)}{\pi \cdot (f+1)} + \frac{-\sin(\pi \cdot f)}{\pi \cdot (f-1)} \right] + \frac{\sin(\pi \cdot f)}{\pi \cdot f}$$

**Uwaga** - tu mamy trzy „niewygodne” wartości  $f$  (dla których można jednak wyprowadzić cały wzór – dla każdej z osobna):  $-1, 0, +1$ .

## Sygnal „podniesiony kosinus” (cd.)

$$X(f) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{-\sin(\pi \cdot f)}{\pi \cdot (f+1)} + \frac{-\sin(\pi \cdot f)}{\pi \cdot (f-1)} \right] + \frac{\sin(\pi \cdot f)}{\pi \cdot f}$$

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{\pi} \cdot \sin(\pi \cdot f) \cdot \left[ \frac{-\frac{1}{2}}{(f+1)} + \frac{-\frac{1}{2}}{(f-1)} + \frac{1}{f} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \sin(\pi \cdot f) \cdot \left[ \frac{-\frac{1}{2} \cdot f \cdot (f-1) - \frac{1}{2} \cdot f \cdot (f+1) + (f+1) \cdot (f-1)}{f \cdot (f+1) \cdot (f-1)} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \sin(\pi \cdot f) \cdot \left[ \frac{-1}{f \cdot (f^2 - 1)} \right] = \frac{\sin(\pi \cdot f)}{\pi \cdot f} \cdot \frac{1}{(1-f^2)} \end{aligned}$$

**Jeżeli teraz uzupełnimy przepis o „niewygodne” wartości  $f$ , to:**

$$X(f) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sinc}(\pi \cdot f)}{(1-f^2)} & \text{dla } |f| \neq 1 \\ 1/2 & \text{dla } |f| = 1 \end{cases} \quad \underset{(1-f^2)}{\equiv} \quad \frac{\operatorname{sinc}(\pi \cdot f)}{(1-f^2)}$$

## Sygnal „podniesiony kosinus” (cd.)

Ostatecznie para: sygnał – transformata jest następująca:

$$x(t) = [\cos(2 \cdot \pi \cdot t) + 1] \cdot \Pi(t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad X(f) = \frac{^{(*)} \operatorname{sinc}(\pi \cdot f)}{(1 - f^2)}$$

Z faktu, że obie funkcje są parzyste, a także z podobieństwa wzorów na transformaty w przód i wstecz otrzymujemy, że również:

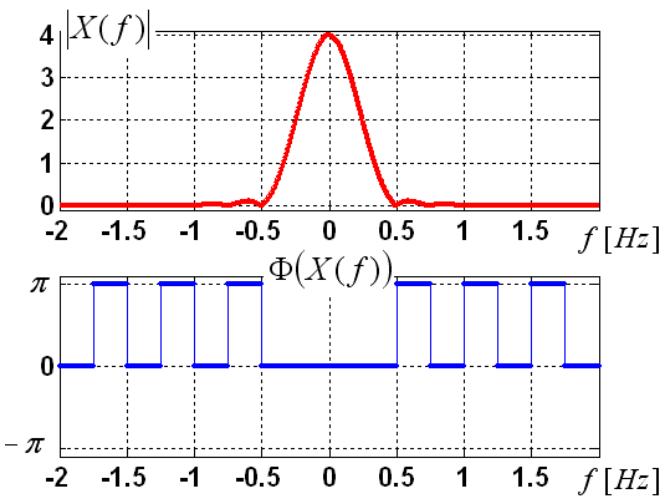
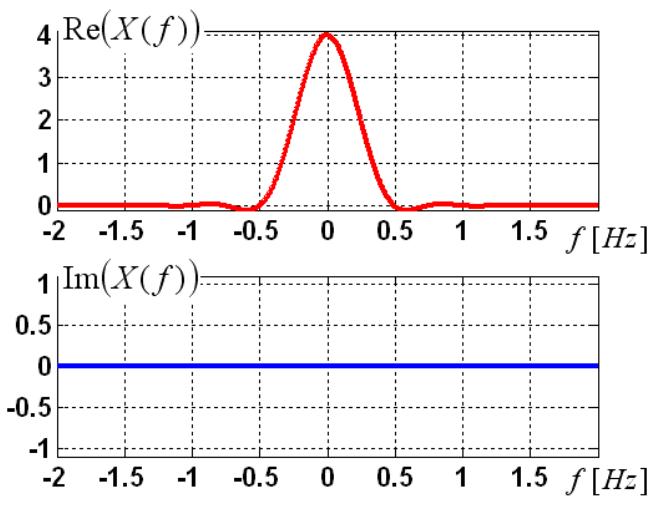
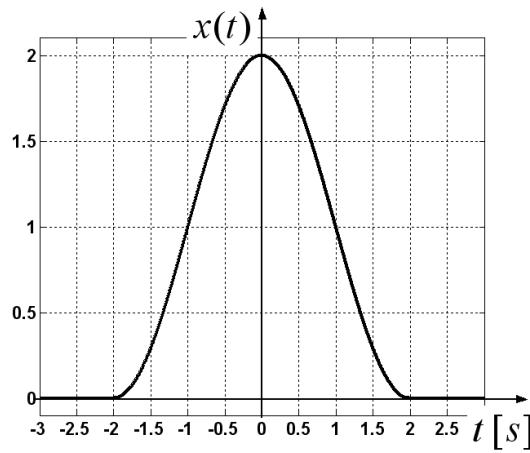
$$x(t) = \frac{^{(*)} \operatorname{sinc}(\pi \cdot t)}{(1 - t^2)} \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad X(f) = [\cos(2 \cdot \pi \cdot f) + 1] \cdot \Pi(f)$$

(\*) – z dodatkową interpretacją dla „niewygodnych” wartości  $f$  lub  $t$ .

# Sygnał „podniesiony kosinus” - przykład

$$x(t) = \left[ \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) + 1 \right] \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad \xleftrightarrow{\substack{CFT \\ ICFT}} \quad X(f) = T \cdot \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot T)}{(1 - (f \cdot T)^2)}$$

**T=4s**

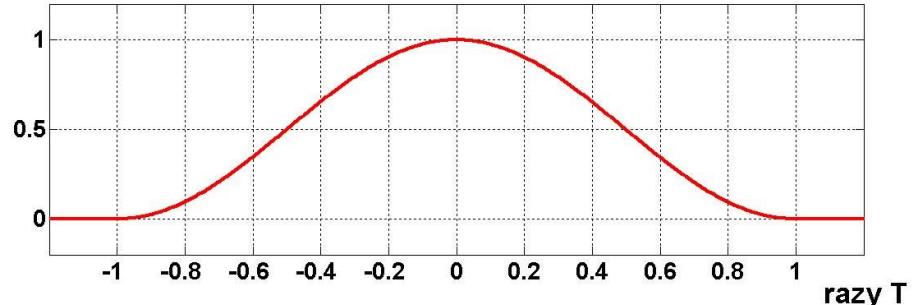


# Okno podniesiony cosinus (Hanna)

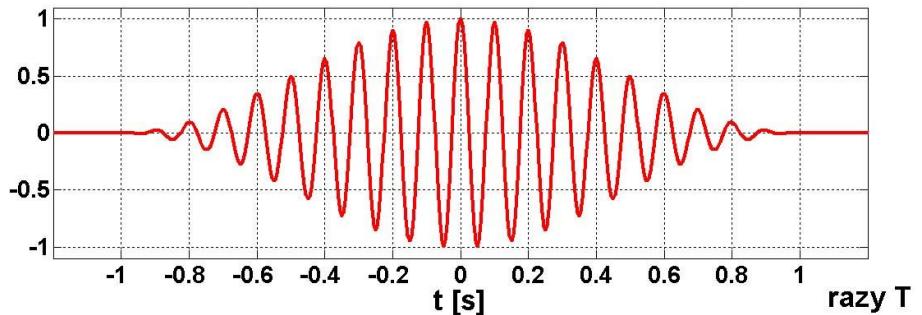
$$x(t) = \left[ \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T}\right) + 1 \right] \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

$\xleftarrow{\text{CFT}}$   
 $\xrightarrow{\text{ICFT}}$

$$X(f) = T \cdot \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot T)}{(1 - (f \cdot T)^2)}$$



$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{2 \cdot T}\right) + 1 \right] & \text{dla } |t| \leq T \\ 0 & \text{dla } |t| > T \end{cases}$$

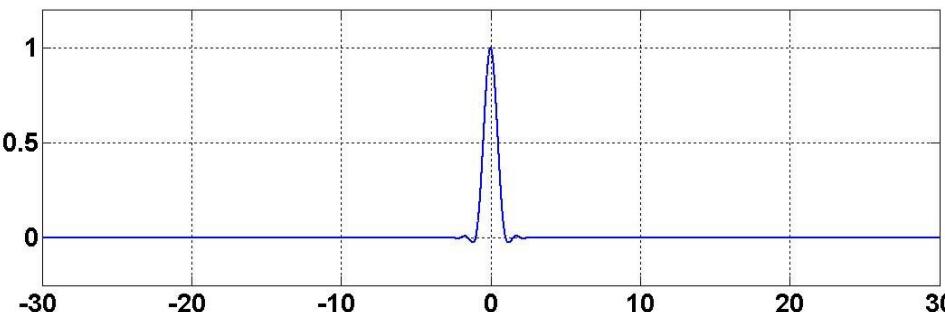


$$w(t) = \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{2 \cdot T}\right) + 1 \right] \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot T}\right) \quad \xleftarrow{\text{CFT}} \quad W(f) = T \cdot \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot f^2 \cdot T^2)}$$

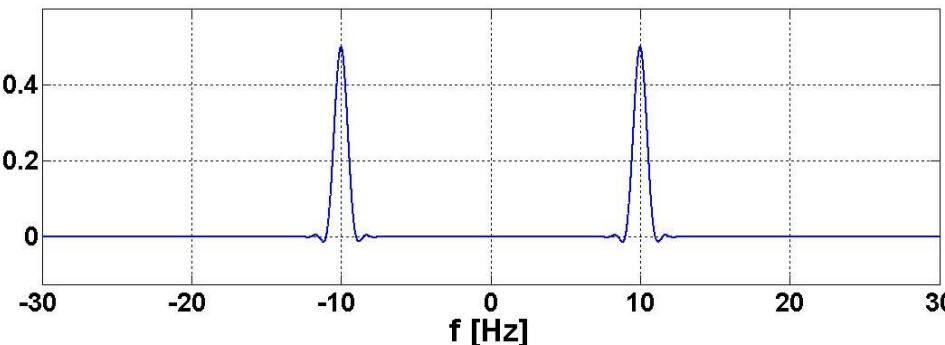
# Okno podniesiony cosinus (Hanna)

**Widma częstotliwościowe okna oraz iloczynu okna i sygnału:**

razy T



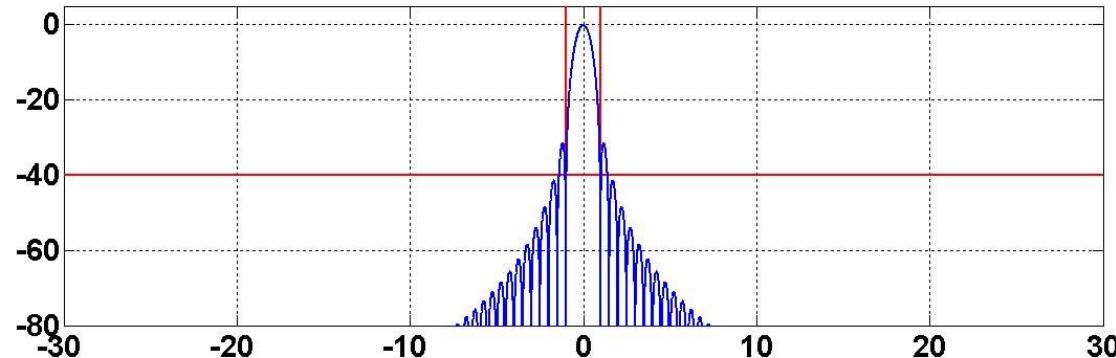
razy T



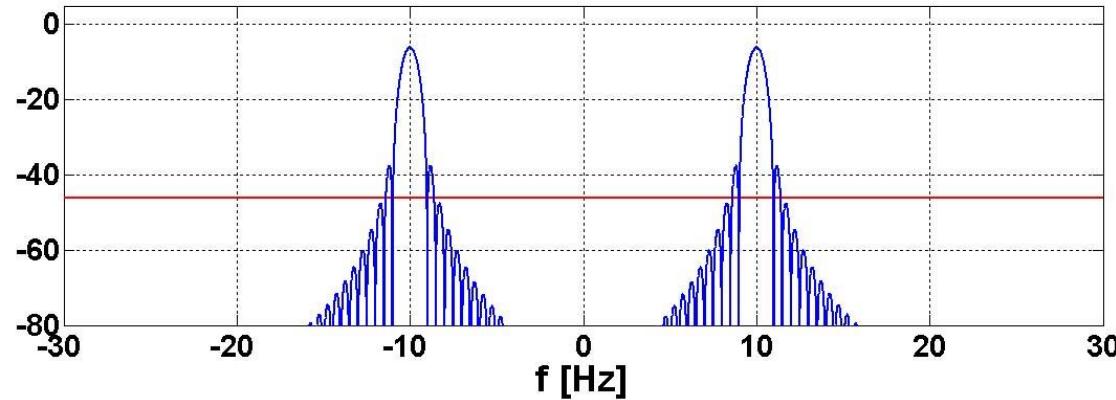
$$W(f) = T \cdot \frac{\text{sinc}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot f^2 \cdot T^2)} = \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot f^2 \cdot T^2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \rightarrow (\bullet) \cdot \frac{1}{f^3}$$

# Okno Hanna – widma amplitudowe w dB

[dB]

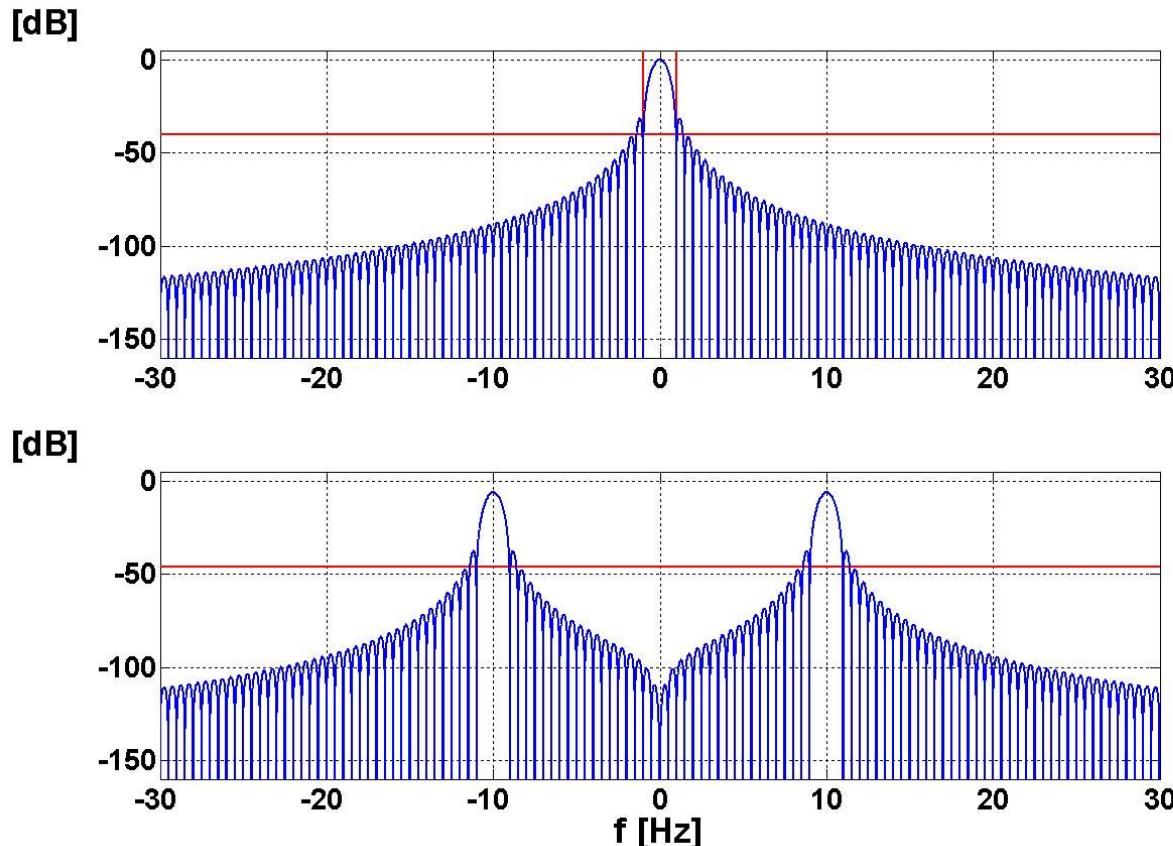


[dB]



$$W(f) = T \cdot \frac{\text{sinc}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot f^2 \cdot T^2)} = \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot f^2 \cdot T^2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \rightarrow (\bullet) \cdot \frac{1}{f^3}$$

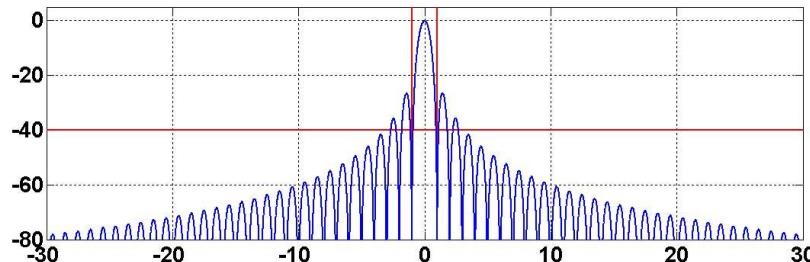
# Okno Hanna – widma amplitudowe w dB



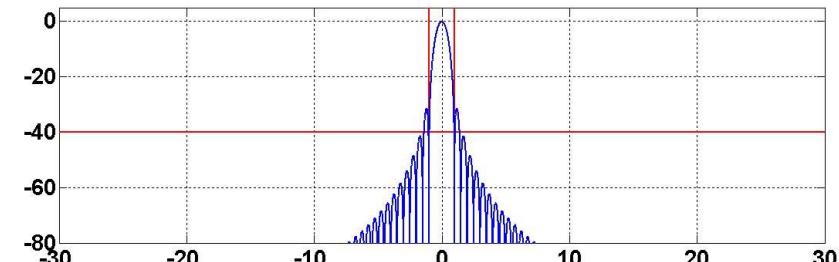
$$W(f) = T \cdot \frac{\text{sinc}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot f^2 \cdot T^2)} = \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot f^2 \cdot T^2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \rightarrow (\bullet) \cdot \frac{1}{f^3}$$

# Porównanie okna trójkątnego i podniesiony kosinus

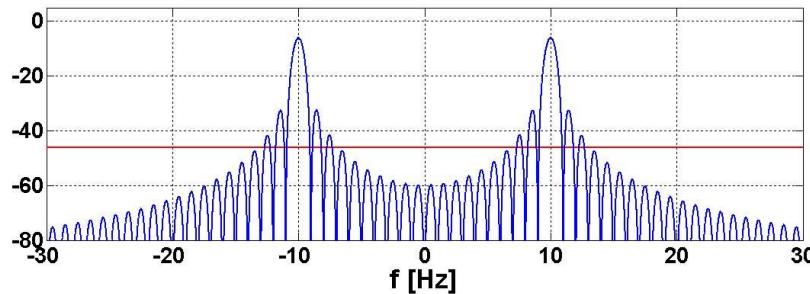
[dB]



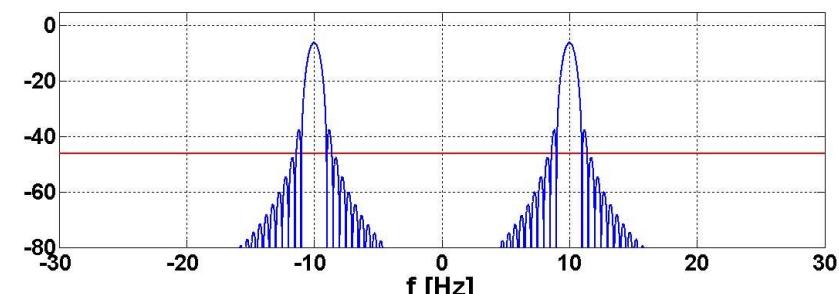
[dB]



[dB]



[dB]

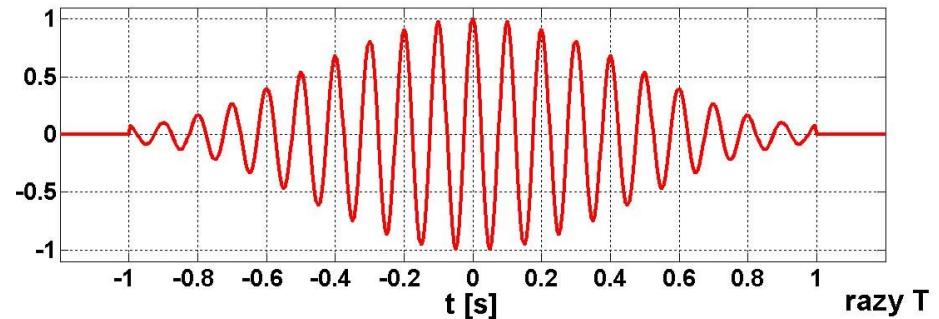
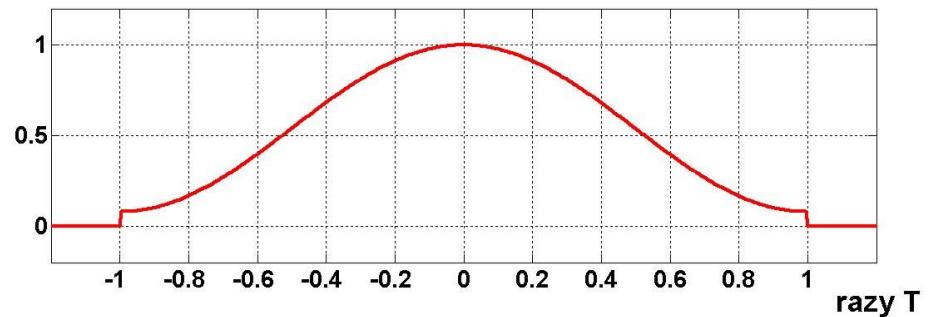


$$w(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad W(f) = T \cdot \text{sinc}^2(\pi \cdot f \cdot T)$$

$$w(t) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{2 \cdot T}\right) + 1 \right] \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot T}\right) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad W(f) = T \cdot \frac{\text{sinc}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot f^2 \cdot T^2)}$$

# Okno Hamminga

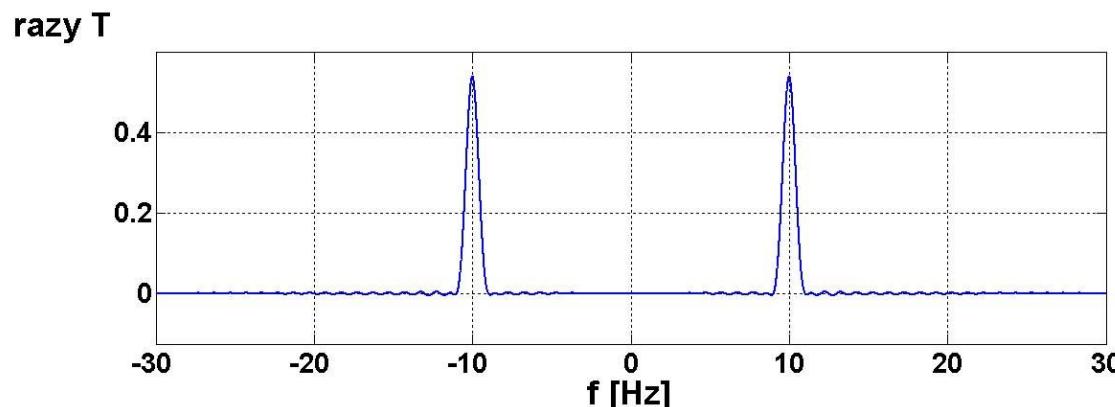
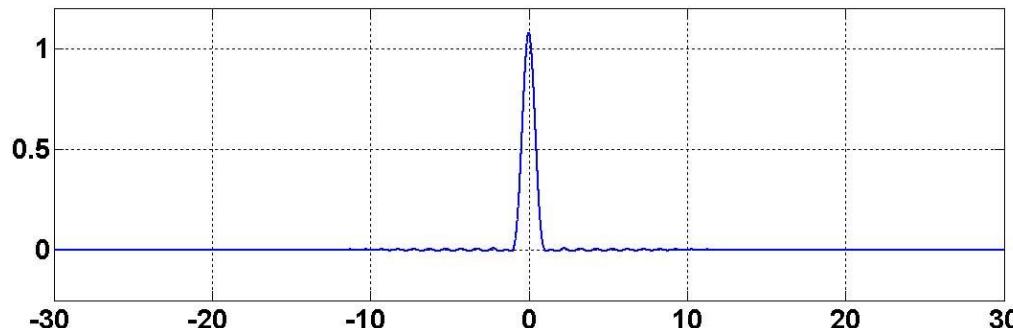
$$w(t) = \begin{cases} 0,46 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{T}\right) + 0,54 & \text{dla } |t| \leq T \\ 0 & \text{dla } |t| > T \end{cases}$$



$$W(f) = \frac{(1,08 - 0,64 \cdot f^2 \cdot T^2) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot T^2 \cdot f^2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}$$

# Okno Hamminga

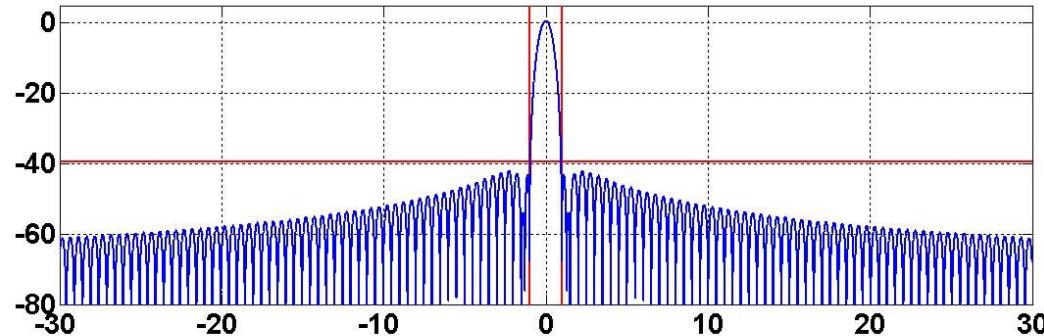
**Widma częstotliwościowe okna oraz iloczynu okna i sygnału:  
razy T**



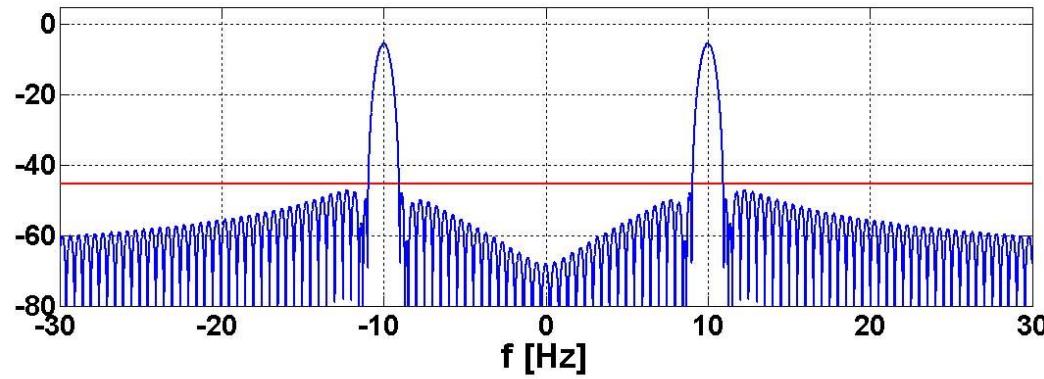
$$W(f) = \frac{(1.08 - 0.64 \cdot f^2 \cdot T^2) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot T^2 \cdot f^2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}$$

# Okno Hamminga – widma amplitudowe w dB

[dB]



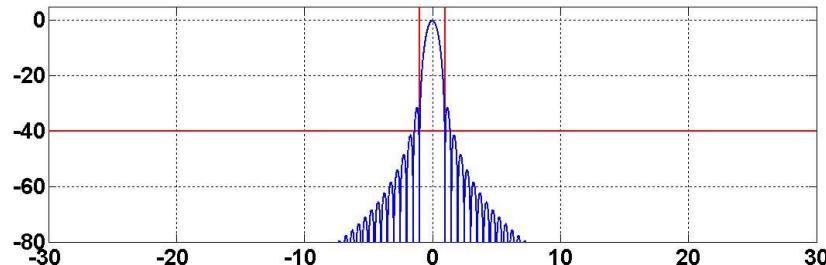
[dB]



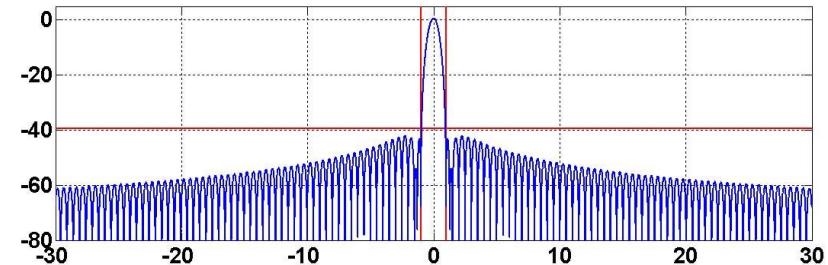
$$W(f) = \frac{(1,08 - 0,64 \cdot f^2 \cdot T^2) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot T^2 \cdot f^2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}$$

# Porównanie okna Hanna i Hamminga

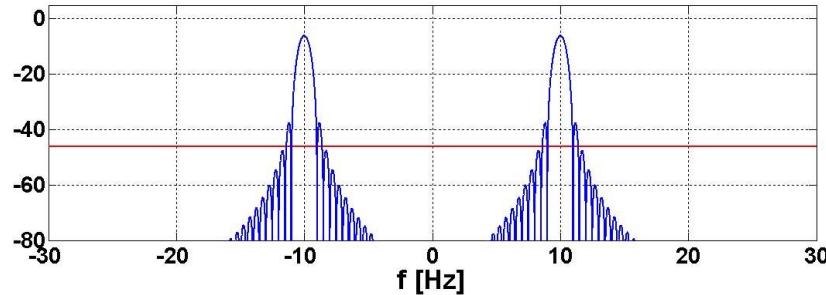
[dB]



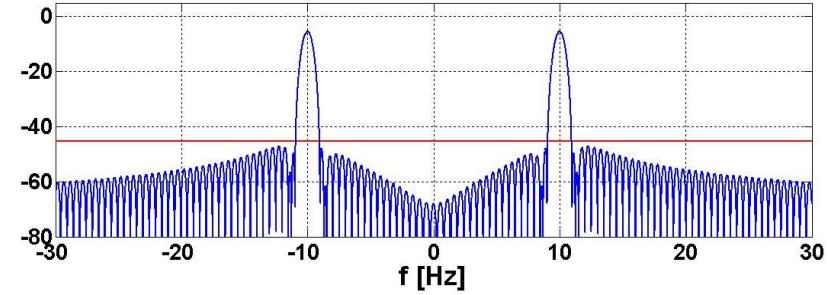
[dB]



[dB]



[dB]



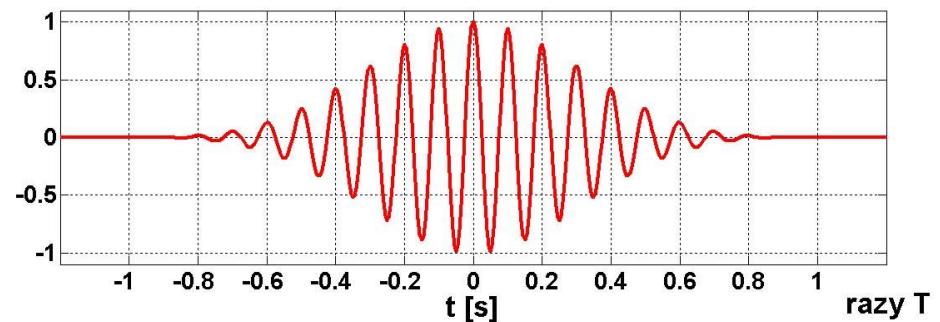
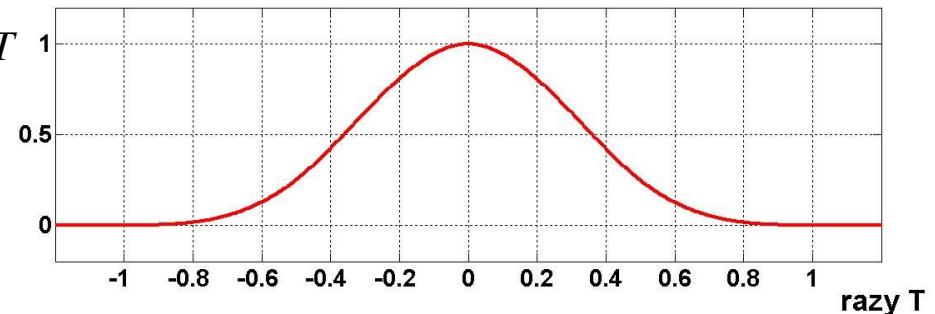
$$w(t) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{2 \cdot T}\right) + 1 \right] \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot T}\right) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad W(f) = T \cdot \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot f^2 \cdot T^2)}$$

$$w(t) = \begin{cases} 0,46 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{T}\right) + 0,54 & \text{dla } |t| \leq T \\ 0 & \text{dla } |t| > T \end{cases}$$

$$W(f) = \frac{(1,08 - 0,64 \cdot f^2 \cdot T^2) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot T^2 \cdot f^2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}$$

# Okno Parzena

$$w(t) = \begin{cases} 1 - 6 \cdot t^2 / T^2 + 6 \cdot |t|^3 / T^3 & \text{dla } |t| \leq T/2 \\ 2 \cdot (1 - |t|/T)^3 & \text{dla } T/2 < |t| \leq T \\ 0 & \text{dla } |t| > T \end{cases}$$

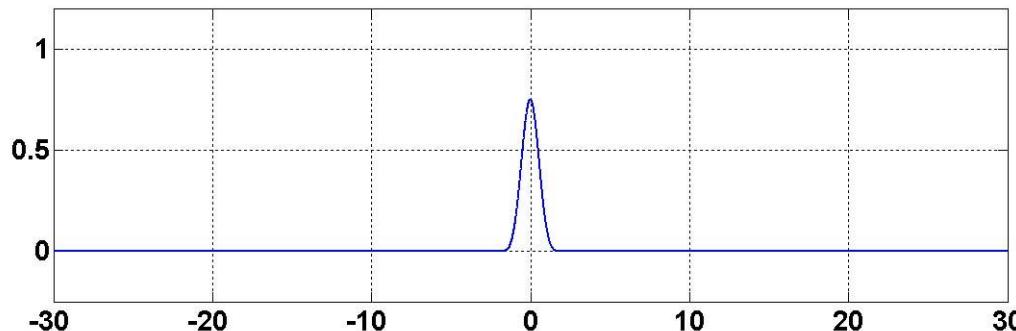


$$W(f) = \frac{3}{4} \cdot T \cdot \operatorname{sinc}^4\left(\frac{\pi \cdot f \cdot T}{2}\right) = \frac{12 \cdot \sin^4(\pi \cdot f \cdot T/2)}{\pi^4 \cdot f^4 \cdot T^3} \rightarrow (\bullet) \cdot \frac{1}{f^4}$$

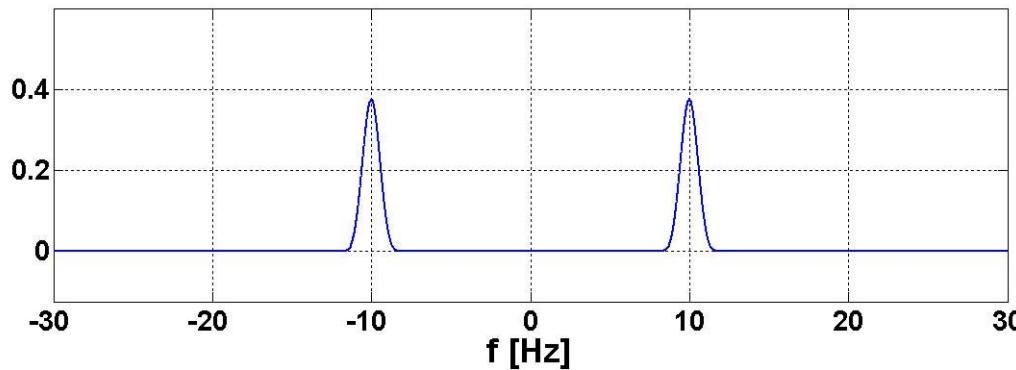
# Okno Parzena

**Widma częstotliwościowe okna oraz iloczynu okna i sygnału:**

razy T

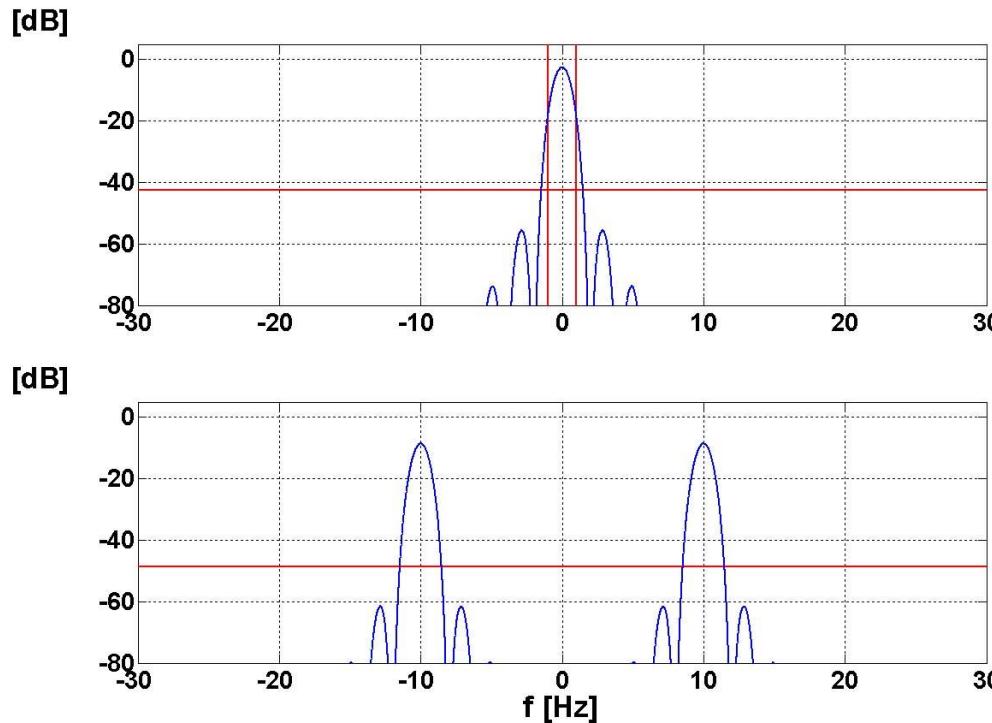


razy T



$$W(f) = \frac{3}{4} \cdot T \cdot \text{sinc}^4\left(\frac{\pi \cdot f \cdot T}{2}\right) = \frac{12 \cdot \sin^4(\pi \cdot f \cdot T / 2)}{\pi^4 \cdot f^4 \cdot T^3} \rightarrow (\bullet) \cdot \frac{1}{f^4}$$

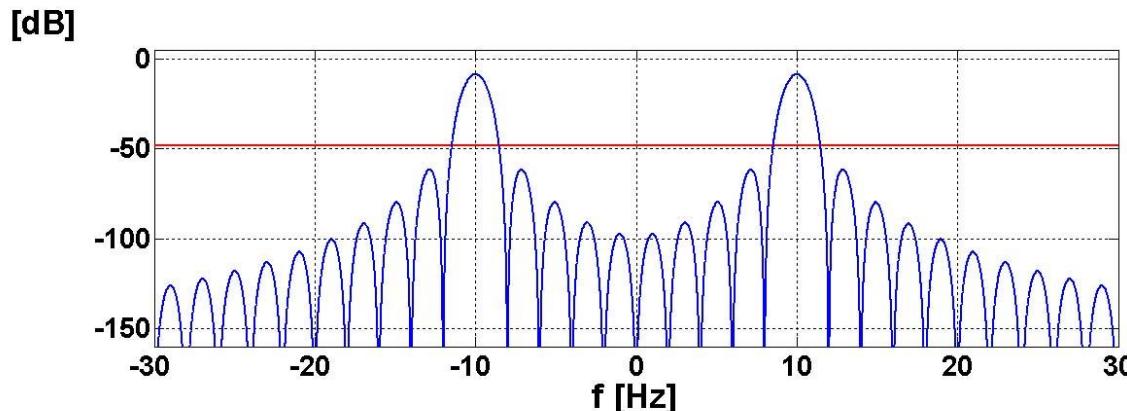
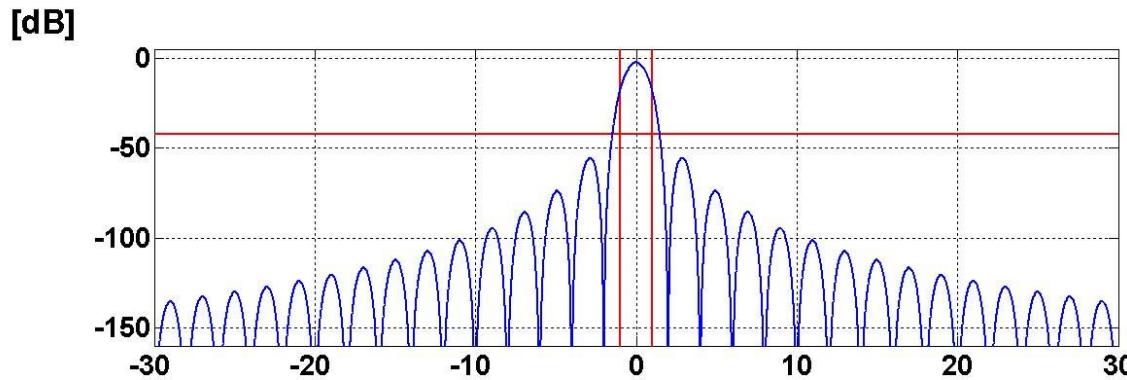
# Okno Parzena - widma amplitudowe w dB



$$W(f) = \frac{3}{4} \cdot T \cdot \text{sinc}^4\left(\frac{\pi \cdot f \cdot T}{2}\right) = \frac{12 \cdot \sin^4(\pi \cdot f \cdot T / 2)}{\pi^4 \cdot f^4 \cdot T^3} \rightarrow (\bullet) \cdot \frac{1}{f^4}$$

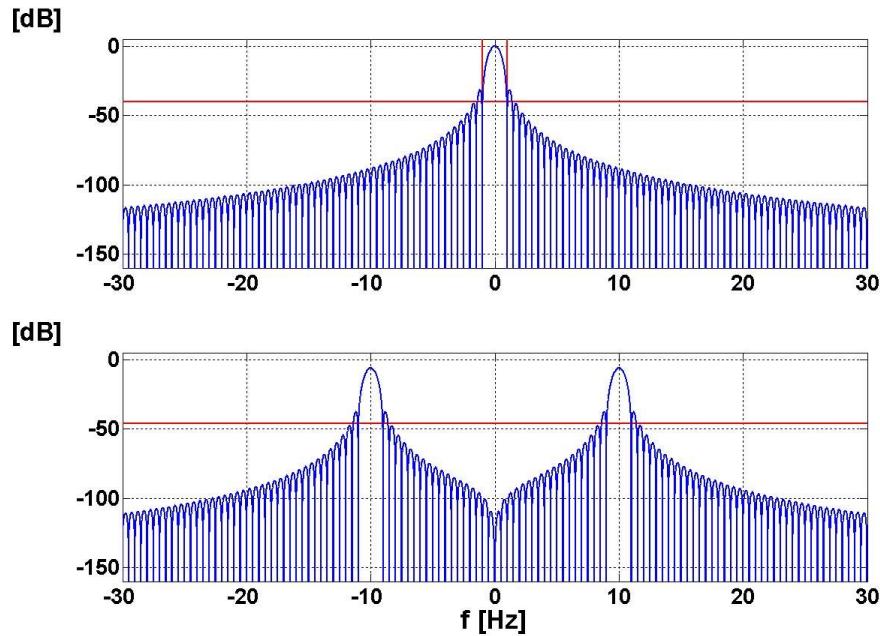
# Okno Parzena

## - widma amplitudowe w dB



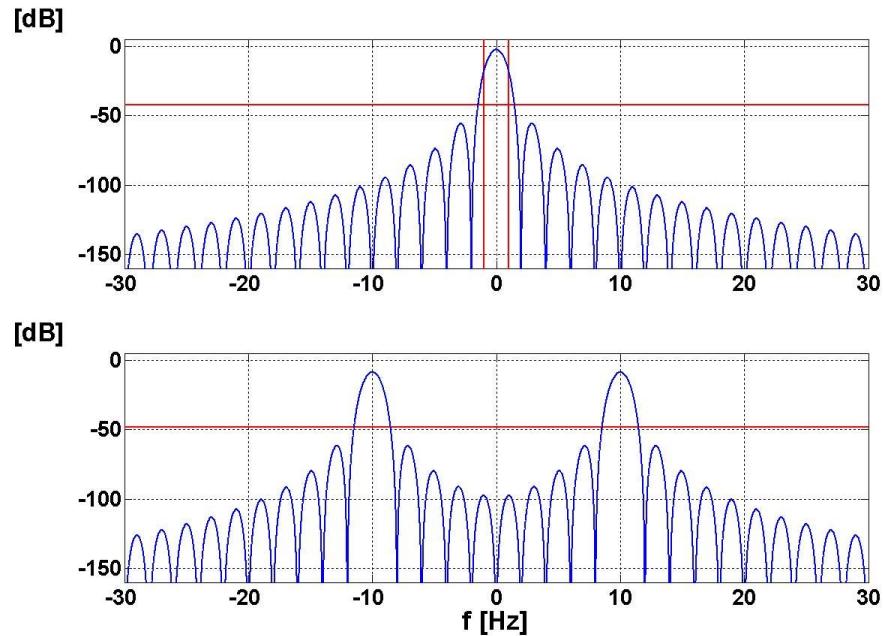
$$W(f) = \frac{3}{4} \cdot T \cdot \text{sinc}^4\left(\frac{\pi \cdot f \cdot T}{2}\right) = \frac{12 \cdot \sin^4(\pi \cdot f \cdot T / 2)}{\pi^4 \cdot f^4 \cdot T^3} \rightarrow (\bullet) \cdot \frac{1}{f^4}$$

# Porównanie okna Hanna i Parzena



$$w(t) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{2 \cdot T}\right) + 1 \right] \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot T}\right)$$

$$W(f) = T \cdot \frac{\text{sinc}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot f^2 \cdot T^2)}$$



$$w(t) = \begin{cases} 1 - 6 \cdot t^2 / T^2 + 6 \cdot |t|^3 / T^3 & \text{dla } |t| \leq T/2 \\ 2 \cdot (1 - |t|/T)^3 & \text{dla } T/2 < |t| \leq T \\ 0 & \text{dla } |t| > T \end{cases}$$

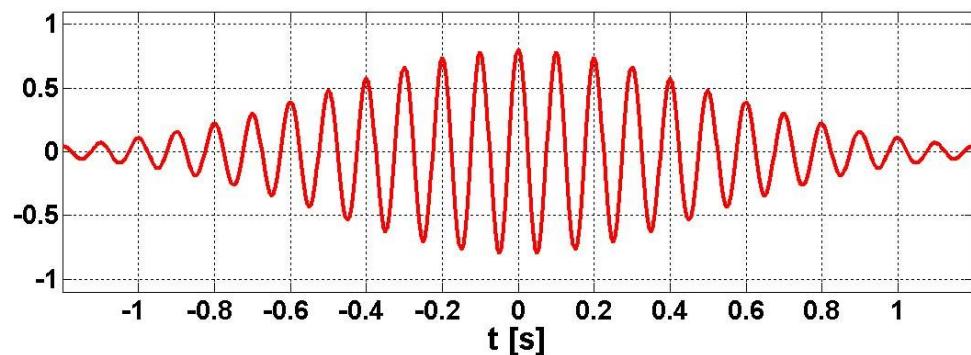
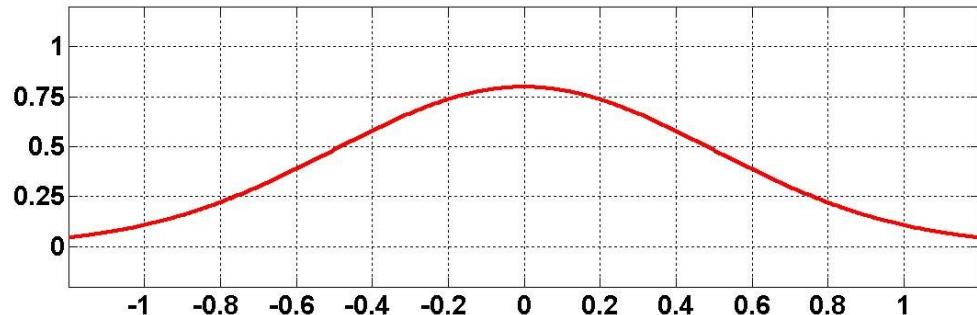
$$W(f) = \frac{3}{4} \cdot T \cdot \text{sinc}^4\left(\frac{\pi \cdot f \cdot T}{2}\right)$$

# Okno Gaussa

$$w(t) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot \alpha}} \cdot e^{-\frac{t^2}{4 \cdot \alpha}}$$

$$t_\sigma = \sqrt{2 \cdot \alpha}$$

Dla  $\alpha = 1/8$

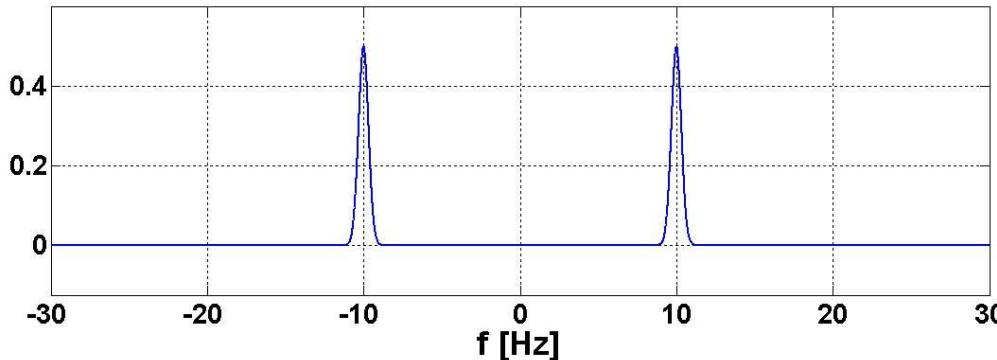
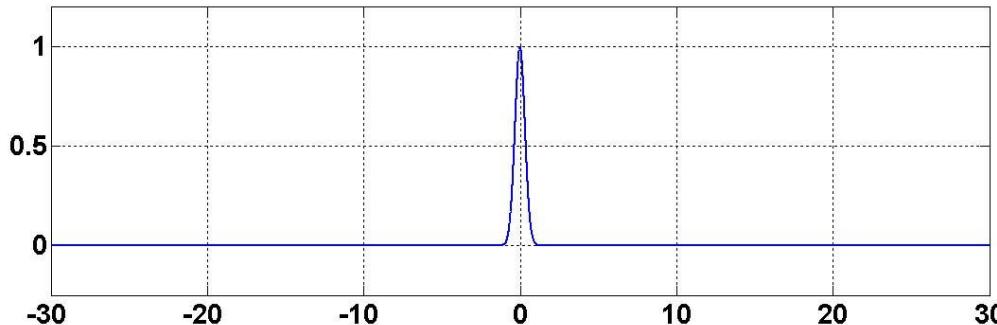


$$W(f) = e^{-4 \cdot \pi^2 \cdot \alpha \cdot f^2}$$

# Okno Gaussa

**Widma częstotliwościowe okna oraz iloczynu okna i sygnału:**

Dla  $a=1/8$

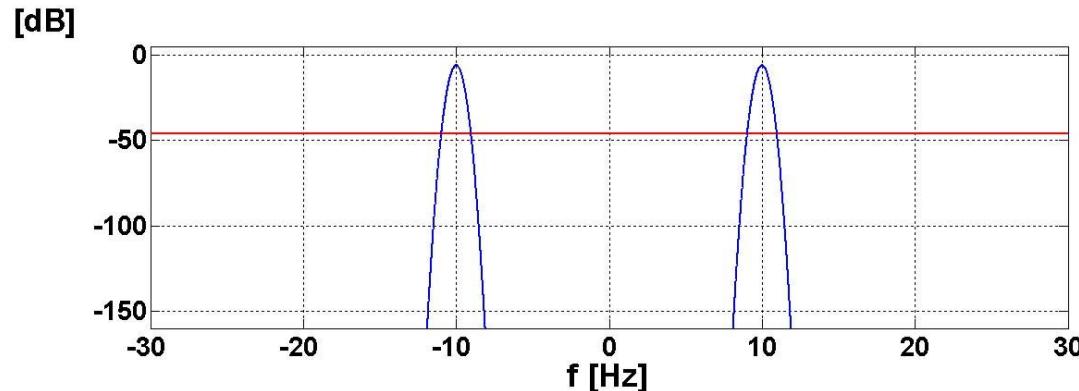
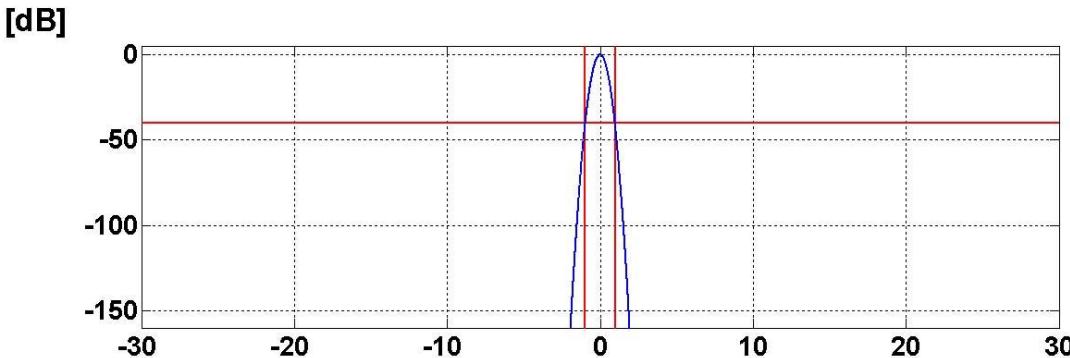


$$W(f) = e^{-4 \cdot \pi^2 \cdot \alpha \cdot f^2}$$

# Okno Gaussa

## - widma amplitudowe w dB

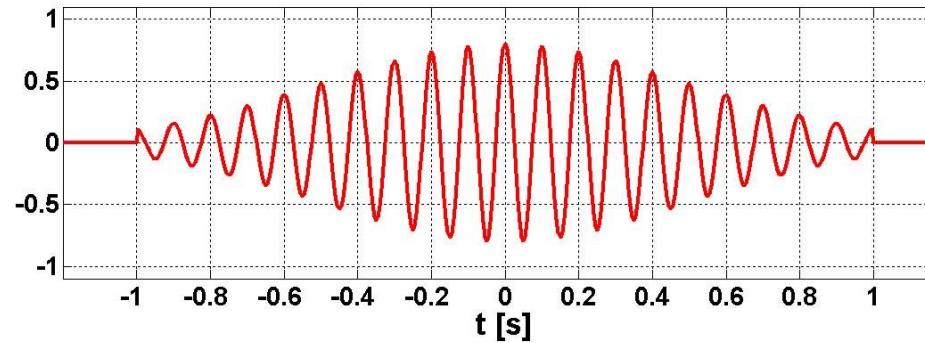
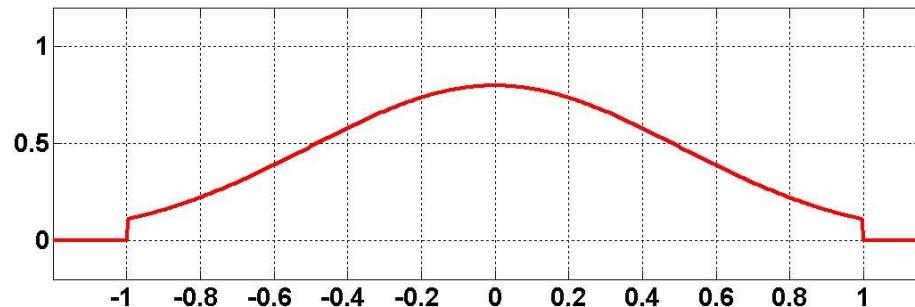
Dla  $\alpha = 1/8$



$$W(f) = e^{-4 \cdot \pi^2 \cdot \alpha \cdot f^2}$$

# Okno Gaussa (obcięte)

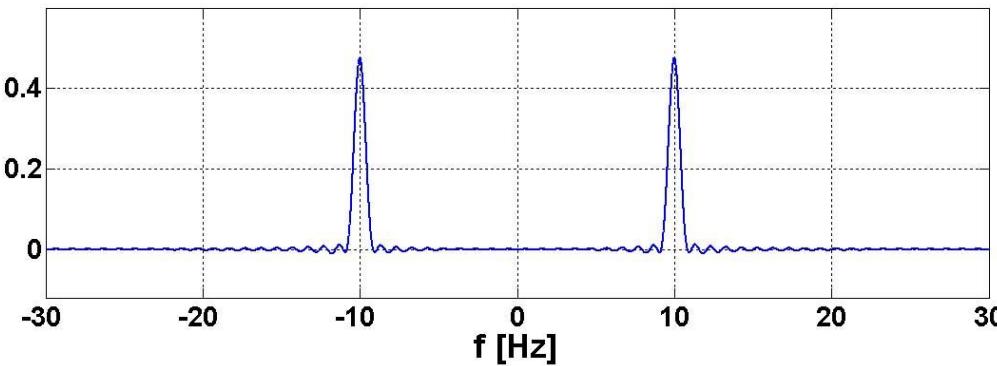
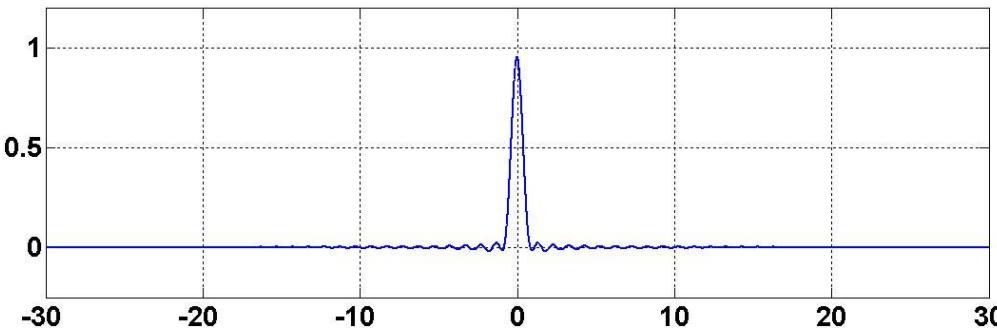
Dla  $\alpha=1/8$



# Okno Gaussa (obcięte)

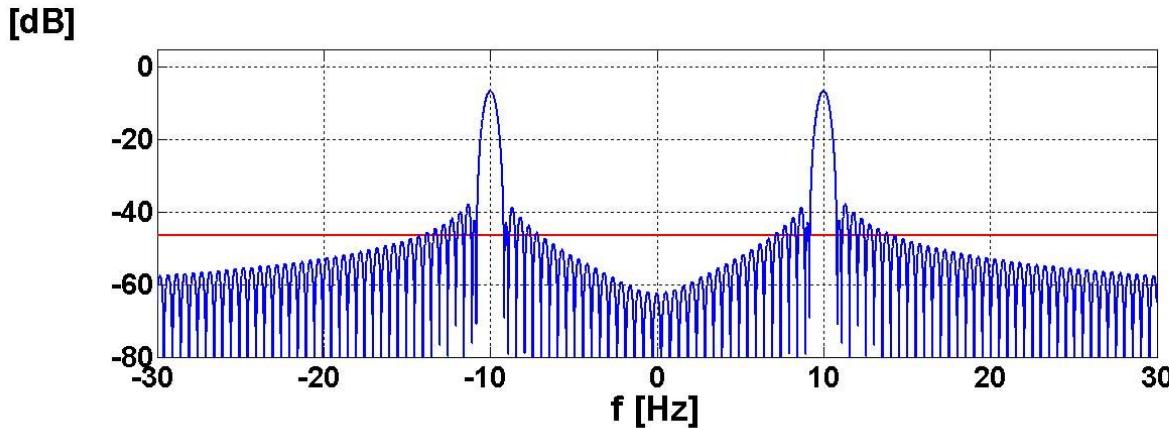
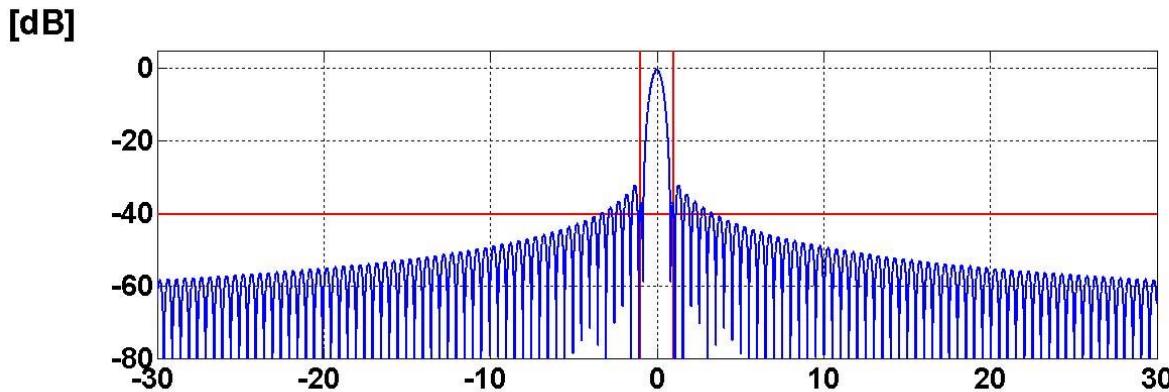
Widma częstotliwościowe okna oraz iloczynu okna i sygnału:

Dla  $\alpha=1/8$



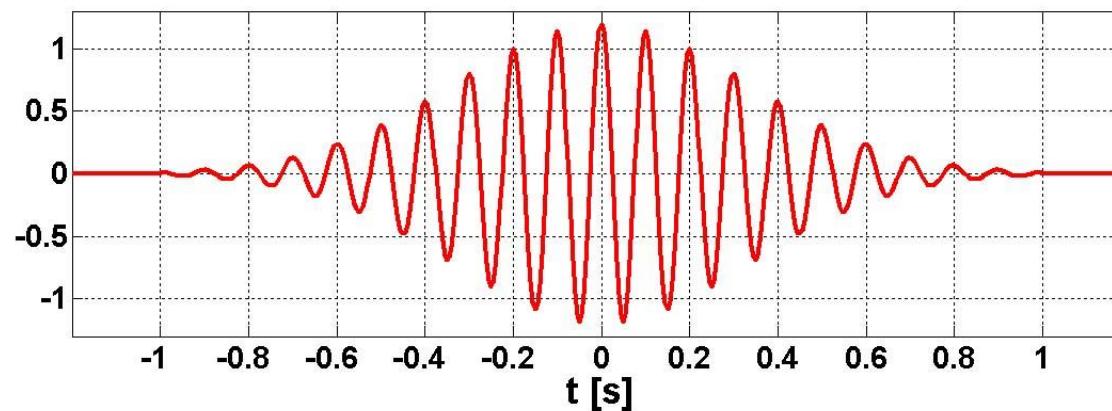
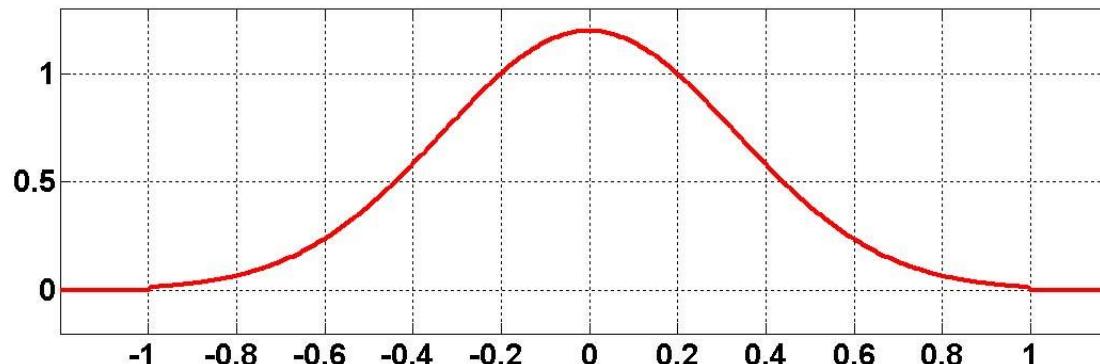
# Okno Gaussa (obcięte) - widma amplitudowe w dB

Dla  $a=1/8$



# Okno Gaussa (obcięte)

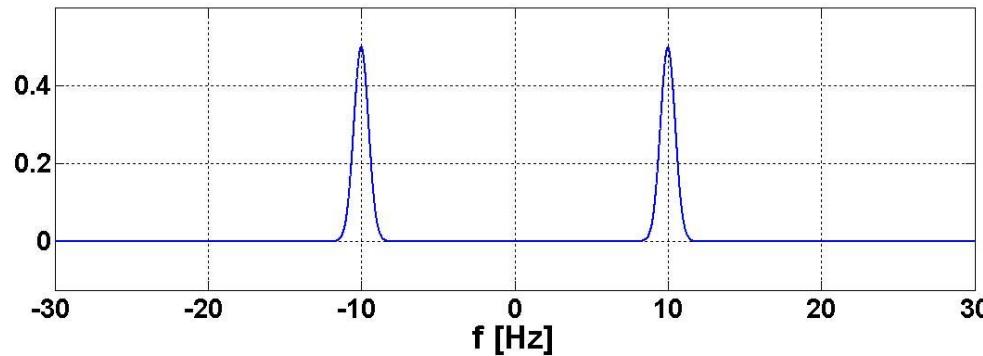
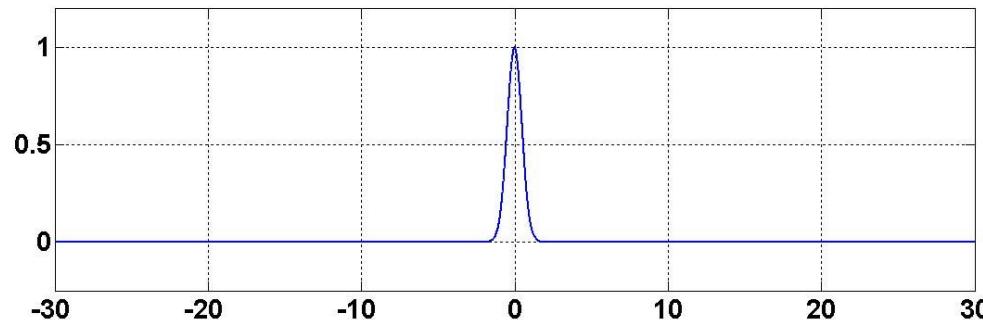
Dla  $\alpha=1/18$



# Okno Gaussa (obcięte)

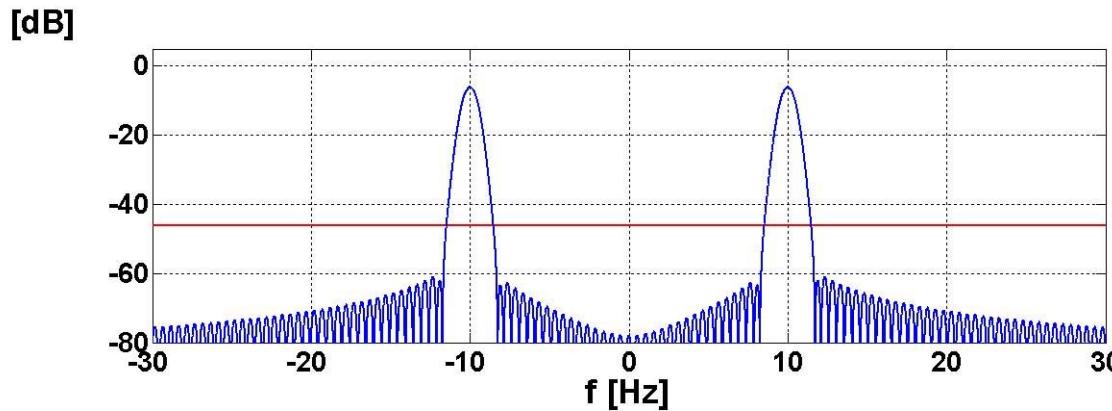
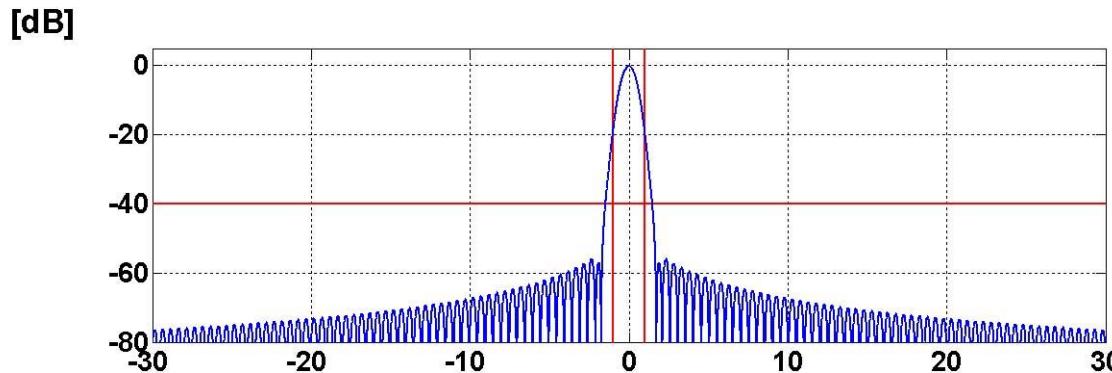
Widma częstotliwościowe okna oraz iloczynu okna i sygnału:

Dla  $a=1/18$

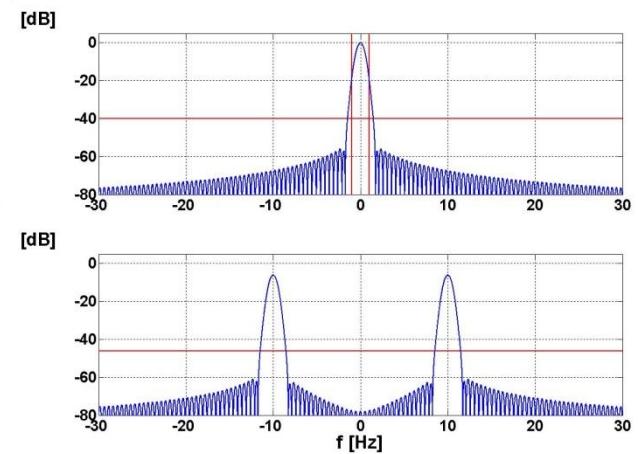
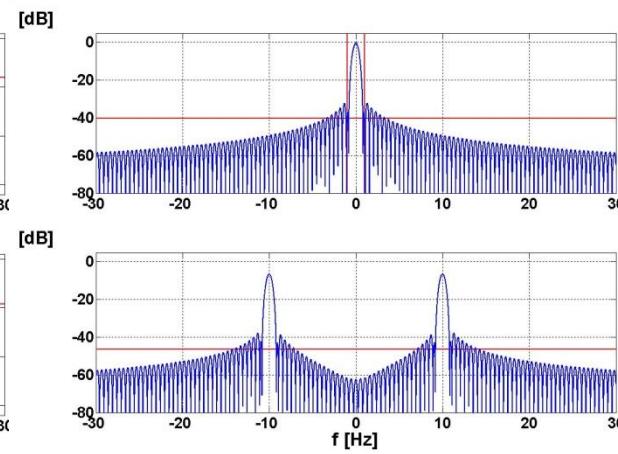
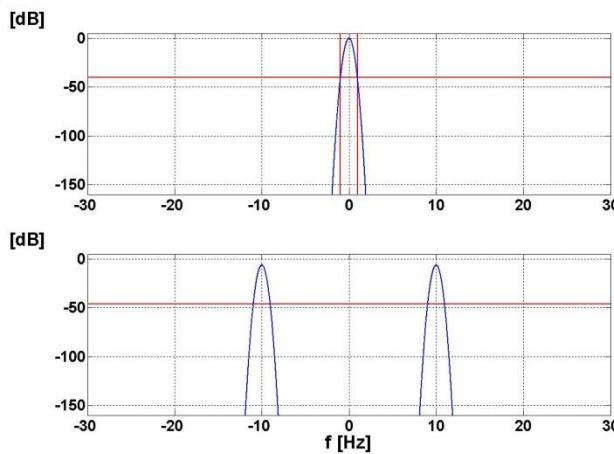


# Okno Gaussa (obcięte) - widma amplitudowe w dB

Dla  $a=1/18$



# Porównanie okien Gaussa



**Dla  $\alpha=1/8$**

**Dla  $\alpha=1/8$**

**Dla  $\alpha=1/18$**

$$W(f) = e^{-4 \cdot \pi^2 \cdot \alpha \cdot f^2}$$

## Okna definiowane w dziedzinie częstotliwości

**Wszystkie rozważane dotąd okna są funkcjami parzystymi  $t$ . Dlatego ich transformaty są także funkcjami rzeczywistymi, parzystymi od  $f$ .**

**Zatem wszystkie pokazane relacje można odwrócić.**

**W przypadku stosowania okna odpowiednio przesuniętego należy zastosować odpowiednie twierdzenie „o przesunięciu”.**

**Warto zastanowić się chwilę, jakie mogą być konsekwencje, np. w dziedzinie  $f$ , gdy okno – zdefiniowane w dziedzinie  $t$  – zostanie opóźnione o  $t_d$ .**



AGH

***Zapraszam na ćwiczenia  
lub do laboratorium...***



**AGH**

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

# **Teoria sygnałów**

## **Wykład 9**

**Dr inż. Przemysław Korohoda**  
**Katedra Elektroniki, AGH, Kraków**

[home.agh.edu.pl/~korohoda/rok\\_2022\\_2023\\_zima/TS\\_EL\\_2](http://home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2)

**UPEL: TS 2022**

## **Temat wykładu**

- 1. Transformacja Gabora.**
- 2. Krótkoczasowa transformacja Fouriera.**
- 3. Transformacja falkowa.**
- 4. Widmowa gęstość mocy i energii.**
- 5. Przetwarzanie sygnałów losowych.**
- 6. Korelacja dla sygnałów deterministycznych.**
- 7. Filtracja sygnałów o zadanej gęstości widmowej.**
- 8. Modulacja sygnałów.**

# Transformacja Gabora

Dennis Gabor (1900-1979) – fizyk węgierski (mieszkał i pracował w Anglii), który za wynalezienie holografii otrzymał nagrodę Nobla (1971), zajmował się m.in. analizą czasowo-częstotliwościową.

$$X^G(f, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot w(\tau - t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} d\tau$$

**gdzie:**

$$w(t) = e^{-\pi \cdot t^2}$$

**czyli okno Gaussa:**

$$w(t) = e^{-\pi \cdot t^2} \quad \xleftarrow{\text{CFT}} \quad W(f) = e^{-\pi \cdot f^2}$$

**Transformacja odwrotna:**

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^G(f, t) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$$

- jeden punkt nad osią  $t$  jest reprezentowany przez całą funkcję nad osią  $f$ , ponieważ dla każdego punktu  $t$  może być inna funkcja nad osią  $f$

... widać nadmiarowość ?

**W innym zapisie:**

$$X^G(f, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \phi_t(f, \tau) d\tau$$

**gdzie:**  $\phi_t(f, \tau) = e^{-\pi \cdot (\tau - t)^2 - j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau}$

# Transformacja Gabora

$$X^G(f, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot w(\tau - t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} d\tau$$

$$w(t) = e^{-\pi \cdot t^2}$$

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

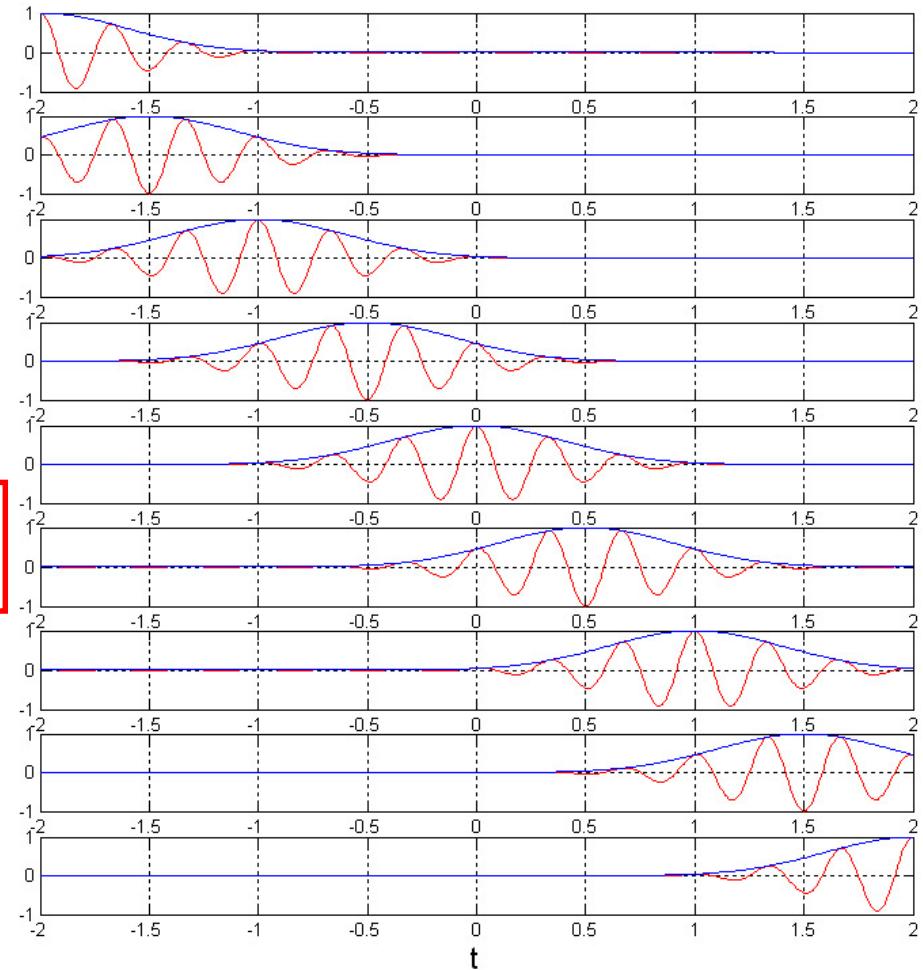
$$f_0 = 3 \text{Hz}$$

$$X^G(f, t_0) = X_0(f) \Big|_{x_0(t) = x(t) \cdot w(t-t_0)}$$

$$X_0(f) = CFT[x_0(t)]$$

$$w(0) = 1 \Rightarrow x_0(t_0) = x(t_0)$$

$$x(t) \Big|_{t=t_0} = CFT^{-1}[X^G(f, t_0)]$$



# Transformacja Gabora

**Nadmiarowość !**

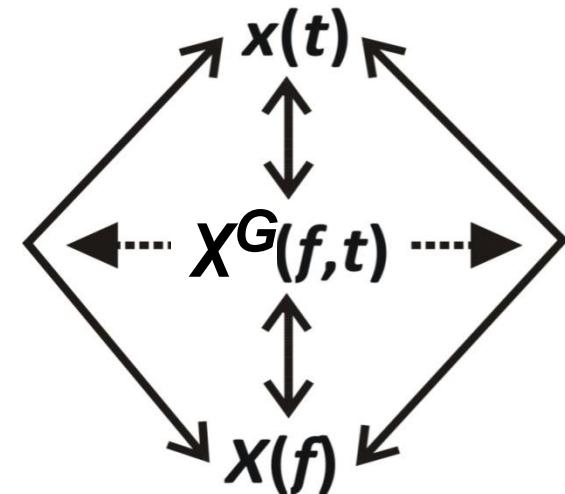
$$X^G(f,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot w(\tau-t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} d\tau$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^G(f,t) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$$

**Iub, w nieco innym zapisie (bez całek):**

$$X^G(f,t) = CFT_{\tau \rightarrow f} [x(\tau) \cdot w(\tau-t)]$$

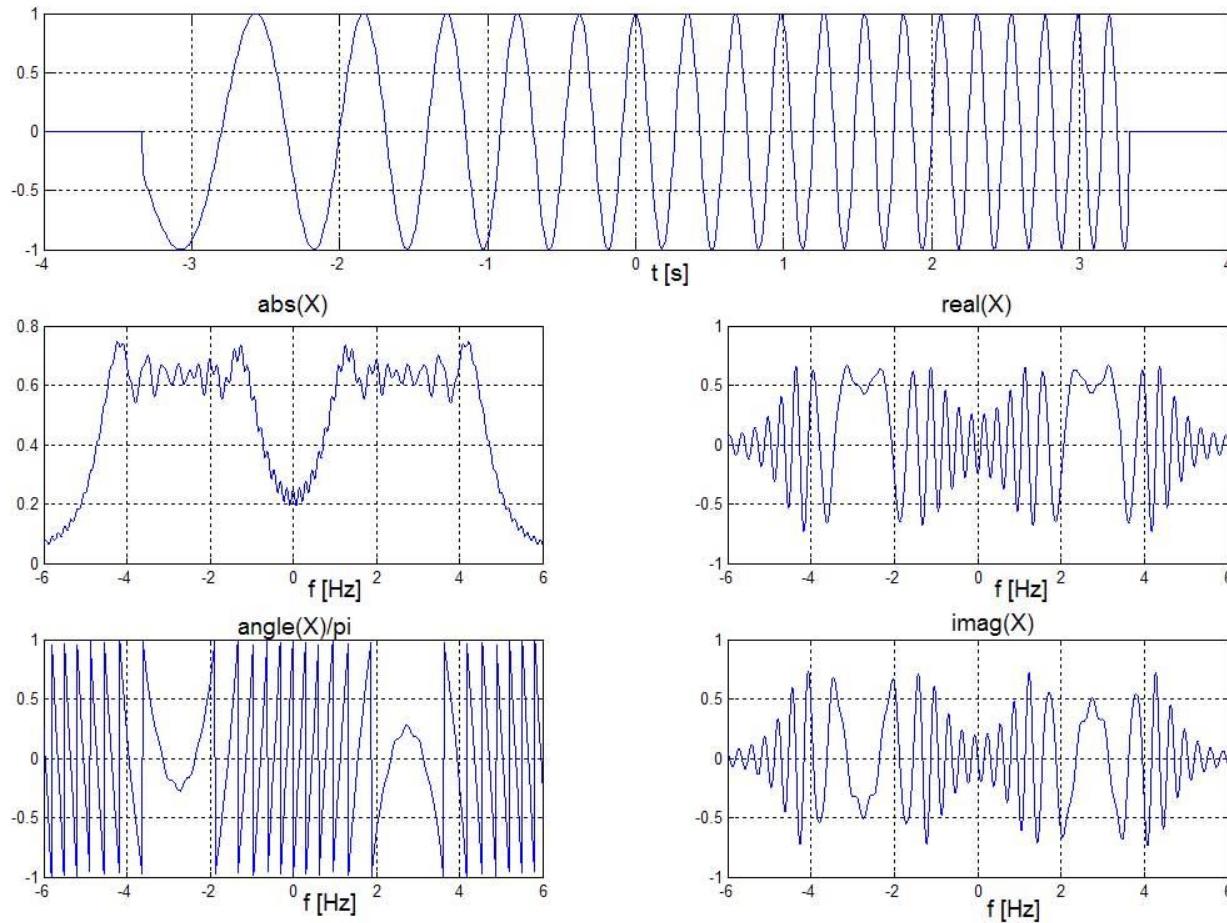
$$x(t) = CFT_{f \rightarrow t}^{-1} [X^G(f,t)]$$



Czyli transformatę Gabora można wyliczyć od strony  $x(t)$  i od strony  $X(f)$

# Transformacja Gabora

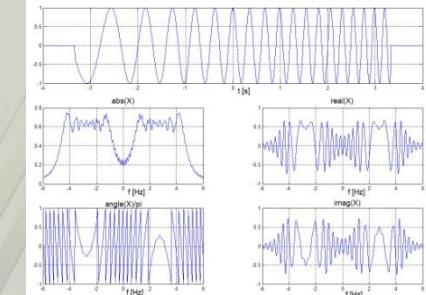
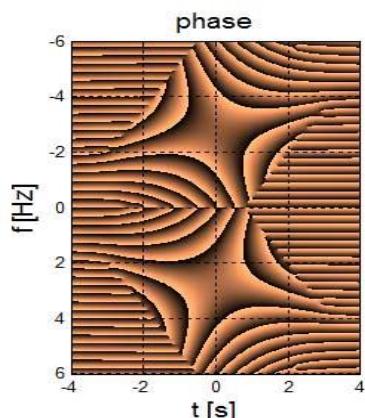
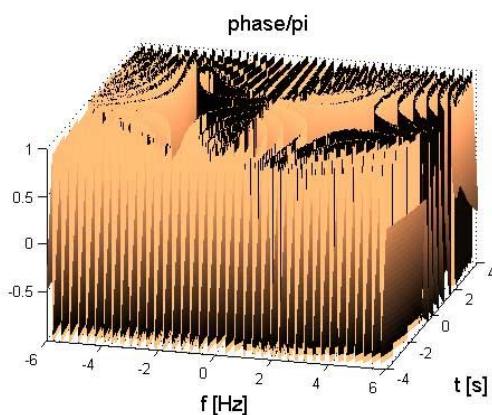
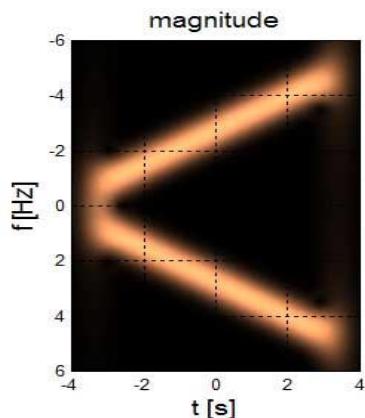
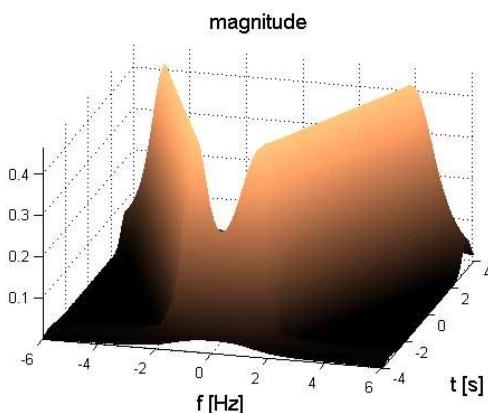
## Przykładowy sygnał



# Transformacja Gabora

$$X^G(f, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot w(\tau - t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} d\tau$$

$$X^G(f, t) = CFT_{\tau \rightarrow f}[x(\tau) \cdot w(\tau - t)]$$



$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^G(f, t) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$$

$$x(t) = CFT_{f \rightarrow t}^{-1}[X^G(f, t)]$$

# Transformacja Gabora - zmiana rozdzielczości

$$X^G(f, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot w_a(\tau - t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} d\tau$$

$$w_a(t) = \frac{1}{a} \cdot w\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$a > 0$$

$$w(t) = e^{-\pi \cdot t^2}$$

**Nadal zachodzi:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w_a(t) dt = 1$$

$$w_a(t) = \frac{1}{a} \cdot e^{-\frac{\pi \cdot t^2}{a^2}}$$

$$x\left(\frac{t}{a}\right) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad |a| \cdot X(a \cdot f)$$

**Do dziedziny transformaty Gabora można zatem dołożyć trzecią zmienną:**

$$X^G(f, t, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot w_a(\tau - t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} d\tau$$

# Lokalna (krótko-czasowa) Ciągła Transformacja Fouriera (ang. ST-CFT lub: STFT)

Przyjmujemy okno  $w(t)$  - jest to zazwyczaj parzysta funkcja rzeczywista, a wtedy:

$$X^W(f, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot w(\tau - t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} d\tau$$

... ponownie widać ogromną nadmiarowość!

**Transformata CFT iloczynu sygnałów to splot ich transformat w dziedzinie  $f$ :**

$$X^W(f, t) = X(f) * [W(f) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t}]$$

Zatem z def. splotu:

$$X^W(f, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(v + f) \cdot W(v) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot t} dv$$

**$W(f)$  – parzyste,  
zatem możemy  
podstawić  
 $-v$  zamiast  $v$**

A jest to przecież ICFT z iloczynu transformat (z dziedziny  $v$  do  $t$ ), zatem:

$$X^W(f, t) = [x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t}] * w(t)$$

Analogicznie dla transformacji Gabora, bo jest to przypadek szczególny tych rozważań.

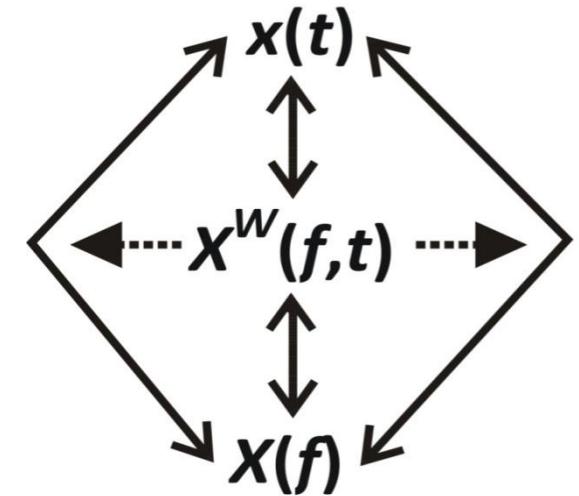
# Lokalna (krótko-czasowa) Ciągła Transformacja Fouriera (ang. ST-CFT lub w skrócie: STFT)

$$X^W(f, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot w(t - \tau) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} d\tau$$

$$X^W(f, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(v + f) \cdot W(v) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot t} dv$$

**lub (z przemiennością splotu):**

$$X^W(f, t) = e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(v) \cdot W(v - f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot t} dv$$



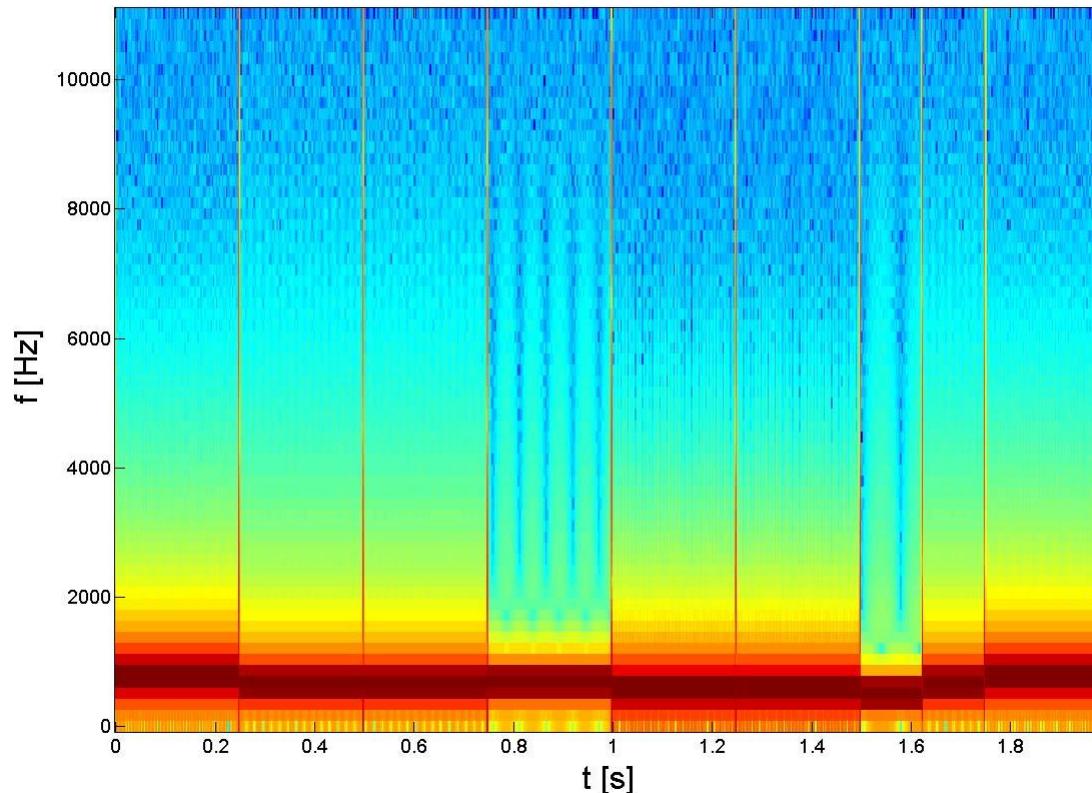
**Transformacja odwrotna:**

$$x(t) = \frac{1}{w(0)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X^W(f, t) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$$

$$X(f) = \frac{1}{W(0)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X^W(f, t) dt$$

# Lokalna analiza częstotliwościowa

**Przykład dla prostej melodii (wykres pokazuje tylko moduł)**

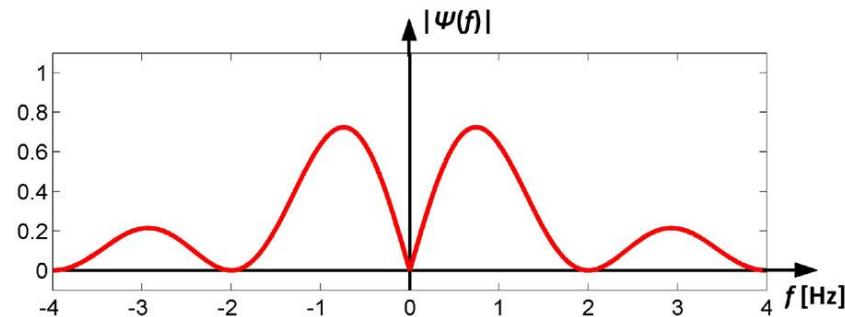
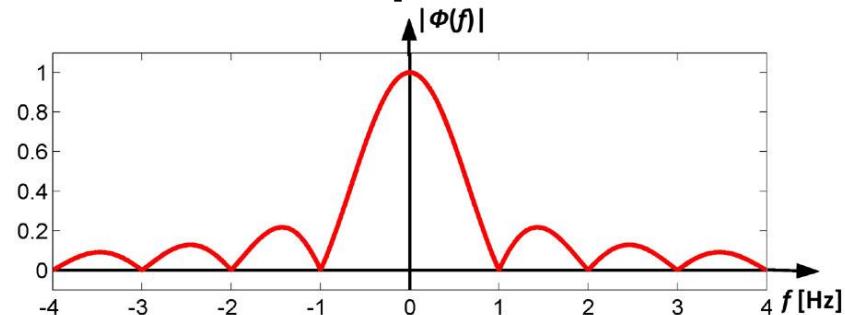
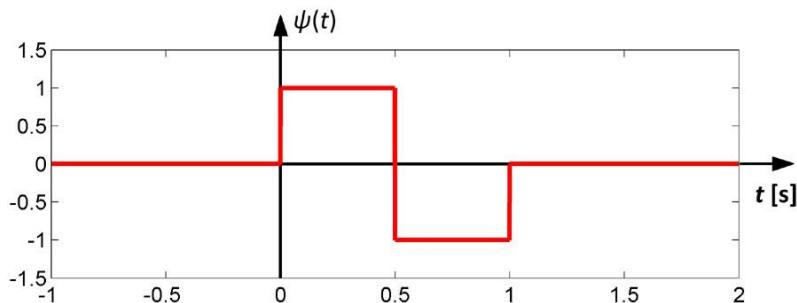
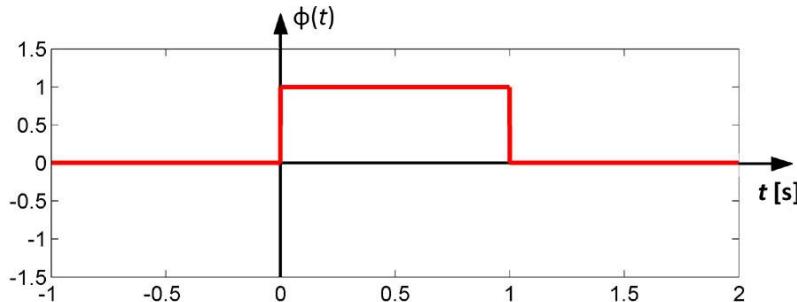


**Uwaga - wykres powstał dla danych wynikowych „nieco” zdyskretyzowanych.**

# Transformacja falkowa

AGH

**Baza Haara, funkcja skalująca i falka oraz ich widma amplitudowe:**



$$h_\phi(t) = \phi(-t) \Rightarrow H_\phi(f) = \Phi(-f) = \overline{\Phi(f)}$$

$$\Phi(f) = \text{sinc}(\pi \cdot f) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot f}$$

$$h_\psi(t) = \psi(-t) \Rightarrow H_\psi(f) = \Psi(-f) = \overline{\Psi(f)}$$

$$\Psi(f) = j \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot f\right) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot f}$$

# Transformacja falkowa (ciągła)

*(ang. CWT: Continuous Wavelet Transform)*

**Przyjmujemy filtr o zerowej wartości średniej, pasmowo-przepustowy:**

$$h_\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$$

$$H_\psi(0) = 0 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} h_\psi(t) dt = 0$$

**Transformacja w przód:**

$$\tilde{x}_\psi(a, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h_\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) d\tau \quad x(t) \in L^2(\mathbf{R}); \quad a \in \mathbf{R}_+$$

**Transformacja odwrotna:**

$$x(t) = \frac{1}{c_\psi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 \cdot \sqrt{a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_\psi(a, \tau) \cdot \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) d\tau da$$

$$\psi(t) = h_\psi(-t)$$

**Przy czym (co daje dodatkowy warunek dla filtra):**

$$c_\psi = 2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{|H_\psi(f)|^2}{f} df < \infty$$

**lub**

$$c_\psi = 2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{|\Psi(f)|^2}{f} df < \infty$$

# Transformacja falkowa (ciągła)

**Interpretacja splotowa:**

$$\tilde{x}_\psi(a, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h_\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) d\tau$$

$$\tilde{x}_\psi(a, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot x(t) * h_\psi\left(\frac{t}{a}\right)$$

**filtr analizujący**

$$x(t) = \frac{1}{c_\psi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 \cdot \sqrt{a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_\psi(a, \tau) \cdot \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) d\tau da$$

$$x(t) = \frac{1}{c_\psi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 \cdot \sqrt{a}} \cdot \left[ \tilde{x}_\psi(a, t) * \psi\left(\frac{t}{a}\right) \right] da$$

$$\psi(t) = h_\psi(-t)$$

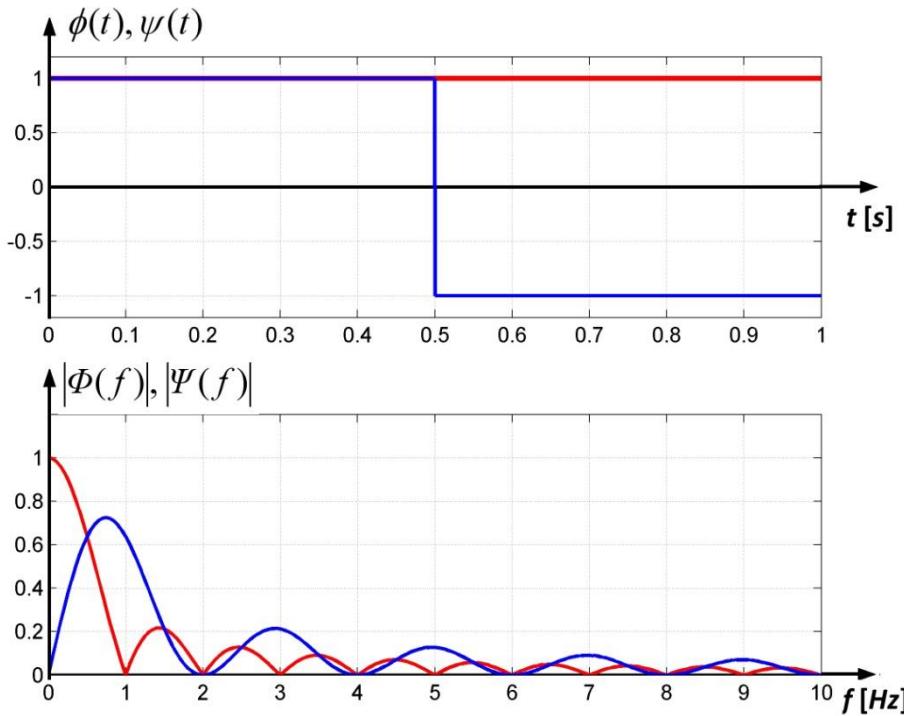
**filtr odtwarzający**

**... widać ogólną nadmiarowość!**

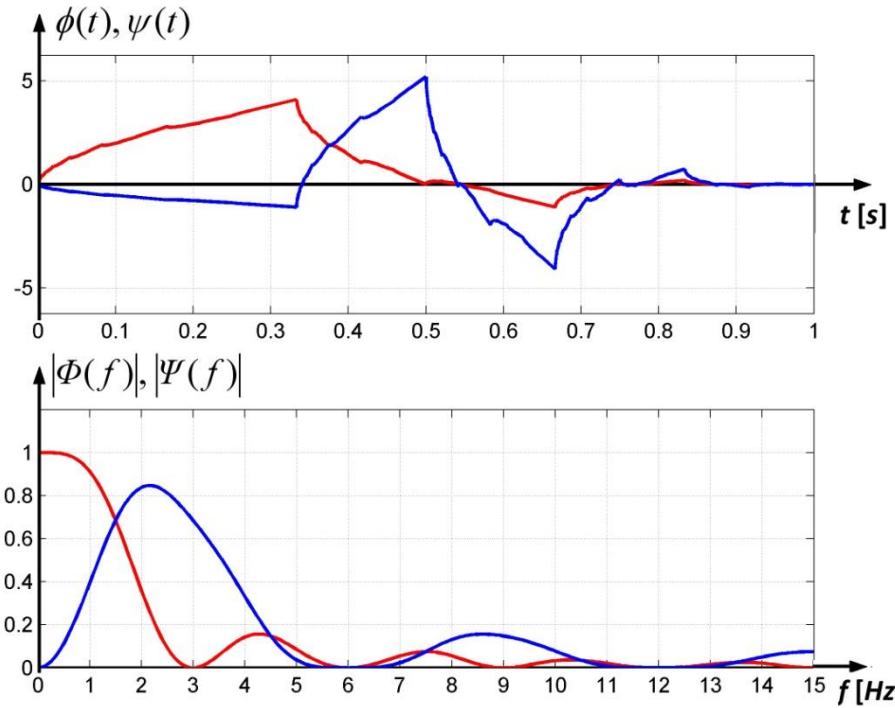
**Zatem funkcja skalująca nie jest do niczego potrzebna (?)**

# Funkcje falkowe (falki) i funkcje skalujące

**Dla falki Haara  
(falka 1. wg I.Daubeshies):**



**Dla falki 2. wg I.Daubechies:**



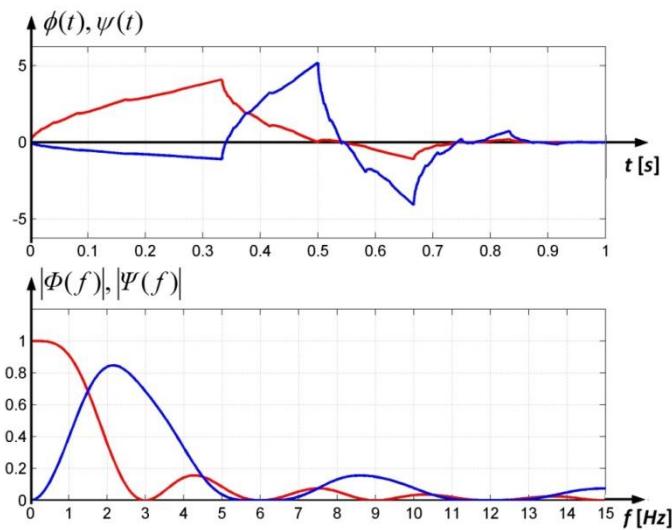
**Jest wiele różnych falek (i odpowiednich dla nich funkcji skalujących).** 15

# Funkcje falkowe (falki) i funkcje skalujące

Powtórzmy:

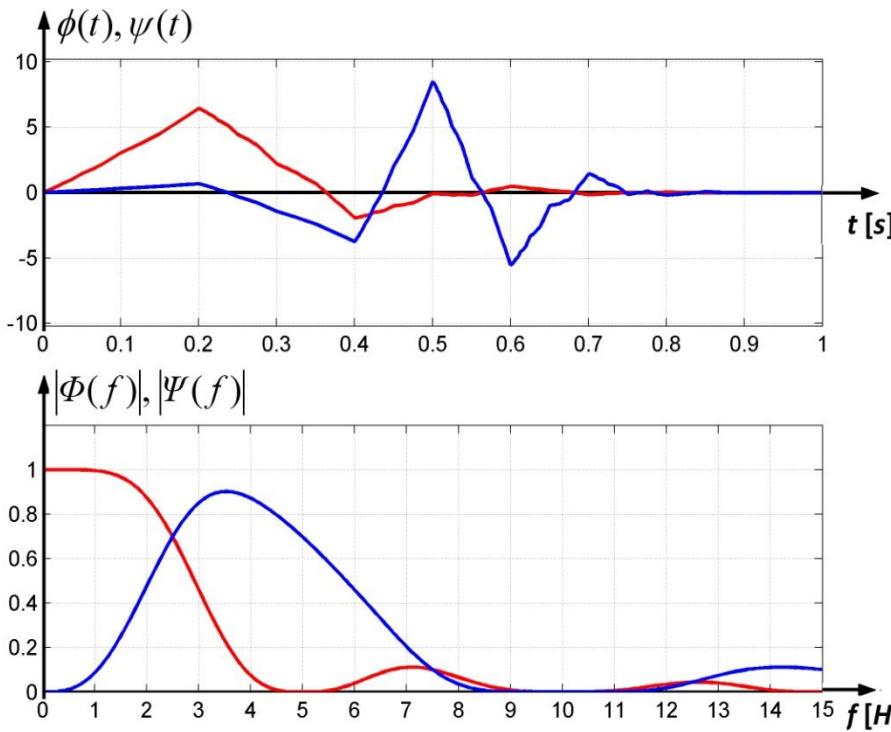
funkcja skalująca  $\Leftrightarrow$  filtr dolnoprzepustowy

funkcja falkowa  $\Leftrightarrow$  filtr pasmowo-przepustowy

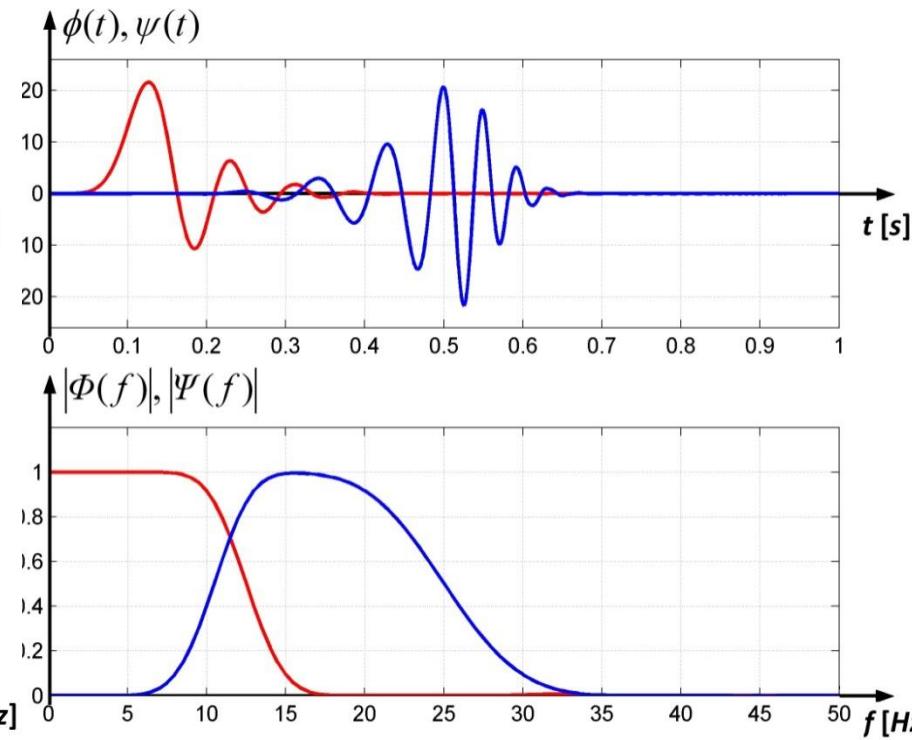


# Funkcje falkowe (falki) i funkcje skalujące

Dla falki 3. wg I.Daubechies:

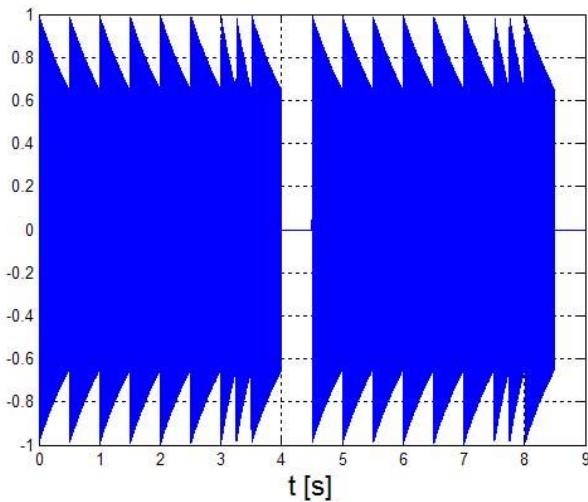


Dla falki 12. wg I.Daubechies:

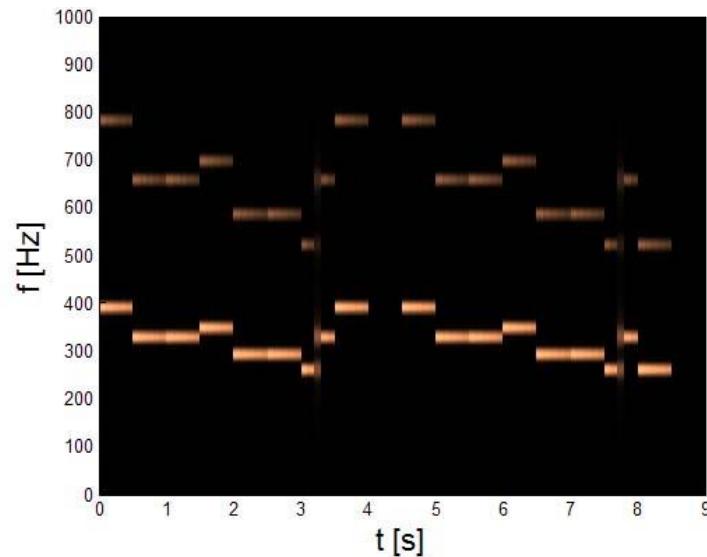
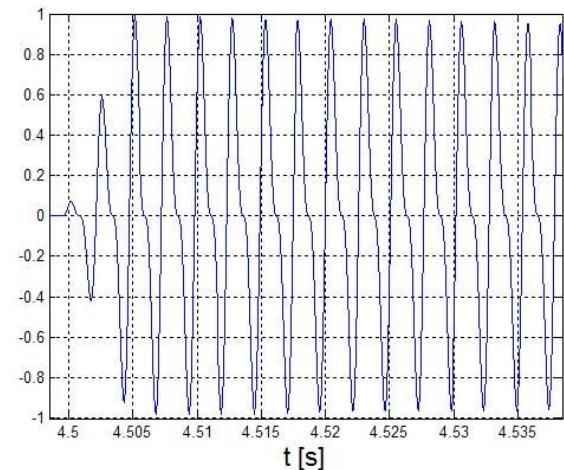


Jest wiele różnych falek (i odpowiednich dla nich funkcji skalujących). 17

# Przykład: sygnał i transformata STFT, z oknem Hanna



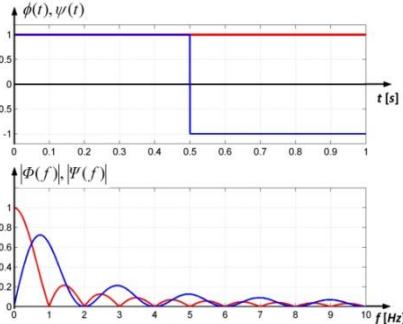
Sygnal – „melodyjka”



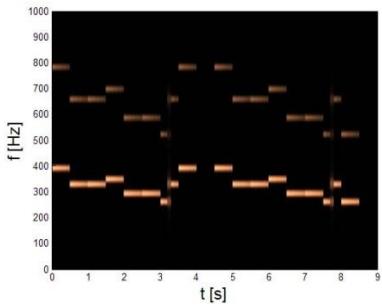


AGH

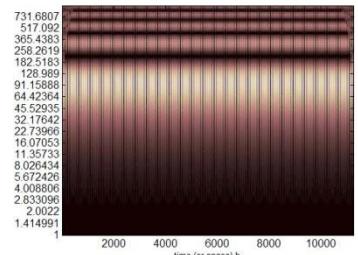
# Falka nr 1, test cosinusoidy



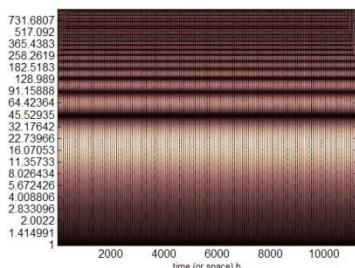
STFT



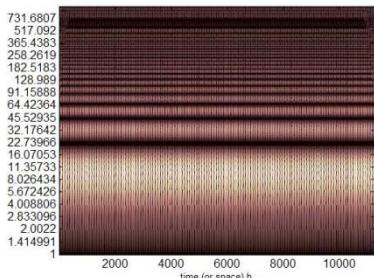
100Hz



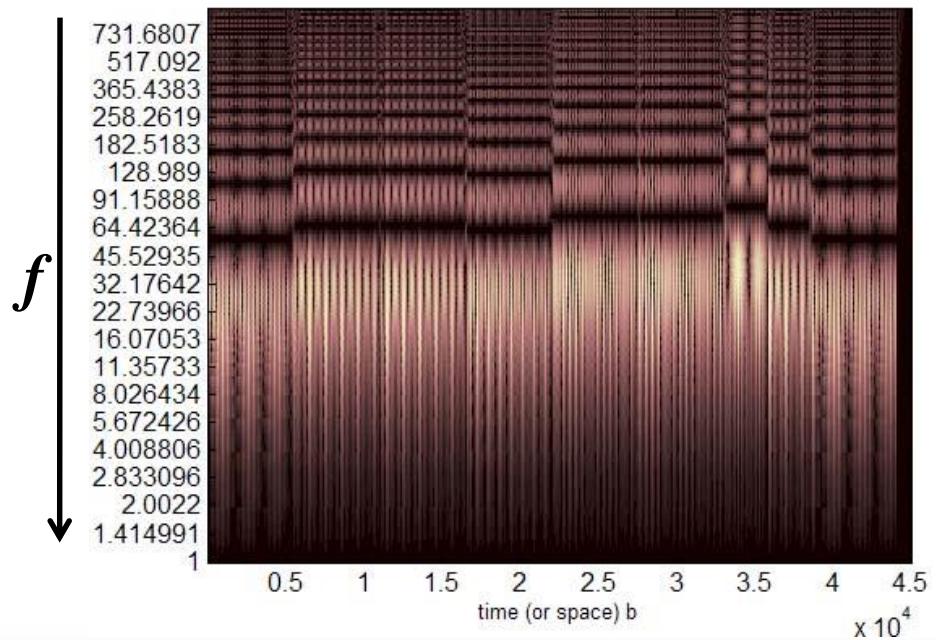
500Hz



1000Hz



a

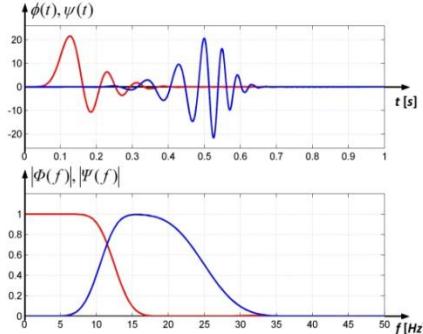


... i wynik dla naszej melodii.

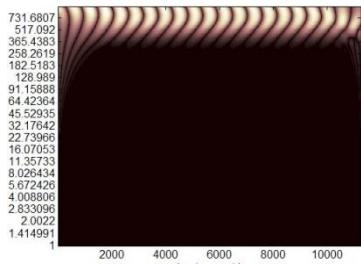


AGH

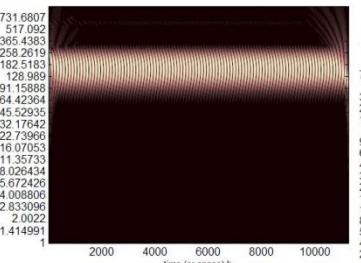
# Falka nr 12, test cosinusoidy



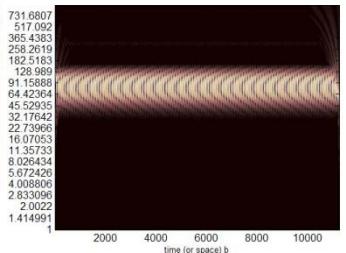
10Hz



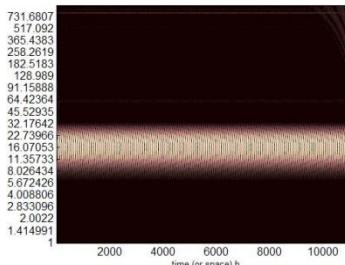
50Hz



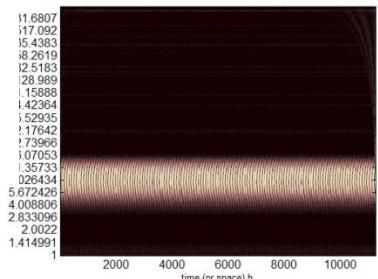
100Hz



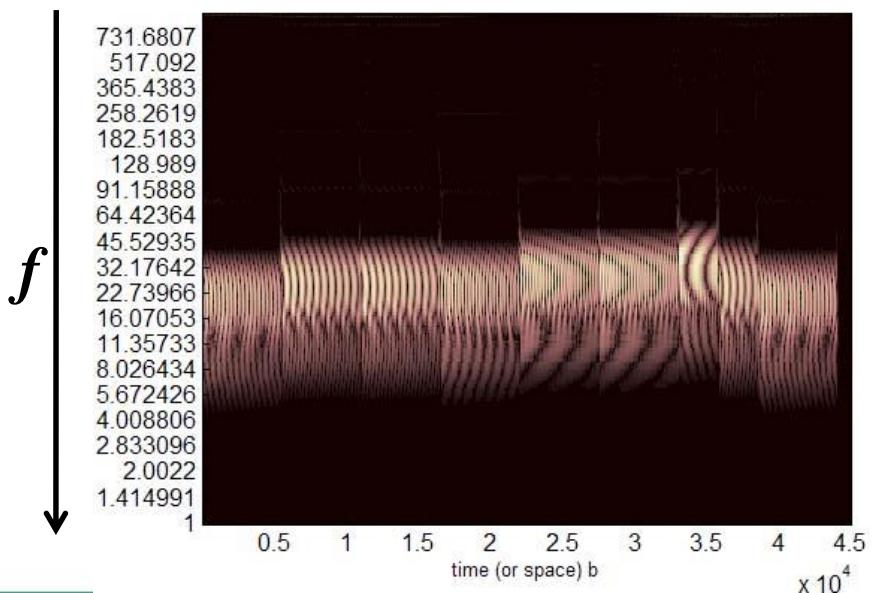
500Hz



1000Hz



a



... i wynik dla naszej melodii.



# Wybrane funkcje (wybrane wartości skali)

AGH

Wybieramy ciąg filtrów (falek) na różnych poziomach  $k$ :

$$\psi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{a_k}} \cdot \psi\left(\frac{t}{a_k}\right) : a_k = 2^k$$
$$k \in \mathbf{Z}$$

czyli:

$$\psi_k(t) = 2^{\frac{-k}{2}} \cdot \psi(2^{-k} \cdot t)$$
$$k \in \mathbf{Z}$$

$$h_\psi(t) = \psi(-t) \Rightarrow H_\psi(f) = \Psi(-f) = \overline{\Psi(f)}$$

Analogicznie możemy utworzyć ciąg funkcji skalujących:

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{a_k}} \cdot \varphi\left(\frac{t}{a_k}\right) : a_k = 2^k$$
$$k \in \mathbf{Z}$$

czyli:

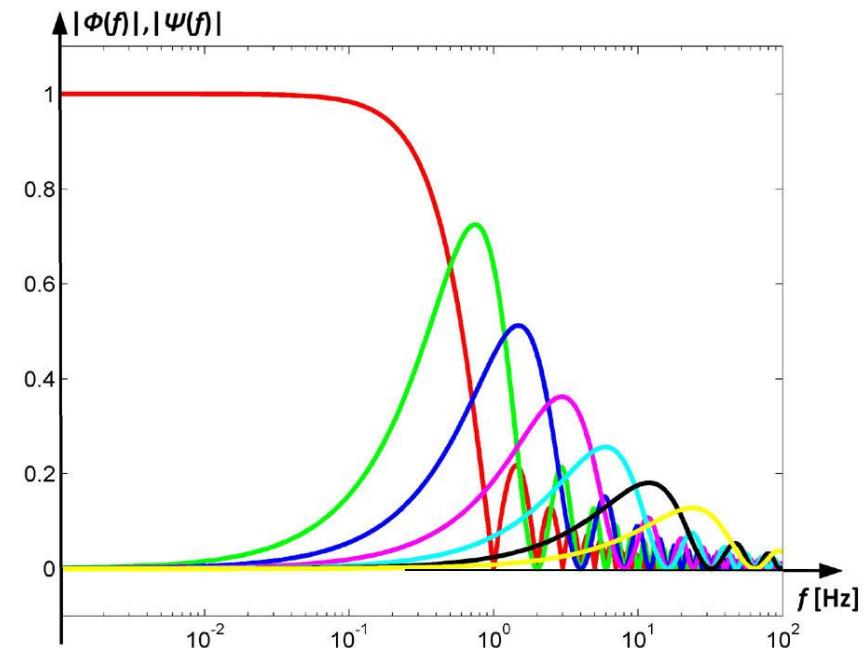
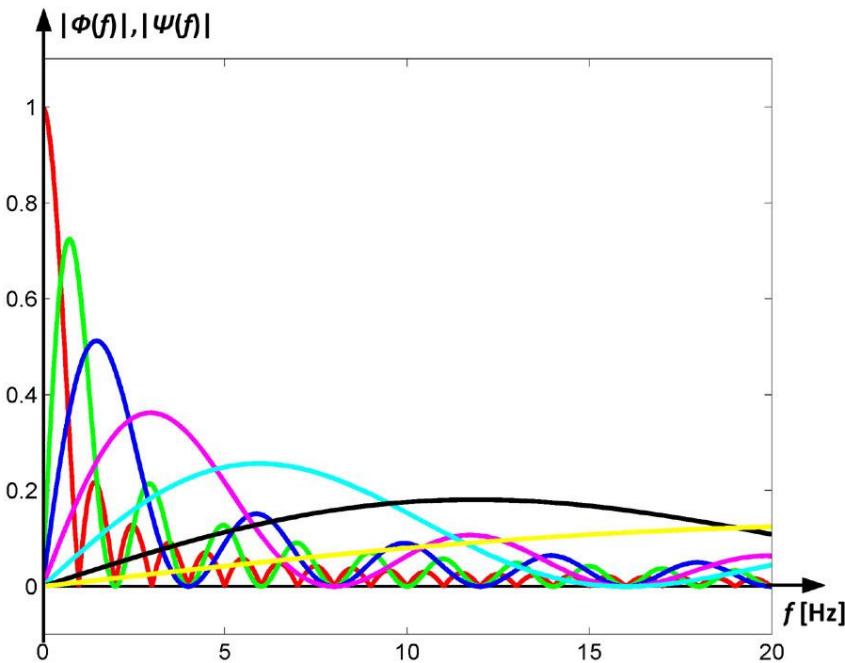
$$\varphi_k(t) = 2^{\frac{-k}{2}} \cdot \varphi(2^{-k} \cdot t)$$
$$k \in \mathbf{Z}$$

$$h_\varphi(t) = \varphi(-t) \Rightarrow H_\varphi(f) = \Phi(-f) = \overline{\Phi(f)}$$

Falki (i funkcje skalujące) są unormowane w dziedzinie czasu.

# Widma amplitudowe ciągu funkcji (filtrów)

Dla ciągu falek Haara (Daubechies nr 1) i jednej funkcji skalującej:



Funkcja skalująca dla  $k=0$ , a następnie ciąg falek dla kolejnych  $k$ , liczących „w dół”, czyli: 0, -1, -2, -3, -4, ...

Widać, że w tym przypadku nie można „ładnie” podzielić przedziałów częstotliwości, za to funkcje (filtry) są bardzo proste.

# Wybrane funkcje (wybrane wartości skali) - wersja bez normalizacji

**Wybieramy ciąg filtrów (falek) na różnych poziomach  $k$ :**

$$\psi_k(t) = \frac{\sqrt{2}}{a_k} \cdot \psi\left(\frac{t}{a_k}\right) : a_k = 2^k$$

$$k \in \mathbf{Z}$$

czyli:

$$\psi_k(t) = \frac{\sqrt{2}}{2^k} \cdot \psi(2^{-k} \cdot t)$$

$$k \in \mathbf{Z}$$

$$h_\psi(t) = \psi(-t) \Rightarrow H_\psi(f) = \Psi(-f) = \overline{\Psi(f)}$$

Analogicznie możemy utworzyć ciąg funkcji skalujących:

$$\varphi_k(t) = \frac{\sqrt{2}}{a_k} \cdot \varphi\left(\frac{t}{a_k}\right) : a_k = 2^k$$

$$k \in \mathbf{Z}$$

czyli:

$$\varphi_k(t) = \frac{\sqrt{2}}{2^k} \cdot \varphi(2^{-k} \cdot t)$$

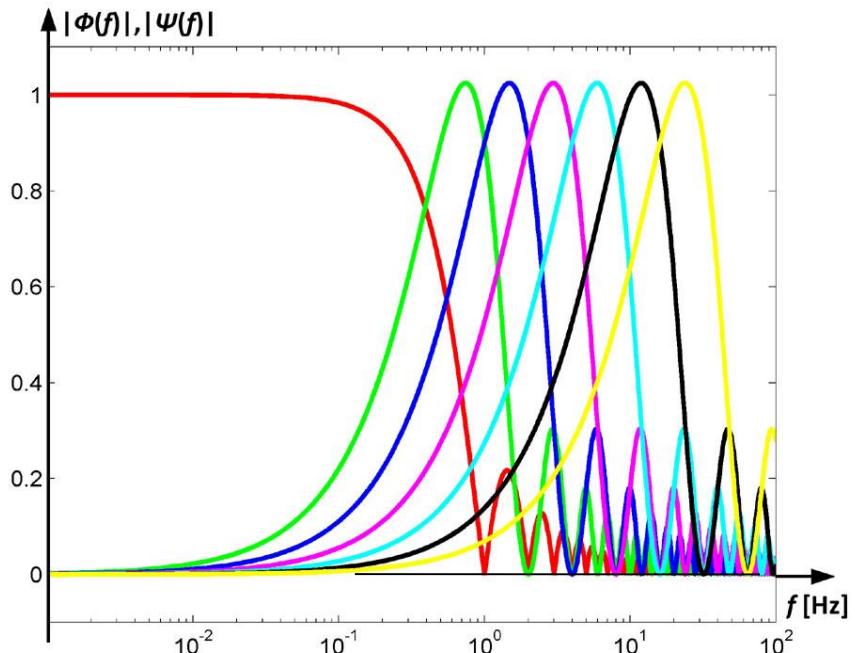
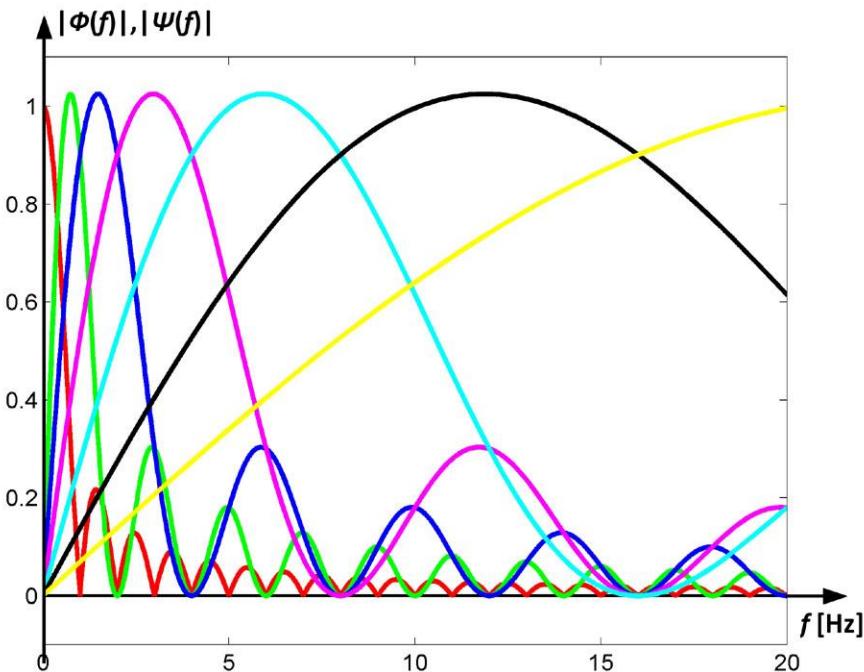
$$k \in \mathbf{Z}$$

$$h_\varphi(t) = \varphi(-t) \Rightarrow H_\varphi(f) = \Phi(-f) = \overline{\Phi(f)}$$

Falki i funkcje skalujące **nie są** już unormowane w dziedzinie czasu.

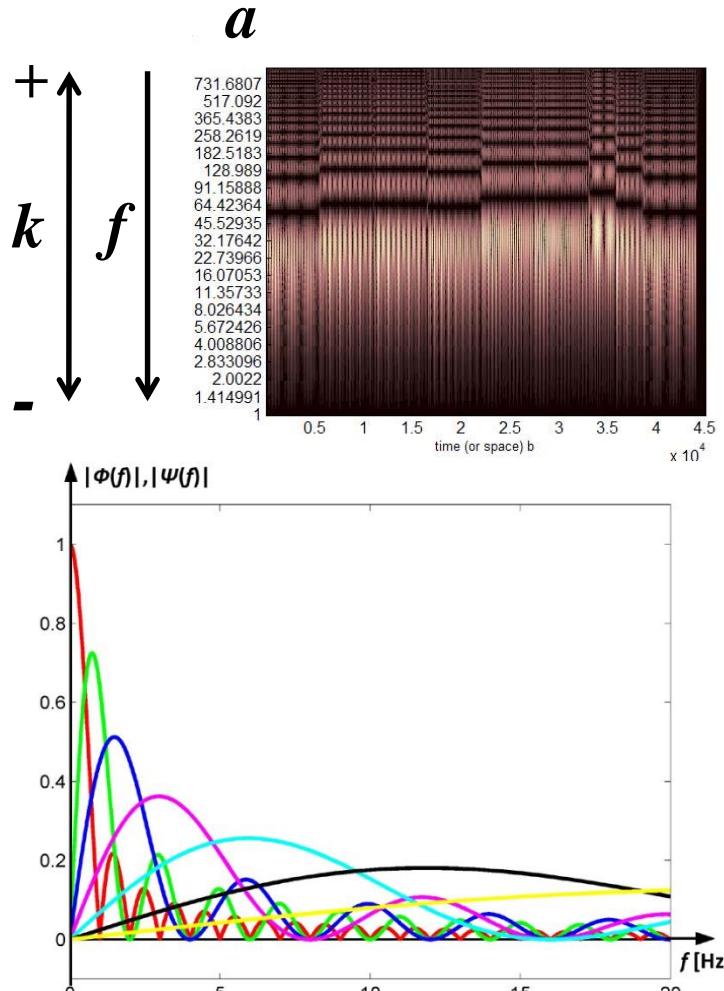
# Widma amplitudowe ciągu funkcji (filtrów)

Zmodyfikowany ciąg falek Haara (nieunormowanych) i funkcja skalująca:



Funkcja skalująca dla  $k=0$ , a następnie ciąg falek dla kolejnych (licząc „w dół”)  $k$ , czyli: 0, -1, -2, -3, -4, ...

# Relacje między parametrami falek



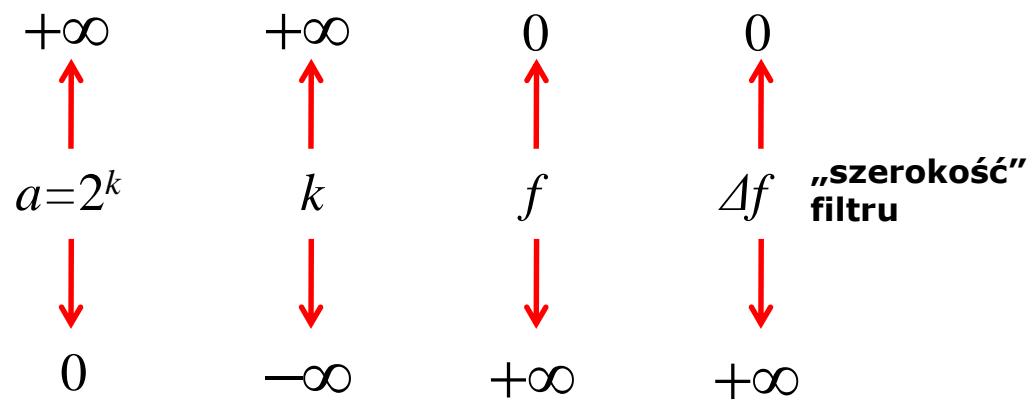
$$\psi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{a_k}} \cdot \psi\left(\frac{t}{a_k}\right) : a_k = 2^k$$

$$k \in \mathbf{Z}$$

Czyli zapisując wprost:

$$\psi_k(t) = 2^{\frac{-k}{2}} \cdot \psi(2^{-k} \cdot t)$$

$$k \in \mathbf{Z}$$



Analogicznie dla funkcji skalujacych.



# Podział diadyczny

AGH

**W ten sposób możemy utworzyć bazę falkową na różnych poziomach  $k$ :**

$$\psi_{k,n}(t) = 2^{\frac{-k}{2}} \cdot \psi\left(2^{-k} \cdot t - n\right)$$
$$k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}$$

$$\psi_{k,n}(t) = 2^{\frac{-k}{2}} \cdot \psi\left(2^{-k} \cdot (t - n \cdot \Delta t)\right) : \Delta t = 2^k$$
$$k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}$$

**Analogicznie możemy utworzyć układ funkcji skalujących (to także jest baza) na różnych poziomach  $k$ :**

$$\varphi_{k,n}(t) = 2^{\frac{-k}{2}} \cdot \varphi\left(2^{-k} \cdot t - n\right)$$
$$k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}$$



AGH

# (Pod)przestrzeń sygnałów

**Baza falkowa:**

$$\psi_{k,n}(t) = 2^{\frac{-k}{2}} \cdot \psi(2^{-k} \cdot t - n)$$
$$k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}$$

**generuje (pod)przestrzeń  $W_k$**

**Baza funkcji skalujących:**

$$\varphi_{k,n}(t) = 2^{\frac{-k}{2}} \cdot \varphi(2^{-k} \cdot t - n)$$
$$k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}$$

**generuje (pod)przestrzeń  $V_k$**

**Przy czym zachodzi następująca zależność dla sumowania się (pod)przestrzeni:**

$$\dots \rightarrow V_{-3} \rightarrow V_{-2} \rightarrow V_{-1} \rightarrow V_0 \rightarrow V_{+1} \rightarrow V_{+2} \rightarrow \dots$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$W_{-2} \quad W_{-1} \quad W_0 \quad W_{+1} \quad W_{+2} \quad W_{+3}$$

**Ogólnie:**

$$V_{k-1} = V_k \oplus W_k$$

**ponieważ:**

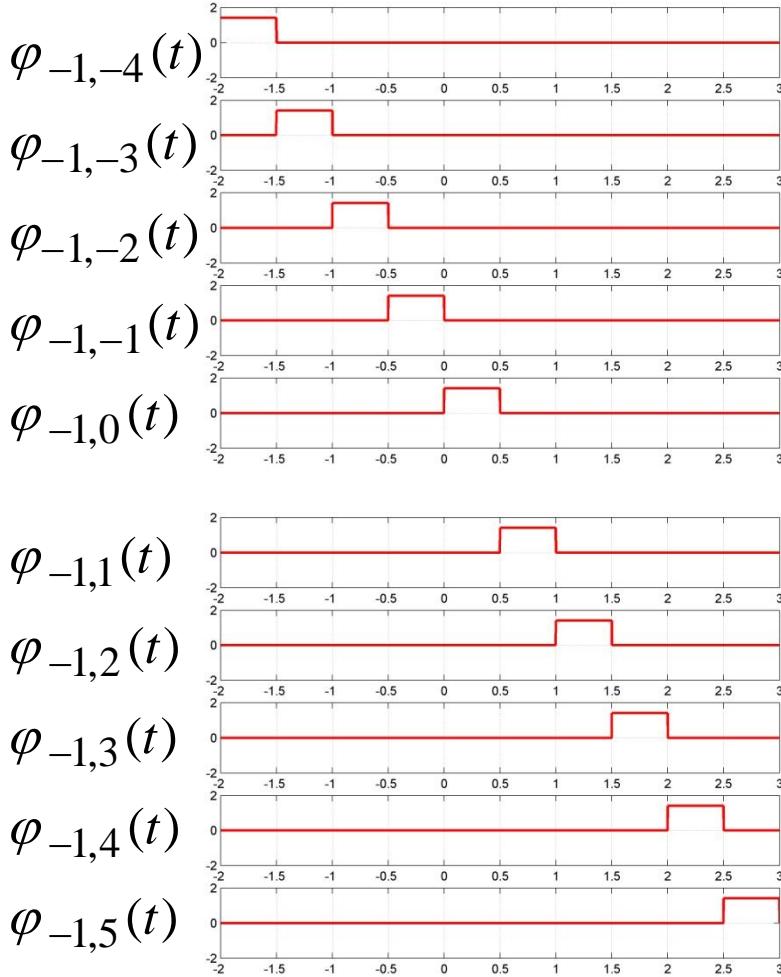
$$V_k \perp W_k$$



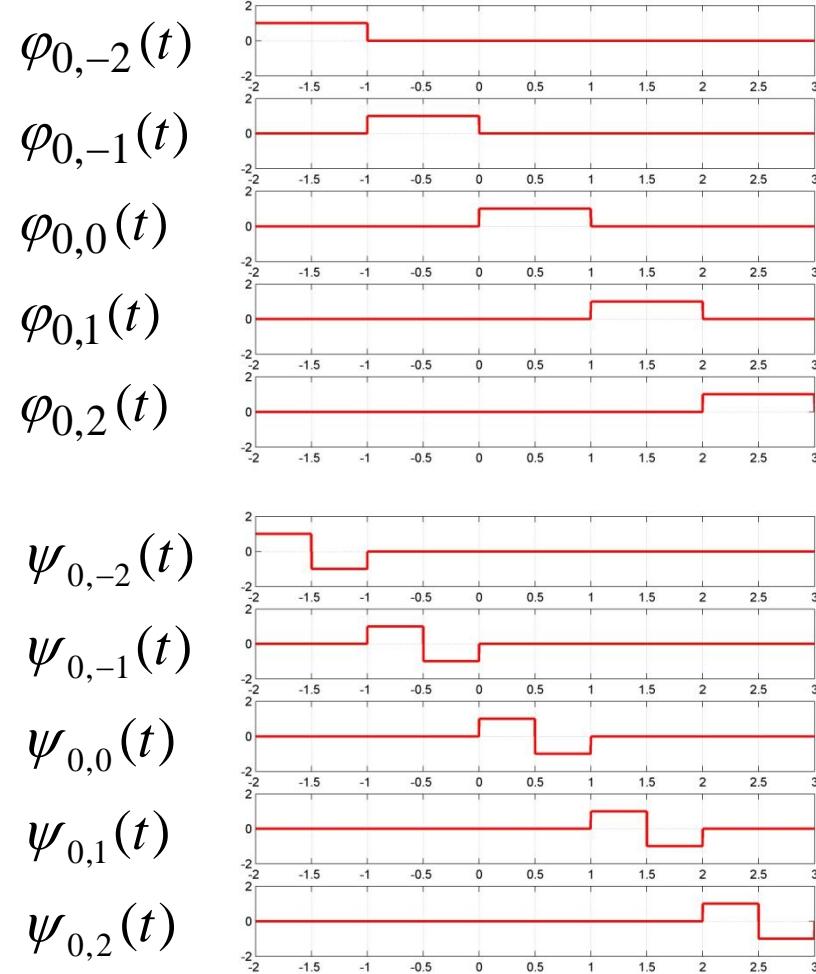
# Baza falkowa

AGH

## Przykład dla falek Haara Fragment bazy dla $V_{-1}$ :



## Fragmenty baz dla $V_0$ i $W_0$ :



# Transformacja falkowa (WT) (ciągły sygnał, dyskretna transformata)

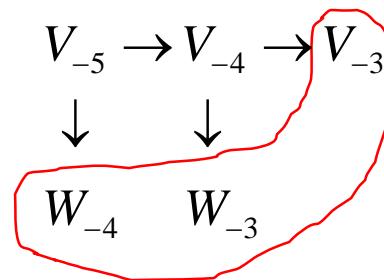
**Ogólnie:**

$$\dots \rightarrow V_{-3} \rightarrow V_{-2} \rightarrow V_{-1} \rightarrow V_0 \rightarrow V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow \dots$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$W_{-2} \quad W_{-1} \quad W_0 \quad W_1 \quad W_2 \quad W_3$$

**Przykładowo:**



$$x(t) = (\sqrt{2})^4 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_{-4,n} \cdot \psi(16 \cdot t - n) + (\sqrt{2})^3 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_{-3,n} \cdot \psi(8 \cdot t - n) + (\sqrt{2})^3 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_{-3,n} \cdot \varphi(8 \cdot t - n)$$

$$\downarrow \in \quad \downarrow \in \quad \downarrow \in \quad \downarrow \in$$

$$V_{-5} \quad W_{-4} \quad W_{-3} \quad V_{-3}$$

**Kolejne elementy powyższej sumy to sygnały wzajemnie ortogonalne.**

**Transformata, to w tym przypadku zestaw współczynników:**

$$v_{-3,n}, \quad w_{-3,n}, \quad w_{-4,n} : n \in \mathbb{Z}$$



AGH

# Moc i energia sygnału

**Moc chwilowa wydzielana na oporze  $R$ :**

$$P(t) = \frac{U^2(t)}{R}$$

**Jeżeli przyjmiemy:**

$$R = 1\Omega$$

$$x(t) = U(t)$$

**To możemy mówić o mocy (chwilowej) i energii sygnału na odcinku  $T$ :**

$$P_x(t) = |x(t)|^2 \quad E_x(t_0, t_0 + T) = \int_{t_0}^{t_0+T} P_x(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt$$

**Całkowita energia sygnału:**

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

# Moc średnia sygnału (uśrednienie po czasie)

**Dla sygnału o skończonym czasie trwania moc średnia jest następująca:**

$$\mathbf{P}_x = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt \quad \text{gdy } x(t) = 0 \quad \text{dla } t \notin [t_0, t_0 + T]$$

**Uwaga – uśrednianie jest tutaj tylko po odcinku  $T$ .**

**Dla sygnału okresowego ze wzorcem  $x_0$ , określonym na okresie  $T$ :**

$$\mathbf{P}_x = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x_0(t)|^2 dt$$

**...z wykorzystaniem współczynników szeregu Fouriera:**

$$\mathbf{P}_x = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

**...a co gdy sygnał nie jest okresowy?**

$$\mathbf{P}_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt$$

**Co jednak może nie dać skońzonego wyniku...**



# Widmowa gęstość mocy

AGH

Dla sygnału okresowego  $x(t)$  ze wzorcem okresu  $x_0(t)$ :

(gdy  $x_0(t)$  jest określone jedynie na okresie  $T$ )

$$X_0(f) = \int_{-T/2}^{+T/2} x_0(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt$$

z tw. Parsevala (o zachowaniu energii przez CFT):

$$\int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X_0(f)|^2 df$$

$$P_x(f) = \frac{1}{T} |X_0(f)|^2 \quad \left[ \frac{W}{Hz} \right]$$

$$P_x(f) = \frac{1}{T} \cdot \left( \text{Re}^2[X_0(f)] + \text{Im}^2[X_0(f)] \right) = \frac{1}{T} \cdot X_0(f) \cdot \overline{X_0(f)} \quad \left[ \frac{W}{Hz} \right]$$

Dla dowolnego sygnału  $x(t)$ :

$$X_T(f) = \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X_T(f)|^2 df$$

$$P_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \quad \left[ \frac{W}{Hz} \right]$$

O ile ten wynik jest skończony...

Moc średnia:

$$\mathbf{P}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(f) df$$



AGH

# Widmowa gęstość mocy

Zestawienie wzorów:

**Okresowy sygnał:**

$$P_x(f) = \frac{1}{T} |X_0(f)|^2 \quad \left[ \frac{W}{Hz} \right]$$

**Dowolny sygnał:**

$$P_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \quad \left[ \frac{W}{Hz} \right]$$

$$P_x(\omega) = \frac{1}{T} |X_0(\omega)|^2 \quad \left[ \frac{W}{rad/s} \right]$$

$$P_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(\omega)|^2 \quad \left[ \frac{W}{rad/s} \right]$$

**Moc średnia:**

$$\mathbf{P}_x = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(f) df \quad [W]$$



AGH

# Widmowa gęstość energii

$$E_x(f) = |X(f)|^2 \quad \left[ \frac{J}{Hz} \right]$$

$$E_x(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad \left[ \frac{J}{rad/s} \right]$$

**Energia całkowita:**

$$E_x = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(f) df \quad [J]$$



AGH

# Proces losowy (stochastyczny)

$$\hat{x}(t) : p_t(x)$$

funkcja rozkładu gęstości prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej ciągłej  
(lub prawdopodobieństwo - dla zmiennej losowej dyskretnej)

zależy od dwóch zmiennych:  
 $x$  – wartości zmiennej losowej;  
 $t$  – chwili czasu.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_t(x) dx = 1$$

**Sygnał powstaje jako  $k$ -ta realizacja procesu losowego:**

$$\hat{x}(t)|_k = x(t)$$

**Przykłady: sygnał stały, sygnał okresowy, sygnał fluktuacyjny.**

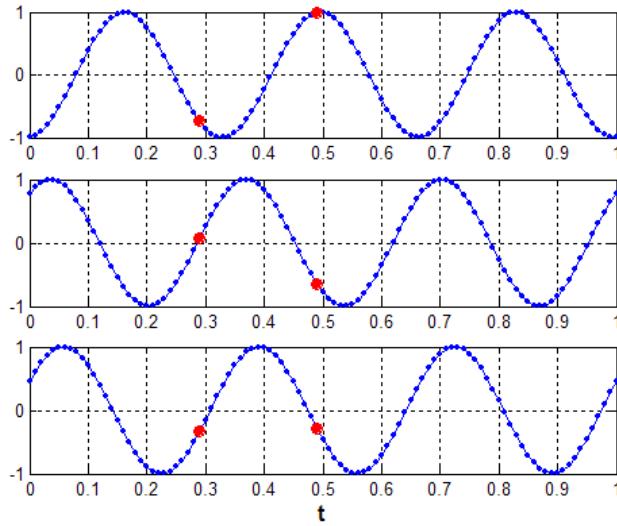
**W części dotyczącej procesów losowych zakładamy,  
że proces jest rzeczywisty (tzn. o zerowej części urojonej),  
chyba że będzie określone inaczej.**

# Przykład: okresowy sygnał losowy

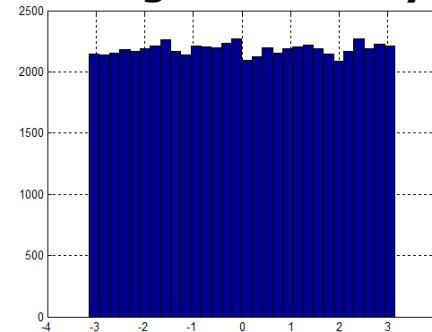
$$\hat{x}(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \hat{\phi}_0)$$

$$\hat{\phi}_0 \in [-\pi, \pi)$$

**Trzy realizacje procesu**

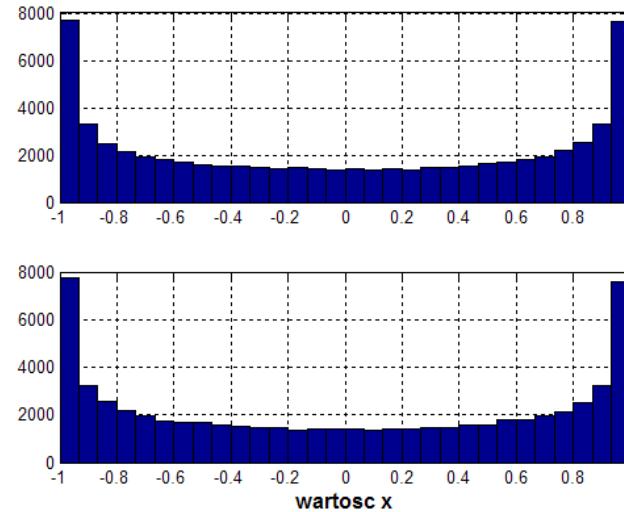


**Histogram dla fazy**



```
N=2^16;
p=rand(1,N)*2*pi-pi;
...
x=cos(2*pi*f0*t-p(n));
```

**Rozkłady (histogramy) dla dwóch przykładowych punktów  $t$**

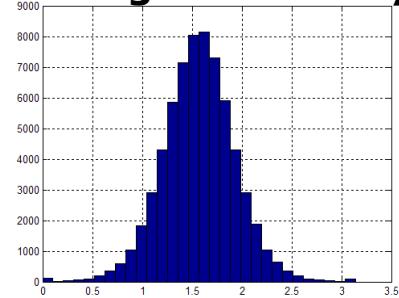


## Inny przykład (nr 2)

$$\hat{x}(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \phi_0)$$

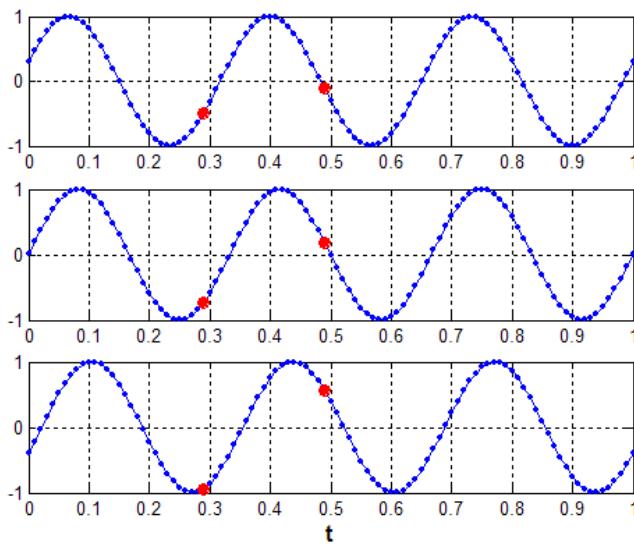
$$\phi_0 \in [0, \pi)$$

**Histogram dla fazy**

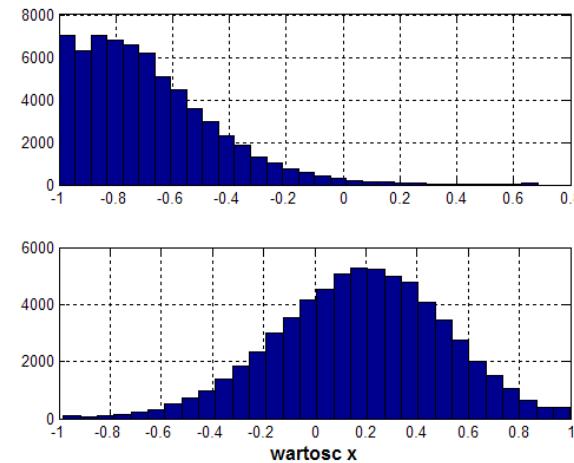


```
q=randn(1,N)/3; q(q>1)=1;
q(q<-1)=-1; p=acos(q);
...
x=cos(2*pi*f0*t-p(n));
```

**Trzy realizacje procesu**



**Rozkłady (histogramy) dla dwóch przykładowych punktów  $t$**





AGH

# Rozkłady łączne dla dwóch chwil czasu

**Przyjmijmy następujące oznaczenia dla wartości procesu w dwóch chwilach  $t$ :**

$$x_1 = x(t_1)$$

$$x_2 = x(t_2)$$

**wtedy:**

$$p_{t_1, t_2}(x_1, x_2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{t_1, t_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$$

**to funkcja rozkładu gęstości prawdopodobieństwa**

**– łączna dla dwóch zmiennych losowych:  $x_1$  i  $x_2$ ,  
określona dla wartości czasu  $t_1$  i  $t_2$ .**



AGH

# (Auto)korelacja procesu losowego

$$r_{\hat{x}}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot p_{t_1, t_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\boxed{\begin{aligned}x_1 &= x(t_1) \\x_2 &= x(t_2)\end{aligned}}$$

Ogólnie dla danego procesu jest to funkcja dwóch zmiennych ( $t_1$  i  $t_2$ ).

**Wartość oczekiwana:**

$$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_t(x) dx$$

**Średnia:**  $E[x(t)] = \mu_{\hat{x}}(t)$

**Wariancja:**

**(odchylenie standardowe do kwadratu)**

$$E[(x(t) - \mu_{\hat{x}}(t))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_{\hat{x}}(t))^2 \cdot p_t(x) dx$$

$$E[(x(t) - \mu_{\hat{x}}(t))^2] = \sigma_{\hat{x}}^2(t)$$



AGH

# Procesy stacjonarne i ergodyczne

**Proces jest stacjonarny, gdy wszystkie jego parametry - zarówno rozkładu, jak i wzajemne zależności - nie zależą od czasu.**

**Proces jest stacjonarny w szerszym (mniej restrykcyjnym) sensie, gdy jego wartość oczekiwana oraz autokorelacja (kowariancja) nie zależą od czasu.**

**Proces jest ergodyczny, gdy jego parametry wyznaczone z pojedynczej realizacji (zwykle nieskończonej) są takie same jak dla dowolnej chwili czasu.**

**Procesem stacjonarnym, ale na pewno nie ergodycznym, jest np. sygnał stały, ale o losowej wartości początkowej (można założyć dowolny rozkład).**

**Procesem ergodycznym może być np. sygnał sinusoidalny o równomiernym rozkładzie fazy początkowej (warto sprawdzić, czy na pewno).**

**Ponadto są nimi sygnały tworzone przez generatory typu rand i randn.**



AGH

## Proces stacjonarny w szerszym sensie

**Dla procesu stacjonarnego w szerszym sensie (inaczej: słabo stacjonarnego) wartość oczekiwana (średnia chwilowa)**

$$\mathbb{E}[x(t)] = \mu_{\hat{x}}(t) = \mu_{\hat{x}}$$

**nie zależy od czasu.**



AGH

# Moc i energia procesu

**Moc chwilowa procesu:**

$$P_{\hat{x}}(t) = \text{E}[|x(t)|^2]$$

$$P_{\hat{x}}(t) = \sigma_{\hat{x}}^2(t) + \mu_{\hat{x}}^2(t)$$

**Moc średnia procesu w czasie  $T$ :**

$$P_{\hat{x}}(t_0, t_0 + T) = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0 + T} P_{\hat{x}}(t) dt$$

**Energia procesu w czasie  $T$ :**

$$E_{\hat{x}}(t_0, t_0 + T) = \int_{t_0}^{t_0 + T} P_{\hat{x}}(t) dt$$

**Uwaga na trzy symbole:  $E$ ,  $\text{E}$  oraz  $\text{E}$ .**



AGH

# Twierdzenie Wienera-Chinczyna

**Dla procesu losowego, stacjonarnego co najmniej w szerszym sensie, widmowa gęstość mocy jest transformatą Fouriera autokorelacji procesu:**

$$P_{\hat{x}}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{\hat{x}}(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt$$

$$P_{\hat{x}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{\hat{x}}(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt$$

- 1. Widmowa gęstość mocy procesu jest nieujemną funkcją rzeczywistą.**
- 2. Dla procesów rzeczywistych jest to ponadto funkcja parzysta.**

**Szum biały (kolorowy) gaussowski... Co to jest?**

# Korelacja dwóch sygnałów (deterministycznych)

$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \overline{y(\tau-t)} d\tau$$

**Druga wersja:**

$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(\tau+t) d\tau$$

**Uwaga: nie dzielimy przez czas!**

**Uwaga – korelacja to nie to samo co współczynnik korelacji  
(gdzie jest unormowanie!).**

Czyli autokorelacja dla sygnału  $x(t)$ :

$$R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \overline{x(\tau-t)} d\tau$$

**Uwaga: wyżej określona korelacja oraz autokorelacja to także sygnały.**

# Funkcja widmowej gęstości energii sygnału (deterministycznego)

$$R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \overline{x(\tau-t)} d\tau$$

$$E_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt$$

Ponieważ dla rzeczywistego sygnału  $x(t)$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot x(\tau-t) d\tau \xrightarrow{\text{CFT}} X(f) \cdot \overline{X(f)} = |X(f)|^2 = E_x(f)$$



AGH

# Przemienność korelacji (?)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \overline{y(\tau - t)} d\tau \xrightarrow{\text{CFT}} X(f) \cdot \overline{Y(f)}$$

**Przypomnijmy:**

$$\overline{x(t)} \leftrightarrow \overline{X(-f)}$$

Czyli w ogólności korelacja (w obu wersjach) nie jest przemienna!

Może być przemienna jedynie dla sygnałów rzeczywistych parzystych, ponieważ wtedy widmo Fouriera jest rzeczywiste.

W drugiej wersji:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(\tau)} \cdot y(\tau + t) d\tau \xrightarrow{\text{CFT}} \overline{X(f)} \cdot Y(f)$$

# Filtracja sygnału o zadanej widmowej gęstości mocy lub energii

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

$$\overline{Y(f)} = \overline{H(f)} \cdot \overline{X(f)}$$

czyli:

$$Y(f) \cdot \overline{Y(f)} = H(f) \cdot \overline{H(f)} \cdot X(f) \cdot \overline{X(f)}$$

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 \cdot |X(f)|^2$$

Zatem dla funkcji widmowej gęstości energii:

$$E_y(f) = |H(f)|^2 \cdot E_x(f)$$

Dla procesu losowego:

$$E_{\hat{y}}(f) = |H(f)|^2 \cdot E_{\hat{x}}(f)$$

Podobnie dla funkcji widmowej gęstości mocy:

$$P_y(f) = |H(f)|^2 \cdot P_x(f)$$

$$P_{\hat{y}}(f) = |H(f)|^2 \cdot P_{\hat{x}}(f)$$



AGH

# Modulacja amplitudy

**Modulacja dwuwstęgowa z falą nośną:**

$$y(t) = A \cdot [1 + m \cdot x(t)] \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0)$$

$$0 < m < 1$$

**Dla:**  $\varphi_0 = 0$

$$y(t) = A \cdot [1 + m \cdot x(t)] \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

**Zatem:**

$$y(t) = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + A \cdot m \cdot x(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

**... i w dziedzinie Fouriera:**

$$Y(f) = \frac{A}{2} \cdot (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)) + \frac{A \cdot m}{2} \cdot X(f - f_0) + \frac{A \cdot m}{2} \cdot X(f + f_0)$$



AGH

# Modulacja amplitudy

**Modulacja dwuwstęgowa bez fali nośnej:**

$$y(t) = A \cdot x(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0)$$

**Często przyjmuje się, że:**  $\varphi_0 = 0$

**wtedy:**

$$Y(f) = \frac{A}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \left( e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (f_0 - f) \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (f_0 + f) \cdot t} \right) dt$$

**Zatem ostatecznie w dziedzinie Fouriera:**

$$Y(f) = \frac{A}{2} \cdot X(f - f_0) + \frac{A}{2} \cdot X(f + f_0)$$

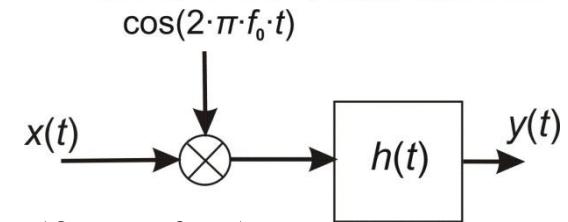
# Modulacja amplitudy

AGH

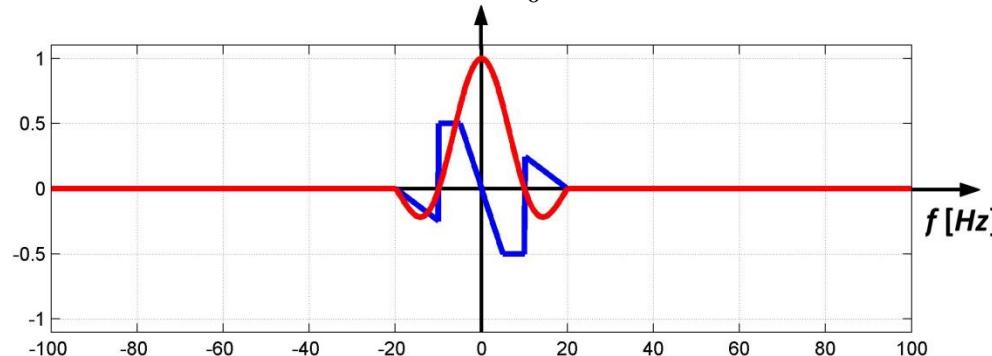
## Modulacja dwuwstęgowa bez fali nośnej

W tym przypadku przyjmujemy:  $h(t) = \delta(t)$   
 czyli:  $H(f) = 1$

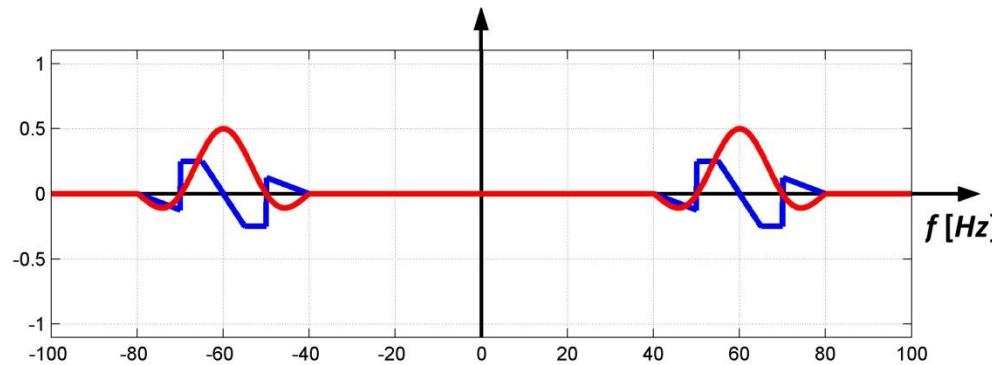
$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) * \delta(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$



Widmo  
 rzeczywiste  
 i urojone dla  $x(t)$



Widmo  
 rzeczywiste  
 i urojone dla  $y(t)$





# Modulacja amplitudy

AGH

## Modulacja jednowstęgowa

**W tym przypadku przyjmujemy (a):**

$$H(f) = 1 - \Pi\left(\frac{f}{2 \cdot f_0}\right)$$

**czyli:**

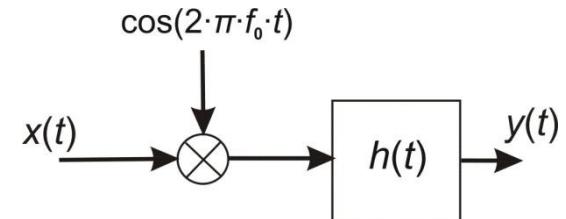
$$h(t) = \delta(t) - 2 \cdot f_0 \cdot \text{sinc}(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

**albo (b):**

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2 \cdot f_0}\right)$$

**i wtedy:**

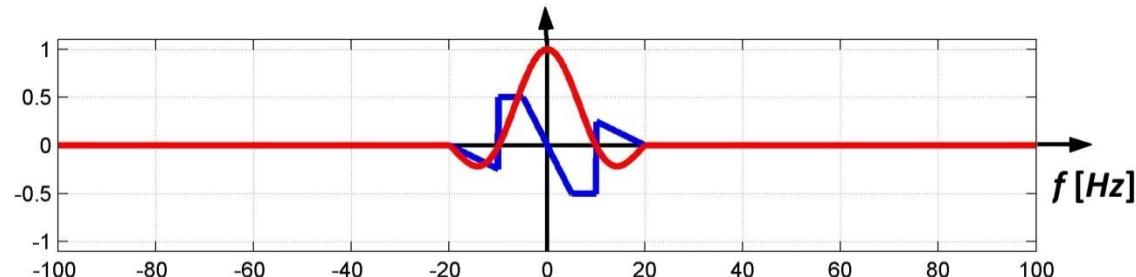
$$h(t) = 2 \cdot f_0 \cdot \text{sinc}(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$



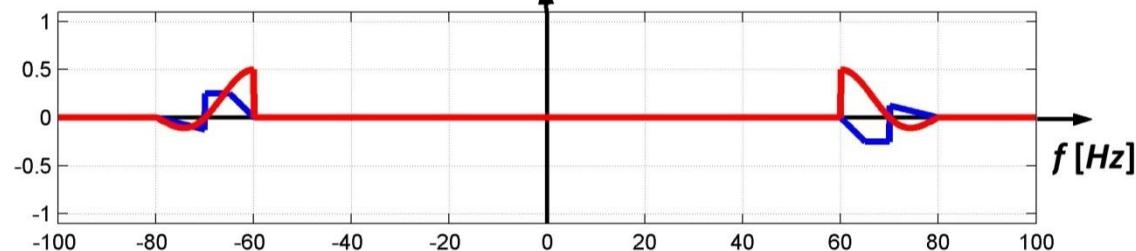
# Modulacja amplitudy

## Modulacja jednowstęgowa

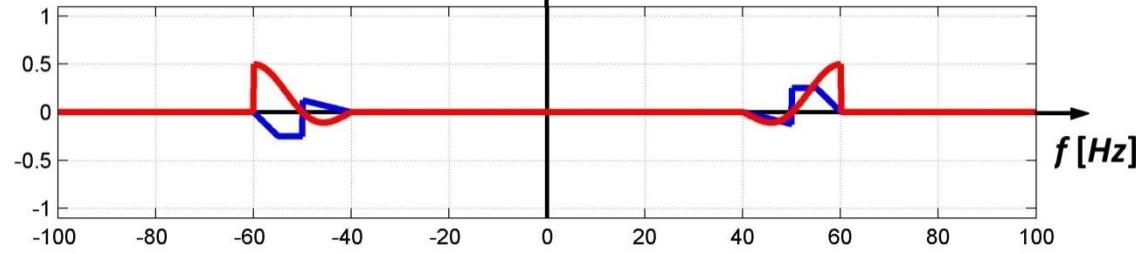
**Widmo rzeczywiste i urojone dla  $x(t)$**



**Widmo rzeczywiste i urojone dla  $y(t)$  - wariant (a)**



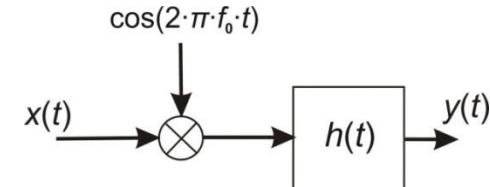
**Widmo rzeczywiste i urojone dla  $y(t)$  - wariant (b)**



# Modulacja amplitudy

## Modulacja jednowstęgowa

$$y(t) = h(t) * [x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)] = \text{podstawmy wariant (a)}$$



$$= [\delta(t) - 2 \cdot f_0 \cdot \text{sinc}(2\pi f_0 t)] * [x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)] =$$

$$= x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) - \left[ \frac{1}{2} \cdot x^H(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) + \frac{1}{2} \cdot x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \right]$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) - \frac{1}{2} \cdot x^H(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t)$$

**Gdyby przyjąć filtr (b):**

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2 \cdot f_0}\right)$$

$$X^H(f) = -j \cdot \text{sgn}(f) \cdot X(f)$$

**to otrzymalibyśmy:**

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) + \frac{1}{2} \cdot x^H(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t)$$



AGH

# Modulacja fazy

**Sygnał zmodulowany:**

$$y(t) = \cos(\varphi(t))$$

$$y(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0 + x(t) \cdot P)$$
$$P \in (0, 2 \cdot \pi)$$

**Modulacja ta jest nieliniowa!**

**Przykładowo dla sygnału dwustanowego (ang. PSK):**

*Phase Shift Keying*

$$x(t) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \cdot \Pi\left(\frac{t - n \cdot T}{T}\right)$$

$$a_n \in \{0,1\}$$



# Modulacja fazy

AGH

**Przykład PSK:**

dla  $P=\pi$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \Pi\left(\frac{t - n \cdot T}{T}\right)$$
$$a_n \in \{0,1\}$$

**Metoda bezpośrednia:**

$$y_0(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0)$$

**Czyli jak to zapisać?**

$$y_1(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0 + \pi)$$

**Metoda różnicowa:**

$$x_d(t) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n \cdot \Pi\left(\frac{t - n \cdot T}{T}\right)$$

$$b_n \in \{0,1\}$$

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } a_n \neq a_{n-1} \\ 0 & \text{dla } a_n = a_{n-1} \end{cases}$$

**Często przyjmuje się:**

$$\varphi_0 = 0$$



AGH

# Modulacja fazy

**Przykład PSK:**

**Rozważmy następujący sygnał:**

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot \Pi\left(\frac{t - n \cdot T - 1/2}{T}\right)$$
$$a_n \in \{0,1\}$$

**Zakładając dodatkowo, że:**

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \geq 0 \\ 0 & \text{dla } n < 0 \end{cases}$$

**W takim przypadku sygnał zmodulowany może być opisany następująco:**

$$y(t) = u(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \pi) + u(-t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$



# Modulacja fazy

AGH

Kontynuacja  
przykładu:

$$y(t) = u(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \pi) + u(-t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

$$\cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \pi) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \left(t + \frac{\pi}{2 \cdot \pi \cdot f_0}\right)\right) \Rightarrow t_0 = -\frac{\pi}{2 \cdot \pi \cdot f_0}$$

$$Y(f) = U(f) * \left[ \frac{1}{2} \cdot (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)) \cdot e^{+j \cdot \pi} \right] + U(-f) * \left[ \frac{1}{2} \cdot (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)) \right]$$

$$U(f) = \frac{1}{2} \cdot \delta(f) - j \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f}$$

$$e^{+j \cdot \pi} = e^{-j \cdot \pi} = -1$$

$$\begin{aligned} Y(f) &= -\frac{1}{4} \cdot (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)) + j \cdot \left( \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot (f + f_0)} + \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot (f - f_0)} \right) + \\ &+ \frac{1}{4} \cdot (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)) + j \cdot \left( \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot (f + f_0)} + \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot (f - f_0)} \right) = \\ &= j \cdot \left( \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot (f + f_0)} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot (f - f_0)} \right) \end{aligned}$$



AGH

# Modulacja fazy

Kontynuacja przykładu:

(inny sposób wyliczenia widma)

$$y(t) = u(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \pi) + u(-t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

$$y(t) = -\text{sgn}(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

$$Y(f) = -\left[ -j \cdot \frac{1}{\pi \cdot f} \right] * \left[ \frac{1}{2} \cdot (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)) \right] = j \cdot \left[ \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot (f + f_0)} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot (f - f_0)} \right]$$

Jak widać, w widmie nie ma częstotliwości nośnej!



# Modulacja fazy

AGH

**Jeszcze jedno spojrzenie na PSK z dwustanowym sygnałem prostokątnym:**

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot \Pi\left(\frac{t-n \cdot T}{T}\right)$$
$$a_n \in \{0,1\}$$

**Oznaczmy przez  $\mathbf{A}$  zbiór indeksów  $n$ , dla których  $a_n=1$ , wtedy możemy wprowadzić dwa sygnały pomocnicze:**

$$x_1(t) = \sum_{k \in \mathbf{A}} \Pi\left(\frac{t-k \cdot T}{T}\right) = x(t)$$

$$x_2(t) = \sum_{k \notin \mathbf{A}} \Pi\left(\frac{t-k \cdot T}{T}\right) = 1 - x(t)$$

**Zatem sygnał zmodulowany:**

$$y(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \pi) \cdot x(t) + \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \cdot (1 - x(t))$$

**... można go zatem zinterpretować jako sumę dwóch sygnałów, których nośne różnią się fazą o  $\pi$ , zmodulowanych amplitudowo:**

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

**Ta interpretacja umożliwia wyciąganie wniosków, co do widma sygnału zmodulowanego PSK.**



AGH

# Modulacja częstotliwości

**Sygnał zmodulowany:**

$$y(t) = \cos(\varphi(t))$$

$$2 \cdot \pi \cdot f(t) = \frac{d}{dt} \varphi(t) = 2 \cdot \pi \cdot f_0 + 2 \cdot \pi \cdot K \cdot x(t) = 2 \cdot \pi \cdot (f_0 + K \cdot x(t))$$

$$y(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot (f_0 \cdot t + K \cdot \int_0^t x(\tau) d\tau) + \varphi_0\right)$$

$$\boxed{\varphi_0 = 0}$$

$$f(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{d}{dt} \varphi(t) = f_0 + K \cdot x(t)$$

**Modulacja ta jest nieliniowa!**



AGH

# Modulacja częstotliwości

**Przykład (ang. FSK):**

*Frequency Shift Keying*

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot \Pi\left(\frac{t - n \cdot T}{T}\right)$$

$$a_n = \pm 1$$

**Dla  $a_n=+1$ ,  $K=\Delta f$  (dewiacja częstotliwości):**

$$y_{+1}(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot (f_0 + \Delta f) \cdot t)$$

**Dla  $a_n=-1$ ,  $K=\Delta f$ :**

$$y_{-1}(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot (f_0 - \Delta f) \cdot t)$$

**Widmo lokalne zawiera tylko te dwie częstotliwości:**

$$f_G = f_0 + \Delta f$$

$$f_D = f_0 - \Delta f$$



# Modulacja częstotliwości

AGH

**Jeszcze jedno spojrzenie na FSK z dwustanowym sygnałem prostokątnym:**

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot \Pi\left(\frac{t-n \cdot T}{T}\right)$$
$$a_n \in \{-1,1\}$$

**Oznaczmy przez A zbiór indeksów  $n$ , dla których  $a_n=1$  oraz  
prze B zbiór indeksów, dla których  $a_n=-1$ , wtedy:**

$$x_1(t) = \sum_{k \in A} \Pi\left(\frac{t-k \cdot T}{T}\right)$$

$$x_2(t) = \sum_{k \in B} \Pi\left(\frac{t-k \cdot T}{T}\right)$$

**Zatem sygnał zmodulowany:**

$$y(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot (f_0 + \Delta f) \cdot t) \cdot x_1(t) + \cos(2 \cdot \pi \cdot (f_0 - \Delta f) \cdot t) \cdot x_2(t)$$

**... można go zatem zinterpretować jako sumę dwóch sygnałów zmodulowanych amplitudowo:**

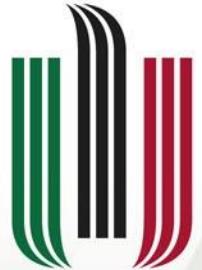
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

**Ta interpretacja umożliwia wyciąganie wniosków, co do widma sygnału zmodulowanego FSK.**



AGH

*Zapraszam na ćwiczenia ...  
lub do laboratorium...*



**AGH**

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

# **Teoria sygnałów**

## **Wykład 10**

**Dr inż. Przemysław Korohoda  
Katedra Elektroniki, AGH, Kraków**

[home.agh.edu.pl/~korohoda/rok\\_2022\\_2023\\_zima/TS\\_EL\\_2](http://home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2)

**UPEL: TS 2022**

# Plan wykładu

- 1. Twierdzenie o próbkowaniu (i odtwarzaniu)**
- 2. Wyprowadzenie.**
- 3. Przykłady.**
- 4. Transformacja Fouriera z czasem dyskretnym.**



AGH

# Twierdzenie o próbkowaniu

Założenia:

$$x(t) \quad \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad X(f)$$

$$X(f) = 0 \quad \text{dla} \quad |f| \geq \frac{f_p}{2}$$

Teza twierdzenia:

$$\Delta t = \frac{1}{f_p}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \operatorname{sinc}(\pi \cdot f_p \cdot (t - n \cdot \Delta t))$$

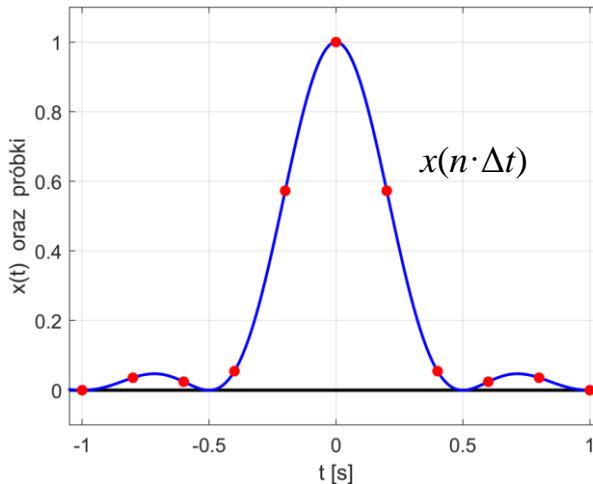
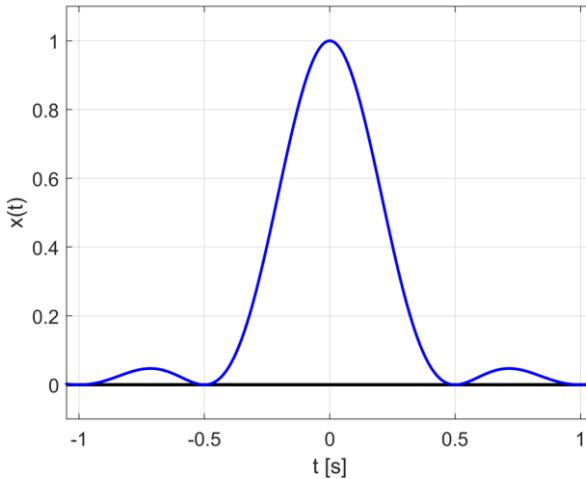
# Pierwszy przykład próbkowania

AGH

$$x(t) = \text{sinc}^2(\pi \cdot 2 \cdot t)$$

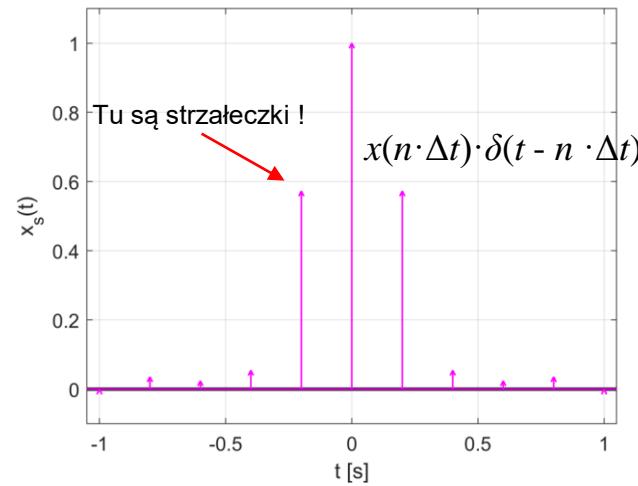
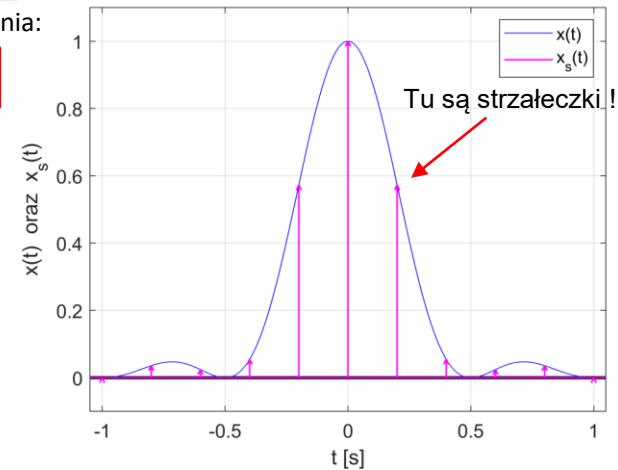
$$\Delta t = 0,2 \text{ s}$$

$$f_p = 5 \text{ Hz}$$



Uwaga na oznaczenia:

$$x_s(t) = x_p(t)$$



# Wyprowadzenie twierdzenia, czyli dowód „klasyczny”

**1. Próbkujemy sygnał pseudo-funkcją grzebieniową:**

$$x_p(t) = x(t) \cdot g_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - n \cdot \Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \delta(t - n \cdot \Delta t)$$

**2. W dziedzinie Fouriera odpowiada to zapisowi:**

$$X_p(f) = X(f) * G_{\Delta t}(f) = X(f) * \left[ \frac{1}{\Delta t} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n \cdot f_p) \right] = \boxed{\frac{1}{\Delta t} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n \cdot f_p)}$$

**3. Przyjmujemy idealny filtr dolnoprzepustowy:**

$$H(f) = \Delta t \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_p}\right)$$

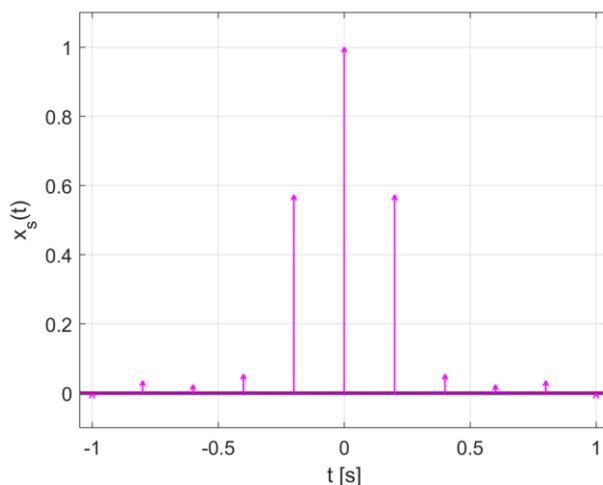
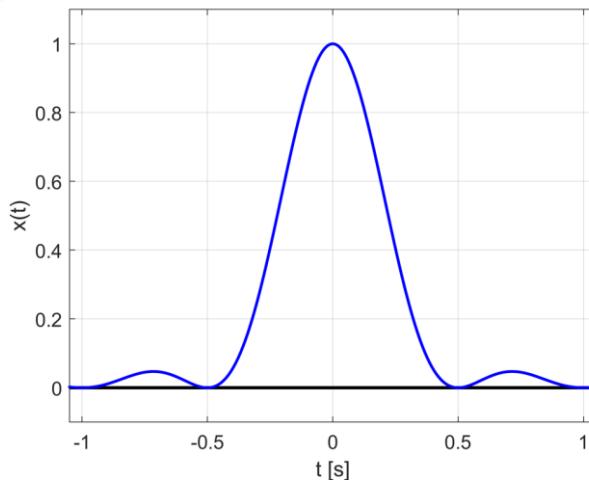
# Pierwszy przykład próbkowania (cd.)

$$x(t) = \text{sinc}^2(\pi \cdot 2 \cdot t)$$

$$\Delta t = 0,2 \text{ s}$$

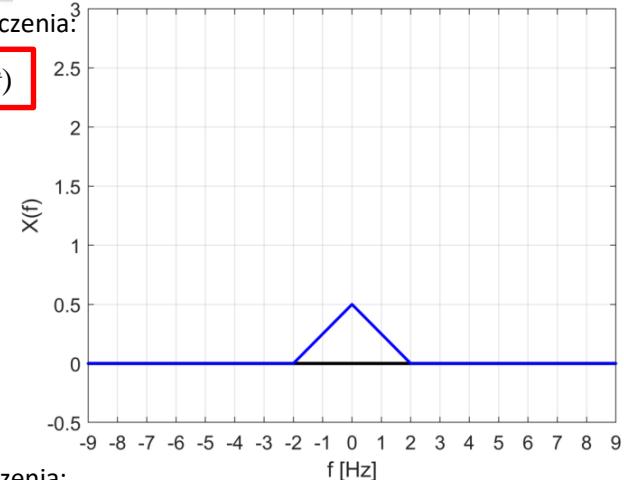
$$f_p = 5 \text{ Hz}$$

$$X(f) = (1/2) \cdot \Lambda(f/2)$$



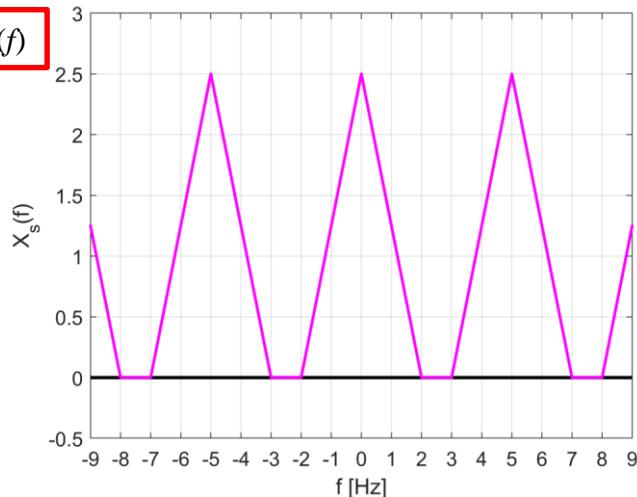
Uwaga na oznaczenia:

$x_s(t) = x_p(t)$



Uwaga na oznaczenia:

$X_s(f) = X_p(f)$



$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f_p \cdot (t - n \cdot \Delta t))$$

## Pierwszy przykład - odtwarzanie

$$X_s(f) = X_p(f)$$

$$x(t) = \text{sinc}^2(\pi \cdot 2 \cdot t)$$

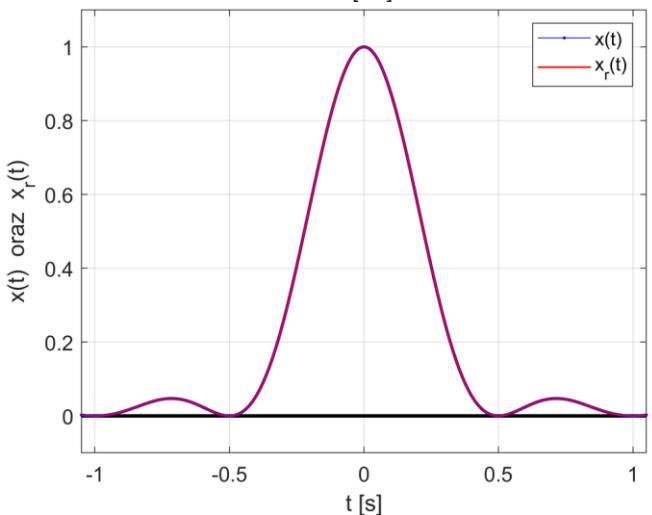
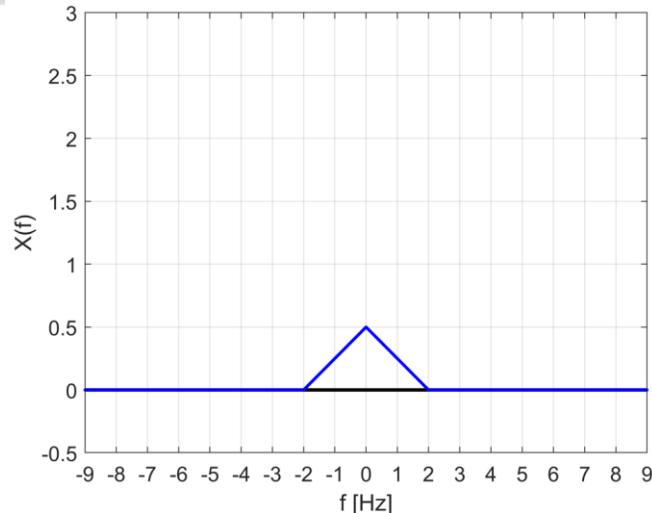
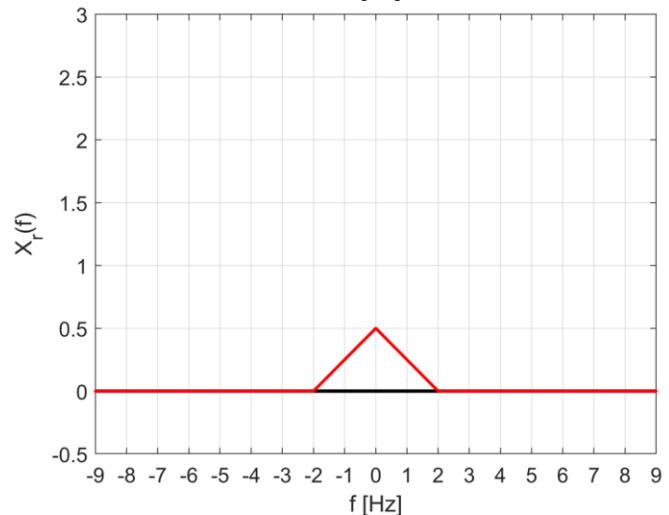
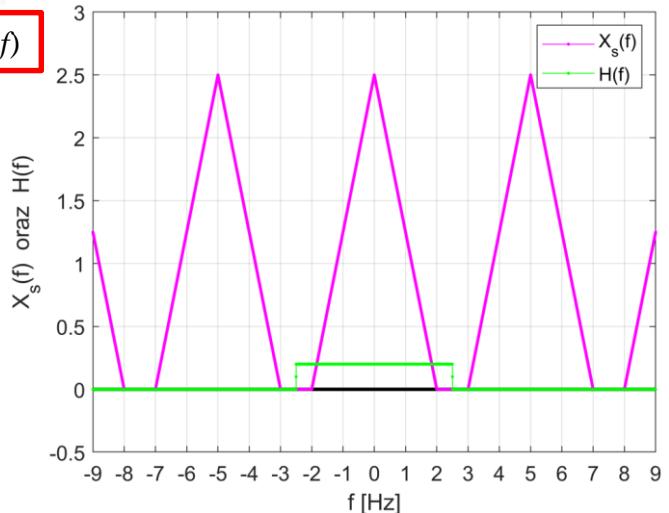
$$\Delta t = 0,2 \text{ s}$$

$$f_p = 5 \text{ Hz}$$

$$X(f) = (1/2) \cdot \Lambda(f/2)$$

$$H(f) = (1/5) \cdot \Pi(f/5)$$

$$f_g = 2,5 \text{ Hz}$$



# **Wyprowadzenie twierdzenia, czyli dowód „klasyczny” - odtwarzanie**

**4. Jeżeli:**

$$X(f) = 0 \quad \text{dla} \quad |f| \geq \frac{f_p}{2}$$

**to:**

$$X(f) = X_p(f) \cdot H(f)$$

**5. Pamiętając, że:**

$$h(t) = \text{sinc}(\pi \cdot f_p \cdot t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} H(f) = \Delta t \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_p}\right) = \frac{1}{f_p} \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_p}\right)$$

**otrzymujemy wzór odtwarzający:**

$$\begin{aligned} x_r(t) &= x_p(t) * h(t) = x_p(t) * \text{sinc}(\pi \cdot f_p \cdot t) = \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \delta(t - n \cdot \Delta t) \right] * \text{sinc}(\pi \cdot f_p \cdot t) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f_p \cdot (t - n \cdot \Delta t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \text{sinc}\left(\pi \cdot \frac{t - n \cdot \Delta t}{\Delta t}\right) \end{aligned}$$

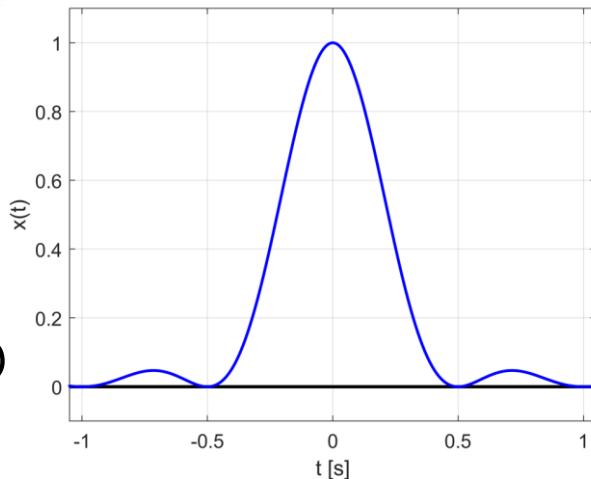
# Drugi przykład próbkowania - efekt aliasingu

$$x(t) = \text{sinc}^2(\pi \cdot 2 \cdot t)$$

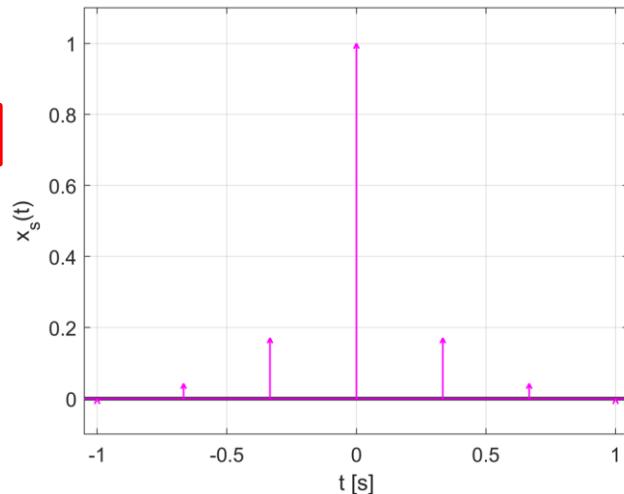
$$\Delta t = 1/3 \text{ s}$$

$$f_p = 3 \text{ Hz}$$

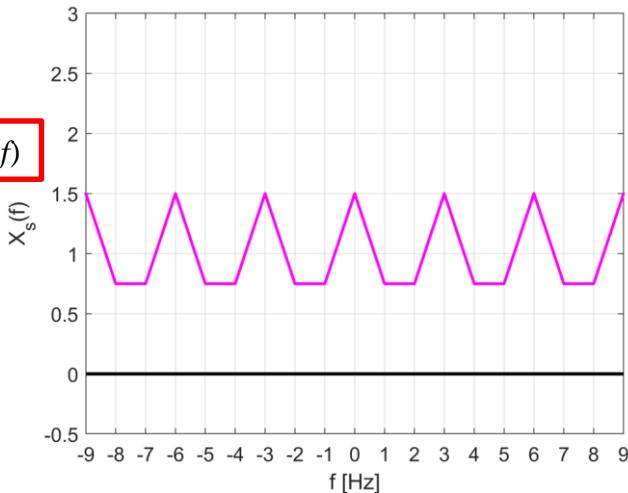
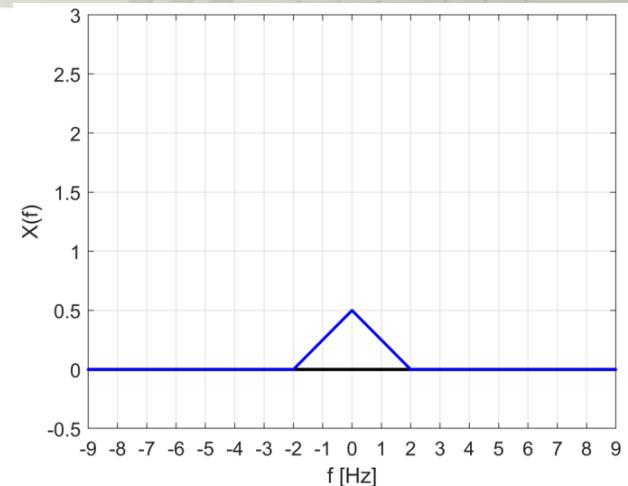
$$X(f) = (1/2) \cdot \Lambda(f/2)$$



$$x_s(t) = x_p(t)$$



$$X_s(f) = X_p(f)$$



$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f_p \cdot (t - n \cdot \Delta t))$$

## Drugi przykład - odtwarzanie

$$X_s(f) = X_p(f)$$

$$x(t) = \text{sinc}^2(\pi \cdot 2 \cdot t)$$

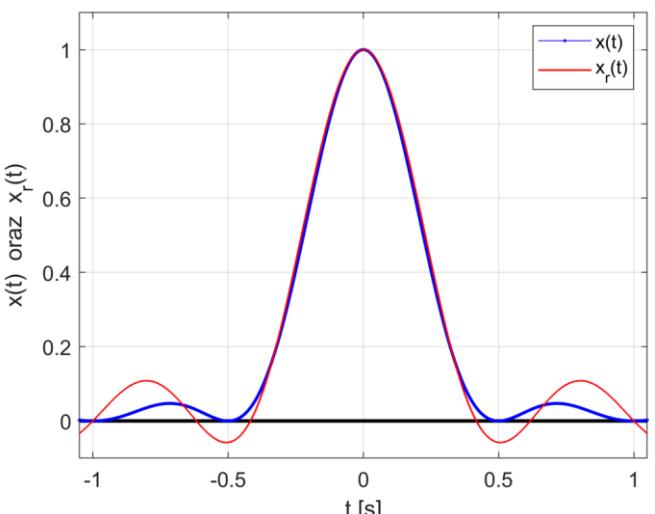
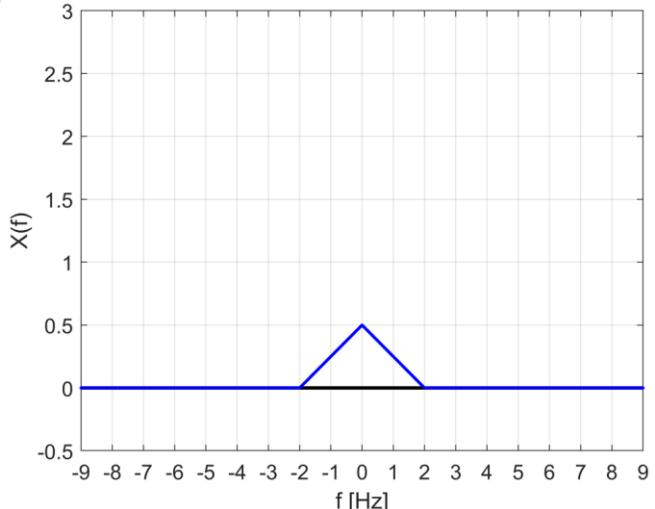
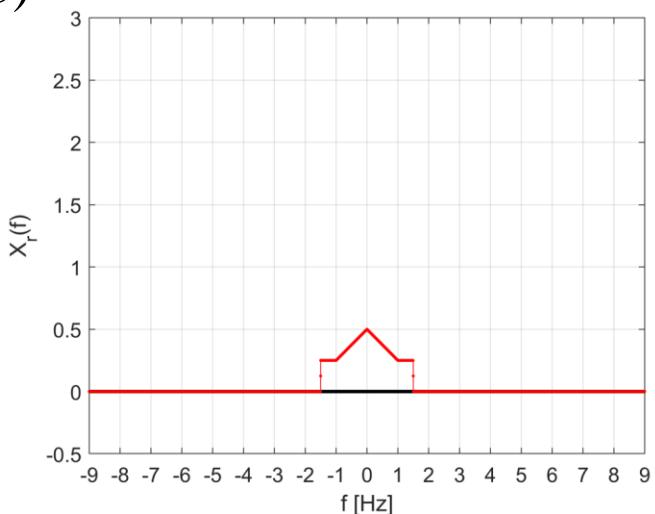
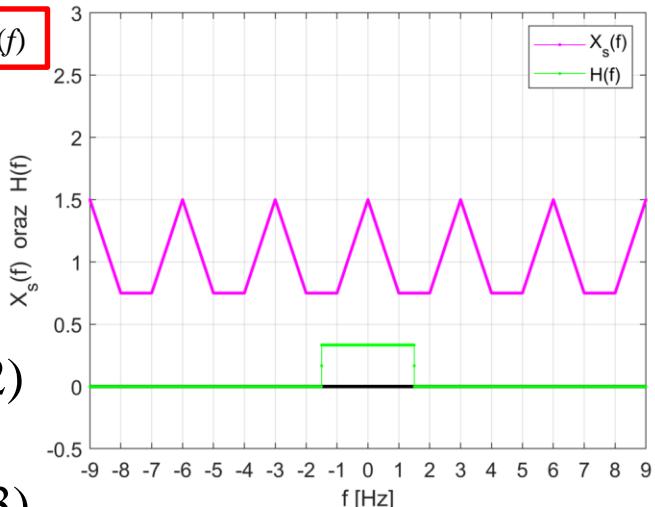
$$\Delta t = 1/3 \text{ s}$$

$$f_p = 3 \text{ Hz}$$

$$X(f) = (1/2) \cdot \Lambda(f/2)$$

$$H(f) = (1/3) \cdot \Pi(f/3)$$

$$f_g = 1,5 \text{ Hz}$$



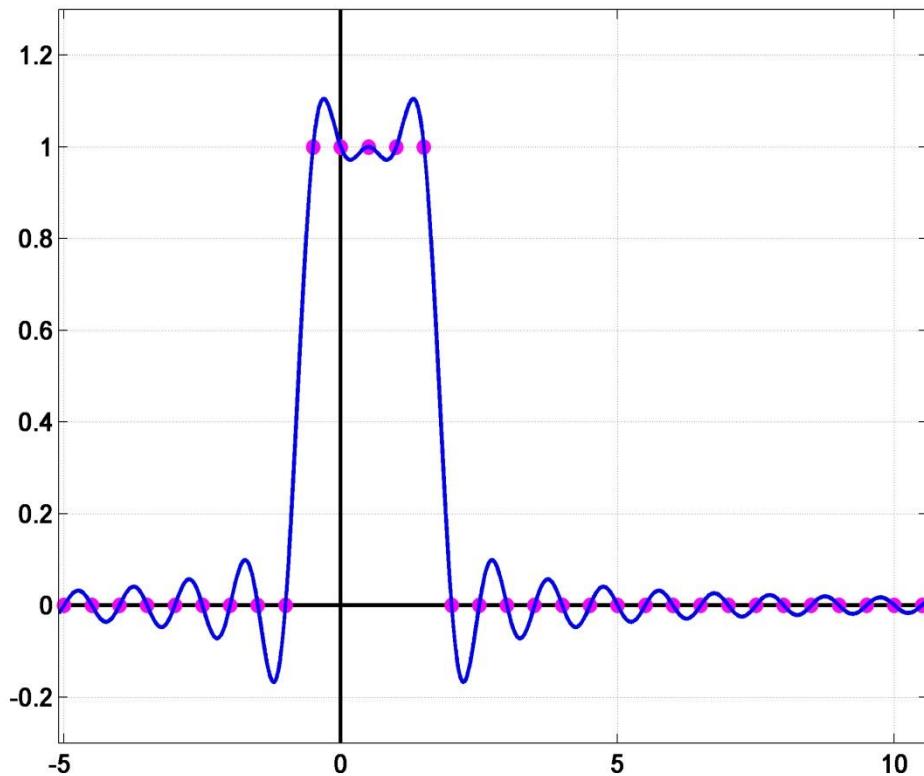
Filtr antyaliasingowy

# Twierdzenie o próbkowaniu - trzeci przykład

**Przykład odtwarzania sygnału:**

$$X(f) = X_p(f) \cdot \Pi\left(\frac{1}{f_p}\right) \cdot \frac{1}{f_p}$$

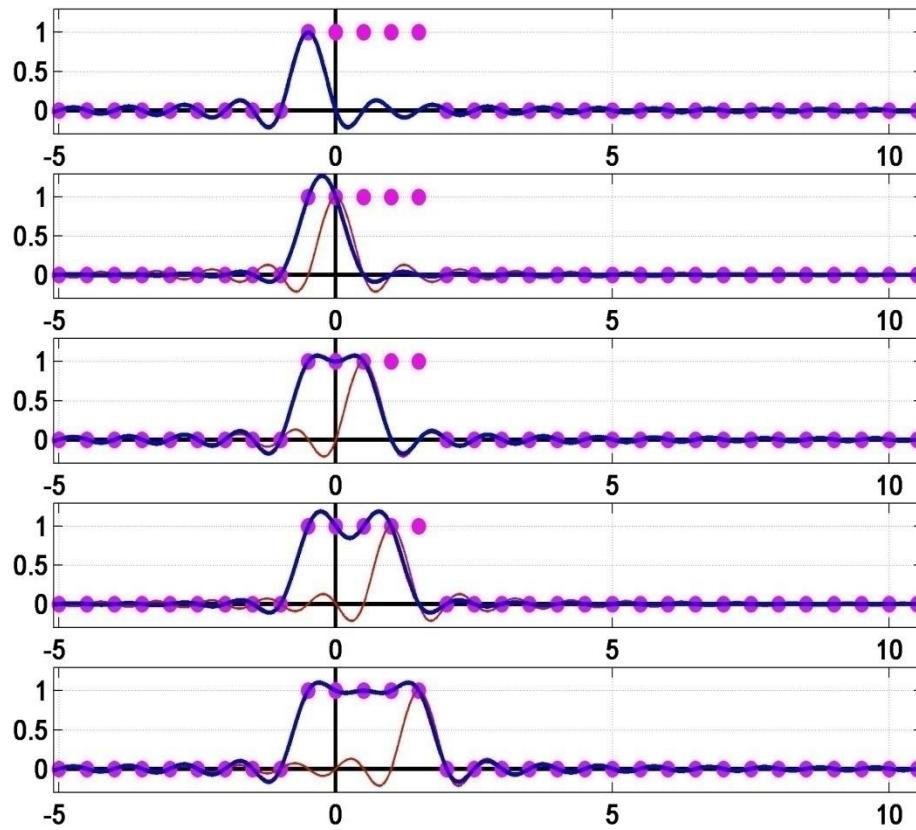
$$\Delta t = \frac{1}{f_p}$$



$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f_p \cdot (t - n \cdot \Delta t))$$

# Twierdzenie o próbkowaniu - trzeci przykład

**Przykład odtwarzania sygnału:**



$$X(f) = X_p(f) \cdot \Pi\left(\frac{1}{f_p}\right) \cdot \frac{1}{f_p}$$

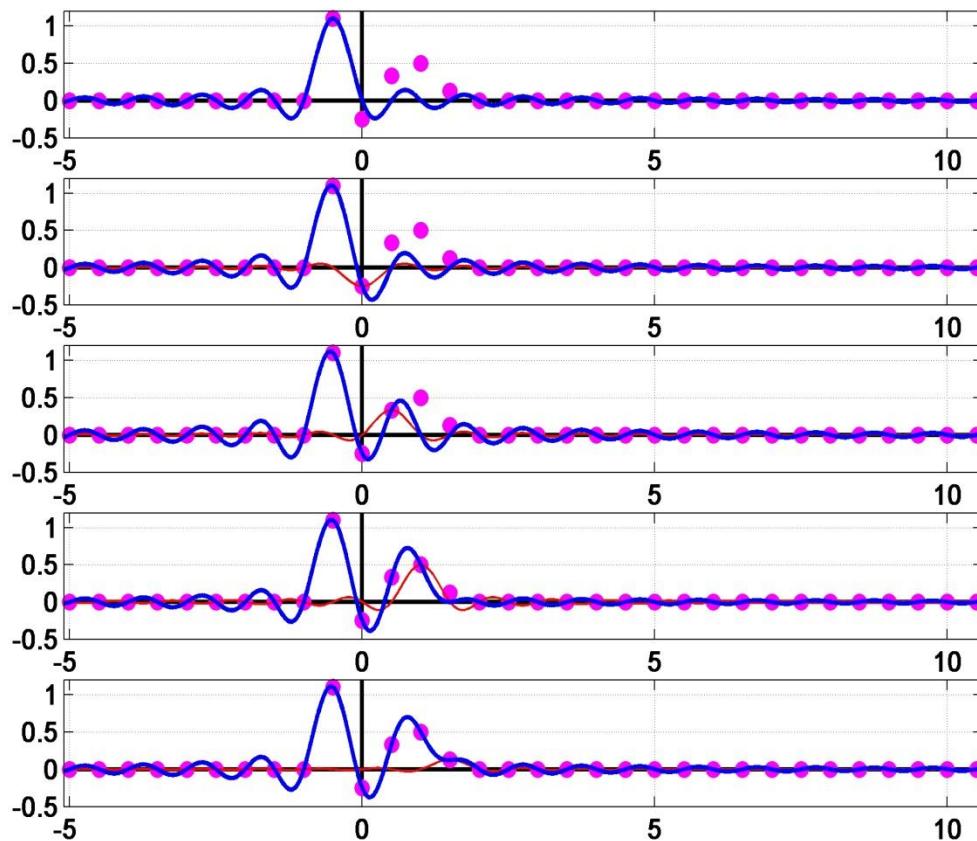
$$\Delta t = \frac{1}{f_p}$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f_p \cdot (t - n \cdot \Delta t))$$

# Twierdzenie o próbkowaniu

## - czwarty przykład

**Przykład odtwarzania sygnału:**



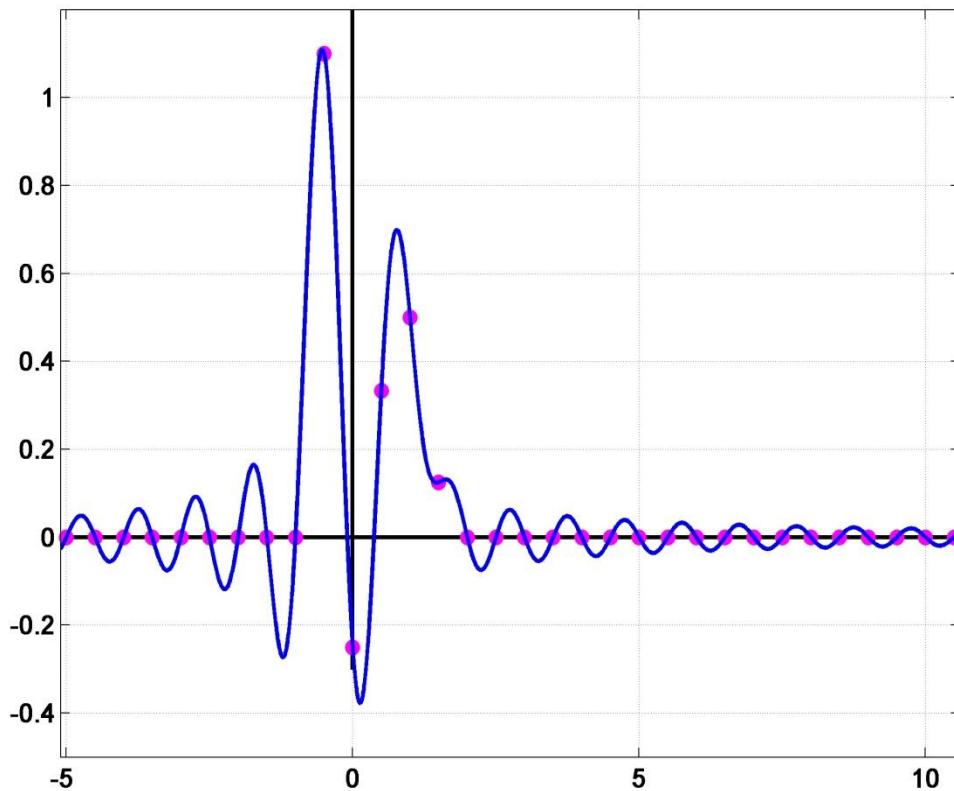
$$X(f) = X_p(f) \cdot \Pi\left(\frac{1}{f_p}\right) \cdot \frac{1}{f_p}$$

$$\Delta t = \frac{1}{f_p}$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f_p \cdot (t - n \cdot \Delta t))$$

# Twierdzenie o próbkowaniu - czwarty przykład

Przykład odtwarzania sygnału:



$$X(f) = X_p(f) \cdot \Pi\left(\frac{1}{f_p}\right) \cdot \frac{1}{f_p}$$

$$\Delta t = \frac{1}{f_p}$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f_p \cdot (t - n \cdot \Delta t))$$

# Twierdzenie o próbkowaniu - piąty przykład

**Przykład aliasingu**

$$\begin{aligned}f_0 &= 880 \text{Hz} \\f_p &= 800 \text{Hz}\end{aligned}$$

$$\varphi_0 = \pi/3$$

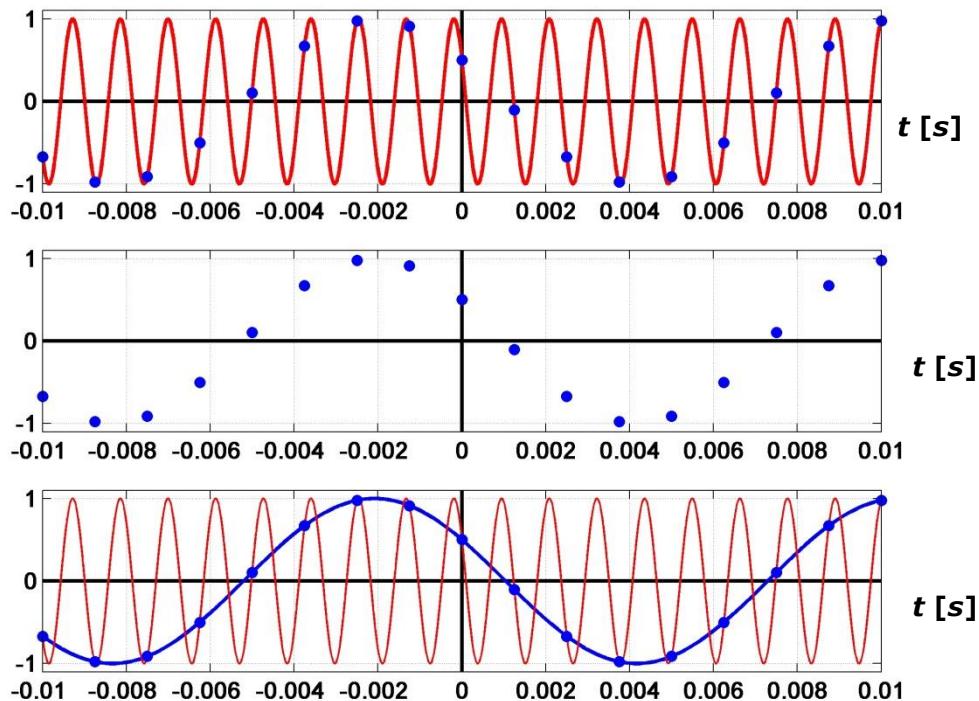
**Sygnał i próbki:**

**Próbki:**

**Odtworzenie z próbek:**

$$f_1 = 80 \text{Hz}$$

$$x_0(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0)$$

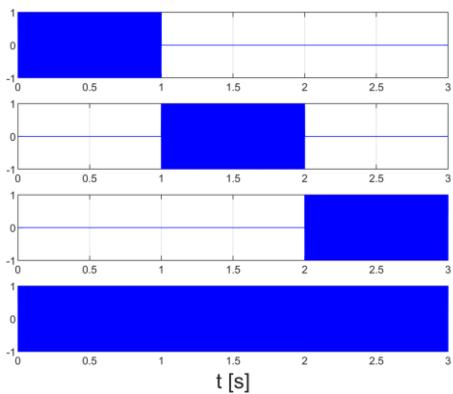


$$x_1(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t + \varphi_0)$$

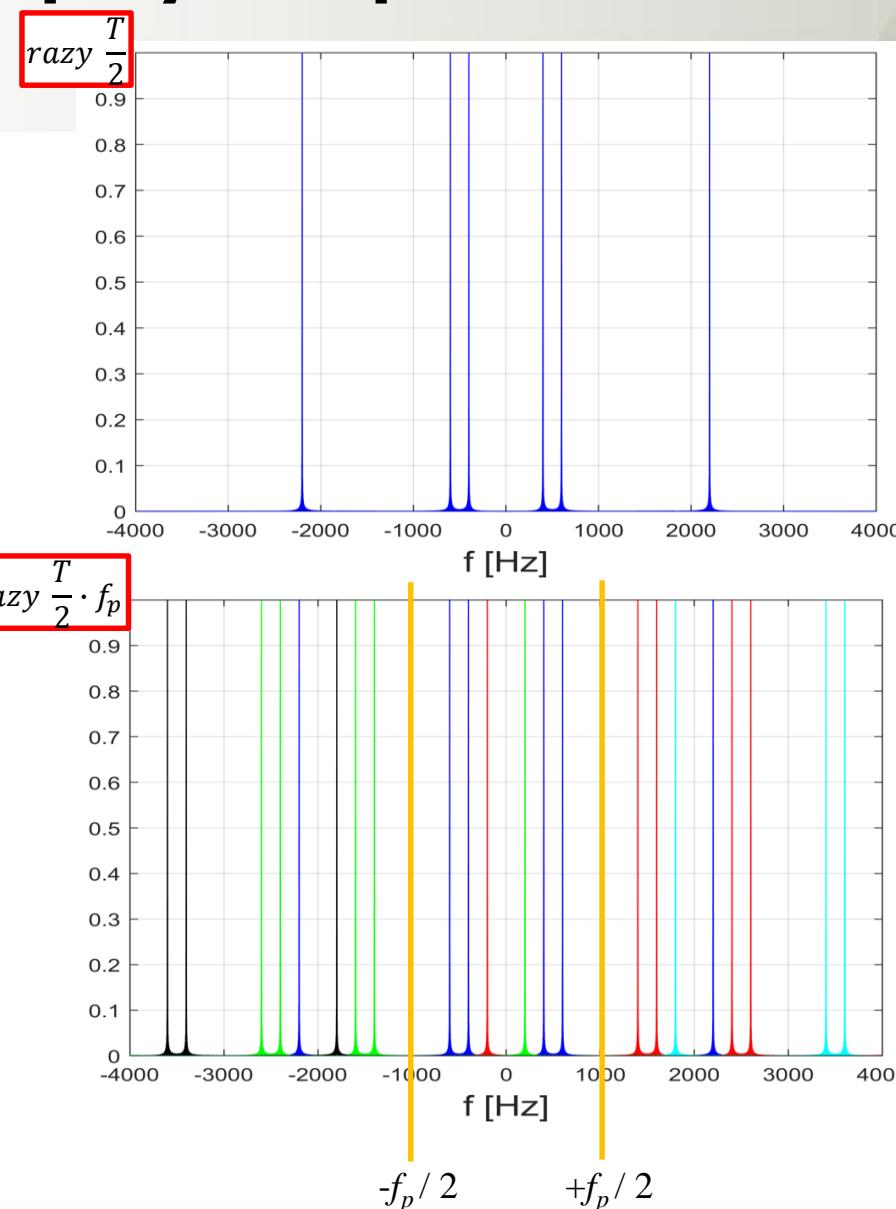
**Warto pomyśleć nad interpretacją w dziedzinie widma Fouriera.**

# Inny przykład próbkowania z aliasingiem

$$f_p = 2000 \text{ Hz}$$



$$\begin{aligned} f_1 &= 400 \text{ Hz} \\ f_2 &= 2200 \text{ Hz} \\ f_3 &= 600 \text{ Hz} \end{aligned}$$



**Efekt aliasingu**

$$\begin{aligned} f_1 &= 400 \text{ Hz} \\ f_2 &= 200 \text{ Hz} \\ f_3 &= 600 \text{ Hz} \end{aligned}$$



AGH

# Próbkowanie krytyczne

**Jeżeli sygnał zawiera kosinusoidę o częstotliwości  $f_p/2$**

$$|X(f)| > 0 \quad \text{dla} \quad |f| = \frac{f_p}{2}$$

$$f_p = 2 \cdot f_0$$

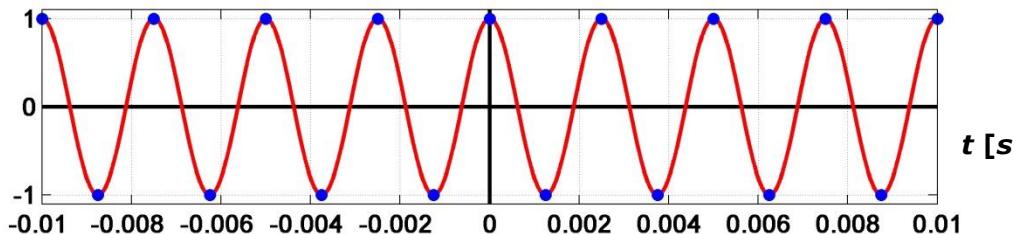
**to mamy do czynienia z próbkowaniem krytycznym i wynik zależy od fazy sygnału kosinusoidalnego o tej częstotliwości.**

# Próbkowanie krytyczne - pierwszy przykład

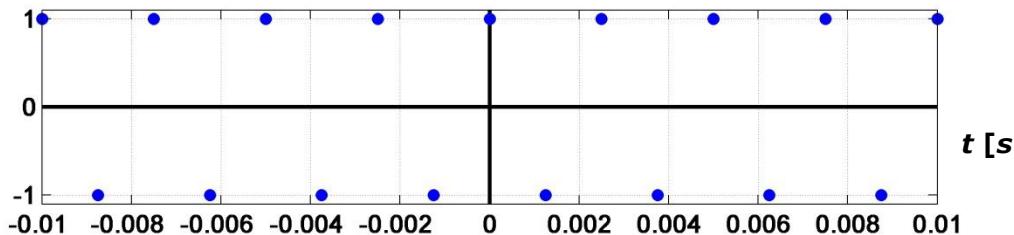
$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

$$f_p = 2 \cdot f_0$$

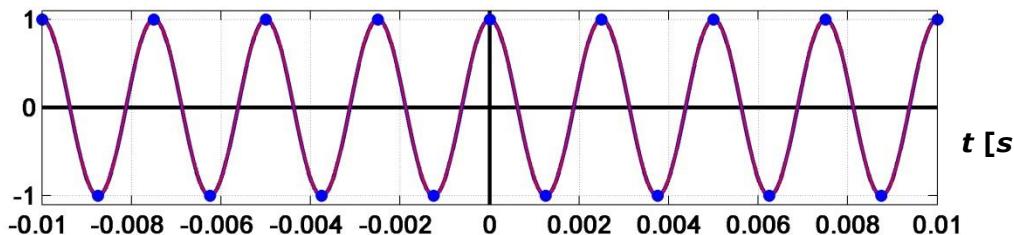
Sygnal  
i próbki:



Próbki:



Odtworzenie  
z próbek:



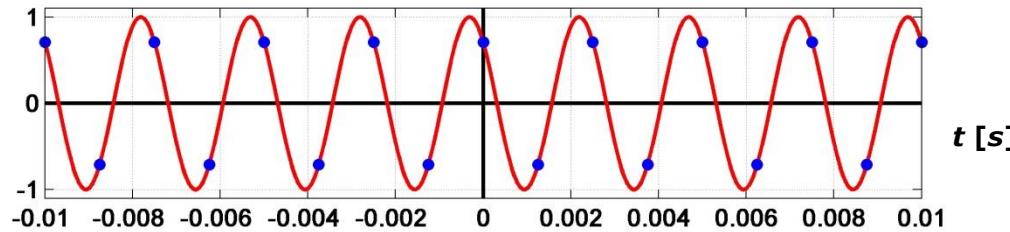
Warto pomyśleć nad interpretacją w dziedzinie widma Fouriera.

# Próbkowanie krytyczne - drugi przykład

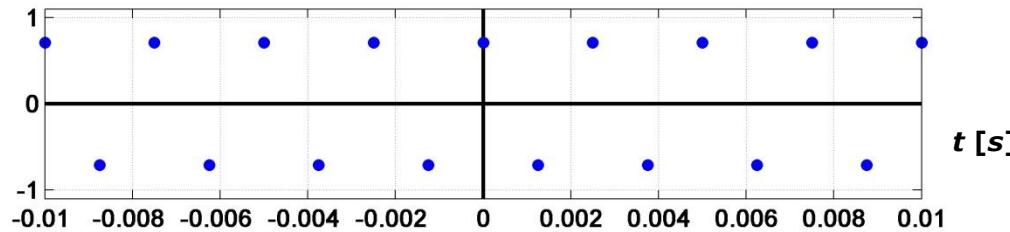
$$x(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f_p = 2 \cdot f_0$$

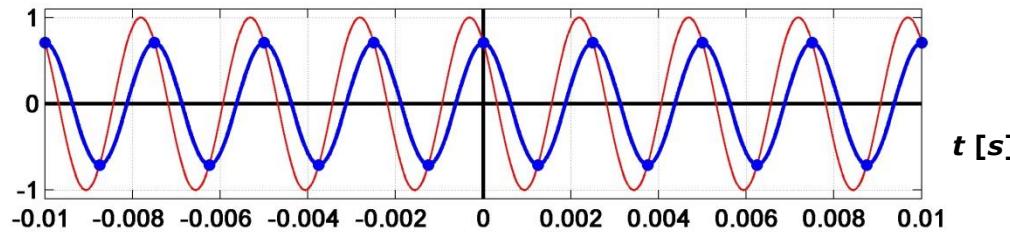
Sygnal  
i próbki:



Próbki:



Odtworzenie  
z próbek:



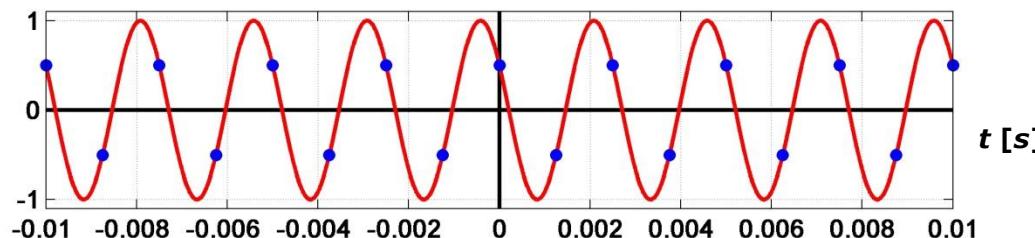
Warto pomyśleć nad interpretacją w dziedzinie widma Fouriera.

# Próbkowanie krytyczne - trzeci przykład

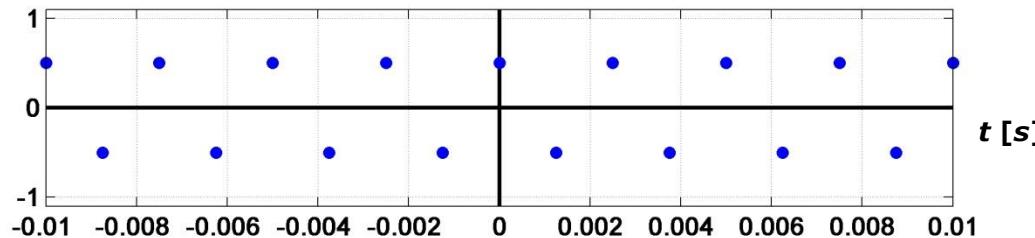
$$x(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$f_p = 2 \cdot f_0$$

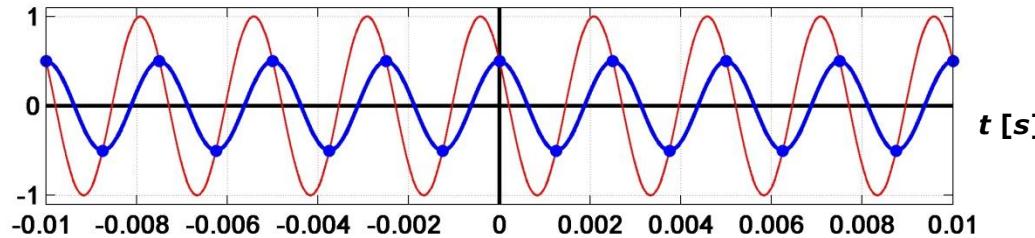
Sygnał  
i próbki:



Próbki:



Odtworzenie  
z próbek:



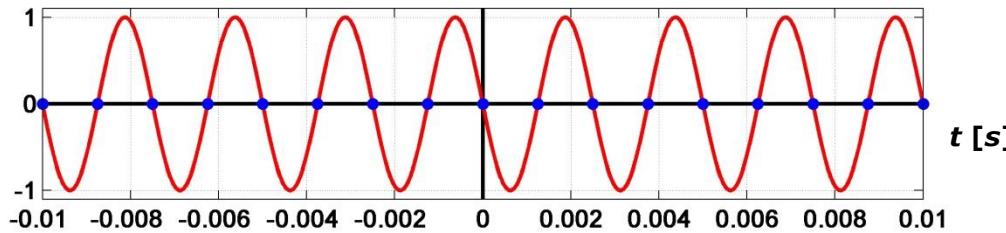
Warto pomyśleć nad interpretacją w dziedzinie widma Fouriera.

# Próbkowanie krytyczne – czwarty przykład

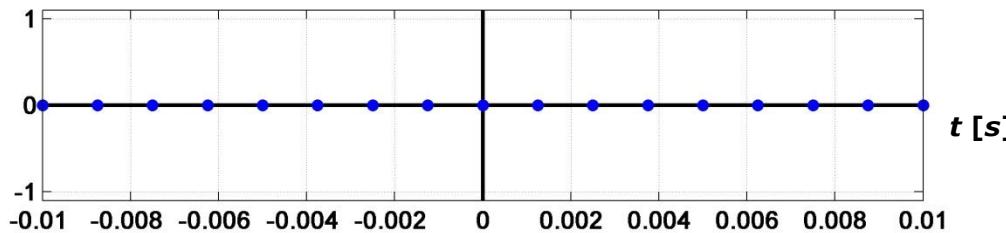
$$x(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

$$f_p = 2 \cdot f_0$$

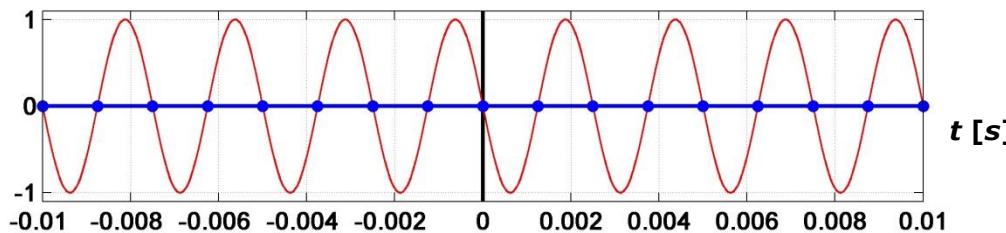
Sygnal  
i próbki:



Próbki:

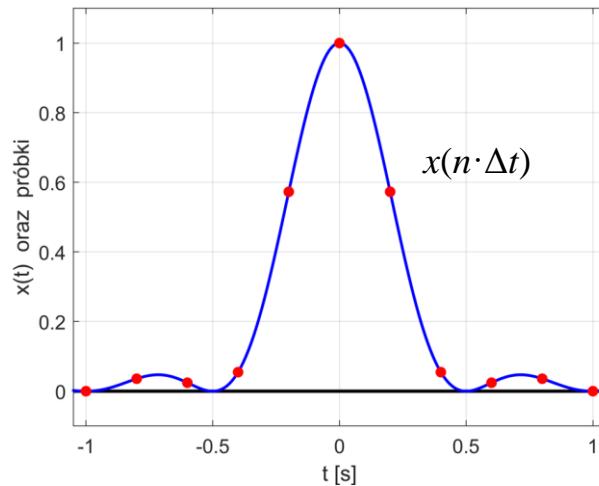


Odtworzenie  
z próbek:

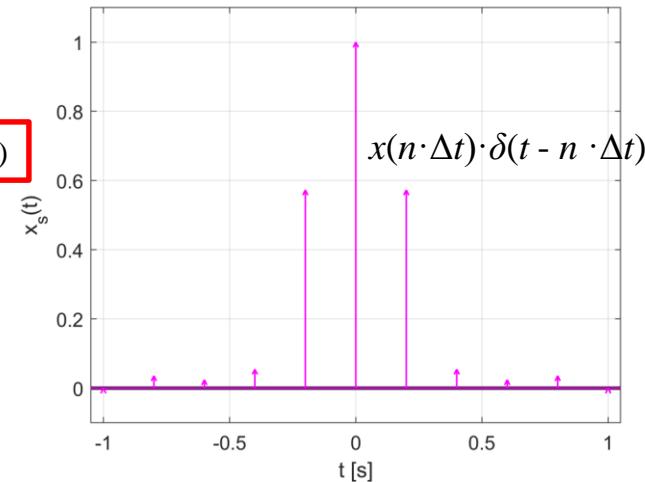


Warto pomyśleć nad interpretacją w dziedzinie widma Fouriera.

**A co by się stało, gdyby jednak próbować przez odczytanie wartości w punktach, a nie przez pomnożenie sygnału przez pseudo-funkcję grzebieniową?**



$$x_s(t) = x_p(t)$$



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f_p \cdot (t - n \cdot \Delta t))$$

$$x[n] = x(n \cdot \Delta t)$$



AGH

# Transformacja Fouriera z czasem dyskretnym – wyprowadzenie z CFT

CFT:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt$$

Dla sygnału próbkowanego sygnałem grzebieniowym:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \delta(t - n \cdot \Delta t)$$

$$X_p(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \delta(t - n \cdot \Delta t) \right] e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt$$

$$x[n] = x(n \cdot \Delta t)$$

Przekształcenia:

$$X_p(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ x[n] \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt \right]$$

$$X_p(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot n \cdot \Delta t}$$

ponieważ:

$$\nu = \frac{f}{f_p} = f \cdot \Delta t$$

otrzymujemy:

$$X_p(f) \Big|_{f=v \cdot f_p} = X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot n}$$

czyli DTFT



**AGH**

# Dyskusja o numerycznym wyliczaniu CFT

**CFT:**

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt$$

```
.....  
dt=0.001;  
t=-10:dt:10;  
x= ??? w kolejnych punktach t;  
f=-100:0.1:100; Nf=length(f);  
for k=1:Nf  
    X(k)=sum(x.*exp(-j*2*pi*f(k)*t))*dt;  
end  
.....
```

**DTFT:**

$$X_p(f) \Big|_{f=v \cdot f_p} = X(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot n}$$

$$X(f_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_k \cdot t} dt$$

$$X(f_k) \cong \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_k \cdot (n \cdot \Delta t)} \cdot \Delta t$$

$$X(f_k) \cong \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (f_k \cdot \Delta t) \cdot n} \right] \cdot \Delta t$$

$x[n]$

$v_k$

$$X(f_k) \approx X(v_k) \cdot \Delta t = X_p(f_k) \cdot \Delta t$$



AGH

# Transformacja Fouriera z czasem dyskretnym

$$\exp(x) = e^x$$

**ang. Discrete-Time Fourier Transform (D-TFT)**

$$v = \frac{f}{f_p}$$

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot n) \quad \longleftrightarrow \quad x[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(v) \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot n) dv$$

**Wersja alternatywna:**

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \exp(-j \cdot \Omega \cdot n) \quad \longleftrightarrow \quad x[n] = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \cdot \exp(j \cdot \Omega \cdot n) d\Omega$$

**Uwaga – w tym przypadku  $v$  jest bezwymiarowe,  
natomiast  $\Omega$  jest w radianach  
(są to wersje częstotliwości i pulsacji dla sygnałów z czasem dyskretnym)**

$$\Omega = \frac{\omega}{f_p}$$

**Funkcje  $X$  (czyli transformaty) są okresowe!**

# Transformacja Fouriera z czasem dyskretnym

## *D-TFT – wybrane właściwości*

- 1. Parzystość  $\text{Re}(X(v))$  oraz Moduł( $X(v)$ )**
- 2. Nieparzystość  $\text{Im}(X(v))$  oraz Faza( $X(v)$ )**
- 3. Liniowość**

# Transformacja Fouriera z czasem dyskretnym

**Jeżeli sygnał jest niezerowy jedynie na określonym odcinku indeksów, to sumowanie można ograniczyć do tego odcinka:**

$$X(v) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot n)$$
$$v \in \mathbb{R}$$

**Matlab:**

```
1: N=32; x=rand(1,N); % losowo tworzymy ciąg N-elementowy;
2: n=-10:-10+N-1;      % wybieramy dla nich przedział indeksów;
3: v=-3:0.01:3;         % wybieramy wartości v (bezwymiarowe!);
4: Nv=length(v);
5: for k=1:Nv, X(k)=0; % wersja powolna, ale za to czytelna;
6:     for m=1:N,
7:         X(k)=X(k)+x(m)*exp(-j*2*pi*v(k)*n(m));
8:     end;
9: end;
10:
11: figure(1); clf;
12: subplot(2,1,1); plot(v,abs(X),'r.-'); grid on; title('abs(X)');
13: subplot(2,1,2); plot(v,angle(X),'r.-'); grid on; title('angle(X)');
```

# Efekt próbkowania sygnału analogowego w „oczach Fouriera”

**CFT = C-TFT:**

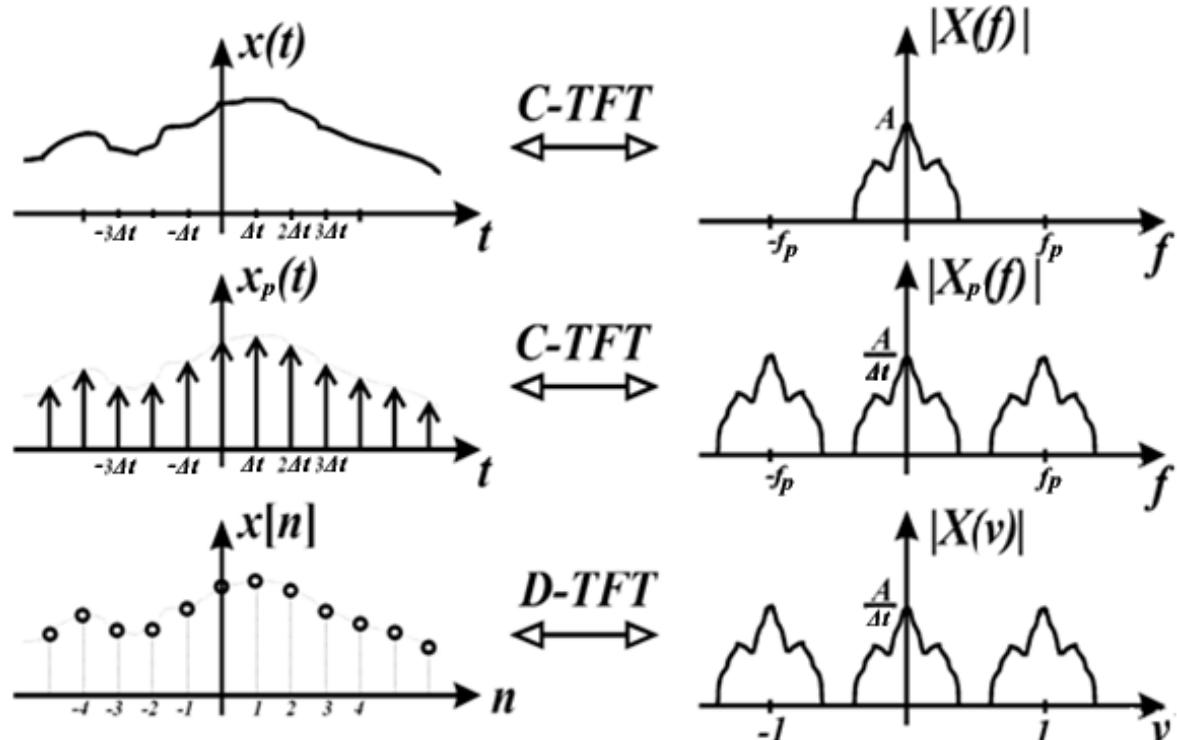
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt$$

$$f_p = \frac{1}{\Delta t}$$

**$\Delta t$  – okres próbkowania  
(np. w sekundach)**

**Przeliczenie  $f$  (w Hz)  
na  $v$  (bezwymiarowe):**

$$v = \frac{f}{f_p}$$



# Odwrotna transformacja DTFT (IDTFT)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$$

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_p(f) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$$

$$X_r(f) = \frac{1}{f_p} \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_p}\right) \cdot X_p(f)$$

$$x_r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f_p} \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_p}\right) \cdot X_p(f) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$$

$$x_r(t) = \int_{-f_p/2}^{+f_p/2} \frac{1}{f_p} \cdot X_p(f) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$$

$$X_p(f)|_{f=v \cdot f_p} = X(v)$$

$$v = \frac{f}{f_p} = f \cdot \Delta t$$

$$x_r(t_n) = \int_{-1/2}^{+1/2} X(v) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot (t_n / \Delta t)} dv$$

$$x_r(t_n) = x(t_n) = x[n]$$

$$t_n = n \cdot \Delta t$$

$$x[n] = \int_{-1/2}^{+1/2} X(v) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot n} dv$$

# **Podsumowanie**

- 1. Twierdzenie o próbkowaniu (i odtwarzaniu)**
- 2. Wyprowadzenie.**
- 3. Przykłady.**
- 4. Transformacja Fouriera z czasem dyskretnym.**



AGH

*Zapraszam na ćwiczenia ...  
lub do laboratorium ...*



**AGH**

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

# **Teoria sygnałów**

## **Wykład 11**

**Dr inż. Przemysław Korohoda  
Katedra Elektroniki, AGH, Kraków**

[home.agh.edu.pl/~korohoda/rok\\_2022\\_2023\\_zima/TS\\_EL\\_2](http://home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2)

**UPEL: TS 2022**

# **Plan wykładu**

- 1. Transformacja Hilberta.**
- 2. Transformata Fouriera z transformaty Hilberta.**
- 3. Sygnał analityczny.**
- 4. Transformata Fouriera dla sygnału analitycznego.**
- 5. Przykłady sygnałów analitycznych.**

# Transformacja Hilberta

**Definicja:**

$$x(t) \quad \xleftarrow[IHT]{HT} \quad x^H(t)$$

$$x^H(t) = -\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau = Vp. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

**Przydatna interpretacja:**

$$x^H(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \frac{1}{t - \tau} d\tau = \frac{1}{\pi \cdot t} * x(t)$$

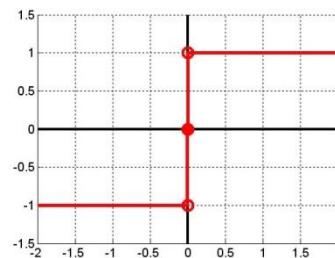
$$x^H(t) = h_H(t) * x(t) \quad \text{gdzie} \quad h_H(t) = \frac{1}{\pi \cdot t} \quad t \neq 0$$

**Wniosek:** transformacja Hilberta jest liniowa (cecha splotu)

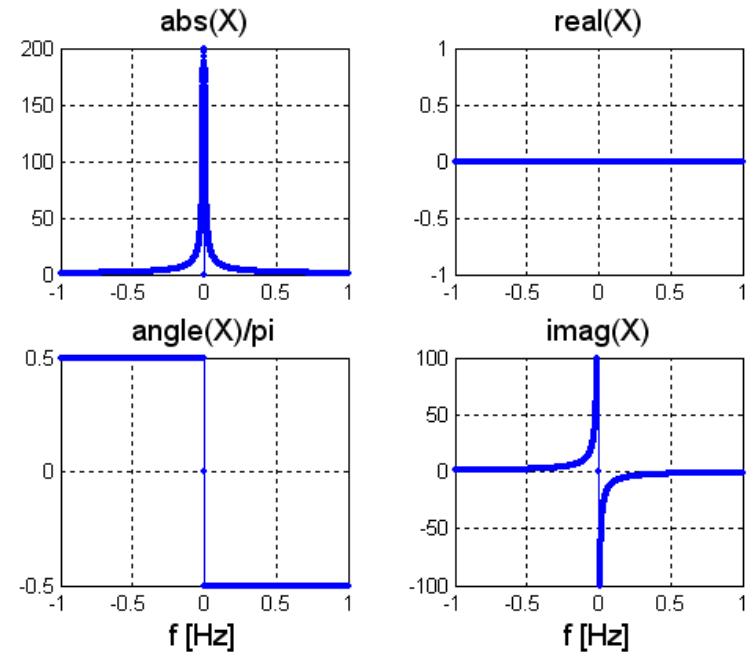
# Transformata Fouriera (CFT) z transformaty Hilberta

**Przypomnijmy, że:**

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t = 0 \\ -1 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$



$$\operatorname{sgn}(t) \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} = \begin{cases} -j \cdot \frac{1}{\pi \cdot f} & \text{dla } f \neq 0 \\ 0 & \text{dla } f = 0 \end{cases}$$



# Transformata Fouriera (CFT) z transformaty Hilberta

$$\text{sgn}(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} = \begin{cases} -j \cdot \frac{1}{\pi \cdot f} & \text{dla } f \neq 0 \\ 0 & \text{dla } f = 0 \end{cases}$$

Zatem wygodnie jest przyjąć, że:

$$h_H(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} -j \cdot \text{sgn}(f)$$

czyli  $h_H(0) = 0$

Czyli dla:

$$x^H(t) = h_H(t) * x(t)$$

Podobnie „w druga stronę”:

$$\begin{cases} j \cdot \frac{1}{\pi \cdot t} & \text{dla } t \neq 0 \\ 0 & \text{dla } t = 0 \end{cases} \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \text{sgn}(f)$$

$$h_H(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \cdot t} & \text{dla } t \neq 0 \\ 0 & \text{dla } t = 0 \end{cases}$$

otrzymujemy:

$$X^H(f) = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x^H(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt \right]_{CFT} = -j \cdot \text{sgn}(f) \cdot X(f)$$

Zatem składowa stała (transformata Fouriera dla  $f=0$ ):

$$X^H(f) \Big|_{f=0} = X^H(0) = 0$$

# Właściwości transformaty Fouriera (CFT) z transformaty Hilberta

## Na razie skoncentrujemy się na sygnałach rzeczywistych

**...a ponadto:**

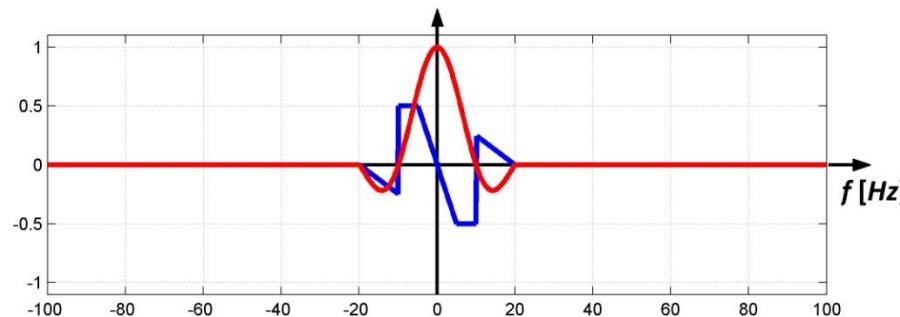
$$f > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(X^H(f)) = \operatorname{Im}(X(f))$$

$$f < 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(X^H(f)) = -\operatorname{Im}(X(f))$$

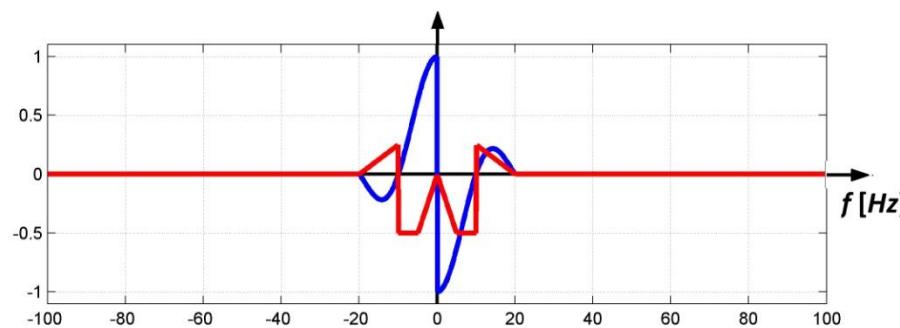
$$f > 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(X^H(f)) = -\operatorname{Re}(X(f))$$

$$f < 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(X^H(f)) = \operatorname{Re}(X(f))$$

**Widmo  
rzeczywiste  
i urojone dla  $x(t)$**



**Widmo rzeczywiste  
i urojone dla  $x^H(t)$**



# Sygnał analityczny

**Dla sygnału rzeczywistego  $x(t)$  jego sygnał analityczny jest zespolony:**

$$x(t) \longrightarrow x^a(t) = x(t) + j \cdot x^H(t)$$

$$x(t) \longrightarrow x^a(t) = x(t) + j \cdot h_H(t) * x(t)$$

**Transformata CFT dla sygnału analitycznego:**

$$x(t) \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(f)$$

$$x^a(t) \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X^a(f) = X(f) + j \cdot X^H(f)$$

$$x^a(t) \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X^a(f) = X(f) + j \cdot (-j \cdot \text{sgn}(f)) \cdot X(f)$$

$$x^a(t) \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X^a(f) = X(f) + \text{sgn}(f) \cdot X(f)$$

# Sygnal analityczny

**Transformata CFT dla sygnału analitycznego:**

$$x^a(t) \quad \xleftrightarrow{\begin{array}{c} CFT \\ ICFT \end{array}} \quad X^a(f) = X(f) + \text{sgn}(f) \cdot X(f)$$

$$x(t) \quad \xleftrightarrow{\begin{array}{c} CFT \\ ICFT \end{array}} \quad X(f)$$

$$x^a(t) \quad \xleftrightarrow{\begin{array}{c} CFT \\ ICFT \end{array}} \quad X^a(f) = \begin{cases} 2 \cdot X(f) & \text{dla } f > 0 \\ X(0) & \text{dla } f = 0 \\ 0 & \text{dla } f < 0 \end{cases}$$

**W „drugą stronę” czyli odwrotna transformacja „analityczna” :**

$$x(t) = \frac{x^a(t) + \overline{x^a(t)}}{2}$$

$$X(f) = \frac{X^a(f) + \overline{X^a(-f)}}{2}$$

Jak widać zależności dla **CFT** sygnału zespolonego mogą się czasem przydać.

# Sygnał analityczny

**Przykłady:**

$$x(t) = \cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) \longrightarrow x^a(t) = e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t}$$

$$x(t) = \sin(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) \longrightarrow x^a(t) = e^{j\cdot(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t - \pi/2)}$$

$$X(f) = 0 \quad \text{dla} \quad |f| \geq f_0$$

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) \longrightarrow y^a(t) = x(t) \cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t}$$

$$y(t) = x(t) \cdot \sin(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) \longrightarrow y^a(t) = x(t) \cdot e^{j\cdot(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t - \pi/2)}$$

## Sygnal analityczny dla sygnału zespolonego

**Powtarzając wszystkie rozważania dla sygnałów zespolonych wystarczy pamiętać o liniowości splotu (transformacja Hilberta) oraz CFT, gdy:**

$$x(t) = \operatorname{Re}(x(t)) + j \cdot \operatorname{Im}(x(t))$$

# **Podsumowanie**

- 1. Transformacja Hilberta.**
- 2. Transformata Fouriera z transformaty Hilberta.**
- 3. Sygnał analityczny.**
- 4. Transformata Fouriera dla sygnału analitycznego.**
- 5. Przykłady sygnałów analitycznych.**



AGH

***Zapraszam na ćwiczenia ...  
lub do laboratorium ...***



**AGH**

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

# **Teoria sygnałów**

## **Wykład 12**

**Dr inż. Przemysław Korohoda  
Katedra Elektroniki, AGH, Kraków**

[home.agh.edu.pl/~korohoda/rok\\_2022\\_2023\\_zima/TS\\_EL\\_2](http://home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2)

**UPEL: TS 2022**

# Plan wykładu

- 1. Zmiana argumentu w delcie Diraca.**
- 2. Nieliniowe przetwarzanie sygnałów kosinusoidalnych.**
- 3. Ujemne sprzężenie zwrotne.**
- 4. Teoretyczna pętla fazowa.**
- 5. Próbkowanie z aperturą (różne wersje).**
- 6. Różne warianty odtwarzania sygnału z próbek.**
- 7. Próbkowanie naturalne we wzmacniaczach mocy.**

# Zmiana skali argumentu w delcie Diraca

$$1 \xrightarrow{CFT_f} \delta(f)$$

$$\xleftarrow{ICFT_f}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df = e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot t} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) df = 1$$

$$1 \xrightarrow{CFT_\omega} 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega)$$

$$\xleftarrow{ICFT_\omega}$$

$$\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} d\omega = e^{j \cdot 0 \cdot t} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) d\omega = 1$$

**Zmiana skali argumentu w delcie Diraca:**

$$\text{dla } a \neq 0: \quad \delta(a \cdot t) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(t)$$

$$\text{dla } a \neq 0: \quad \delta(a \cdot f) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(f)$$

$$\text{dla } a \neq 0: \quad \delta(a \cdot \omega) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(\omega)$$

# Zmiana skali argumentu w delcie Diraca

$$\boxed{\text{dla } a \neq 0 : \delta(a \cdot t) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(t)}$$

Dlaczego?

Pamiętamy, że:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{a} \cdot \Pi\left(\frac{t}{a}\right) = \delta(t)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{|a|} \cdot \Pi\left(\frac{t}{a}\right) = \delta(t)$$

Czy parametr oznaczymy „a”, czy „c”, to powyższe zapisy są prawdziwe.

Czyli:

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{c} \cdot \Pi\left(\frac{t}{c}\right) = \delta(t)$$

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{|c|} \cdot \Pi\left(\frac{t}{c}\right) = \delta(t)$$

Zatem przyjmując dowolne, ale stałe „a” zapisujemy:

$$\delta(a \cdot t) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{|c|} \cdot \Pi\left(a \cdot \frac{t}{c}\right) = \lim_{c/a \rightarrow 0} \frac{1}{|a \cdot c/a|} \cdot \Pi\left(\frac{t}{c/a}\right) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(t)$$

# Zmiana skali argumentu w delcie Diraca

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{a} \cdot \Pi\left(\frac{t}{a}\right) = \delta(t)$$

$$\boxed{\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{a} \cdot \Pi\left(\frac{t-t_0}{a}\right) = \delta(t-t_0)}$$

$$\boxed{\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{a} \cdot \Pi\left(\frac{t}{a} - t_0\right) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{a} \cdot \Pi\left(\frac{t-a \cdot t_0}{a}\right) = \delta(t)}$$

# Przykład: transformata sygnału kosinusoidalnego

Dwa przepisy:

- a) tw. o zmianie skali w dziedzinie czasu,
- b) zmiana skali argumentu w delcie Diraca.

$$\text{dla } a \neq 0: \quad \delta(a \cdot f) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(f)$$

$$\cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

$$\cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 / a \cdot t) \leftrightarrow ???$$

$$\cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t/a) \leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot |a| \cdot [\delta(a \cdot f + f_0) + \delta(a \cdot f - f_0)]$$

$$\frac{1}{2} \cdot |a| \cdot [\delta(a \cdot f + f_0) + \delta(a \cdot f - f_0)] = \frac{1}{2} \cdot \frac{|a|}{|a|} \cdot \left[ \delta\left(\frac{a \cdot f + f_0}{a}\right) + \delta\left(\frac{a \cdot f - f_0}{a}\right) \right]$$

$$\cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 / a \cdot t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot [\delta(f + f_0/a) + \delta(f - f_0/a)]$$



AGH

# Sygnał kosinusoidalny przetworzony nieliniowo

## Przykład 1

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t + \varphi_0)$$

$$y(t) = x(t) + x^2(t)$$

$$y(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t + \varphi_0) + \frac{1}{2} \cdot [\cos(2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot f_x) \cdot t + 2 \cdot \varphi_0) + \cos(0)]$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \cos(0) + \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t + \varphi_0) + \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot f_x) \cdot t + 2 \cdot \varphi_0)$$

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$



# Sygnał kosinusoidalny przetworzony nieliniowo

AGH

## Przykład 2

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t + \varphi_0)$$

$$y(t) = x^3(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t + \varphi_0) \cdot [\cos(2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot f_x) \cdot t + 2 \cdot \varphi_0) + \cos(0)] = \\ &= \frac{1}{4} \cdot [\cos(2 \cdot \pi \cdot (3 \cdot f_x) \cdot t + 3 \cdot \varphi_0) + \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t + \varphi_0)] + \frac{1}{2} \cdot \cos(0) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t + \varphi_0) = \\ &= \frac{3}{4} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t + \varphi_0) + \frac{1}{4} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot (3 \cdot f_x) \cdot t + 3 \cdot \varphi_0) \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

# Iloczyn dwóch sygnałów

$$x(t) = \sum_{k=0}^{K_x} a_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_{xk} \cdot t + \varphi_{xk0})$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{K_y} b_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_{yk} \cdot t + \varphi_{yk0})$$

$$z(t) = x(t) \cdot y(t) = \sum_{k=0}^{K_x} \sum_{m=0}^{K_y} a_k \cdot b_m \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_{xk} \cdot t + \varphi_{xk0}) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_{ym} \cdot t + \varphi_{ym0})$$

**Pojawią się zatem wszystkie możliwe częstotliwości:**

$$|f_{xk} \pm f_{ym}|$$

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

# Sygnał kosinusoidalny przetworzony nieliniowo

## Wnioski ogólne

$$x(t) = \cos(2\pi f_x t + \varphi_{k0})$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^N c_n \cdot x^n(t)$$

$$x(t) \rightarrow f_x$$

$$x^2(t) \rightarrow 0, 2 \cdot f_x$$

$$x^3(t) \rightarrow f_x, 3 \cdot f_x$$

$$x^4(t) = x^2(t) \cdot x^2(t) = x(t) \cdot x^3(t) \rightarrow 0, 2 \cdot f_x, 4 \cdot f_x$$

$$x^5(t) = x^3(t) \cdot x^2(t) \rightarrow f_x, 3 \cdot f_x, 5 \cdot f_x$$

.

.

.

$$x^n(t) \rightarrow 0, 2 \cdot f_x, \dots, n \cdot f_x \quad \text{lub} \quad x^n(t) \rightarrow f_x, 3 \cdot f_x, \dots, n \cdot f_x$$

$n$  - parzyste

$n$  - nieparzyste

**Do przemyślenia:  
analogiczne rozważania  
dla sygnału**

$$x(t) = \sum_{k=0}^K a_k \cdot \cos(2\pi f_k t + \varphi_{k0})$$

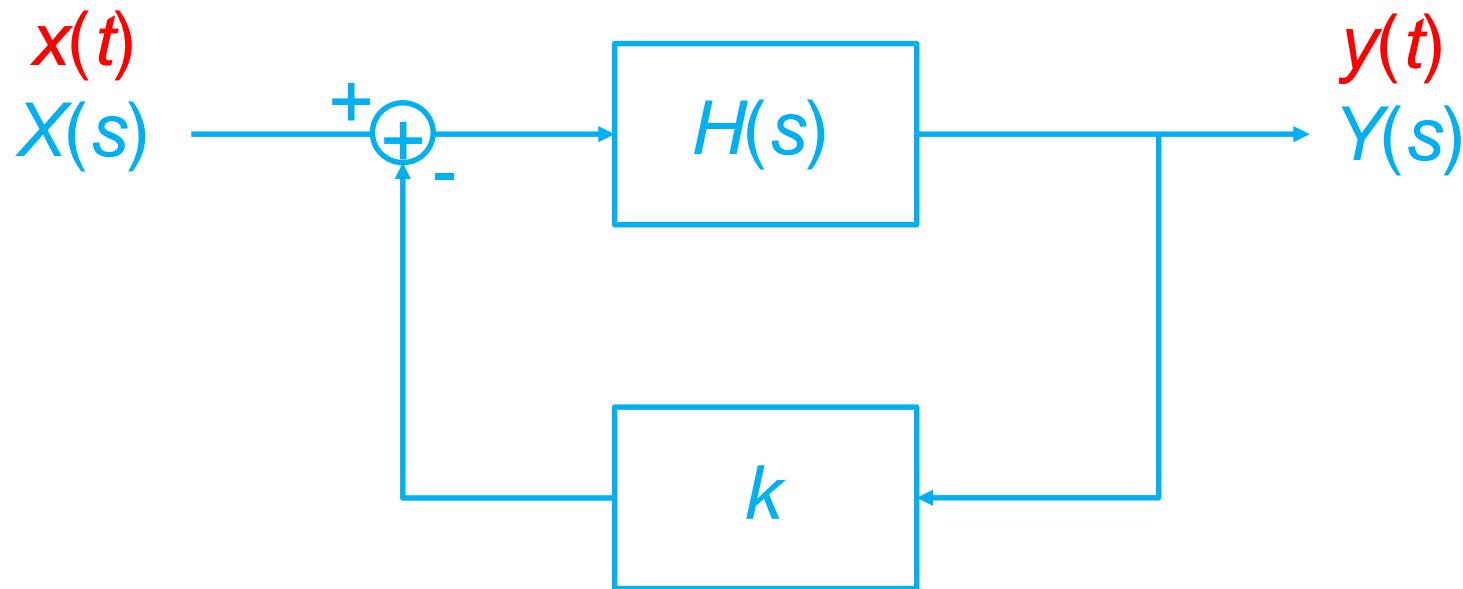
# Układ z ujemnym sprzężeniem zwrotnym

$$H(s) = \frac{A}{s - s_0}$$

$$s_0, A, k \in \Re$$

$$1 > k > 0$$

$$s_0 = -2 \cdot \pi \cdot f_g$$



# Ujemne sprzężenie zwrotne (USZ) - system stacjonarny, liniowy „jednobiegunowy”

$$H(s) = \frac{A}{s - s_0}$$

$$s_0 = -2 \cdot \pi \cdot f_g$$

$$s_0, A, k \in \Re$$

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{A}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f + 2 \cdot \pi \cdot f_g} \\ &= A \cdot \frac{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f + 2 \cdot \pi \cdot f_g}{4 \cdot \pi^2 \cdot (f^2 + f_g^2)} \end{aligned}$$

$$A > 0$$

$$|H(f)|_{f=0} = |H(0)| = \frac{A}{2 \cdot \pi \cdot f_g}$$

$$\begin{aligned} |H(f)|_{f=f_g} = |H(f_g)| &= A \cdot \frac{\sqrt{4 \cdot \pi^2 \cdot f_g^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot f_g^2}}{8 \cdot \pi^2 \cdot f_g^2} \\ &= \frac{A}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot f_g} = \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$|H(0)| \cdot f_g = \frac{A}{2 \cdot \pi}$$

$$G(f) = \frac{H(f)}{1 + k \cdot H(f)}$$

zazwyczaj  
 $1 > k > 0$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{H(s)}{1 + k \cdot H(s)} = \frac{s - s_0}{1 + k \cdot \frac{A}{s - s_0}} = \\ &= \frac{A}{s - s_0 + k \cdot A} = \frac{A}{s - (s_0 - k \cdot A)} \end{aligned}$$

$$s'_0 = s_0 - k \cdot A = -2 \cdot \pi \cdot f_g - k \cdot A$$

$$2 \cdot \pi \cdot f'_g = 2 \cdot \pi \cdot f_g + k \cdot A$$

$$f'_g = f_g + \frac{k \cdot A}{2 \cdot \pi} \approx \frac{k \cdot A}{2 \cdot \pi}$$

$k \cdot A >> 2 \cdot \pi \cdot f_g$

$$|G(0)| = \frac{A}{2 \cdot \pi \cdot f_g + k \cdot A} \approx \frac{1}{k}$$

$$|G(0)| \cdot f'_g = \frac{A}{2 \cdot \pi}$$

# Teoretyczna pętla fazowa (*ang. PLL*)

Phase Locked Loop

$$\varphi_x(t)$$

$$x(t) = \cos(\varphi_x(t))$$

$$\frac{d}{dt} \varphi_x(t) = 2 \cdot \pi \cdot f_x(t)$$

$$\varphi_g(t)$$

$$g(t) = \cos(\varphi_g(t))$$

Phase Comparator

PC

Voltage Controlled Oscillator

VCO

$$\Delta\varphi(t) = \varphi_x(t) - \varphi_g(t)$$

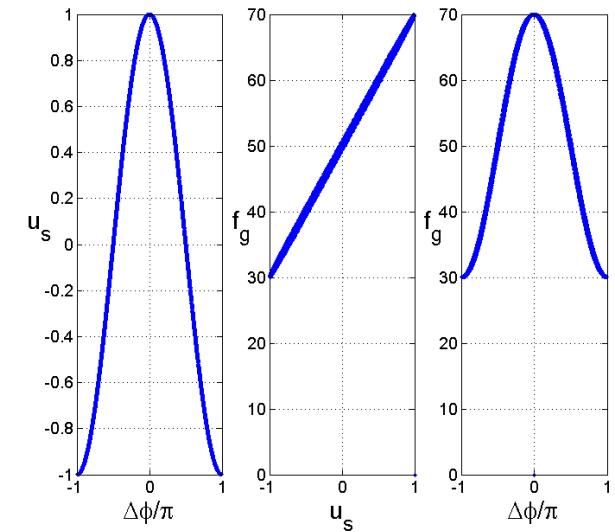
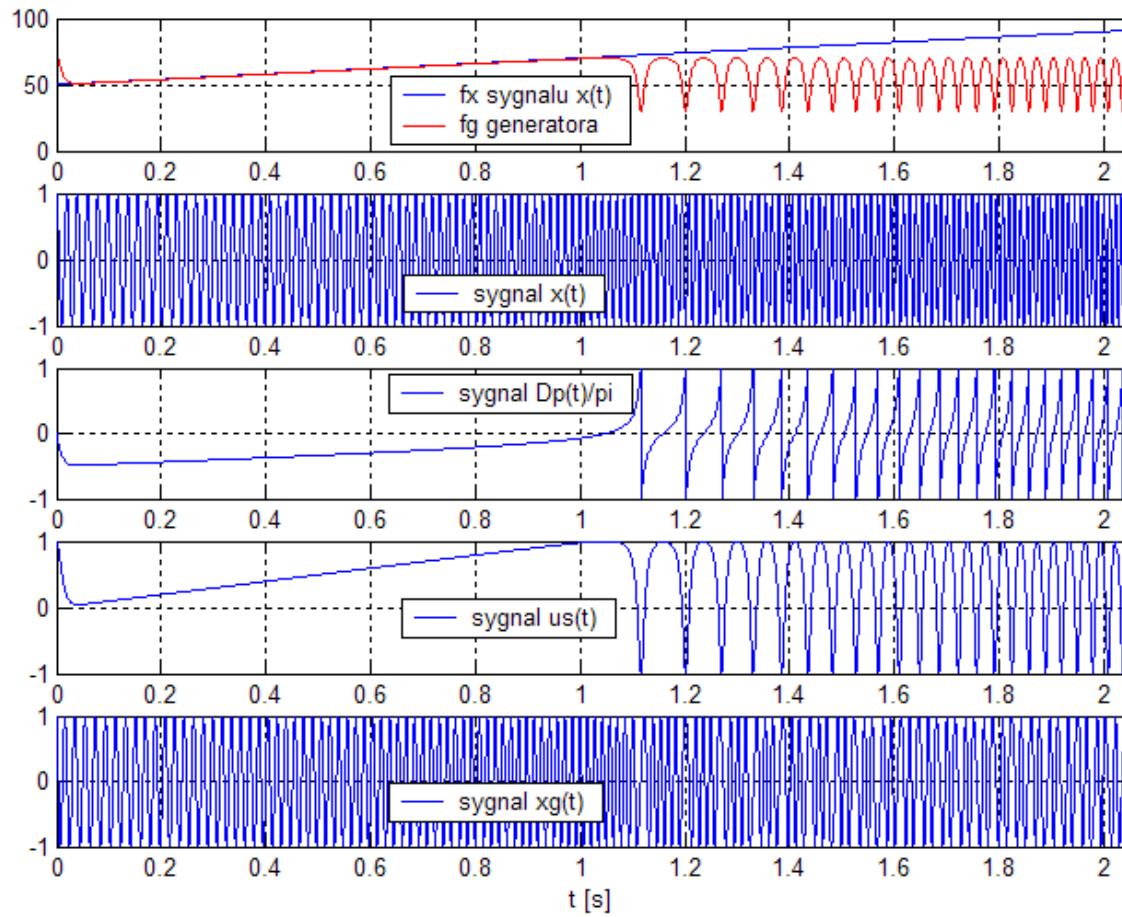
$$u_s(t) = \cos(\Delta\varphi(t))$$

$$f_g(t) = f_0 + K \cdot u_s(t)$$

$$\frac{d}{dt} \varphi_g(t) = 2 \cdot \pi \cdot f_g(t)$$

# Teoretyczna pętla fazowa (*ang. PLL*)

$$\varphi_x(t) = (2 \cdot \pi \cdot f_0 + a \cdot t) \cdot t$$



**$f_o = 50\text{Hz}$**

**$K = 20$**

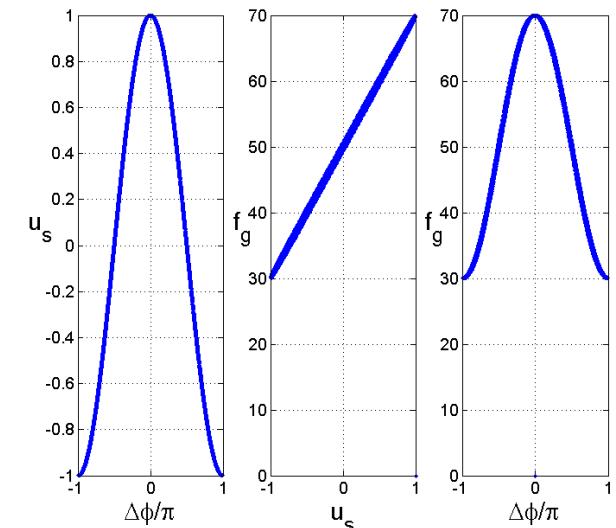
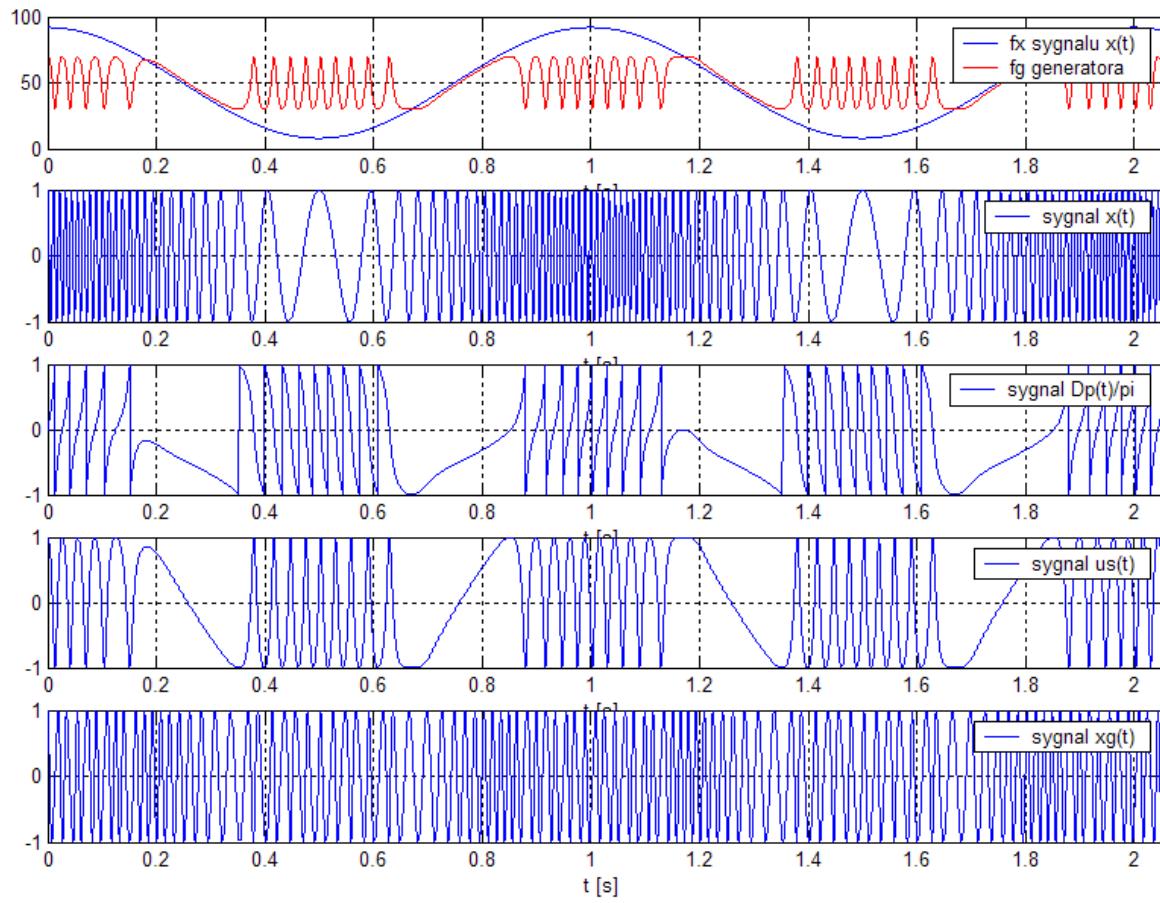
**$a = 10$**

$xg(t) = g(t)$

**$Dp = \Delta\varphi$**

# Teoretyczna pętla fazowa (*ang. PLL*)

$$\varphi_x(t) = 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + B_m \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_m \cdot t)$$



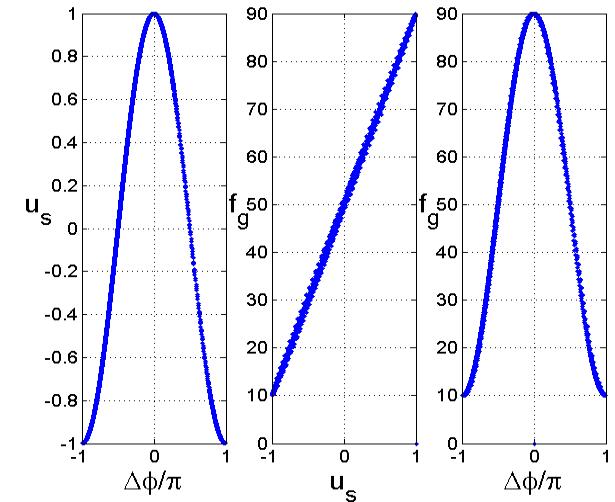
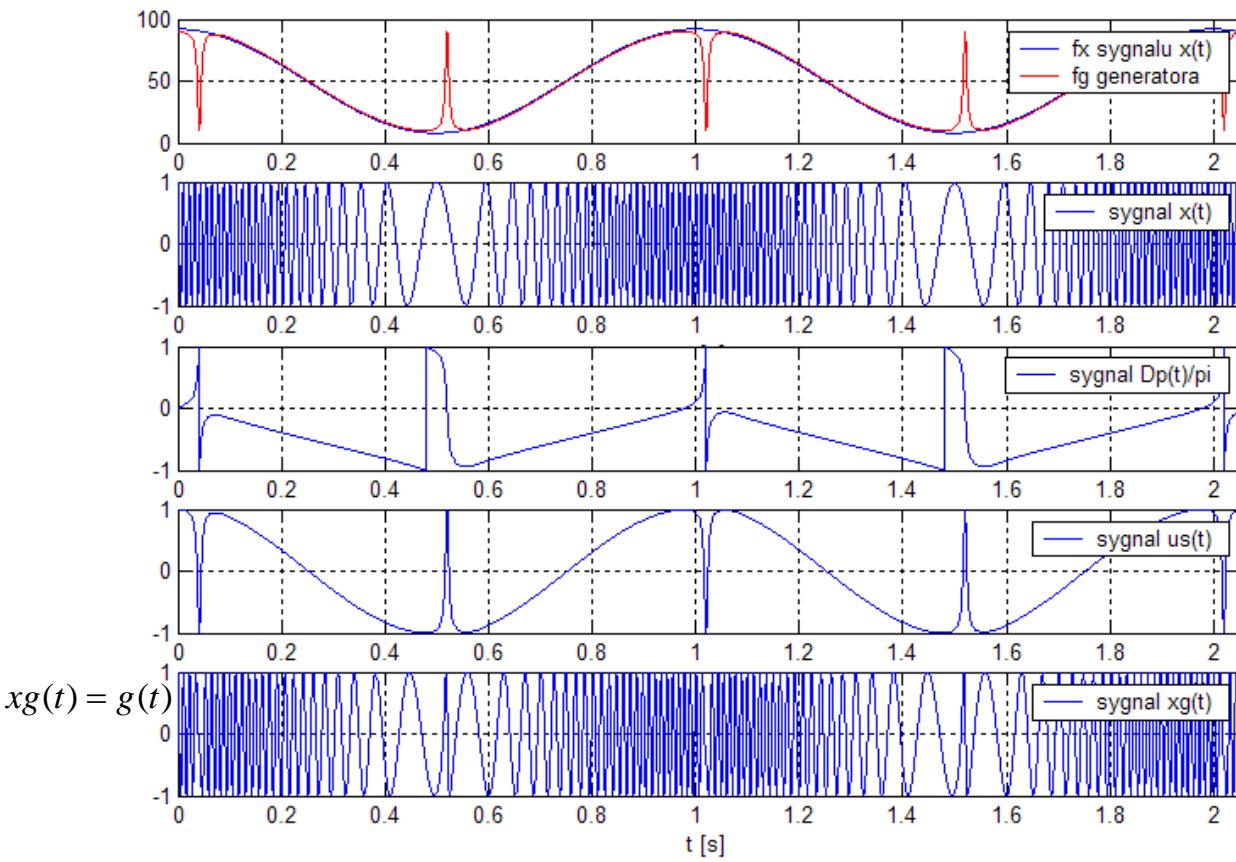
**$f_o = 50\text{Hz}$**   
 **$K = 20$**   
 **$B_m = 42$**   
 **$f_m = 1\text{Hz}$**

$xg(t) = g(t)$

**Dp = Δφ**

# Teoretyczna pętla fazowa (*ang. PLL*)

$$\varphi_x(t) = 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + B_m \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_m \cdot t)$$



$f_o = 50\text{Hz}$   
 $K = 40$   
 $B_m = 42$   
 $f_m = 1\text{Hz}$

$D_p = \Delta\phi$

# Próbkowanie idealne (powtórka)

$$x(t) \xrightarrow{\text{CFT}} X(f)$$

$$x_p(t) = x(t) \cdot p(t)$$

$$X_p(f) = X(f) * P(f)$$

**$p(t)$  – funkcja próbkująca**

**W tym przypadku:**

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \xleftarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \frac{1}{\Delta t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot f_p)$$

$$f_p = \frac{1}{\Delta t}$$

**Zatem transformata (CTF) po spróbkowaniu:**

$$X_p(f) = \frac{1}{\Delta t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - k \cdot f_p)$$



AGH

# Próbkowanie z aperturą (wersja 1)

## - naturalne

$$x(t) \xrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(f) \quad x_p(t) = x(t) \cdot p(t) \quad X_p(f) = X(f) * P(f) \quad T < \Delta t$$

**W tym przypadku okno próbkujące „otwiera się” na czas  $T$ , w którym kopiuje sygnał:**

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - n \cdot \Delta t}{T}\right)$$

Środek okna znajduje się w punkcie próbkowania.

**$p(t)$  jest okresowe, ze wzorcem okresu  $p_0(t)$ , zatem jego transformata musi być następująca:**

$$p_0(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} P_0(f) = T \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot T)$$

$$P(f) = \frac{1}{\Delta t} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_0(n \cdot f_0) \cdot \delta(f - n \cdot f_0)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - n \cdot \Delta t}{T}\right) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \frac{T}{\Delta t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi \cdot k \cdot f_p \cdot T) \cdot \delta(f - k \cdot f_p)$$

**Zatem transformata (CTF) po spróbkowaniu:**

$$X_p(f) = \frac{T}{\Delta t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi \cdot (k \cdot f_p) \cdot T) \cdot X(f - k \cdot f_p)$$

...czyli odtwarzanie sygnału jest oczywiste.

Nie zależy od  $f$ , ale zależy od  $k$  – czyli jest to mnożnik (liczba).



AGH

## Próbkowanie „z aperturą” (wersja 2) - chwilowe

$$x(t) \xrightarrow{\text{CFT}} X(f)$$

Wartość próbki idealnej staje się amplitudą prostokąta o szerokości  $T$ .

$$T < \Delta t$$

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \Pi\left(\frac{t - n \cdot \Delta t}{T}\right)$$

Środek prostokąta znajduje się w punkcie próbkowania.

$$x_p(t) = [x(t) \cdot p(t)] * \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t)$$

$$X_p(f) = [X(f) * P(f)] \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot T) \cdot T$$

Zatem transformata jest taka jak dla próbkowania idealnego, jednak z obwiednią „sinc” oraz mnożnikiem  $T$ . W tym przypadku obwiednia jest funkcją  $f$  !

...czyli odtwarzanie sygnału wymaga skompensowania tego efektu.



AGH

# Próbkowanie „z aperturą” (wersja 3) - chwilowe, z opóźnieniem

Bardziej realistyczna wersja:

w tym przypadku w punkcie próbkowania znajduje się początek próbkującego prostokąta.

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \Pi\left(\frac{t - n \cdot \Delta t - T/2}{T}\right)$$

$$x_p(t) = [x(t) \cdot p(t)] * \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

$$X_p(f) = [X(f) * P(f)] \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot T) \cdot T \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot f \cdot T}$$



Mnożnik „exp” na końcu daje jedynie liniową modyfikację fazy  
– sygnał spróbkowany jest opóźniony o  $T/2$ .

Takie opóźnienie można niekiedy zignorować.



AGH

# Próbkowanie z aperturą (wersja 4) - naturalne z całkowaniem całościowym

Próbkowanie naturalne z aperturą:

$$x_p(t) = x(t) \cdot p(t)$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - n \cdot \Delta t}{T}\right)$$

... dlatego:

$$x_c(t) = \int_{-\infty}^t x_p(\tau) d\tau \quad \longleftrightarrow \quad X_c(f) = \begin{cases} f \neq 0 \\ j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \end{cases} \cdot X_p(f)$$

Jeżeli założymy:

$$X_p(0) = 0$$

to:

$$X_c(0) = 0$$

$$X_p(f) = \frac{T}{\Delta t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi \cdot (k \cdot f_p) \cdot T) \cdot X(f - k \cdot f_p)$$

Ostatecznie:

$$X_c(f) = \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot \frac{T}{\Delta t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi \cdot (k \cdot f_p) \cdot T) \cdot X(f - k \cdot f_p)$$

Zależy od  $f$ , czyli tworzy obwiednię.



AGH

# Próbkowanie z aperturą (wersja 5) - z całkowaniem lokalnym

$$x(t) \xrightarrow{\substack{CFT \\ ICFT}} X(f)$$

W tej wersji wynik próbkowania jest pseudo-funkcją grzebieniową modulowaną wynikiem całkowania:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \cdot \int_{-\infty}^{t+T/2} p_n(\tau) \cdot x(\tau) d\tau$$

$$T < \Delta t \quad (1)$$

gdzie:

$$p_n(t) = \Pi\left(\frac{t - n \cdot \Delta t}{T}\right)$$

jest elementem ciągu okien próbujących:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(t)$$

Po uwzględnieniu okien wzór (1) można przepisać następująco:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \cdot \int_{n \cdot \Delta t - T/2}^{n \cdot \Delta t + T/2} x(\tau) d\tau \quad (2)$$

# Próbkowanie z aperturą (wersja 5) - z całkowaniem lokalnym

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \cdot \int_{n \cdot \Delta t - T/2}^{n \cdot \Delta t + T/2} x(\tau) d\tau \quad (2)$$

**Wprowadźmy sygnał  $y(t)$ :**

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

**... i teraz wzór (2) możemy przepisać kolejno:**

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \cdot [y(n \cdot \Delta t + T/2) - y(n \cdot \Delta t - T/2)] \quad (3)$$

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \cdot [y(t + T/2) - y(t - T/2)] \quad (4)$$

$$x_c(t) = [y(t + T/2) - y(t - T/2)] \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \quad (5)$$

# Próbkowanie z aperturą (wersja 5) - z całkowaniem lokalnym

$$x_c(t) = [y(t + T/2) - y(t - T/2)] \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \quad (5)$$

$$x_c(t) = [y(t + T/2) - y(t - T/2)] \cdot g_{\Delta t}(t)$$

$$g_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t)$$

$$\Delta t = \frac{1}{f_p}$$

$$g_{\Delta t}(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \frac{1}{\Delta t} \cdot g_{f_p}(f)$$

$$X_c(f) = Y(f) \cdot \left[ e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T/2} - e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T/2} \right] * g_{f_p}(f) \cdot \frac{1}{\Delta t}$$

$$Y(f) = \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot X(f)$$

$$X_c(f) = \frac{T}{\Delta t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(\pi \cdot (f - k \cdot f_p) \cdot T\right) \cdot X(f - k \cdot f_p)$$

Zależy od  $f$ , czyli tworzy obwiednię typu  
„sinc” – osobną dla każdej kopii  $X(f)$ .

# Próbkowanie z aperturą (wersja 6) - z całkowaniem lokalnym, z opóźnieniem

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \cdot \int_{-\infty}^t p_n(\tau) \cdot x(\tau) d\tau$$

czyli okno próbkujące musi poprzedzać „punkt próbki”

$$p_n(t) = \Pi\left(\frac{t - n \cdot \Delta t + T/2}{T}\right)$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(t)$$

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \cdot \int_{n \cdot \Delta t - T}^{n \cdot \Delta t} x(\tau) d\tau$$

# Inne (niż sinc) sposoby odtwarzania sygnału analogowego z próbek

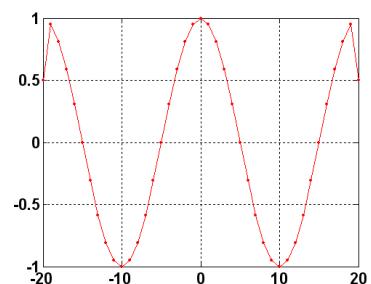
$$x_{\Pi}(t) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] \cdot \Pi\left(\frac{t - n \cdot \Delta t}{\Delta t}\right) \leftrightarrow X_{\Pi}(f) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] \cdot \Delta t \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot \Delta t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot n \cdot \Delta t}$$

$$\Lambda\left(\frac{t}{\Delta t}\right) \leftrightarrow \Delta t \cdot \text{sinc}^2(\pi \cdot f \cdot \Delta t)$$

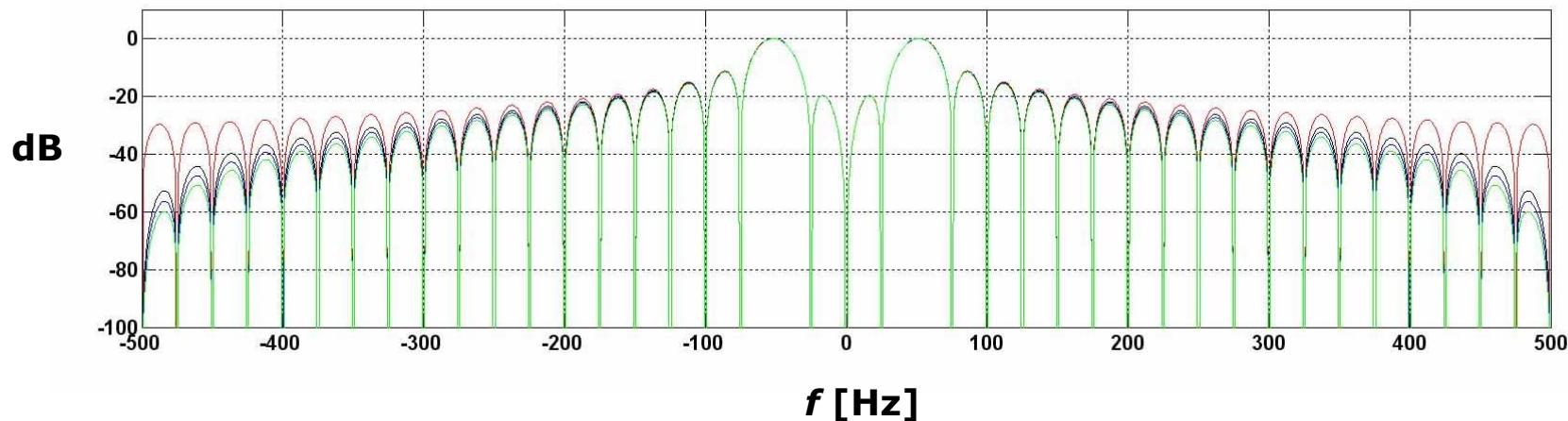
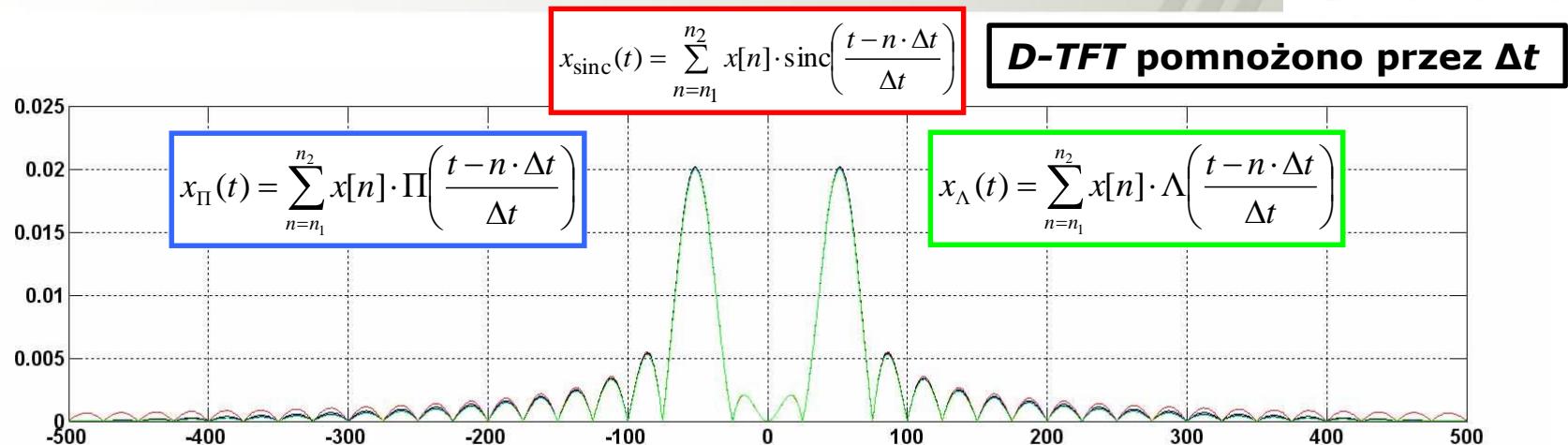
$$x_{\Lambda}(t) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] \cdot \Lambda\left(\frac{t - n \cdot \Delta t}{\Delta t}\right) \leftrightarrow X_{\Lambda}(f) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] \cdot \Delta t \cdot \text{sinc}^2(\pi \cdot f \cdot \Delta t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot n \cdot \Delta t}$$

Próbki można też notować tak:  $x[n] = x_n$

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

 **$x[n]$** 


# Przykładowe porównanie modułów CFT (oraz D-TFT)



# Próbkowanie „naturalne” we wzmacniaczach mocy klasy D

Dla sygnału nieskończonego:

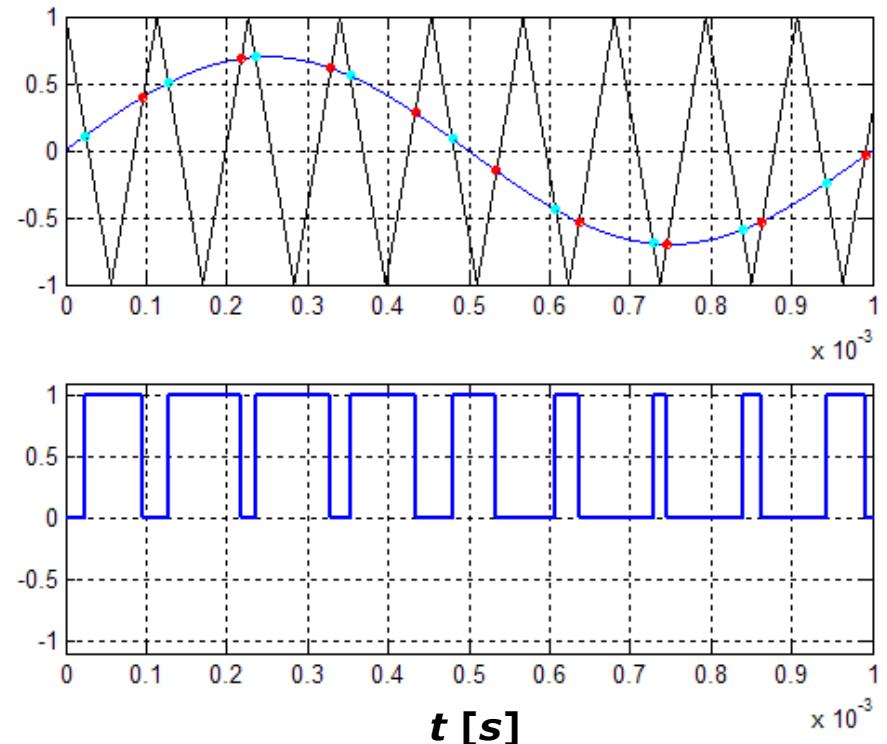
$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t + \varphi_0)$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - t_n}{T_n}\right)$$

$$T_n = t_{bn} - t_{an}$$

$$t_n = \frac{t_{an} + t_{bn}}{2}$$

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot T_n) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n}$$

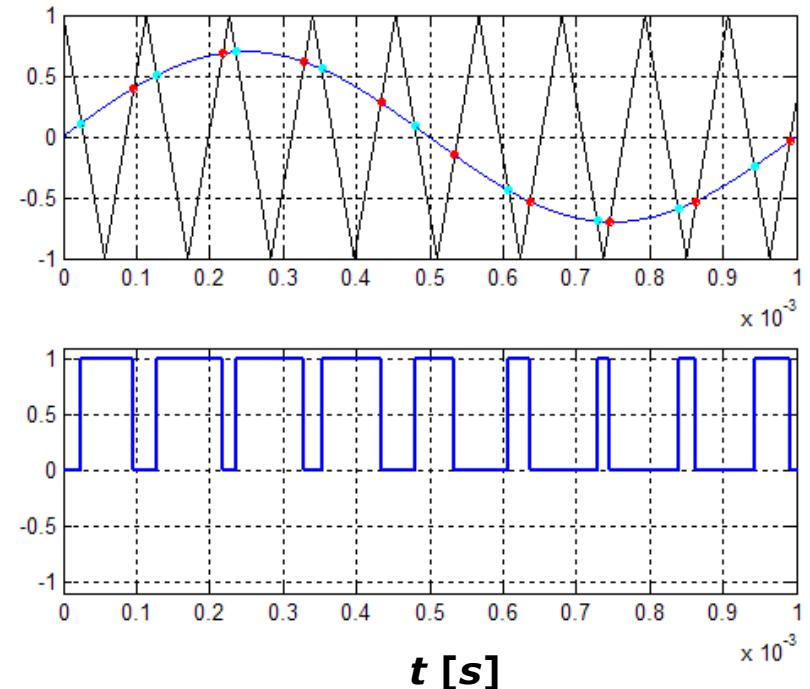


# Próbkowanie „naturalne” we wzmacniaczach mocy klasy D

**Dla sygnału skończonego:**

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t + \varphi_0) \cdot \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \Pi\left(\frac{t - t_n}{T_n}\right)$$

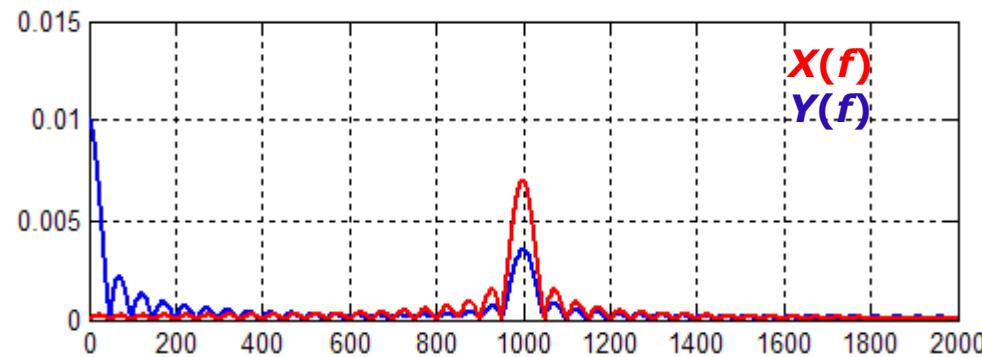


$$Y(f) = \sum_{n=0}^{N-1} T_n \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot T_n) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n}$$

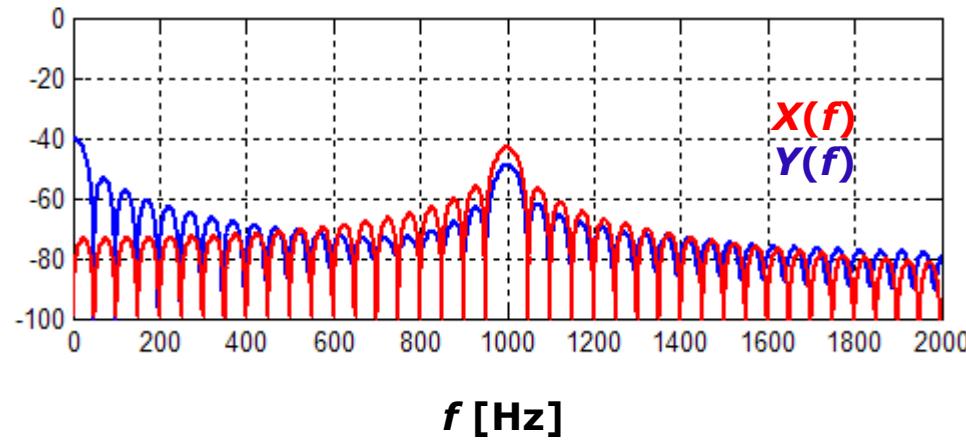
# Próbkowanie „naturalne” we wzmacniaczach mocy klasy D

Charakterystyki amplitudowe (czyli moduł)

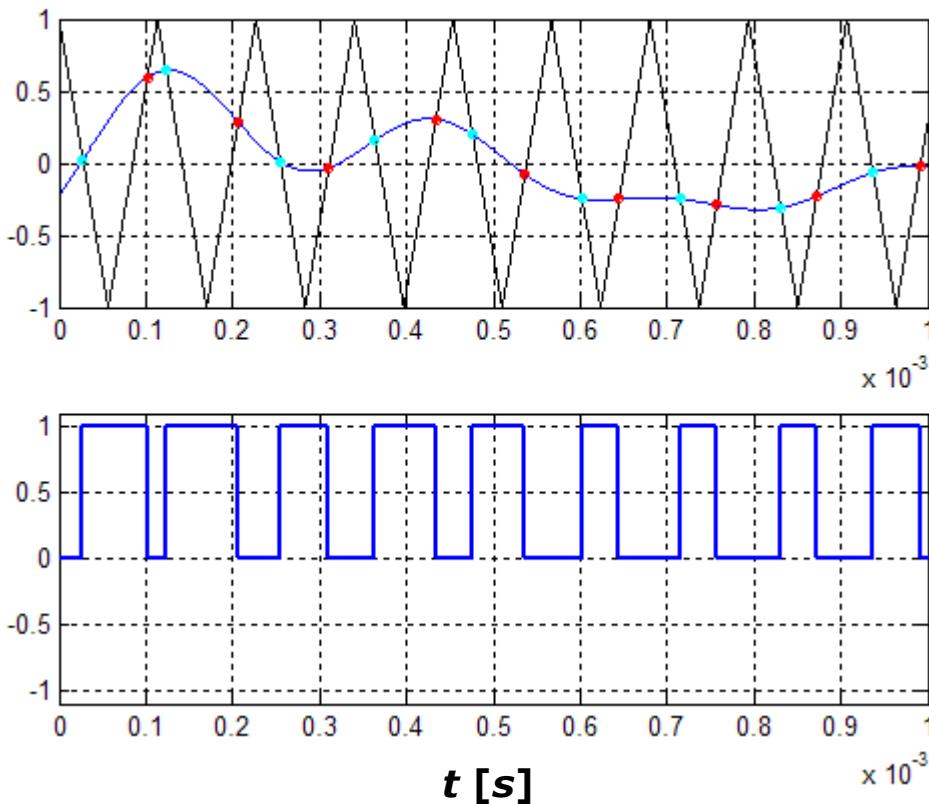
Skala liniowa



Skala w dB



# Próbkowanie „naturalne” we wzmacniaczach mocy klasy D

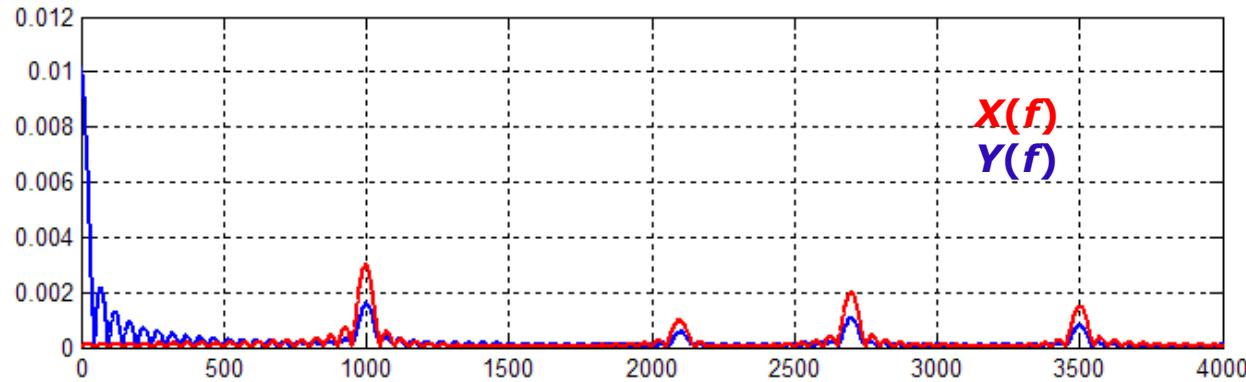


Sygnal będący kombinacją liniową czterech kosinusoid

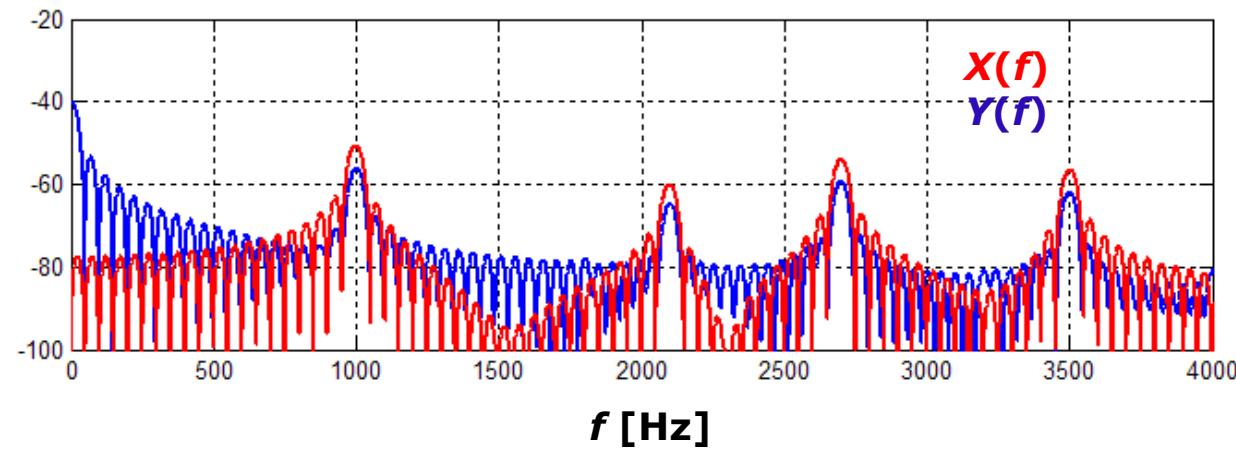
# Próbkowanie „naturalne” we wzmacniaczach mocy klasy D

Charakterystyki amplitudowe (czyli moduł)

Skala liniowa



Skala w dB



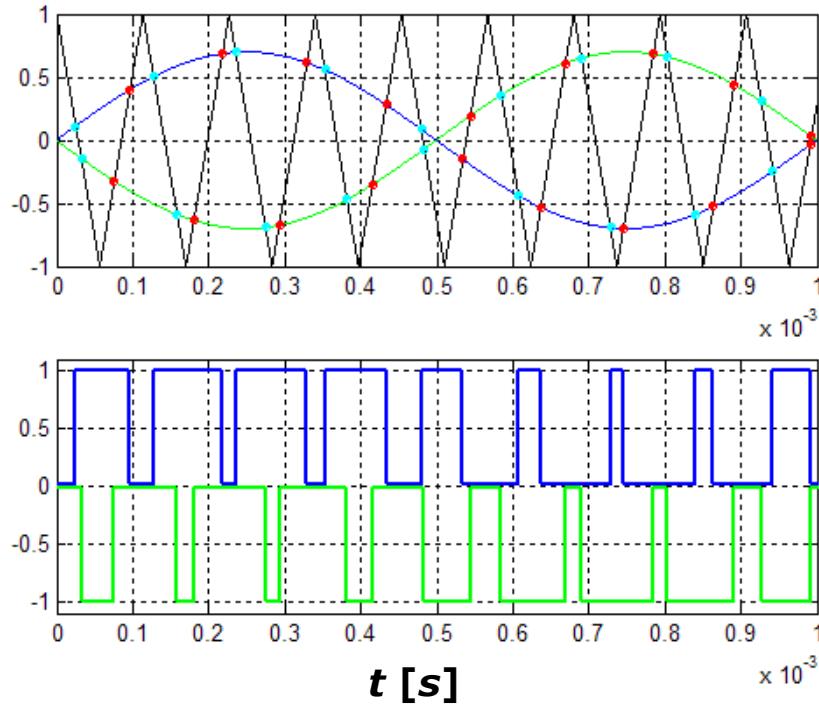
# Próbkowanie „naturalne” we wzmacniaczach mocy klasy D

**Wariant dwukanałowy (dwustronny):**

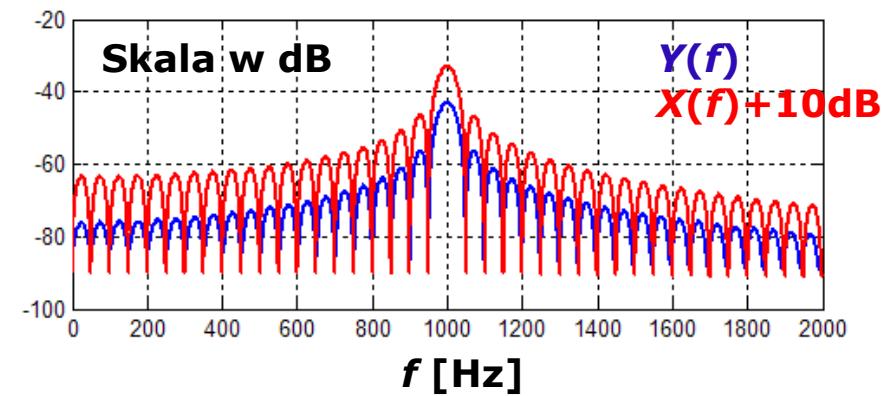
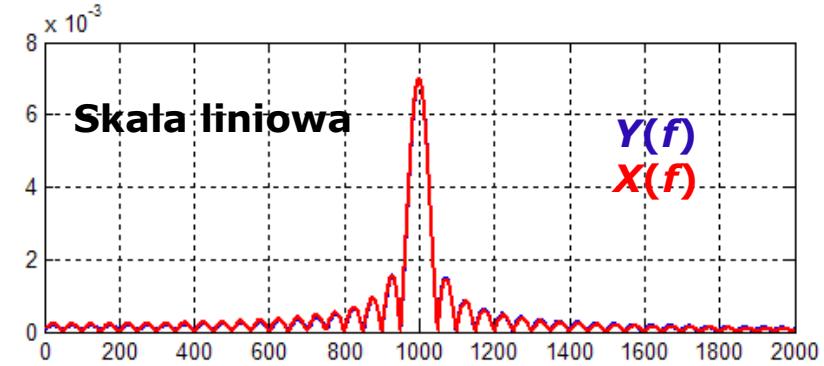
$$x(t) \rightarrow y_1(t)$$

$$-x(t) \rightarrow y_2(t)$$

$$y(t) = y_1(t) - y_2(2)$$

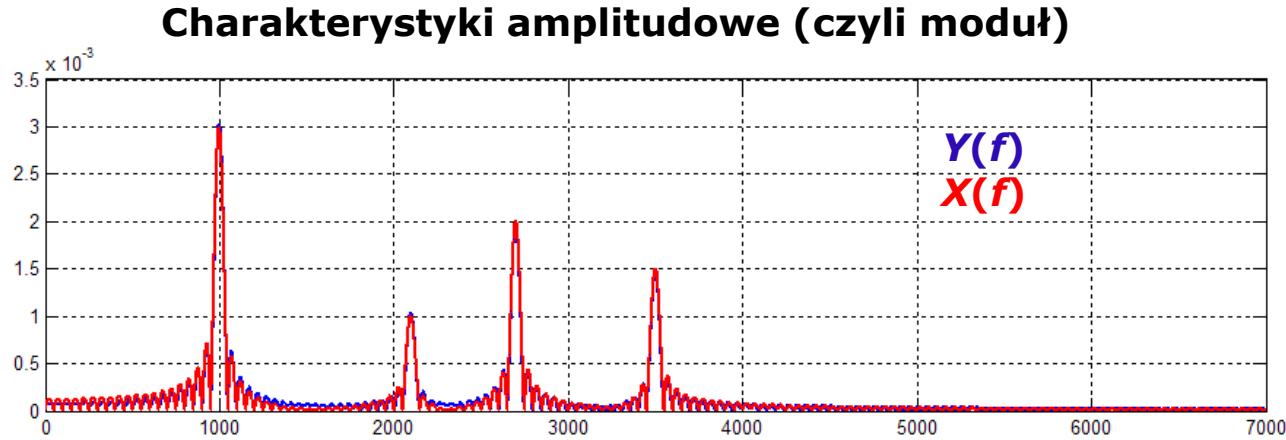


**Charakterystyki amplitudowe (czyli moduł)**

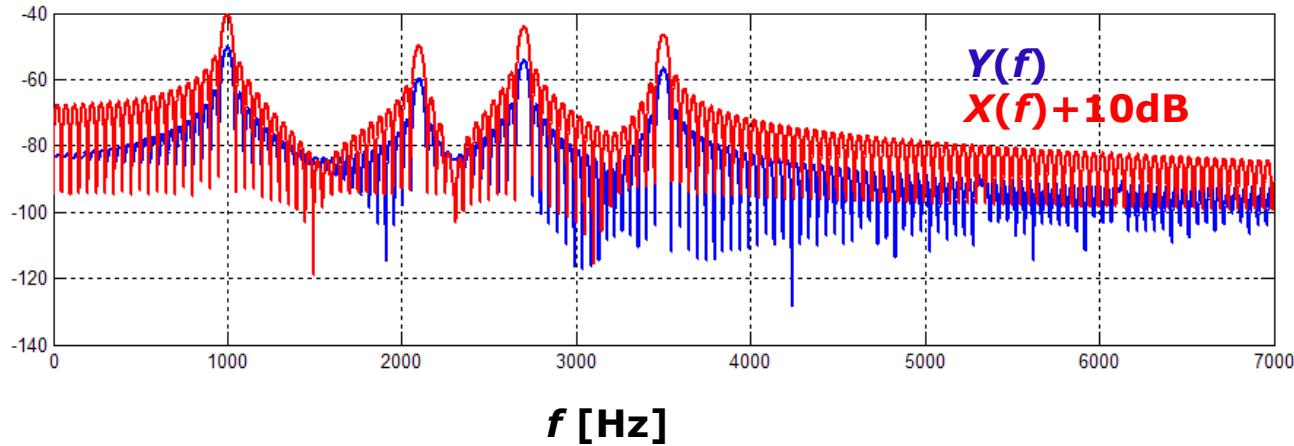


# Próbkowanie „naturalne” we wzmacniaczach mocy klasy D

Skala liniowa



Skala w dB



$f$  [Hz]

# Podsumowanie

- 1. Zmiana argumentu w delcie Diraca.**
- 2. Nieliniowe przetwarzanie sygnałów kosinusoidalnych.**
- 3. Ujemne sprzężenie zwrotne.**
- 4. Teoretyczna pętla fazowa.**
- 5. Próbkowanie z aperturą (różne wersje).**
- 6. Różne warianty odtwarzania sygnału z próbek.**
- 7. Próbkowanie naturalne we wzmacniaczach mocy.**



AGH

*Zapraszam na ćwiczenia ...  
lub do laboratorium ...*