Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie

Teoria sygnałów

Wykład 6

Dr inż. Przemysław Korohoda
Katedra Elektroniki, AGH, Kraków

home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2

UPEL: TS 2022

Plan wykładu

1. Zasady zachowania: iloczynu skalarnego, energii oraz odległości.
2. Iloczyn skalarny w odniesieniu do splotu.
3. Transformaty sygnałów pochodnej oraz całki.
4. Sygnały skoku i znaku (sgn) oraz ich transformaty.
5. Odwrotne transformaty „widm” określonych jako pochodna oraz całka.
6. Transformata sygnału gaussowskiego.
7. Zasada nieoznaczoności.

Właściwości *CFT/ICFT* (twierdzenia)

Tw. Rayleigha, o zachowaniu iloczynu skalarnego

$$x(t), y(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(f), Y(f)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \overline{y(t)}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot \overline{Y(f)}\, df$$

$$\boxed{< x(t)\,, y(t) > \; = \; < X(f)\,, Y(f) >}$$

$$x(t), y(t) \xleftrightarrow[ICFT(\omega)]{CFT(\omega)} X(\omega), Y(\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \overline{y(t)}\, dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot \overline{Y(\omega)}\, d\omega$$

Tw. Rayleigha - przykład

Wyznaczanie całki sygnału:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}(\pi \cdot t) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(f) \cdot \delta(f + f_0)\, df = \Pi(-f_0)$$

... co wynika z następujących zależności:

$$\overline{e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}} = e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} \quad \wedge \quad e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\longleftrightarrow}} \delta(f + f_0)$$

Właściwości *CFT/ICFT* (twierdzenia – cd.)

Tw. Parsevala o zachowaniu energii

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) \right|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| X(f) \right|^2 \, df$$

$$\boxed{< x(t)\,,\, x(t) > = < X(f)\,,\, X(f) >}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) \right|^2 \, dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left| X(\omega) \right|^2 \, d\omega$$

Właściwości *CFT/ICFT* (twierdzenia – cd.)

$$< x(t), y(t) > \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\overline{y(t)}\,dt \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\cdot\overline{Y(f)}\,df \;=\; < X(f), Y(f) >$$

Tw. o zachowaniu odległości

Jeżeli: $x(t), y(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(f), Y(f)$

to w *L*²:

$$\rho\big(x(t), y(t)\big) \;=\; \rho\big(X(f), Y(f)\big)$$

<u>Dowód</u>

z liniowości *CFT*: $x(t) - y(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(f) - Y(f)$

z zachowania iloczynu skalarnego przez *CFT*:

$$< x(t) - y(t)\,,\, x(t) - y(t) > \;=\; < X(f) - Y(f)\,,\, X(f) - Y(f) >$$

czyli:

$$\|x(t) - y(t)\| \;=\; \|X(f) - Y(f)\|$$

...a w ten sposób określiliśmy odległość.

Splot jako iloczyn skalarny

$$x(t) * y(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau)\, d\tau \quad = \quad < \ x(\tau) \ , \ \overline{y(t - \tau)} \ >$$

Zatem splot dwóch sygnałów *x oraz y* wyznaczony w punkcie *t* jest równy iloczynowi skalarnemu (liczonemu dla całej osi *R*) sygnału *x* oraz sygnału *y* z odwróconą osią zmiennej niezależnej (np. czasu) i przesuniętemu o wartość *t.*

Dla rzeczywistego sygnału *y*(*t*):

$$x(t) * y(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau)\, d\tau \quad = \quad < \ x(\tau) \ , \ y(t - \tau) \ >$$

Dowód twierdzenia o splocie - przygotowanie

Mała powtórka:

$$x(t) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X(f)$$

$$x(-t) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X(-f)$$

$$x(t-t_0) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X(f)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t_0}$$

1) najpierw odwracamy oś *„t”*,
a następnie przesuwamy o t_0,

2) najpierw przesuwamy o t_0,
a następnie odwracamy oś *„t”*,

czyli:

1)

$$x(-(t-t_0)) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X(-f)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t_0}$$

2)

$$x(-t-t_0) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X(-f)\cdot e^{+j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t_0}$$

$$\boxed{x(-t-t_0) = x(-(t+t_0))}$$

Dowód twierdzenia o splocie

$$x_1(t) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X_1(f)$$

$$x_2(t) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X_2(f)$$

$$x(-(t-t_0)) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X(-f)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t_0}$$

$$\overline{X(f)} \overset{(**)}{=} X(-f)$$

$$-j\cdot f = j\cdot(-f)$$

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)\,d\tau \overset{(*)}{=} < x_1(\tau)\ ,\ x_2(t-\tau) > =$$

$$= < X_1(f)\ ,\ X_2(-f)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t} > = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(f)\cdot\overline{X_2(-f)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}}\,df =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(f)\cdot X_2(f)\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}\,df$$

(*) – to przejście jest poprawne tylko dla rzeczywistego sygnału $x_2(t)$
(**) – ta równość jest poprawna tylko dla rzeczywistego sygnału $x(t)$

Dowód twierdzenia o splocie (dyskusja)

Dlaczego przedstawiony dowód jest ważny także dla zespolonego sygnału $x_2(t)$?

Ponieważ wszystkie wykorzystane operacje, czyli: splot, iloczyn skalarny oraz transformacja Fouriera (w obie strony) – są liniowe!

$$x_1(t) = \mathrm{Re}(x_1) + j \cdot \mathrm{Im}(x_1)$$
$$x_2(t) = \mathrm{Re}(x_2) + j \cdot \mathrm{Im}(x_2)$$

$$\begin{aligned} x_1 * x_2 &= \left[\mathrm{Re}(x_1) + j \cdot \mathrm{Im}(x_1)\right] * \left[\mathrm{Re}(x_2) + j \cdot \mathrm{Im}(x_2)\right] = \\ &= \mathrm{Re}(x_1) * \mathrm{Re}(x_2) - \mathrm{Im}(x_1) * \mathrm{Im}(x_2) + j \cdot \mathrm{Re}(x_1) * \mathrm{Im}(x_2) + j \cdot \mathrm{Im}(x_1) * \mathrm{Re}(x_2) \end{aligned}$$

zatem jest to kombinacja liniowa splotów sygnałów rzeczywistych.
Jeżeli dla każdego z nich twierdzenie jest prawdziwe, to jest prawdziwe również dla całości.

Dowód twierdzenia o splocie (dyskusja)

Ale można także od razu zastosować kompletny dowód dla sygnałów zespolonych.

$$x_1(t) = \mathrm{Re}(x_1) + j \cdot \mathrm{Im}(x_1)$$
$$x_2(t) = \mathrm{Re}(x_2) + j \cdot \mathrm{Im}(x_2)$$

i skorzystać dodatkowo z przytoczonej wcześniej zależności:

$$\boxed{\overline{x(-t)} \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad \overline{X(f)}}$$

Wtedy początek musiałby wyglądać tak:

$$x_1(t) * x_2(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)\, d\tau \quad = \quad < x_1(\tau) \ , \ \overline{x_2(t-\tau)} > \quad itd.$$

Twierdzenia o transformacie pochodnej i całki

Tw. o transformacie pochodnej pierwszego rzędu:

$$dla \quad \lim_{t \to \pm\infty} x(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot X(f)$$

Tw. o transformacie pochodnej wyższego rzędu:

$$dla \quad \lim_{t \to \pm\infty} x^{(m)}(t) = 0 \quad : \quad m = 0,1,2, \quad \ldots \quad , n-1$$

(m) oznacza rząd pochodnej

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \left(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f\right)^n \cdot X(f)$$

Tw. o transformacie całki:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot X(f) \quad dla \quad f \neq 0$$

$$dla \quad f = 0 \quad liczymy\ osobno$$

Uwaga – to tw. jest wynikiem odwrócenia tw. o pochodnej, zatem dla bezpieczeństwa jego stosowania należy spawdzać odpowiedni warunek w granicy (lim) - w tym przypadku dla całki z *X*(*f*).

Twierdzenia o transformacie odwrotnej dla pochodnej i całki

Analogiczne twierdzenia istnieją dla zależności „odwrotnej” (tj. *ICFT*).

Tw. o odwrotnej transformacie dla „widma” określonego jako pochodna:

$$dla \quad \lim_{f \to \pm\infty} X^{(m)}(f) = 0 \quad : \quad m = 0,1,2, \quad \ldots \quad , n-1$$

(*m*) oznacza rząd pochodnej

$$(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot t)^n \cdot x(t) \quad \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\longleftrightarrow}} \quad \frac{d^n}{df^n} X(f)$$

Tw. o odwrotnej transformacie dla „widma” określonego jako całka:

$$dla \quad t \neq 0: \quad \frac{1}{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot t} \cdot x(t) \quad \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\longleftrightarrow}} \quad \int_{-\infty}^{f} X(v)\, dv$$

dla $t = 0$ *liczymy osobno*

Wyznaczanie trudnych (niezbieżnych) transformat przez przejście do granicy

Przykładowo dla stałej (ponownie):

$$x_a(t) = e^{-a\cdot|t|}\cdot 1 = e^{-a\cdot|t|} \qquad \lim_{a\to 0^+}\left(x_a(t)\right) = 1 \qquad (!\, a > 0)$$

Ze wzoru całkowego otrzymujemy:

$$X_a(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\cdot|t|}\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{+a\cdot t}\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-a\cdot t}\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-t\cdot(j\cdot 2\cdot\pi\cdot f - a)}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t\cdot(j\cdot 2\cdot\pi\cdot f + a)}\, dt =$$

$$= \left[\frac{1}{-(j\cdot 2\cdot\pi\cdot f - a)}\cdot e^{-t\cdot(j\cdot 2\cdot\pi\cdot f - a)}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{1}{-(j\cdot 2\cdot\pi\cdot f + a)}\cdot e^{-t\cdot(j\cdot 2\cdot\pi\cdot f + a)}\right]_{0}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{a - j\cdot 2\cdot\pi\cdot f} + \frac{1}{a + j\cdot 2\cdot\pi\cdot f} = \frac{a + j\cdot 2\cdot\pi\cdot f + a - j\cdot 2\cdot\pi\cdot f}{a^2 + (2\cdot\pi\cdot f)^2} = \frac{2\cdot a}{a^2 + (2\cdot\pi\cdot f)^2}$$

Przykład: transformata dla stałej (cd.)

$$X_a(f) = \frac{2 \cdot a}{a^2 + (2 \cdot \pi \cdot f)^2}$$

A teraz przechodzimy do granicy z parametrem *a*:

$$\lim_{a \to 0^+} \left(x_a(t) \right) = 1$$

… a w dziedzinie Fouriera:

$$\lim_{a \to 0^+} \left(\frac{2 \cdot a}{a^2 + (2 \cdot \pi \cdot f)^2} \right) \Bigg|_{f \neq 0} = 0$$

$$\lim_{a \to 0^+} \left(\frac{2 \cdot a}{a^2 + (2 \cdot \pi \cdot f)^2} \right) \Bigg|_{f = 0} = \lim_{a \to 0^+} \left(\frac{2 \cdot a}{a^2} \right) = +\infty$$

Czyli nie ma przeciwwskazań, by była to delta Diraca…

Transformata dla stałej (cd.)

Wobec tego postawmy hipotezę:

$$X(f) = c \cdot \delta(f)$$

i wyznaczmy stałą *c* wyliczając transformatę odwrotną:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c \cdot \delta(f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t}\, df = c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot t}\, df = c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f)\, df = c$$

Przyjmując np. *c*=1 otrzymujemy *x*(*t*)=1, zatem uzyskaliśmy ponownie, że:

$$1 \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \delta(f)$$

Przykład: zastosowania tw. o pochodnej sygnału (choć założenie nie jest spełnione!)

$$\frac{d}{dt}\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) = -\sin(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t)\cdot(2\cdot\pi\cdot f_0)$$

$$ale\ dla \quad a>0:$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left(e^{-a\cdot|t|}\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t)\right)=0$$

Sprawdzamy, czy się zgodzi:

$$j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)]\right] \quad =$$

$$= \quad j\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot[(-f_0)\cdot\delta(f+f_0)+(f_0)\cdot\delta(f-f_0)] \quad =$$

$$= \quad (2\cdot\pi\cdot f_0)\cdot\left[-j\cdot\frac{1}{2}\cdot[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)]\right]$$

Kolejny przykład
(choć oryginalnej całki nie można wyliczyć!)

$$\int_{-\infty}^{t} \sin(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot\tau)\,d\tau = \left[\frac{-\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot\tau)}{2\cdot\pi\cdot f_0}\right]_{-\infty}^{t} = ?$$

...dla funkcji przybliżających sygnał (w granicy):

$$\lim_{a\to 0^+}\int_{-\infty}^{t} e^{-a\cdot|\tau|}\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot\tau)\,d\tau = \left\{e^{-a\cdot|\tau|}\to 1\right\} =$$

$$= \frac{-\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t)}{2\cdot\pi\cdot f_0} - 0 = \frac{-\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t)}{2\cdot\pi\cdot f_0}$$

Sprawdzamy, czy się zgodzi:

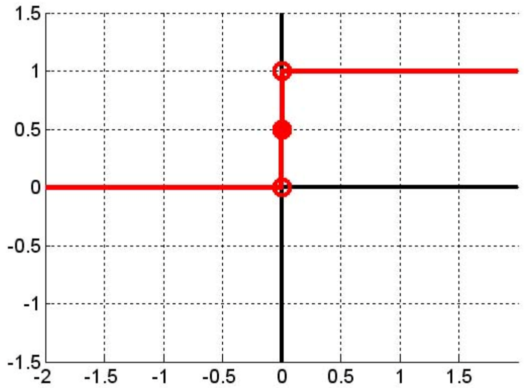
$$\frac{1}{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f}\cdot\left[j\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{-f_0}\right)\cdot\delta(f+f_0)-\left(\frac{1}{f_0}\right)\cdot\delta(f-f_0)\right] = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot f_0}\cdot\left[-\frac{1}{2}\cdot\left[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)\right]\right]$$

Skok jednostkowy (*ang. unit step*)

Definicja precyzyjna:

$$u(t)=\begin{cases}1 & dla \quad t>0\\ 1/2 & dla \quad t=0\\ 0 & dla \quad t<0\end{cases}$$



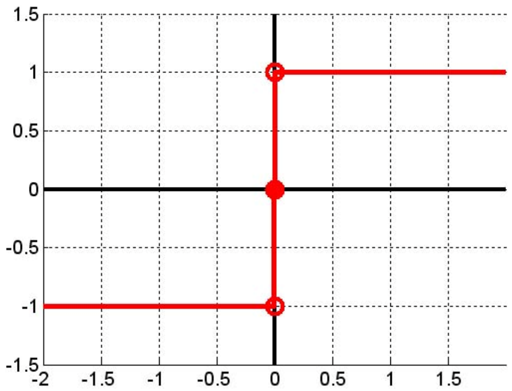
często dla uproszczenia przyjmuje się, że w pojedynczym punkcie nieciągłości (skok), dla *t*=0, wartość sygnału można potraktować jako nieistotną (co nie zawsze jest słuszne) i wtedy otrzymujemy definicję

$$u(t)=\begin{cases}1 & dla \quad t>0\\ 1/2 & dla \quad t=0\\ 0 & dla \quad t<0\end{cases} \cong \begin{cases}1 & dla \quad t\geq 0\\ 0 & dla \quad t<0\end{cases} \cong \begin{cases}1 & dla \quad t>0\\ 0 & dla \quad t\leq 0\end{cases} \cong \begin{cases}1 & dla \quad t>0\\ 0 & dla \quad t<0\end{cases} \quad dla \quad t=0: nieistotne$$

Funkcja znaku (*ang. sign, łac. signum*)

Definicja precyzyjna:

$$sgn(t)=\begin{cases}1 & dla \quad t>0\\ 0 & dla \quad t=0\\ -1 & dla \quad t<0\end{cases}$$



często dla uproszczenia przyjmuje się, że w pojedynczym punkcie nieciągłości (skok), dla *t*=0, wartość sygnału można potraktować jako nieistotną (co nie zawsze jest słuszne) i wtedy otrzymujemy definicję

$$sgn(t)=\begin{cases}1 & dla \quad t>0\\ 0 & dla \quad t=0\\ -1 & dla \quad t<0\end{cases} \cong \begin{cases}1 & dla \quad t\geq 0\\ -1 & dla \quad t<0\end{cases} \cong \begin{cases}1 & dla \quad t>0\\ -1 & dla \quad t\leq 0\end{cases} \cong \begin{cases}1 & dla \quad t>0\\ -1 & dla \quad t<0\end{cases} \quad dla \quad t=0: nieistotne$$

Algebra sygnałów

$$u(t) = \begin{cases} 1 & dla \quad t > 0 \\ 1/2 & dla \quad t = 0 \\ 0 & dla \quad t < 0 \end{cases}$$

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & dla \quad t > 0 \\ 0 & dla \quad t = 0 \\ -1 & dla \quad t < 0 \end{cases}$$

$$u(t) \quad \cong \quad \begin{cases} 1 & dla \quad t > 0 \\ 0 & dla \quad t < 0 \end{cases}$$

$$sgn(t) \quad \cong \quad \begin{cases} 1 & dla \quad t > 0 \\ -1 & dla \quad t < 0 \end{cases}$$

$$u(t) = \frac{1}{2} \cdot sgn(t) + \frac{1}{2}$$

$$sgn(t) = 2 \cdot u(t) - 1$$

Algebra sygnałów (cd.)

$$\frac{d}{dt}u(t)=\delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{sgn}(t)=2\cdot\delta(t)$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau$$

$$\mathrm{sgn}(t)=-1+2\cdot\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau$$

$$\Pi(t)=u(t+1/2)-u(t-1/2)$$

$$u(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}-n\cdot T}{T}\right)$$

Kolejne przykłady transformat

$$u(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \frac{1}{2}\cdot\delta(f)+\begin{cases}\dfrac{1}{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f} & dla \quad f\neq 0\\ 0 & dla \quad f=0\end{cases} = \frac{1}{2}\cdot\delta(f)+\begin{cases}-j\cdot\dfrac{1}{2\cdot\pi\cdot f} & dla \quad f\neq 0\\ 0 & dla \quad f=0\end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \begin{cases}\dfrac{1}{j\cdot\pi\cdot f} & dla \quad f\neq 0\\ 0 \quad dla & f=0\end{cases} = \begin{cases}-j\cdot\dfrac{1}{\pi\cdot f} & dla \quad f\neq 0\\ 0 \quad dla & f=0\end{cases}$$

$$u(t) \xleftrightarrow[ICFT(\omega)]{CFT(\omega)} \pi\cdot\delta(\omega)+\begin{cases}\dfrac{1}{j\cdot\omega} & dla \quad \omega\neq 0\\ 0 & dla \quad \omega=0\end{cases} = \pi\cdot\delta(\omega)+\begin{cases}-j\cdot\dfrac{1}{\omega} & dla \quad \omega\neq 0\\ 0 & dla \quad \omega=0\end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}(t) \xleftrightarrow[ICFT(\omega)]{CFT(\omega)} \begin{cases}\dfrac{2}{j\cdot\omega} & dla \quad \omega\neq 0\\ 0 \quad dla & \omega=0\end{cases} = \begin{cases}-j\cdot\dfrac{2}{\omega} & dla \quad \omega\neq 0\\ 0 \quad dla & \omega=0\end{cases}$$

Przykłady przekształceń weryfikujących

$$\mathrm{sgn}(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \begin{cases} \dfrac{1}{j\cdot\pi\cdot f} & dla \quad f\neq 0 \\ 0 \quad dla & f=0 \end{cases} = \begin{cases} -j\cdot\dfrac{1}{\pi\cdot f} & dla \quad f\neq 0 \\ 0 \quad dla & f=0 \end{cases}$$

$$u(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \frac{1}{2}\cdot\delta(f)+\begin{cases} \dfrac{1}{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f} & dla \quad f\neq 0 \\ 0 & dla \quad f=0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau \quad \xrightarrow{CFT} \quad \frac{1}{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f}\cdot 1+\frac{\delta(f)}{2}\cdot 1 \quad \xrightarrow[ICFT]{} \quad \frac{1}{2}\cdot\mathrm{sgn}(t)+\frac{1}{2}=u(t)$$

Czasem wygodnie jest tak zapisać, więc sumujemy, ale pamiętajmy o ograniczeniach dziedziny (bo 1/f).

$$\frac{d}{dt}1 \quad \xrightarrow{CFT} \quad (j\cdot 2\cdot\pi\cdot f)\cdot\delta(f) \quad = \quad 0\cdot\delta(f)=0 \quad \xrightarrow[ICFT]{} \quad 0$$

$$\frac{d}{dt}u(t) \quad \xrightarrow{CFT} \quad (j\cdot 2\cdot\pi\cdot f)\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\delta(f)+\frac{-j}{2\cdot\pi\cdot f}\right] \quad = \quad 1 \quad \xrightarrow[ICFT]{} \quad \delta(t)$$

Przykład weryfikacji „z brakującym punktem”

$$u(t) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\longleftrightarrow}} \frac{1}{2}\cdot\delta(f)+\begin{cases}\dfrac{1}{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f} & dla \quad f\neq 0\\ 0 & dla \quad f=0\end{cases}$$

W dziedzinie sygnałów:

$$\Pi(t)=u(t+1/2)-u(t-1/2)$$

A w dziedzinie transformaty CFT?

$$u(t+1/2)-u(t-1/2) \xrightarrow{CFT} \frac{1}{2}\cdot\delta(f)\cdot e^{j\cdot\pi\cdot f}-\frac{1}{2}\cdot\delta(f)\cdot e^{-j\cdot\pi\cdot f}+\begin{cases}\dfrac{e^{j\cdot\pi\cdot f}}{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f}-\dfrac{e^{-j\cdot\pi\cdot f}}{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f} & \text{dla} \quad f\neq 0\\ 0 & \text{dla} \quad f=0\end{cases} =$$

$$= \delta(f)\cdot 0+\begin{cases}\dfrac{\sin(\pi\cdot f)}{\pi\cdot f} & \text{dla} \quad f\neq 0\\ 0 & \text{dla} \quad f=0\end{cases} \cong \operatorname{sinc}(\pi\cdot f)$$

Czyli „prawie się zgadza”, ponieważ do wyjaśnienia pozostaje wartość dla *f*=0 (czyli „izolowany punkt”).

Inny przykład weryfikacji „z brakującym punktem”

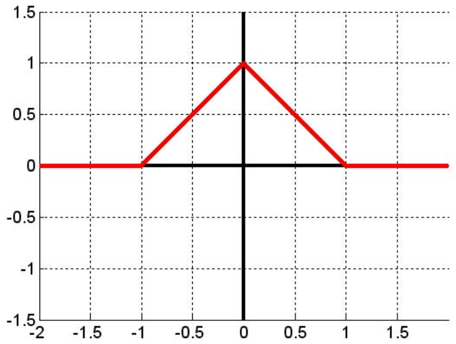
$$\boxed{\operatorname{sgn}(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \begin{cases} \dfrac{1}{j\cdot\pi\cdot f} & dla \quad f\neq 0 \\ 0 \quad dla \quad f=0 \end{cases} = \begin{cases} -j\cdot\dfrac{1}{\pi\cdot f} & dla \quad f\neq 0 \\ 0 \quad dla \quad f=0 \end{cases}}$$

$$\frac{d}{dt}\operatorname{sgn}(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \begin{cases} (j\cdot 2\cdot\pi\cdot f)\cdot\dfrac{1}{j\cdot\pi\cdot f} & dla \quad f\neq 0 \\ (j\cdot 2\cdot\pi\cdot f)\cdot 0 & dla \quad f=0 \end{cases} \cong \quad 2$$

Zatem przyjmujemy, że: $\frac{d}{dt}\operatorname{sgn}(t) \; = \; 2\cdot\delta(t)$

Kolejny przykład: transformata sygnału trójkątnego

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1 & dla \quad t \in [-1;0) \\ -t+1 & dla \quad t \in [0;1) \\ 0 & dla \quad pozost.\, t \end{cases}$$



$$x(t) = \Pi(t+1/2) - \Pi(t-1/2) \quad \Rightarrow \quad \Lambda(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

$$X(f) = \operatorname{sinc}(\pi \cdot f)\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot\frac{1}{2}} - \operatorname{sinc}(\pi \cdot f)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot\frac{1}{2}} =$$

$$= \operatorname{sinc}(\pi \cdot f)\cdot\left(e^{j\cdot\pi\cdot f} - e^{-j\cdot\pi\cdot f}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \leftrightarrow \dfrac{1}{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f}\cdot X(f) \quad dla \quad f \neq 0 \\ dla \quad f = 0 \quad liczymy\ osobno \end{array}}$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{CFT} \begin{cases} \operatorname{sinc}(\pi\cdot f)\cdot\dfrac{e^{j\cdot\pi\cdot f} - e^{-j\cdot\pi\cdot f}}{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f} & (dla \quad f \neq 0) \\ 1\,(\text{wyliczone osobno}) & (dla \quad f = 0) \end{cases} = \operatorname{sinc}^2(\pi\cdot f)$$

Jeszcze jeden przykład

Jeżeli:

$$x(t) = \sin(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = j\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)\right]$$

to:

$$x(t) = -j\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\delta(t+t_0)-\delta(t-t_0)\right] \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = \sin(2\cdot\pi\cdot f\cdot t_0) \qquad \textbf{(1)}$$

Zobaczmy zatem jak wzór o pochodnej zafunkcjonuje na przykładzie:

$$x(t) = \Pi(t) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = \mathrm{sinc}(\pi\cdot f) \qquad \textbf{(2)}$$

ale jednocześnie:

$$x(t) = \frac{d}{dt}\Pi(t) = \delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\delta\left(t-\frac{1}{2}\right) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = j\cdot 2\cdot\sin(\pi\cdot f) \qquad \textbf{(3)}$$

czyli się zgadza

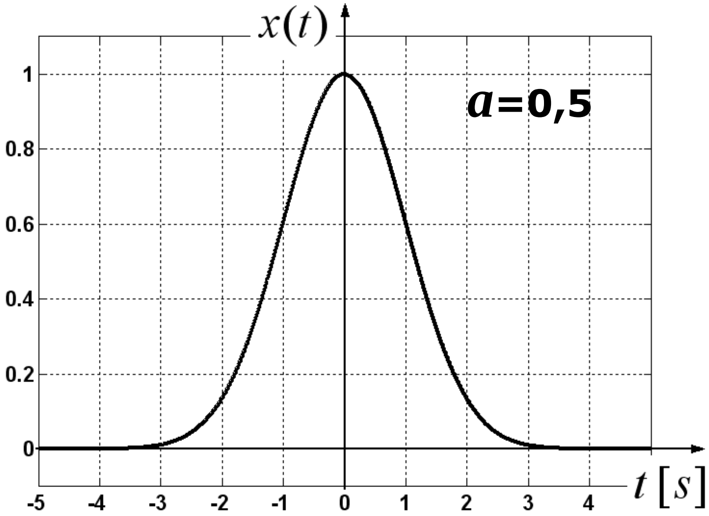
ponieważ zastosowanie twierdzenia do przykładu (2) daje:

$$x(t) = \frac{d}{dt}\Pi(t) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot\mathrm{sinc}(\pi\cdot f) =$$

$$= j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot\frac{\sin(\pi\cdot f)}{\pi\cdot f} = j\cdot 2\cdot\sin(\pi\cdot f)$$

Transformata sygnału Gaussa

$$x(t) = e^{-a \cdot t^2} \quad \wedge \quad a \in \Re_+$$



$$x(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(f) = ?$$

Wyznaczamy pochodną sygnału:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2 \cdot a \cdot t \cdot e^{-a \cdot t^2}$$

Część powyższego wzoru zawiera przepis na sygnał:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2 \cdot a \cdot t \cdot x(t)$$

Na podstawie tw. o transformacie pochodnej:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot X(f)$$

... korzystając z podobieństwa wzorów dla transformacji w przód i odwrotnej:

$$j \cdot 2 \cdot \pi \cdot t \cdot x(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} -\frac{dX(f)}{df}$$

Transformata sygnału Gaussa (cd.)

Na podstawie wymienionych zależności możemy zapisać, że:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2 \cdot a \cdot t \cdot x(t) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot X(f) = -\frac{-2 \cdot a}{j \cdot 2 \cdot \pi} \cdot \frac{dX(f)}{df}$$

Kolejne przekształcenia w dziedzinie transformaty:

$$j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot X(f) = -j \cdot \frac{a}{\pi} \cdot \frac{dX(f)}{df}$$

$$-2 \cdot \frac{\pi^2}{a} \cdot f \cdot X(f) = \frac{dX(f)}{df}$$

$$\frac{dX(f)}{df} = -2 \cdot \frac{\pi^2}{a} \cdot f \cdot X(f)$$

... pozwalają wyznaczyć ogólny wzór dla poszukiwanej transformaty:

$$X(f) = b \cdot e^{-\frac{\pi^2}{a} \cdot f^2}$$

Transformata sygnału Gaussa (dokończenie)

$$\boxed{X(f) = b \cdot e^{-\frac{\pi^2}{a} \cdot f^2}}$$

Nie znamy jeszcze stałej b:

$$X(0) = b$$

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a \cdot t^2} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a \cdot t^2}\, dt = ? = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

dlaczego?

Skorzystamy z wiedzy o rozkładach gęstości prawdopodobieństwa:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} \quad \wedge \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1$$

... zatem:

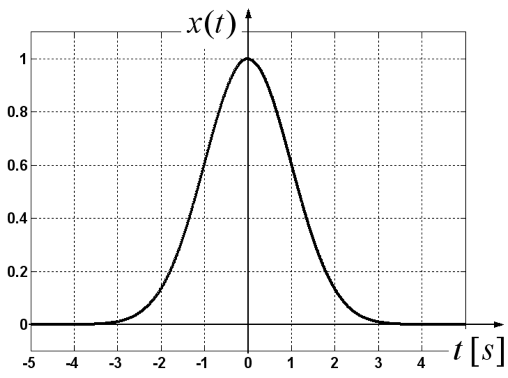
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a \cdot t^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a \cdot t^2}\, d\left(t \cdot \sqrt{2 \cdot a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot \tau^2}\, d\tau = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot a}} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \tau^2}\, d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

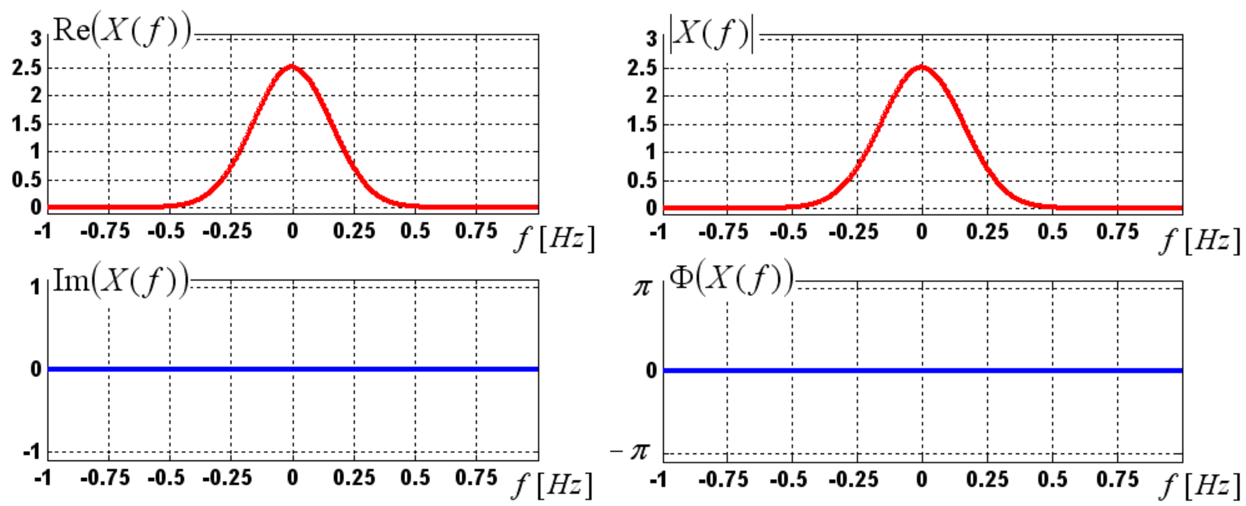
Transformata sygnału Gaussa (przykład)

… ma również postać funkcji Gaussa, tylko w dziedzinie *f*:

$$x(t) = e^{-a \cdot t^2} \quad \overset{CFT}{\underset{ICFT}{\longleftrightarrow}} \quad X(f) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{\pi^2}{a} \cdot f^2}$$

***a*=0,5**





Transformata sygnału Gaussa (przykład)

$$x(t)=e^{-a\cdot t^2} \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(f)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-\frac{\pi^2}{a}\cdot f^2}$$

Funkcja identyczna w obu dziedzinach:

$$dla \quad a=\pi$$

$$x(t)=e^{-\pi\cdot t^2} \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(f)=e^{-\pi\cdot f^2}$$

wtedy także:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\,df=1$$

...również:

$$x(0)=1 \quad oraz \quad X(0)=1$$

Zasada nieoznaczoności

Klasyczna zasada nieoznaczoności Heisenberga dotyczy pary wartości: położenie i pęd lub energia i czas (dla cząstek nietrwałych).

Analogiczna zależność zachodzi w przypadku sygnału i jego transformaty.

Dla normy L^2 generowanej przez iloczyn skalarny:

$$\|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

zachodzi własność analogiczna jak dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} \, dt = \frac{1}{\|x(t)\|^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = 1$$

Zasada nieoznaczoności (cd.)

Dlatego w sposób analogiczny, jak wyznaczamy wartość średnią rozkładu, możemy wyznaczyć wartość średnią unormowanego rozkładu energii

dla sygnału:

$$t_\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2}\, dt$$

i jego transformaty:

$$f_\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} f \cdot \frac{|X(f)|^2}{\|X(f)\|^2}\, df$$

Tak samo można określić odchylenia standardowe (albo ich kwadraty) dla obu rozkładów:

$$(t_\sigma)^2 = \frac{1}{\|x(t)\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_\mu)^2 \cdot |x(t)|^2\, dt$$

$$(f_\sigma)^2 = \frac{1}{\|X(f)\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (f - f_\mu)^2 \cdot |X(f)|^2\, df$$

Powyższe odchylenia standardowe są powiązane następującą zasadą nieoznaczoności:

$$t_\sigma \cdot f_\sigma \geq \frac{1}{2 \cdot (2 \cdot \pi)} = \frac{1}{4 \cdot \pi}$$

Zasada nieoznaczoności (przykład 1)

Dla sygnału Gaussa i jego transformaty:

$$x(t) = e^{-a \cdot t^2} \quad \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\longleftrightarrow}} \quad X(f) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{\pi^2}{a} \cdot f^2}$$

więc:

$$|x(t)|^2 = e^{-2 \cdot a \cdot t^2} \quad oraz \quad |X(f)|^2 = \frac{\pi}{a} \cdot e^{-2 \cdot \frac{\pi^2}{a} \cdot f^2}$$

... porównajmy z podręcznikowym rozkładem Gaussa:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1}$$

gdzie *μ* oraz *σ* to odpowiednio: wartość średnia i odchylenie standardowe.

Zatem:

$$t_\mu = 0; \quad t_\sigma = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a}}$$

$$f_\mu = 0; \quad f_\sigma = \frac{\sqrt{a}}{2 \cdot \pi}$$

ostatecznie:

$$t_\sigma \cdot f_\sigma = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{4 \cdot \pi} \approx 0{,}0796$$

Zasada nieoznaczoności (przykład 2)

$$x(t)=\Pi(t) \quad \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\longleftrightarrow}} \quad X(f)=\mathrm{sinc}(\pi\cdot f)$$

więc:

$$\left|x(t)\right|^2=\left(\Pi(t)\right)^2=\Pi(t) \quad oraz \quad \left|X(f)\right|^2=\mathrm{sinc}^2(\pi\cdot f)$$

Normalizacja nie jest konieczna, ponieważ:

$$\left\|x(t)\right\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\Pi(t)\,dt=1 \quad \Rightarrow \quad \left\|X(f)\right\|^2=1$$

Ze względu na parzystość obu funkcji: $t_\mu=0; \quad f_\mu=0$

$$\left(t_\sigma\right)^2=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}t^2\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}=\frac{1}{12}$$

$$\left(f_\sigma\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}f^2\cdot\frac{\sin^2(\pi\cdot f)}{\pi^2\cdot f^2}\,df=\frac{1}{\pi^2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^2(\pi\cdot f)\,df\rightarrow+\infty$$

$$t_\sigma=\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}\approx 0{,}2887$$

Zasada nieoznaczoności (przykład 3)

$$x(t) = \Lambda(t) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = \mathrm{sinc}^2(\pi \cdot f)$$

$$|x(t)|^2 = \left(\Lambda(t)\right)^2 \quad oraz \quad |X(f)|^2 = \mathrm{sinc}^4(\pi \cdot f)$$

Normalizacja jest konieczna, ponieważ:

$$\|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda^2(t)\, dt = 2 \cdot \int_0^1 (1-t)^2\ dt = 2 \cdot \int_0^1 t^2\ dt = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \|X(f)\|^2 = \frac{2}{3}$$

Ze względu na parzystość obu funkcji: $t_\mu = 0; \quad f_\mu = 0$

$$(t_\sigma)^2 = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^1 t^2 \cdot (1-t)^2\ dt = 3 \cdot \int_0^1 t^2 - 2 \cdot t^3 + t^4\ dt = 3 \cdot \left[\frac{t^3}{3} - 2 \cdot \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{10}$$

$$t_\sigma = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Zasada nieoznaczoności (cd. przykładu 3)

$$(f_\sigma)^2 = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^\infty f^2 \cdot \frac{\sin^4(\pi \cdot f)}{\pi^4 \cdot f^4}\, df = \frac{3}{\pi^4} \cdot \int_0^\infty \frac{\sin^4(\pi \cdot f)}{f^2}\, df = \frac{3}{\pi^2} \cdot \int_0^\infty \mathrm{sinc}^2(\pi \cdot f) \cdot \sin^2(\pi \cdot f)\, df = ???$$

Dygresja - pomocnicze wyprowadzenie wzoru:

$$x(t) = \frac{d}{dt}\Lambda(t) = \Pi\left(t + \frac{1}{2}\right) - \Pi\left(t - \frac{1}{2}\right) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad X(f) = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \mathrm{sinc}^2(\pi \cdot f)$$

$$|x(t)|^2 = \Pi\left(\frac{t}{2}\right) \quad oraz \quad |X(f)|^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot \mathrm{sinc}^4(\pi \cdot f)$$

$$\|x(t)\|^2 = \int_{-1}^{1} dt = 2 \quad \Rightarrow \quad \|X(f)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} 4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot \mathrm{sinc}^4(\pi \cdot f)\, df = 2$$

czyli: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \cdot \mathrm{sinc}^4(\pi \cdot f)\, df = \frac{1}{2 \cdot \pi^2}$ $\qquad \displaystyle(f_\sigma)^2 = \frac{3}{4 \cdot \pi^2}$ $\qquad \displaystyle f_\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \pi}$

ostatecznie: $\displaystyle t_\sigma \cdot f_\sigma = \sqrt{\frac{3}{10 \cdot 4 \cdot \pi^2}} \approx 0{,}0872$

Podsumowanie

1. Zasady zachowania: iloczynu skalarnego, energii oraz odległości.

2. Iloczyn skalarny w odniesieniu do splotu.

3. Transformaty sygnałów pochodnej oraz całki.

4. Sygnały skoku i znaku (sgn) oraz ich transformaty.

5. Odwrotne transformaty „widm” określonych jako pochodna oraz całka.

6. Transformata sygnału gaussowskiego.

7. Zasada nieoznaczoności.

Zapraszam na ćwiczenia ...
lub do laboratorium …