AGH

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Teoria sygnałów

Wykład 10

Dr inż. Przemysław Korohoda
Katedra Elektroniki, AGH, Kraków

home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2

UPEL: TS 2022

Plan wykładu

1. Twierdzenie o próbkowaniu (i odtwarzaniu)
2. Wyprowadzenie.
3. Przykłady.
4. Transformacja Fouriera z czasem dyskretnym.

Twierdzenie o próbkowaniu

Założenia:

$$x(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(f)$$

$$\boxed{X(f) = 0 \quad dla \quad |f| \geq \frac{f_p}{2}}$$

$$\Delta t = \frac{1}{f_p}$$

Teza twierdzenia:

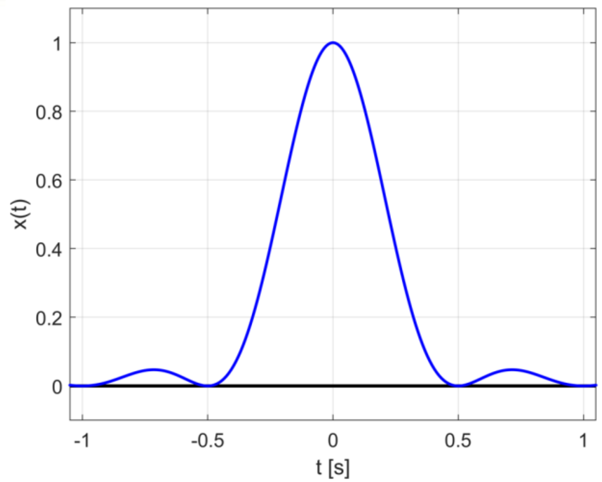
$$\boxed{x(t) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \mathrm{sinc}\big(\pi \cdot f_p \cdot (t - n \cdot \Delta t)\big)}$$

Pierwszy przykład próbkowania

$x(t) = \mathrm{sinc}^2(\pi \cdot 2 \cdot t)$

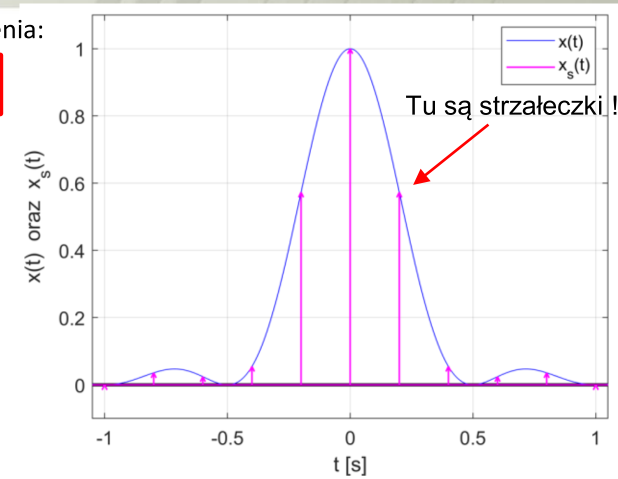
$\Delta t = 0{,}2$ s

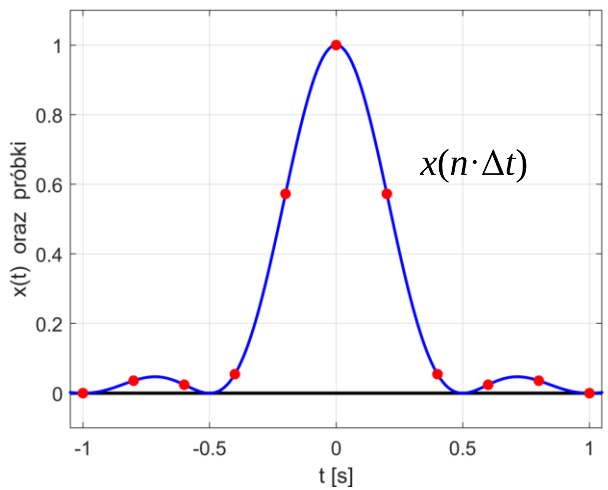
$f_p = 5$ Hz

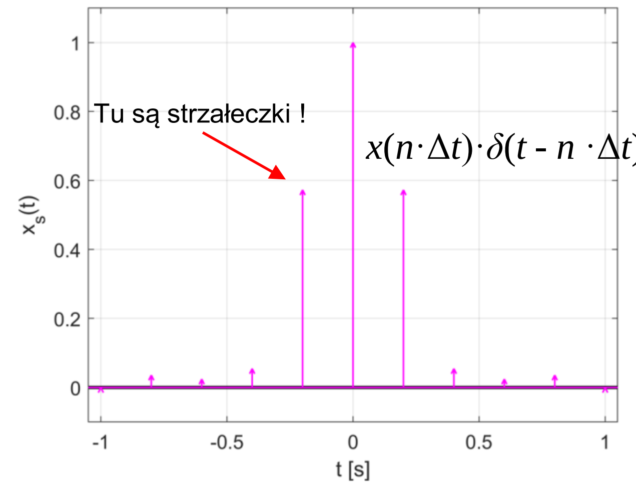


Uwaga na oznaczenia:

$\boxed{x_s(t) = x_p(t)}$







Wyprowadzenie twierdzenia, czyli dowód „klasyczny”

1. Próbkujemy sygnał pseudo-funkcją grzebieniową:

$$x_p(t) = x(t) \cdot g_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - n \cdot \Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \delta(t - n \cdot \Delta t)$$

2. W dziedzinie Fouriera odpowiada to zapisowi:

$$X_p(f) = X(f) * G_{\Delta t}(f) = X(f) * \left[\frac{1}{\Delta t} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n \cdot f_p)\right] = \boxed{\frac{1}{\Delta t} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n \cdot f_p)}$$

3. Przyjmujemy idealny filtr dolnoprzepustowy:

$$H(f) = \Delta t \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_p}\right)$$

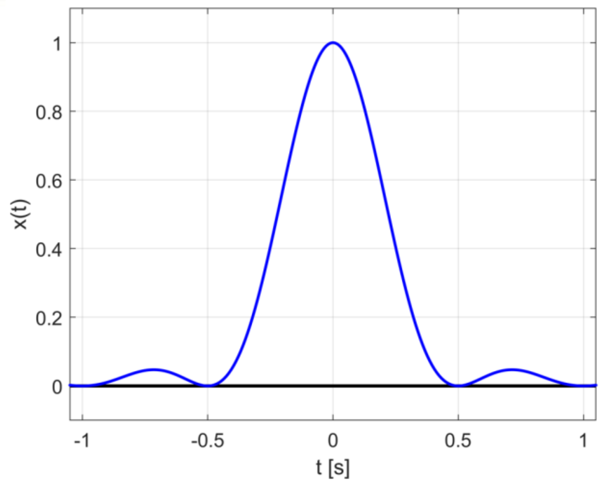
Pierwszy przykład próbkowania (cd.)

$x(t) = \mathrm{sinc}^2(\pi \cdot 2 \cdot t)$

$\Delta t = 0{,}2$ s

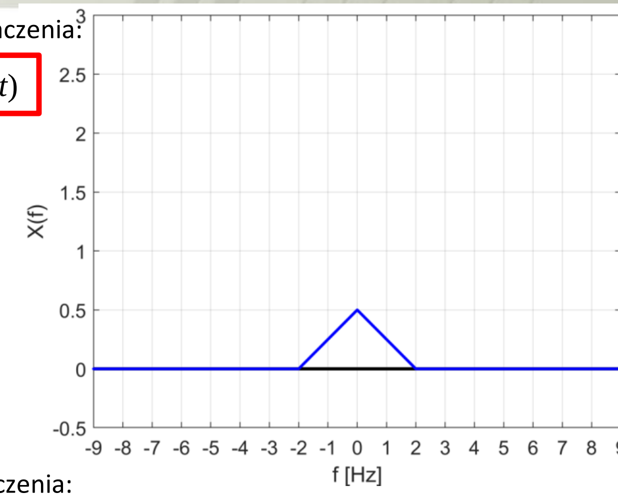
$f_p = 5$ Hz

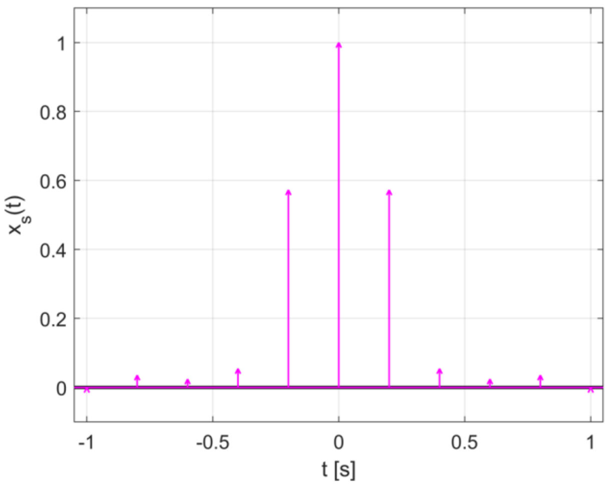
$X(f) = (1/2) \cdot \Lambda(f/2)$



Uwaga na oznaczenia:

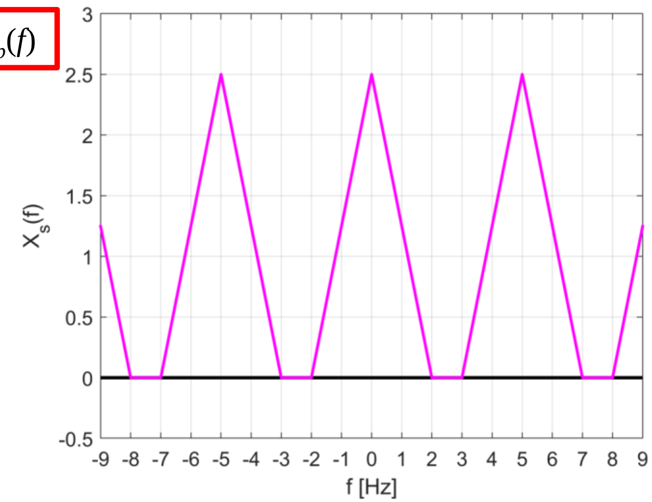
$\boxed{x_s(t) = x_p(t)}$





Uwaga na oznaczenia:

$\boxed{X_s(f) = X_p(f)}$



$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \mathrm{sinc}\big(\pi \cdot f_p \cdot (t - n \cdot \Delta t)\big)$$

Pierwszy przykład - odtwarzanie

$\boxed{X_s(f) = X_p(f)}$

$x(t) = \mathrm{sinc}^2(\pi \cdot 2 \cdot t)$

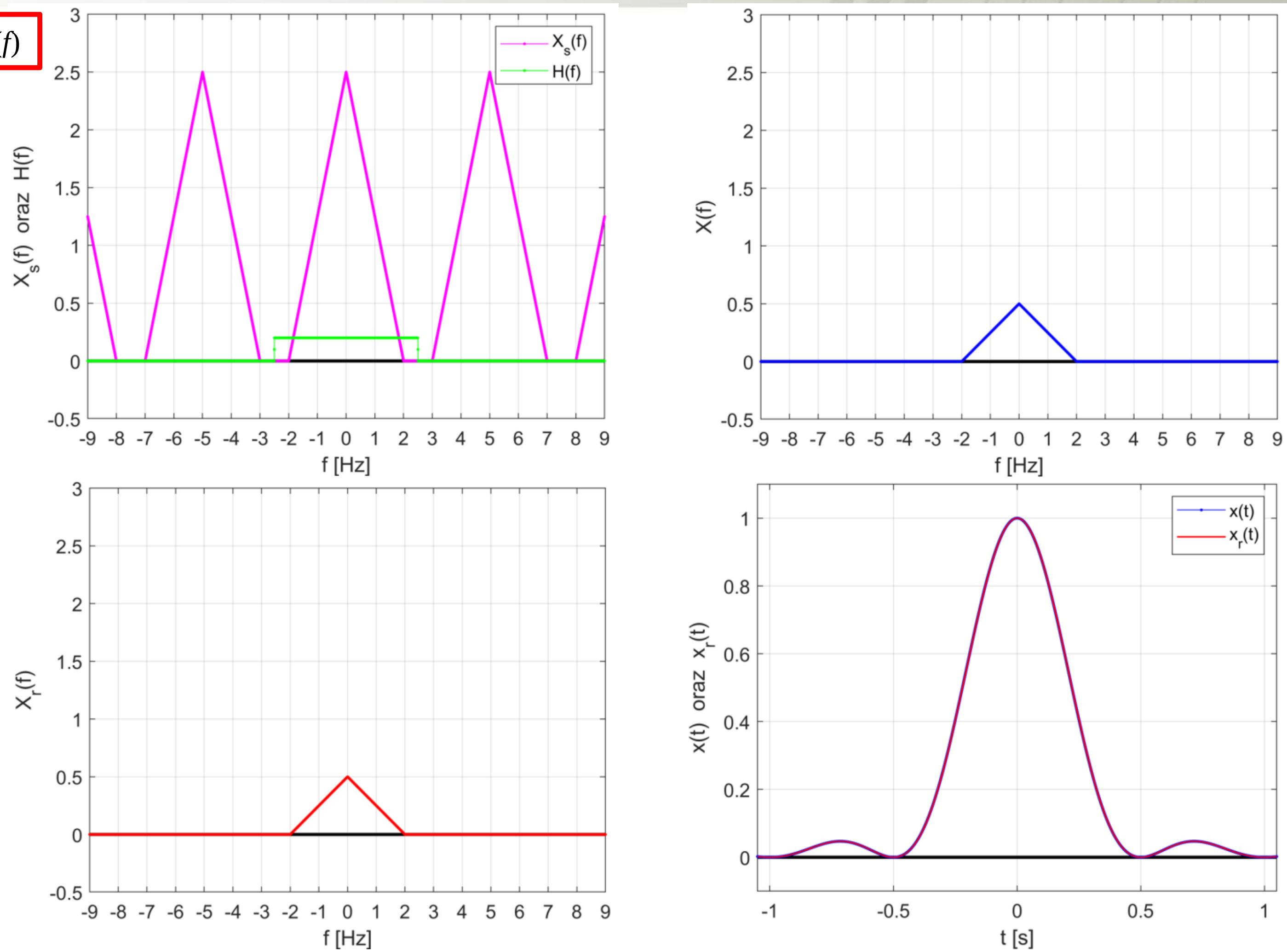
$\Delta t = 0{,}2$ s

$f_p = 5$ Hz

$X(f) = (1/2) \cdot \Lambda(f/2)$

$H(f) = (1/5) \cdot \Pi(f/5)$

$f_g = 2{,}5$ Hz



Wyprowadzenie twierdzenia, czyli dowód „klasyczny” - odtwarzanie

4. Jeżeli:

$$X(f) = 0 \quad dla \quad |f| \geq \frac{f_p}{2}$$

to:

$$X(f) = X_p(f) \cdot H(f)$$

5. Pamiętając, że:

$$h(t) \quad = \quad \mathrm{sinc}(\pi \cdot f_p \cdot t) \quad \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\longleftrightarrow}} \quad H(f) \quad = \quad \Delta t \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_p}\right) \quad = \quad \frac{1}{f_p} \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_p}\right)$$

otrzymujemy wzór odtwarzający:

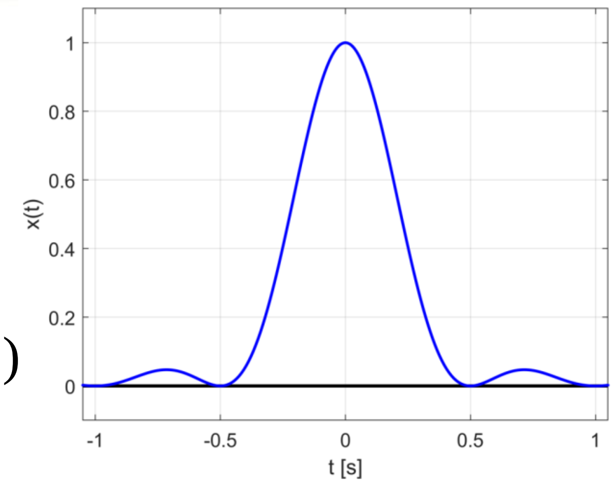
$$x_r(t) \quad = \quad x_p(t) * h(t) \quad = \quad x_p(t) * \mathrm{sinc}(\pi \cdot f_p \cdot t) \quad = \quad \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \delta(t - n \cdot \Delta t)\right] * \mathrm{sinc}(\pi \cdot f_p \cdot t) \quad =$$

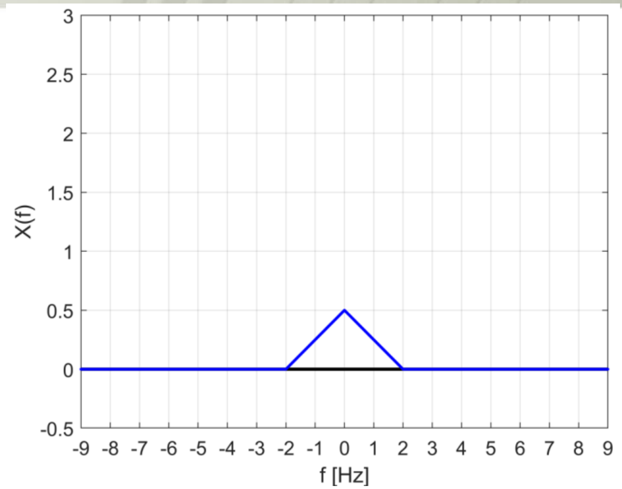
$$= \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \mathrm{sinc}\big(\pi \cdot f_p \cdot (t - n \cdot \Delta t)\big) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \mathrm{sinc}\left(\pi \cdot \frac{t - n \cdot \Delta t}{\Delta t}\right)$$

Drugi przykład próbkowania - efekt aliasingu

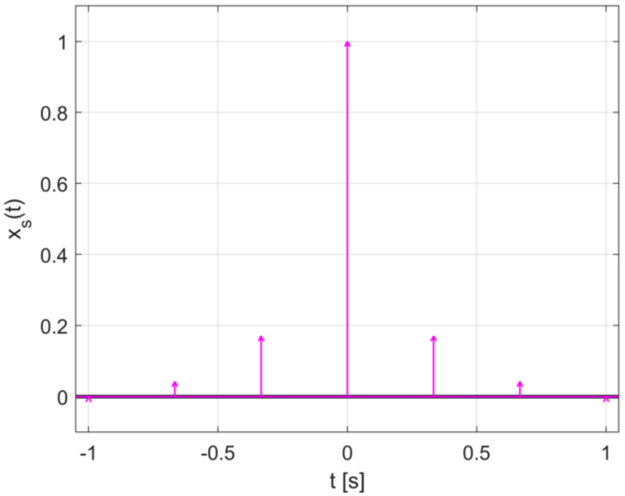
$x(t) = \mathrm{sinc}^2(\pi \cdot 2 \cdot t)$
$\Delta t = 1/3$ s
$f_p = 3$ Hz

$X(f) = (1/2) \cdot \Lambda(f/2)$

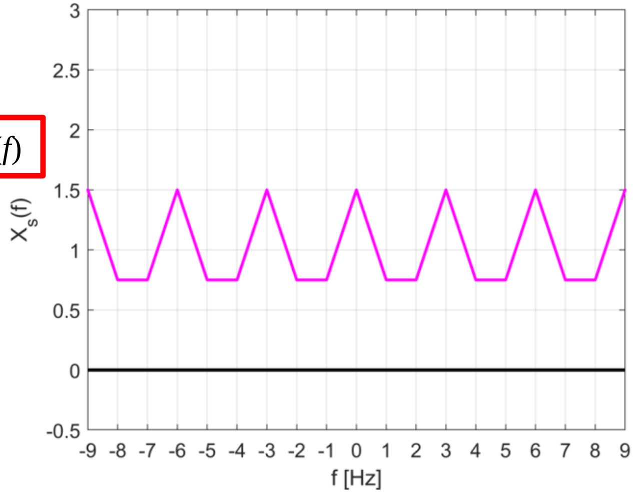




$x_s(t) = x_p(t)$



$X_s(f) = X_p(f)$



$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \mathrm{sinc}\big(\pi \cdot f_p \cdot (t - n \cdot \Delta t)\big)$$

Drugi przykład - odtwarzanie

$\boxed{X_s(f) = X_p(f)}$

$x(t) = \mathrm{sinc}^2(\pi \cdot 2 \cdot t)$

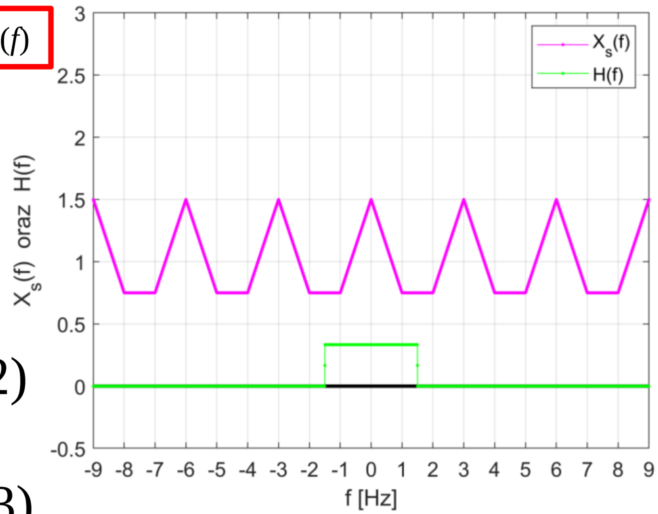
$\Delta t = 1/3$ s

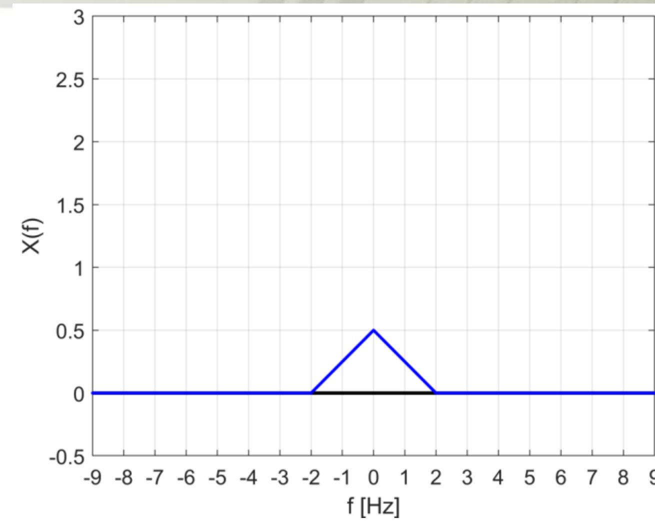
$f_p = 3$ Hz

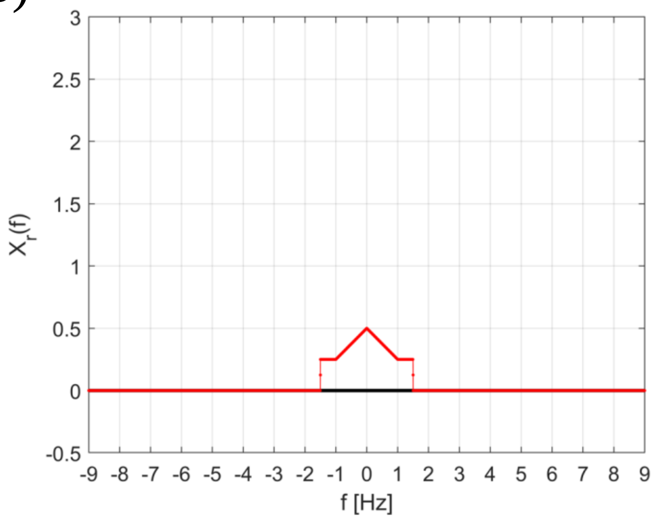
$X(f) = (1/2) \cdot \Lambda(f/2)$

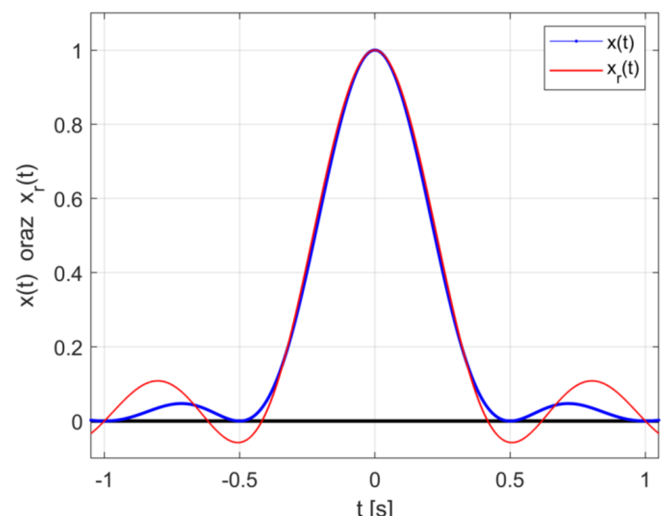
$H(f) = (1/3) \cdot \Pi(f/3)$

$f_g = 1{,}5$ Hz









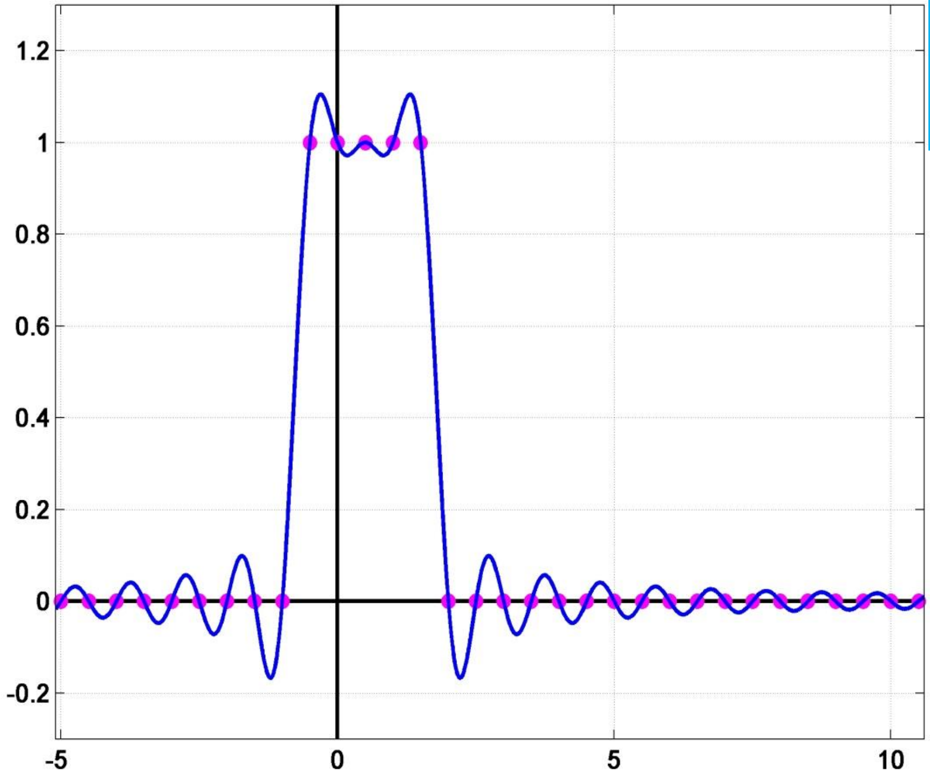
Twierdzenie o próbkowaniu - trzeci przykład

Przykład odtwarzania sygnału:

$$X(f) = X_p(f) \cdot \Pi\left(\frac{1}{f_p}\right) \cdot \frac{1}{f_p}$$

$$\Delta t = \frac{1}{f_p}$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \mathrm{sinc}\big(\pi \cdot f_p \cdot (t - n \cdot \Delta t)\big)$$



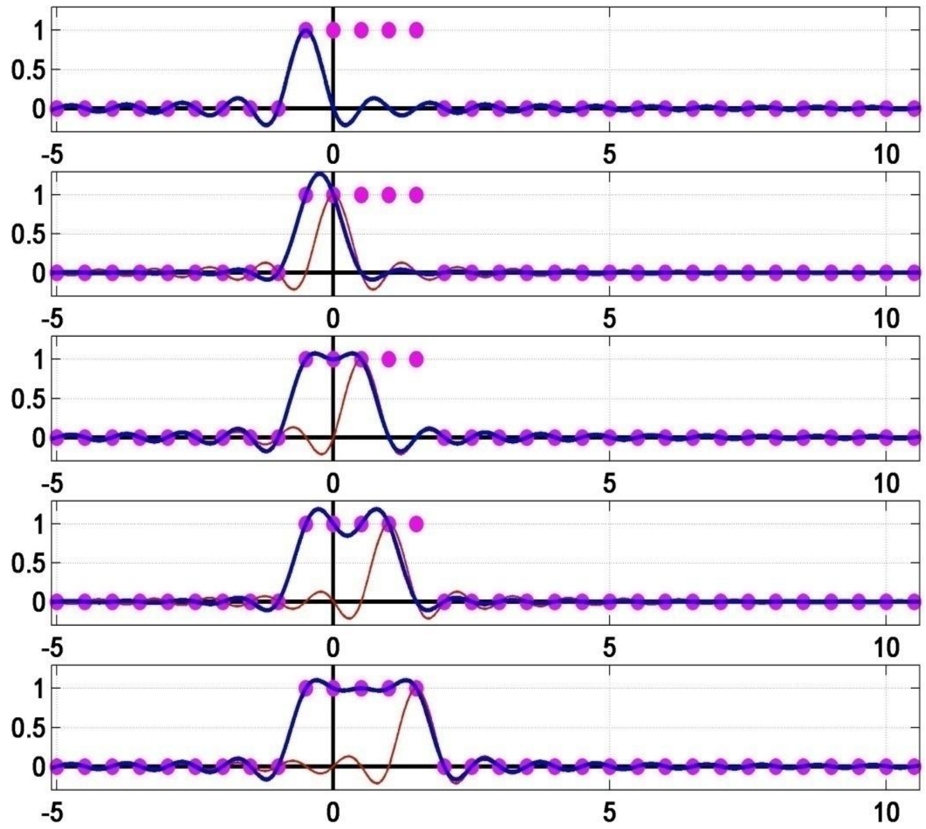
Twierdzenie o próbkowaniu - trzeci przykład

Przykład odtwarzania sygnału:

$$X(f) = X_p(f) \cdot \Pi\left(\frac{1}{f_p}\right) \cdot \frac{1}{f_p}$$

$$\Delta t = \frac{1}{f_p}$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \mathrm{sinc}\big(\pi \cdot f_p \cdot (t - n \cdot \Delta t)\big)$$



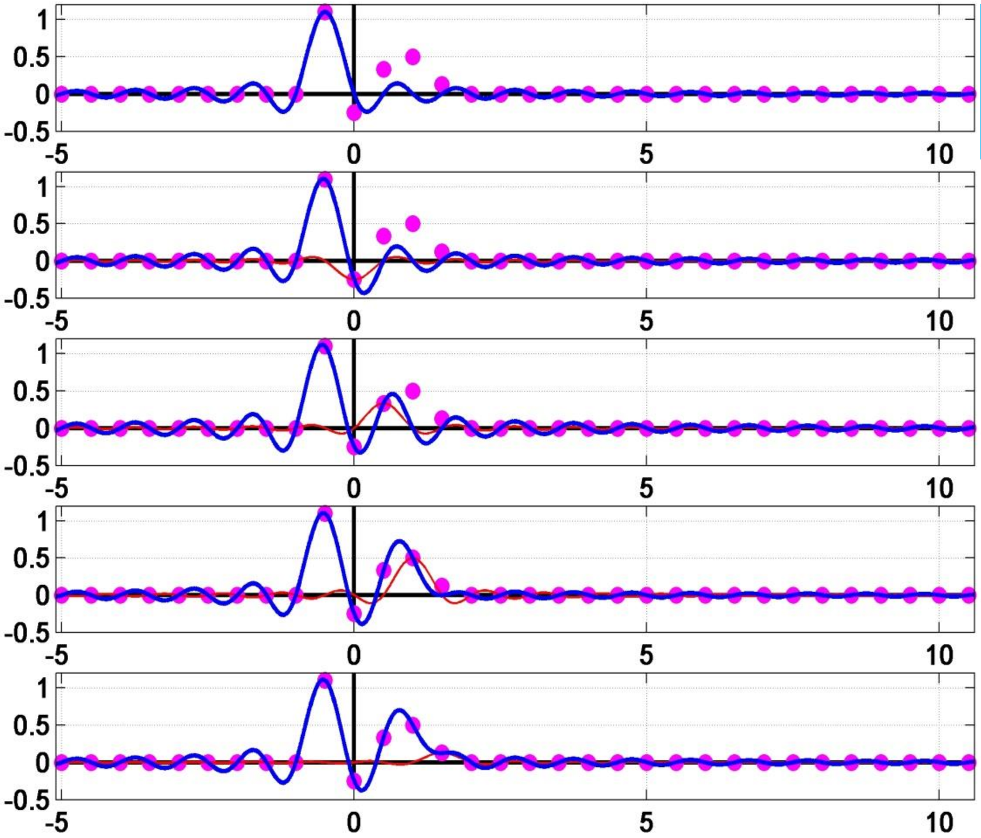
Twierdzenie o próbkowaniu - czwarty przykład

Przykład odtwarzania sygnału:

$$X(f) = X_p(f) \cdot \Pi\left(\frac{1}{f_p}\right) \cdot \frac{1}{f_p}$$

$$\Delta t = \frac{1}{f_p}$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \operatorname{sinc}\big(\pi \cdot f_p \cdot (t - n \cdot \Delta t)\big)$$



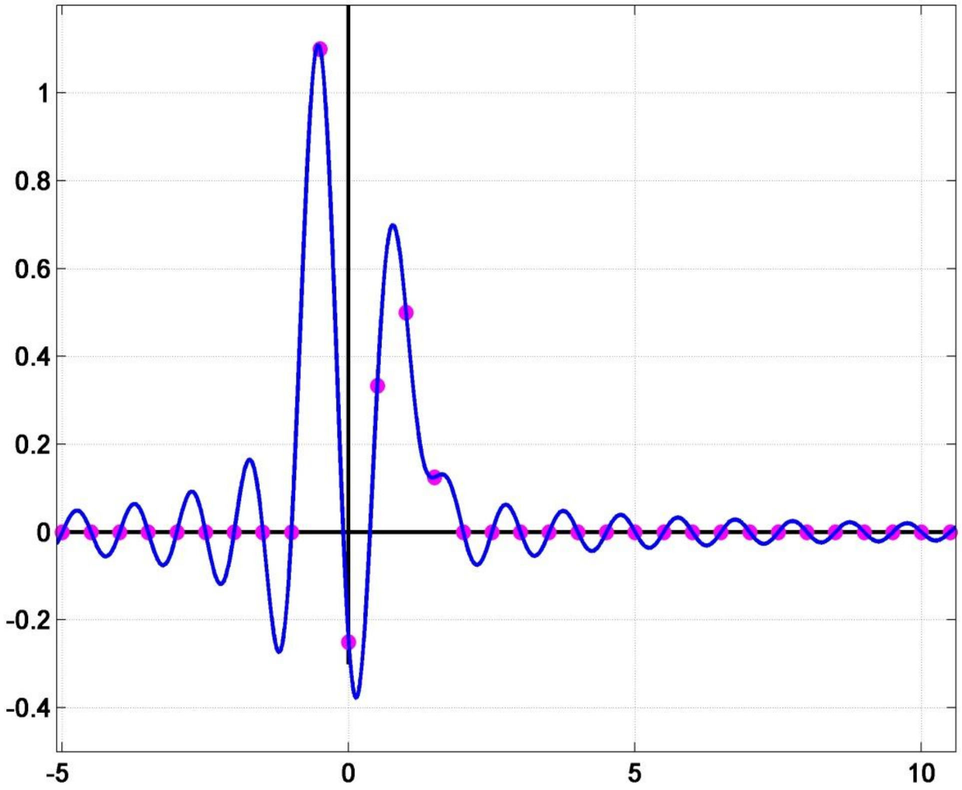
Twierdzenie o próbkowaniu - czwarty przykład

Przykład odtwarzania sygnału:

$$X(f) \quad = \quad X_p(f) \cdot \Pi\left(\frac{1}{f_p}\right) \cdot \frac{1}{f_p}$$

$$\Delta t = \frac{1}{f_p}$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \operatorname{sinc}\big(\pi \cdot f_p \cdot (t - n \cdot \Delta t)\big)$$



Twierdzenie o próbkowaniu - piąty przykład

Przykład aliasingu

$$x_0(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0)$$

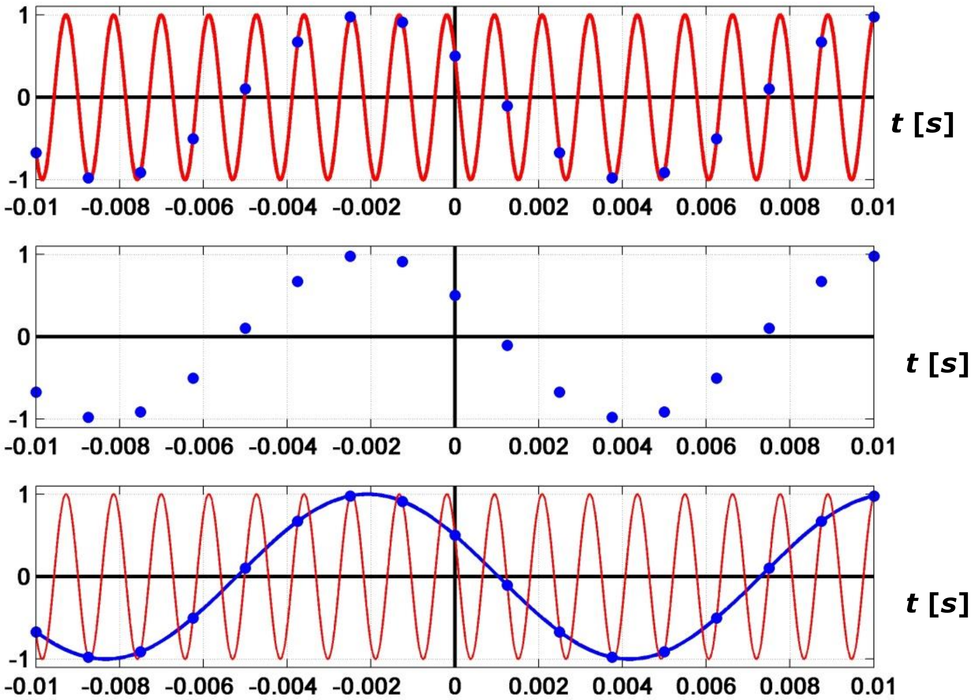
f_0=880Hz
f_p=800Hz

$\varphi_0 = \pi/3$

Sygnał i próbki:

Próbki:

Odtworzenie z próbek:



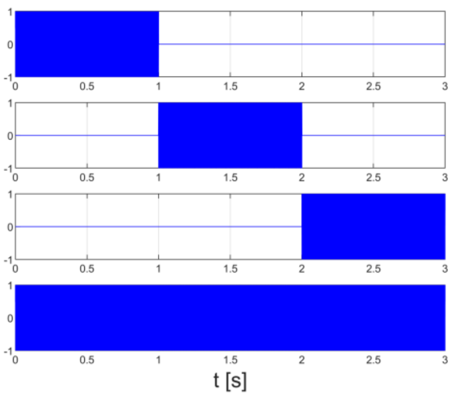
f_1=80Hz

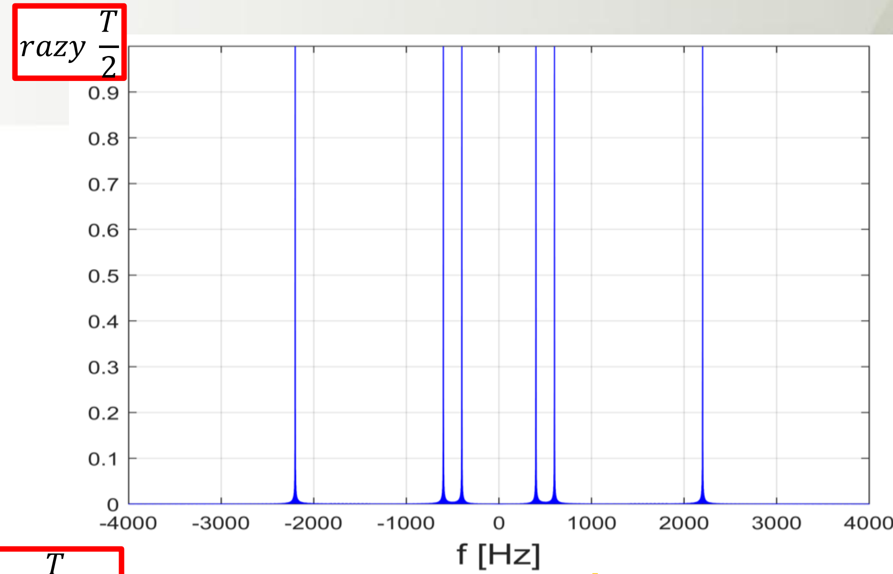
$$x_1(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t + \varphi_0)$$

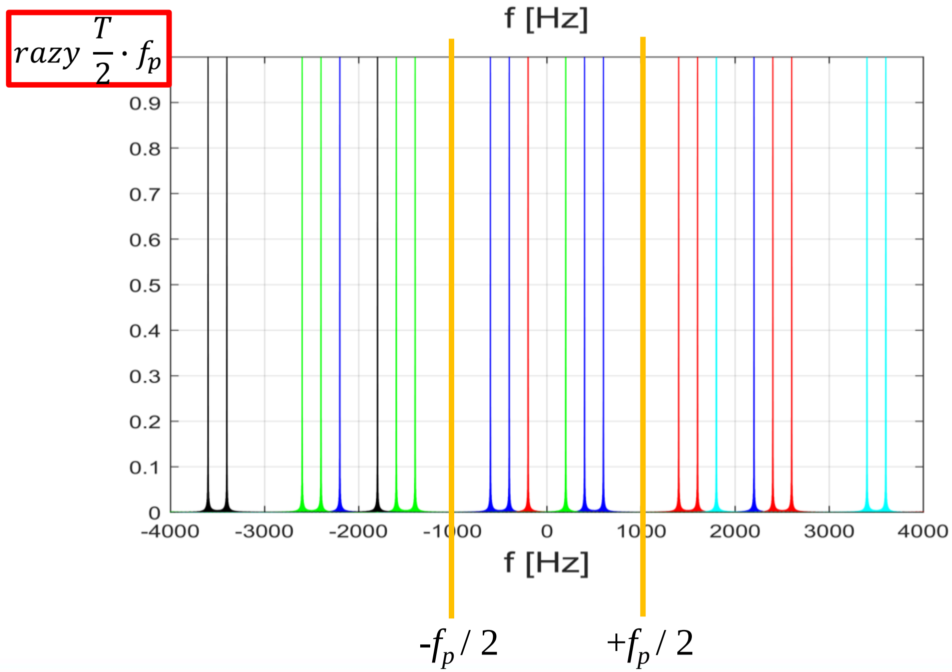
Warto pomyśleć nad interpretacją w dziedzinie widma Fouriera.

Inny przykład próbkowania z aliasingiem

f_p=2000 Hz







f_1=400 Hz
f_2=2200 Hz
f_3=600 Hz

Efekt aliasingu

f_1=400 Hz
f_2=200 Hz
f_3=600 Hz

Próbkowanie krytyczne

Jeżeli sygnał zawiera kosinusoidę o częstotliwości $f_p/2$

$$|X(f)| > 0 \quad dla \quad |f| = \frac{f_p}{2}$$

$$\boxed{f_p = 2 \cdot f_0}$$

to mamy do czynienia z próbkowaniem krytycznym i wynik zależy od fazy sygnału kosinusoidalnego o tej częstotliwości.

Próbkowanie krytyczne - pierwszy przykład

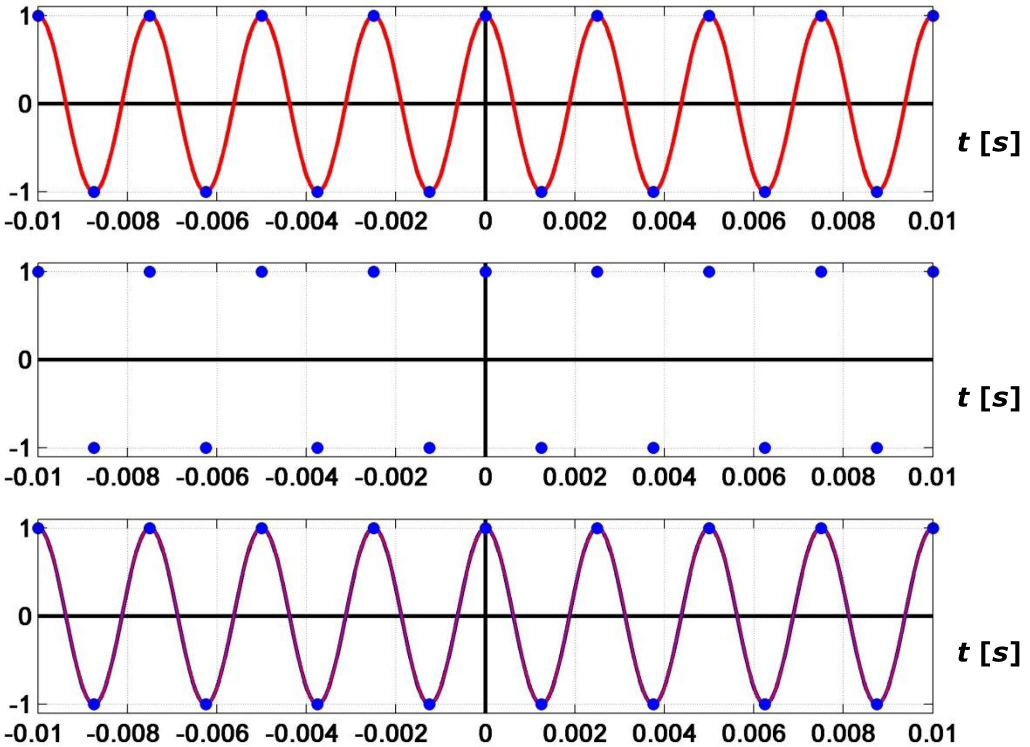
$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

$$\boxed{f_p = 2 \cdot f_0}$$

Sygnał i próbki:

Próbki:

Odtworzenie z próbek:



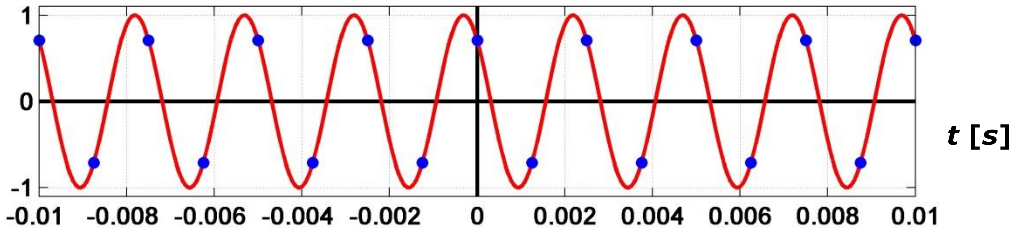
Warto pomyśleć nad interpretacją w dziedzinie widma Fouriera.

Próbkowanie krytyczne - drugi przykład

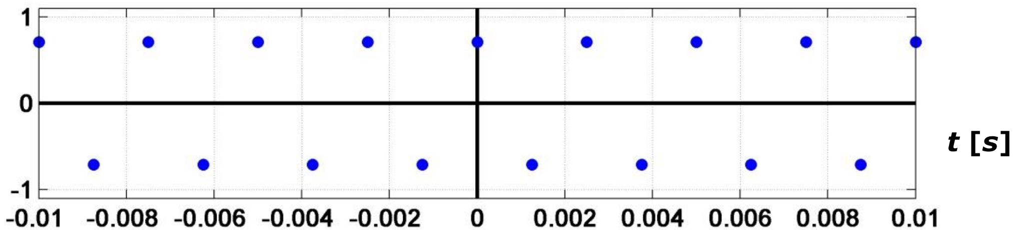
$$x(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{f_p = 2 \cdot f_0}$$

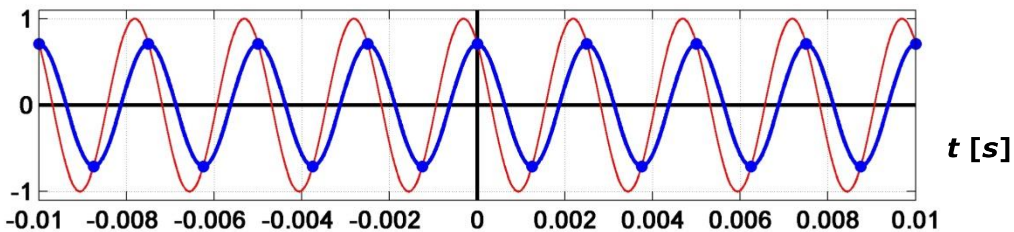
Sygnał i próbki:



Próbki:



Odtworzenie z próbek:



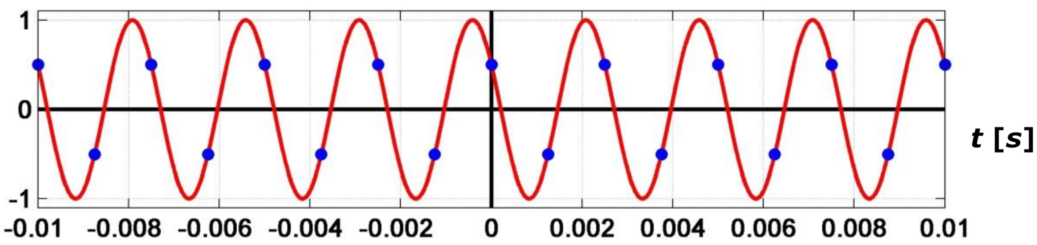
Warto pomyśleć nad interpretacją w dziedzinie widma Fouriera.

Próbkowanie krytyczne
- trzeci przykład

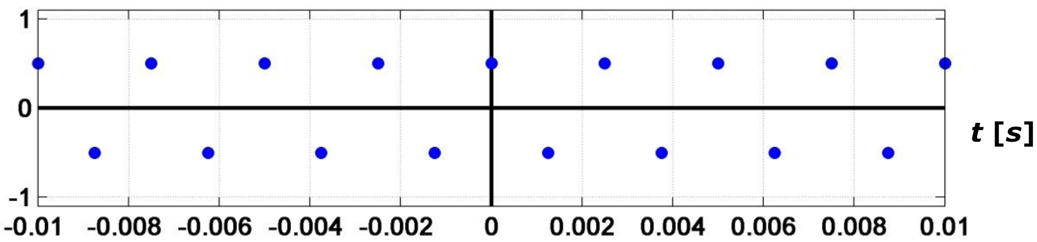
$$x(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\boxed{f_p = 2 \cdot f_0}$$

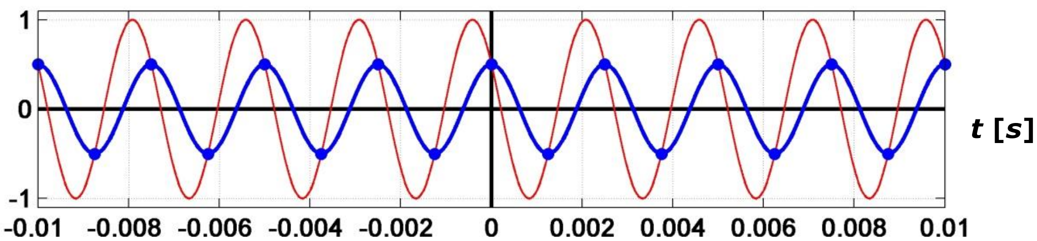
Sygnał i próbki:



Próbki:



Odtworzenie z próbek:



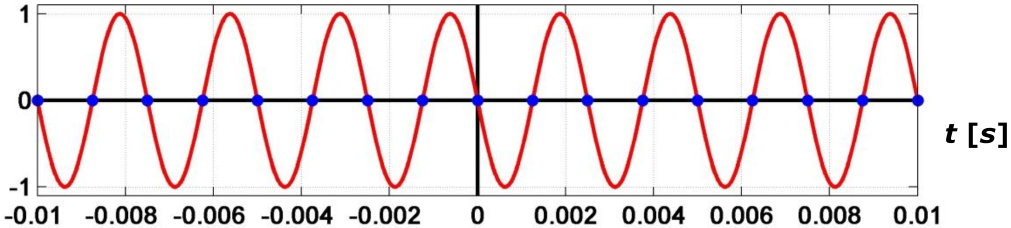
Warto pomyśleć nad interpretacją w dziedzinie widma Fouriera.

Próbkowanie krytyczne - czwarty przykład

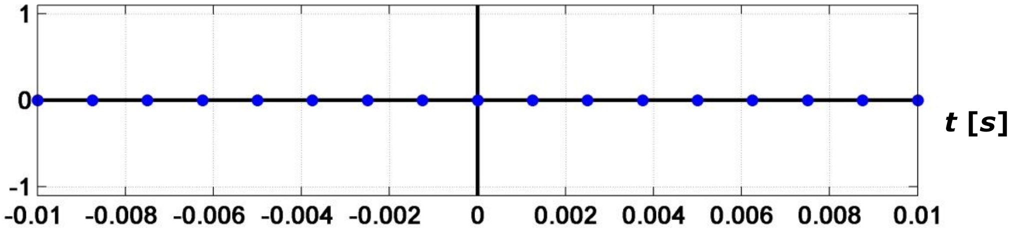
$$x(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

$$\boxed{f_p = 2 \cdot f_0}$$

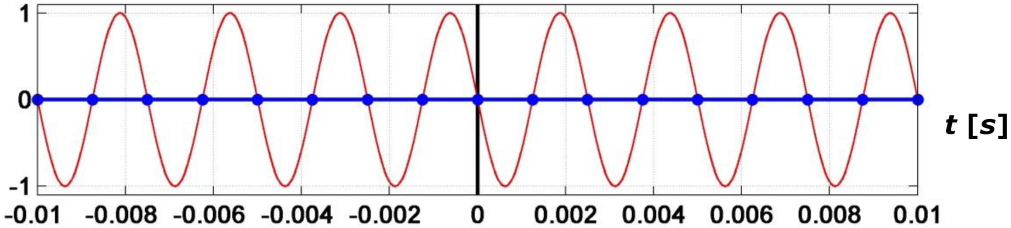
Sygnał i próbki:



Próbki:

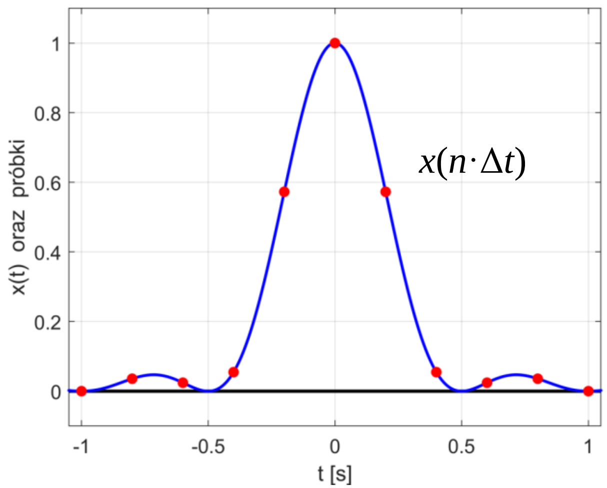


Odtworzenie z próbek:

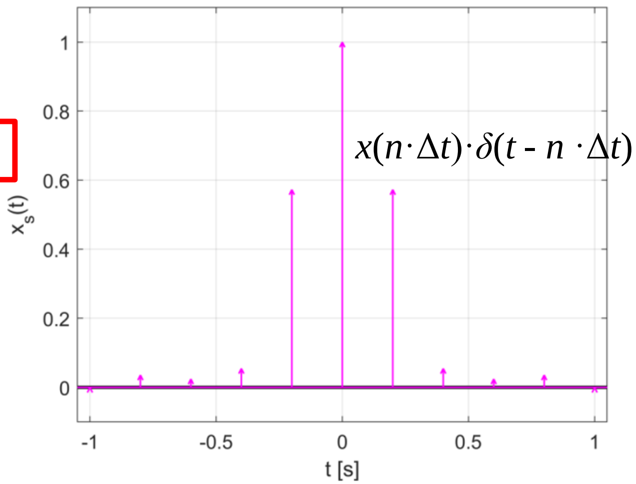


Warto pomyśleć nad interpretacją w dziedzinie widma Fouriera.

A co by się stało, gdyby jednak próbkować przez odczytanie wartości w punktach, a nie przez pomnożenie sygnału przez pseudo-funkcję grzebieniową?



$x_s(t) = x_p(t)$



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \mathrm{sinc}\big(\pi \cdot f_p \cdot (t - n \cdot \Delta t)\big)$$

$$x[n] = x(n \cdot \Delta t)$$

Transformacja Fouriera z czasem dyskretnym – wyprowadzenie z *CFT*

***CFT*:** $$\boxed{X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}dt}$$

Dla sygnału próbkowanego sygnałem grzebieniowym: $$\boxed{x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\cdot\Delta t)\cdot\delta(t-n\cdot\Delta t)}$$

$$X_p(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cdot\delta(t-n\cdot\Delta t)\right]e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}dt$$

$$\boxed{x[n]=x(n\cdot\Delta t)}$$

Przekształcenia:

$$X_p(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[x[n]\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-n\cdot\Delta t)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}dt\right]$$

$$X_p(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot n\cdot\Delta t}$$

ponieważ: $$\boxed{v=\frac{f}{f_p}=f\cdot\Delta t}$$

otrzymujemy:

$$X_p(f)\Big|_{f=v\cdot f_p}=X(v)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot v\cdot n}$$

czyli *DTFT*

Dyskusja o numerycznym wyliczaniu CFT

***CFT*:**

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\cdot 2\cdot \pi\cdot f\cdot t} dt$$

$$X(f_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot \pi\cdot f_k\cdot t} dt$$

```
......
dt=0.001;
t=-10:dt:10;
x= ??? w kolejnych punktach t;
f=-100:0.1:100;  Nf=length(f);
for k=1:Nf
  X(k)=sum(x.*exp(-j*2*pi*f(k)*t))*dt;
end
......
```

$t_n = n\cdot\Delta t$

$$X(f_k) \cong \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\cdot\Delta t)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_k\cdot (n\cdot\Delta t)}\cdot\Delta t$$

$$X(f_k) \cong \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\cdot\Delta t)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot (f_k\cdot\Delta t)\cdot n}\right]\cdot\Delta t$$

$x[n]$ $\qquad$ v_k

***DTFT*:**

$$X_p(f)\Big|_{f=v\cdot f_p} = X(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot v\cdot n}$$

$$X(f_k) \approx X(v_k)\cdot\Delta t = X_p(f_k)\cdot\Delta t$$

Transformacja Fouriera z czasem dyskretnym

$$\boxed{\exp(x) = e^{x}}$$

ang. Discrete-Time Fourier Transform (D-TFT)

$$\boxed{v = \frac{f}{f_p}}$$

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \exp\left(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot n\right) \quad \longleftrightarrow \quad x[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(v) \cdot \exp\left(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot n\right) dv$$

Wersja alternatywna:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \exp(-j \cdot \Omega \cdot n) \quad \longleftrightarrow \quad x[n] = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \cdot \exp(j \cdot \Omega \cdot n) \; d\Omega$$

$$\boxed{\Omega = \frac{\omega}{f_p}}$$

Uwaga – w tym przypadku *v* jest bezwymiarowe, natomiast *Ω* jest w radianach (są to wersje częstotliwości i pulsacji dla sygnałów z czasem dyskretnym)

Funkcje *X* (czyli transformaty) są okresowe!

Transformacja Fouriera z czasem dyskretnym

D-TFT – wybrane właściwości

1. **Parzystość Re(X(v)) oraz Moduł(X(v))**

2. **Nieparzystość Im(X(v)) oraz Faza(X(v))**

3. **Liniowość**

Transformacja Fouriera z czasem dyskretnym

Jeżeli sygnał jest niezerowy jedynie na określonym odcinku indeksów, to sumowanie można ograniczyć do tego odcinka:

$$X(v) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] \cdot \exp\left(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot n\right)$$

$$v \in \Re$$

Matlab:

```
N=32;   x=rand(1,N); % losowo tworzymy ciąg N-elementowy;
n=-10:-10+N-1;         % wybieramy dla nich przedział indeksów;
v=-3:0.01:3;           % wybieramy wartosci v (bezwymiarowe!);
Nv=length(v);
 for k=1:Nv,   X(k)=0;  % wersja powolna, ale za to czytelna;
       for m=1:N,
           X(k)=X(k)+x(m)*exp(-j*2*pi*v(k)*n(m));
       end;
 end;

   figure(1); clf;
           subplot(2,1,1);   plot(v,abs(X),'r.-');    grid on;     title('abs(X)');
           subplot(2,1,2);   plot(v,angle(X),'r.-');   grid on;   title('angle(X)');
```

Efekt próbkowania sygnału analogowego w „oczach Fouriera”

***CFT = C-TFT*:**

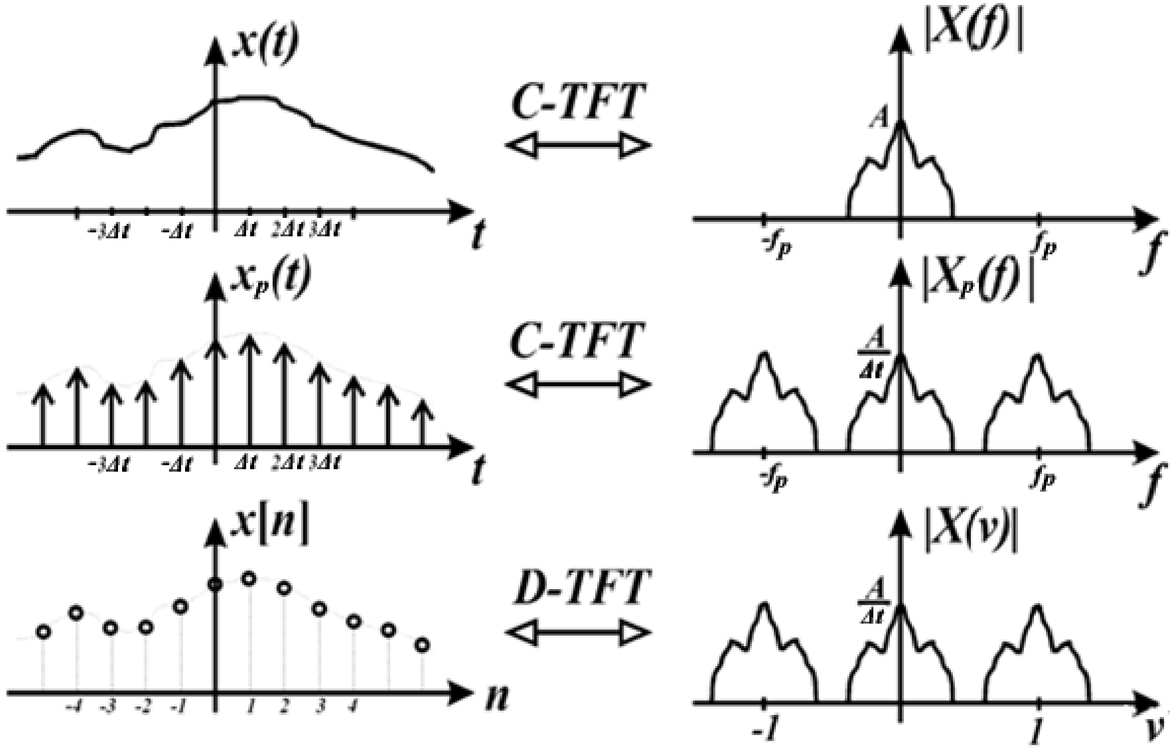
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \, dt$$

$$f_p = \frac{1}{\Delta t}$$

Δt **– okres próbkowania (np. w sekundach)**

Przeliczenie *f* (w Hz) na *v* (bezwymiarowe):

$$v = \frac{f}{f_p}$$



Odwrotna transformacja DTFT (IDTFT)

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \, df}$$

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_p(f) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \, df$$

$$\boxed{X_r(f) = \frac{1}{f_p} \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_p}\right) \cdot X_p(f)}$$

$$x_r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f_p} \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_p}\right) \cdot X_p(f) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \, df$$

$$x_r(t) = \int_{-f_p/2}^{+f_p/2} \frac{1}{f_p} \cdot X_p(f) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \, df$$

$$\boxed{X_p(f)|_{f = v \cdot f_p} = X(v)}$$

$$\boxed{v = \frac{f}{f_p} = f \cdot \Delta t}$$

$$x_r(t_n) = \int_{-1/2}^{+1/2} X(v) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot (t_n / \Delta t)} \, dv$$

$$\boxed{x_r(t_n) = x(t_n) = x[n]}$$

$$\boxed{t_n = n \cdot \Delta t}$$

$$x[n] = \int_{-1/2}^{+1/2} X(v) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot v \cdot n} \, dv$$

Podsumowanie

1. Twierdzenie o próbkowaniu (i odtwarzaniu)

2. Wyprowadzenie.

3. Przykłady.

4. Transformacja Fouriera z czasem dyskretnym.

Zapraszam na ćwiczenia ...
lub do laboratorium …