Wzory, równania i zależności
z teorii sygnałów

Łukasz Przystupa

10 stycznia 2023

całość opara na wykładach Kohorty.

1. Wzory Eulera

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$
$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$
$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

2. Splot

Definicja:

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,d\tau$$
$$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

Właściwości splotu:

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X_1(f)X_2(f)$$
$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t0)$$

3. Definicje różnych transformat

3.1. Transformata Fouruera (CFT i ICFT)

$$x(t) \xleftrightarrow[\text{aaa}]{\text{bbb}} X(f)$$
$$X(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

$$x(at) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \frac{1}{|a|}X(\frac{f}{a})$$
$$x(t-t_0) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(f)e^{-2j\pi ft_0}$$
$$\overline{x(t)} \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \overline{X(-f)}$$

Należy wspomnieć że iloczyn skalarny jest niezależny od wybranej dziedzieny:

$$x(t) \circ (y) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(f) \circ Y(t)$$
$$\Downarrow$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{y(t)}dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} X(f)\overline{Y(f)}df$$

4. Sygnały podstawowe i ich transformaty

$$x(t) = \sin(2\pi f t)$$
$$x(t) = \cos(2\pi f t)$$

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & dla\ |t| < 1/2 \\ 1/2 & dla\ |t| = 1/2 \\ 0 & dla\ |t| > 1/2 \end{cases}$$

$$sinc(t) = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f} & dla\ t \neq 1 \\ 1 & dla\ t = 0 \end{cases}$$

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1 & dla\ -1 \leqslant t \leqslant 0 \\ -t+1 & dla\ 0 < t \leqslant 1 \\ 0 & dla\ pozostalych\ t \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & dla\ t > 0 \\ \frac{1}{2} & dla\ t = 0 \\ 0 & dla\ t < 0 \end{cases}$$

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & dla\ t > 0 \\ \frac{1}{2} & dla\ t = 0 \\ -1 & dla\ t < 0 \end{cases}$$

$$\cos(x) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \frac{1}{2}(\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0))$$

$$\sin(x) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} j\frac{1}{2}(\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0))$$

$$\delta(x) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} 1$$

$$\Pi(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} sinc(\pi f)$$

$$\Lambda(x) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} sinc^2(\pi f)$$

$$g_T(t) = \sum \frac{1}{T} e^{j2\pi f_n t} \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} G_T(f) = \sum \delta(f - \frac{n}{T})$$

$$u(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \frac{1}{2}\delta(f) + \begin{cases} -j \cdot \frac{1}{2\pi f} & dla\ f \neq 0 \\ 0 & dla\ f = 0 \end{cases}$$

$$sgn(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \begin{cases} -j \cdot \frac{1}{2\pi f} & dla\ f \neq 0 \\ 0 & dla\ f = 0 \end{cases}$$

5. Sygnały okresowe:

$$x(t) = x(t + n \cdot T) \qquad Gdzie:\ T - okres\ podstawowy$$
$$n = ... -2, -1, 0, 1, 2...$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cot T)$$

Gdzie $x_0(t)$ - wzorzec sygnału,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T) = x_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot T) = x_0(t) * g_T(t)$$

Fukcja $g_T(t)$ jest to pseudo fukcja reprezentująca grzbień Diraca

Dla fukcji zepolonych:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{j2\pi n f_T t} \qquad f_t = \frac{1}{T}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cdot e^{-j2\pi f_n t} dt \qquad f_n = n \cdot f_T$$

6. Sygnał jako wektor

Iloczyn skalarny:

$$< x, y >= \int_D x(t) \cdot \overline{y(t)} dt$$

Norma (długość wektora):

$$||x(t)||^2 =< x(t), x(t) >$$

Metryka (odległość sygnałów):

$$\rho(x, y) = ||x - t|| = \sqrt{< x(t) - y(t), x(t) - y(t) >}$$

Energia sygnału:

$$Energia(x(t)) = ||X(t)||^2_{L^2} = \int_D |x(t)|^2 dt$$

Wektory są orogonalne (czyli prostopadłem względem siebie (czyli liniowo niezależne)) jeśli:

$$< x(t), y(t) >= ||x(t)|| \cdot ||y(t)|| \cdot cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow x \perp y$$

6.1. Twierdzenie Persevala - o zachowaniu energii

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

6.2. Twierdzenie o zachowaniu odległości

Jeżeli:

$$x(t) \circ y(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(f) \circ Y(f)$$

to:

$$||x(t) - y(t)|| = ||X(f) - Y(f)||$$

7. Aproksymacja syngału

Aproksymacją sygnału $x(t)$ jest:

$$x(t) \approx \sum_{n=1}^{N} a_n b_n(t)$$

czyli:

$$x(t){+}e(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot b_n(t)$$
$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot b_n - e(t)$$

gdzie współczynniki a i b odpowiadaja macioerzom:

$$b = A \cdot a$$

$$b = \begin{bmatrix} x \circ b_1 \\ x \circ b_2 \\ x \circ b_3 \\ \dots \\ x \circ b_N \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} b_1 \circ b_1 & b_2 \circ b_1 & \dots & b_N \circ b_1 \\ b_1 \circ b_2 & b_2 \circ b_2 & \dots & b_N \circ b_2 \\ b_1 \circ b_3 & b_2 \circ b_3 & \dots & b_N \circ b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 \circ b_N & b_2 \circ b_N & \dots & b_N \circ b_N \end{bmatrix} \qquad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_N \end{bmatrix}$$

W gdyby wektorty byłyby ortogonalne, całość sprowadza się do prostego równania:

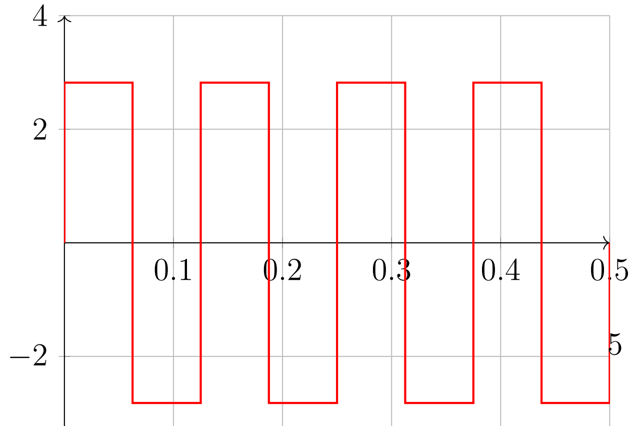
$$a_k = \frac{x \circ b_k}{||b_k||^2} \qquad k = 1, 2, ..., N$$

Kiedy nasze wektory są znormalizowane to:

$$||b_k||^2 = 1$$
$$a_k = x \circ b_k \qquad k = 1, 2, ..., N$$

8. Baza Harra (ortonormalna)

$$H_{0,0}(t) = \Pi(t - 0.5) \qquad D : t \in < 0, 1 >$$
$$H_{0,1} = \Pi(2\cot(t - 0.25)) - \Pi(2 \cdot (t - 0.75))$$
$$H_{k,m} = 2^{\frac{k}{2}} \cdot H(2^k \cdot (t - \frac{m-1}{2^k})) \qquad m = 1, 2, ..., 2^k$$



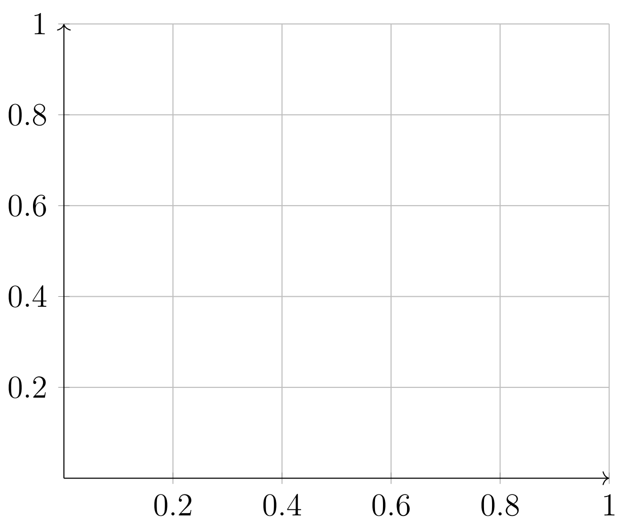
Czyli kolejne sygnały bazy:

$$
\begin{aligned}
b_1(t) &= H_{0,0}(t)\\
b_2(t) &= H_{0,1}(t)\\
b_3(t) &= H_{1,1}(t)\\
b_4(t) &= H_{1,2}(t)\\
b_5(t) &= H_{2,1}(t)\\
b_6(t) &= H_{2,2}(t)\\
&...
\end{aligned}
$$

9. Baza Walsha

$$
\begin{aligned}
W_{0,0}(t) &= \Pi(t-0.5) && D: t \in <0,1>\\
W_{0,1}(t) &= W_{0,0}(2t) + (-1)^1 \cdot W_{0,0}(2\cdot(t-0.5))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_{k,2m-1}(t) &= W_{k-1,m}(2t) + (-1)^{m-1} \cdot W_{k-1,m}(2\cdot(t-0.5)) && dla\ k>1\\
W_{k,2m}(t) &= W_{k-1,m}(2t) + (-1)^{m} \cdot W_{k-1,m}(2\cdot(t-0.5)) && dla\ k>1
\end{aligned}
$$



10. Twierdzenie o pochodnej

Pochodna pierwszego rzędu:

$$dla \lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt}x(t) \underset{\text{ICFT}}{\overset{\text{CFT}}{\longleftrightarrow}} j2\pi f \cdot X(f)$$

Pochodna n-tego rzędu:

$$dla \lim_{t\to\pm\infty} x^{(m)}(t) = 0 \;\; : \;\; m = 0, 1, 2, ..., n-1$$
$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} (j2\pi f)^n \cdot X(f)$$

11. Twierdzenie o całce

$$\int\limits_{f}^{t} x(\tau) d\tau \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \frac{1}{j2\pi f} \cdot X(f) \;\; dla \;\; f = 0$$

dla $f = 0$ liczymy osobno.