AGH

Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie

Inżynierskie techniki obliczeniowe 2021/2022

Wykład nr 4

Dr inż. Przemysław Korohoda
E-mail: korohoda@agh.edu.pl
Tel.wewn.AGH: (012-617)-27-52
Pawilon C3 - p.506

Strona www:
home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2021_2022_lato/ITO_EL_1
UPeL: ITOEL2022

Plan wykładu

1. Wektory – iloczyn skalarny, metryka, norma.
2. Aproksymacja wektora w bazie.
3. Przykłady baz wielomianowych.
4. Materiał porównawczy do ćwiczenia.

AGH

Wektory

Pytanie: co to jest wektor?

Odpowiedź: element przestrzeni wektorowej.

- i wszystko jasne... (?)

Wektory

Przestrzeń wektorowa X:

$$a,b \in L(+,\cdot) \quad \wedge \quad \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbf{X}(\oplus, L, \otimes)$$

L **to ciało liczb rzeczywistych lub zespolonych.**

Przestrzeń wektorowa *N*-wymiarowa:

$$\mathbf{x} \in \Re^N \quad \left(\mathbf{x} \in \mathbf{C}^N\right) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{N-1} & x_N \end{bmatrix}^T \quad : \quad x_k \in \Re \quad (x_k \in \mathbf{C}), \quad k = 1,2,3\dots,N$$

Zatem:
a) dla *N*=2 wektory można przedstawić jako punkty na płaszczyźnie;
b) dla *N*=3 wektory można przedstawić jako punkty w przestrzeni 3-wymiarowej.

Wektory (cd.)

$$a,b \in L(+,\cdot) \quad \wedge \quad \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbf{X}(\oplus, L, \otimes)$$

<u>Iloczyn skalarny</u>

$$<\mathbf{x} \mid \mathbf{y}> = a \in L \qquad \boxed{\mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow L}$$

Musi spełniać 3 postulaty…

1. Iloczyn skalarny jest przemienny, ale tylko dla *L*=*R*:

$$<\mathbf{x} \mid \mathbf{y}> = \overline{<\mathbf{y} \mid \mathbf{x}>}$$

2. Iloczyn skalarny jest liniowy (czyli w konsekwencji nawet dwuliniowy – ale tylko dla *L*=*R*!):

(Dla *L*=*C* i dla drugiego argumentu iloczyn skalarny jest antyliniowy)

$$<a \otimes \mathbf{x} \oplus b \otimes \mathbf{y} \mid \mathbf{z}> = a \cdot <\mathbf{x} \mid \mathbf{z}> + b \cdot <\mathbf{y} \mid \mathbf{z}>$$

3. Iloczyn skalarny wektora x „ze sobą samym" może dać jedynie taki wynik:

$$\left[<\mathbf{x},\mathbf{x}> \geq 0\right] \quad \wedge \quad \left[<\mathbf{x},\mathbf{x}> = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}\right]$$

Wektory (cd.)

$$\mathbf{x} \in \Re^N \quad \left(\mathbf{x} \in \mathbf{C}^N\right) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{N-1} & x_N \end{bmatrix}^T \quad : \quad x_k \in \Re \quad \left(x_k \in \mathbf{C}\right), \quad k = 1,2,3\dots, N$$

Iloczyn skalarny, norma i metryka

$$< \mathbf{x} \mid \mathbf{y} >$$

$$\Downarrow$$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{< \mathbf{x} \mid \mathbf{x} >}$$

$$\Downarrow$$

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Norma i metryka też mają swoje 3 postulaty, ale ...
tu wystarczy, że pochodzą od iloczynu skalarnego.

AGH

Wektory (cd.)

Jeżeli iloczyn skalarny dwóch wektorów wynosi zero, to te dwa wektory są ortogonalne:

$$< \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} > = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} \perp \mathbf{y}$$

Wektory (cd.)

Układ wektorów liniowo niezależnych

Czyli nie da się zapisać żadnego z jego wektorów za pomocą kombinacji liniowej pozostałych:

$$\cancel{\mathbf{b}_k = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{K} a_m \cdot \mathbf{b}_m}$$

$$\boxed{\mathbf{b}_k \in \Re^N \wedge \quad k = 1,2,\ldots,K : K \leq N \quad \wedge \quad \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{b}_{K-1} \quad \mathbf{b}_K] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = K}$$

$$\boxed{\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{b}_{N-1} \quad \mathbf{b}_N] \Rightarrow \det(\mathbf{B}) \neq 0}$$

Wektory (cd.)

Co daje połączenie iloczynu skalarnego, normy i metryki?
Możliwość optymalnej aproksymacji wektora za pomocą bazy wektorów:

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{K} a_k \cdot \mathbf{b}_k ; \quad \mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$$

$$\boxed{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{b}_k, \mathbf{e} \in \Re^N \quad (\text{lub } \mathbf{C}^N): \quad K \le N}$$

$$\begin{bmatrix} <\mathbf{x}|\mathbf{b}_1> \\ <\mathbf{x}|\mathbf{b}_2> \\ . \\ <\mathbf{x}|\mathbf{b}_{K-1}> \\ <\mathbf{x}|\mathbf{b}_K> \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} <\mathbf{b}_1|\mathbf{b}_1> & <\mathbf{b}_2|\mathbf{b}_1> & \dots & <\mathbf{b}_{K-1}|\mathbf{b}_1> & <\mathbf{b}_K|\mathbf{b}_1> \\ <\mathbf{b}_1|\mathbf{b}_2> & <\mathbf{b}_2|\mathbf{b}_2> & \dots & <\mathbf{b}_{K-1}|\mathbf{b}_2> & <\mathbf{b}_K|\mathbf{b}_2> \\ <\mathbf{b}_1|\mathbf{b}_3> & <\mathbf{b}_2|\mathbf{b}_3> & . & . & . \\ . & . & . & <\mathbf{b}_{K-1}|\mathbf{b}_{K-1}> & <\mathbf{b}_K|\mathbf{b}_{K-1}> \\ <\mathbf{b}_1|\mathbf{b}_K> & <\mathbf{b}_2|\mathbf{b}_K> & \dots & <\mathbf{b}_{K-1}|\mathbf{b}_K> & <\mathbf{b}_K|\mathbf{b}_K> \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ a_{K-1} \\ a_K \end{bmatrix}$$

W ogólnym przypadku: $\quad \mathbf{s} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{s}$

$$\boxed{\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ a_{K-1} \\ a_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{K-1} & a_K \end{bmatrix}^T}$$

...ale, gdy baza jest ortogonalna: $\quad a_k = \dfrac{<\mathbf{x}|\mathbf{b}_k>}{\|\mathbf{b}_k\|^2}$

$$k \ne m \quad \Rightarrow \quad <\mathbf{b}_k | \mathbf{b}_m> = 0$$

Wektory (cd.)

<u>Przykład</u> iloczynu skalarnego:

$$<\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}> = \sum_{n=1}^{N} x_n \cdot \overline{y_n}$$

Aproksymacja w zapisie macierzowym:

$$\boxed{\mathbf{x} \approx \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{K} a_k \cdot \mathbf{b}_k\,; \quad \mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{x}}$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{b}_{K-1} \quad \mathbf{b}_K]$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$$

Macierz pseudoodwrotna do B:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{x}$$

$$\boxed{(\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{B}^T}$$

Tak wyliczone współczynniki zawarte w wektorze a minimalizują błąd średniokwadratowy: $\|\mathbf{e}\|$
Można to udowodnić teoretycznie albo … zweryfikować obliczeniowo (!)

Dla *K*=*N* i liniowo niezależnych wektorów bazy (macierz B jest nieosobliwa):

$$\mathbf{x} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{x}$$

Funkcje jako wektory

$$t \in T = [t_1, t_2]$$

$$< x(t) \,|\, y(t) >$$

$$\Downarrow$$

$$\|x(t)\| = \sqrt{< x(t) \,|\, x(t) >}$$

$$\Downarrow$$

$$\rho(x(t), y(t)) = \|x(t) - y(t)\|$$

Przykład iloczynu skalarnego:

$$< \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} > = < x(t) \,|\, y(t) > = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot \overline{y(t)}\, dt$$

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{K} a_k \cdot \mathbf{b}_k ; \quad \mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$$

$$x(t) \approx y(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k \cdot b_k(t); \quad e(t) = y(t) - x(t)$$

$$a_k = \frac{< \mathbf{x} \,|\, \mathbf{b}_k >}{\|\mathbf{b}_k\|^2}$$

AGH

Wielomiany Czebyszewa

$$C_N(x) = \cos(N \cdot v) \quad : \quad \cos(v) = x$$

$$C_N(x) = \cos\left(N \cdot \cos^{-1}(x)\right) \quad , \quad x \in < -1;1 >$$

Poszerzenie dziedziny (przepis nr 2):

$$C_N(x) = \cosh(N \cdot v) \quad : \quad \cosh(v) = x$$

$$C_N(x) = \cosh\left(N \cdot \cosh^{-1}(x)\right)$$

Przepis rekurencyjny (nr 3):

$$C_0(x) = 1, \quad C_1(x) = x$$

$$C_{N+1}(x) = 2 \cdot x \cdot C_N(x) - C_{N-1}(x) \quad dla \quad N \geq 1$$

Implementacja w matlabie prostego wzoru wielomianowego

$$W_1(x) = x^2 + 2 \cdot x + 3$$

$$W_2(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1$$

$$W_3(x) = x \cdot W_1(x) - 2 \cdot x^2 \cdot W_2(x)$$

```
.....

a1=[1,2,3];
a2=[3,2,1];

a3=[0,a1,0]-2*[a2,0,0];

x=-10:0.001:10;
y1=polyval(a1,x);
y2=polyval(a2,x);

.....

% KONIEC;
```

Wielomiany Czebyszewa (cd.)

Wynik zastosowania przepisów:

$$C_0(x) = 1$$

$$C_1(x) = x$$

$$C_2(x) = 2 \cdot x^2 - 1$$

$$C_3(x) = 4 \cdot x^3 - 3 \cdot x$$

$$C_4(x) = 8 \cdot x^4 - 8 \cdot x^2 + 1$$

$$C_5(x) = 16 \cdot x^5 - 20 \cdot x^3 + 5 \cdot x$$

$$C_6(x) = 32 \cdot x^6 - 48 \cdot x^4 + 18 \cdot x^2 - 1$$

Wielomiany Czebyszewa (cd.)

Wielomiany Czebyszewa są na przedziale <-1;+1> ortogonalne dla iloczynu skalarnego (rozważamy funkcje rzeczywiste) z funkcją wagową:

$$\int_{-1}^{1} C_k(x) \cdot C_m(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & dla \quad k \neq m \\ \frac{\pi}{2} & dla \quad k = m \neq 0 \\ \pi & dla \quad k = m = 0 \end{cases}$$

Uwaga – w granicznych punktach przedziału całkowania zachodzi dzielenie przez 0.

W razie potrzeby można je nieco zmodyfikować, otrzymując funkcje ortogonalne bez konieczności zastosowania funkcji wagowej:

$$f_n(x) = C_n(x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi^2 \cdot \left(1-x^2\right)}} \quad dla \quad n > 0$$

... ale to już nie będą wielomiany...

Wielomiany Czebyszewa (cd.)

Wielomian Czebyszewa stopnia *N* ma na przedziale <-1;+1> *N* miejsc zerowych rozmieszczonych według wzoru:

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi \cdot (k - 0{,}5)}{N}\right) \quad : \quad k = 1,2,\ldots,N$$

… ma również *N*+1 ekstremów (na przemian maksima i minima o wartościach +1 oraz -1), w punktach:

$$x_m = \cos\left(\frac{\pi \cdot m}{N}\right) \quad : \quad m = 0,1,\ldots,N$$

Wielomiany Legendre'a

… a właściwie to tylko przykład takich wielomianów

$$L_0(x)=1, \quad L_n(x)=\frac{1}{2^n \cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)$$

Silnia: factorial

Przepis rekurencyjny:

$$L_0(x)=1$$
$$L_1(x)=x$$

.

.

.

$$L_{n+1}(x)=\frac{2\cdot n+1}{n+1}\cdot x\cdot L_n(x)-\frac{n}{n+1}\cdot L_{n-1}(x)$$

$$L_0(x)=1$$
$$L_1(x)=x$$
$$L_2(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(3\cdot x^2-1\right)=\frac{3}{2}\cdot x^2-\frac{1}{2}$$
$$L_3(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(5\cdot x^3-3\cdot x\right)=\frac{5}{2}\cdot x^3-\frac{3}{2}\cdot x$$

Wielomiany Legendre'a (cd.)

Dla:

$$< f_1(x) | f_2(x) >= \int_{-1}^{+1} f_1(x) \cdot f_2(x)\, dx$$

są parami ortogonalne, a ponadto:

$$\left\| L_n(x) \right\| = \sqrt{\frac{2}{2 \cdot n + 1}}$$

- czyli można łatwo otrzymać ortonormalną bazę wielomianową.

Dobre cechy z punktu widzenia bazy mają także funkcje sin/cos – można sprawdzić eksperymentalnie!

MATLAB

```
% Struktura (np. wsp. wielomianów):
X(1).a=1;
X(2).a=[1,0];
X(3).a=[3/2,0,-1/2];

% na przykład zamiast macierzy:
A=[0,0,1;   0,1,0;   3/2,0,-1/2];
```

Materiał do porównań: postulaty dla normy i metryki

Norma

$$\mathbf{X} \ni \mathbf{x} \ -> \ \|\mathbf{x}\| \in \mathbf{R}_{0+}$$

$$\mathbf{X} \ni \mathbf{x} \to \|\mathbf{x}\| \in \mathbf{R}_{0+}$$

1) $\left[\|\mathbf{x}\| \ \geq 0\right] \ \wedge \ \left[\|\mathbf{x}\| \ = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}\right]$

2) $\|\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

3) $dla \quad a \in L: \ \|a \otimes \mathbf{x}\| = |a| \cdot \|\mathbf{x}\|$

Metryka

$$\rho : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \ -> \ \mathbf{R}_{0+}$$

$$\rho : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbf{R}_{0+}$$

1) $[\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0] \ \wedge \ [\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}]$

2) $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y},\mathbf{x})$

3) $\rho(\mathbf{x},\mathbf{z}) \leq \rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y},\mathbf{z})$

Materiał do porównań: generowanie bazy ortonormalnej

Ortonormalny układ wektorów:

$$<\mathbf{b}_m \mid \mathbf{b}_n>= d(m-n) = \begin{cases} 0 & dla \quad m \neq n \\ 1 & dla \quad m = n \end{cases}$$

Macierz ortogonalna:

$$\boxed{\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_{N-1} & \mathbf{b}_N \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^T}$$

Uwaga na transponowanie dla macierzy zespolonej!

Dla *N* liniowo niezależnych wektorów $\mathbf{v}_k$ (procedura Grama-Schmidta):

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N \rightarrow \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_N$$

$$\boxed{<\mathbf{b}_k \mid \mathbf{b}_m>= d(m-k)}$$

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}$$

normalizacja pierwszego wektora.

$$wyznaczamy: \quad \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{k-1}$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k - \sum_{m=1}^{k-1} <\mathbf{v}_k \mid \mathbf{b}_m> \cdot \mathbf{b}_m$$

zapisanie *k*-tego wektora za pomocą *k*-1 wektorów nowej bazy - zatem $\mathbf{u}_k$ jest błędem tego zapisu.

$$\mathbf{b}_k = \frac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|}$$

normalizacja *k*-tego wektora.

$$itd.$$

Uwaga – wynik może zależeć od kolejności przetwarzania (permutowanie indeksów).

Materiał do porównań: inne iloczyny skalarne

Nieskończenie wiele różnych iloczynów skalarnych!

$$\boxed{\mathbf{x},\mathbf{y} \in \Re^N \quad (\text{lub } \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{C}^N)}$$

$$< \mathbf{x} \mid \mathbf{y} >= \sum_{n=1}^{N} w_n \cdot x_n \cdot \overline{y_n}$$

$w_n \in \Re$ **wektor wag**

$\forall_n : w_n > 0$

$$\boxed{t \in T = [t_1, t_2]}$$

$$< \mathbf{x} \mid \mathbf{y} >=< x(t) \mid y(t) >= \int_{t_1}^{t_2} w(t) \cdot x(t) \cdot \overline{y(t)}\, dt$$

$w(t) \in \Re$ **funkcja wagowa**

$\forall_{t \in T} : w(t) > 0$

$$\boxed{\mathbf{x},\mathbf{y} \in \Re^\infty \quad (\text{lub } \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{C}^\infty)}$$

AGH

Zapraszam do laboratorium ...