

# Wzory, równania i zależności **z teorii sygnałów**

Łukasz Przystupa

2 lutego 2023

całość opara na wykładach Kohorty.

# 1. Wzory Eulera

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$$

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

# 2. Sygnał jako wektor

Iloczyn skalarny:

$$\langle x, y \rangle = \int_D x(t) \cdot \overline{y(t)} dt$$

Norma (długość wektora):

$$\|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle$$

Metryka (odległość sygnałów):

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x(t) - y(t), x(t) - y(t) \rangle}$$

Korelacja (jak bardzo sygnały są podobne):

$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \overline{x(\tau - t)} d\tau$$

Energia sygnału:

$$Energia(x(t)) = \|X(t)\|_{L^2}^2 = \int_D |x(t)|^2 dt$$

Wektory są ortogonalne (czyli prostopadłe względem siebie (czyli liniowo niezależne)) jeśli:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \|x(t)\| \cdot \|y(t)\| \cdot \cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow x \perp y$$

## 2.1. Twierdzenie Parsevala - o zachowaniu energii

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

## 2.2. Twierdzenie o zmianie skali

$$\delta(a \cdot t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \frac{1}{|a|} \cdot \delta(f)$$

## 2.3. Twierdzenie o zachowaniu odległości

Jeżeli:

$$x(t) \circ y(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(f) \circ Y(f)$$

to:

$$\|x(t) - y(t)\| = \|X(f) - Y(f)\|$$

## 2.4. Splot

Definicja:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$$
$$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

Właściwości splotu:

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X_1(f) X_2(f)$$
$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

## 3. Szereg Fouriera

Postać numeryczna:

$$x_F = a_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot \cos(2\pi n) + b_n \cdot \sin(2\pi n)$$

Postać zespolona:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j2\pi n f_T t} \quad \text{gdzie : } f_T = 1/T$$
$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-j2\pi n f_T t} dt \quad \text{gdzie : } T - \text{okres } x(t)$$

$$\text{Więc w CFT:} \quad c_n = \frac{\Delta t}{T} X_0(n \cdot \frac{1}{T})$$

Sygnał musi spełniać warunki Dirichleta!!!

Postać okresowa:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T)$$

## 4. Definicje różnych transformat

### 4.1. Transformata Fouriera (CFT i ICFT)

$$\begin{array}{ll}
 x(t) \xleftrightarrow[\text{aaa}]{\text{bbb}} X(f) & x(at) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \\
 X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt & x(t-t_0) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(f) e^{-2j\pi ft_0} \\
 & \overline{x(t)} \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \overline{X(-f)}
 \end{array}$$

Należy wspomnieć że iloczyn skalarny jest niezależny od wybranej dziedziny:

$$\begin{array}{c}
 x(t) \circ (y) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(f) \circ Y(t) \\
 \Downarrow \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{y(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \overline{Y(f)} df
 \end{array}$$

### 4.2. Transformacja sygnału próbkowanego

$$\begin{array}{c}
 x_p(t) = x(t) \cdot g_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) \cdot \delta(t - \Delta t) \\
 \Downarrow \\
 X_p(f) = X(f) * G_{\Delta t}(f) = X(f) * \left[ \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n \cdot f_p) \right]
 \end{array}$$

### 4.3. Transformacja Dyskretna (DTFT)

$$\begin{array}{ll}
 x_p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) \cdot \delta(t - n\Delta t) & X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) \cdot e^{-j2\pi \frac{f}{f_p} \cdot n} \\
 & \text{gdzie : } f_p = f \text{ próbkowania}
 \end{array}$$

### 4.4. Transformacja Laplaca

## 4.5. Transformacja Hilberta

Czyli:

$$\begin{aligned}
 x(t) &\xleftrightarrow[\text{IHT}]{HT} x^H(t) & x^H(t) &= \frac{1}{\pi \cdot t} * x(t) = h_H(t) * x(t) \\
 x^H(t) &= -\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau & &\Downarrow \\
 & & h_H(t) &\xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} -j \cdot \text{sgn}(f)
 \end{aligned}$$

## 4.6. Transformacja okienkowana

Odpowiednik transmitancji Fouriera, pomnożonej przez okno:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot w(\tau - t) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$w(t)$  - funkcja okienkowa. Funkcja, która poza przedziałem osiąga 0!

## 4.7. Transformacja Gabora

To specjalny rodzaj transmitancji okienkowej, w której okno jest funkcją Gaussa.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X^G(f, t) \cdot e^{+j2\pi \cdot f \cdot t} df \\
 X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X^G(f, t) dt \\
 X^G(f, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot w(\tau - t) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} d\tau \\
 &\text{gdzie : } w(t) = e^{-\pi \cdot f^2}
 \end{aligned}$$

## 4.8. Transformacja falkowa

$$\begin{aligned}
 X_\psi(a, t) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h_\psi\left(\frac{t - \tau}{a}\right) d\tau \\
 &\Updownarrow \\
 x(t) &= \frac{1}{c_\psi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 \cdot \sqrt{a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X_\psi(a, \tau) h_\psi\left(\frac{\tau - t}{a}\right) d\tau da \\
 &\text{przy czym : } c_\psi 2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{|H_\psi(f)|^2}{f} df < +\infty
 \end{aligned}$$

$h_\psi(t)$  - falka sygnału. Funkcja, która poza przedziałem dąży do 0

## 5. Sygnały podstawowe i ich transformaty

$$x(t) = \sin(2\pi ft)$$

$$x(t) = \cos(2\pi ft)$$

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |t| < 1/2 \\ 1/2 & \text{dla } |t| = 1/2 \\ 0 & \text{dla } |t| > 1/2 \end{cases}$$

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f} & \text{dla } t \neq 0 \\ 1 & \text{dla } t = 0 \end{cases}$$

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1 & \text{dla } -1 \leq t \leq 0 \\ -t+1 & \text{dla } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } t \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } t = 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } t = 0 \\ -1 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$

$$\text{Gaus}(t) = e^{-at^2}$$

$$g_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta t)$$

$$\cos(x) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \frac{1}{2}(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$$

$$\sin(x) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} j\frac{1}{2}(\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0))$$

$$\delta(x) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} 1$$

$$\Pi(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \text{sinc}(\pi f)$$

$$\Lambda(x) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \text{sinc}^2(\pi f)$$

$$g_T(t) = \sum \frac{1}{T} e^{j2\pi f_n t} \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} G_T(f) = \sum \delta(f - \frac{n}{T})$$

$$u(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \frac{1}{2}\delta(f) + \begin{cases} -j \cdot \frac{1}{2\pi f} & \text{dla } f \neq 0 \\ 0 & \text{dla } f = 0 \end{cases}$$

$$\text{sgn}(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \begin{cases} -j \cdot \frac{1}{2\pi f} & \text{dla } f \neq 0 \\ 0 & \text{dla } f = 0 \end{cases}$$

$$e^{-at^2} \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} e^{-af^2}$$

$$G_{\Delta t}(F) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n\frac{1}{\Delta t})$$

## 6. Sygnały okresowe:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T)$$

Gdzie  $x_0(t)$  - wzorzec sygnału,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T) = x_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot T) = x_0(t) * g_T(t)$$

Fukcja  $g_T(t)$  jest to pseudo funkcja reprezentująca grzebień Diraca

Dla funkcji zespolonych:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{j2\pi n f_T t} \quad f_T = \frac{1}{T}$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n c_n = \frac{1}{T} X_0(f_n) \quad f_n = n \cdot f_T$$

## 7. Aproksymacja sygnału

Aproksymacją sygnału  $x(t)$  jest:

$$x(t) \approx \sum_{n=1}^N a_n b_n(t)$$

czyli:

$$x(t) + e(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cdot b_n(t)$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cdot b_n - e(t)$$

gdzie współczynniki  $a$  i  $b$  odpowiadają macierzom:

$$b = A \cdot a$$

$$b = \begin{bmatrix} x \circ b_1 \\ x \circ b_2 \\ x \circ b_3 \\ \dots \\ x \circ b_N \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} b_1 \circ b_1 & b_2 \circ b_1 & \dots & b_N \circ b_1 \\ b_1 \circ b_2 & b_2 \circ b_2 & \dots & b_N \circ b_2 \\ b_1 \circ b_3 & b_2 \circ b_3 & \dots & b_N \circ b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 \circ b_N & b_2 \circ b_N & \dots & b_N \circ b_N \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_N \end{bmatrix}$$

W gdyby wektory byłyby ortogonalne, całość sprowadza się do prostego równania:

$$a_k = \frac{x \circ b_k}{||b_k||^2} \quad k = 1, 2, \dots, N$$

Kiedy nasze wektory są znormalizowane to:

$$||b_k||^2 = 1$$

$$a_k = x \circ b_k \quad k = 1, 2, \dots, N$$

## 8. Baza Harra (ortonormalna)

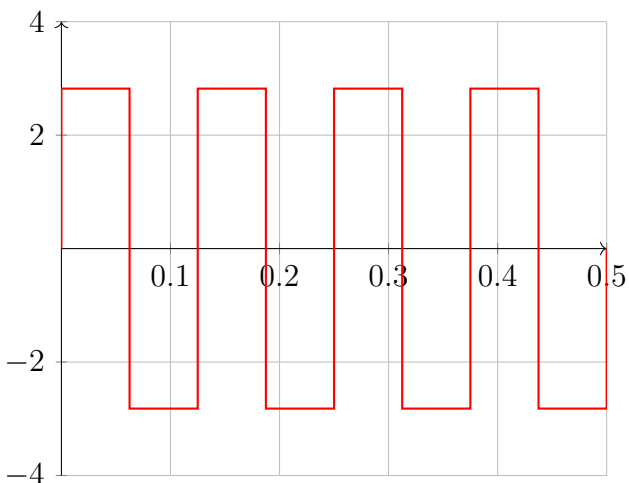
$$H_{0,0}(t) = \Pi(t - 0.5)$$

$$D : t \in < 0, 1 >$$

$$H_{0,1} = \Pi(2 \cdot (t - 0.25)) - \Pi(2 \cdot (t - 0.75))$$

$$H_{k,m} = 2^{\frac{k}{2}} \cdot H(2^k \cdot (t - \frac{m-1}{2^k}))$$

$$m = 1, 2, \dots, 2^k$$



Czyli kolejne sygnały bazy:

$$b_1(t) = H_{0,0}(t)$$

$$b_2(t) = H_{1,\Sigma}(t)$$

$$b_3(t) = H_{2,\Sigma}(t)$$

$$b_4(t) = H_{3,\Sigma}(t)$$

...

## 9. Baza Walsha

$$W_{0,0}(t) = \Pi(t - 0.5)$$

$$D : t \in < 0, 1 >$$

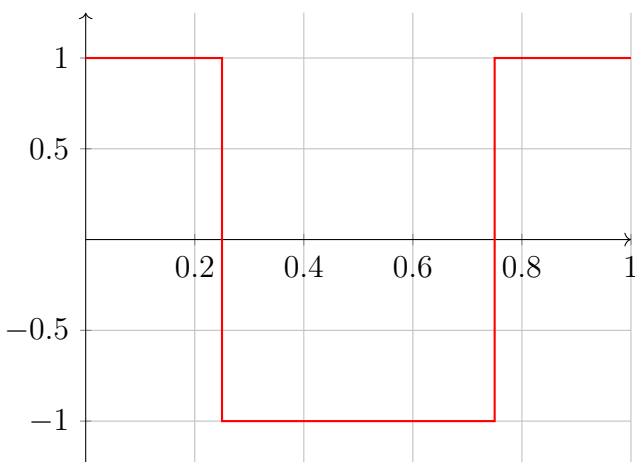
$$W_{0,1}(t) = W_{0,0}(2t) + (-1)^1 \cdot W_{0,0}(2 \cdot (t - 0.5))$$

$$W_{k,2m-1}(t) = W_{k-1,m}(2t) + (-1)^{m-1} \cdot W_{k-1,m}(2 \cdot (t - 0.5))$$

$$\text{dla } k > 1$$

$$W_{k,2m}(t) = W_{k-1,m}(2t) + (-1)^m \cdot W_{k-1,m}(2 \cdot (t - 0.5))$$

$$\text{dla } k > 1$$



Analogicznie jak w bazie Harra



## 10. Twierdzenie o pochodnej

Pochodna pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} \text{dla } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) &= 0 \\ \frac{d}{dt}x(t) &\overset{\text{CFT}}{\underset{\text{ICFT}}{\longleftrightarrow}} j2\pi f \cdot X(f) \end{aligned}$$

Pochodna n-tego rzędu:

$$\begin{aligned} \text{dla } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} x^{(m)}(t) &= 0 : m = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{d^n}{dt^n}x(t) &\overset{\text{CFT}}{\underset{\text{ICFT}}{\longleftrightarrow}} (j2\pi f)^n \cdot X(f) \end{aligned}$$

## 11. Twierdzenie o całce

$$\int_t^{-\infty} x(\tau) d\tau \overset{\text{CFT}}{\underset{\text{ICFT}}{\longleftrightarrow}} \frac{1}{j2\pi f} \cdot X(f) \text{ dla } f \neq 0$$

dla  $f = 0$  liczymy osobno.

## 12. Filtry

Głównym parametrem określającym filtr jest jego transmitancja:

$$H(s) = \frac{b_0 \cdot s^0 + b_1 \cdot s^1 + b_2 \cdot s^2 \dots}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 \dots}$$

Transmitancje można rozłożyć na ułamki proste, tak że miejsca zerowania licznika to „zera” a miejsca zerowania mianownika to „bieguny”

$$H(s) = \frac{b}{a} \cdot \frac{(s - z_0) \cdot (s - z_1) \dots}{(s - p_0) \cdot (s - p_1) \dots}$$

Następnie zgodnie z zasadą na rozkładanie na ułamki proste:

$$H(s) = \frac{c_0}{s - p_0} + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_3}{s - p_3} + \dots$$

Z założeniem że:

$$c_k = H(s) \cdot (s - p_k)|_{s=p_k}$$

Dla tych biegunów których część rzeczywista jest ujemna, filtr jest stabilny. Dla części leżącej na 0 układ jest meta stabilny i potrzebne są dodatkowe obliczenia aby potwierdzić jego stabilność. Natomiast dla tych, których część rzeczywista jest dodatnia układ jest niestabilny.

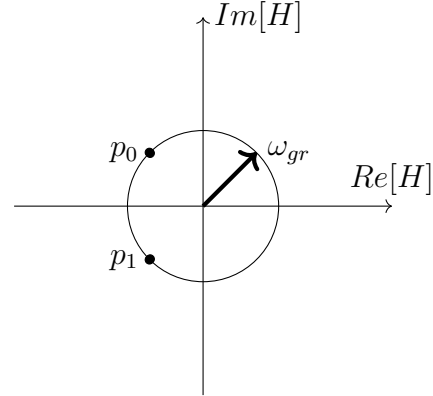
## 12.1. Filtr dolnoprzepustowy Butterwortha

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_{gr}}\right)^{2N}} \Rightarrow |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_{gr}}\right)^{2N}}}$$

gdzie N oznacza rząd filtru (im wyższy tym bardziej strome zbocze zaraz po  $f_{gr}$ )

Dużo łatwiej jednak wyjść z:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\omega_{gr}^N}{(s - p_0)(s - p_1)\dots} = \\ &= \frac{c_0}{s - p_0} + \frac{c_1}{s - p_1} + \dots \end{aligned}$$



gdzie N - ilość biegunów

$$\begin{aligned} \text{gdy } s &= j2\pi f \\ H(f) &= \frac{c_0}{j2\pi f - p_0} + \frac{c_1}{j2\pi f - p_1} + \dots \end{aligned}$$

Odpowiedz impulsowa :

$$h(t) = u(t) \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot e^{p_n \cdot t}$$

## 12.2. Filtr dolnoprzepustowy, górno i pasmowe

Wszystkie powyższe rozważania były dla filtru dolnoprzepustowego

$$\begin{aligned} H_{FDP}(f) &= H_0 \left( \frac{f}{f_g} \right) & H_{FPP}(f) &= H_0 \left( \frac{f^2 - f_d \cdot f_g}{f \cdot (f_g - f_d)} \right) \\ H_{FGP}(f) &= H_0 \left( -\frac{f_d}{f} \right) & H_{FPZ}(f) &= H_0 \left( -\frac{f \cdot (f_g - f_d)}{f^2 - f_d \cdot f_g} \right) \end{aligned}$$

Dla charakterystyk Laplaca:

$$\begin{aligned} H_{FDP}(s) &= H_0 \left( j2\pi \frac{s}{s_g} \right) & H_{FPP}(s) &= H_0 \left( 2\pi \frac{s^2 - s_d \cdot s_g}{s \cdot (s_g - s_d)} \right) \\ H_{FGP}(s) &= H_0 \left( -j2\pi \frac{s_d}{s} \right) & H_{FPZ}(s) &= H_0 \left( -2\pi \frac{s \cdot (s_g - s_d)}{s^2 - s_d \cdot s_g} \right) \end{aligned}$$

## 13. Próbkowanie

Próbkujemy sygnał pseudo funkcją grzebieniową:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - n\Delta t)$$

W dziedzinie Fouriera odpowiada to:

$$X_p(f) = \frac{1}{\Delta t} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n \cdot f_p)$$

*gdzie* :  $f_p = \frac{1}{\Delta t}$

Aby odtworzyć sygnał należy:

Gdzie:

$$X(f) = X_p(f) \cdot H(f) \qquad H(f) = \Delta t \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_p}\right)$$

$H(f)$  - funkcja transmitancji idealnego filtra dolnoprzepustowego

Czyli, funkcja odtworzona w dziedzinie czasu ma postać:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) \cdot \text{sinc}(\pi f_p \cdot (t - \Delta t))$$