Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie

Teoria sygnałów

Wykład 2

Dr inż. Przemysław Korohoda
Instytut Elektroniki, AGH, Kraków

home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2

UPEL: TS 2022

Plan wykładu

1. Wprowadzenie do teorii sygnałów.
2. Sygnał kosinusoidalny.
3. Przekształcanie sygnałów.
4. Sygnał schodkowy.
5. Sygnały zespolone – sygnał harmoniczny.
6. Wykresy sygnałów zespolonych.

Pytanie podstawowe

Co to jest sygnał?

… i po co się nim zajmować?

Przykłady sygnałów

Zmieniające się w czasie ciśnienie powietrza w określonym punkcie przestrzeni (sygnał akustyczny).

Wartość temperatury ciała pacjenta w czasie również stanowi przykład sygnału.

Wartość napięcia w danym punkcie przewodu (elektryczny sygnał telekomunikacyjny).

Wartość natężenia pola elektrycznego w danym punkcie przestrzeni (elektromagnetyczny sygnał telekomunikacyjny).

Wybrane kategorie sygnałów: codzienne (mowa, orientacja w przestrzeni itd.), rozrywkowe, telekomunikacyjne, medyczne, geofizyczne, astrofizyczne, wojskowe itd., itp.

Przetwarzanie sygnałów polega na…

dostosowaniu do potrzeb użytkownika – człowieka lub „maszyny”.

Przykłady:

1) usuwanie (redukcja) zakłócenia lub szumu,

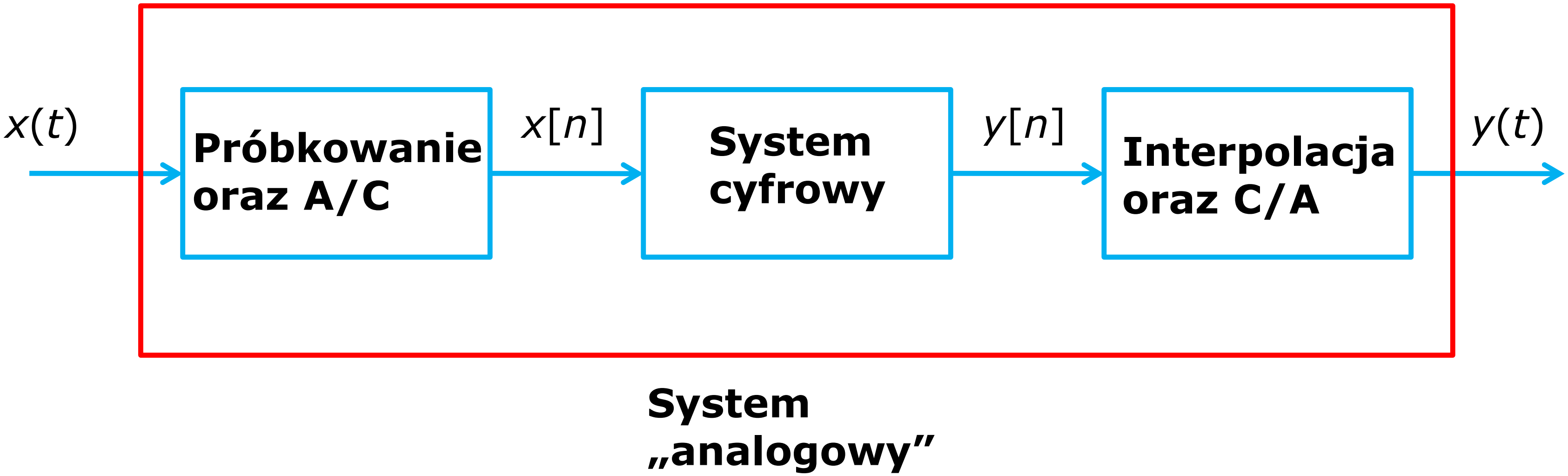
2) kodowanie/dekodowanie w celu efektywnej archiwizacji lub przesyłania,

3) kodowanie/dekodowanie w celu zapewnienia tajemnicy,

4) wydobywanie ukrytej informacji – np. pomiarowej, diagnostycznej,

itd.

Sygnały analogowe i cyfrowe oraz ich przetwarzanie



Po to by przetwarzać świadomie i celowo musimy znać...

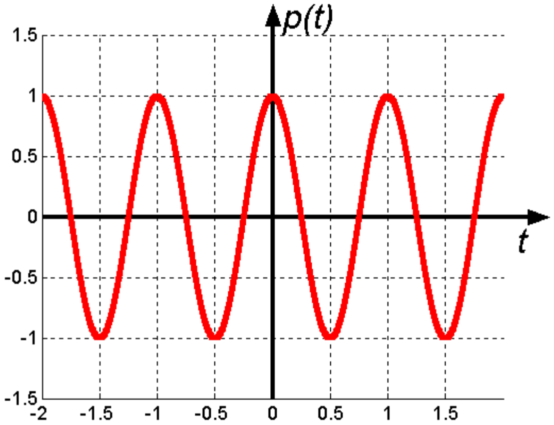
...teorię sygnałów

Matematyczny model sygnału

Przykładowo:

Zmieniające się w czasie ciśnienie powietrza w określonym punkcie przestrzeni (sygnał akustyczny) może być opisane jako funkcja czasu:

$$p(t) = p_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$



Często opis danego zjawiska w postaci matematycznego modelu prowadzi do interpretacji tego modelu jako sygnału.

Sygnały analogowe

Sygnały na dziedzinie ciągłej, przyjmujące dowolne wartości (zazwyczaj rzeczywiste)

przykładowe oznaczenia:

$$x(t),\quad s(t),\quad y(t),\quad h(t),\quad x_1(t),\quad y_{1,2}(t),\quad h(\tau),\quad y_A(\tau)$$

dziedzina ciągła – np. czas: *t*, *τ*;

... lub płaszczyzna: (q,μ)

Wymiary sygnału

Sygnał jednowymiarowy (ze względu na dziedzinę)
np. sygnał akustyczny (monofoniczny):

$$x(t), \quad s(t)$$

Sygnał dwuwymiarowy (ze względu na dziedzinę)
np. obraz ciągły (monochromatyczny):

$$P(q, \mu)$$

lub wysokość powierzchni nad poziomem morza w zależności od położenia;

Sygnał trójwymiarowy (ze względu na dziedzinę)
np. zmieniający się w czasie obraz ciągły (monochromatyczny):
lub gęstość materii w przestrzeni kosmicznej w otoczeniu gwiazdy, ciśnienie powietrza/wilgotność w atmosferze nad powierzchnią Ziemi.

$$V(q, \mu, t)$$

Wymiary sygnału

Sygnały wektorowe (składowe-komponenty powiązane przez dziedzinę)

np. akustyczny sygnał stereofoniczny:

$$x_{LR}(t) = \begin{bmatrix} x_L(t) \\ x_R(t) \end{bmatrix}$$

Sygnał x_{LR} jest jednowymiarowy ze względu na dziedzinę, a dwuwymiarowy ze względu na liczbę komponentów.

barwny sygnał wideo:

$$V_{RGB}(q,\mu,t) = \begin{bmatrix} V_R(q,\mu,t) \\ V_G(q,\mu,t) \\ V_B(q,\mu,t) \end{bmatrix}$$

Sygnał V_{RGB} jest trójwymiarowy ze względu na dziedzinę i trójwymiarowy ze względu na liczbę komponentów (*R*,G,*B*)

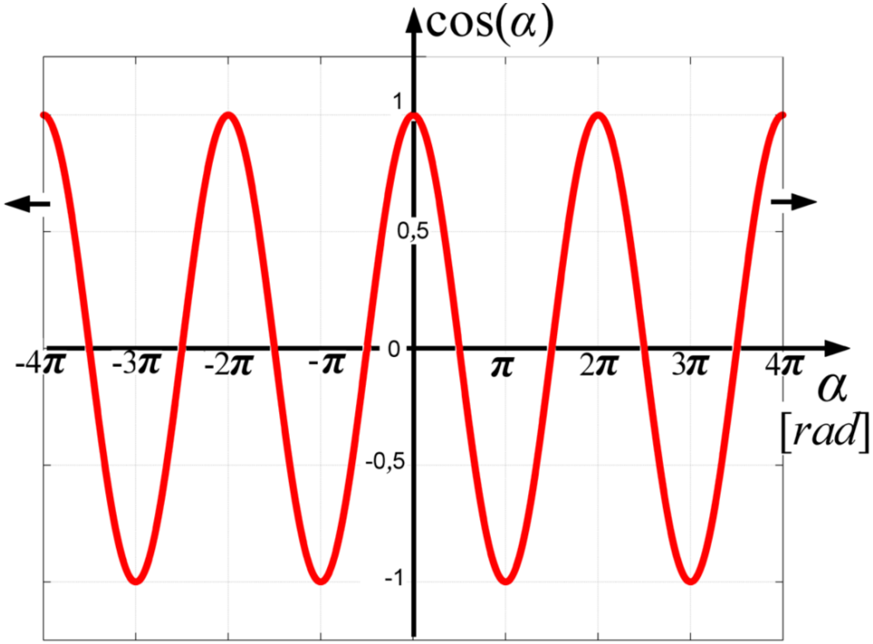
Analogowy sygnał audio-wideo

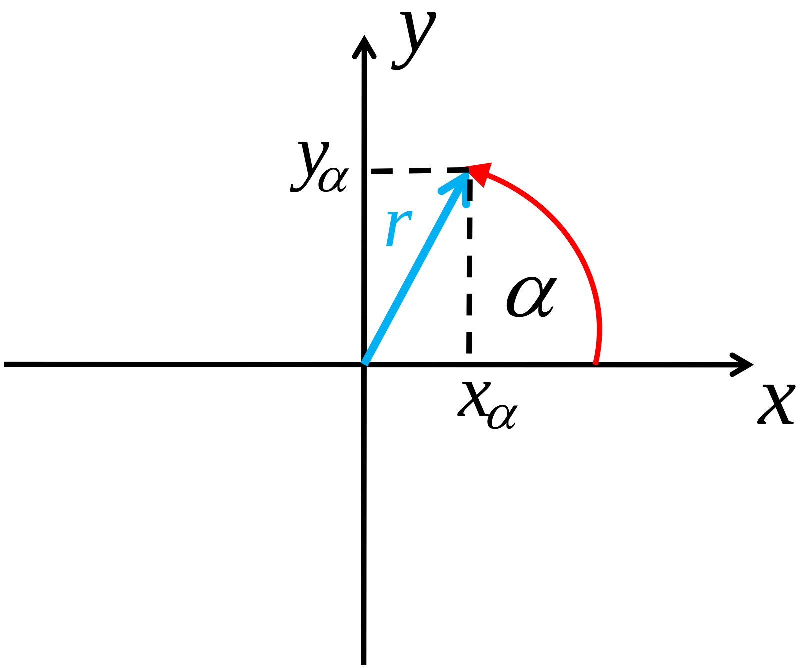
Sygnał $AV_{LR,RGB}$ jest *multimedialny* (dwa wymiary medialne: audio-wideo).

Oba media są powiązane przez dziedzinę czasu, ale każdy z tych sygnałów ma inny wymiar dziedziny i inny wymiar wartości sygnału:

$$AV_{LR,RGB}(q,\mu,t) = \begin{bmatrix} V_{RGB}(q,\mu,t) \\ x_{LR}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R(q,\mu,t) \\ V_G(q,\mu,t) \\ V_B(q,\mu,t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_L(t) \\ x_R(t) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

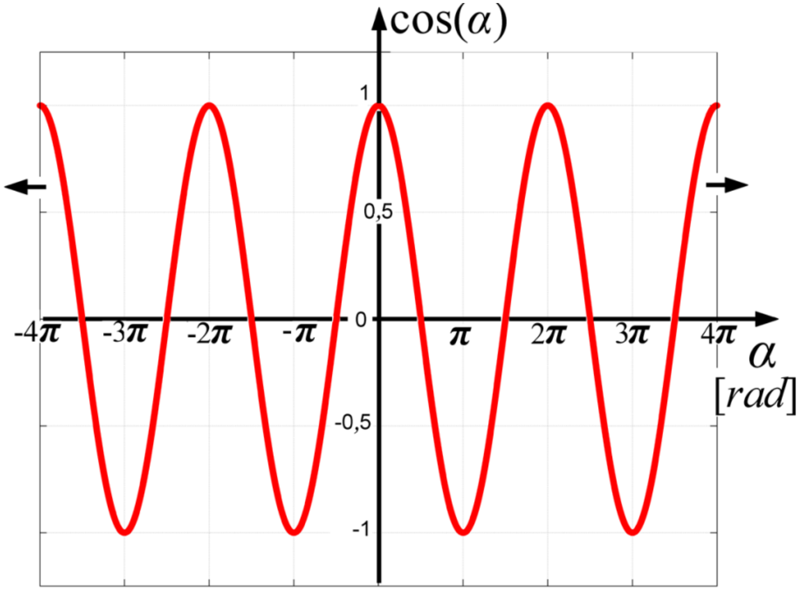


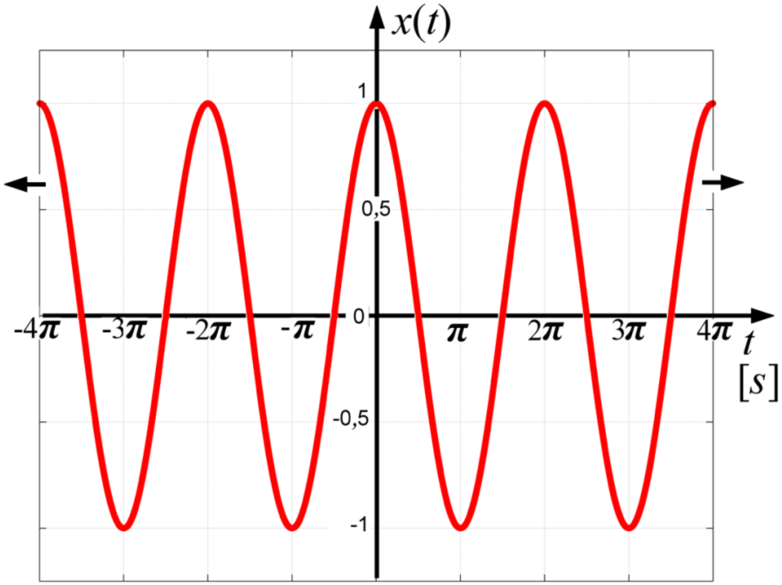


$$\cos(\alpha) = \cos\alpha$$

$$\alpha \in \Re$$

Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny





$$\cos(\alpha) = \cos\alpha$$

$$\alpha \in \Re$$

$$x(t) = \cos(t) = \cos(1 \cdot t)$$

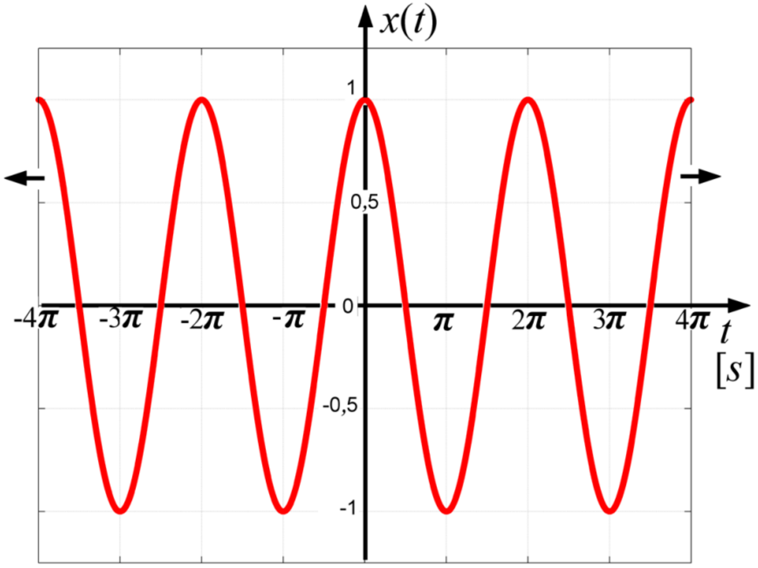
$$t \in \Re$$

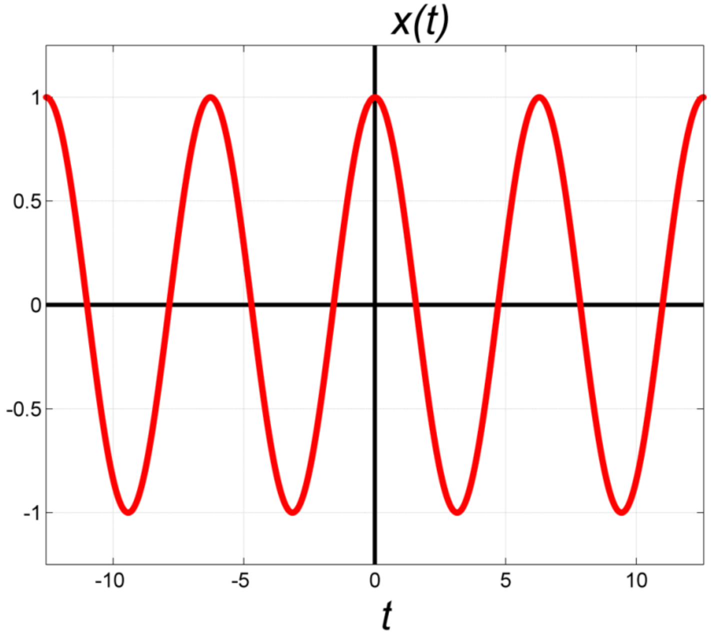
$$1 = 1\left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$t = t\,[s]$$

Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

Okres kosinusoidy





wykres dopracowany

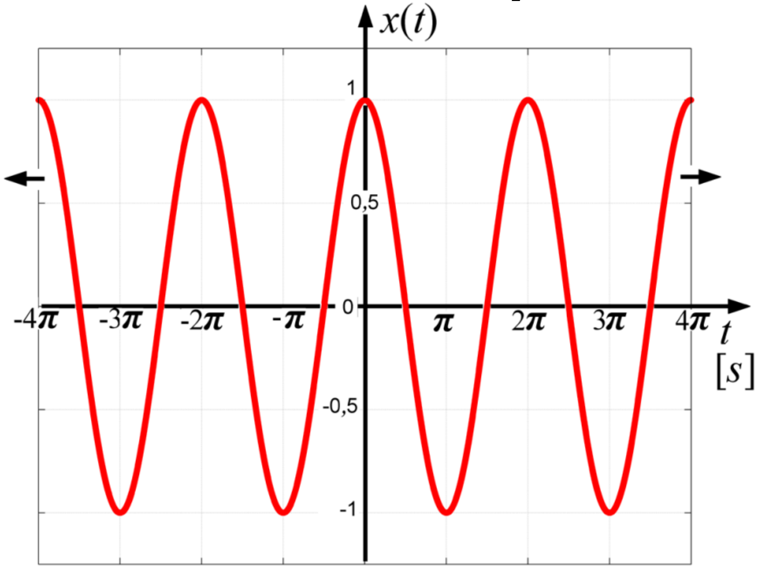
wykres w wersji „szybkiej”

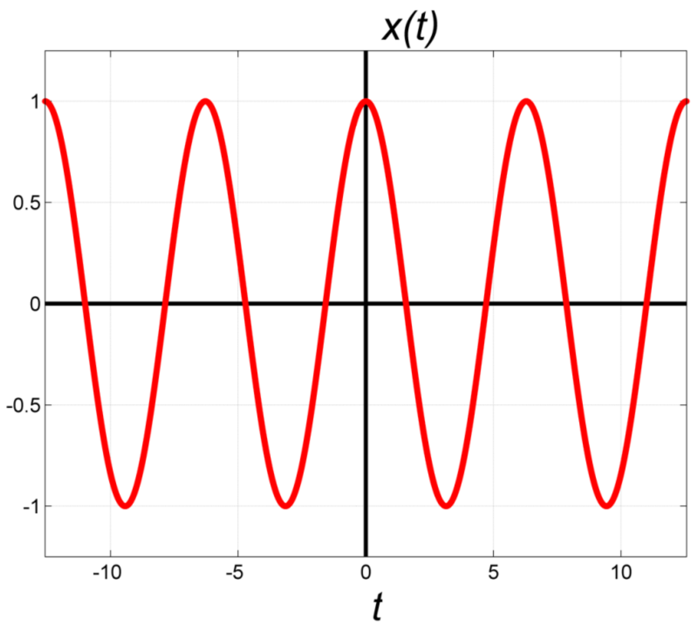
$$x(t) = \cos(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot t\right) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T} \cdot t\right)$$

$$t \in \Re$$

Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

Częstotliwość kosinusoidy





$$x(t) = \cos(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T} \cdot t\right) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$$

$$t \in \Re$$

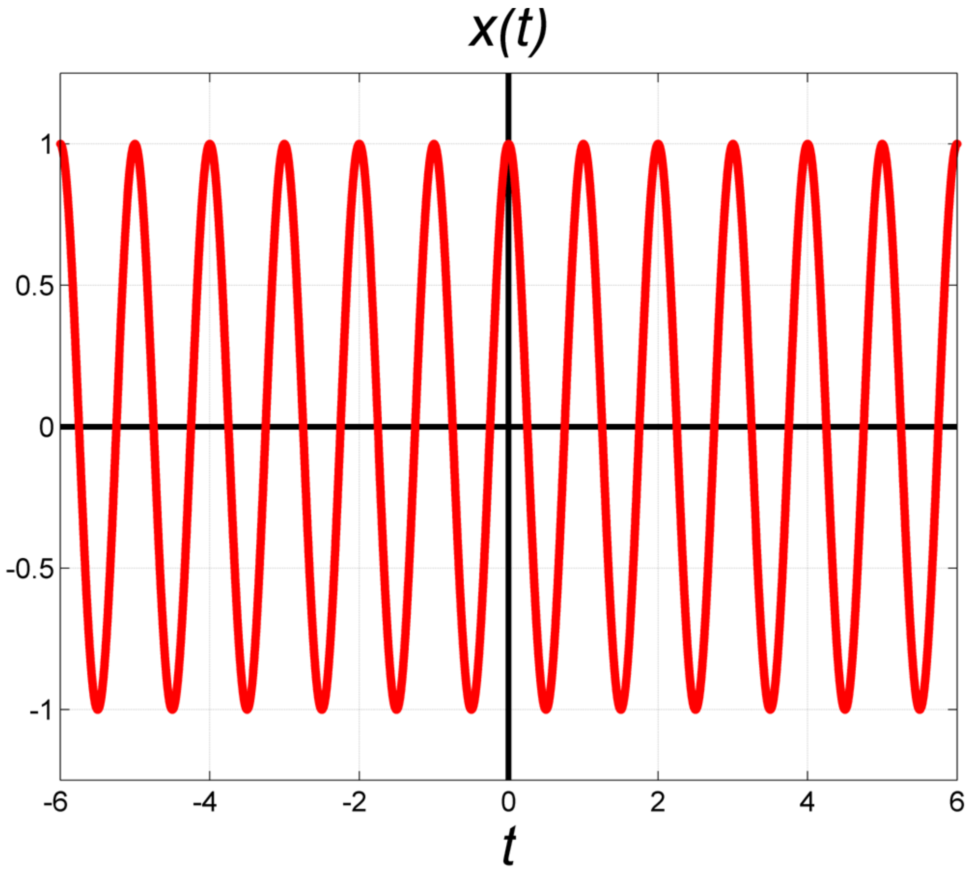
$$T = 2 \cdot \pi [s] \cong 6{,}28\ s \cong 6{,}3\ s$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} [Hz] \cong \frac{1}{6{,}3}\ Hz \cong 0{,}16\ Hz$$

Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

Okres i częstotliwość kosinusoidy - kolejny przykład



$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot t)$$

$$t \in \Re$$

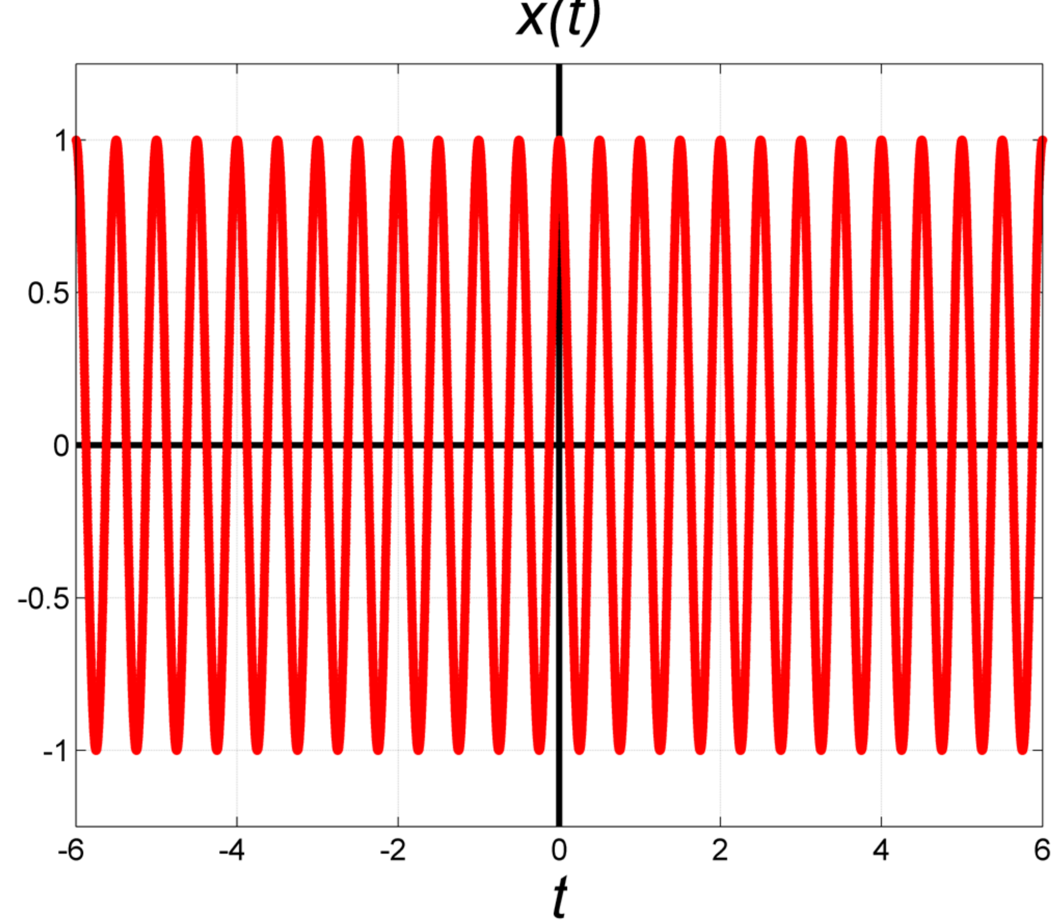
$$T = 1\, s$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$f = 1\, Hz$$

Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

Okres i częstotliwość kosinusoidy - kolejny przykład

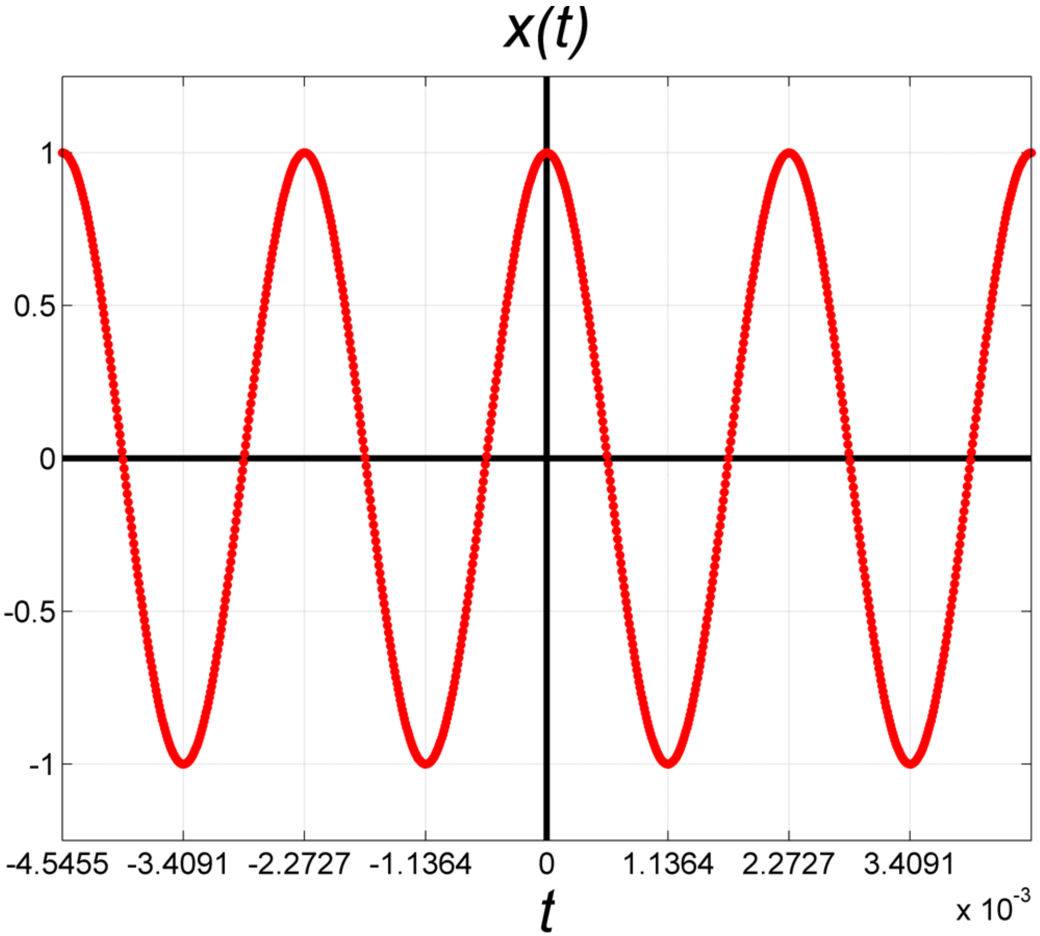


$$x(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot t\right)$$
$$t \in \Re$$

$$T = 0{,}5\ s$$
$$f = \frac{1}{T}$$
$$f = 2\ Hz$$

Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

Okres i częstotliwość kosinusoidy - kolejny przykład



$$x(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 440 \cdot t\right)$$

$$t \in \Re$$

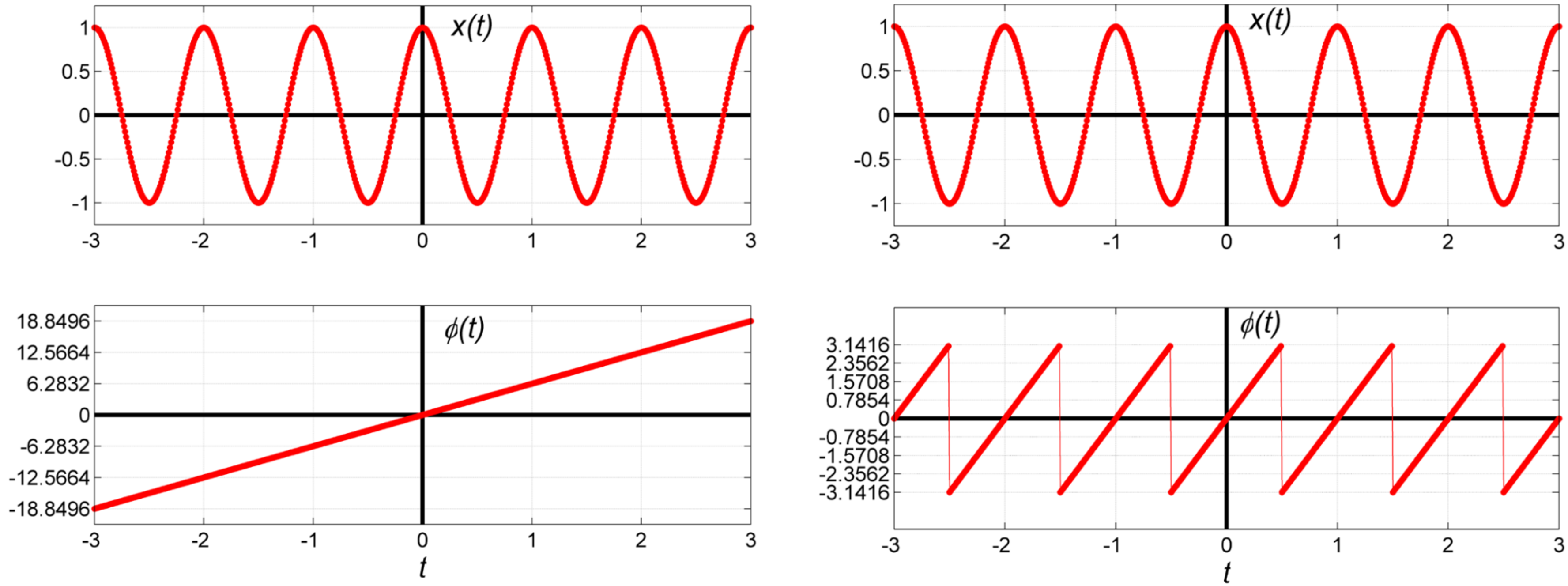
$$T = \frac{1}{440} s \cong 2{,}3 ms$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$f = 440\ Hz = 0{,}44\ kHz$$

Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

Funkcja fazy



$$x(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t\right)$$

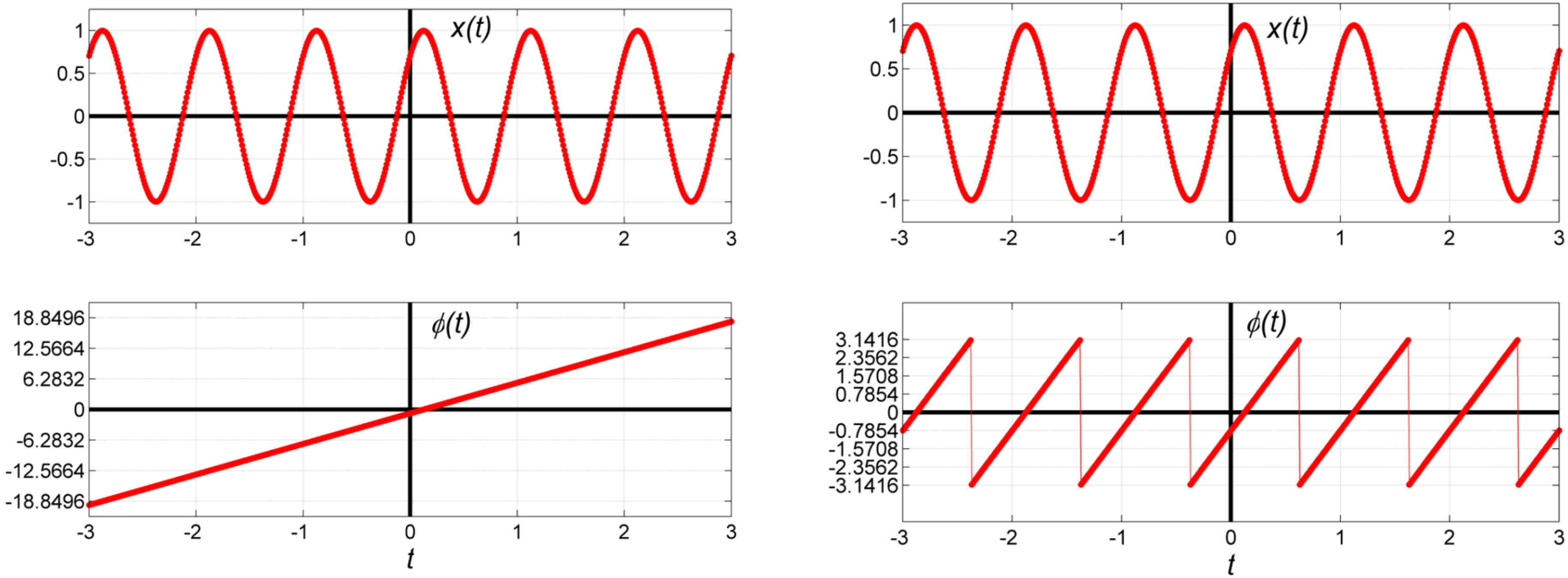
$$t \in \Re$$

$$x(t) = \cos\left(\varphi(t)\right)$$

$$\varphi(t) = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t = \left\{ a = 2 \cdot \pi \cdot f \right\} = a \cdot t \ \ [rad]$$

Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

Faza początkowa

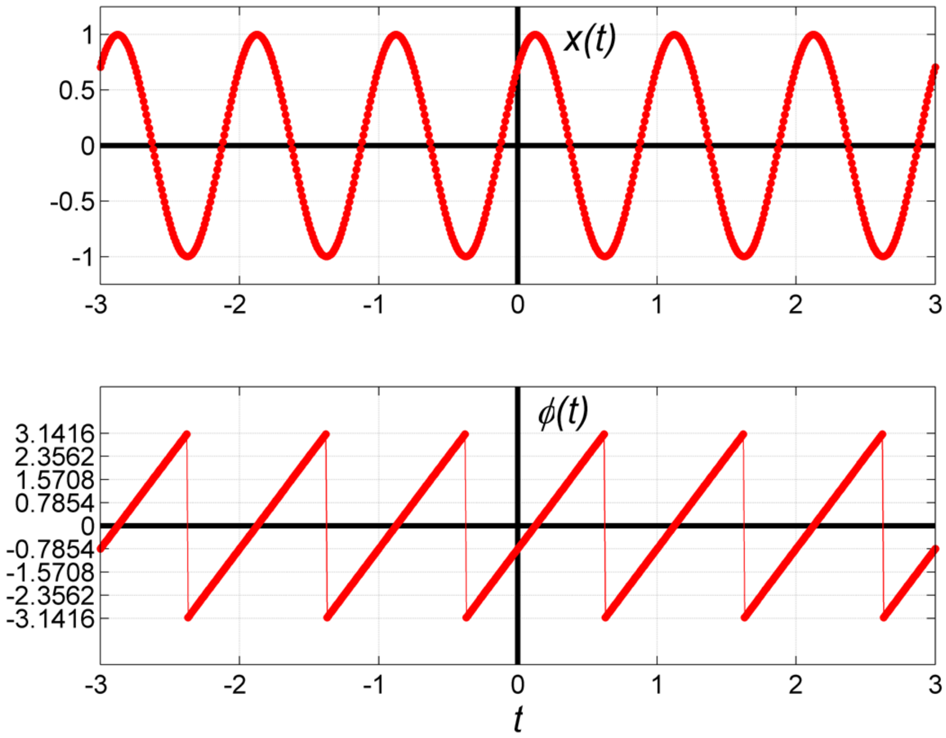


$$x(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\varphi(t) = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \frac{\pi}{4} = \left\{ \begin{matrix} a = 2 \cdot \pi \cdot f \\ b = -\frac{\pi}{4} \end{matrix} \right\} = a \cdot t + b \;\; [rad]$$

Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

Przesunięcie (opóźnienie) w dziedzinie czasu



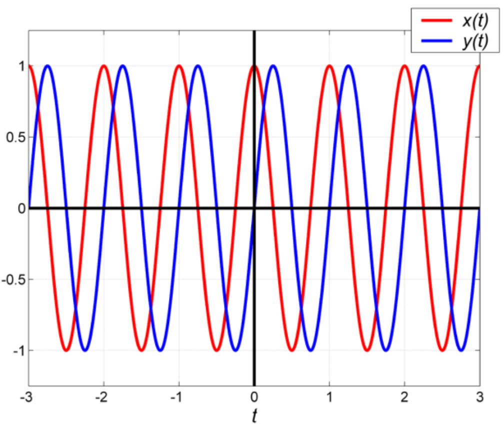
$$x(t) = \cos\left(2\cdot\pi\cdot f\cdot t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(2\cdot\pi\cdot f\cdot t - \varphi_0) =$$

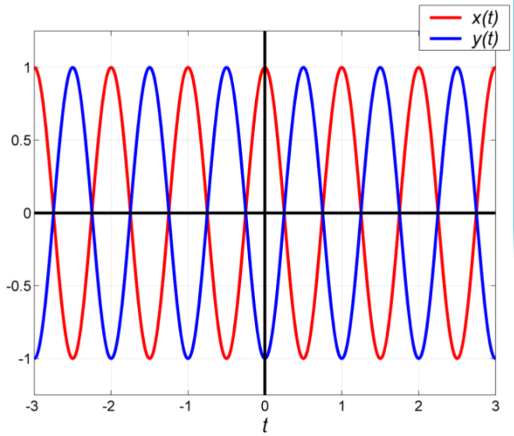
$$= \cos(2\cdot\pi\cdot f\cdot(t - t_0))$$

$$t_0 = \frac{\varphi_0}{2\cdot\pi\cdot f} = \left\{\begin{matrix} w\, tym \\ przypadku \end{matrix}\right\} = \frac{1}{8}\, s$$

Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

Kosinus i sinus – wzajemne zależności





$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$$

$$y(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$$

$$y(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \pi) = -\cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$$

$$itd.$$

Kosinus i sinus – ważne wartości

$$\cos(0\ rad) = \cos(0^\circ) = 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\ rad\right) = \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}87$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\ rad\right) = \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}71$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\ rad\right) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\ rad\right) = \cos(90^\circ) = 0$$

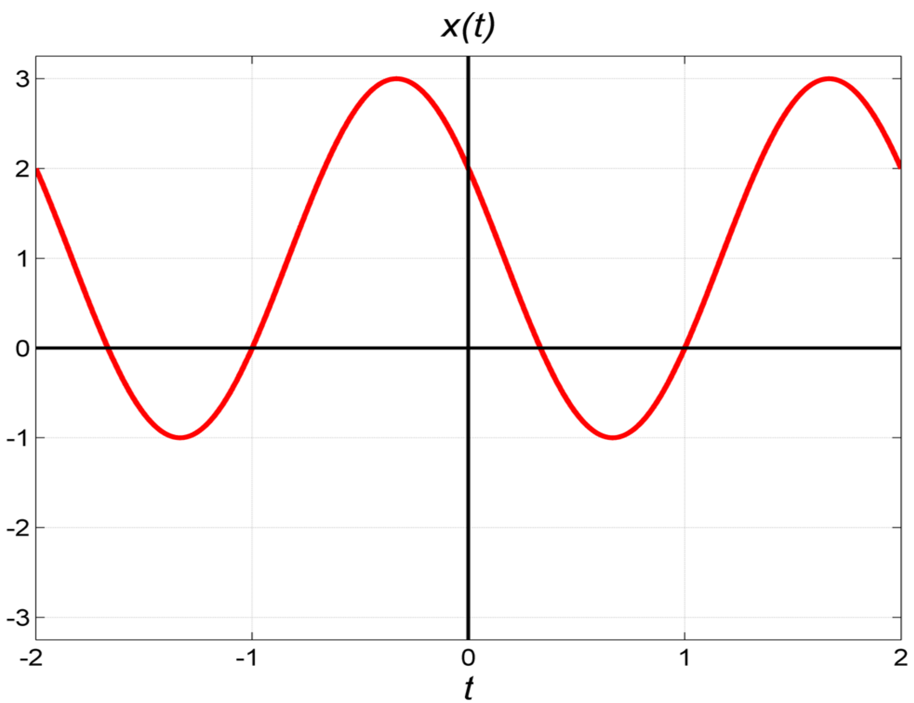
plus: parzystość/nieparzystość, symetrie wykresu, okresowość

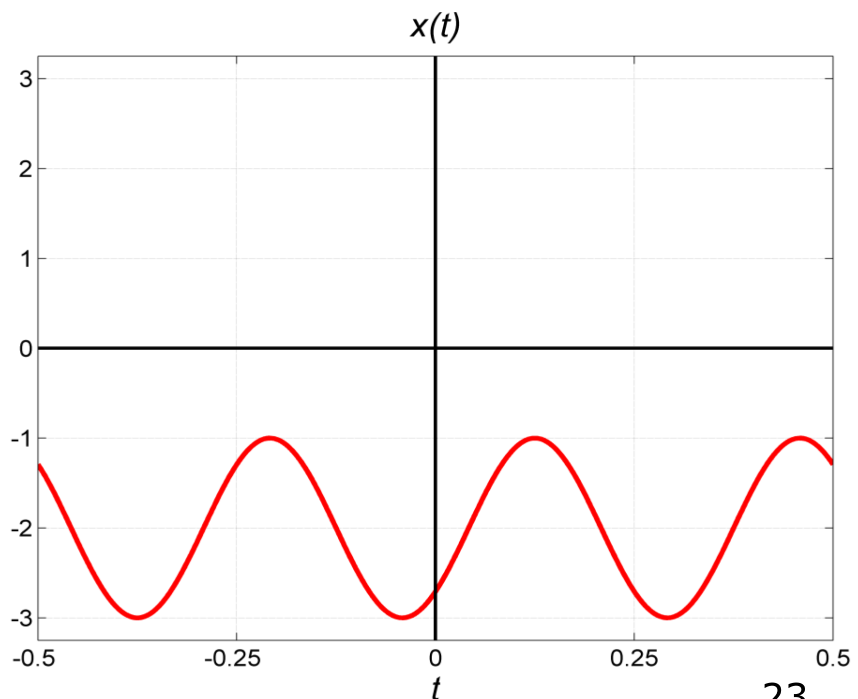
Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

Amplituda i składowa stała

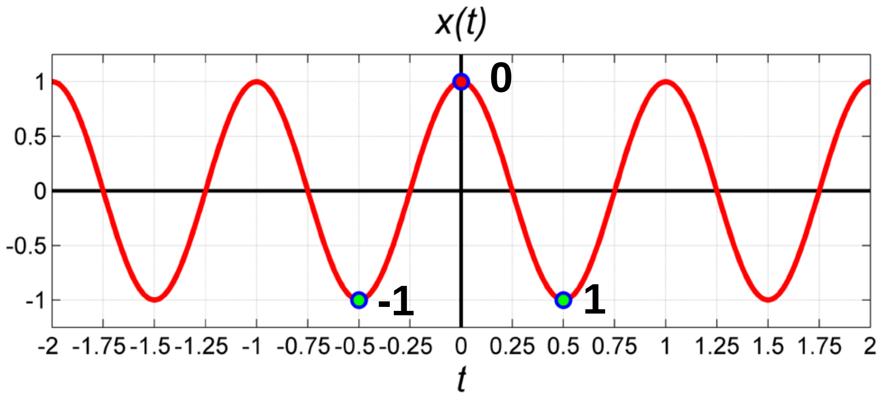
$$x(t) = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \varphi) + B = A \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + B = A \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) + B$$

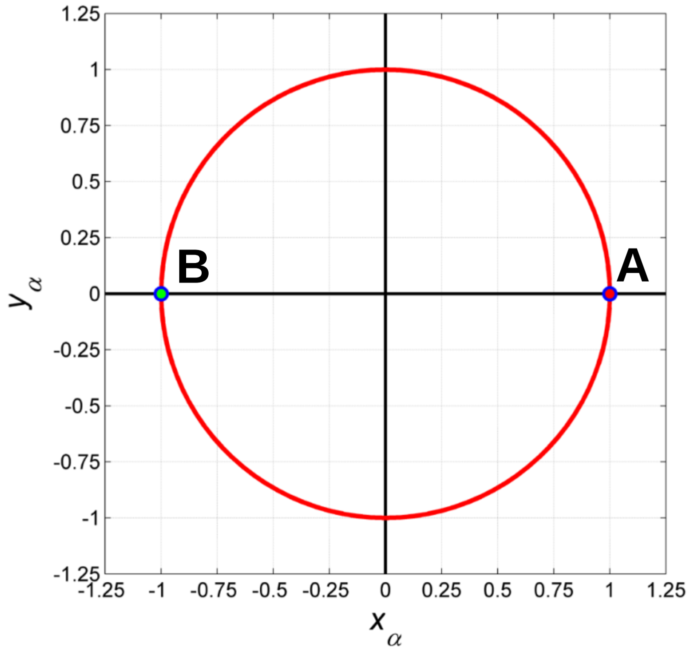
Rysowanie wykresów oraz odczytywanie parametrów sygnału z wykresu:





Wartości sygnału kosinusoidalnego w wybranych punktach





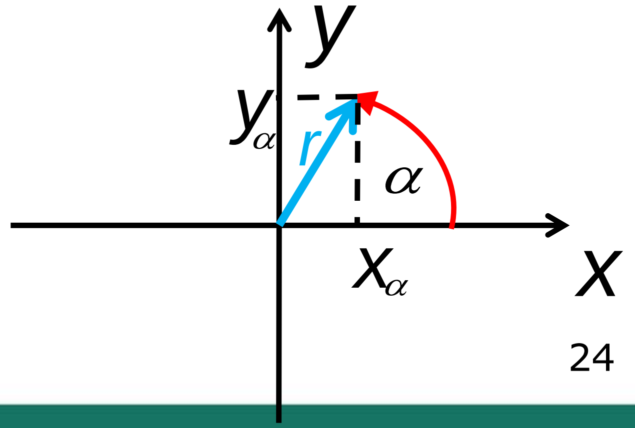
$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot t)$$

$$n \in \{-1, 0, 1\} \quad \Leftrightarrow \quad n = -1, 0, 1$$

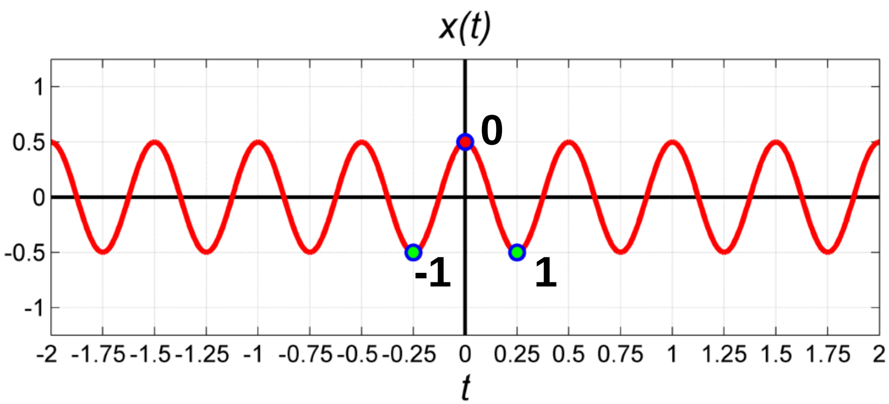
$$t_n \in \{-1/2\,,\,0\,,\,1/2\}$$

$$\varphi_n \in \{0\,,\,\pm\pi\}$$

$$x(t_n) \in \{-1\,,\,1\}$$



Wartości sygnału kosinusoidalnego w wybranych punktach



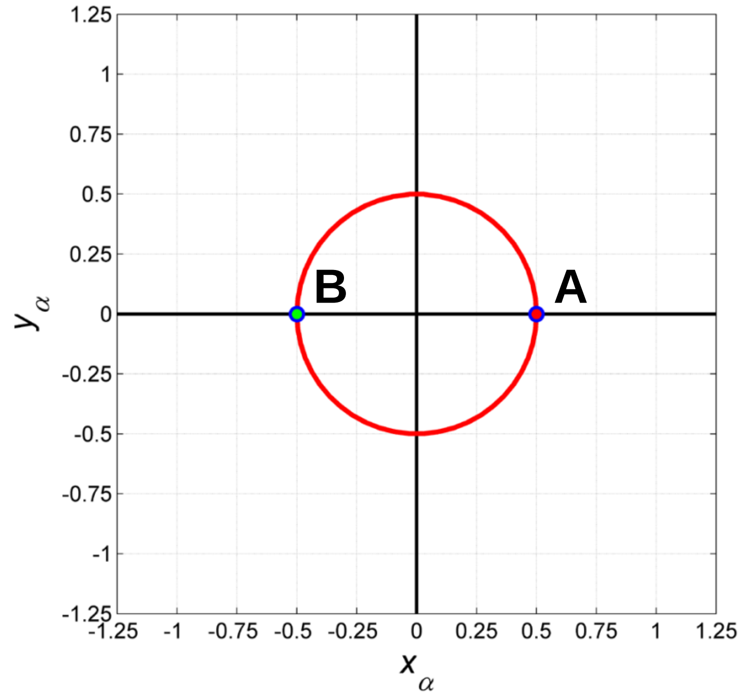
$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot t\right)$$

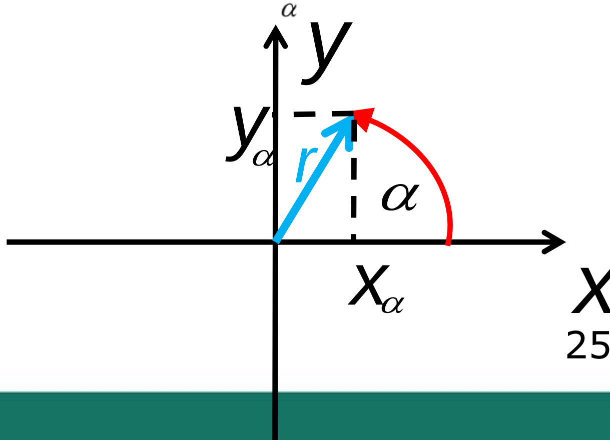
$$n \in \{-1, 0, 1\} \quad \Leftrightarrow \quad n = -1, 0, 1$$

$$t_n \in \{-1/4\,, 0\,, 1/4\}$$

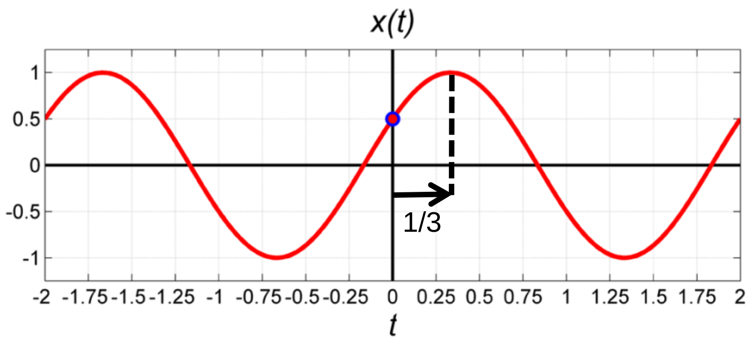
$$\varphi_n \in \{0\,, \pm\pi\}$$

$$x(t_n) \in \{-1/2\,, 1/2\}$$





Wartości sygnału kosinusoidalnego w wybranych punktach

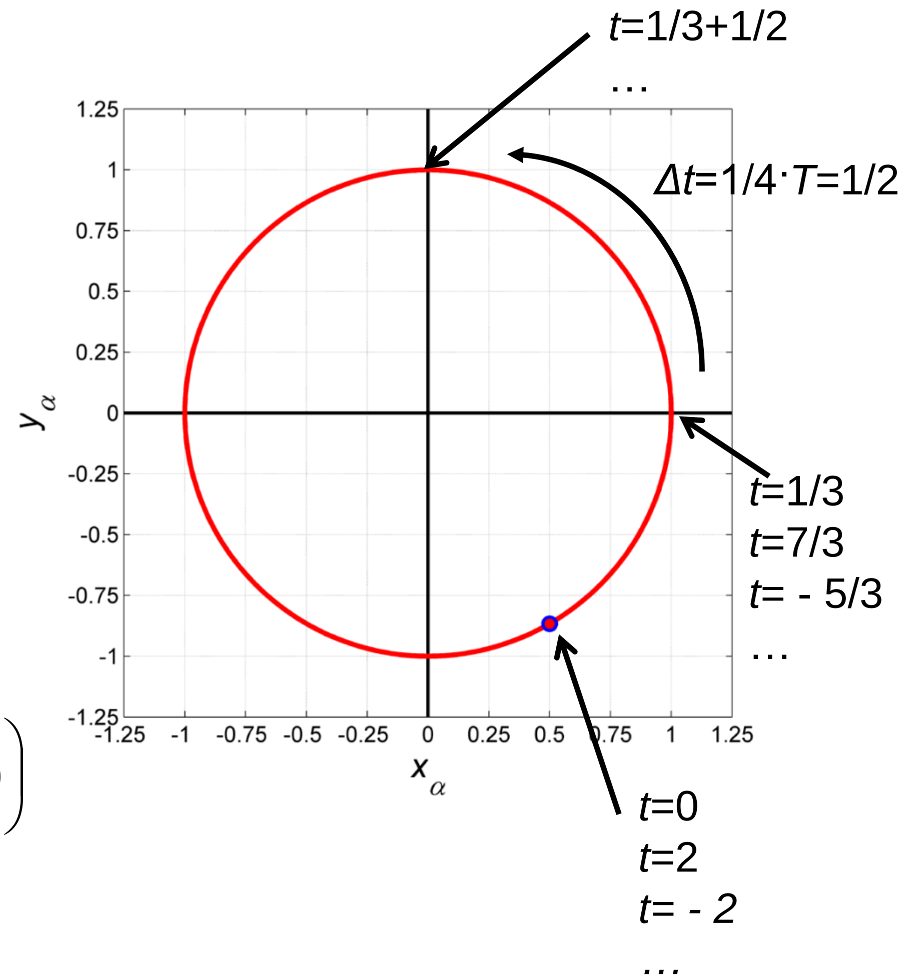


$$x(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot t - \frac{\pi}{3}\right)$$

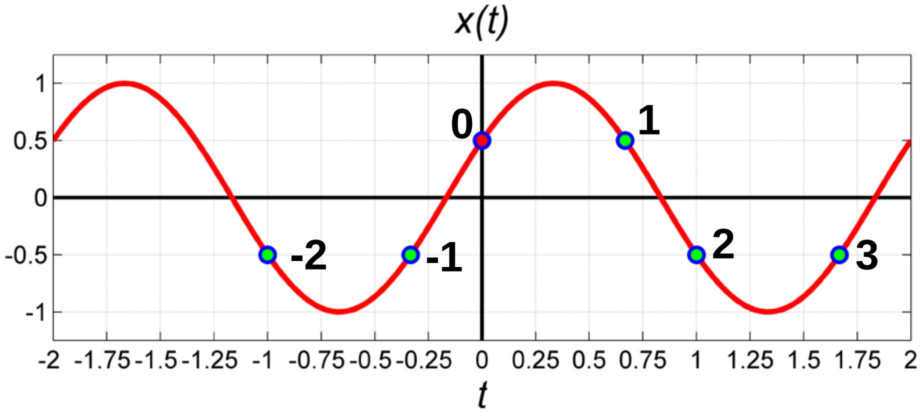
$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \Leftrightarrow T = 2$$

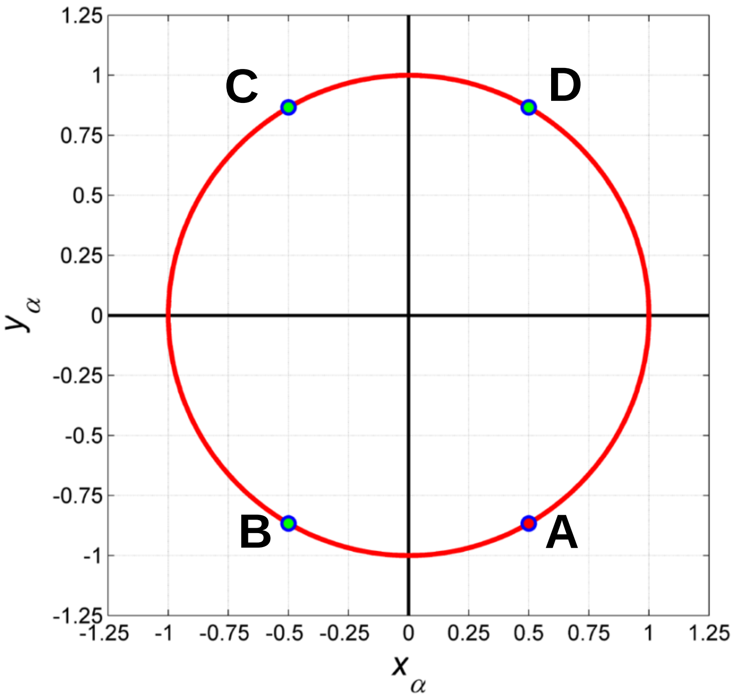
$$x(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot t - \varphi_0\right) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot (t - t_0)\right)$$

$$t_0 = \frac{\varphi_0}{2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{1}{3} s$$



Wartości sygnału kosinusoidalnego w wybranych punktach





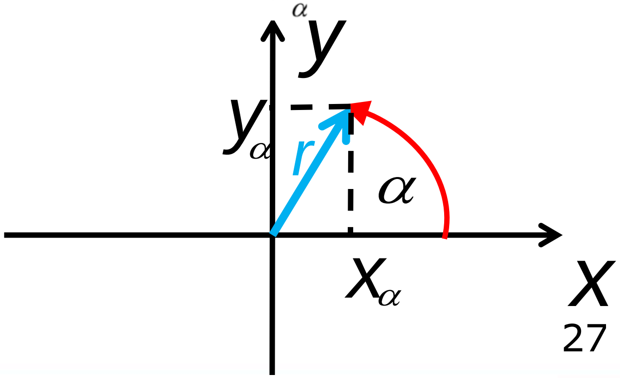
$$x(t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$n \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \quad \Leftrightarrow \quad n = -2, -1, 0, \ldots, 3$$

$$t_n \in \left\{-1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}\right\}$$

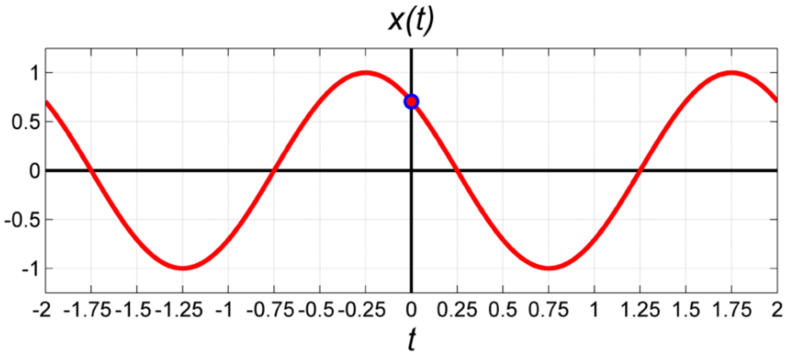
$$\varphi_n \in \left\{-\frac{4 \cdot \pi}{3}, -\frac{2 \cdot \pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2 \cdot \pi}{3}, \frac{4 \cdot \pi}{3}\right\} \rightarrow \left\{-\frac{2 \cdot \pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2 \cdot \pi}{3}\right\}$$

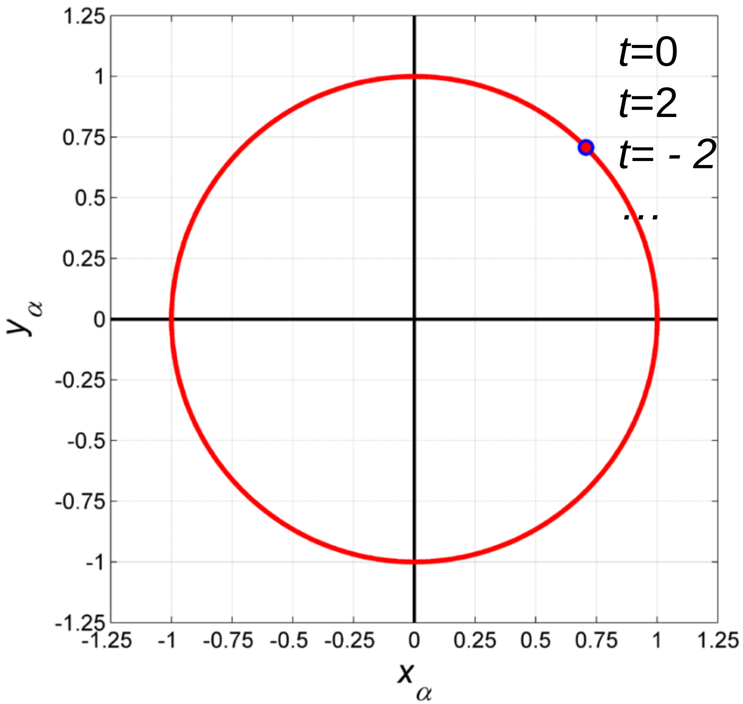
$$x(t_n) \in \{-1/2, 1/2\}$$



Czy w tym przypadku odstęp między próbkami na osi czasu jest stały?

Wartości sygnału kosinusoidalnego w wybranych punktach



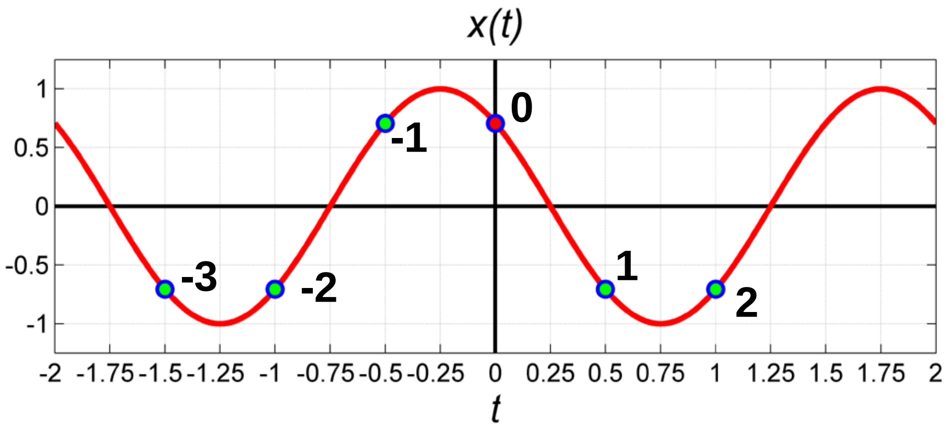


$$x(t) = \cos\left(2\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x(t) = \cos\left(2\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot t - \varphi_0\right) = \cos\left(2\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot(t - t_0)\right)$$

$$t_0 = \frac{\varphi_0}{2\cdot\pi\cdot f} = -\frac{1}{4}s$$

Wartości sygnału kosinusoidalnego w wybranych punktach



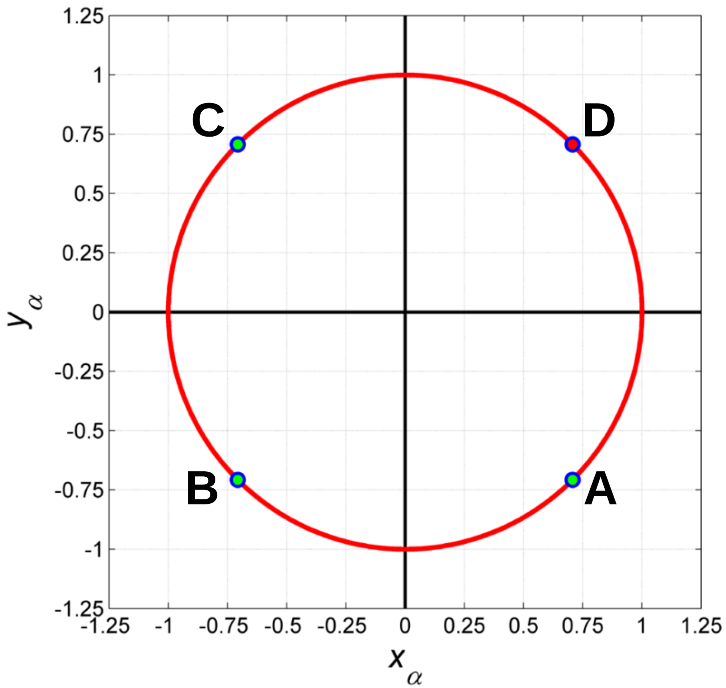
$$x(t)=\cos\left(2\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot t+\frac{\pi}{4}\right)$$

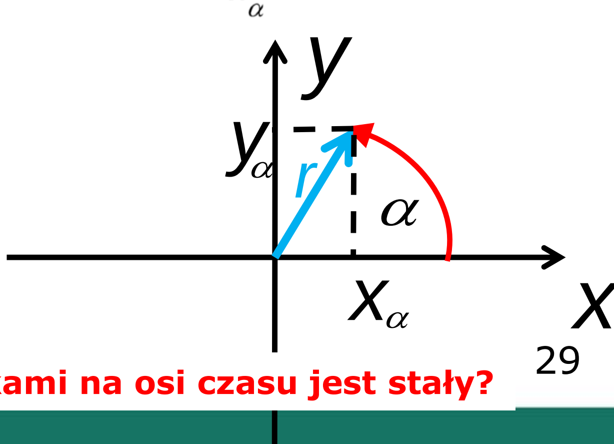
$$n\in\{-3,-2,-1,0,1,2\}\quad\Leftrightarrow\quad n=-3,-2,-1,\ldots,2$$

$$t_n\in\left\{-\frac{3}{2},-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1\right\}$$

$$\varphi_n\in\left\{-\frac{5\cdot\pi}{4},-\frac{3\cdot\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\cdot\pi}{4},\frac{5\cdot\pi}{4}\right\}\to\left\{-\frac{3\cdot\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\cdot\pi}{4}\right\}$$

$$x(t_n)\in\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$





Czy w tym przypadku odstęp między próbkami na osi czasu jest stały?

Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

Inna „częstotliwość”:

Dlaczego teraz jest f_0, a nie f ?

$$x(t) = A_0 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \varphi_0\right) = A_0 \cdot \cos\left(\omega_0 \cdot t - \varphi_0\right) \quad : \quad \omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_0$$

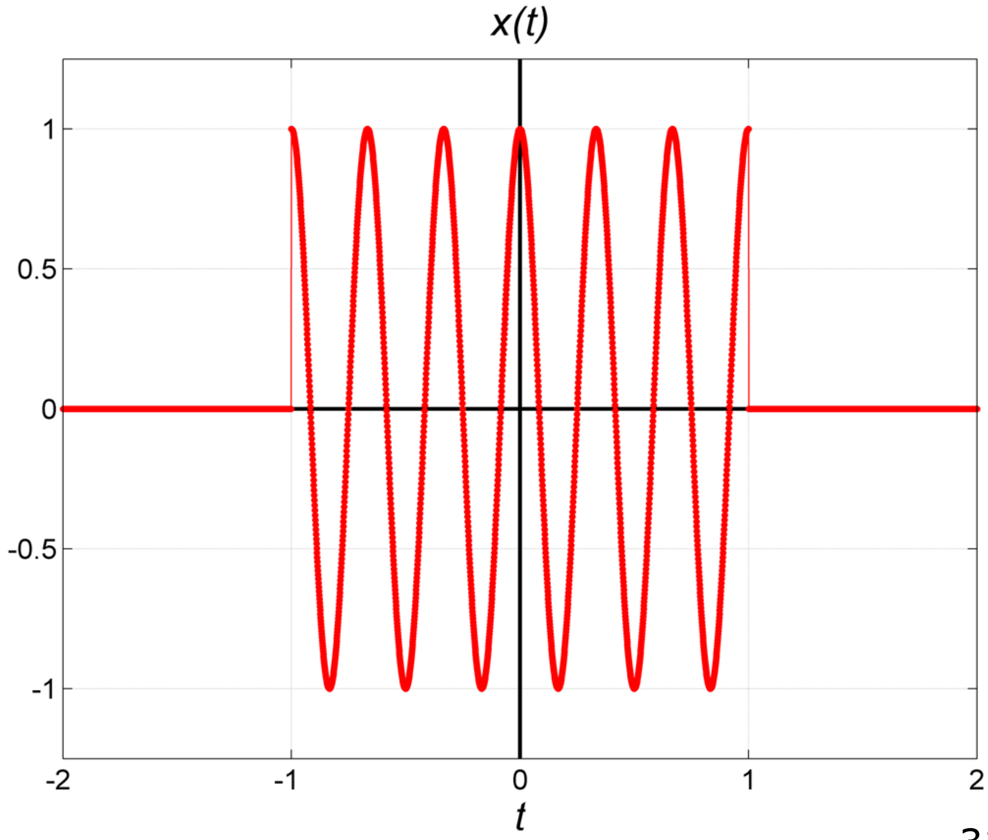
$$\left[\omega_0\right] = rad / s$$

(ale tylko, gdy *t* jest w sekundach!)

f **- częstotliwość, bez dodatkowych określeń (ang. frequency)**
ω **- pulsacja lub częstotliwość kołowa/kątowa/promieniowa (ang. circular/angular/radial)**

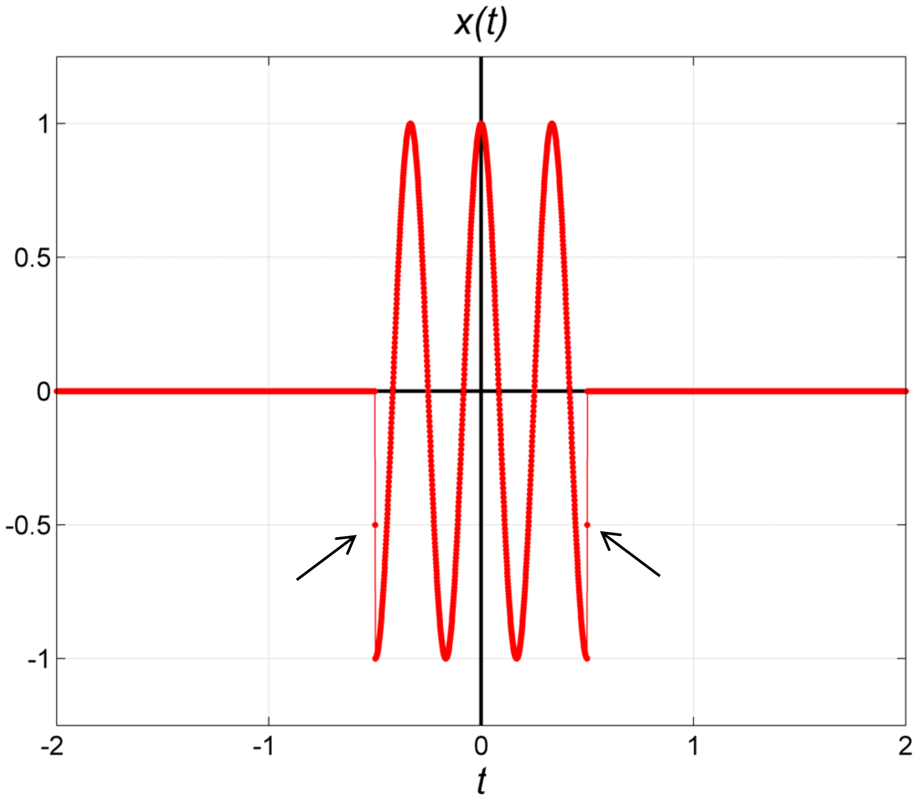
„Prawdziwy" sygnał kosinusoidalny

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\cdot\pi\cdot f_x\cdot t) & dla \quad t\in[-1,1] \\ 0 & dla \quad t\notin[-1,1] \end{cases}$$



„Prawdziwy” sygnał kosinusoidalny

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t) & dla \quad t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t) & dla \quad |t| = \frac{1}{2} \\ 0 & dla \quad t \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$



„Prawdziwy” sygnał kosinusoidalny i sygnał prostokątny

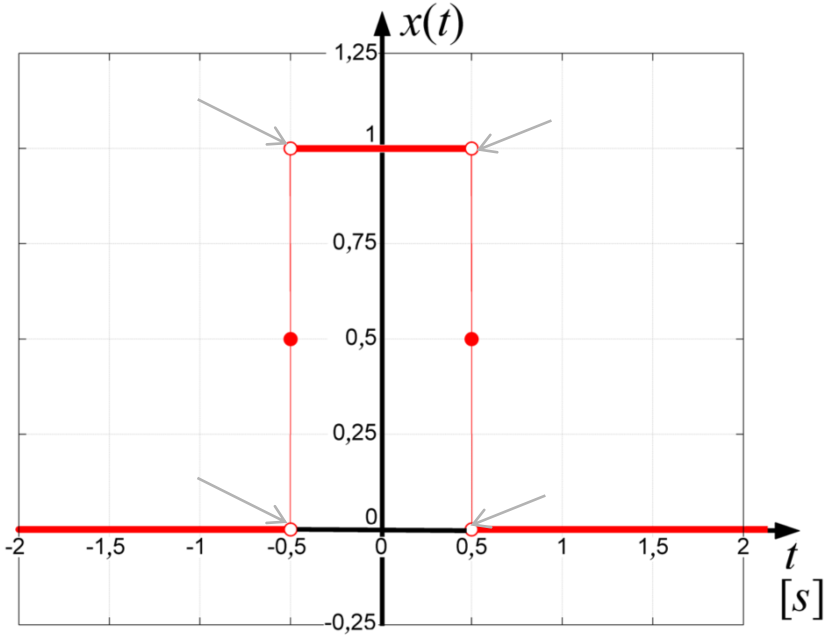
Użyteczny zapis

$$x(t) = \Pi(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t)$$

gdzie

Wersja dokładna

$$\boxed{\Pi(t) = \begin{cases} 1 & dla \quad |t| < 1/2 \\ 1/2 & dla \quad |t| = 1/2 \\ 0 & dla \quad |t| > 1/2 \end{cases}}$$



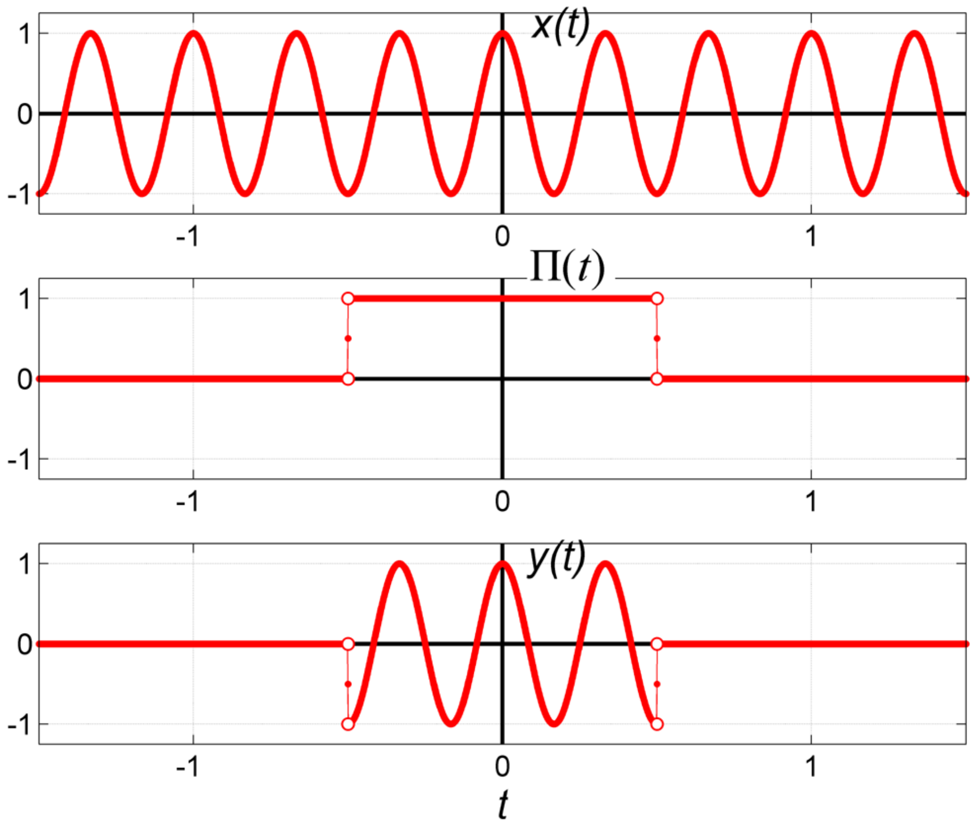
W wersji uproszczonej wartości w punktach „przeskoków” przyjmujemy dowolnie.

Uwaga – proszę nie mylić nazwy sygnału (duże pi: Π= Π(t))
z wartością liczbową (małe pi: π=3,14…)

„Prawdziwy” sygnał kosinusoidalny i sygnał prostokątny

$$y(t) = \Pi(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot t)$$

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot t)$$



Przekształcenia sygnałów (funkcji)

a) zmiana skali wartości: (amplitudy)

$$x_1(t) = c \cdot x(t)$$

b) odwrócenie osi czasu:

$$x_2(t) = x(-t)$$

c) opóźnienie na osi czasu:

$$x_3(t) = x(t - t_d)$$

d) odwrócenie osi, a potem opóźnienie:

$$x_4(t) = x(-(t - t_d))$$

$$x(t) \xrightarrow{krok\ 1} x(-t) \xrightarrow{krok\ 2} x(-(t - t_d))$$

e) opóźnienie, a potem odwrócenie osi:

$$x_5(t) = x((-t) - t_d)$$

$$x(t) \xrightarrow{krok\ 1} x(t - t_d) \xrightarrow{krok\ 2} x((-t) - t_d)$$

f) zmiana skali osi czasu:

$$x_6(t) = x(c \cdot t) \quad : \quad c \neq 0$$

itd.

Jak pokazać te efekty na wykresach?

Skalowanie sygnału i przesuwanie wzdłuż osi *t*

$$x(t) \quad \rightarrow \quad y(t) = a \cdot x(b \cdot t - c) \quad = a \cdot x\big(b \cdot (t - c/b)\big)$$

Po przekształceniu wykres funkcji (sygnału):

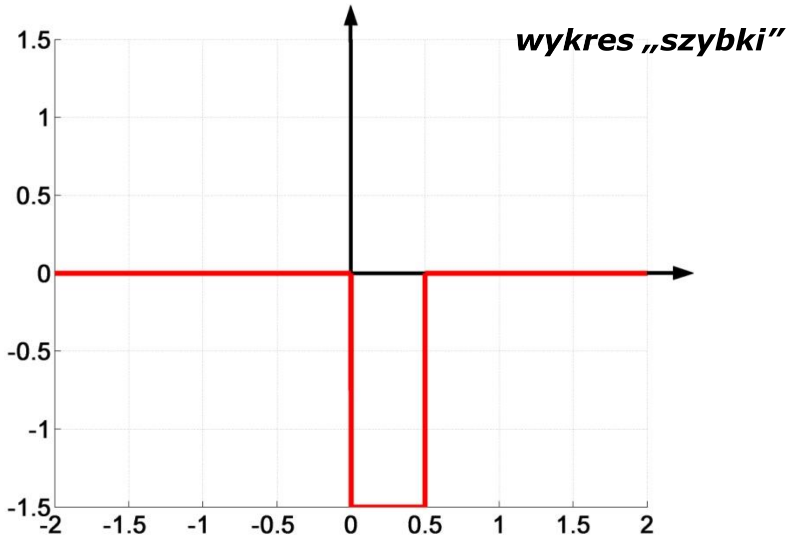
1) **rozciąga się w pionie *a*-krotnie, gdy *a* jest ujemne, to ulega obróceniu wokół osi *t*;**
2) **„ściska” się w poziomie *b*-krotnie, gdy *b* jest ujemne, to ponadto odwracamy wykres nad osią *t*;**
3) **punkt, który pierwotnie odpowiadał *t*=0, po przekształceniu odpowiada *t=c/b*.**

Na przykładzie impulsu prostokątnego:

$$y(t) = a \cdot \Pi(b \cdot t - c) \quad = a \cdot \Pi\big(b \cdot (t - c/b)\big)$$

dla konkretnych wartości:

$$a = -1{,}5; \quad b = 2; \quad c = 0{,}5$$



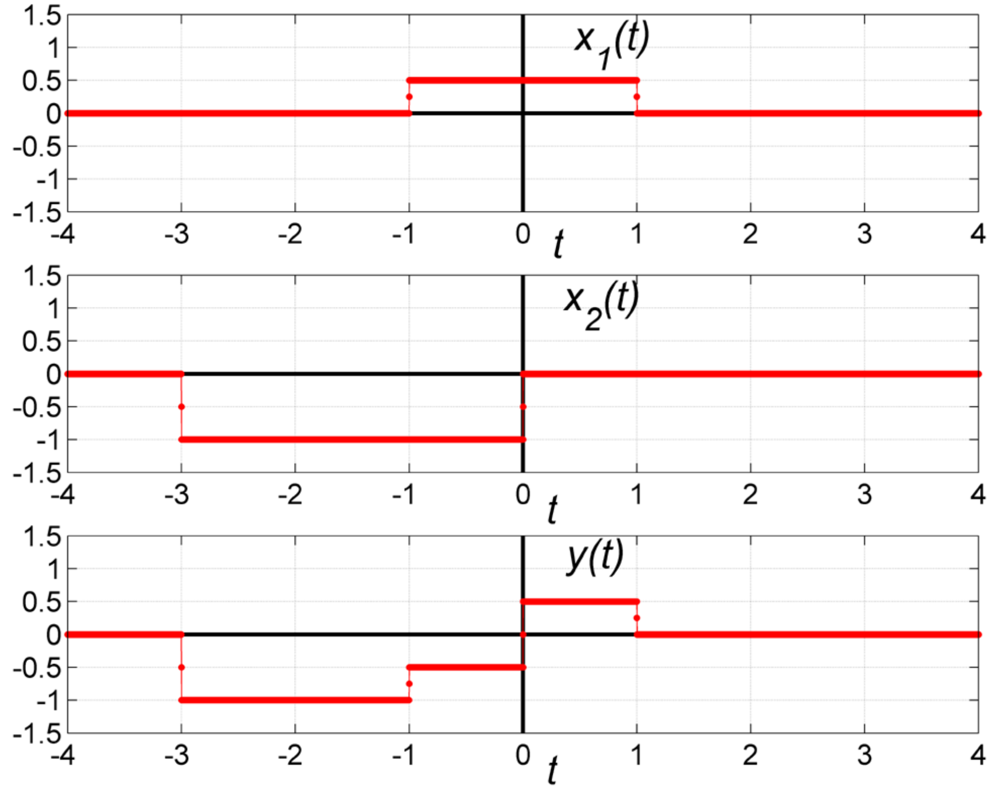
Operacje na sygnałach – dodawanie graficzne

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \cdot \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$x_2(t) = -\Pi\left(\frac{t+3/2}{3}\right)$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$t \in \Re$$



$$y(t) = -\Pi\left(\frac{t+2}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \Pi\left(t+1/2\right) + \frac{1}{2} \cdot \Pi\left(t-1/2\right)$$

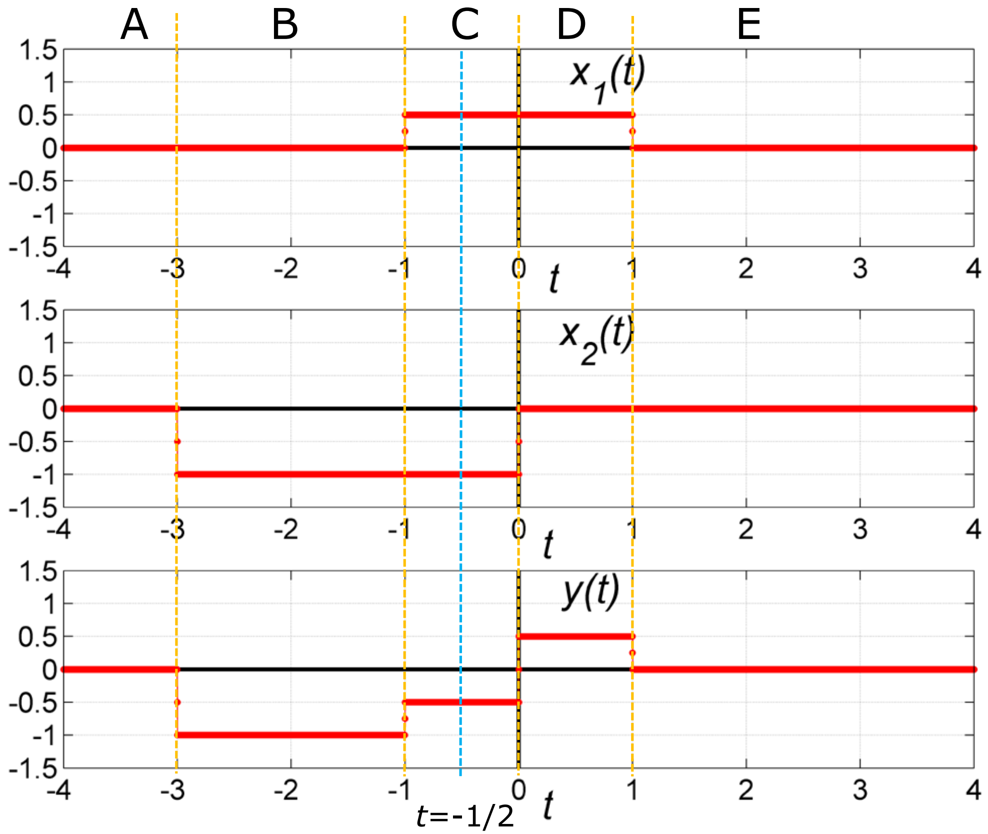
Operacje na sygnałach – dodawanie graficzne

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \cdot \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$x_2(t) = -\Pi\left(\frac{t+3/2}{3}\right)$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$t \in \Re$$



A: $t \in (-\infty, -3)$

B: $t \in (-3, -1)$

C: $t \in (-1, 0)$

D: $t \in (0, 1)$

E: $t \in (1, +\infty)$

$$y(t) = -\Pi\left(\frac{t+2}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \Pi(t+1/2) + \frac{1}{2} \cdot \Pi(t-1/2)$$

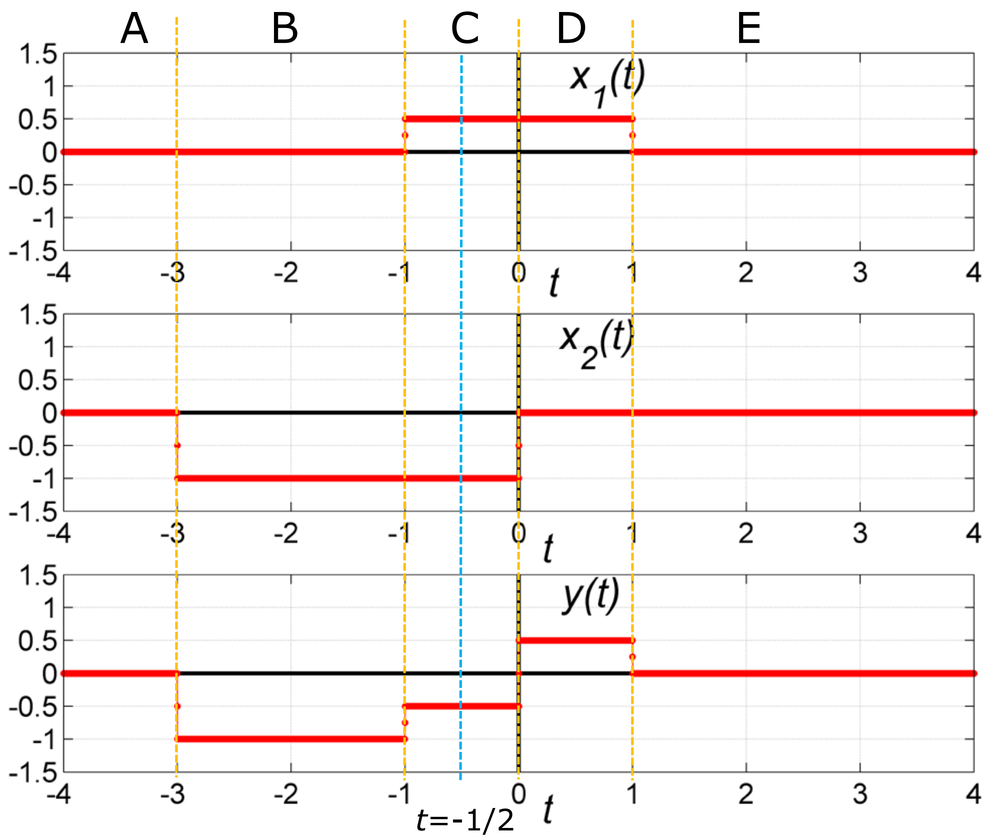
Operacje na sygnałach – dodawanie graficzne

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \cdot \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$x_2(t) = -\Pi\left(\frac{t+3/2}{3}\right)$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$t \in \Re$$



A: $t \in (-\infty, -3)$

B: $t \in (-3, -1)$

C: $t \in (-1, 0)$

D: $t \in (0, 1)$

E: $t \in (1, +\infty)$

t	B	C	D
$x_1(t)$	0	1/2	1/2
$x_2(t)$	-1	-1	0
$y(t)$	-1	-1/2	1/2

$$y(t) = -\Pi\left(\frac{t+2}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \Pi(t+1/2) + \frac{1}{2} \cdot \Pi(t-1/2)$$

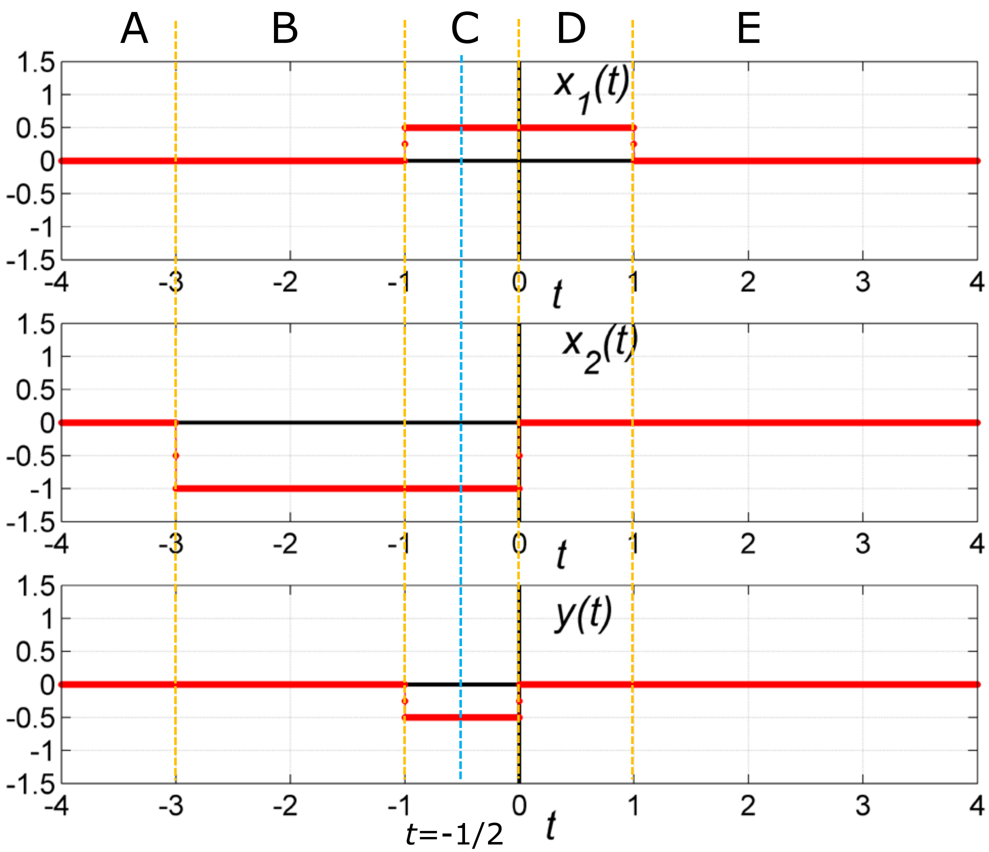
Operacje na sygnałach – mnożenie graficzne

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \cdot \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$x_2(t) = -\Pi\left(\frac{t+3/2}{3}\right)$$

$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$$

$$t \in \Re$$



A: $t \in (-\infty, -3)$

B: $t \in (-3, -1)$

C: $t \in (-1, 0)$

D: $t \in (0, 1)$

E: $t \in (1, +\infty)$

t	B	C	D
$x_1(t)$	0	1/2	1/2
$x_2(t)$	-1	-1	0
$y(t)$	0	-1/2	0

$$y(t) = -\frac{1}{2} \cdot \Pi(t + 1/2)$$

Sygnał schodkowy (model sygnału)

Skonstruowany z odpowiednio przekształconych sygnałów elementarnych:

$$\boxed{x_0(t) = \Pi(t)}$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \cdot x_0\left(\frac{t - t_n}{T_n}\right) \qquad x(t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \cdot \Pi\left(\frac{t - t_n}{T_n}\right)$$

Niekiedy wygodnie jest podać zestaw parametrów opisujących taki sygnał w postaci tabelki, np. :

n	c_n	t_n	T_n
1	1	-1	2
2	-2	2	3
3	2	4	1/2

Jaki jest wykres tego przykładowego sygnału $x(t)$?

Kolejny model sygnału

Jak usłyszelibyśmy taki sygnał

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{5}{2}}{5}\right) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 400 \cdot t) + \Pi\left(\frac{t - \frac{13}{2}}{3}\right) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 800 \cdot t)$$

?

Przybliżenie (aproksymacja) sygnału sygnałem schodkowym

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta t &= const \\ t_n &= n \cdot \Delta t\end{aligned}}$$

$$\boxed{x_n = x(n \cdot \Delta t)}$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cdot \Pi\left(\frac{t-t_n}{\Delta t}\right)$$

Może nas także interesować sygnał określony tylko na pewnym odcinku osi czasu:

$$y(t) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x_n \cdot \Pi\left(\frac{t-t_n}{\Delta t}\right)$$

Jak to pokazać na wykresach?

Parzystość oraz nieparzystość funkcji

$$x(t) = x_{parz}(t) + x_{niep}(t)$$

U nas zwykle dla rzeczywistej dziedziny,
ale może być i inna (byle symetryczna względem zera!).

$$x_{parz}(t) = \frac{1}{2} \cdot [x(t) + x(-t)]$$

$$x_{niep}(t) = \frac{1}{2} \cdot [x(t) - x(-t)]$$

Obserwacyjnie:
odpowiednia symetria wykresu.

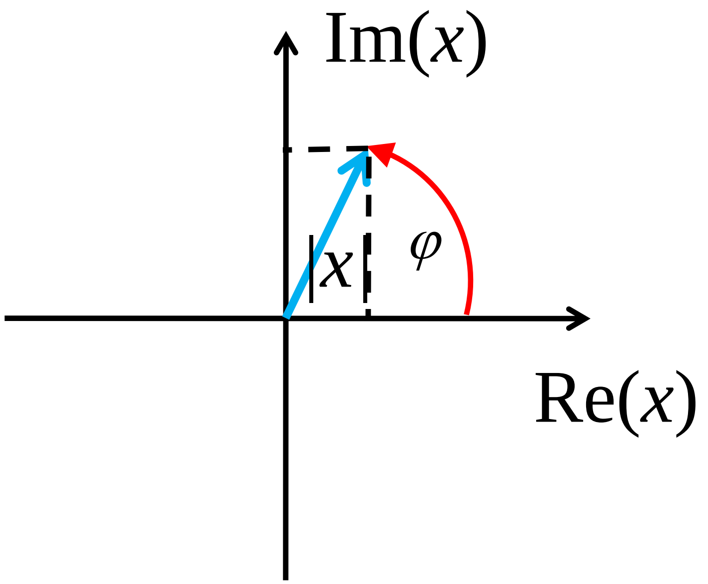
Liczby zespolone

$$\boxed{j = i: \quad j^2 = -1}$$

Część rzeczywista i urojona:

$$x \in C \quad \Leftrightarrow \quad x = a + j \cdot b: \quad a \in \Re \wedge b \in \Re$$

$$a = \mathrm{Re}(x);\ b = \mathrm{Im}(x)$$



Moduł i faza:

$$x = a + j \cdot b = |x| \cdot e^{j \cdot \varphi(x)}: \quad |x| \in \Re_{0+} \wedge \varphi(x) \in \Re$$

$$\boxed{e = 2{,}7183...}$$

Okresowość fazy:

$$\boxed{e^{j \cdot \varphi} = e^{j \cdot (\varphi + 2 \cdot k \cdot \pi)}}$$

ponieważ

$$\boxed{e^{j \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)}$$

$$\boxed{\left|e^{j \cdot \varphi}\right| = 1}$$

Funkcje zespolone (tu: od zmiennej *t*)

$$j = i: \quad j^2 = -1$$

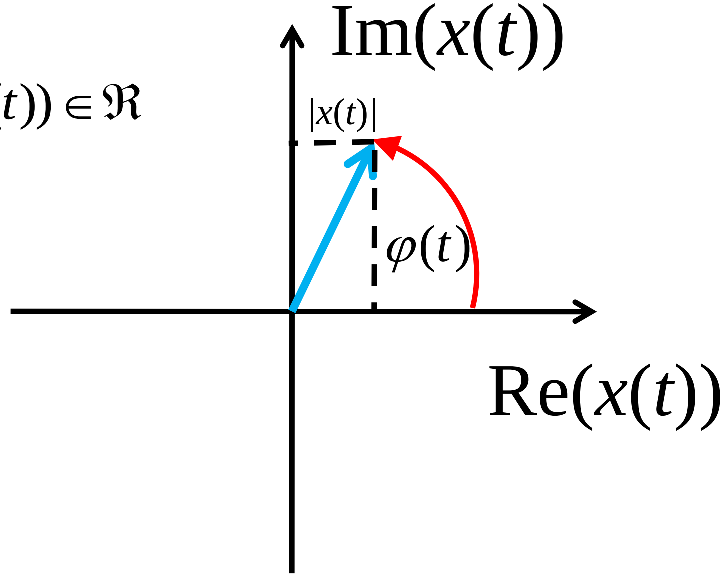
Część rzeczywista i urojona:

$$x(t) \in C \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = a(t) + j \cdot b(t): \quad a(t) \in \Re \wedge b(t) \in \Re$$

$$a(t) = \mathrm{Re}(x(t)); \, b(t) = \mathrm{Im}(x(t))$$

Moduł i faza:

$$x(t) = a(t) + j \cdot b(t) = |x(t)| \cdot e^{j \cdot \varphi(x(t))}: \quad |x(t)| \in \Re_{0+} \wedge \varphi(x(t)) \in \Re$$



Okresowość fazy:

$$\boxed{e^{j \cdot \varphi(t)} = e^{j \cdot (\varphi(t) + 2 \cdot k \cdot \pi)}}$$

ponieważ

$$\boxed{e^{j \cdot \varphi(t)} = \cos(\varphi(t)) + j \cdot \sin(\varphi(t))}$$

Liczby i funkcje zespolone

Przeliczanie między wersjami opisu:

$$|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = |x| \cdot \cos(\varphi(x))$$

$$b = |x| \cdot \sin(\varphi(x))$$

$$\varphi(x) = \mathrm{atg}_\pi(x) = \mathrm{atg}_\pi(a, b)$$

$$|x(t)| = \sqrt{a(t)^2 + b(t)^2}$$

$$a(t) = |x(t)| \cdot \cos(\varphi(x(t)))$$

$$b(t) = |x(t)| \cdot \sin(\varphi(x(t)))$$

$$\varphi(x(t)) = \mathrm{atg}_\pi(x(t)) = \mathrm{atg}_\pi(a(t), b(t))$$

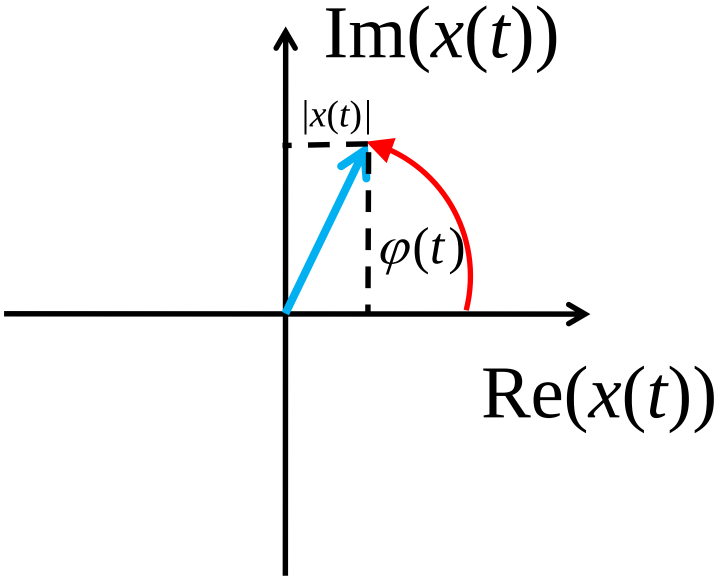
1. Dlaczego nie jest poprawne stosowanie zwykłego arcus tangensa?
2. Gdzie można napotkać wzór ze zwykłym atg? (*ang.: atan*)

Powtórka z liczb zespolonych

Arcus tangens 4-ćwiartkowy

$$\operatorname{atg}_\pi(a,b)=\begin{cases}\operatorname{atg}\left(\frac{b}{a}\right) & dla \quad a>0\\ \operatorname{atg}\left(\frac{b}{a}\right)+\pi & dla \quad a<0 \wedge b\geq 0\\ \operatorname{atg}\left(\frac{b}{a}\right)-\pi & dla \quad a<0 \wedge b<0\\ +\pi/2 & dla \quad a=0 \wedge b>0\\ -\pi/2 & dla \quad a=0 \wedge b<0\\ ? & dla \quad a=0 \wedge b=0\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&x=a+j\cdot b\\ &a=\operatorname{Re}(x);\, b=\operatorname{Im}(x)\end{aligned}}$$



Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

$$\boxed{j^2 = -1}$$

Wzory Eulera

dla liczb

$$e^{j\cdot\varphi} = \cos(\varphi) + j\cdot\sin(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{j\cdot\varphi} + e^{-j\cdot\varphi}}{2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{j\cdot\varphi} - e^{-j\cdot\varphi}}{2\cdot j}$$

dla funkcji

$$e^{j\cdot\varphi(t)} = \cos(\varphi(t)) + j\cdot\sin(\varphi(t))$$

$$\cos(\varphi(t)) = \frac{e^{j\cdot\varphi(t)} + e^{-j\cdot\varphi(t)}}{2}$$

$$\sin(\varphi(t)) = \frac{e^{j\cdot\varphi(t)} - e^{-j\cdot\varphi(t)}}{2\cdot j}$$

Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

Małe przypomnienie

Szereg potęgowy - McLaurina

$$x(t) = x(0) + \frac{x^{(1)}(t)}{1!} \cdot t^1 + \frac{x^{(2)}(t)}{2!} \cdot t^2 + \frac{x^{(3)}(t)}{3!} \cdot t^3 + \ldots$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{(n)}(t)}{n!} \cdot t^n}$$

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} - \ldots$$

$$\sin(\varphi) = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^9}{9!} - \ldots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Ćw.: proszę zapisać te wzory z użyciem symbolu sumy.

Małe ćwiczenie na rozgrzewkę

(z szeregów)

1. Proszę sprawdzić jedynkę trygonometryczną.
2. Proszę sprawdzić wzory Eulera.
3. Proszę sprawdzić wzory zastępcze dla:

$$\cos(2 \cdot \alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{\cos(\alpha / 2) + 1}{2}$$

$$\sin(2 \cdot \alpha) = \ldots$$

$$\sin^2(\alpha) = \ldots$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \ldots$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \ldots$$

$$itd.$$

A następnie punkty 1 i 3, ale <u>ze wzorów Eulera </u>.

Najważniejszy sygnał - kosinusoidalny

Dygresja pomocnicza

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d$$

$$(a_1+a_2+a_3)\cdot(b_1+b_2+b_3)=$$
$$=(a_1\cdot b_1+a_1\cdot b_2+a_1\cdot b_3)+(a_2\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_2\cdot b_3)+(a_3\cdot b_1+a_3\cdot b_2+a_3\cdot b_3)=$$
$$=\left(\sum_{m=1}^{3}a_m\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{3}b_n\right)=\sum_{m=1}^{3}\left[a_m\cdot\sum_{n=1}^{3}b_n\right]=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}a_m\cdot b_n$$

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots)\cdot(b_1+b_2+b_3+\ldots)=$$
$$=(a_1\cdot b_1+a_1\cdot b_2+a_1\cdot b_3+\ldots)+(a_2\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_2\cdot b_3+\ldots)+(a_3\cdot b_1+a_3\cdot b_2+a_3\cdot b_3+\ldots)+\ldots=$$
$$=\left(\sum_{m=1}^{+\infty}a_m\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\right)=\sum_{m=1}^{+\infty}\left[a_m\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\right]=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}a_m\cdot b_n$$

Można na przykład przyjmować kolejne długości szeregów i obserwując efekty dojść do szeregów nieskończonych.

Sygnał harmoniczny

$$x(t) = e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t} = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t) + j \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t)$$

$$|x(t)| = ?$$

$$\varphi(x(t)) = \varphi(t) = ?$$

Wzory? Wykresy?

$$\mathrm{Re}(x(t)) = ?$$

$$\mathrm{Im}(x(t)) = ?$$

A gdyby nieco zmodyfikować sygnał *x*(*t*), otrzymując

$$x(t) \rightarrow y(t) = e^{j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_x \cdot t - \varphi_y)}$$

?

Wzory? Wykresy?

Sygnał harmoniczny

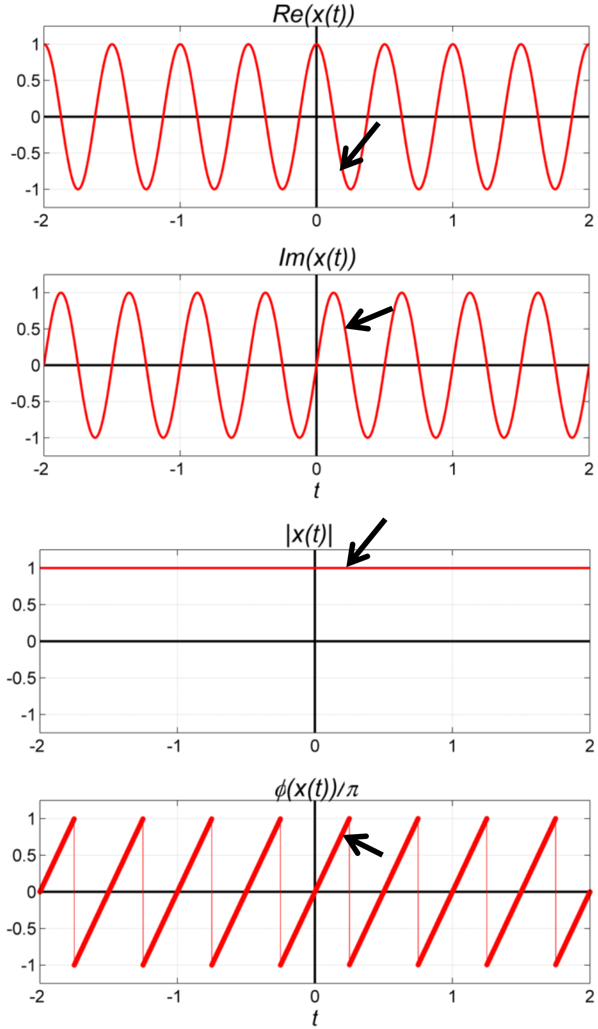
$$x(t) = e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_x\cdot t}$$

Wykresy

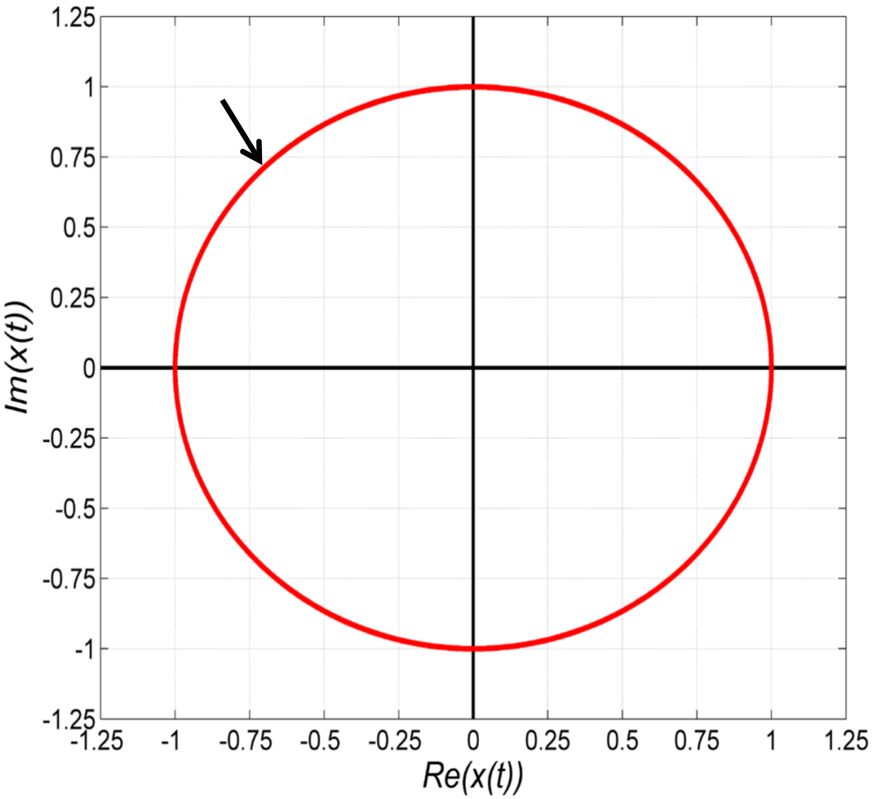
$f_x = 2Hz$

Wybrany punkt:

$t = 3/16\ s$



Płaszczyzna zespolona



Do przemyślenia

Jakie wykresy otrzymamy dla sygnału $x(t) = \Pi\left(\frac{t+1}{4}\right) + j \cdot \Pi\left(\frac{t-1}{4}\right)$ **?**

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t+1}{4}\right) + j \cdot \Pi\left(\frac{t-1}{4}\right) = \Pi\big((t+1)/4\big) + j \cdot \Pi\big((t-1)/4\big)$$

Jakie wykresy otrzymamy dla sygnału $y(t) = -\Pi\left(t + \frac{1}{4}\right) + j \cdot \Pi\left(t - \frac{1}{4}\right)$ **?**

$$y(t) = -\Pi\left(t + \frac{1}{4}\right) + j \cdot \Pi\left(t - \frac{1}{4}\right) = -\Pi\big(t + 1/4\big) + j \cdot \Pi\big(t - 1/4\big)$$

Jakie wykresy otrzymamy dla sygnału $x_1(t) = \Pi\big(4 \cdot t + 1\big) - j \cdot \Pi\big(4 \cdot t - 1\big)$ **?**

Wykresy: a) Re oraz Im od *t* , b) moduł oraz faza od *t*,
c) na płaszczyźnie zespolonej (Nyquista), czyli Im do Re.

Wstępnie rysujemy wykresy dla uproszczonego zapisu Π(*t*),
dopiero potem uzupełniamy o wartości w „przeskokach”.

Zapraszam na ćwiczenia ...
lub do laboratorium …