



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Teoria sygnałów

Wykład 7

Dr inż. Przemysław Korohoda
Katedra Elektroniki, AGH, Kraków

home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2

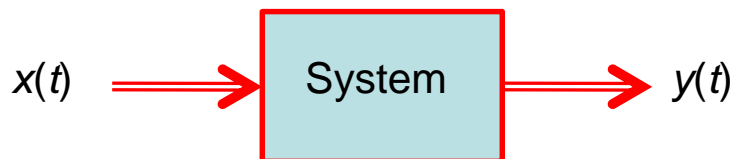
UPEL: TS 2022

Główne tematy

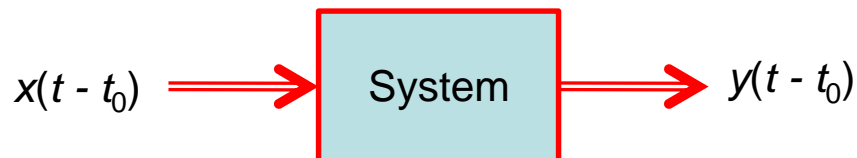
- 1. Systemy liniowe i stacjonarne.**
- 2. Odpowiedź impulsowa filtru.**
- 3. Transmitancja filtru i jej cechy.**
- 4. Filtr Butterwortha.**
- 5. Filtry Czebyszewa.**
- 6. Filtr eliptyczny.**
- 7. Przekształcanie filtrów.**
- 8. Przykłady charakterystyk filtrów.**

System stacjonarny (*ang. Time Invariant*) = niezmienny w czasie

Jeżeli:



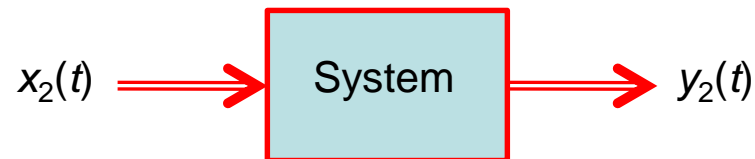
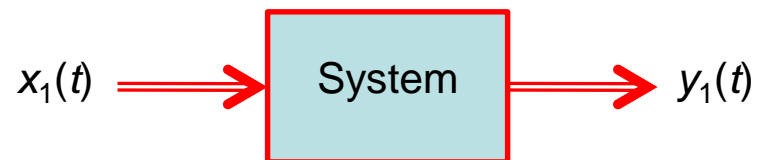
to:



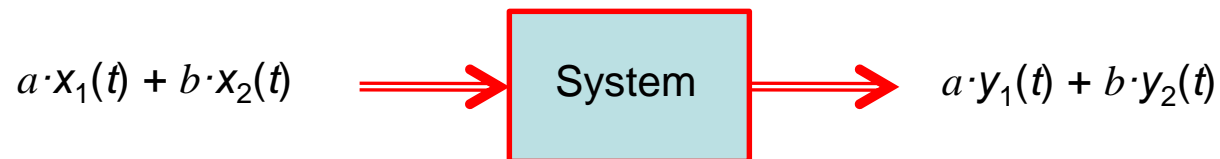
dla dowolnego t_0 .

System liniowy (*ang. Linear*)

Jeżeli:



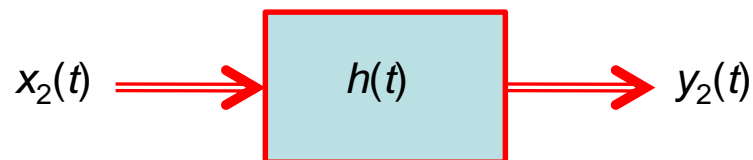
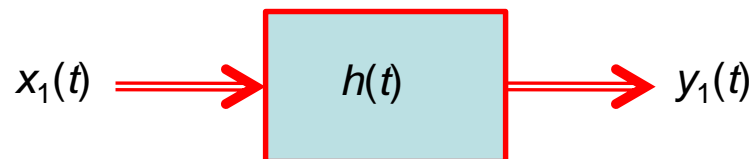
to:



dla dowolnych liczb a i b (rzeczywistych, a nawet zespolonych!).

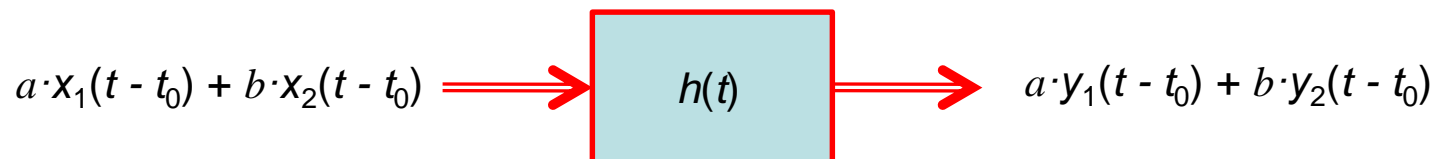
System liniowy stacjonarny (*ang. Linear Time Invariant*) = *LTI*

Jeżeli:



$h(t)$ – odpowiedź impulsowa

to:



dla dowolnych t_0 oraz a i b (jak poprzednio).

Odpowiedź impulsowa

Twierdzenie o splocie:

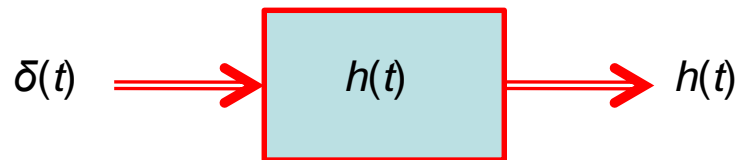
Dziedzina sygnału (czasu)

Dziedzina transformaty Fouriera (częstotliwości)

$$x(t) * h(t) \begin{matrix} \xrightarrow{CFT} \\ \xleftarrow{ICFT} \end{matrix} X(f) \cdot H(f)$$

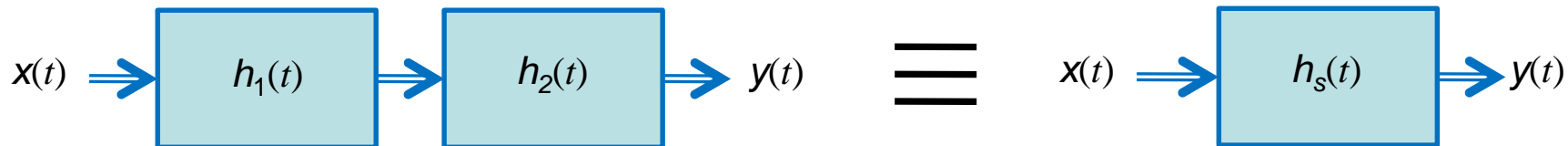
Dla systemu liniowego, stacjonarnego (*LTI = ang. Linear Time Invariant*):

$h(t)$ – odpowiedź impulsowa

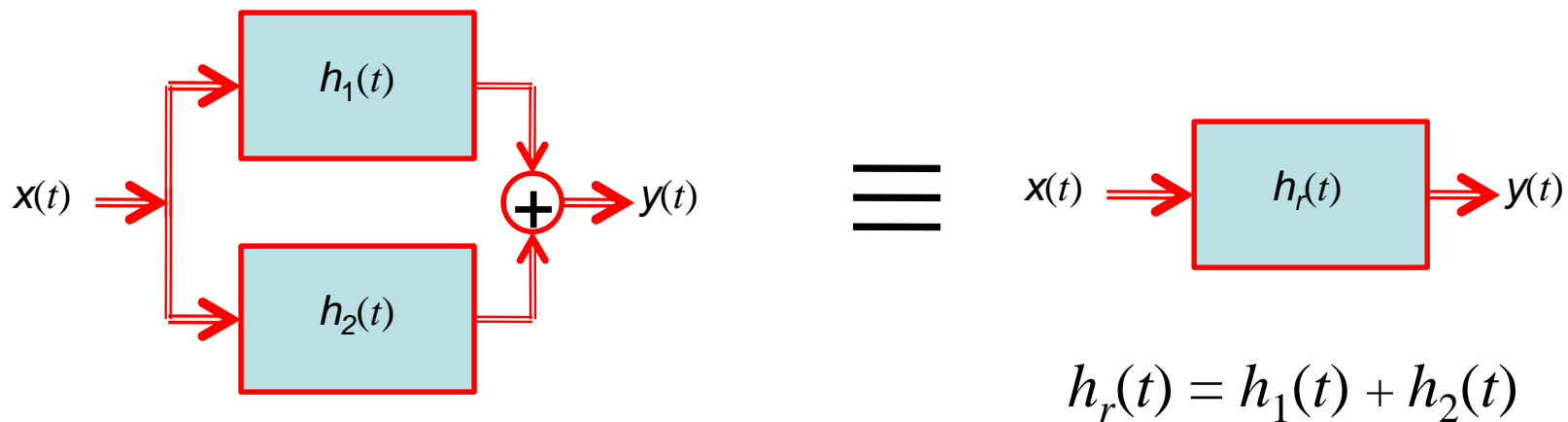


$$\delta(t) * h(t) = h(t)$$

Połączenia systemów *LTI* w dziedzinie czasu



$$h_s(t) = h_1(t) * h_2(t)$$



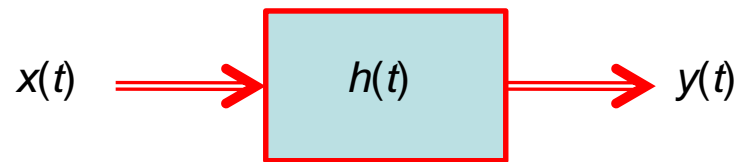
$$h_r(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

Dla systemów *LTI* można stosować różne, równoważne sposoby opisu

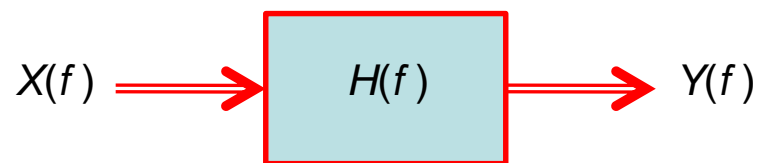
$$x(t) \xrightleftharpoons[CFT]{ICFT} X(f)$$

$$y(t) \xrightleftharpoons[CFT]{ICFT} Y(f)$$

$$h(t) \xrightleftharpoons[CFT]{ICFT} H(f)$$



$$y(t) = x(t) * h(t)$$



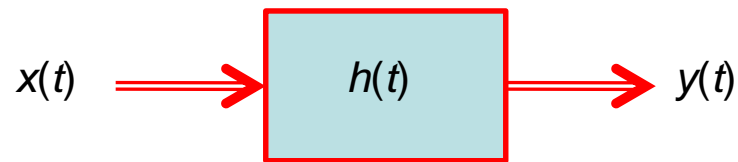
$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

Dla systemów *LTI* można stosować różne, równoważne sposoby opisu

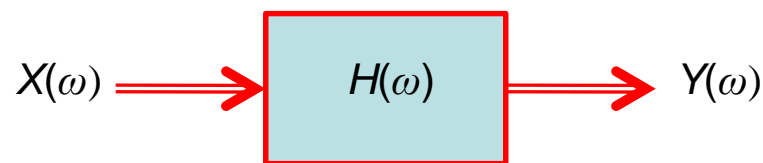
$$x(t) \xrightleftharpoons[CFT_{\omega}]{ICFT_{\omega}} X(\omega)$$

$$y(t) \xrightleftharpoons[CFT_{\omega}]{ICFT_{\omega}} Y(\omega)$$

$$h(t) \xrightleftharpoons[CFT_{\omega}]{ICFT_{\omega}} H(\omega)$$

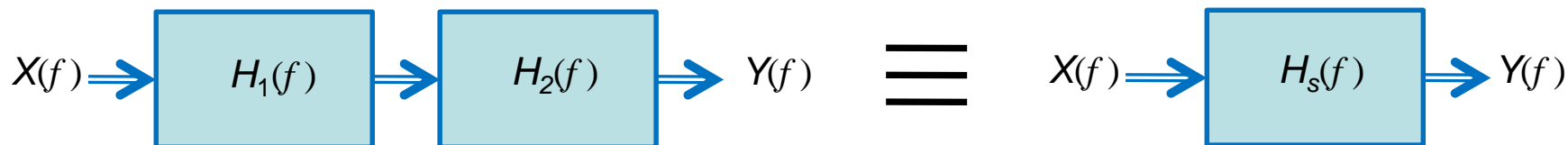


$$y(t) = x(t) * h(t)$$

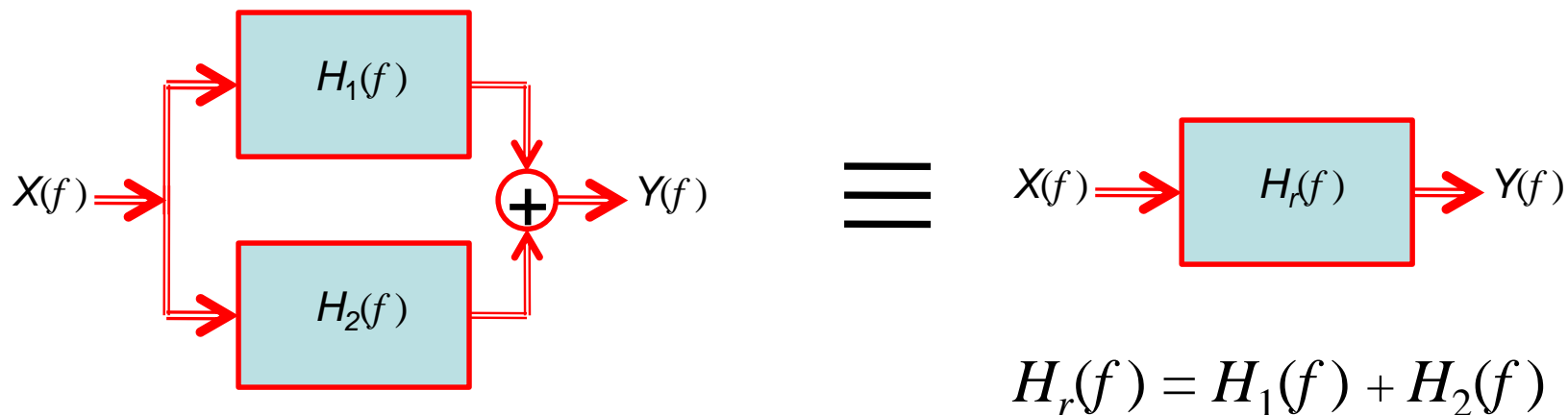


$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

Połączenia systemów *LTI* w dziedzinie częstotliwości

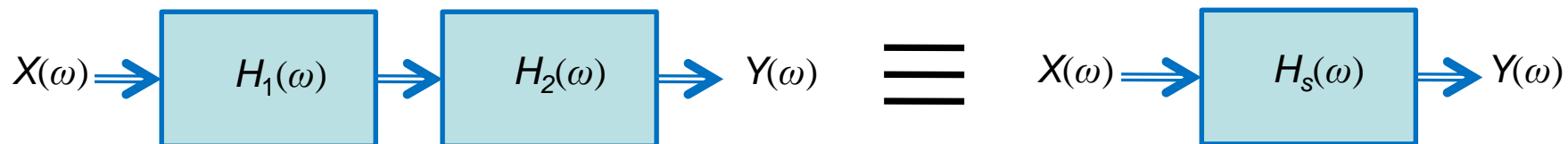


$$H_s(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$$

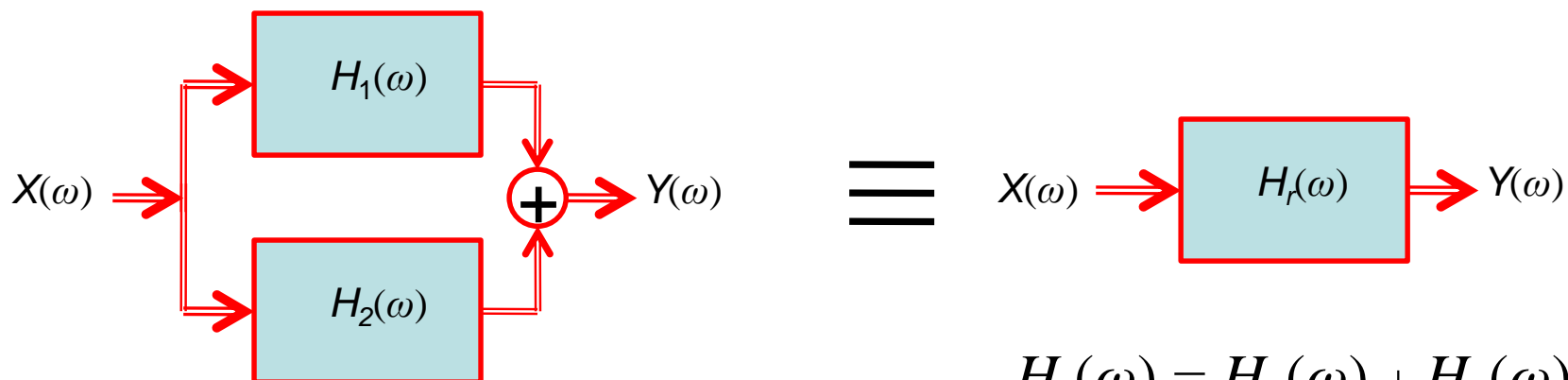


$$H_r(f) = H_1(f) + H_2(f)$$

Połączenia systemów *LTI* w dziedzinie pulsacji



$$H_s(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega)$$



$$H_r(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega)$$

Efekt przetwarzania (filtracji) opisany w dziedzinie częstotliwości

System (filtr):

$$H(f) = \operatorname{Re}(H(f)) + j \cdot \operatorname{Im}(H(f)) = |H(f)| \cdot e^{j \cdot \Phi(H(f))}$$

Przetwarzanie (filtracja):

$$\begin{aligned} Y(f) &= |Y(f)| \cdot e^{j \cdot \varphi_Y(f)} = |X(f)| \cdot e^{j \cdot \varphi_X(f)} \cdot |H(f)| \cdot e^{j \cdot \varphi_H(f)} = \\ &= |X(f)| \cdot |H(f)| \cdot e^{j \cdot [\varphi_X(f) + \varphi_H(f)]} \end{aligned}$$

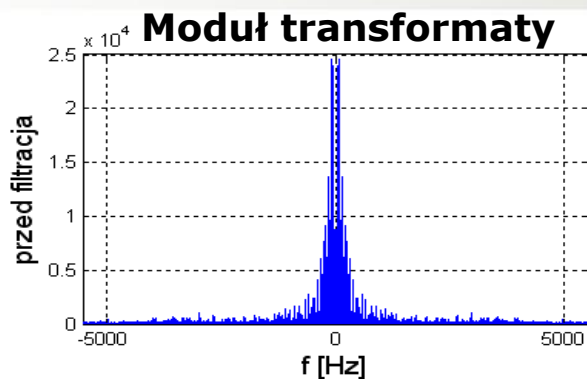
czyli:

$$|Y(f)| = |X(f)| \cdot |H(f)|$$

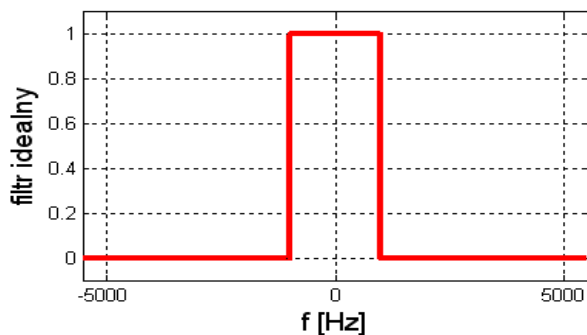
$$\varphi_Y(f) = \varphi_X(f) + \varphi_H(f)$$

Filtracja w dziedzinie transformaty Fouriera i czasu

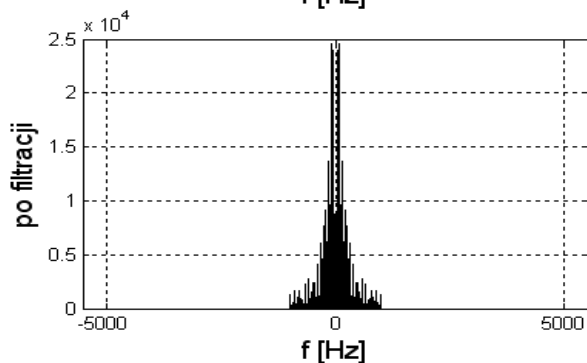
$$|X(f)|$$



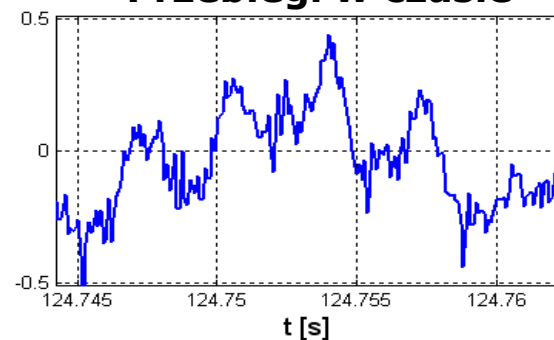
$$|H(f)| = H(f)$$



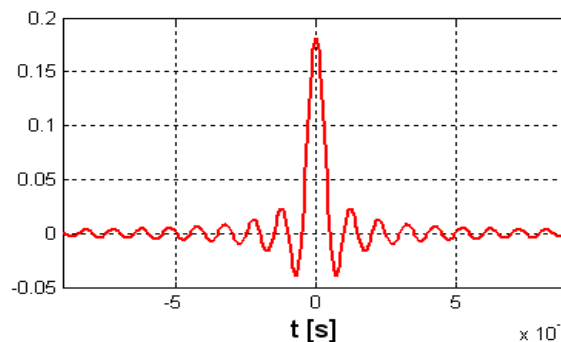
$$|Y(f)|$$



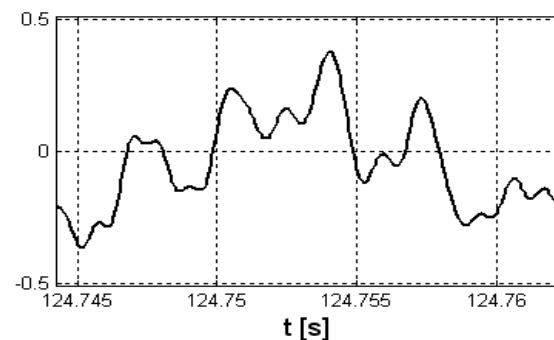
Przebiegi w czasie



$$x(t)$$



$$h(t)$$



$$y(t)$$

Transformacja Laplace'a

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt$$

$$X(s) \in \mathbb{C}$$

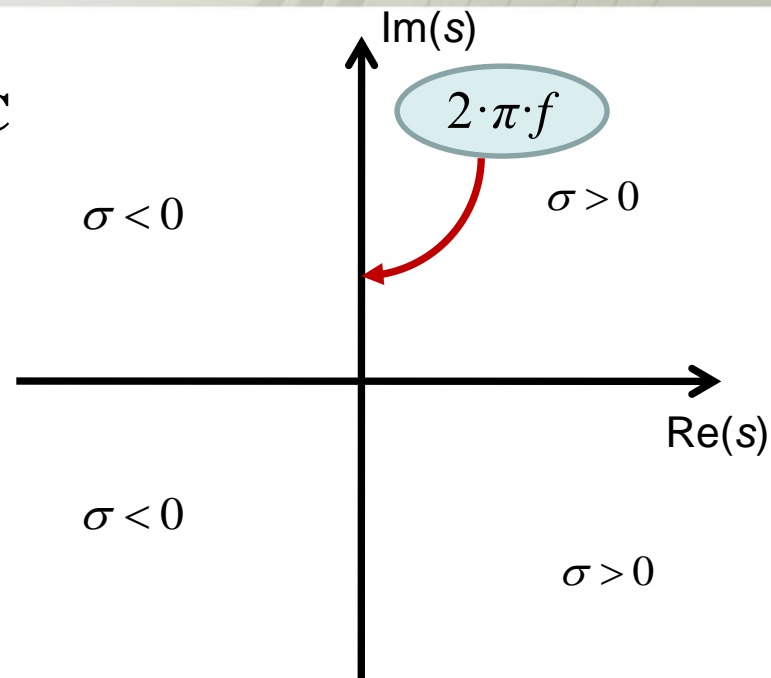
$$s = \sigma + j \cdot \omega$$

$$s = \sigma + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$\text{Im}(s) = 2 \cdot \pi \cdot f$$

Transformacja Fouriera:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt$$



Transformacja Laplace'a jest liniowa!

Przykład wyliczenia dla

$$x(t) = u(t) \cdot e^{a \cdot t}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{a \cdot t} \cdot e^{-s \cdot t} dt &= \int_0^{+\infty} e^{(a-s) \cdot t} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(a-s) \cdot t} = e^{j \cdot \text{Im}(a-s) \cdot t} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\text{Re}(a-s) \cdot t} \\ &= \{a-s \neq 0\} = \left[\frac{e^{(a-s) \cdot t}}{a-s} \right]_0^{+\infty} = \{\text{Re}(a-s) < 0\} = -\frac{1}{a-s} \end{aligned}$$

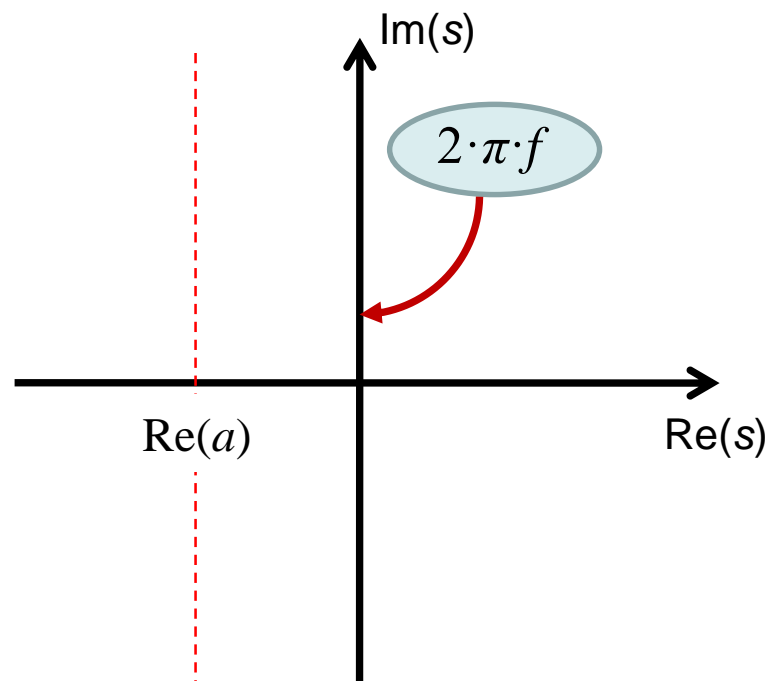
Obszar zbieżności, OZ (ang. ROC = Region of Convergence):

$$\text{Re}(a-s) < 0 \Rightarrow \text{Re}(s) > \text{Re}(a)$$

Sygnał i jego transformata Laplace'a

$$e^{a \cdot t} \cdot u(t) \xleftrightarrow[ILT]{LT} \frac{1}{s - a} \quad : \quad \text{Re}(s) > \text{Re}(a)$$

**Sens transformaty Fouriera
dla tego przypadku...**

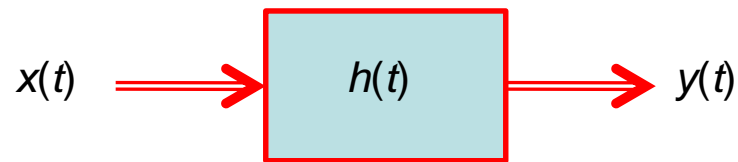


Dla systemów *LTI* można stosować różne, równoważne sposoby opisu

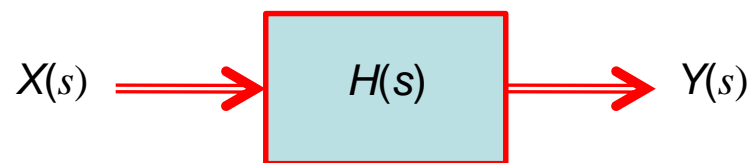
$$x(t) \xrightleftharpoons[ILT]{LT} X(s)$$

$$y(t) \xrightleftharpoons[ILT]{LT} Y(s)$$

$$h(t) \xrightleftharpoons[ILT]{LT} H(s)$$



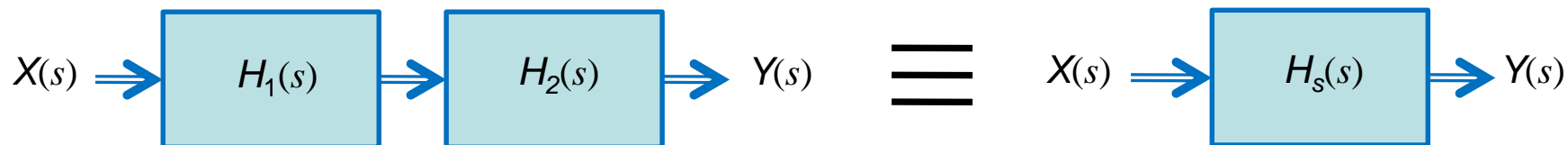
$$y(t) = x(t) * h(t)$$



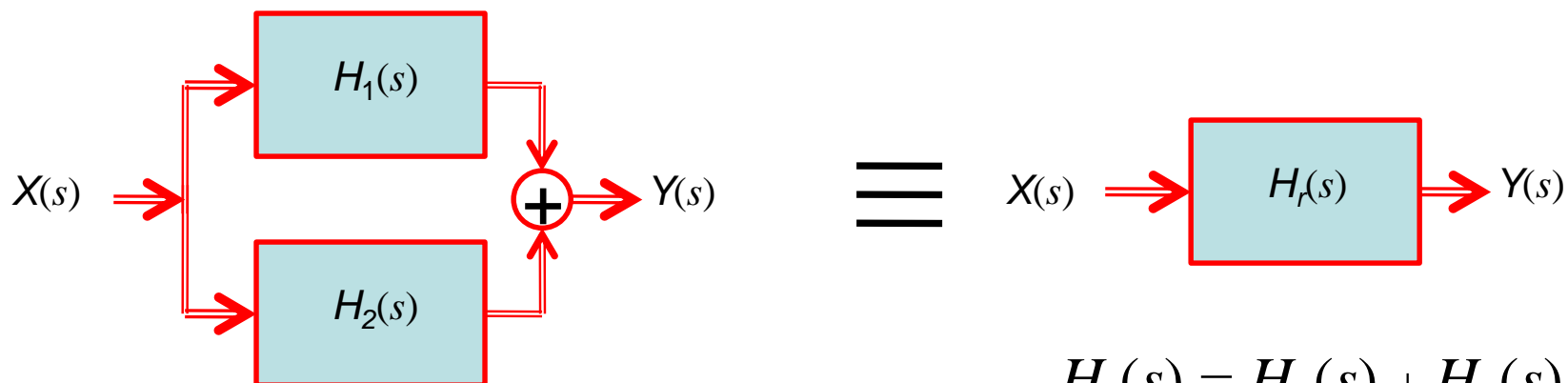
$$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

Twierdzenie o splocie dla transformacji Laplace'a

Połączenia systemów *LTI* w dziedzinie Laplace'a



$$H_s(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$$



$$H_r(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

Transmitancja systemu

Twierdzenie o splocie

$$x(t) * h(t) \xrightleftharpoons[ILT]{LT} X(s) \cdot H(s)$$

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

Transmitancja

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \dots + b_M \cdot s^M}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \dots + a_N \cdot s^N}$$

$$H(s) = \frac{b_M}{a_N} \cdot \frac{(s - z_0) \cdot (s - z_1) \cdot \dots \cdot (s - z_{M-1})}{(s - p_0) \cdot (s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_{N-1})}$$

... zera (z_m) i bieguny (p_n) transmitancji.

Rozkład transmitancji na ułamki proste

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \dots + b_M \cdot s^M}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \dots + a_N \cdot s^N}$$

Zwykle $M < N$

... i wtedy rozkład na ułamki proste

dla $p_k \neq p_l$

jest następujący:

$$H(s) = \frac{c_0}{s - p_0} + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \dots + \frac{c_{N-1}}{s - p_{N-1}}$$

Recepta jest prosta:

$$c_k = H(s) \cdot (s - p_k) \Big|_{s=p_k}$$

Odpowiedź impulsowa systemu (*LTI*) o danej transmitacji

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \dots + b_M \cdot s^M}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \dots + a_N \cdot s^N}$$

$$H(s) = \frac{c_0}{s - p_0} + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \dots + \frac{c_{N-1}}{s - p_{N-1}}$$

$$H(s) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{c_n}{s - p_n} \xrightarrow{\text{ILT}} h(t) = u(t) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{p_n \cdot t}$$

$$e^{a \cdot t} u(t) \xleftrightarrow[\text{ILT}]{\text{LT}} \frac{1}{s - a} : \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$$

Związki między transmitancją w dziedzinie Laplace'a i Fouriera (pod warunkiem zgodności obszaru zbieżności)

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \dots + b_M \cdot s^M}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \dots + a_N \cdot s^N}$$

Charakterystyki częstotliwościowe (Fouriera):

$$H(s) \Big|_{s=j\cdot\omega} = H(\omega) = \frac{b_0 + b_1 \cdot (j \cdot \omega) + b_2 \cdot (j \cdot \omega)^2 + \dots + b_M \cdot (j \cdot \omega)^M}{1 + a_1 \cdot (j \cdot \omega) + a_2 \cdot (j \cdot \omega)^2 + \dots + a_N \cdot (j \cdot \omega)^N}$$

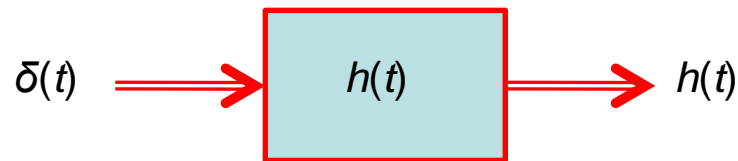
$$\text{dla } \omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$H(s) \Big|_{s=j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} = H(f) = \frac{b_0 + b_1 \cdot (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f) + b_2 \cdot (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^2 + \dots + b_M \cdot (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^M}{1 + a_1 \cdot (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f) + a_2 \cdot (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^2 + \dots + a_N \cdot (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^N}$$

Stabilność i przyczynowość filtru

Filtr *LTI* jest przyczynowy, gdy: $h(t)=0$ dla $t<0$

Wyjaśnienie:



$$\delta(t)*h(t)=h(t)$$

Idealny filtr (DP):
 $H(f)=\Pi(f/(2\cdot f_g))$
 nie jest przyczynowy !

Filtr jest **stabilny**, gdy ograniczony sygnał wejściowy daje zawsze ograniczony sygnał wyjściowy.

Filtr jest **asymptotycznie stabilny**, gdy z faktu, iż sygnał wejściowy od pewnej chwili staje się zerowy (i pozostaje taki aż do nieskończoności) wynika, że gdy t dąży do nieskończoności, to sygnał wyjściowy dąży do zera.

Jest tak, gdy: $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$, czyli, gdy: $H(s): \text{Re}(p_k) < 0$

Filtr Butterwortha

Założenie projektowe:

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_g}\right)^{2 \cdot N}} \Rightarrow |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_g}\right)^{2 \cdot N}}} \quad (1)$$

Charakterystyka maksymalnie płaska:
pochodne wszystkich rzędów dążą do zera
dla $f \rightarrow 0$ oraz $f \rightarrow \infty$

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j \cdot \omega_g}\right)^{2 \cdot N}} = \frac{1}{1 + (-1)^N \left(\frac{s}{\omega_g}\right)^{2 \cdot N}} \quad (2)$$

Można sprawdzić, że (2) sprowadza się do (1) po podstawieniu: $s = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$

Projektowanie filtru Butterwortha

$$\left|H(s)\right|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j \cdot \omega_g}\right)^{2 \cdot N}} = \frac{1}{1 + (-1)^N \left(\frac{s}{\omega_g}\right)^{2 \cdot N}}$$



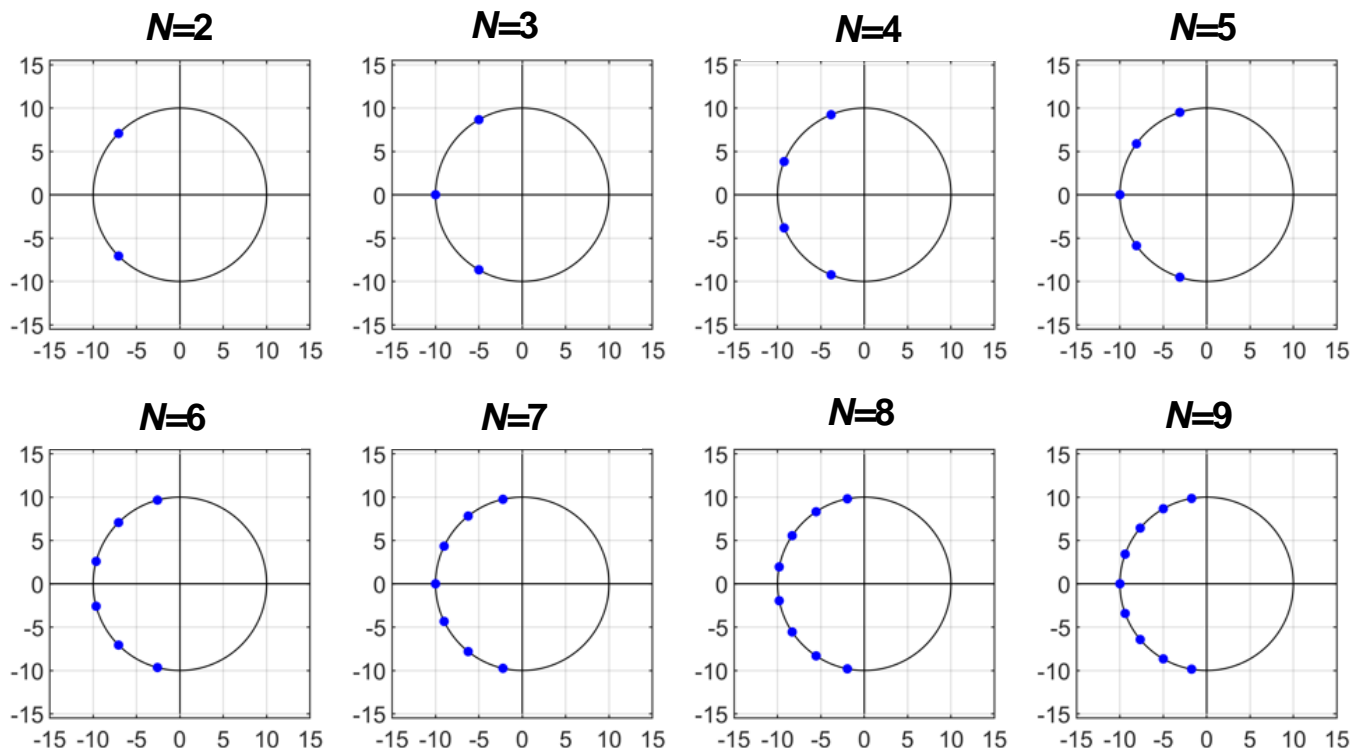
$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \dots + b_M \cdot s^M}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \dots + a_N \cdot s^N}$$

Projektowanie filtru Butterwortha

Dolnoprzepustowy ($\omega_g = 2\pi f_g$ rad/s) filtr Butterwortha jest opisany w dziedzinie Laplace'a następująco:

$$H(s) = \frac{(\omega_g)^N}{(s - p_0) \cdot (s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_{N-1})} = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{\omega_g}{s - p_k}$$

$$\omega_g = 10$$



Filtr Butterwortha

- odpowiedź impulsowa

$$H(s) = \frac{c_0}{s - p_0} + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \dots + \frac{c_{N-1}}{s - p_{N-1}}$$

$$H(s) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{c_n}{s - p_n} \xrightarrow{\text{ILT}} h(t) = u(t) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{p_n \cdot t}$$

Dla filtru 2. rzędu ($f_g = 1$ Hz):

$$h(t) = u(t) \cdot 2 \cdot (\pi \cdot \sqrt{2}) \cdot e^{-\sqrt{2} \cdot \pi \cdot t} \cdot \sin(\sqrt{2} \cdot \pi \cdot t)$$

Dla filtru 3. rzędu ($f_g = 1$ Hz):

$$h(t) = u(t) \cdot \left[2 \cdot \pi \cdot e^{-2 \cdot \pi \cdot t} + e^{-\pi \cdot t} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{3}} \cdot \sin(\sqrt{3} \cdot \pi \cdot t) - 2 \cdot \pi \cdot \cos(\sqrt{3} \cdot \pi \cdot t) \right) \right]$$

Filtr Butterwortha

skala decybelowa i częstotliwość graniczna

$$A(f) = |H(f)|$$

Tu zwykle przyjmujemy: $A_{ref}=1$

$$A_{dB}(f) = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{A(f)}{A_{ref}} \right) [dB]$$

$$A_{dB}^2(f) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{(A(f))^2}{(A_{ref})^2} \right) [dB]$$

$$f_g : A(f_g) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow A_{dB}(f_g) = -3dB$$

$$10 \Leftrightarrow +20dB$$

$$2 \Leftrightarrow +6dB$$

$$\sqrt{2} \Leftrightarrow +3dB$$

$$1 \Leftrightarrow 0dB$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow -3dB$$

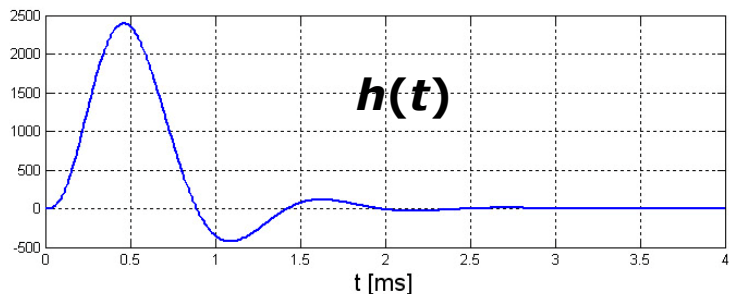
$$\frac{1}{2} \Leftrightarrow -6dB$$

$$\frac{1}{10} \Leftrightarrow -20dB$$

$$\frac{1}{100} \Leftrightarrow -40dB$$

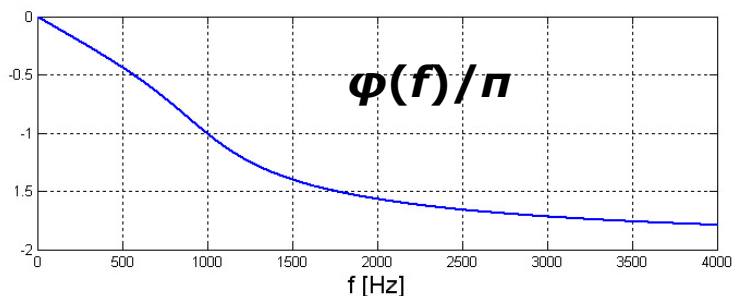
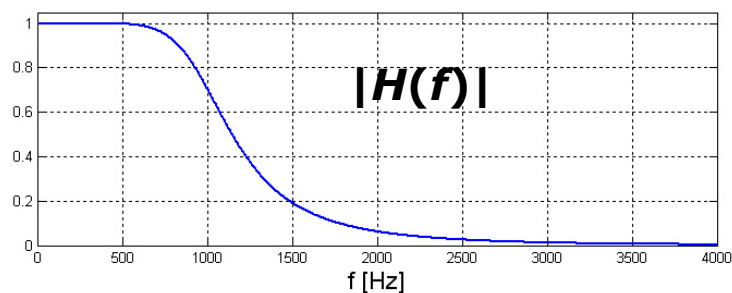
$$\frac{1}{1000} \Leftrightarrow -60dB$$

Filtr Butterwortha przykłady

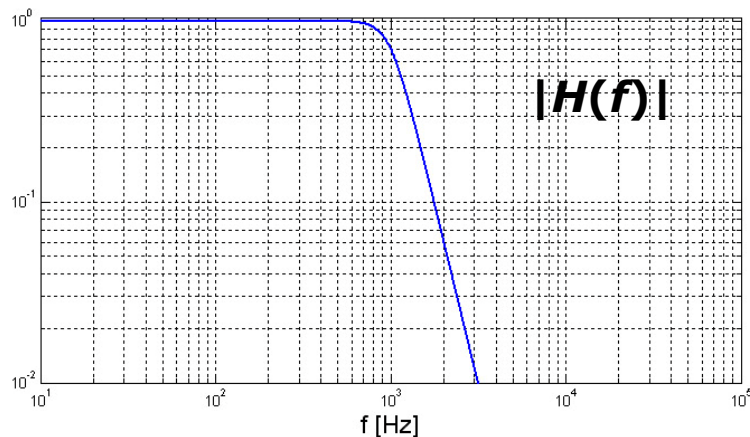


**Filtr Butterwortha, 4. rzędu,
 $f_g = 1$ kHz.**

**Odpowiedź impulsowa $h(t)$
oraz ch-ki: amplitudowa i fazowa.**

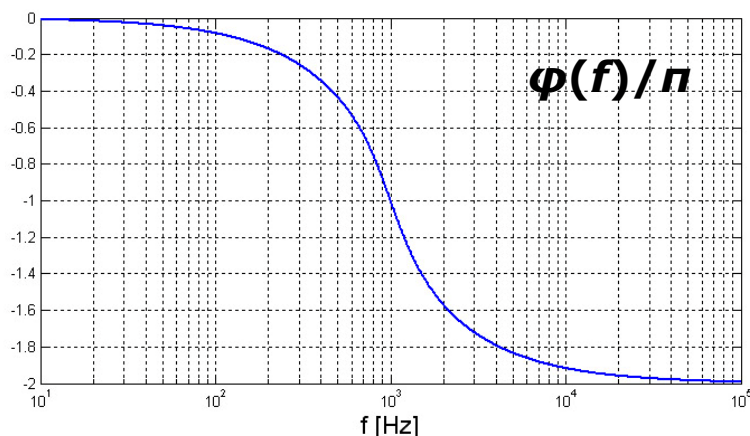


Filtr Butterwortha przykłady



**Filtr Butterwortha, 4. rzędu,
 $f_g = 1$ kHz.**

**Ch-ki: amplitudowa w skali
logarytmicznej i fazowa
w skali półlogarytmicznej.**



Filtr Butterwortha

– zależność charakterystyk od rzędu filtru

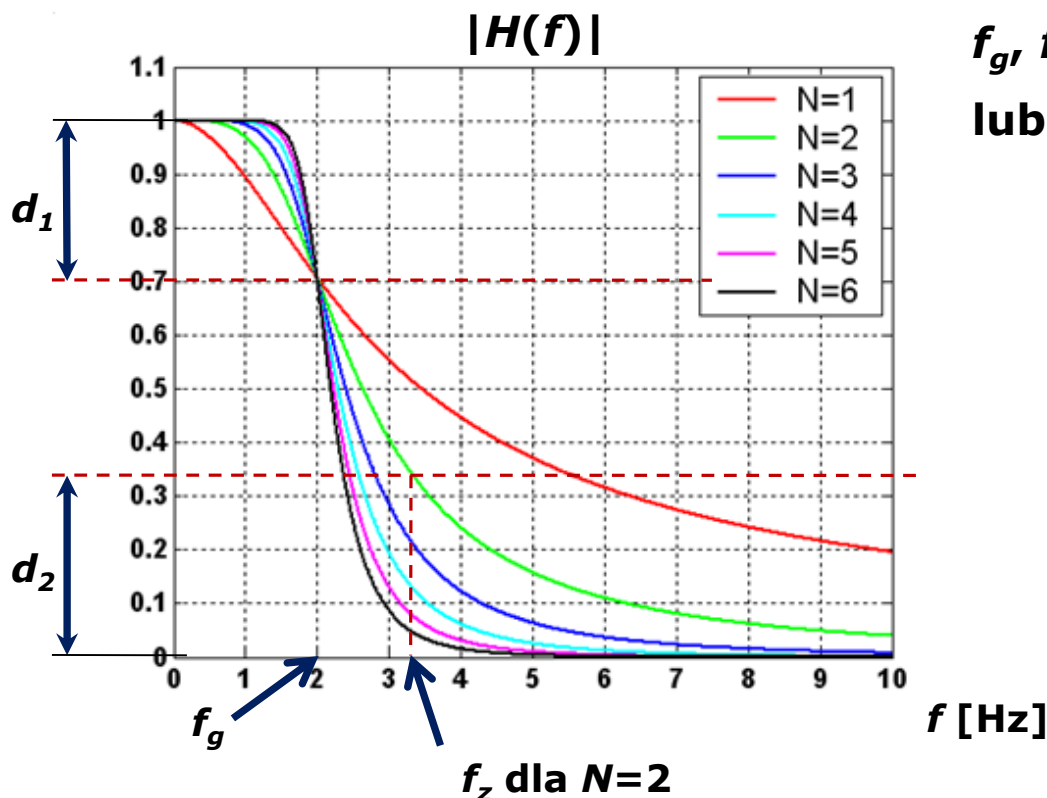
Porównanie wykresów charakterystyk amplitudowych dla kolejnych rzędów filtru:

$$f_g = 2 \text{ Hz}$$

Założenia projektowe:

$$f_g, f_z, d_2 \rightarrow N$$

$$\text{lub np.: } N, f_g, d_2 \rightarrow f_z$$



Filtr dolnoprzepustowy Czebyszewa

Typu I :

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot C_N^2\left(\frac{f}{f_g}\right)}$$

Typu II :

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot C_N^2\left(\frac{f_z}{f_g}\right) / C_N^2\left(\frac{f_z}{f}\right)}$$

Wielomiany Czebyszewa:

$$C_N(x) = \cos(N \cdot v) \quad : \quad \cos(v) = x$$

$$C_N(x) = \cosh(N \cdot v) \quad : \quad \cosh(v) = x$$

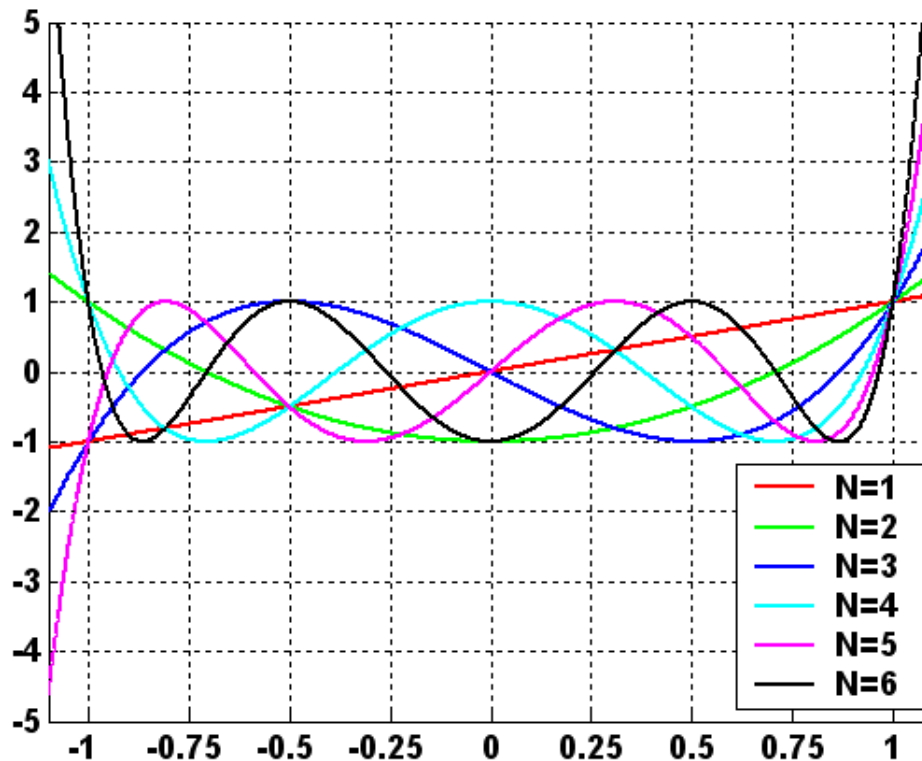
czyli:

$$C_N(x) = \cosh\left(N \cdot \cosh^{-1}(x)\right)$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Filtr Czebyszewa - wielomiany Czebyszewa

$$C_N(x) = \cosh\left(N \cdot \cosh^{-1}(x)\right)$$



$$C_1(x) = x$$

$$C_2(x) = 2 \cdot x^2 - 1$$

$$C_3(x) = 4 \cdot x^3 - 3 \cdot x$$

$$C_4(x) = 8 \cdot x^4 - 8 \cdot x^2 + 1$$

$$C_5(x) = 16 \cdot x^5 - 20 \cdot x^3 + 5 \cdot x$$

$$C_6(x) = 32 \cdot x^6 - 48 \cdot x^4 + 18 \cdot x^2 - 1$$

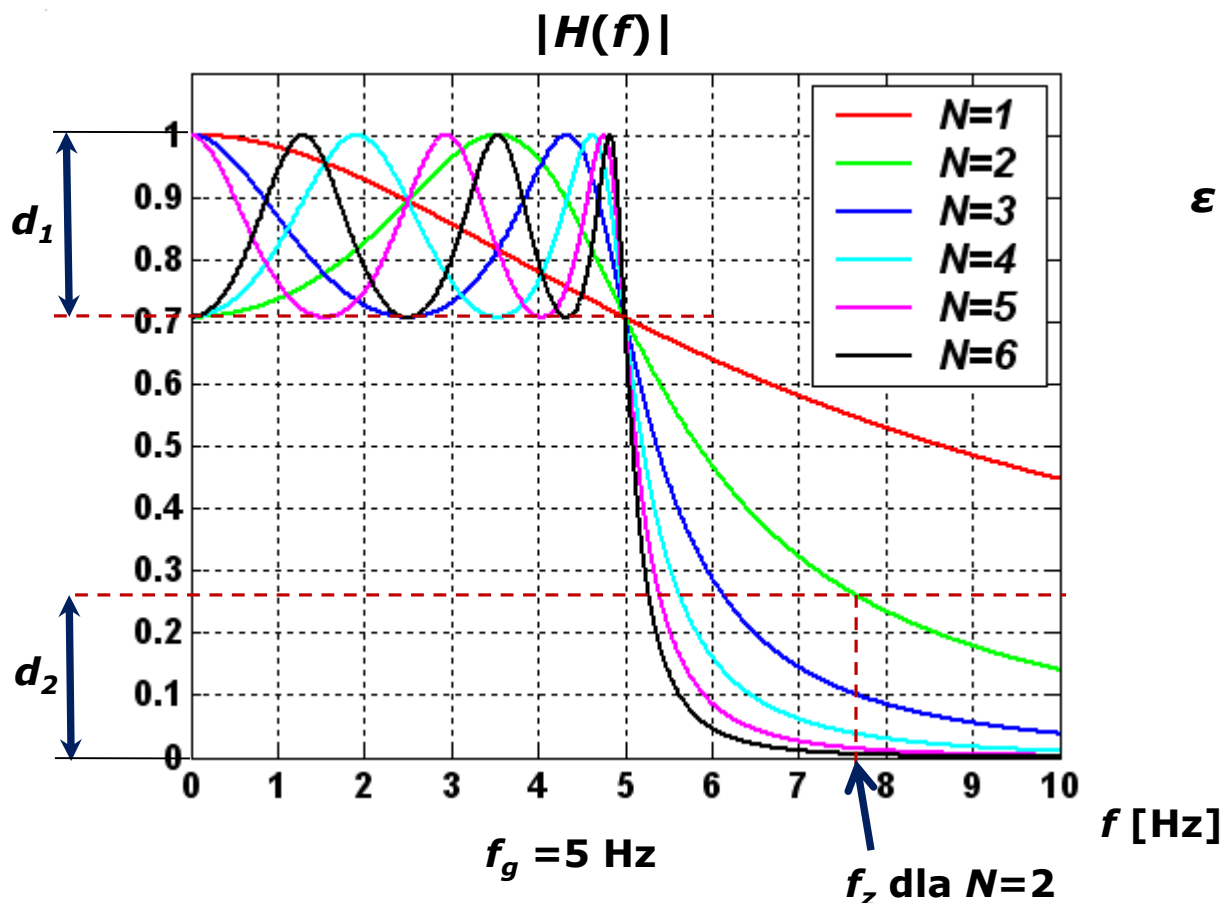
Filtr Czebyszewa (typ I)

- ograniczenia projektowe dla amplitudy

Pasma: przepustowe, przejściowe i zaporowe.

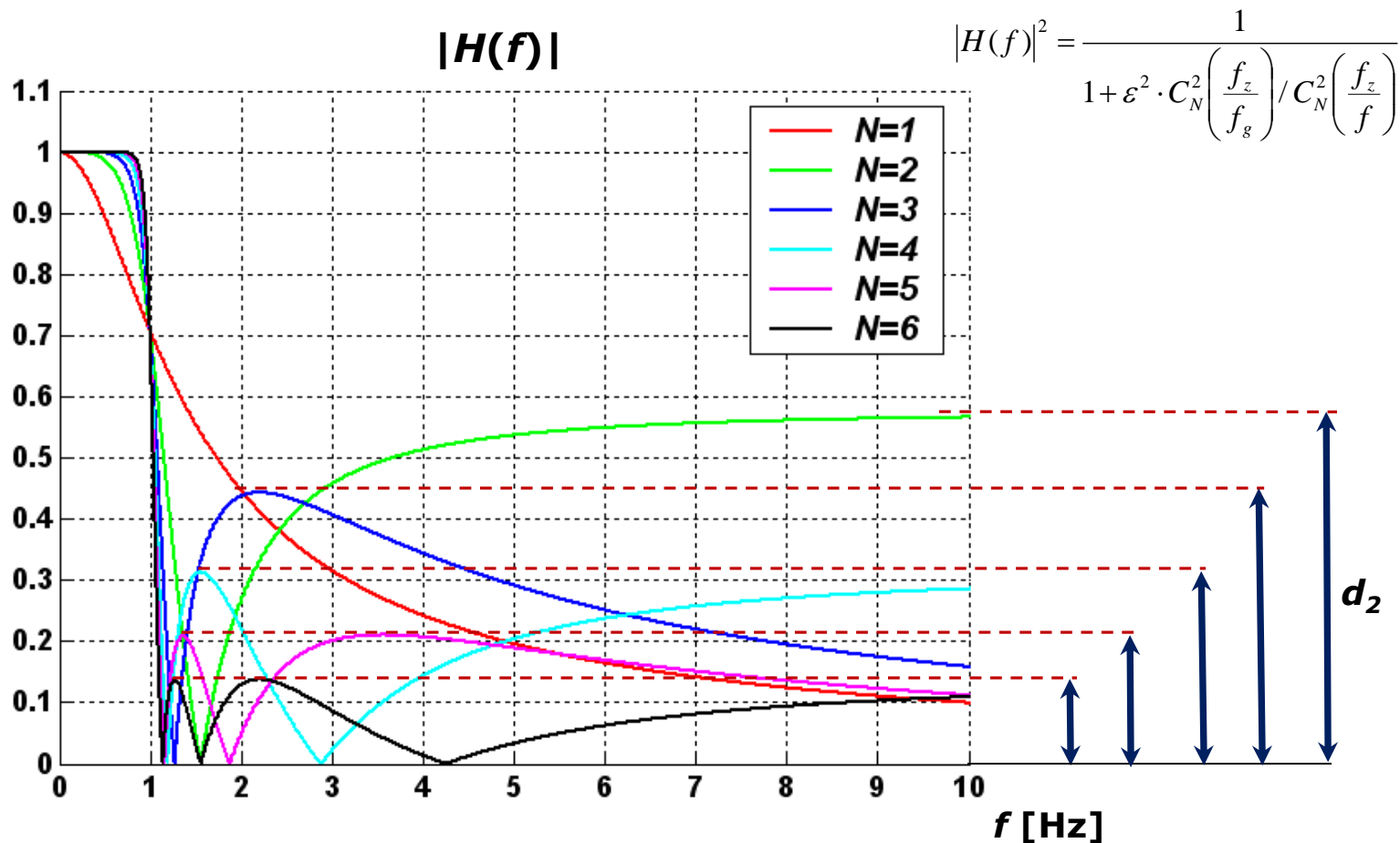
$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot C_N^2 \left(\frac{f}{f_g} \right)}$$

$\varepsilon = 1$



Charakterystyki amplitudowe dla filtru Czebyszewa typu II

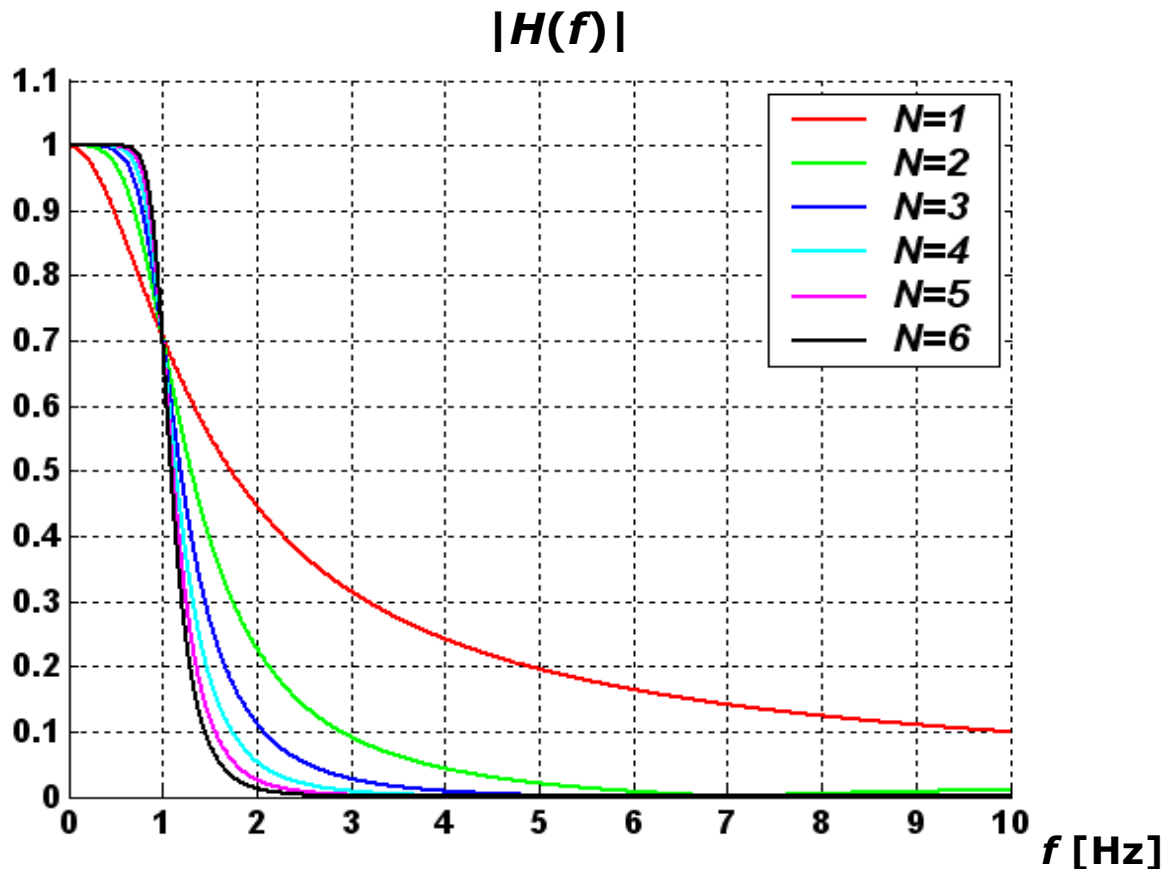
$f_g = 1 \text{ Hz}$
 $f_z = 1,1 \text{ Hz}$
 $\varepsilon = 1$



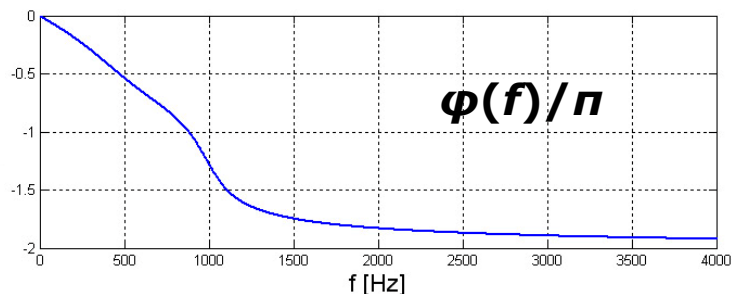
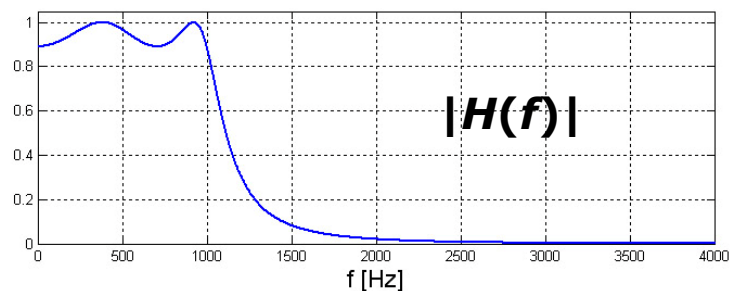
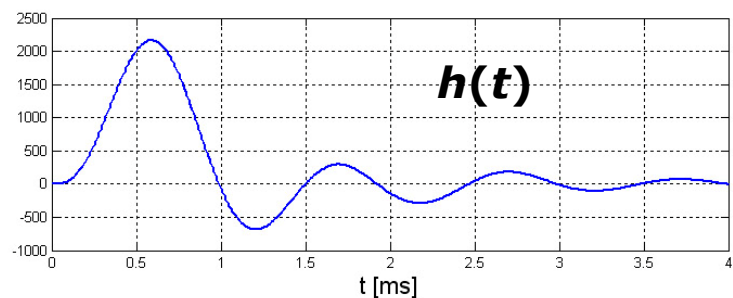
Wartości: N , d_2 oraz f_g całkowicie określają filtr.

Charakterystyki amplitudowe dla filtru Czebyszewa typu II szerokie pasmo przejściowe

$f_g = 1 \text{ Hz}$
 $f_z = 5 \text{ Hz}$
 $\varepsilon = 1$



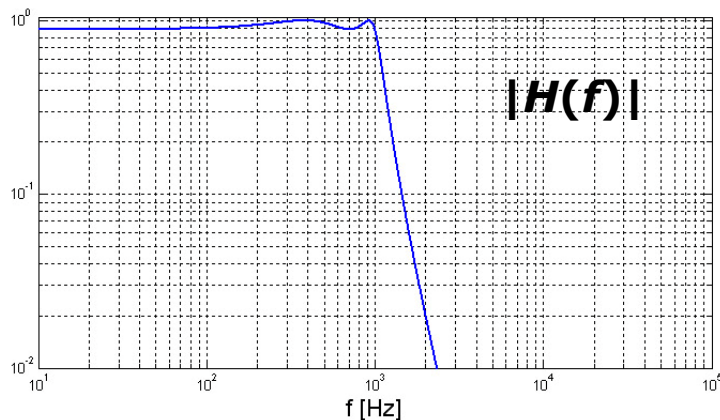
Filtr Czebyszewa typu I przykład



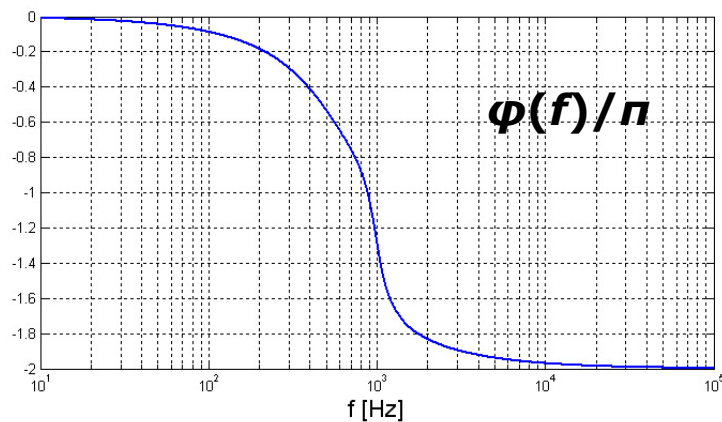
**Filtr Czebyszewa typu I, 4. rzędu,
 $f_g = 1\text{kHz}$,
 maks. zafalowania w paśmie
 przepustowym: 1dB.**

**Odpowiedź impulsowa $h(t)$
 oraz ch-ki: amplitudowa i fazowa.**

Filtr Czebyszewa typu I, przykład (cd.)



Filtr Czebyszewa typu I, 4. rzędu,
 $f_g = 1\text{kHz}$,
 maks. zafalowania w paśmie
 przepustowym: 1dB.

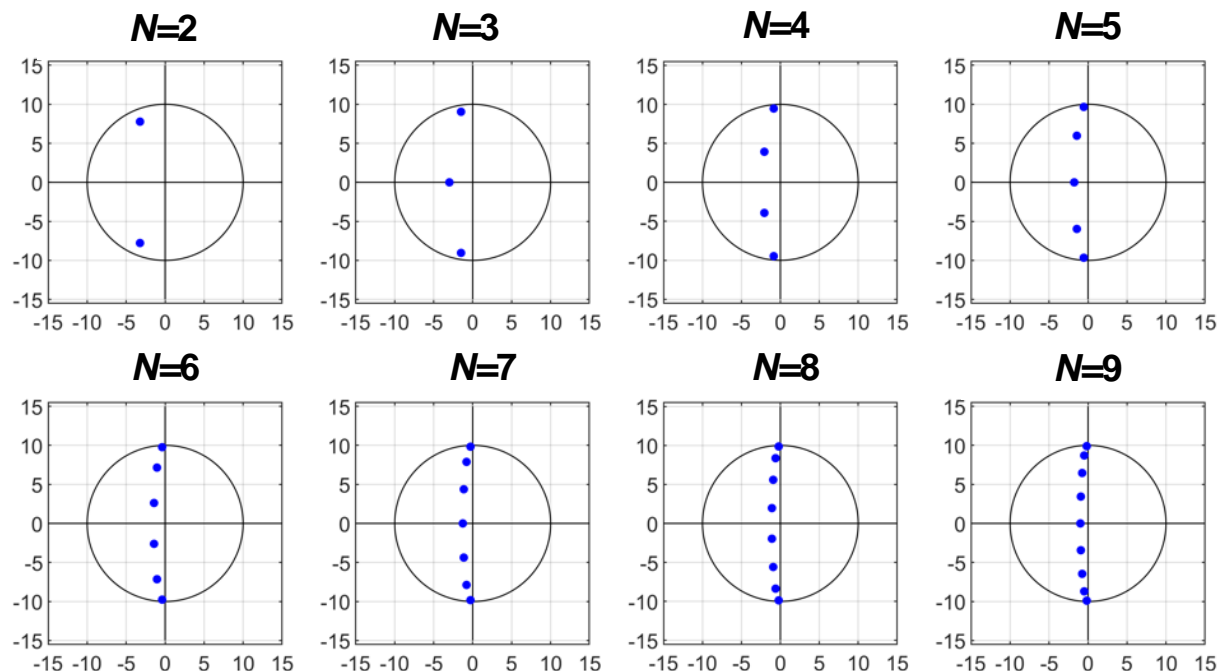


Ch-ki: amplitudowa i fazowa
 w odpowiednich skalach
 logarytmicznych.

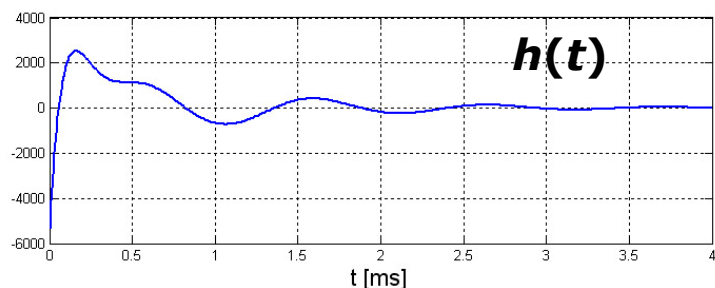
Filtr Czebyszewa typu I

– rozmieszczenie biegunów

$$\omega_g = 10$$

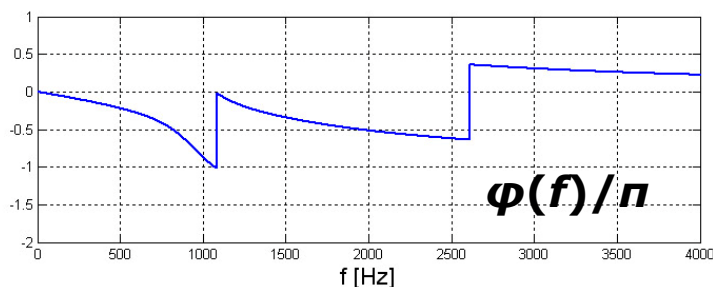
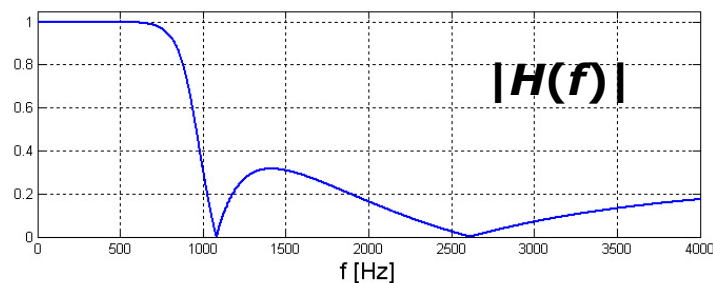


Filtr Czebyszewa typu II przykład

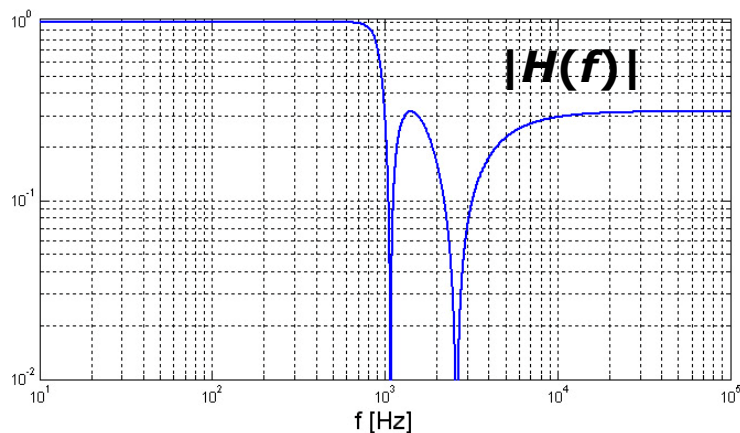


**Filtr Czebyszewa typu II, 4. rzędu,
 $f_g = 1\text{kHz}$,
 min. tłumienie w paśmie
 zaporowym: 10dB.**

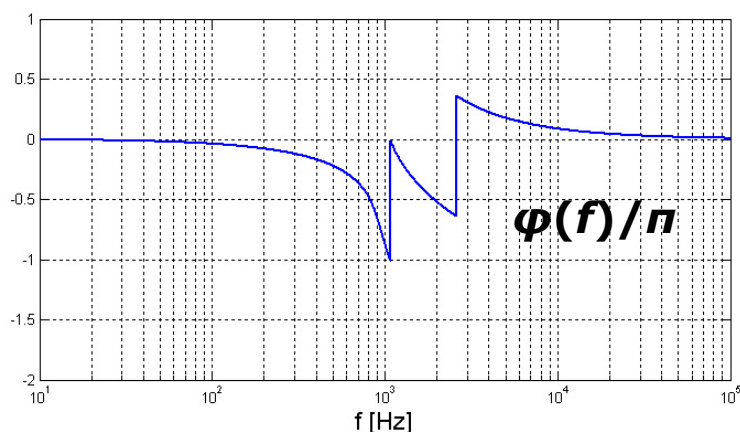
**Odpowiedź impulsowa $h(t)$
 oraz ch-ki: amplitudowa i fazowa.**



Filtr Czebyszewa typu II, przykład (cd.)



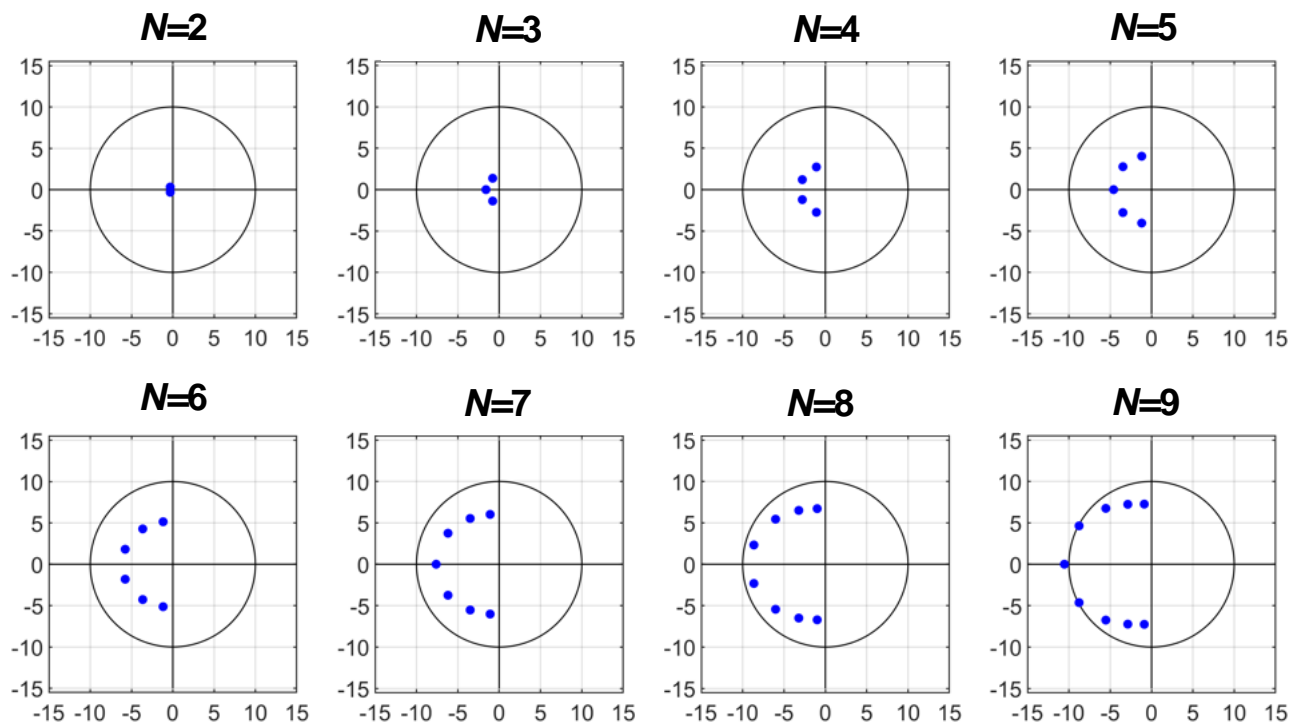
**Filtr Czebyszewa typu II, 4. rzędu,
 $f_g = 1\text{kHz}$,
 min. tłumienie w paśmie
 zaporowym: 10dB.**



**Ch-ki: amplitudowa i fazowa
 w odpowiednich skalach logarytmicznych.**

Filtr Czebyszewa typu II – rozmieszczenie biegunów

$$\omega_g = 10$$



Filtr eliptyczny (Cauera)

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot U_N^2\left(\xi, \frac{f}{f_g}\right)}$$

gdzie:

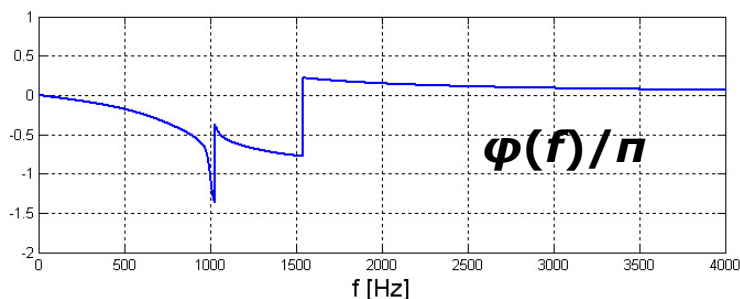
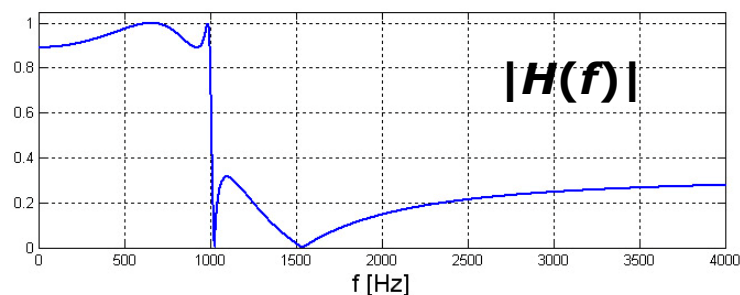
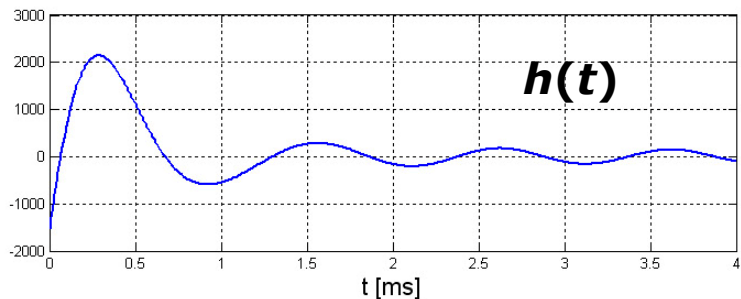
$$U_N(\xi, x)$$

to funkcja eliptyczna, zależna od parametru ξ .

Gdy ten parametr dąży do nieskończoności, to funkcja dąży do wielomianu Czebyszewa, czyli filtr staje się filtrem Czebyszewa typu I.

Wartości: N , d_1 , d_2 oraz f_g całkowicie określają filtr.

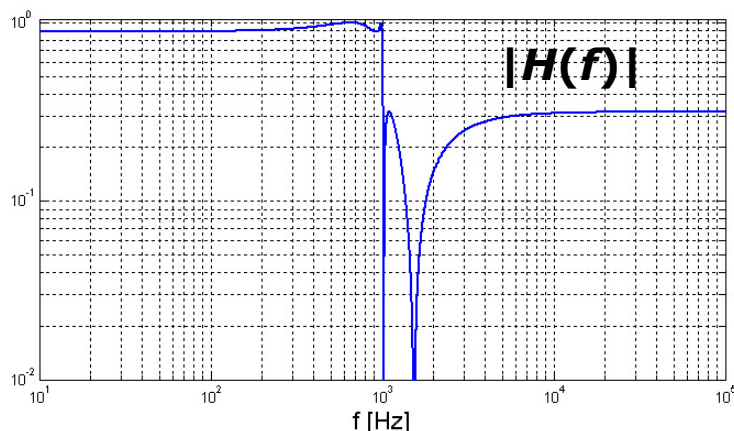
Filtr eliptyczny (Cauera) przykład



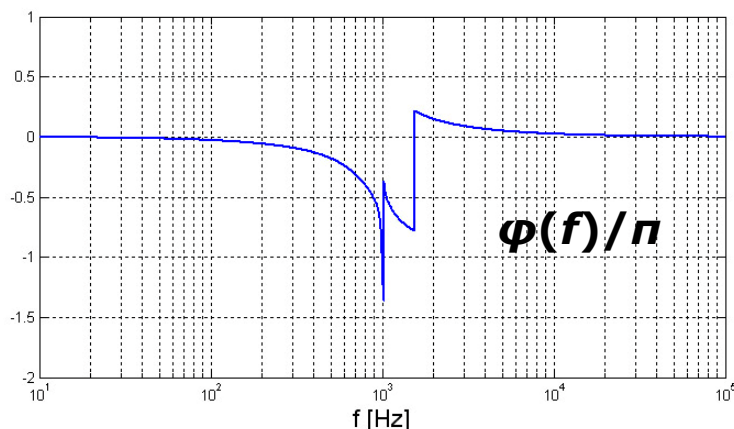
**Filtr eliptyczny, 4. rzędu,
 $f_g = 1\text{kHz}$,
 maks. zafalowania w paśmie
 przepustowym: 1dB,
 min. tłumienie w paśmie
 zaporowym: 10dB,**

**Odpowiedź impulsowa $h(t)$
 oraz ch-ki: amplitudowa i fazowa.**

Filtr eliptyczny (Cauera), przykład (cd.)



Filtr eliptyczny, 4. rzędu,
 $f_g = 1\text{kHz}$,
 maks. zafalowania w paśmie
 przepustowym: 1dB,
 min. tłumienie w paśmie
 zaporowym: 10dB,

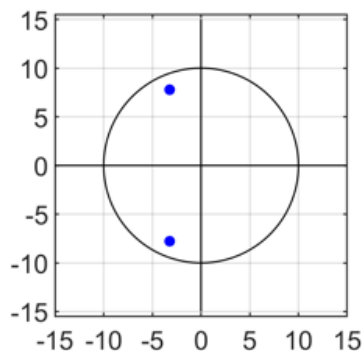


Ch-ki: amplitudowa i fazowa
 w odpowiednich skalach
 logarytmicznych.

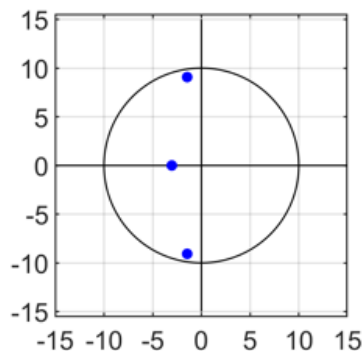
Filtr eliptyczny – rozmieszczenie biegunów

$$\omega_g = 10$$

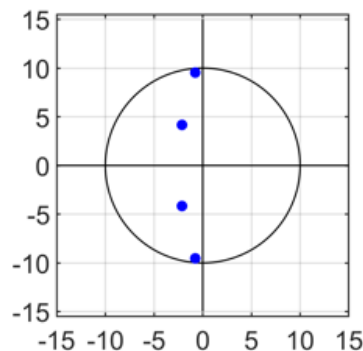
$N=2$



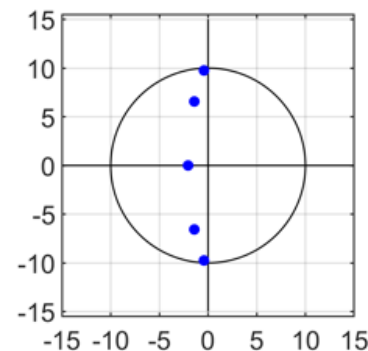
$N=3$



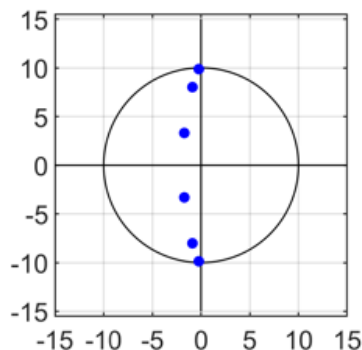
$N=4$



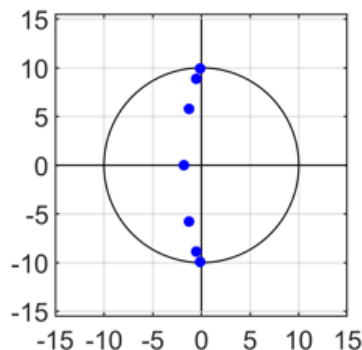
$N=5$



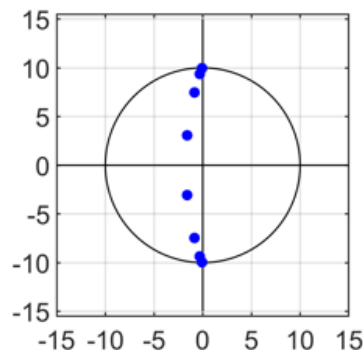
$N=6$



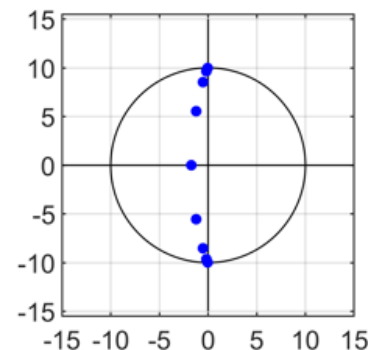
$N=7$



$N=8$



$N=9$



Przeliczenia filtrów dolnoprzepustowych (FDP, $f_g=1\text{Hz}$) na inne postacie filtrów

$H_0(f)$: FDP dla $f_g = 1\text{Hz}$;

$$H_{FDP}(f) = H_0\left(\frac{f}{f_g}\right)$$

$$H_{FPP}(f) = H_0\left(\frac{f^2 - f_d \cdot f_g}{f \cdot (f_g - f_d)}\right); \quad f_g > f_d$$

$$H_{FGP}(f) = H_0\left(-\frac{f_d}{f}\right)$$

$$H_{FPZ}(f) = H_0\left(\frac{f \cdot (f_g - f_d)}{f_d \cdot f_g - f^2}\right); \quad f_g > f_d$$

Analogiczne przepisy dla „s” :

$$H_{FDP}(s) = H_0\left(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{s}{s_g}\right)$$

$$H_{FPP}(s) = H_0\left(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{s^2 - s_d \cdot s_g}{s \cdot (s_g - s_d)}\right); \quad f_g > f_d$$

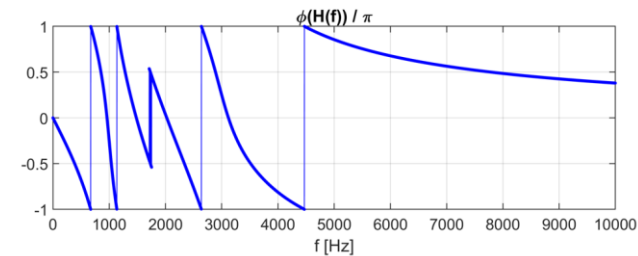
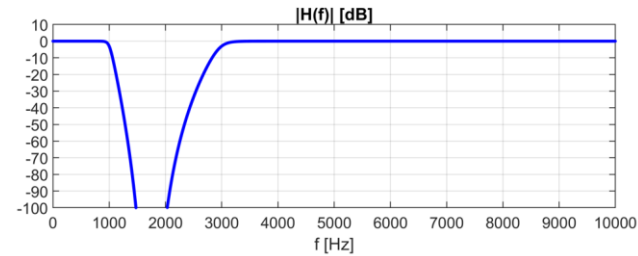
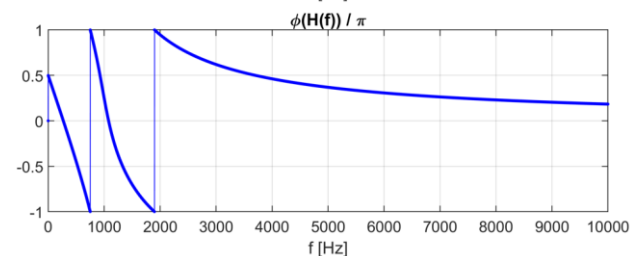
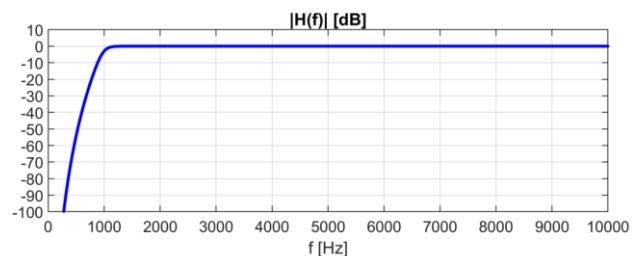
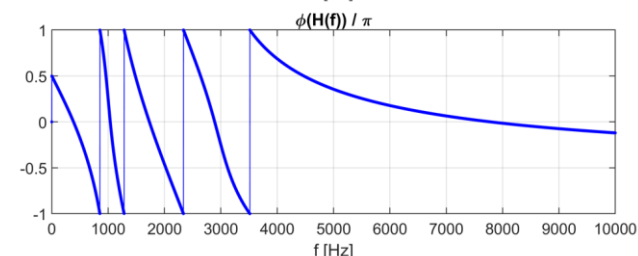
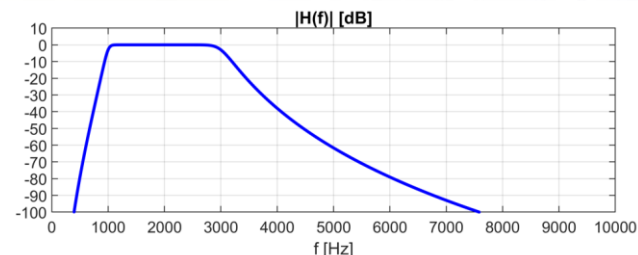
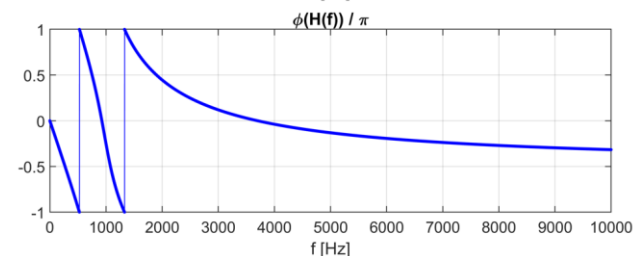
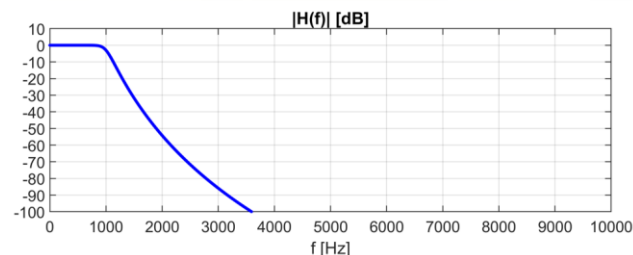
$$H_{FGP}(s) = H_0\left(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{s_d}{s}\right)$$

$$H_{FPZ}(s) = H_0\left(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{s \cdot (s_g - s_d)}{s^2 - s_d \cdot s_g}\right); \quad f_g > f_d$$

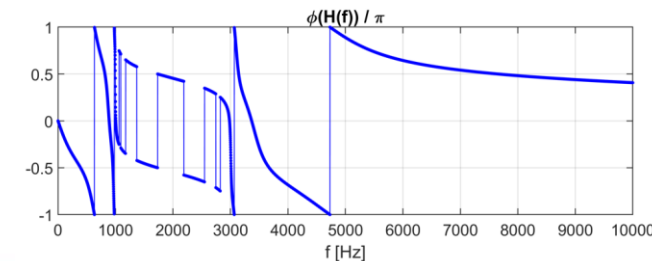
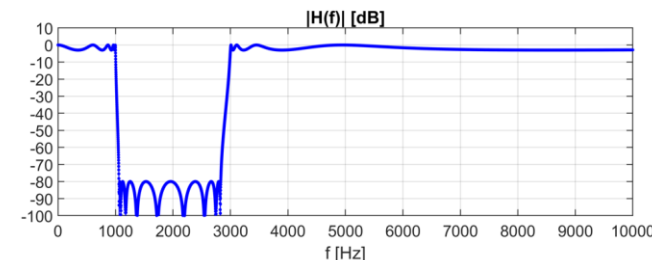
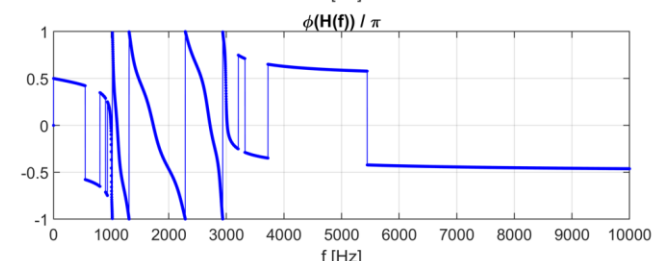
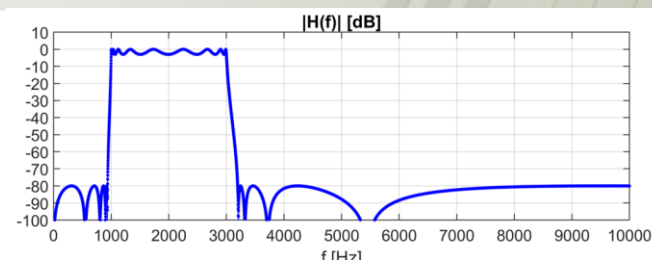
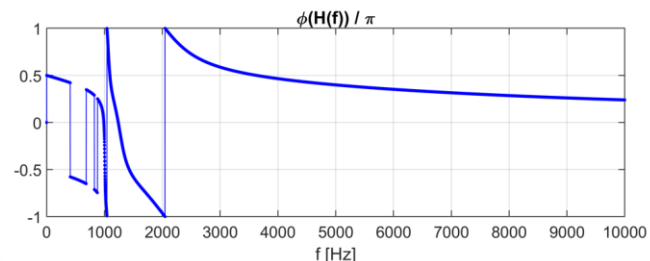
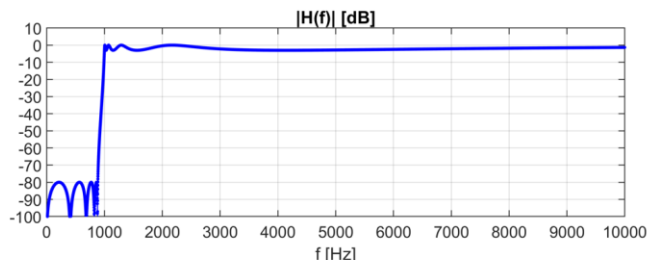
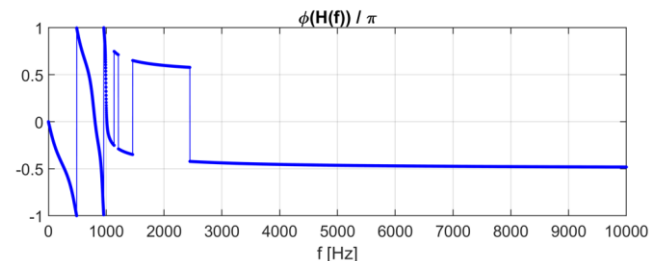
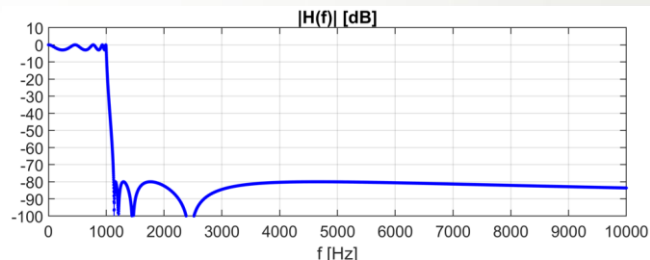
Podstawienie dla szczególnego przypadku :

$$s = j \cdot \omega = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$$

Filtry Butterwortha 9. rzędu: DP (1 kHz), GP (1 kHz), PP (1 kHz – 3 kHz), PZ (1 kHz – 3 kHz)



Filtry eliptyczne (Cauera) 9. rzędu: DP (1 kHz), GP (1 kHz), PP (1 kHz – 3 kHz), PZ (1 kHz – 3 kHz)



Podsumowanie

- 1. Systemy liniowe i stacjonarne.**
- 2. Odpowiedź impulsowa filtru.**
- 3. Transmitancja filtru i jej cechy.**
- 4. Filtr Butterwortha.**
- 5. Filtry Czebyszewa.**
- 6. Filtr eliptyczny.**
- 7. Przekształcanie filtrów.**
- 8. Przykłady charakterystyk filtrów.**

***Zapraszam na ćwiczenia ...
lub do laboratorium ...***