

AGH

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Inżynierskie techniki obliczeniowe

2021/2022

Wykład nr 7

Dr inż. Przemysław Korohoda
E-mail: korohoda@agh.edu.pl
Tel.wewn.AGH: (012-617)-27-52
Pawilon C3 - p.506

Strona WWW:

home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2021_2022_lato/ITO_EL_1

UPeL: ITOEL2022

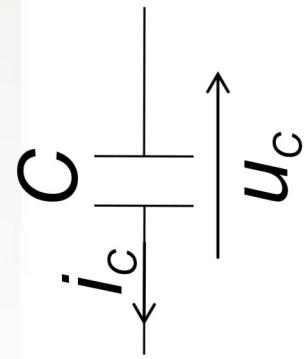
Plan wykładu

Układy z pojemnością i/lub indukcyjnością

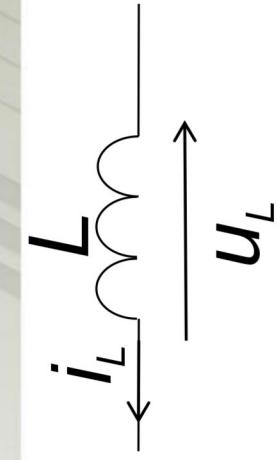
Równanie różniczkowe – skalarne i wektorowe

Rozwiązywanie analityczne i numeryczne

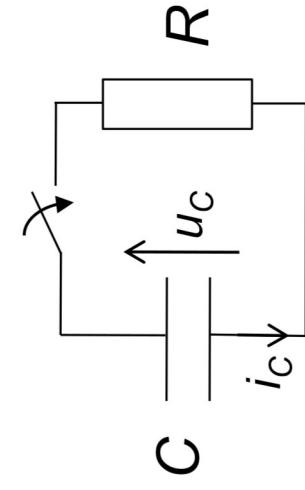
Pojemność i indukcyjność (przypomnienie)



$$C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = i_C(t)$$

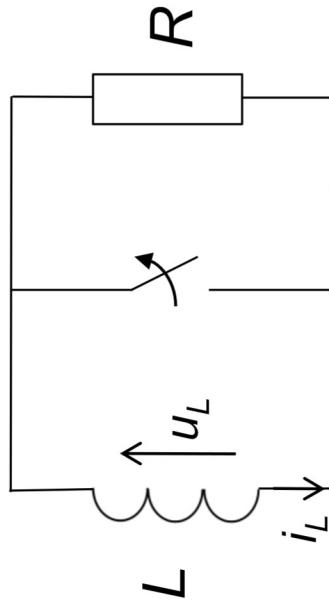


$$L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = u_L(t)$$



$$C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{u_C(t)}{R}$$

$$u_{C0} = u_C(t_0)$$



$$L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{i_L(t)}{G}$$

$$i_{L0} = i_L(t_0)$$

$$G = \frac{1}{R}$$



Równanie różniczkowe zwyczajne, liniowe, jednorodne, ze stałym współczynnikiem

$$\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot u_C(t)$$

$$u_{C0} = u_C(t_0)$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot i_L(t)$$

$$i_{L0} = i_L(t_0)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = a \cdot x(t)$$

z warunkiem początkowym:

$$x_0 = x(t_0)$$

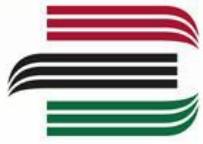
$$x'(t) = a \cdot x(t)$$

W innym zapisie:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{a \cdot (t-t_0)}$$

Rozwiązańe analityczne:

Sprawdzenie (dowód) proszę przeprowadzić samodzielnie.



Równanie różniczkowe

Rozwiązażanie numeryczne

$$x'(t) = a \cdot x(t)$$

$$x_n = x(t_n)$$

$$h = \Delta t = t_{n+1} - t_n$$

Metoda Eulera (jawna):

$$\frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=t_n} \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{h} = a \cdot x_n$$

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot a \cdot x_n$$

Leonhard Euler (1707-1783) - matematyk, fizyk i astronom **szwajcarski**.
Liczby Eulera - liczby całkowite występujące w rozwinieciu funkcji $1/\cosh(x)$
w szeregu MacLaurina: $1, 0, -1, 0, 5\dots$.

L.E. wprowadził oznaczenie e dla liczby Nepera – czyli dla granicy ciągu: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$,
a także dla sumy szeregu: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

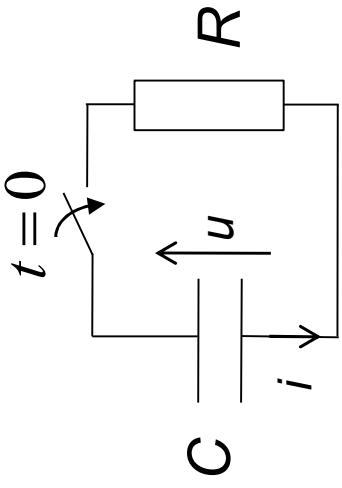
Równanie różniczkowe

Rozwiązywanie numeryczne

– przykład użycia funkcji MATLAB'a

Funkcja Matlaba realizująca metodę Rungego-Kutty (rzędu 4 i rzędu 5):

```
...
C=2e-6; R=2e3;
dt=1; tmax=500; t=0:dt:tmax; % t0=0;
u0=1;
Opcje=odeset;
[t,u]=ode45(@opis_równania, t, u0, Opcje, C, R);
...
```



Proszę zwrócić uwagę na fakt, że pierwszą zwracaną zmienną jest "t". Ponadto warto sprawdzić, czy "x" zawiera kolejne wyniki (dla kolejnych "t") ułożone w kierunku pionowym, czy poziomym.

```
function du=opis_równania(t,u,C,R)
du=-u/(R*C);
```

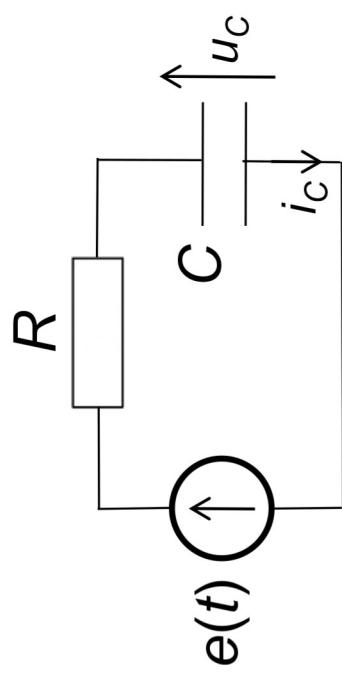
... a można też tak:

```
...
a=-1/(R*C); % wersja inaczej zapisana;
[t,u]=ode45(@opis_równania, t, u0, Opcje, a);
...
function du=opis_równania(t,u,a)
du=a*u;
```

$$\frac{du(t)}{dt} = -\frac{u(t)}{R \cdot C}$$

$$u_0 = u(0)$$

Układy z wymuszeniem

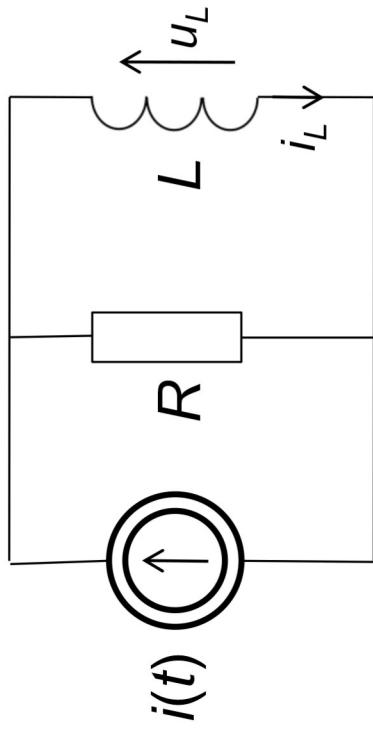


$$\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot u_C(t) + \frac{1}{R \cdot C} \cdot e(t)$$

$$u_{C0} = u_C(t_0)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = a \cdot x(t) + g(t)$$

$$x_0 = x(t_0)$$



$$\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot i_L(t) + \frac{R}{L} \cdot i(t)$$

$$i_{L0} = i_L(t_0)$$



Równanie różniczkowe zwyczajne, liniowe, niejednorodne, ze stałym współczynnikiem

$$x'(t) = a \cdot x(t) + g(t)$$

$$x_0 = x(t_0)$$

Rozwiążanie analityczne:

$$\begin{aligned} x(t) &= [x_0 \cdot e^{-a \cdot t_0} - q(t_0)] \cdot e^{a \cdot t} + q(t) \cdot e^{a \cdot t} = \\ &= c_0 \cdot e^{a \cdot t} + [q(t) - q(t_0)] \cdot e^{a \cdot t} \\ \text{gdzie } q'(t) &= g(t) \cdot e^{-a \cdot t} \end{aligned}$$

$$c_0 = x_0 \cdot e^{-a \cdot t_0}$$

Dla $t_0 = 0$:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{a \cdot t} + [q(t) - q(t_0)] \cdot e^{a \cdot t}$$

Jak wyznaczyć $q(t)$? Np. zgodując ...



Równanie różniczkowe niejednorodne rozwiązańie analityczne (cd.)

Przykład wyznaczania $q(t)$:

$$g(t)$$

$$x'(t) = a \cdot x(t) + [b_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + b_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)]$$

czyli:

$$q'(t) = e^{-a \cdot t} \cdot [b_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + b_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)]$$

$$q'(t) = g(t) \cdot e^{-a \cdot t}$$

Zgadujemy, że:

$$q(t) = e^{-a \cdot t} \cdot [d_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + d_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)]$$

Odpowiednie porównanie $q'(t)$ daje dwa warunki, który można zapisać macierzowo:

$$\begin{bmatrix} -a & 2 \cdot \pi \cdot f_0 \\ -2 \cdot \pi \cdot f_0 & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

Ostateczny wynik proszę wyznaczyć samodzielnie.

Wektoryowe równanie różniczkowe, zwyczajne, liniowe, jednorodne

Ze stałymi współczynnikami

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'_1(t) & = & a_{11} \cdot x_1(t) + a_{12} \cdot x_2(t) + \dots + a_{1N} \cdot x_N(t) \\ x'_2(t) & = & a_{21} \cdot x_1(t) + a_{22} \cdot x_2(t) + \dots + a_{2N} \cdot x_N(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ x'_N(t) & = & a_{N1} \cdot x_1(t) + a_{N2} \cdot x_2(t) + \dots + a_{NN} \cdot x_N(t) \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_N(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{N \times N} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix}$$

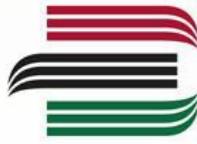
$$\boxed{\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)}$$

$$\boxed{\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)}$$

Problem:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A} \cdot (t-t_0)} \cdot \mathbf{x}_0$$

Rozwiązanie:



Wektoryowe równanie różniczkowe niejednorodne

Ze stałymi współczynnikami

Problem:

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_N(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{N \times N} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_N(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

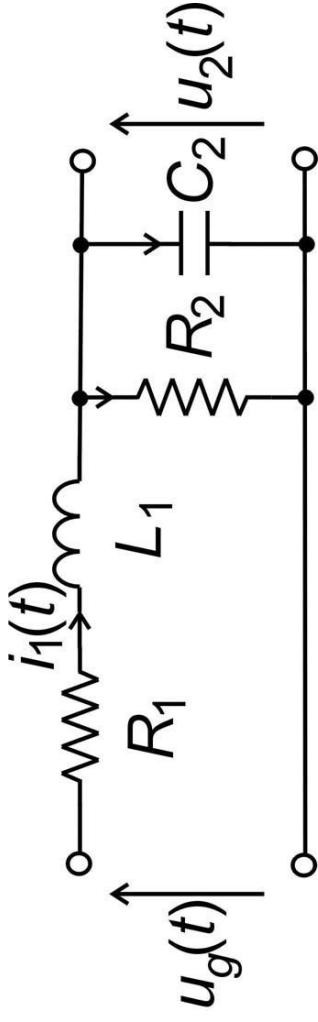
Rozwiążanie:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A} \cdot t} \cdot \left(e^{-\mathbf{A} \cdot t_0} \cdot \mathbf{x}_0 - \mathbf{q}(t_0) + \mathbf{q}(t) \right)}$$
$$\mathbf{q}'(t) : \mathbf{q}'(t) = e^{-\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{g}(t)$$
$$\mathbf{q}'(t) = \begin{bmatrix} q'_1(t) \\ q'_2(t) \\ \vdots \\ q'_N(t) \end{bmatrix}.$$

Przykład:

CZWÓRNIK RLC; wariant u/u

$$\left. \begin{array}{l} u_g(t) = u_1(t) + u_2(t) \\ \\ i_1(t) = i_{R_2}(t) + i_{C_2}(t) \\ \\ u_1(t) = R_1 \cdot i_1(t) + u_{L_1}(t) \end{array} \right\}$$



$$u_2(t) = R_2 \cdot i_{R_2}(t)$$

$$i_1(0) = i_{10}$$

$$\frac{d}{dt} i_1(t) = \frac{u_g(t) - u_2(t) - R_1 \cdot i_1(t)}{L_1}$$



$$i_1(0) = i_{10}$$

$$\frac{d}{dt} i_1(t) = \frac{1}{L_1} \cdot u_{L_1}(t)$$

$$\frac{d}{dt} u_2(t) = \frac{i_1(t)}{C_2} - \frac{u_2(t)}{C_2 \cdot R_2}$$

$$\frac{d}{dt} u_2(t) = \frac{1}{C_2} \cdot i_{C_2}(t)$$

$$u_2(0) = u_{20}$$

$$u_2(0) = u_{20}$$

Wektorskie nieliniowe równanie różniczkowe zwyczajne pierwotnego rzędu

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$$

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}(t_n)$$

$$h = \Delta t = t_{n+1} - t_n$$

Metoda Eulera (jawna):

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \Big|_{t=t_n} \approx \frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{h} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, t_n)$$

$$\boxed{\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, t_n)}$$

Przykład zastosowania metody Eulera

Przykład: czwórnik RLC; wersja u/u (Matlab)

....

```
R1=1e3; R2=2e3; L1=2e-2; C2=0.3e-6;
dt=1e-6; t=0:dt:0.01; N=length(t);
A=[ -R1/L1 , -1/L1;
     1/C2 , -1/(R2*C2)];
b=[1/L1 ; 0];
fo=1000;
p=0;
h=dt;
X(1:2,1)=[0.01; -1]; % i1(1)=0.01; u2(1)=-1;
for n=1:N-1,
    X(1:2,n+1)=X(1:2,n) + h * f(X(1:2,n), t(n), A, b, fo, p);
end;
....
```

....

$i_1(t)$

$u_g(t)$

$u_2(t)$

L_1

R_1

C_2

R_2

$U_2(t)$

$\boxed{X_{n+1} = X_n + h \cdot f(X_n, t_n)}$

```
function dx=f(x,t,A,b,fo,p)
```

```
dx=A*x + b*ug(t,fo,p);
```

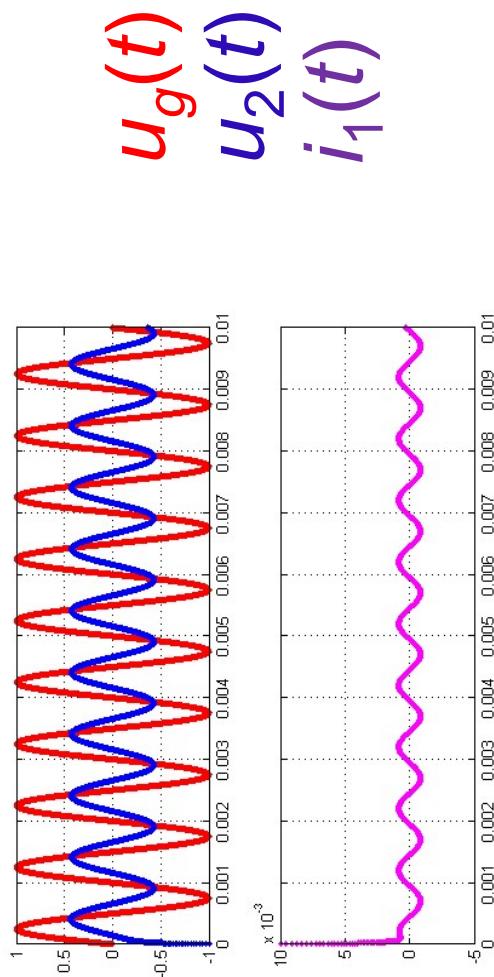
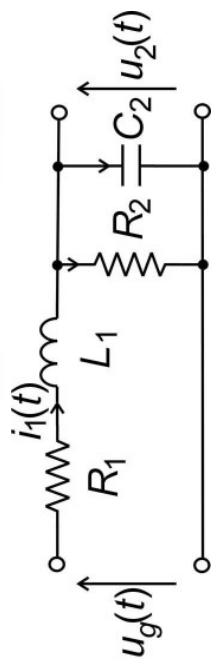
$$\frac{d}{dt}i_1(t) = -\frac{R_1}{L_1} \cdot i_1(t) - \frac{1}{L_1} \cdot u_2(t) + \frac{1}{L_1} \cdot u_g(t)$$

```
function u=ug(t,fo,p)
```

$$u = \sin(2\pi f_0 \cdot t + p);$$

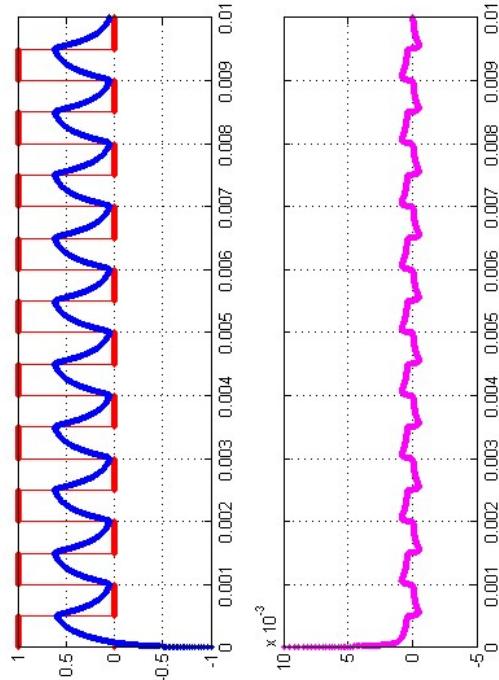
$$\frac{d}{dt}u_2(t) = \frac{1}{C_2} \cdot i_1(t) - \frac{1}{R_2 \cdot C_2} \cdot u_2(t)$$

Przykład zastosowania metody Eulera (cd.)



```
function u=ug(t,fo,p)
```

```
u=sin(2*pi*fo*t + p);
```



```
function u=ug(t,fo,p)
u0=sin(2*pi*fo*t);
u(u0>p)=1;
```

Analiza częstotliwościowa (ac) układy liniowe, kosinusoidalny stan ustalony

$$I(s) \xrightarrow{\quad} U(s)$$

$$I(s) \xrightarrow{\quad} U(s)$$

$$C \cdot s = \frac{I(s)}{U(s)}$$

$$R = \frac{U(s)}{I(s)}$$

$$L \cdot s = \frac{U(s)}{I(s)}$$

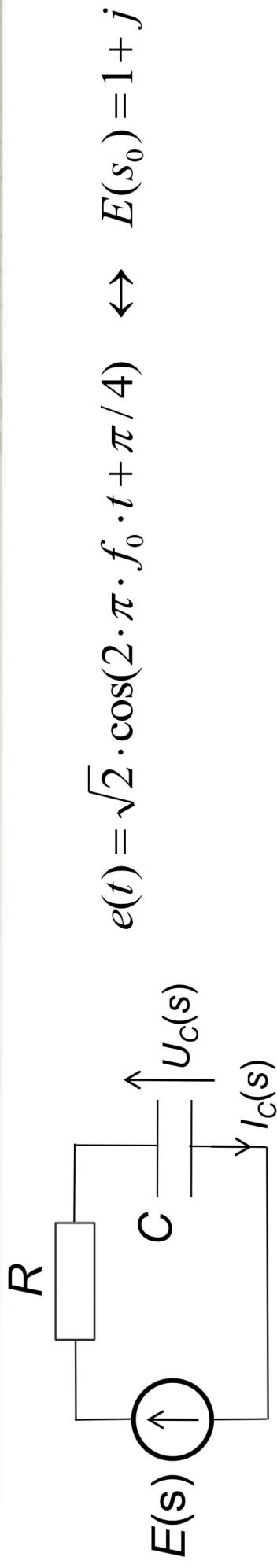
Ogólne sposoby zapisu kosinusoidalnego przebiegu napięcia i prądu:

$$u(t) = u_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0) \leftrightarrow U(s) = \begin{cases} u_0 \cdot e^{j \cdot \varphi_0} & \text{dla } s = s_0 \\ 0 & \text{dla } s \neq s_0 \end{cases}$$

$$s_0 = j \cdot \omega_0 = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0$$

$$i(t) = i_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0) \leftrightarrow I(s) = \begin{cases} i_0 \cdot e^{j \cdot \varphi_0} & \text{dla } s = s_0 \\ 0 & \text{dla } s \neq s_0 \end{cases}$$

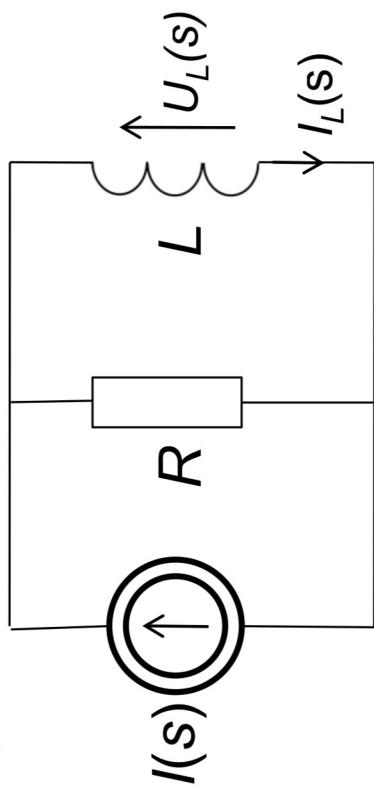
Analiza częstotliwościowa (ac) układy liniowe, kosinusoidalny stan ustalony



$$U_C(s) = E(s) \cdot \frac{\frac{1}{s \cdot C}}{\frac{1}{s \cdot C} + R} = E(s) \cdot \frac{1}{1 + s \cdot C \cdot R} = \{s = s_0\} = \frac{1}{1 + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot C \cdot R} =$$

$$= u_{C0} \cdot e^{j \cdot \varphi_C} \Rightarrow u_C(t) = u_{C0} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_C)$$

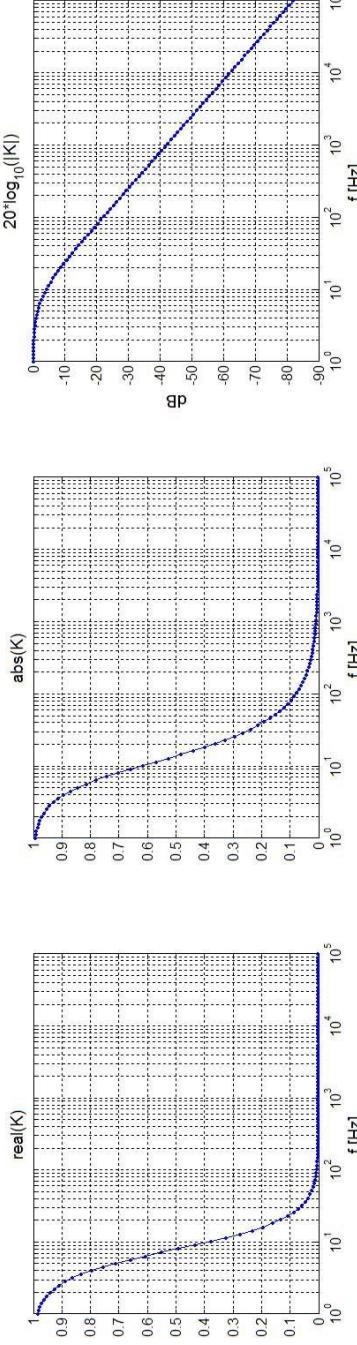
A jak by to wyglądało dla tego układu?



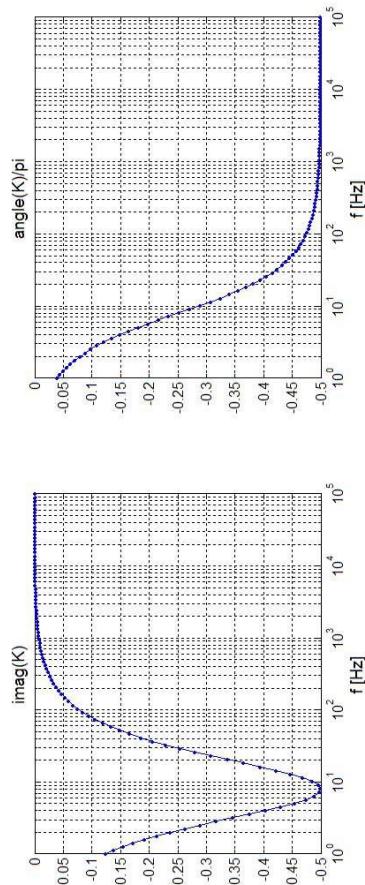
Czwórnik RC (wzmocnienie U/U) – zależności częstotliwościowe



```
...  
f=logspace(0,5,100); w=2*pi*f; s=j*w;  
switch uklad,  
case 1, R=1e3; C=2e-5; K=(1./(s*C))./(R+1./(s*C));  
case 2, R=1e3; C=2e-5; K=R./(R+1./(s*C));  
case 3, R=1e3; L=20e-3; K=R./(R+s*L);  
case 4, R=1e3; L=20e-3; K=s*L./(R+s*L);  
end;  
...
```



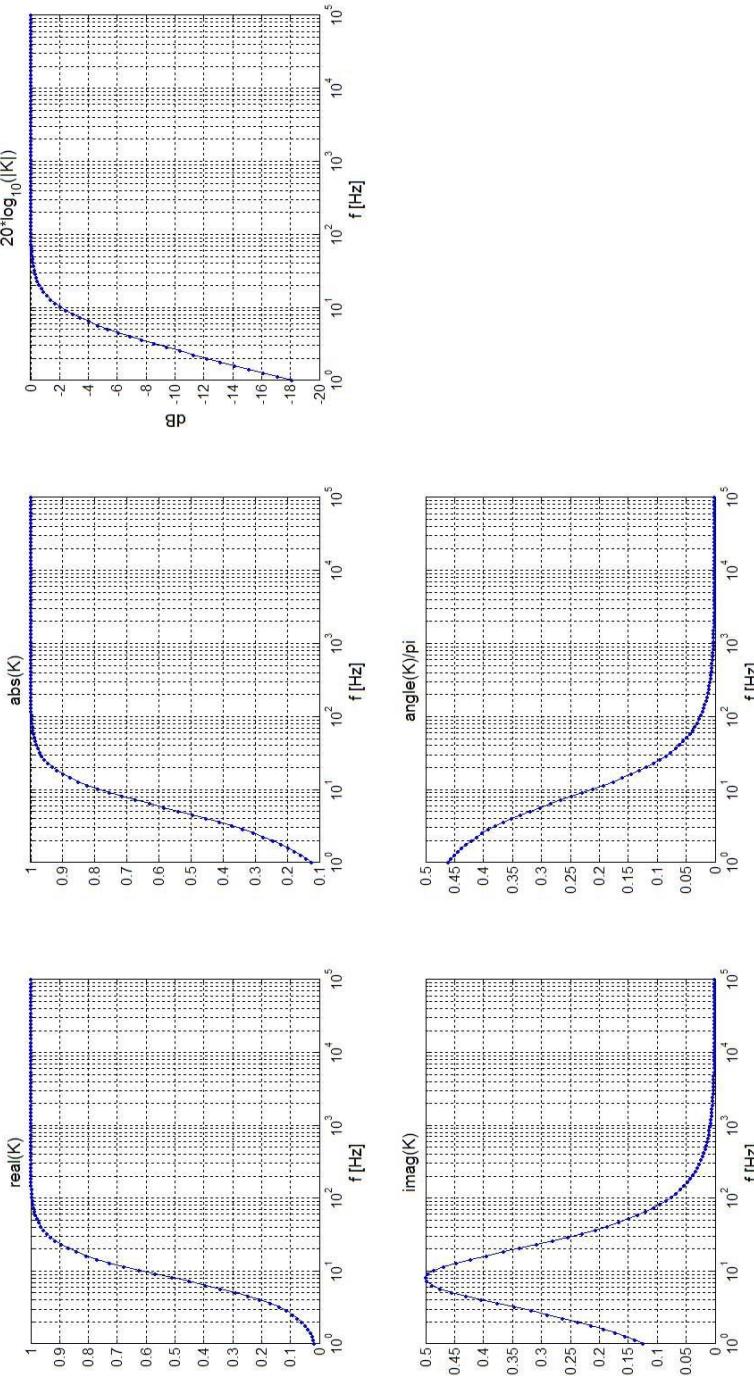
```
subplot(2,3,1);  
semilogx(f,real(K),'b.-');
```



Analogiczne funkcje:
semilog, loglog,
linspace

Czwórnik RC (wersja 2)

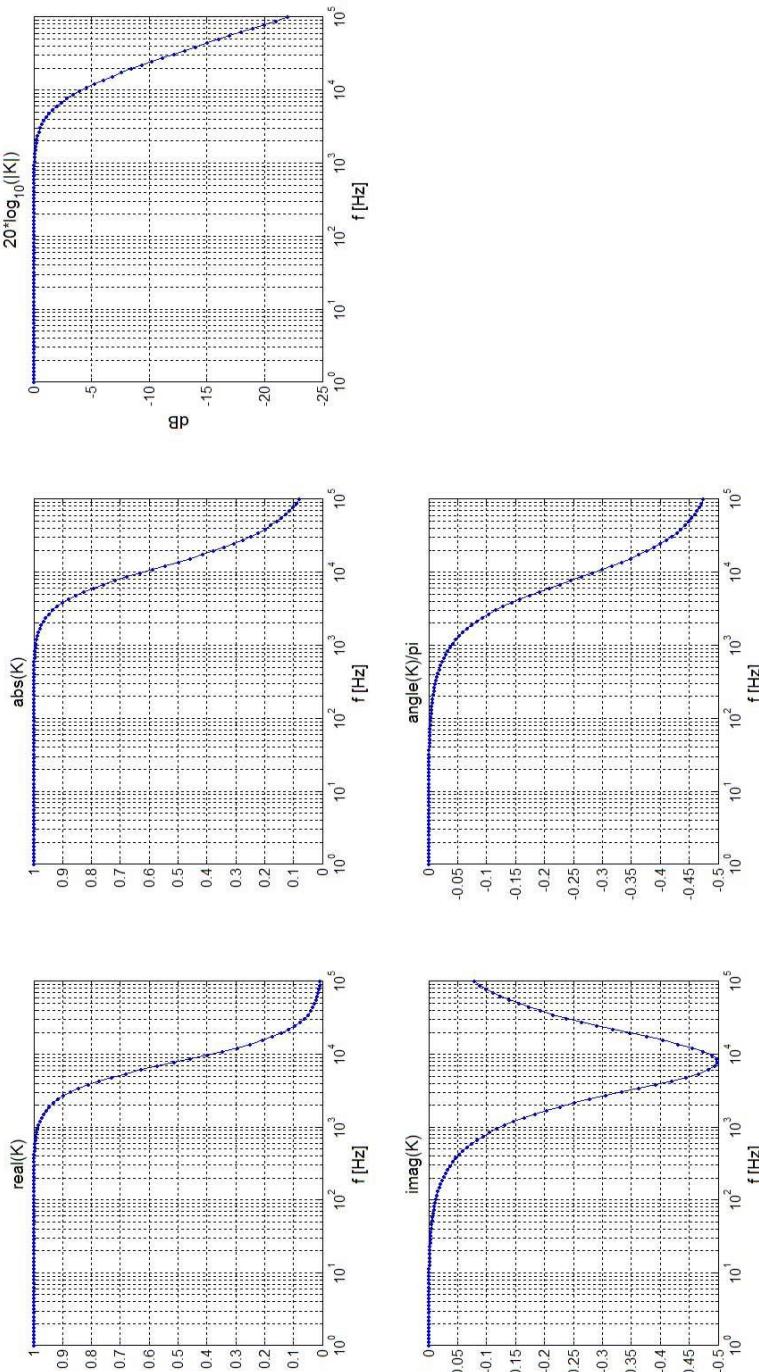
```
%% f=logspace(0,5,100); w=2*pi*f; s=j*w;
switch uklad,
case 1, R=1e3; C=2e-5; K=(1./(s*C)./(R+1.)/(s*C));
case 2, R=1e3; C=2e-5; K=R./(R+1.)/(s*C);
case 3, R=1e3; L=20e-3; K=R./(R+s*L);
case 4, R=1e3; L=20e-3; K=s*L./(R+s*L);
end;
```



```

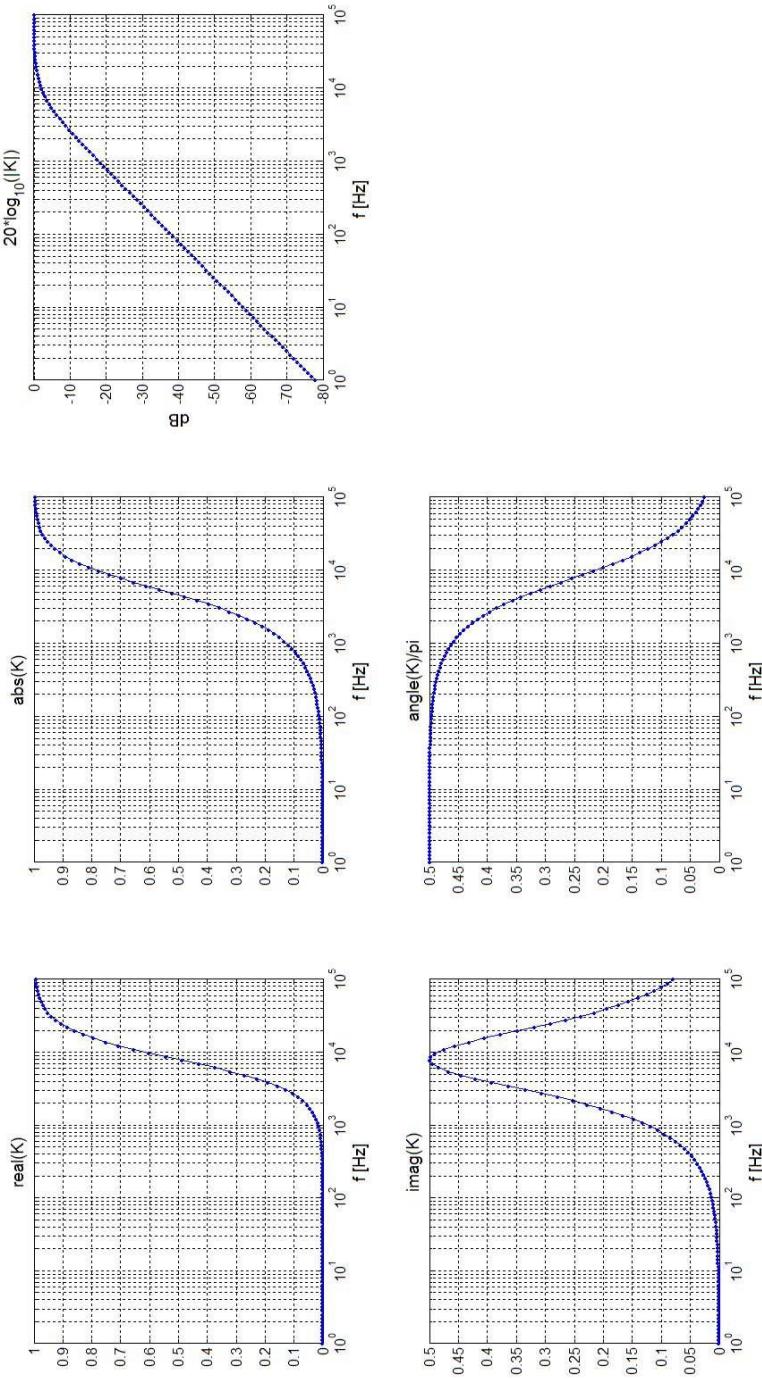
 $f = \text{logspace}(0.5, 100); \quad w = 2 * \pi * f; \quad s = j * w;$ 
switch uklad,
case 1, R=1e3; C=2e-5; K=(1. / (s*C)) ./ (R+1. / (s*C));
case 2, R=1e3; C=2e-5; K=R. / (R+1. / (s*C));
case 3, R=1e3; L=20e-3; K=R. / (R+s*L);
case 4, R=1e3; L=20e-3; K=s*L. / (R+s*L);
end;

```

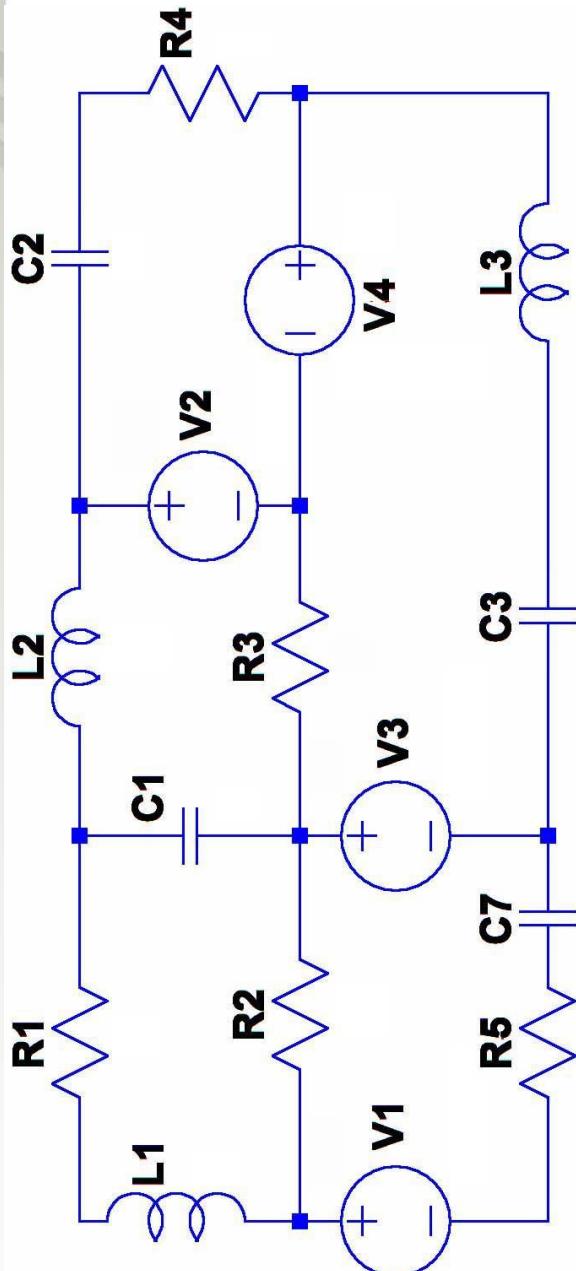


Czwórnik RL (wersja 2)

```
%% f=logspace(0,5,100); w=2*pi*f; s=j*w;
switch uklad,
case 1, R=1e3; C=(1./(s*C))./(R+1./(s*C));
case 2, R=1e3; C=2e-5; K=R./(R+1./(s*C));
case 3, R=1e3; L=20e-3; K=R./((R+s*L));
case 4, R=1e3; L=20e-3; K=s*L./(R+s*L);
end;
```

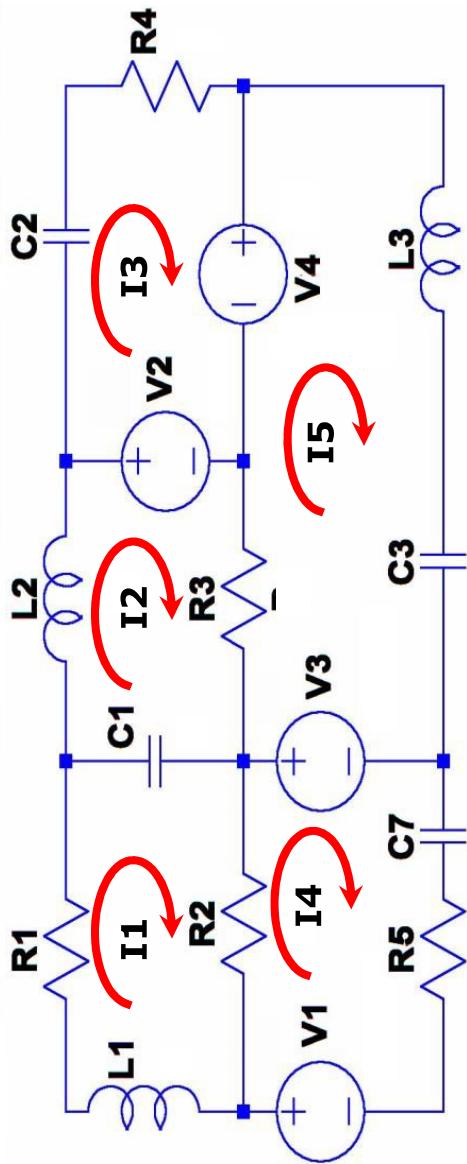


Metoda oczkowa – zależności częstotliwościowe



⋮
 $R_1 = 1000; R_2 = 500; R_3 = 1000; R_4 = 2000; R_5 = 100;$
 $C_1 = 10.1e-6; C_2 = 4.7e-9; C_3 = 5.6e-8; C_7 = 2.9e-6;$
 $L_1 = 2e-9; L_2 = 3e-8; L_3 = 3e-7;$
 $v_1 = 2; v_2 = 1; v_3 = 1.5; v_4 = 0.5;$
⋮

Metoda oczkowa (cd.)



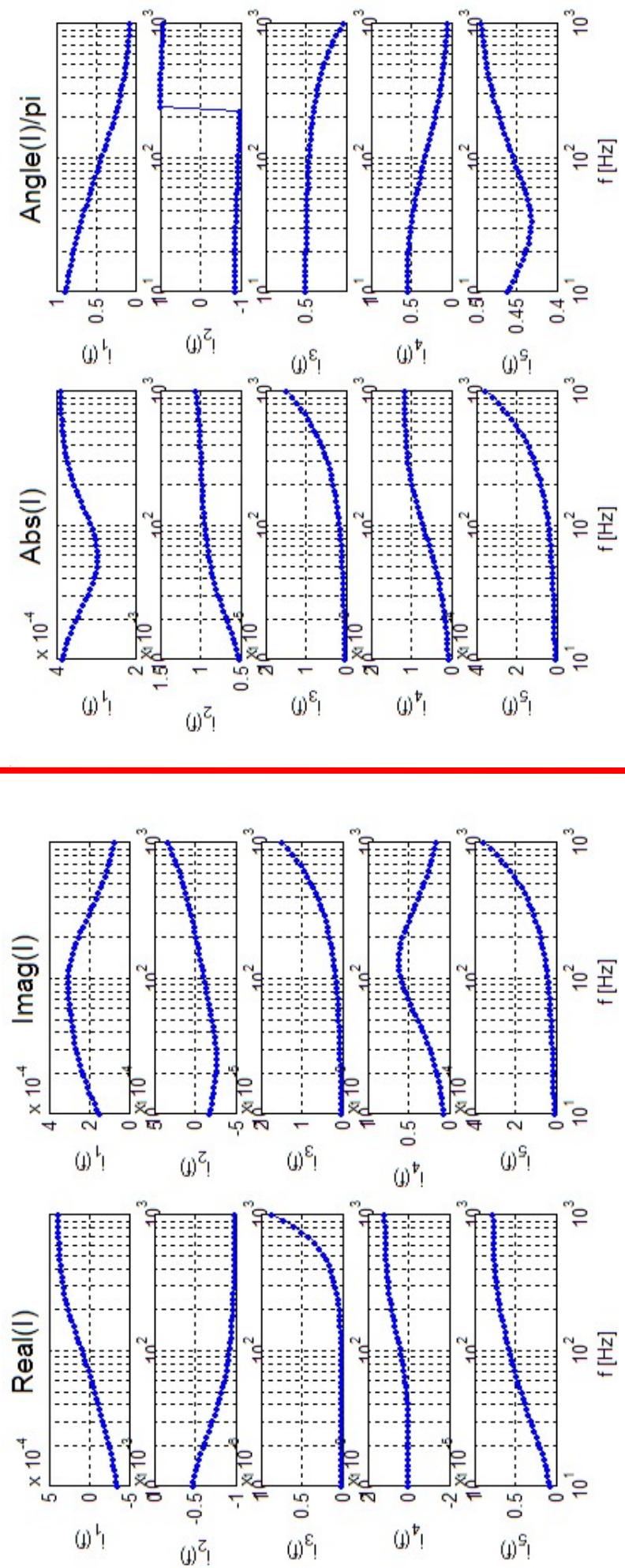
```

 $\text{U} = [0; -V2; V2-V4; V1-V3; V3+V4];$ 
 $N = 50;$ 
 $\text{fx} = \text{logspace}(1, 3, N); \quad \% \text{ 50 wartosci od } 10\text{Hz} \text{ do } 1000\text{Hz};$ 
 $k = 0;$ 
 $\text{for } f = \text{fx},$ 
 $\quad k = k + 1; \quad w = 2 * \pi * f; \quad s = j * w;$ 
 $\quad A = [ \begin{matrix} R1 + L1 * s + 1 / (C1 * s) + R2, & -1 / (C1 * s), & 0, & -R2, & 0; \\ -1 / (C1 * s), & 1 / (C1 * s) + L2 * s + R3, & 0, & 0, & -R3; \\ 0, & 0, & 1 / (C2 * s) + R4, & 0, & 0; \\ 0, & 0, & R2 + 1 / (C7 * s) + R5, & 0, & 0; \\ -R3, & 0, & R3 + L3 * s + 1 / (C3 * s), & 0, & 0; \end{matrix} ];$ 
 $I(:, k) = \text{inv}(A) * U;$ 
 $\text{end};$ 
 $\dots$ 

```

Metoda oczkowa (cd.)

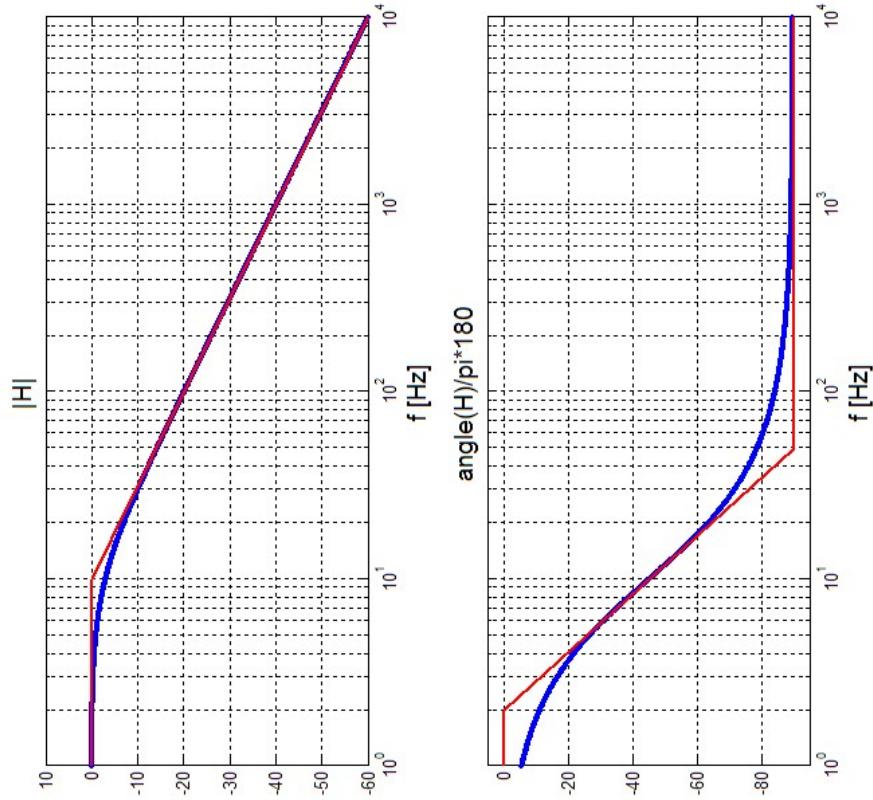
Otrzymane zespolone wartości prądu oczkowych w zależności od częstotliwości



Charakterystyki Bodego

$$H(s) = \frac{1}{1+s \cdot T}$$

$$\left| H(s) \right|_{s=j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_g} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

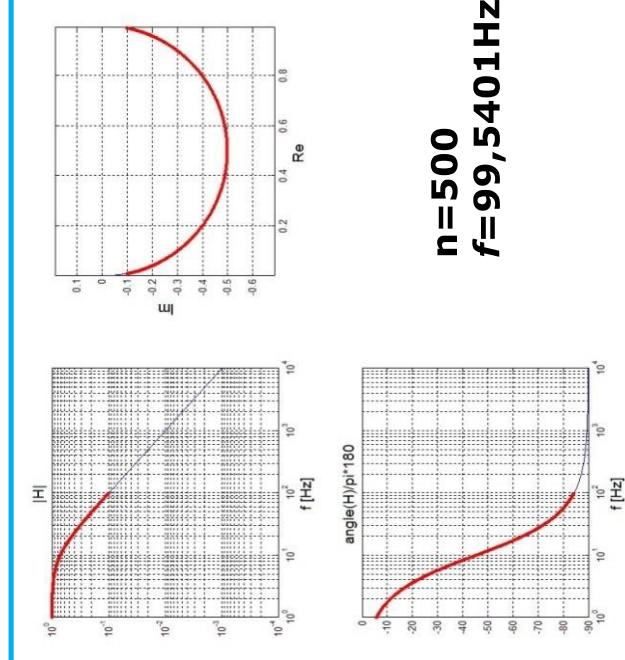
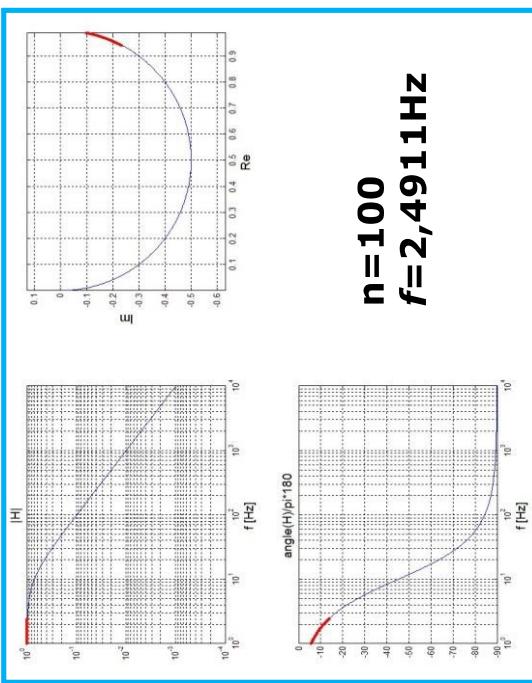
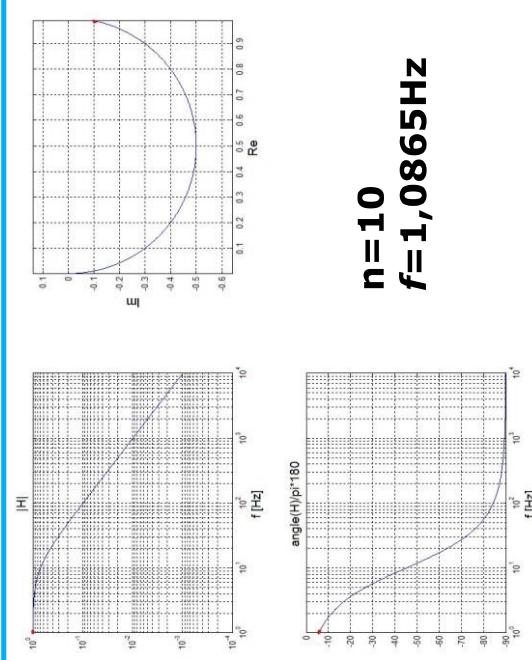


Dla charakterystyk Bodego w analizie uproszczonej stosuje się często przybliżenie odcinkowo-liniowe.

Każdy człon inercyjny wnosi opadanie modułu o 20dB na dekadę oraz przesunięcie fazy o 90 stopni, które rozciąga się od $1/5f_g$ do $5f_g$, gdzie f_g to 3-decybelowa częstotliwość graniczna pojedynczego członu (przyjmuje się także zakres od $1/10f_g$ do $10f_g$).

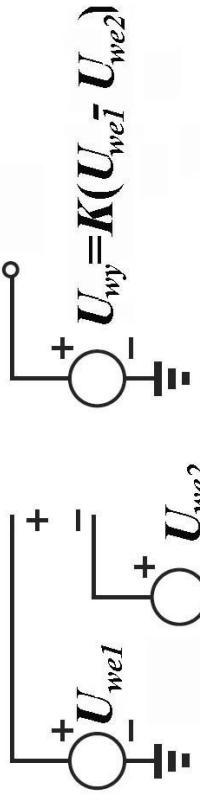
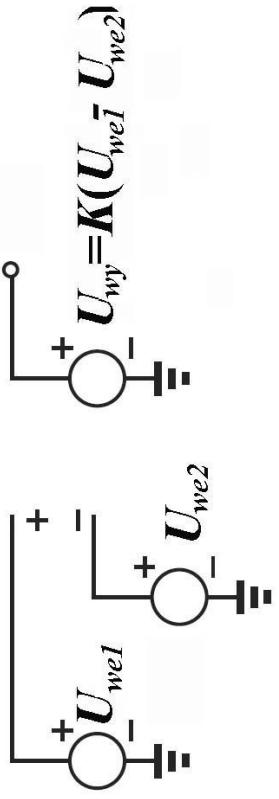
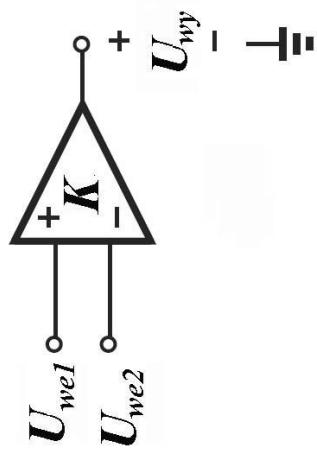
Mögemy łatwo sprawdzić dokładność takiego przybliżenia...

Charakterystyki Bodego (cd.)



Można opracować animację, pokazującą jaką jest zależność pomiędzy wykresami ukazującymi interesującą nas zależność na różne sposoby (jak np. wykresy Bodego i Nyquista). W tym celu można skorzystać z funkcji **pause(0.1)**

Wzmacniacz operacyjny AGH – analiza częstotliwościowa



```
function
K=op_amp_f(f,K0,f3dB);
% K=op_amp_f(f,K0,f3dB);

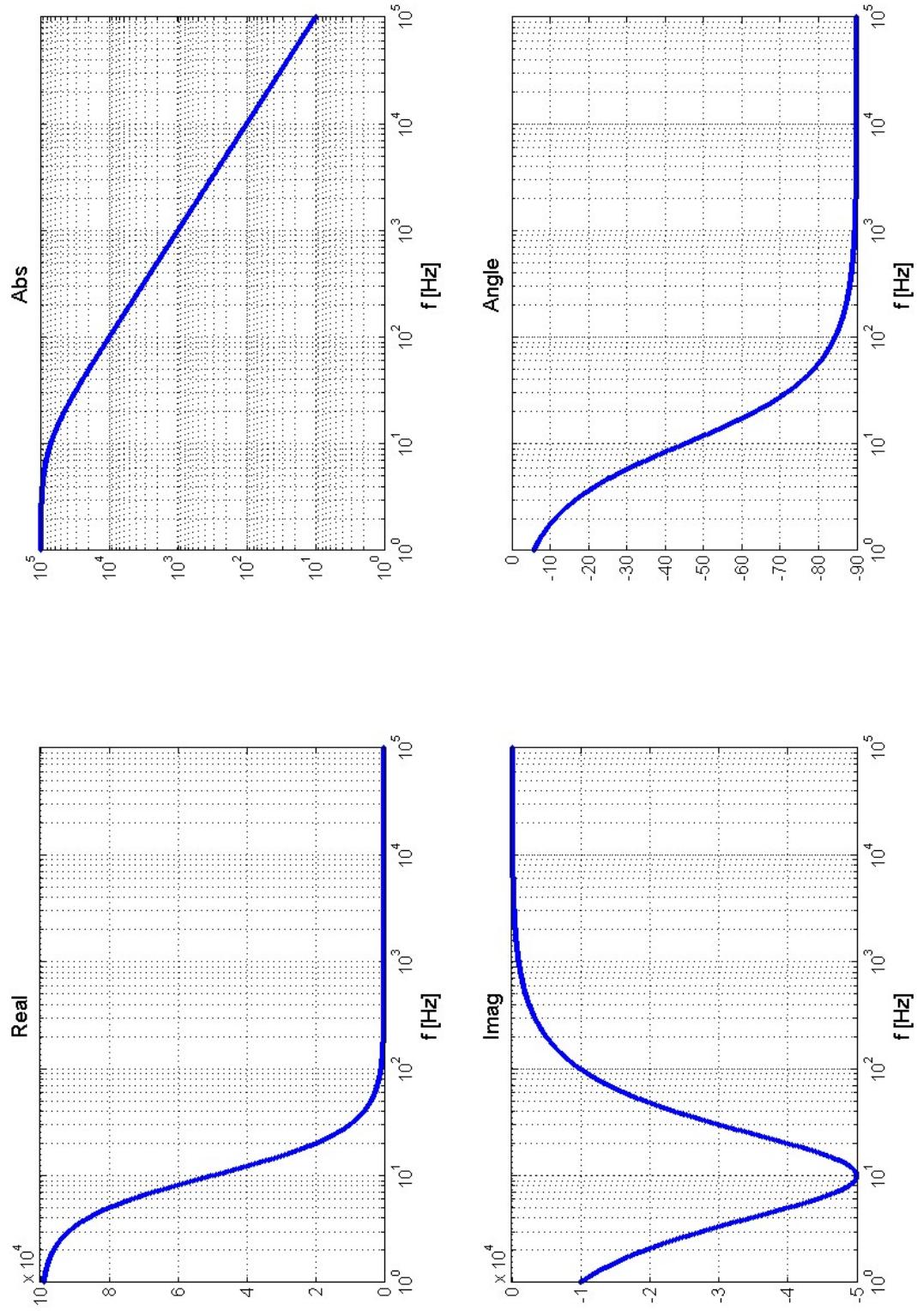
T=1/(2*pi*f3dB);
K=K0./(j*2*pi*f*T+1);

% KONIEC;
```

```
...  
f=logspace(0,5,1000);  
w=2*pi*f; s=j*w;  
  
K=op_amp_f(f,1e5,10);  
...
```

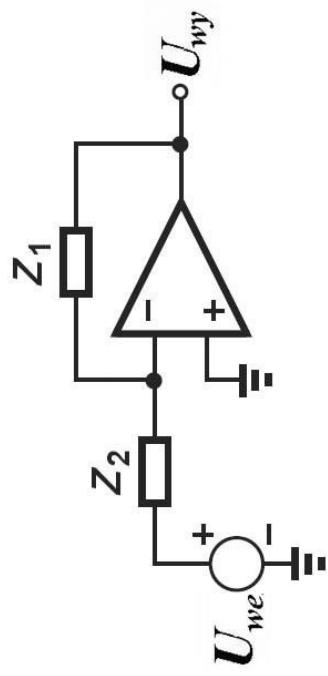
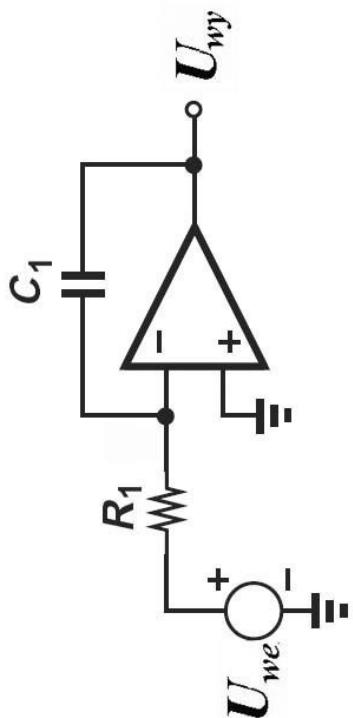
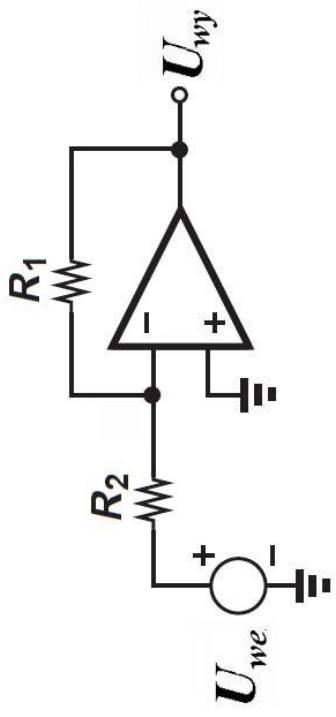
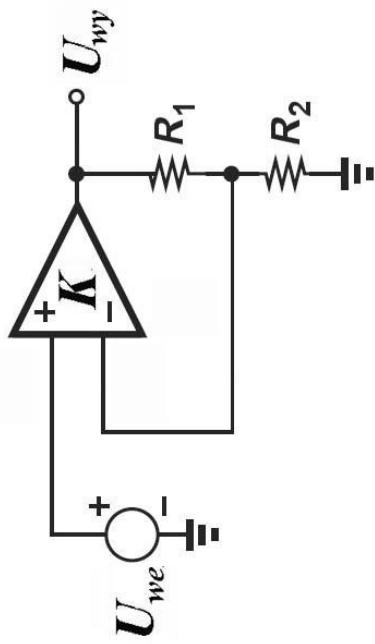
Wzmacniacz operacyjny – analiza częstotliwościowa (cd.)

Otrzymane charakterystyki częstotliwościowe wzmacniacza operacyjnego



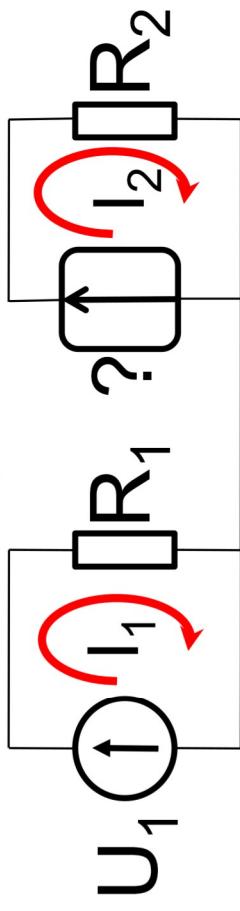
Wzmacniacz operacyjny – analiza częstotliwościowa (cd.)

Układy ze wzmacniaczem operacyjnym



Uwaga – nie zawsze jest konieczność tworzenia odpowiednich macierzy i stosowania np. metody oczkowej... można „od razu” (jak dla czwórnika RC).

Liniowe układy ze źródłami sterowanymi Przykłady (metoda oczkowa)



Cztery możliwości:

$$U_2 = K \cdot U_1$$

$$A = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ -K \cdot R_1 & R_2 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = K \cdot U_1$$

$$A = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ -K \cdot R_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = K \cdot I_1$$

$$A = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ -K & R_2 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = K \cdot I_1$$

$$A = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ -K & 1 \end{bmatrix}$$

A co by było,
gdyby zamiast
rezystancji były
impedancje? ...
albo gdyby K
było funkcją np.
częstotliwości?

Ogólny opis układu:

$$A \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Przykład: ładunek w centralnym polu elektrycznym

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^3} \cdot \mathbf{r}$$

Zadanie do rozwiązań:

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

**Czyli mamy tu nieliniową
zależność \mathbf{F} od \mathbf{r} !**

... ale to jest równanie drugiego rzędu!

$$\mathbf{v}' = \mathbf{r}''$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

Dlatego robimy tak:

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{v} \\ \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{m} \end{cases} \quad \begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \\ r_z(t) \end{bmatrix} & \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) &= \begin{bmatrix} r_x(t_0) \\ r_y(t_0) \\ r_z(t_0) \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}(t) &= \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix} & \mathbf{v}_x(t_0) &= \begin{bmatrix} v_x(t_0) \\ v_y(t_0) \\ v_z(t_0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Przykład: iadunek w centralnym polu elektrycznym (cd.)

```
.....
E0=8.85e-12; k=1/(4*pi*E0);
q=-1.6e-19; me=9.109e-31;
Q=-q;
C=[0; 0; 0];
```

```
rp=0.3e-10; vp=1.4e6; % wartosci poczatkowe dla r oraz v;
x0=[rp; rp; rp; -vp; vp; -vp];
tmax=3e-16; h=tmax/1000; t=0:h:tmax;
```

Opcje=odeset('AbsTol',10^(-12),'RelTol',10^(-9));

```
[tx,x]=ode45(@fq, t, x0, Opcje, C, Q, q, me, k);
x=x./';
....
```

function dx=fq(t, x, C, Q, q, mq, k);

```
rx=x(1)-C(1);
ry=x(2)-C(2);
rz=x(3)-C(3);
r=[rx; ry; rz];
```

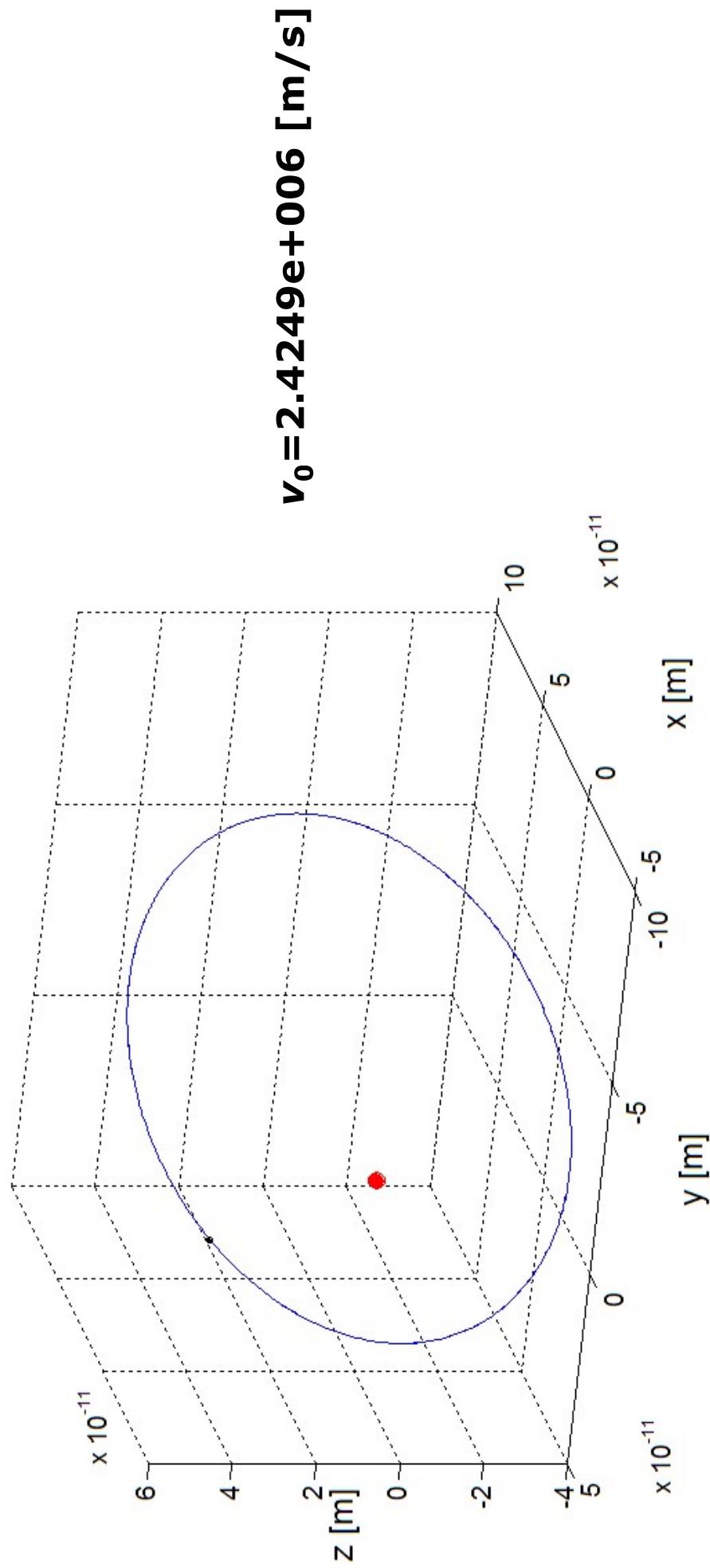
```
Fx=k*q*Q/(norm(r)^3)*rx;
Fy=k*q*Q/(norm(r)^3)*ry;
Fz=k*q*Q/(norm(r)^3)*rz;
F=[Fx; Fy; Fz];
```

dx(1:3,1)=x(4:6); dx(4:6,1)=F/mq;

$$F = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^3} \cdot r$$

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{v} \\ \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{m} \end{cases}$$

Przykład: ładunek w centralnym polu elektrycznym (cd.)



I jeszcze raz o pojemności i indukcyjności (dodatek dla dociekliwych)

$$C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = i_C(t)$$

$$L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = u_L(t)$$

Załóżmy, że napięcie na elemencie jest kosinusoidalne z określona amplitudą i fazą:

$$u(t) = A_u \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_u)$$

$$u(t) = A_u \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_u)$$

... wtedy prąd pojemności musi być opisany zależnością:

$$i_C(t) = -C \cdot \omega_0 \cdot A_u \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_u) = C \cdot \omega_0 \cdot A_u \cdot \sin(-\omega_0 \cdot t - \varphi_u)$$

czyli:

$$i_C(t) = C \cdot \omega_0 \cdot A_u \cdot \cos(-\omega_0 \cdot t - \varphi_u - \pi/2) = C \cdot \omega_0 \cdot A_u \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_u + \pi/2)$$

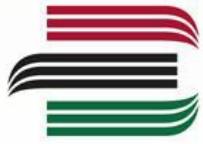
... natomiast prąd indukcyjności:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_{t_0}^t u_L(\tau) d\tau + i_L(t_0)$$

...nie ma w analizie kosinusoidalnych stanów ustalonych składowej stałej (dc).

czyli:

$$i_L(t) = \frac{1}{L \cdot \omega_0} \cdot A_u \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_u - \pi/2)$$



Impedancja zespolona w analizie kosinusoidalnych stanów ustalonych

Zatem napięcie kosinusoidalne na elemencie:

$$u(t) = A_u \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_u)$$

Daje prąd także kosinusodialny,
ale o zmienionej amplitudzie i fazie:

$$i_C(t) = \omega_0 \cdot C \cdot A_u \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_u + \pi/2)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{\omega_0 \cdot L} \cdot A_u \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_u - \pi/2)$$

Amplitudę i fazę (oraz ich zmiany) można także zapisać używając liczb zespolonych:

$$U(\omega_0) = A_u \cdot e^{j \cdot \varphi_u}$$

$$C \quad \quad \quad L$$

$$I_C(\omega_0) = \omega_0 \cdot C \cdot A_u \cdot e^{j \cdot (\varphi_u + \pi/2)}$$

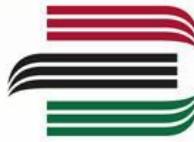
$$I_C(\omega_0) = \omega_0 \cdot C \cdot e^{j \cdot \pi/2} \cdot U(\omega_0)$$

$$I_L(\omega_0) = \frac{1}{\omega_0 \cdot L} \cdot A_u \cdot e^{j \cdot (\varphi_u - \pi/2)}$$

$$I_L(\omega_0) = \frac{1}{\omega_0 \cdot L} \cdot e^{-j \cdot \pi/2} \cdot U(\omega_0)$$

$$Z_C(\omega_0) = \frac{U(\omega_0)}{I_C(\omega_0)} = \frac{1}{j \cdot \omega_0 \cdot C}$$

$$Z_L(\omega_0) = \frac{U(\omega_0)}{I_L(\omega_0)} = j \cdot \omega_0 \cdot L$$



AGH

Impedancja zespolona w analizie kosinusoidalnych stanów ustalonych

$$Z_C(\omega_0) = \frac{1}{j \cdot \omega_0 \cdot C}$$

$$Z_L(\omega_0) = j \cdot \omega_0 \cdot L$$

$$Z_R = \frac{U(\omega_0)}{I_R(\omega_0)} = R$$

Wprowadzając zmienną Laplace'a, s :

$$s = j \cdot \omega_0$$

Mögemy te impedancje zapisać tak:

$$Z_C(s) = \frac{1}{s \cdot C} \quad Z_L(s) = s \cdot L$$

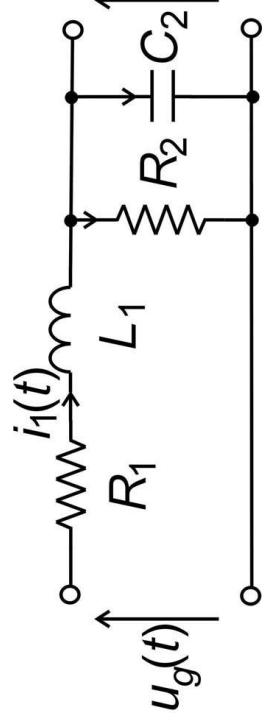
... i wtedy możemy łatwo zapisywać impedancje następujące złożonych układów, przykładowo :

$$Z_{szer(R,L)}(s) = R + s \cdot L$$

$$Z_{rownol(R,C)}(s) = \frac{R \cdot \frac{1}{s \cdot C}}{R + \frac{1}{s \cdot C}} = \frac{R}{s \cdot C \cdot R + 1}$$

Dzięki temu możemy łatwo wyznaczać zmiany amplitudy i fazę sygnałów harmonicznych w układach liniowych (ale nie tylko...).

Przykład



$$\begin{aligned}
 & \frac{R_2 \cdot \frac{1}{s \cdot C_2}}{R_2 + \frac{1}{s \cdot C_2}} = \dots \\
 & Z(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{s \cdot C_2}}{R_1 + s \cdot L_1 + \frac{1}{s \cdot C_2}} = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{s \cdot C_2}}{R_2 + \frac{1}{s \cdot C_2}}
 \end{aligned}$$

$$u_g(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

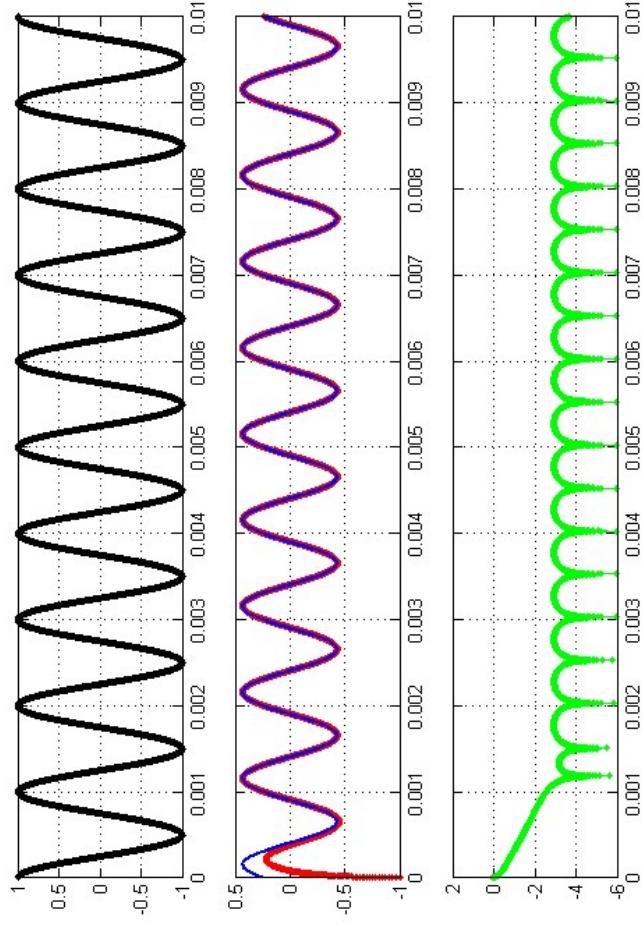
Czyli $U_g(s)$ z modułem 1 i fazą 0.

$u_2(t)$ jako numeryczne rozwiązańie układu równań różniczkowych (dla tego: $u_{2A}(t)$)

$$u_2(t) = |Z| \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi(Z))$$

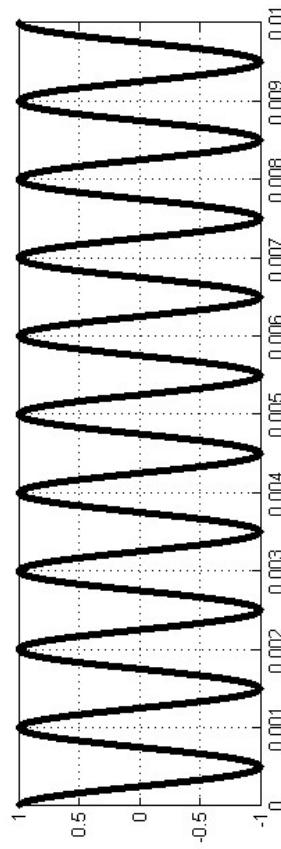
(rozwiązań opisana metodą: $u_{2B}(t)$)

$$err(t) = \log_{10}(|u_{2A}(t) - u_{2B}(t)|)$$

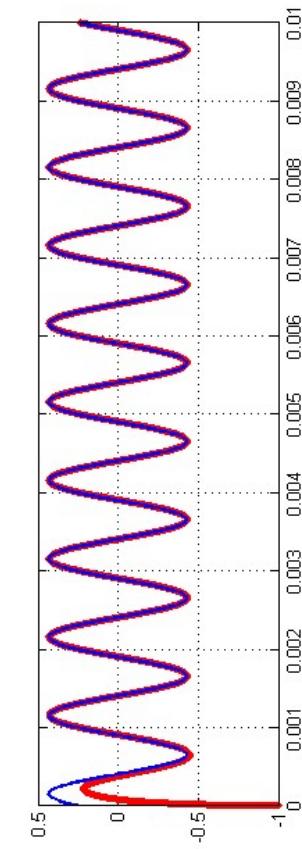


Przykład (cd.)

Wynik zmniejszenia w metodzie Eulera h z $1e-6$ do $1e-7$:



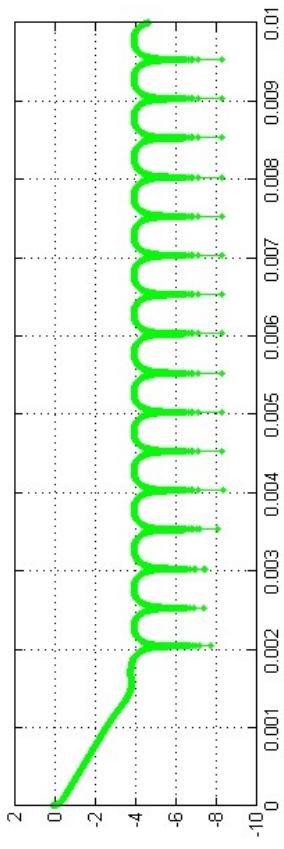
$$u_g(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$



$u_2(t)$ jako rozwiązanie układu równań różniczkowych (dla tego oznaczone: $u_{2A}(t)$)

$$u_2(t) = |Z| \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi(Z))$$

(rozwiązań opisanych metodą: $u_{2B}(t)$)



$$err(t) = \log_{10}(|u_{2A}(t) - u_{2B}(t)|)$$

Zapraszam do laboratorium ...