AGH

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Teoria sygnałów

Wykład 12

Dr inż. Przemysław Korohoda
Katedra Elektroniki, AGH, Kraków

home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2

UPEL: TS 2022

Plan wykładu

1. Zmiana argumentu w delcie Diraca.
2. Nieliniowe przetwarzanie sygnałów kosinusoidalnych.
3. Ujemne sprzężenie zwrotne.
4. Teoretyczna pętla fazowa.
5. Próbkowanie z aperturą (różne wersje).
6. Różne warianty odtwarzania sygnału z próbek.
7. Próbkowanie naturalne we wzmacniaczach mocy.

Zmiana skali argumentu w delcie Diraca

$$1 \underset{ICFT_f}{\overset{CFT_f}{\rightleftarrows}} \delta(f)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df = e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot t} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f)\, df = 1$$

$$1 \underset{ICFT_\omega}{\overset{CFT_\omega}{\rightleftarrows}} 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega)$$

$$\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} d\omega = e^{j \cdot 0 \cdot t} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega)\, d\omega = 1$$

Zmiana skali argumentu w delcie Diraca:

$$dla \quad a \neq 0: \quad \delta(a \cdot t) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(t)$$

$$dla \quad a \neq 0: \quad \delta(a \cdot f) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(f)$$

$$dla \quad a \neq 0: \quad \delta(a \cdot \omega) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(\omega)$$

Zmiana skali argumentu w delcie Diraca

$$\boxed{dla \quad a \neq 0: \quad \delta(a \cdot t) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(t)}$$

Dlaczego?

Pamiętamy, że:

$$\lim_{a \to 0^+} \frac{1}{a} \cdot \Pi\left(\frac{t}{a}\right) = \delta(t) \qquad \lim_{a \to 0} \frac{1}{|a|} \cdot \Pi\left(\frac{t}{a}\right) = \delta(t)$$

Czy parametr oznaczymy „a”, czy „c”, to powyższe zapisy są prawdziwe.

Czyli:

$$\lim_{c \to 0^+} \frac{1}{c} \cdot \Pi\left(\frac{t}{c}\right) = \delta(t) \qquad \lim_{c \to 0} \frac{1}{|c|} \cdot \Pi\left(\frac{t}{c}\right) = \delta(t)$$

Zatem przyjmując dowolne, ale stałe „a” zapisujemy:

$$\delta(a \cdot t) = \lim_{c \to 0} \frac{1}{|c|} \cdot \Pi\left(a \cdot \frac{t}{c}\right) = \lim_{c/a \to 0} \frac{1}{|a \cdot c / a|} \cdot \Pi\left(\frac{t}{c/a}\right) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(t)$$

Zmiana skali argumentu w delcie Diraca

$$\lim_{a\to 0^+} \frac{1}{a}\cdot\Pi\left(\frac{t}{a}\right) = \delta(t)$$

$$\boxed{\lim_{a\to 0^+} \frac{1}{a}\cdot\Pi\left(\frac{t-t_0}{a}\right) = \delta(t-t_0)}$$

$$\boxed{\lim_{a\to 0^+} \frac{1}{a}\cdot\Pi\left(\frac{t}{a}-t_0\right) = \lim_{a\to 0^+} \frac{1}{a}\cdot\Pi\left(\frac{t-a\cdot t_0}{a}\right) = \delta(t)}$$

Przykład: transformata sygnału kosinusoidalnego

Dwa przepisy:
a) tw. o zmianie skali w dziedzinie czasu,
b) zmiana skali argumentu w delcie Diraca.

$$dla \quad a \neq 0: \quad \delta(a \cdot f) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(f)$$

$$\cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

$$\cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 / a \cdot t) \quad \leftrightarrow \quad ???$$

$$\cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t / a) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot |a| \cdot [\delta(a \cdot f + f_0) + \delta(a \cdot f - f_0)]$$

$$\frac{1}{2} \cdot |a| \cdot [\delta(a \cdot f + f_0) + \delta(a \cdot f - f_0)] = \frac{1}{2} \cdot \frac{|a|}{|a|} \cdot \left[\delta\left(\frac{a \cdot f + f_0}{a}\right) + \delta\left(\frac{a \cdot f - f_0}{a}\right)\right]$$

$$\cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 / a \cdot t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot [\delta(f + f_0 / a) + \delta(f - f_0 / a)]$$

Sygnał kosinusoidalny przetworzony nieliniowo

Przykład 1

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t + \varphi_0)$$

$$y(t) = x(t) + x^2(t)$$

$$y(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t + \varphi_0) + \frac{1}{2} \cdot \left[\cos(2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot f_x) \cdot t + 2 \cdot \varphi_0) + \cos(0)\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \cos(0) + \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t + \varphi_0) + \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot f_x) \cdot t + 2 \cdot \varphi_0)$$

$$\boxed{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right]}$$

Sygnał kosinusoidalny przetworzony nieliniowo

Przykład 2

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t + \varphi_0)$$

$$y(t) = x^3(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t + \varphi_0) \cdot \left[\cos(2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot f_x) \cdot t + 2 \cdot \varphi_0) + \cos(0)\right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\cos(2 \cdot \pi \cdot (3 \cdot f_x) \cdot t + 3 \cdot \varphi_0) + \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t + \varphi_0)\right] + \frac{1}{2} \cdot \cos(0) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t + \varphi_0) + \frac{1}{4} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot (3 \cdot f_x) \cdot t + 3 \cdot \varphi_0)$$

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right]$$

Iloczyn dwóch sygnałów

$$x(t) = \sum_{k=0}^{K_x} a_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_{xk} \cdot t + \varphi_{xk0})$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{K_y} b_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_{yk} \cdot t + \varphi_{yk0})$$

$$z(t) = x(t) \cdot y(t) = \sum_{k=0}^{K_x} \sum_{m=0}^{K_y} a_k \cdot b_m \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_{xk} \cdot t + \varphi_{xk0}) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_{ym} \cdot t + \varphi_{ym0})$$

Pojawią się zatem wszystkie możliwe częstotliwości:

$$\left| f_{xk} \pm f_{ym} \right|$$

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \right]$$

Sygnał kosinusoidalny przetworzony nieliniowo
Wnioski ogólne

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t + \varphi_{k0})$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N} c_n \cdot x^n(t)$$

$$x(t) \rightarrow \quad f_x$$

$$x^2(t) \rightarrow \quad 0, 2 \cdot f_x$$

$$x^3(t) \rightarrow \quad f_x, 3 \cdot f_x$$

$$x^4(t) = x^2(t) \cdot x^2(t) = x(t) \cdot x^3(t) \rightarrow \quad 0, 2 \cdot f_x, 4 \cdot f_x$$

$$x^5(t) = x^3(t) \cdot x^2(t) \rightarrow \quad f_x, 3 \cdot f_x, 5 \cdot f_x$$

.

.

.

$$x^n(t) \rightarrow 0, 2 \cdot f_x, ..., n \cdot f_x \quad \text{lub} \quad x^n(t) \rightarrow f_x, 3 \cdot f_x, ..., n \cdot f_x$$

n - parzyste *n* - nieparzyste

Do przemyślenia: analogiczne rozważania dla sygnału

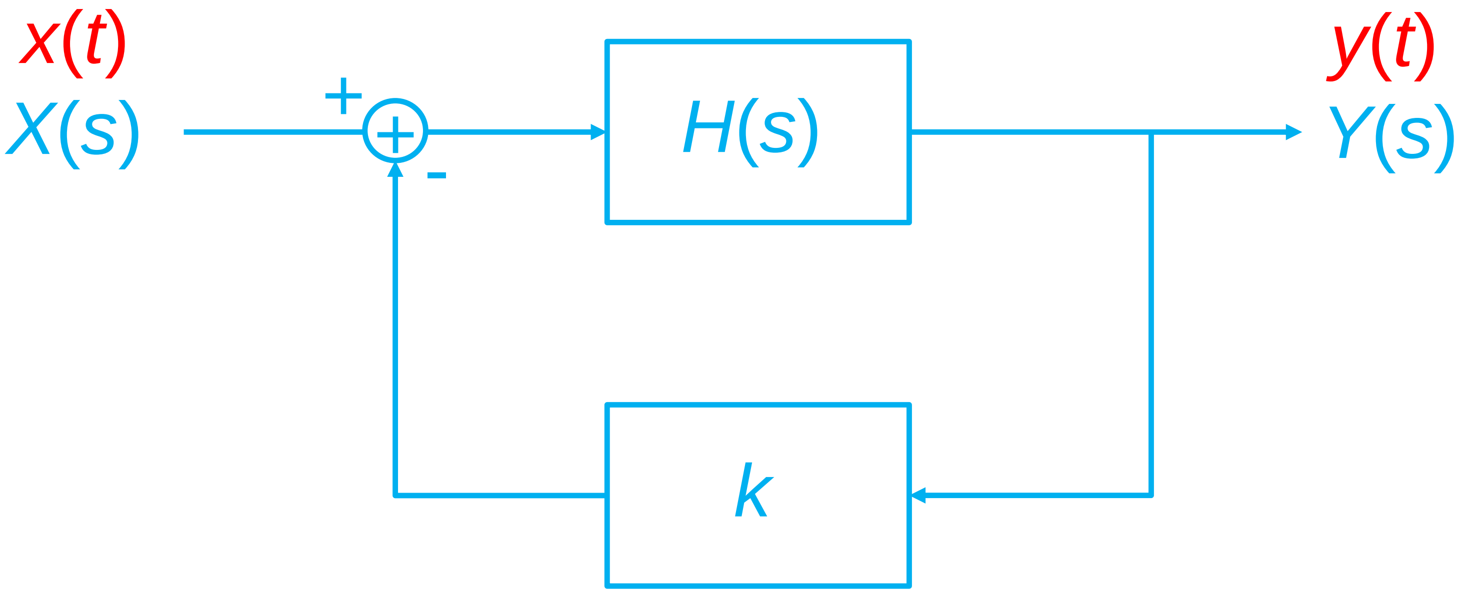
$$x(t) = \sum_{k=0}^{K} a_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_k \cdot t + \varphi_{k0})$$

Układ z ujemnym sprzężeniem zwrotnym

$$H(s) = \frac{A}{s - s_0}$$

$\boxed{s_0, A, k \in \Re}$ $\boxed{1 > k > 0}$

$\boxed{s_0 = -2 \cdot \pi \cdot f_g}$



Ujemne sprzężenie zwrotne (USZ) - system stacjonarny, liniowy „jednobiegunowy”

$$H(s)=\frac{A}{s-s_0}$$

$$\boxed{s_0, A, k \in \Re}$$

$$\boxed{s_0=-2\cdot\pi\cdot f_g}$$

$$H(f) = \frac{A}{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f+2\cdot\pi\cdot f_g}$$

$$= A\cdot\frac{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f+2\cdot\pi\cdot f_g}{4\cdot\pi^2\cdot(f^2+f_g{}^2)}$$

$$\boxed{A>0}$$

$$|H(f)|\big|_{f=0}=|H(0)| = \frac{A}{2\cdot\pi\cdot f_g}$$

$$|H(f)|\big|_{f=f_g}=|H(f_g)| = A\cdot\frac{\sqrt{4\cdot\pi^2\cdot f_g{}^2+4\cdot\pi^2\cdot f_g{}^2}}{8\cdot\pi^2\cdot f_g{}^2}$$

$$=\frac{A}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\pi\cdot f_g}=\frac{|H(0)|}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{|H(0)|\cdot f_g=\frac{A}{2\cdot\pi}}$$

$$G(f)=\frac{H(f)}{1+k\cdot H(f)}$$

zazwyczaj $\boxed{1>k>0}$

$$G(s)=\frac{H(s)}{1+k\cdot H(s)}=\frac{\frac{A}{s-s_0}}{1+k\cdot\frac{A}{s-s_0}}=$$

$$=\frac{A}{s-s_0+k\cdot A}=\frac{A}{s-(s_0-k\cdot A)}$$

$$s_0'=s_0-k\cdot A=-2\cdot\pi\cdot f_g-k\cdot A$$

$$2\cdot\pi\cdot f_g'=2\cdot\pi\cdot f_g+k\cdot A$$

$$f_g'=f_g+\frac{k\cdot A}{2\cdot\pi}\approx\frac{k\cdot A}{2\cdot\pi}$$

$$\boxed{k\cdot A>>2\cdot\pi\cdot f_g}$$

$$|G(0)|=\frac{A}{2\cdot\pi\cdot f_g+k\cdot A}\approx\frac{1}{k}$$

$$\boxed{|G(0)|\cdot f_g'=\frac{A}{2\cdot\pi}}$$

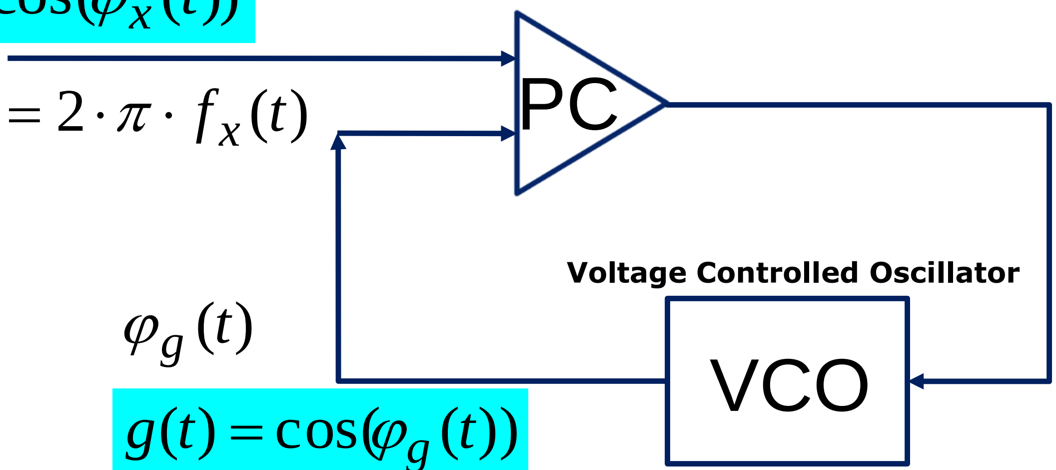
Teoretyczna pętla fazowa (*ang. PLL*)

Phase Locked Loop

$\varphi_x(t)$

$$x(t) = \cos(\varphi_x(t))$$

$$\frac{d}{dt}\varphi_x(t) = 2\cdot\pi\cdot f_x(t)$$



$$\Delta\varphi(t) = \varphi_x(t) - \varphi_g(t)$$

$$u_s(t) = \cos(\Delta\varphi(t))$$

$\varphi_g(t)$

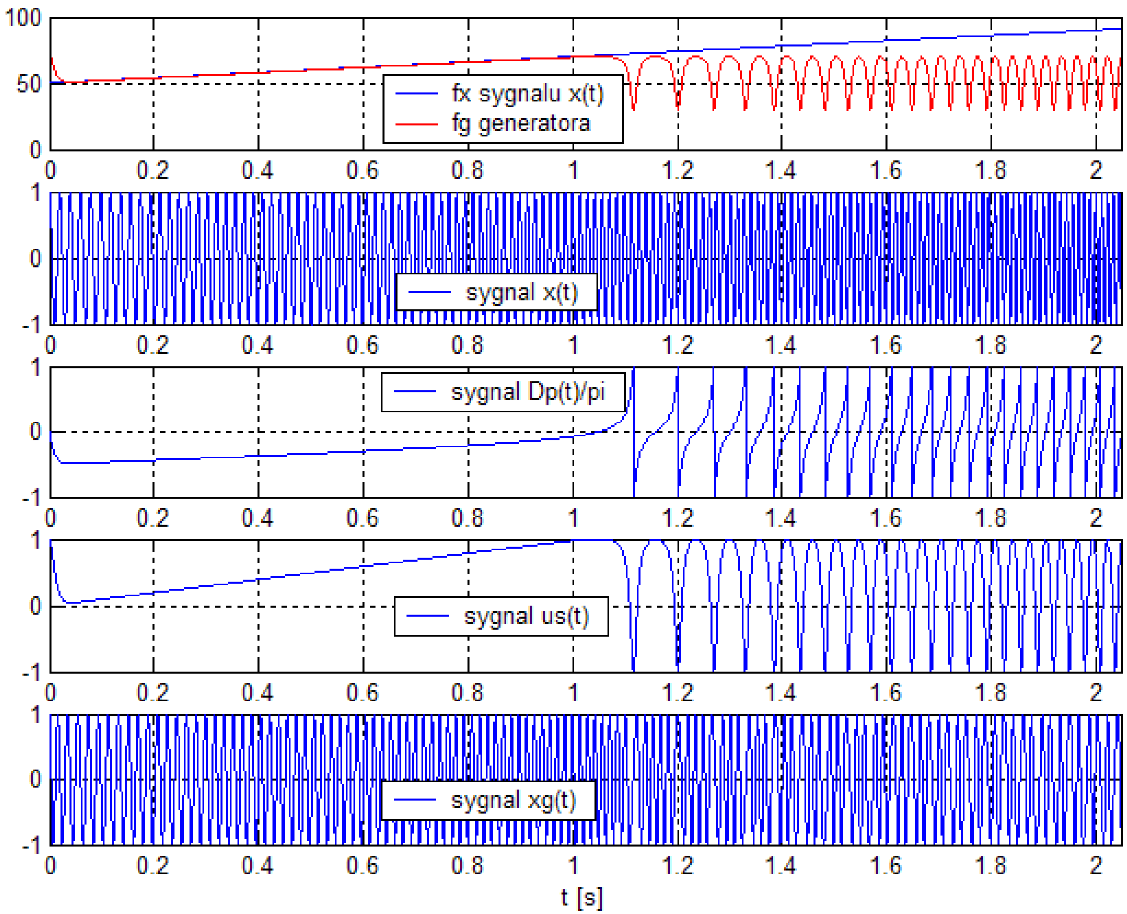
$$g(t) = \cos(\varphi_g(t))$$

$$f_g(t) = f_0 + K\cdot u_s(t)$$

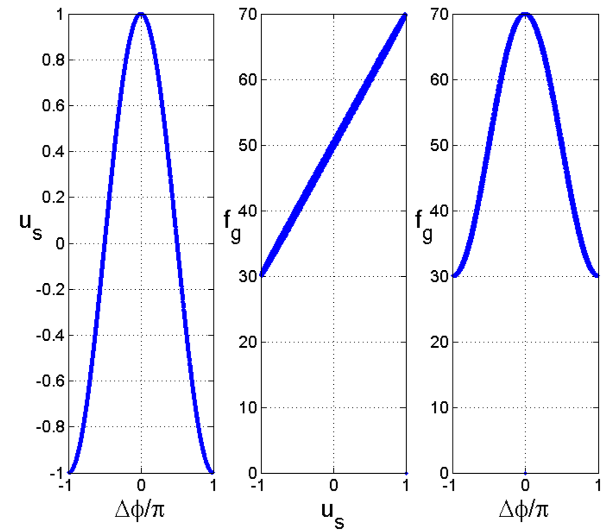
$$\frac{d}{dt}\varphi_g(t) = 2\cdot\pi\cdot f_g(t)$$

Teoretyczna pętla fazowa (*ang. PLL*)

$$\varphi_x(t) = (2 \cdot \pi \cdot f_0 + a \cdot t) \cdot t$$



$xg(t) = g(t)$

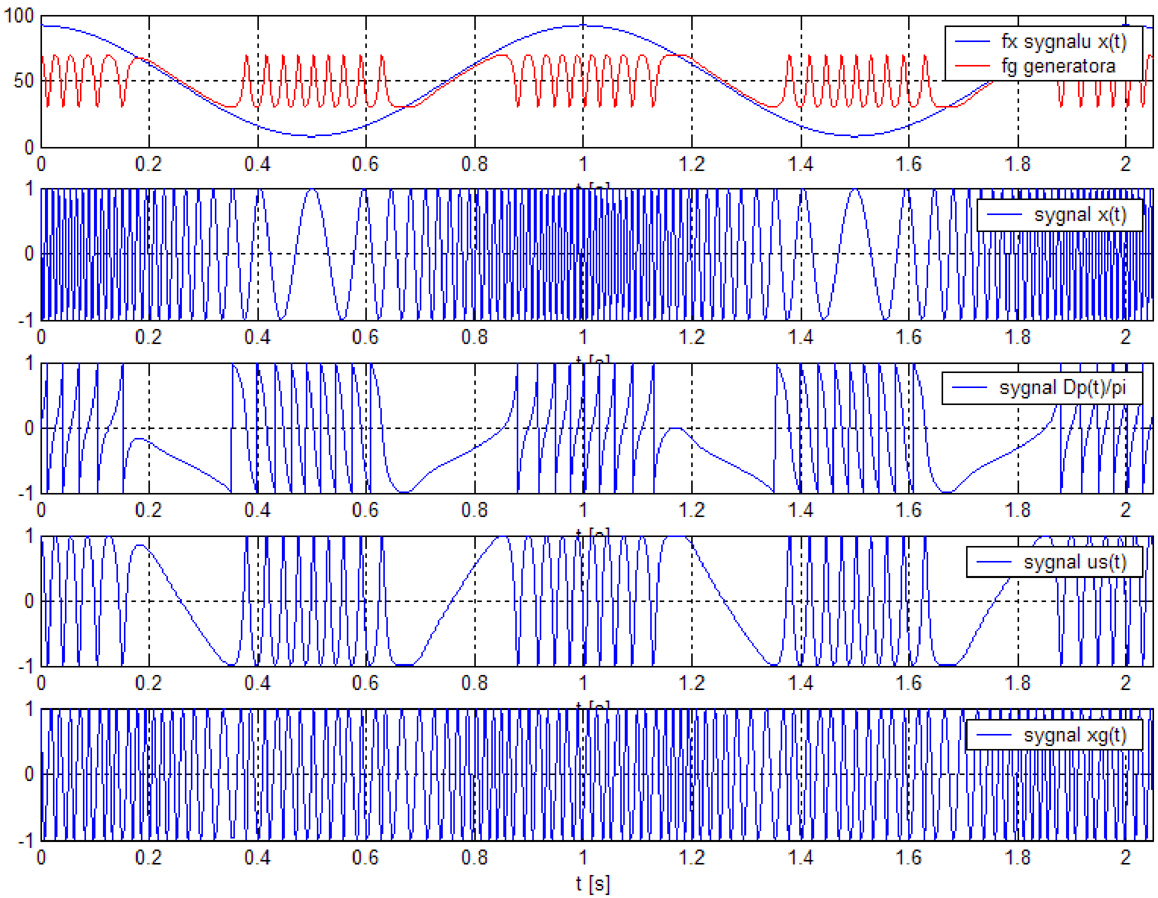


$\boldsymbol{f_o}$**=50Hz**
***K*=20**
***a*=10**

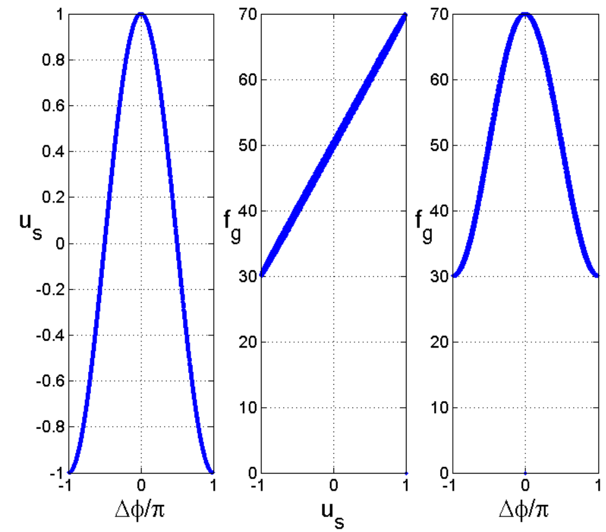
Dp=Δ*φ*

Teoretyczna pętla fazowa (*ang. PLL*)

$$\varphi_x(t) = 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t + B_m\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f_m\cdot t)$$



$xg(t) = g(t)$

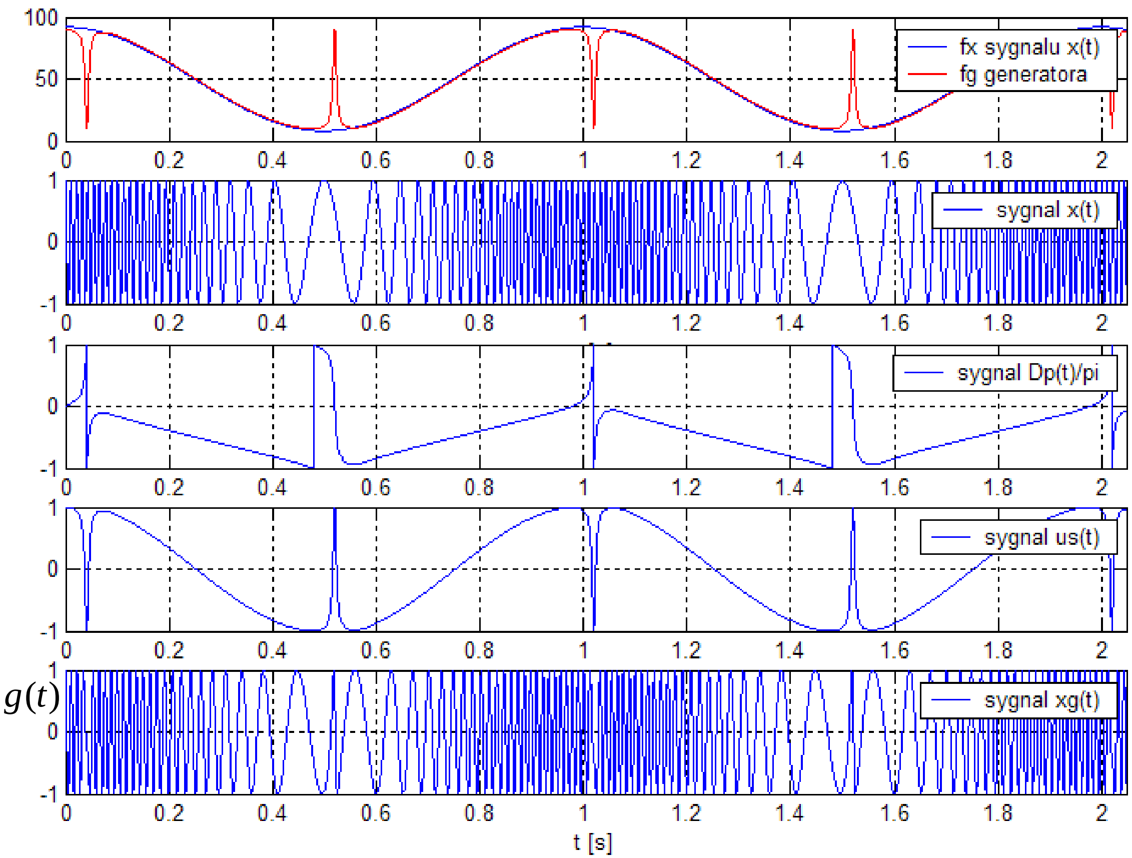


***f*$_o$=50Hz**
***K*=20**
***B*$_m$=42**
***f*$_m$=1Hz**

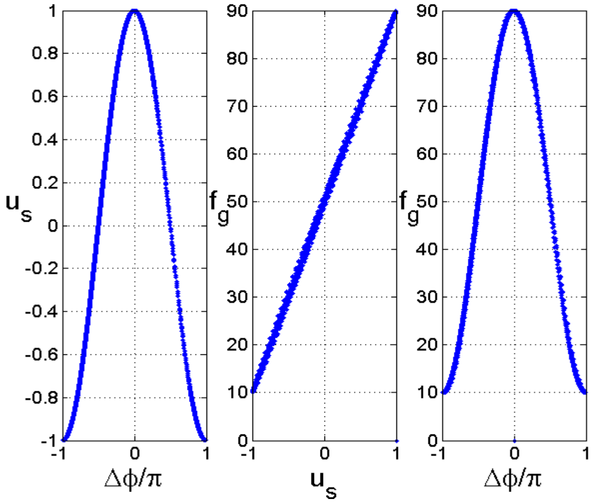
Dp=Δ*φ*

Teoretyczna pętla fazowa (*ang. PLL*)

$$\varphi_x(t) = 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + B_m \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_m \cdot t)$$



$xg(t) = g(t)$



***f*$_o$=50Hz**
***K*=40**
***B*$_m$=42**
***f*$_m$=1Hz**

Dp=Δ*φ*

Próbkowanie idealne (powtórka)

$$x(t) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X(f)$$

$$x_p(t) = x(t) \cdot p(t)$$

***p*(*t*) – funkcja próbkująca**

$$X_p(f) = X(f) * P(f)$$

W tym przypadku:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t)$$

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\longleftrightarrow}} \frac{1}{\Delta t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot f_p)}$$

$$\boxed{f_p = \frac{1}{\Delta t}}$$

Zatem transformata (CTF) po spróbkowaniu:

$$\boxed{X_p(f) = \frac{1}{\Delta t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - k \cdot f_p)}$$

Próbkowanie z aperturą (wersja 1) - naturalne

$$x(t) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X(f) \qquad x_p(t) = x(t)\cdot p(t) \qquad X_p(f) = X(f) * P(f) \qquad T < \Delta t$$

W tym przypadku okno próbkujące „otwiera się” na czas *T*, w którym kopiuje sygnał:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - n\cdot\Delta t}{T}\right)$$

Środek okna znajduje się w punkcie próbkowania.

***p*(*t*) jest okresowe, ze wzorcem okresu $p_0(t)$, zatem jego transformata musi być następująca:**

$$p_0(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\longleftrightarrow}} P_0(f) = T\cdot\mathrm{sinc}(\pi\cdot f\cdot T)$$

$$P(f) = \frac{1}{\Delta t}\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_0(n\cdot f_0)\cdot\delta(f - n\cdot f_0)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - n\cdot\Delta t}{T}\right) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\longleftrightarrow}} \frac{T}{\Delta t}\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}(\pi\cdot k\cdot f_p\cdot T)\cdot\delta(f - k\cdot f_p)$$

Zatem transformata (CTF) po spróbkowaniu:

$$\boxed{X_p(f) = \frac{T}{\Delta t}\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}(\pi\cdot(k\cdot f_p)\cdot T)\cdot X(f - k\cdot f_p)}$$

…czyli odtwarzanie sygnału jest oczywiste.

Nie zależy od *f*, ale zależy od *k* – czyli jest to mnożnik (liczba).

Próbkowanie „z aperturą” (wersja 2) - chwilowe

$$x(t) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X(f)$$

Wartość próbki idealnej staje się amplitudą prostokąta o szerokości *T*.

$$T < \Delta t$$

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \Pi\left(\frac{t - n \cdot \Delta t}{T}\right)$$

Środek prostokąta znajduje się w punkcie próbkowania.

$$x_p(t) = \left[x(t) \cdot p(t)\right] * \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\boxed{p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - n \cdot \Delta t\right)}$$

$$X_p(f) = \left[X(f) * P(f)\right] \cdot \mathrm{sinc}(\pi \cdot f \cdot T) \cdot T$$

Zatem transformata jest taka jak dla próbkowania idealnego, jednak z obwiednią „sinc” oraz mnożnikiem *T*. W tym przypadku obwiednia jest funkcją *f* !

…czyli odtwarzanie sygnału wymaga skompensowania tego efektu.

Próbkowanie „z aperturą” (wersja 3) - chwilowe, z opóźnieniem

Bardziej realistyczna wersja:
w tym przypadku w punkcie próbkowania znajduje się początek próbkującego prostokąta.

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \Pi\left(\frac{t - n \cdot \Delta t - T/2}{T}\right)$$

$$x_p(t) = \left[x(t) \cdot p(t)\right] * \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

$$X_p(f) = \left[X(f) * P(f)\right] \cdot \operatorname{sinc}(\pi \cdot f \cdot T) \cdot T \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot f \cdot T}$$

Mnożnik „exp” na końcu daje jedynie liniową modyfikację fazy – sygnał spróbkowany jest opóźniony o *T/2*.

Takie opóźnienie można niekiedy zignorować.

Próbkowanie z aperturą (wersja 4) - naturalne z całkowaniem całościowym

Próbkowanie naturalne z aperturą:

$$\boxed{x_p(t) = x(t)\cdot p(t)}\qquad \boxed{p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - n\cdot\Delta t}{T}\right)}$$

… dlatego:

$$x_c(t) = \int_{-\infty}^{t} x_p(\tau)\, d\tau \quad \longleftrightarrow \quad X_c(f) \overset{f\neq 0}{=} \frac{1}{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f}\cdot X_p(f)$$

Jeżeli założymy: $\boxed{X_p(0) = 0}$ **to:** $\boxed{X_c(0) = 0}$

$$\boxed{X_p(f) = \frac{T}{\Delta t}\cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}\left(\pi\cdot(k\cdot f_p)\cdot T\right)\cdot X(f - k\cdot f_p)}$$

Ostatecznie:

$$\boxed{X_c(f) = \frac{1}{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f}\cdot\frac{T}{\Delta t}\cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}\left(\pi\cdot(k\cdot f_p)\cdot T\right)\cdot X(f - k\cdot f_p)}$$

Zależy od *f*, czyli tworzy obwiednię.

Próbkowanie z aperturą (wersja 5) - z całkowaniem lokalnym

$$x(t) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X(f)$$

W tej wersji wynik próbkowania jest pseudo-funkcją grzebieniową modulowaną wynikiem całkowania:

$$\boxed{x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \cdot \int_{-\infty}^{t+T/2} p_n(\tau) \cdot x(\tau)\, d\tau} \qquad \boxed{T < \Delta t} \qquad \textbf{(1)}$$

gdzie:

$$\boxed{p_n(t) = \Pi\left(\frac{t - n \cdot \Delta t}{T}\right)}$$

jest elementem ciągu okien próbkujących:

$$\boxed{p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(t)}$$

Po uwzględnieniu okien wzór (1) można przepisać następująco:

$$\boxed{x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \cdot \int_{n\cdot\Delta t - T/2}^{n\cdot\Delta t + T/2} x(\tau)\, d\tau} \qquad \textbf{(2)}$$

Próbkowanie z aperturą (wersja 5) - z całkowaniem lokalnym

$$\boxed{x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \cdot \int_{n \cdot \Delta t - T/2}^{n \cdot \Delta t + T/2} x(\tau)\, d\tau} \qquad \textbf{(2)}$$

Wprowadźmy sygnał *y*(*t*):

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau}$$

… i teraz wzór (2) możemy przepisać kolejno:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \cdot \left[y(n \cdot \Delta t + T/2) - y(n \cdot \Delta t - T/2) \right] \qquad \textbf{(3)}$$

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \cdot \left[y(t + T/2) - y(t - T/2) \right] \qquad \textbf{(4)}$$

$$x_c(t) = \left[y(t + T/2) - y(t - T/2) \right] \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \qquad \textbf{(5)}$$

Próbkowanie z aperturą (wersja 5) - z całkowaniem lokalnym

$$\boxed{x_c(t) = \left[y(t+T/2) - y(t-T/2)\right]\cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-n\cdot\Delta t)} \qquad \textbf{(5)}$$

$$\boxed{x_c(t) = \left[y(t+T/2) - y(t-T/2)\right]\cdot g_{\Delta t}(t)}$$

$$\boxed{g_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-n\cdot\Delta t)} \qquad \boxed{\Delta t = \frac{1}{f_p}} \qquad \boxed{g_{\Delta t}(t) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\longleftrightarrow}} \frac{1}{\Delta t}\cdot g_{f_p}(f)}$$

$$X_c(f) = Y(f)\cdot\left[e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot T/2} - e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot T/2}\right] * g_{f_p}(f)\cdot\frac{1}{\Delta t}$$

$$\boxed{Y(f) = \frac{1}{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f}\cdot X(f)}$$

$$\boxed{X_c(f) = \frac{T}{\Delta t}\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}\left(\pi\cdot(f-k\cdot f_p)\cdot T\right)\cdot X(f-k\cdot f_p)}$$

Zależy od *f*, czyli tworzy obwiednię typu „sinc” – osobną dla każdej kopii *X*(*f*).

Próbkowanie z aperturą (wersja 6) - z całkowaniem lokalnym, z opóźnieniem

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \cdot \int_{-\infty}^{t} p_n(\tau) \cdot x(\tau)\, d\tau$$

czyli okno próbkujące musi poprzedzać „punkt próbki”

$$p_n(t) = \Pi\left(\frac{t - n \cdot \Delta t + T/2}{T}\right) \qquad p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(t)$$

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t) \cdot \int_{n \cdot \Delta t - T}^{n \cdot \Delta t} x(\tau)\, d\tau$$

Inne (niż sinc) sposoby odtwarzania sygnału analogowego z próbek

$$x_\Pi(t) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] \cdot \Pi\left(\frac{t-n\cdot\Delta t}{\Delta t}\right) \longleftrightarrow X_\Pi(f) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]\cdot\Delta t\cdot \mathrm{sinc}(\pi\cdot f\cdot\Delta t)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot n\cdot\Delta t}$$

$$\boxed{\Lambda\left(\frac{t}{\Delta t}\right) \leftrightarrow \Delta t\cdot \mathrm{sinc}^2(\pi\cdot f\cdot\Delta t)}$$

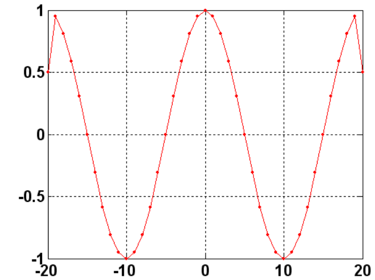
$$x_\Lambda(t) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] \cdot \Lambda\left(\frac{t-n\cdot\Delta t}{\Delta t}\right) \longleftrightarrow X_\Lambda(f) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]\cdot\Delta t\cdot \mathrm{sinc}^2(\pi\cdot f\cdot\Delta t)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot n\cdot\Delta t}$$

Próbki można też notować tak: $x[n] = x_n$

Przykładowe porównanie modułów CFT (oraz D-TFT)

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

$x[n]$

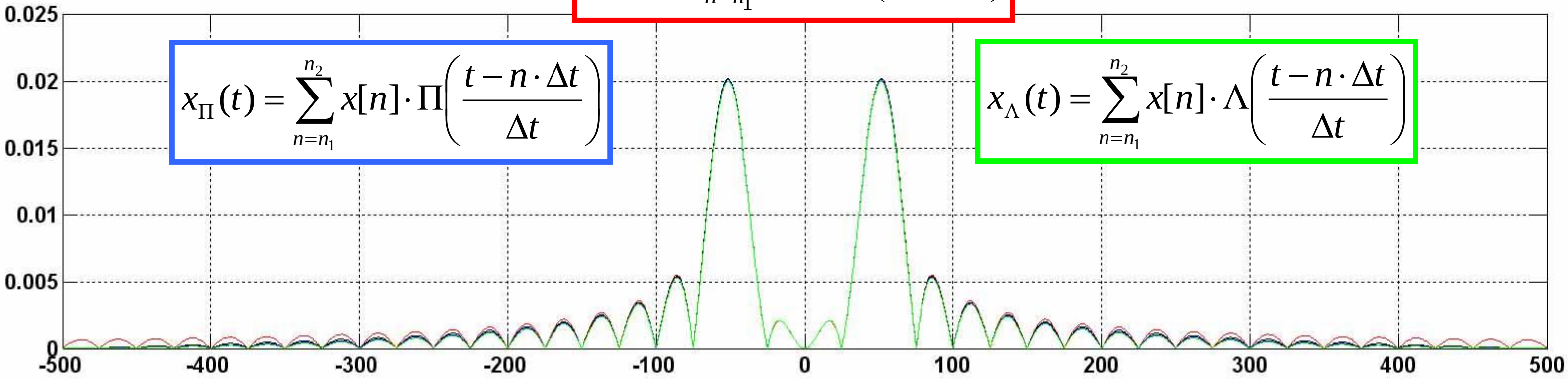


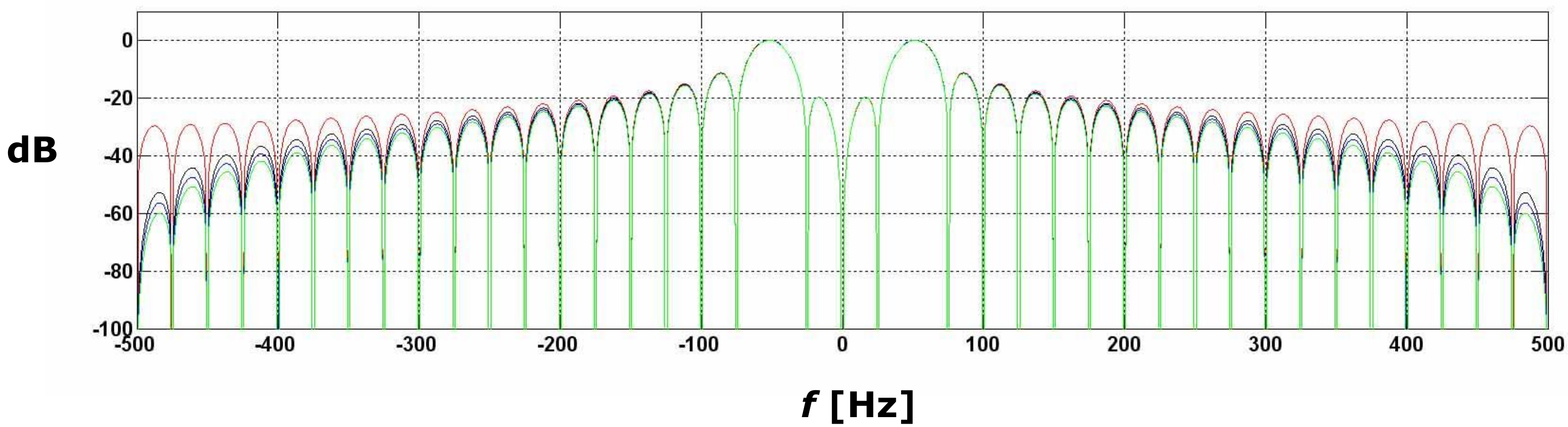
$$x_{\mathrm{sinc}}(t) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t - n \cdot \Delta t}{\Delta t}\right)$$

***D-TFT* pomnożono przez Δt**

$$x_{\Pi}(t) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] \cdot \Pi\left(\frac{t - n \cdot \Delta t}{\Delta t}\right)$$

$$x_{\Lambda}(t) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] \cdot \Lambda\left(\frac{t - n \cdot \Delta t}{\Delta t}\right)$$

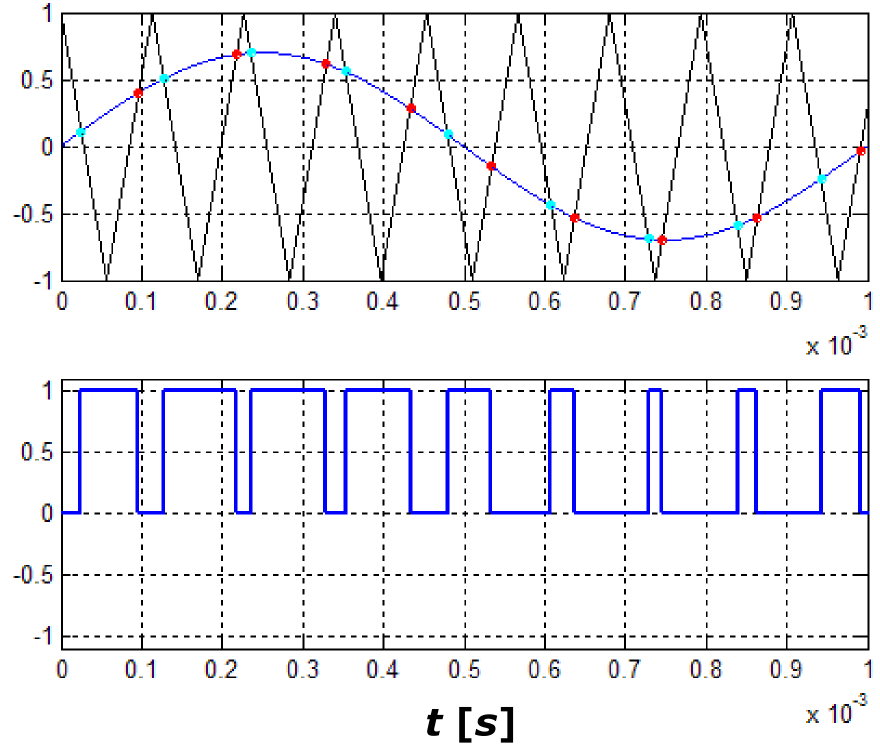




Próbkowanie „naturalne” we wzmacniaczach mocy klasy D

Dla sygnału nieskończonego:

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t + \varphi_0)$$



$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - t_n}{T_n}\right)$$

$$T_n = t_{bn} - t_{an}$$

$$t_n = \frac{t_{an} + t_{bn}}{2}$$

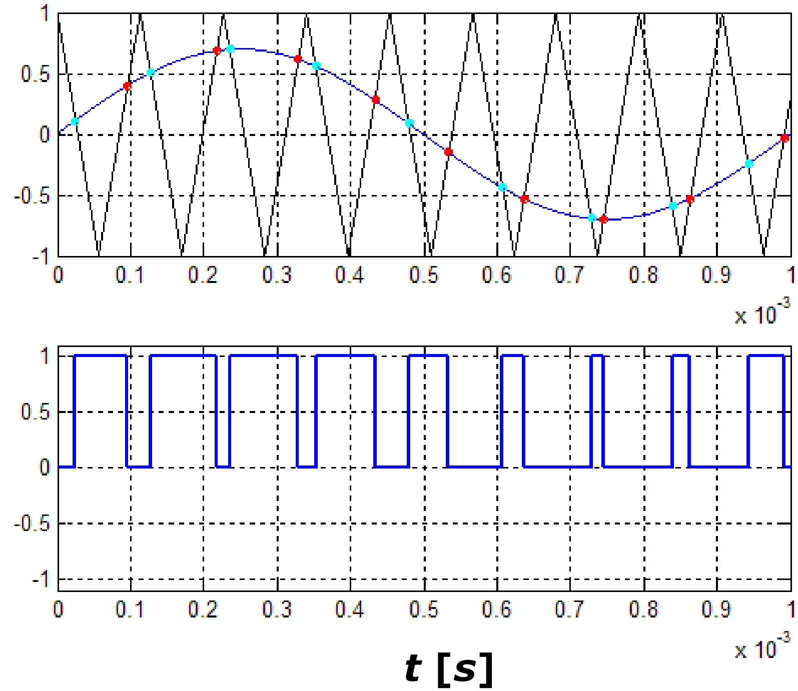
$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n \cdot \mathrm{sinc}(\pi \cdot f \cdot T_n) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n}$$

Próbkowanie „naturalne” we wzmacniaczach mocy klasy D

Dla sygnału skończonego:

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t + \varphi_0) \cdot \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \Pi\left(\frac{t - t_n}{T_n}\right)$$

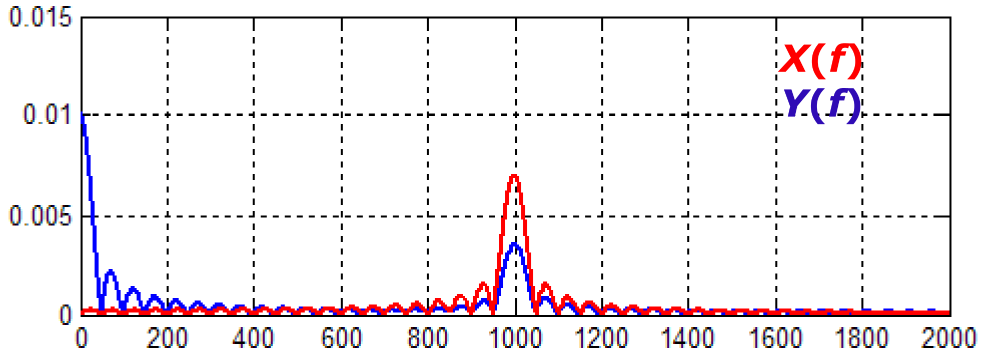


$$Y(f) = \sum_{n=0}^{N-1} T_n \cdot \mathrm{sinc}(\pi \cdot f \cdot T_n) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n}$$

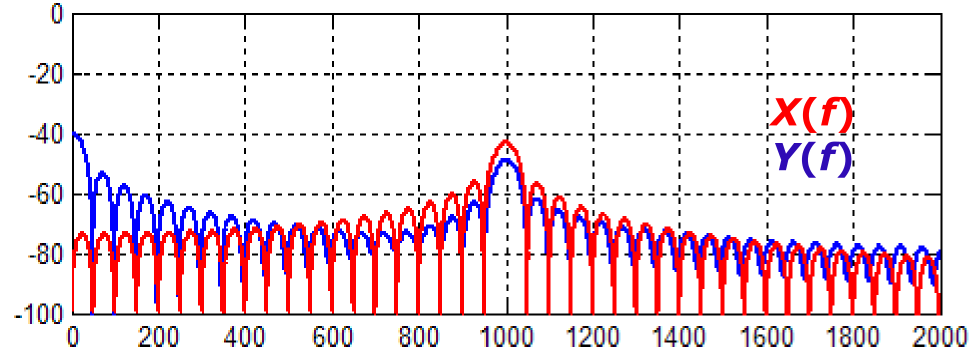
Próbkowanie „naturalne” we wzmacniaczach mocy klasy D

Charakterystyki amplitudowe (czyli moduł)

Skala liniowa

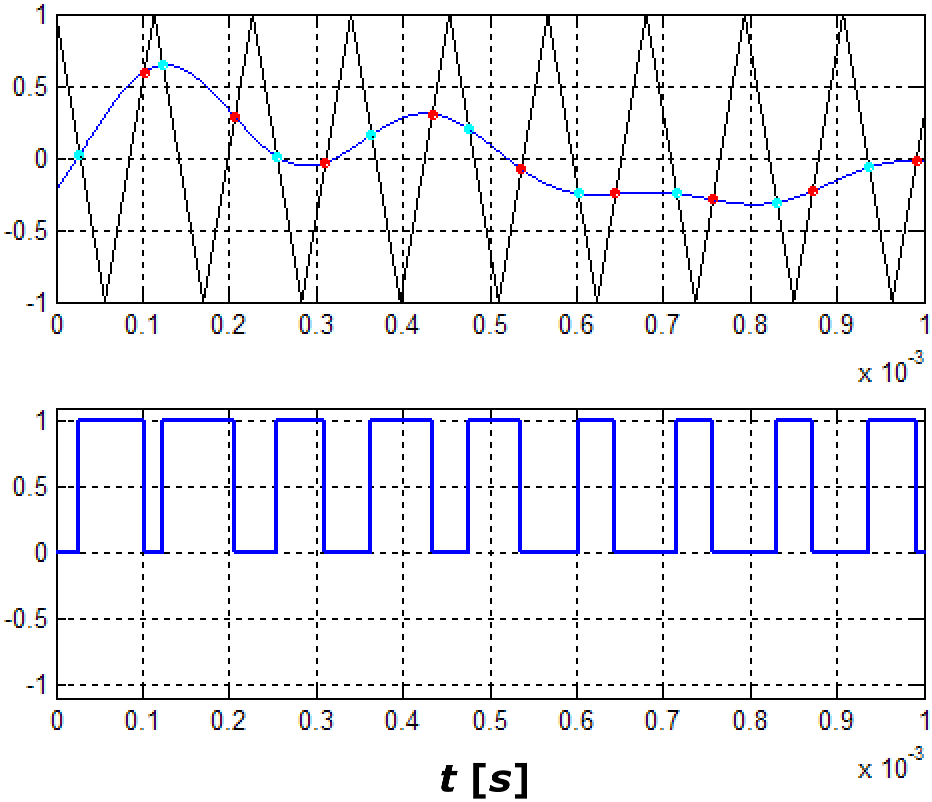


Skala w dB



***f* [Hz]**

Próbkowanie „naturalne” we wzmacniaczach mocy klasy D



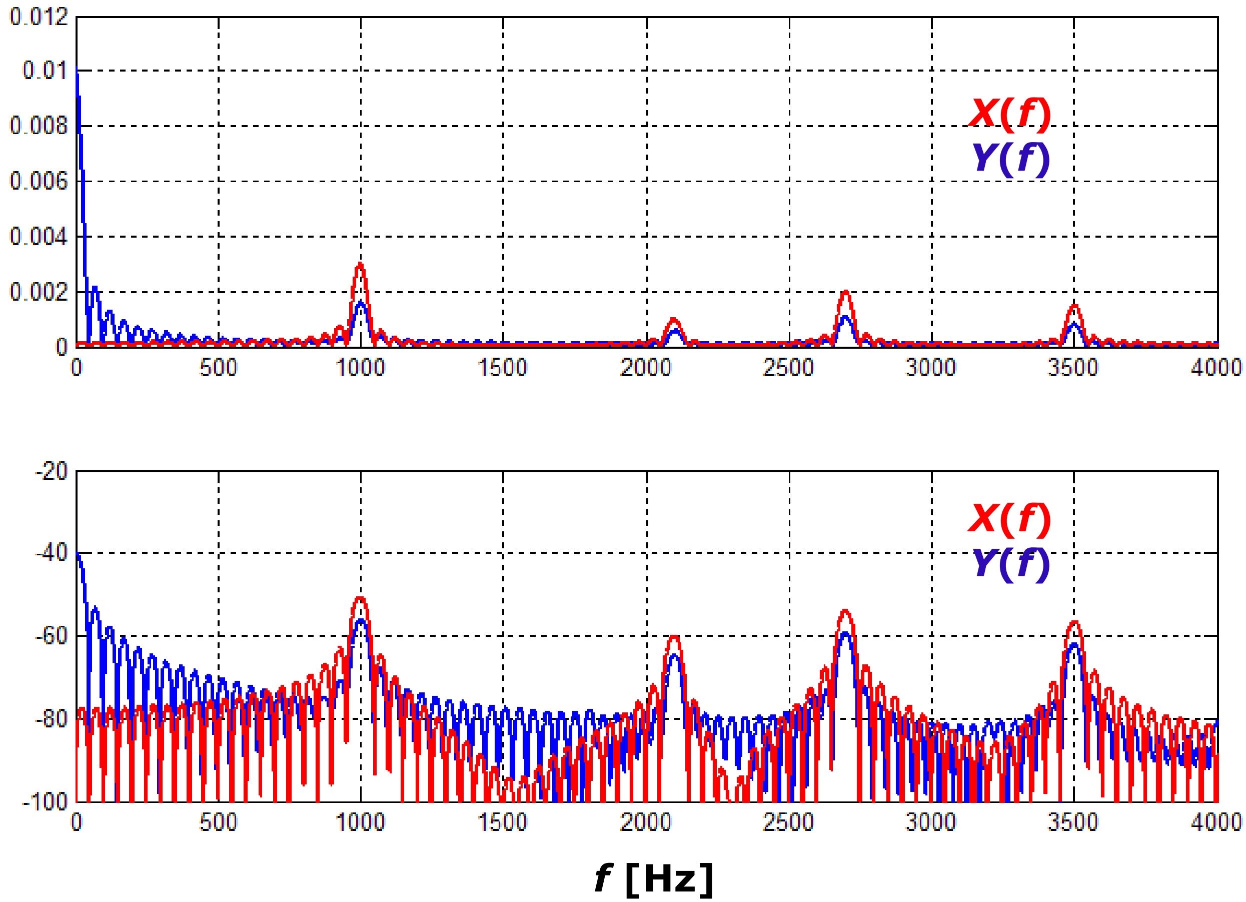
Sygnał będący kombinacją liniową czterech kosinusoid

Próbkowanie „naturalne” we wzmacniaczach mocy klasy D

Charakterystyki amplitudowe (czyli moduł)

Skala liniowa

Skala w dB



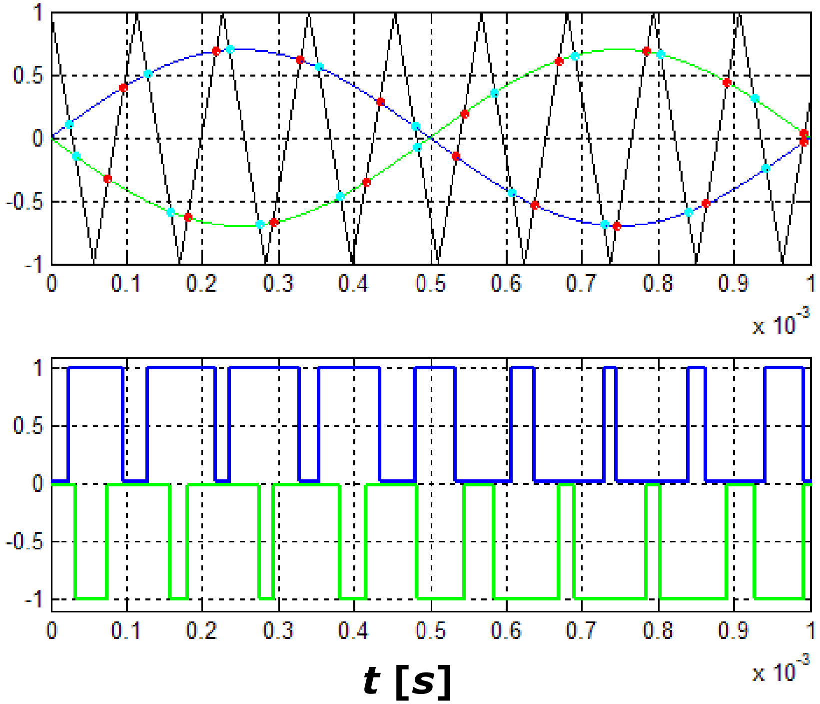
Próbkowanie „naturalne” we wzmacniaczach mocy klasy D

Wariant dwukanałowy (dwustronny):

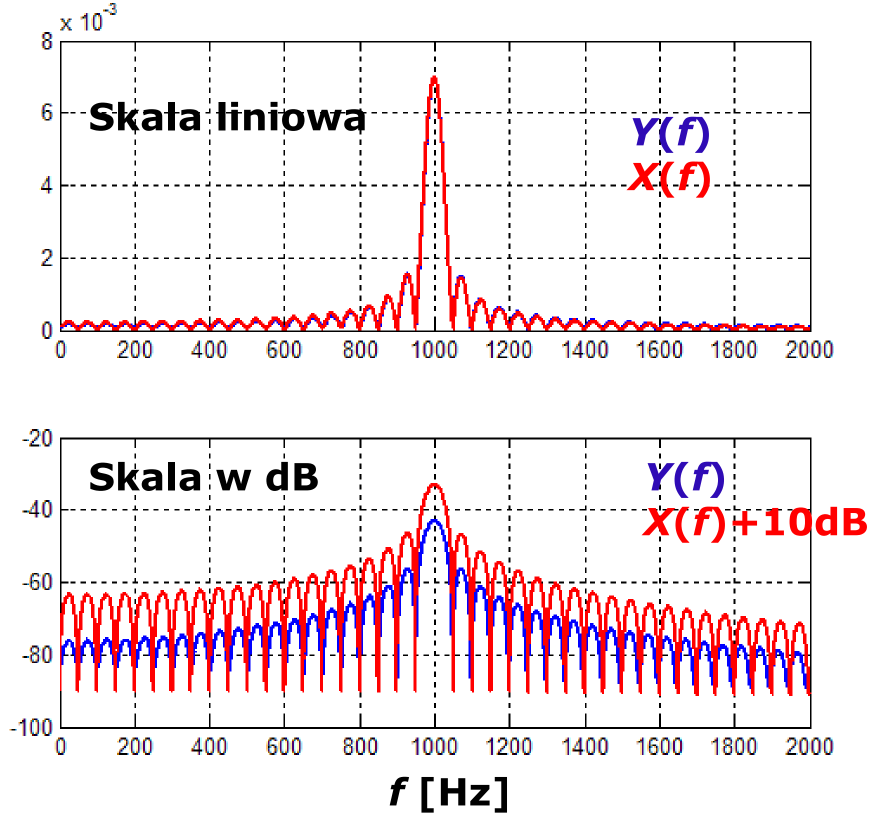
$$x(t) \to y_1(t)$$

$$-x(t) \to y_2(t)$$

$$y(t) = y_1(t) - y_2(2)$$



Charakterystyki amplitudowe (czyli moduł)

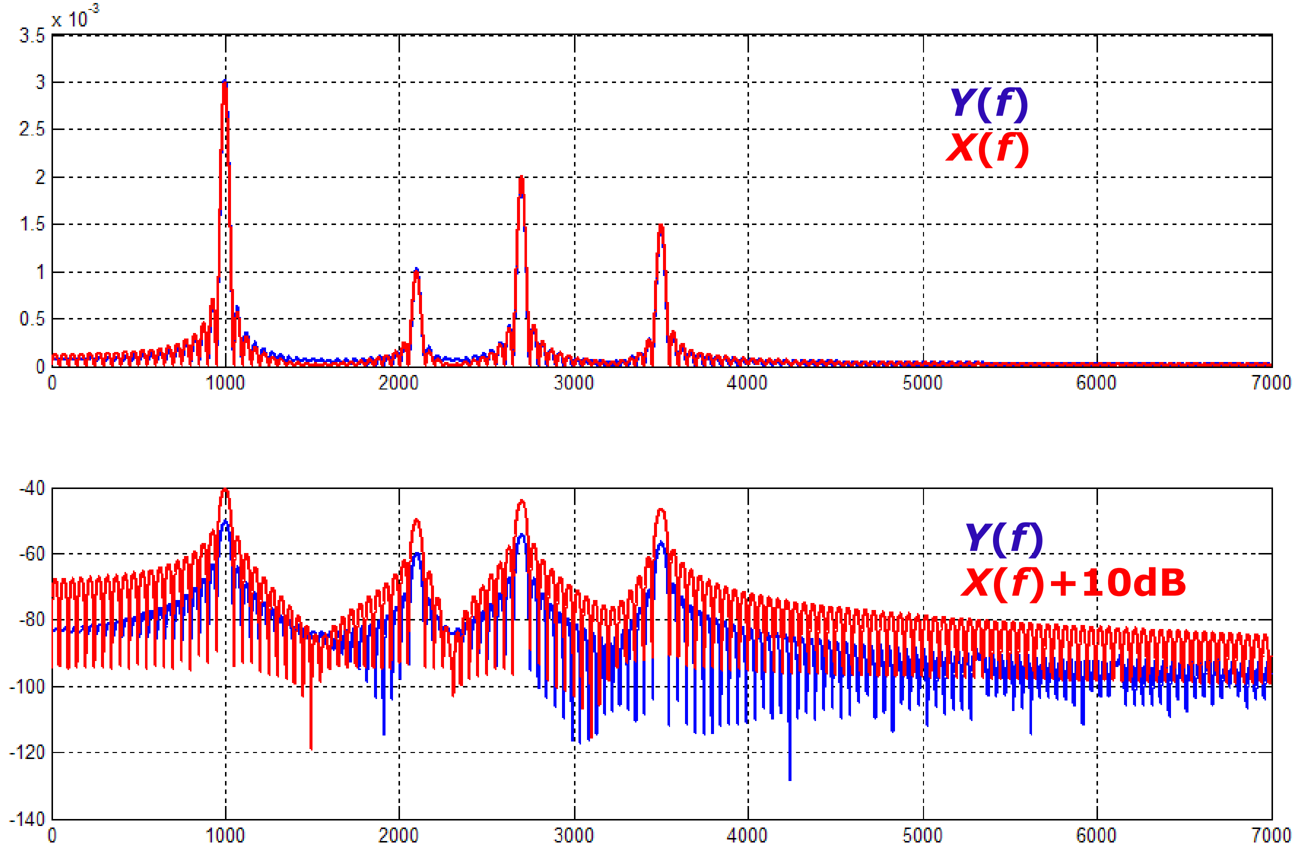


Próbkowanie „naturalne” we wzmacniaczach mocy klasy D

Charakterystyki amplitudowe (czyli moduł)

Skala liniowa

Skala w dB



f **[Hz]**

Podsumowanie

1. Zmiana argumentu w delcie Diraca.
2. Nieliniowe przetwarzanie sygnałów kosinusoidalnych.
3. Ujemne sprzężenie zwrotne.
4. Teoretyczna pętla fazowa.
5. Próbkowanie z aperturą (różne wersje).
6. Różne warianty odtwarzania sygnału z próbek.
7. Próbkowanie naturalne we wzmacniaczach mocy.

Zapraszam na ćwiczenia ...
lub do laboratorium …