



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Teoria sygnałów

Wykład 4

Dr inż. Przemysław Korohoda
Katedra Elektroniki, AGH, Kraków

home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2

UPEL: TS 2022

Plan wykładu

- 1. Transformata CFT sygnału stałego -> delta Diraca.**
- 2. Kilka ważnych par „sygnał-transformata”.**
- 3. Parzystości CFT (cd.).**
- 4. Transformowanie sygnałów zespolonych.**
- 5. Splot – definicja, przykłady, własności.**
- 6. Więcej par „sygnał-transformata”.**
- 7. Szereg Fouriera (grzebień Diraca).**

Transformata sygnału stałego

Wyliczenie bezpośrednio z def. jest nieskuteczne:

$$x(t) = c \quad \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad X(f) = ?$$

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} c \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = \\ &= c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt - j \cdot c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt = ? \end{aligned}$$

Przypomnienie, wartość główna całki:

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt = 0$$

Transformata CFT(f) sygnału stałego

Rozważmy ciąg funkcji (sygnałów) :

$$\boxed{a > 0} \quad x_a(t) = \Pi\left(\frac{t}{a}\right) \quad \begin{matrix} \xleftarrow{CFT} \\ \xrightarrow{ICFT} \end{matrix} \quad \boxed{a \rightarrow +\infty} \quad X_a(f) = a \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot a)$$

Oczywiście:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} x_a(t) = 1 \quad \begin{matrix} \xleftarrow{CFT} \\ \xrightarrow{ICFT} \end{matrix} \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} X_a(f) = \delta(f)$$

Pseudo-funkcja (dystrybucja) delta Diraca:

$$\delta(f) = \begin{cases} +\infty & \text{dla } f = 0 \\ 0 & \text{dla } f \neq 0 \end{cases} \quad \wedge \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) df = 1$$

Bez dowodu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi \cdot f) df = 1$$

**... ale można to łatwo
sprawdzić z użyciem
Matlaba.**

Analogicznie można określić $\delta(t)$ czy $\delta(\omega)$.

Transformata CFT(f) sygnału stałego

Można też i tak:

$$x_a(t) = \text{sinc}\left(\pi \cdot \frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X_a(f) = a \cdot \Pi(f \cdot a)$$

Bez dowodu:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} x_a(t) = 1 \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \lim_{a \rightarrow +\infty} X_a(f) = \delta(f)$$

**... ale można to łatwo
sprawdzić z użyciem
Matlaba.**

Oczywiście:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(f) df = 1$$

Transformata CFT(ω) sygnału stałego

$$x_a(t) = \text{sinc}\left(\pi \cdot \frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X_a(\omega) = a \cdot \Pi\left(\frac{\omega \cdot a}{2 \cdot \pi}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \pi}\right) d\omega = 2 \cdot \pi$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} x_a(t) = 1 \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \lim_{a \rightarrow +\infty} X_a(\omega) = 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega)$$

Kolejna para sygnał-transformata:

$$x(t) = 1 \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(f) = \delta(f)$$

$$x(t) = 1 \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(\omega) = 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega)$$

Kolejne pary sygnał-transformata

W podobny sposób możemy pokazać, że:

$$x(t) = \delta(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(f) = 1$$

$$x(t) = \delta(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(\omega) = 1$$

dla dowolnych $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$: $\int_{t_d - \varepsilon_1}^{t_d + \varepsilon_2} \delta(t - t_d) dt = 1$ $\delta(t - t_d) \cdot x(t) = \delta(t - t_d) \cdot x(t_d)$

$$\text{dlatego : } \int_{t_d - \varepsilon_1}^{t_d + \varepsilon_2} \delta(t - t_d) \cdot x(t) dt = x(t_d)$$

Potwierdzenie wyznaczonych par sygnał-transformata

$$X(f) = \delta(f): \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot t} df = 1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) df = 1$$

$$X(\omega) = 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega): \quad x(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) \cdot e^{j \cdot 0 \cdot t} d\omega = 1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) d\omega = 1$$

$$x(t) = \delta(t): \quad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot 0} dt = 1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$x(t) = \delta(t): \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot 0} dt = 1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Przykłady innych par sygnał-transformata

Korzystając z definicji lub odpowiednich twierdzeń można pokazać, że:

$$c \xrightleftharpoons[\text{ICFT}]{\text{CFT}} c \cdot \delta(f)$$

$$c \cdot \delta(t) \xrightleftharpoons[\text{ICFT}]{\text{CFT}} c$$

$$e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} \xrightleftharpoons[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \delta(f - f_0)$$

$$\delta(t - t_d) \xrightleftharpoons[\text{ICFT}]{\text{CFT}} e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_d}$$

$$c \xrightleftharpoons[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} c \cdot 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega)$$

$$c \cdot \delta(t) \xrightleftharpoons[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} c$$

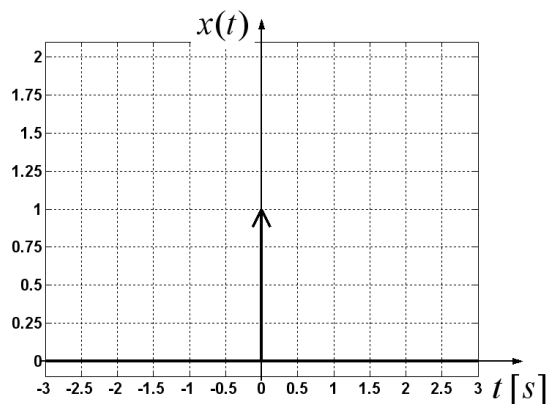
$$e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightleftharpoons[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\delta(t - t_d) \xrightleftharpoons[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} e^{-j \cdot \omega \cdot t_d}$$

Sygnał harmoniczny (zespólny!): $e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} = e^{j \cdot \omega_0 \cdot t}$

Graficzna ilustracja dla delty Diraca

$$x(t) = \delta(t)$$

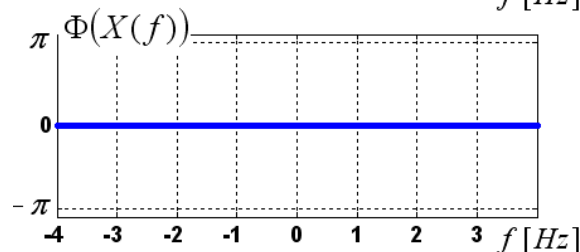
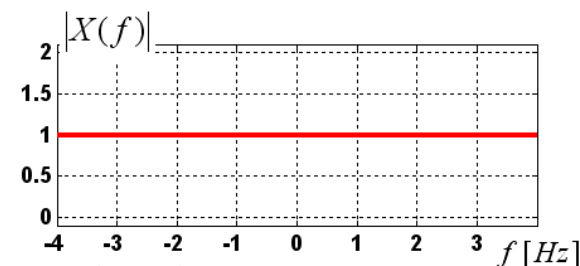
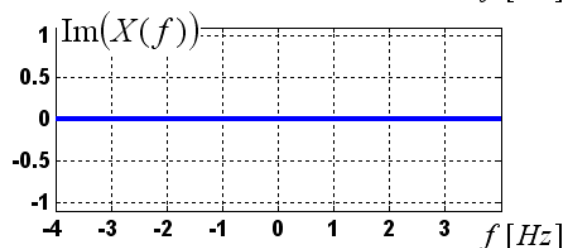
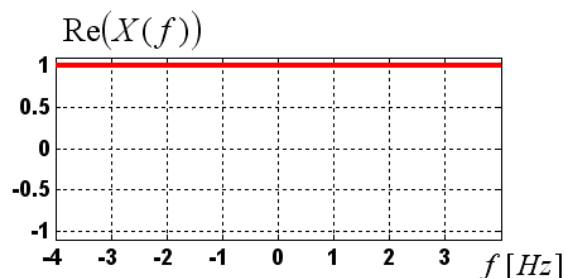


$$X(f) = 1$$



$$\text{Re}(X(f)) = 1; \quad \text{Im}(X(f)) = 0;$$

$$|X(f)| = 1; \quad \Phi(X(f)) = 0$$

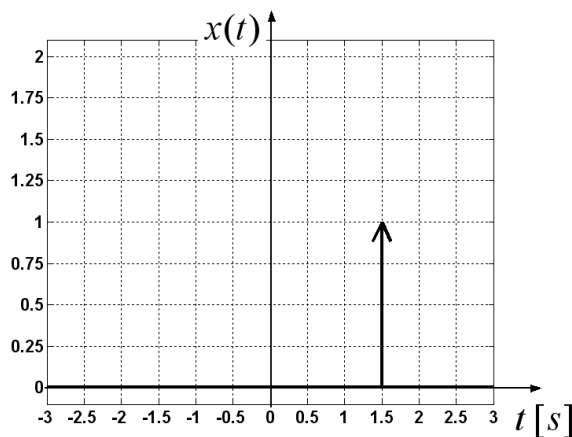


Graficzna ilustracja dla delty Diraca (cd.)

$$t_0 = 1,5$$

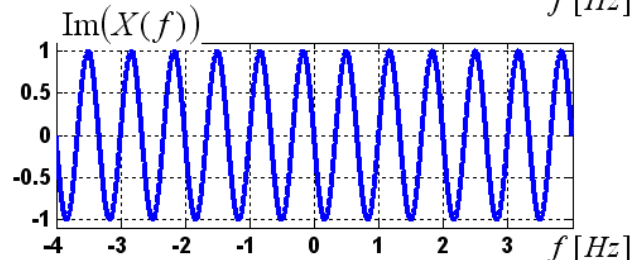
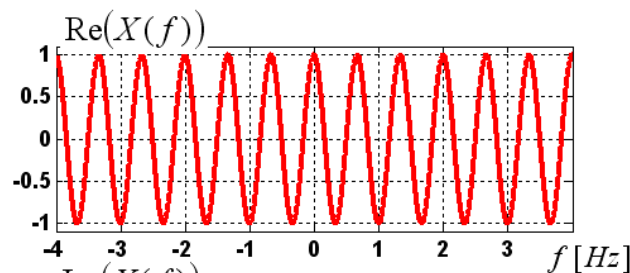
$$X(f) = e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0}$$

$$x(t) = \delta(t - t_0)$$



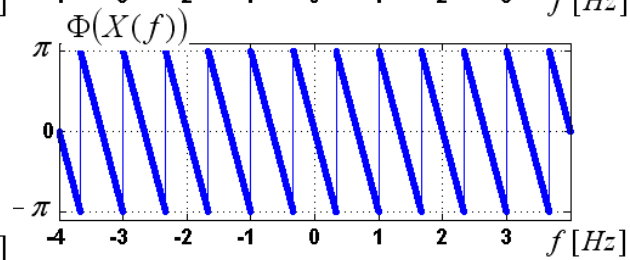
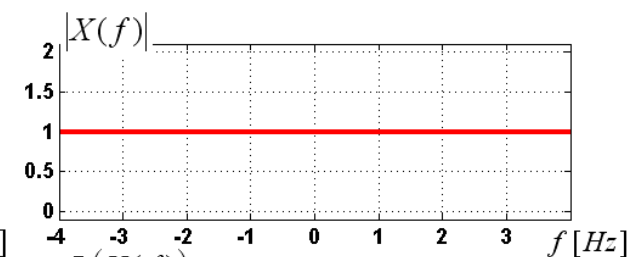
$$\text{Re}(X(f)) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0)$$

$$\text{Im}(X(f)) = -\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0)$$



$$|X(f)| = 1$$

$$\Phi(X(f)) = -2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0$$



Typowe operacje na delcie Diraca

... przesuwanie, mnożenie przez liczbę, dodawanie itd.:

$$x(t) = \delta(t - t_0)$$

$$x(t) = \delta(t) + \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

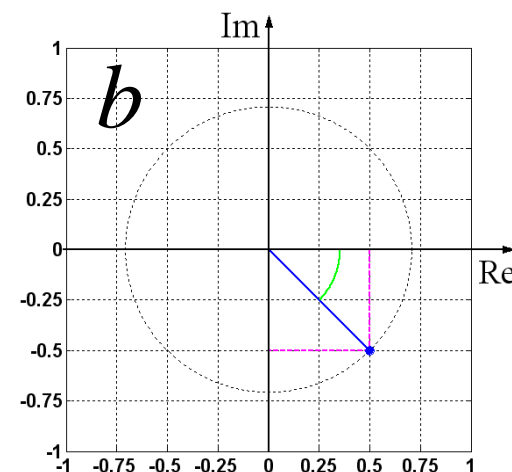
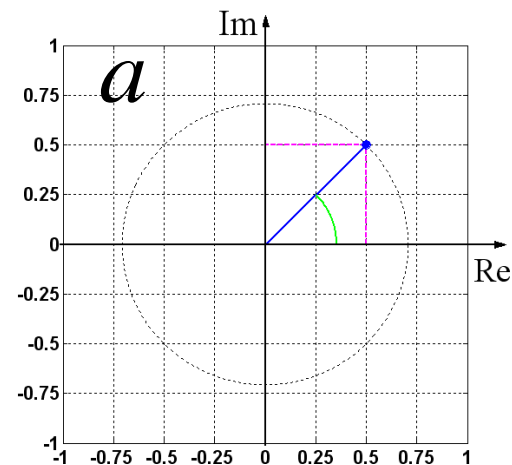
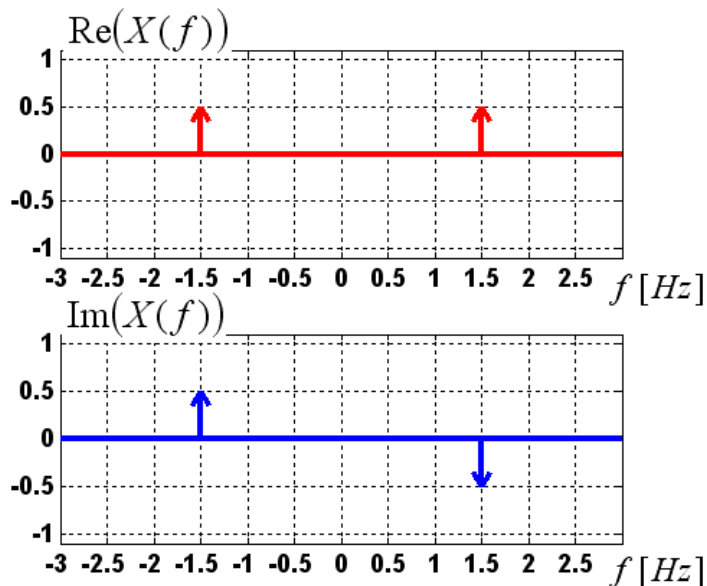
$$x(t) = 3 \cdot \delta(t) - 2 \cdot \delta(t - t_0) + \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

... analogicznie w dziedzinie f , czy ω .

Przykład ilustracji transformaty z deltami Diraca na płaszczyźnie zespolonej

$$X(f) = \left(\frac{1}{2} + j \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \delta(f + 1,5) + \left(\frac{1}{2} - j \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \delta(f - 1,5)$$

$$X(f) = a \cdot \delta(f + 1,5) + b \cdot \delta(f - 1,5)$$



Dowód z wykorzystaniem nowych narzędzi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt \right] \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df d\tau$$

...i następnie:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df d\tau = \\ \left\{ y(t) = \delta(t - \tau) \quad \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad Y(f) = e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} \right\} & \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df \right] d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = x(t) \end{aligned}$$

Inne ważne pary sygnał-transformata

Korzystając z definicji lub odpowiednich twierdzeń można także pokazać, że:

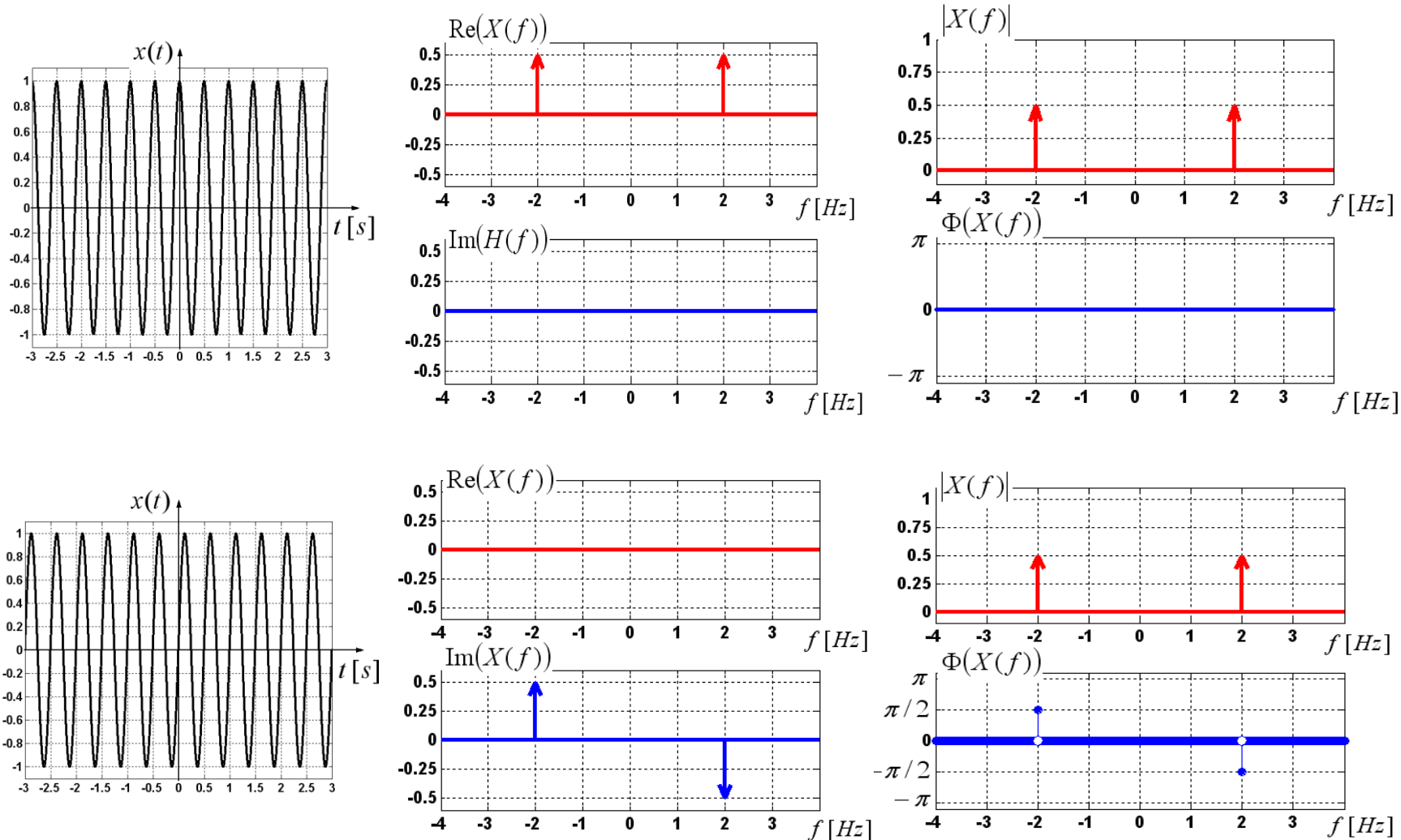
$$\cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \frac{1}{2} \cdot [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

$$\sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} j \cdot \frac{1}{2} \cdot [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$$

$$\cos(\omega_0 \cdot t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} \pi \cdot [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\sin(\omega_0 \cdot t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} j \cdot \pi \cdot [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

Przykładowe wykresy dla sygnałów cos/sin



Inne ważne pary sygnał-transformata

Analogicznie „w drugą stronę” :

$$\frac{1}{2} \cdot [\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)] \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0)$$

$$j \cdot \frac{1}{2} \cdot [\delta(t - t_0) - \delta(t + t_0)] \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0)$$

$$\frac{1}{2} \cdot [\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)] \xleftrightarrow[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} \cos(\omega \cdot t_0)$$

$$j \cdot \frac{1}{2} \cdot [\delta(t - t_0) - \delta(t + t_0)] \xleftrightarrow[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} \sin(\omega \cdot t_0)$$

Warto dla tych kolejnych przykładów sprawdzić odpowiednie (nie)parzystości!

Parzystości i nieparzystości (ogólnie)

Po rozdzieleniu sygnału zespólonego oraz jego transformaty Fouriera na część parzystą i nieparzystą:

$$x(t) = x_{parz}(t) + x_{niep}(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(f) = X_{parz}(f) + X_{niep}(f)$$

Uwaga – X_{parz} to parzysta część transformaty, a nie transformata parzystej części sygnału!

można stwierdzić, że zachodzą następujące zależności:

$$\begin{array}{ccccccc}
 x(t) & = & \text{Re}(x_{parz}(t)) & + & j \cdot \text{Im}(x_{parz}(t)) & + & \text{Re}(x_{niep}(t)) + j \cdot \text{Im}(x_{niep}(t)) \\
 & & \updownarrow & & \updownarrow & & \nwarrow \nearrow \\
 X(f) & = & \text{Re}(X_{parz}(f)) + j \cdot \text{Im}(X_{parz}(f)) & + & \text{Re}(X_{niep}(f)) + j \cdot \text{Im}(X_{niep}(f))
 \end{array}$$

Dla sygnału rzeczywistego wystarczy pominąć odpowiednie wartości urojone.

Wykazanie wybranego powiązania stanowi bardzo dobre ćwiczenie rachunkowe.

Dokładnie tak samo można określić zależności dla CFT(ω).

Transformowanie sygnałów zespolonych

Dla zespolonego sygnału oraz jego transformaty Fouriera:

$$x(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(f)$$

$$x(-t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(-f)$$

zachodzą następujące związki:

$$\overline{x(t)} \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \overline{X(-f)}$$

$$\overline{x(-t)} \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \overline{X(f)}$$

Dla zespolonego sygnału oraz jego transformaty Fouriera:

$$x(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} X(\omega)$$

$$x(-t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} X(-\omega)$$

zachodzą następujące związki:

$$\overline{x(t)} \xleftrightarrow[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} \overline{X(-\omega)}$$

$$\overline{x(-t)} \xleftrightarrow[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} \overline{X(\omega)}$$

Zależności między transformatą w przód oraz odwrotną

Rozpisując odpowiednio wzory na transformaty można dojść do następujących obserwacji:

$$\begin{array}{ccc} p(t) & \xrightarrow{CFT} & q(f) \\ \Downarrow & & \\ \overline{q(t)} & \xleftarrow{ICFT} & \overline{p(f)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} p(t) & \xrightarrow{CFT(\omega)} & q(\omega) \\ \Downarrow & & \\ \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \overline{q(t)} & \xleftarrow{ICFT(\omega)} & \overline{p(\omega)} \end{array}$$

Analogiczne związki znajdą dla przejścia „w drugą stronę”.

Na razie tylko w dziedzinie czasu:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau$$

Interpretacja graficzna – patrz tablica...

Oznaczenie splotu:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau = (x_1 * x_2)(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

Przemienność splotu:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau) \cdot x_2(\tau) d\tau$$

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$$

Przykład oraz definicja funkcji lambda

$$x_1(t) = \Pi(t)$$

$$x_2(t) = \Pi(t)$$

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\tau) \cdot \Pi(t - \tau) d\tau = \Lambda(t)$$

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1 & \text{dla } -1 < t \leq 0 \\ -t+1 & \text{dla } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{dla } \textit{pozost. } t \end{cases}$$

Analogicznie określamy funkcje lambda dla innych dziedzin.

Dygresja: Funkcja lambda -> delta Diraca

$$\lim_{a \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{a} \cdot \Lambda \left(\frac{t}{a} \right) \right) = \delta(t)$$

W tym przypadku całka także jest „łatwa”:

$$\frac{1}{a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda \left(\frac{t}{a} \right) dt = \frac{1}{a} \cdot a \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(\tau) d\tau = 1$$

Dla porównania:

Całka:

$$\lim_{a \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{a} \cdot \Pi \left(\frac{t}{a} \right) \right) = \delta(t)$$

$$\frac{1}{a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi \left(\frac{t}{a} \right) dt = \frac{1}{a} \cdot a \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\tau) d\tau = 1$$

$$\lim_{a \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{a} \cdot \text{sinc} \left(\frac{\pi \cdot t}{a} \right) \right) = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} \cdot \text{sinc} \left(\frac{\pi \cdot t}{a} \right) dt = \left\{ \begin{array}{l} \tau = \frac{t}{a} \\ dt = a \cdot d\tau \\ t \rightarrow \pm\infty \Leftrightarrow \tau \rightarrow \pm\infty \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \cdot a \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi \cdot \tau) d\tau = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi \cdot t) dt = 1$$

Wnioski (kolejna dygresja)

$$\lim_{a \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{a} \cdot \Lambda \left(\frac{t}{a} \right) \right) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad X(f) = \lim_{a \rightarrow 0+} \left(\text{sinc}^2(\pi \cdot f \cdot a) \right) = 1$$

$$\lim_{a \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{a} \cdot \Pi \left(\frac{t}{a} \right) \right) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad X(f) = \lim_{a \rightarrow 0+} \left(\text{sinc}(\pi \cdot f \cdot a) \right) = 1$$

$$\lim_{a \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{a} \cdot \text{sinc} \left(\frac{\pi \cdot t}{a} \right) \right) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad X(f) = \lim_{a \rightarrow 0+} \left(\Pi(f \cdot a) \right) = 1$$

Właściwości splotu

Łączność splotu:

$$x_1(t) * x_2(t) * x_3(t) = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t) = x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)]$$

Dwuliniowość splotu:

$$[a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)] * x_3(t) = a \cdot [x_1(t) * x_3(t)] + b \cdot [x_2(t) * x_3(t)]$$

$$x_1(t) * [a \cdot x_2(t) + b \cdot x_3(t)] = a \cdot [x_1(t) * x_2(t)] + b \cdot [x_1(t) * x_3(t)]$$

Twierdzenie o splocie:

$$x_1(t) * x_2(t) \xrightleftharpoons[ICFT]{CFT} X_1(f) \cdot X_2(f)$$

$$x_1(t) * x_2(t) \xrightleftharpoons[ICFT(\omega)]{CFT(\omega)} X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

Splatanie z delta Diraca

$$\begin{aligned}x(t) * \delta(t - t_d) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t_d) \cdot x(t - \tau) d\tau = \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t_d) \cdot x(t - t_d) d\tau = x(t - t_d) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t_d) d\tau = \\&= x(t - t_d)\end{aligned}$$

czyli np.:

$$\begin{aligned}x(t) * \sum_{n=1}^3 \delta(t - n \cdot \Delta t) &= \sum_{n=1}^3 x(t - n \cdot \Delta t) = \\&= x(t - \Delta t) + x(t - 2 \cdot \Delta t) + x(t - 3 \cdot \Delta t)\end{aligned}$$

Kolejna para sygnał-transformata

$$\Pi(t) * \Pi(t) \xrightleftharpoons[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \text{sinc}(\pi \cdot f) \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f)$$

czyli:

$$x(t) = \Lambda(t) \xrightleftharpoons[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(f) = \text{sinc}^2(\pi \cdot f)$$

$$\Pi(t) * \Pi(t) \xrightleftharpoons[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} \text{sinc}(\omega/2) \cdot \text{sinc}(\omega/2)$$

czyli:

$$x(t) = \Lambda(t) \xrightleftharpoons[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} X(\omega) = \text{sinc}^2(\omega/2)$$

Splot w dziedzinie Fouriera

Definiujemy go analogicznie:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(v) \cdot X_2(f - v) dv = X_1(f) * X_2(f)$$

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(w) \cdot X_2(\omega - w) dw = X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

Splot w tych dziedzinach posiada te same właściwości, co w dziedzinie t : przemienność, łączność, dwuliniowość, itd.

Odwrócone twierdzenie o splocie:

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X_1(f) * X_2(f)$$

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

Wniosek: interpretacja Fouriera dla modulacji amplitudy

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot t) \quad \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad Y(f) = X(f) * \left(\frac{1}{2} \cdot [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] \right)$$

$$X(f) * \left(\frac{1}{2} \cdot [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] \right) = \frac{1}{2} \cdot [X(f) * \delta(f + f_c)] + \frac{1}{2} \cdot [X(f) * \delta(f - f_c)]$$

Twierdzenie o modulacji (amplitudy):

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot t) \quad \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \quad Y(f) = \frac{1}{2} \cdot X(f + f_c) + \frac{1}{2} \cdot X(f - f_c)$$

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(\omega_c \cdot t) \quad \xleftrightarrow[\text{ICFT}(\omega)]{\text{CFT}(\omega)} \quad Y(\omega) = \frac{1}{2} \cdot X(\omega + \omega_c) + \frac{1}{2} \cdot X(\omega - \omega_c)$$

Sygnał okresowy

$$x(t) = x(t + n \cdot T)$$

T – okres podstawowy (zwykle zakładamy $T > 0$)

$$n = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

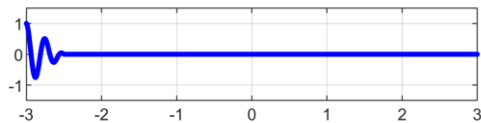
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T)$$

$x_0(t)$ – wzorzec okresu. Można założyć, że $x_0(t)$ jest zerowe poza przyjętym odcinkiem t o długości T , ale w ogólności nie jest to konieczne.

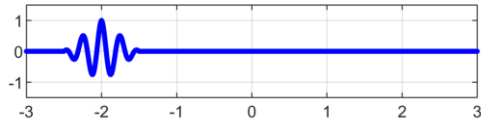
Przykłady sygnałów okresowych

$$T=1$$

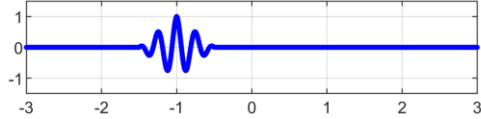
$$x_0(t+3 \cdot T)$$



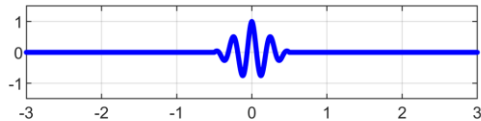
$$x_0(t+2 \cdot T)$$



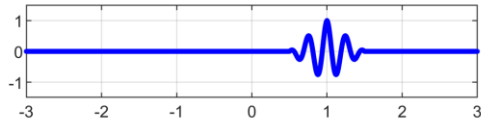
$$x_0(t+T)$$



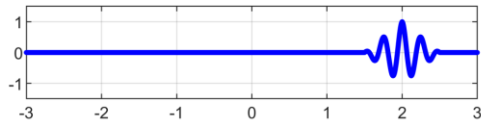
$$x_0(t)$$



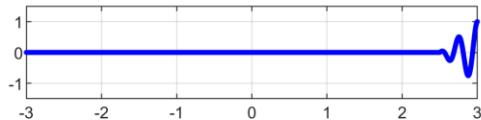
$$x_0(t-T)$$



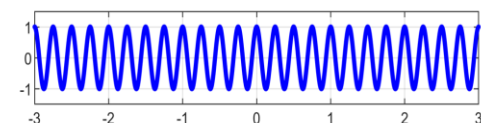
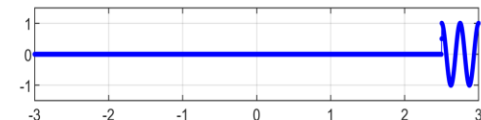
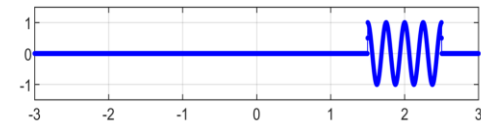
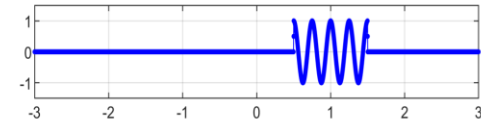
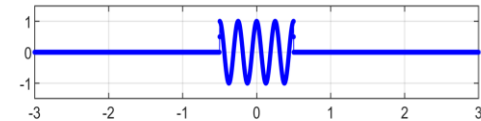
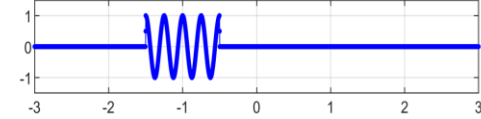
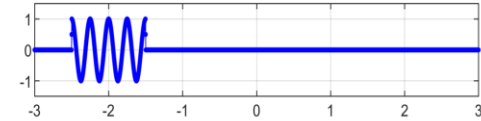
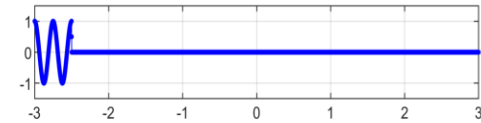
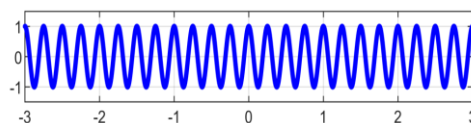
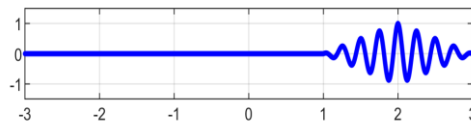
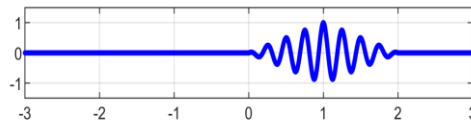
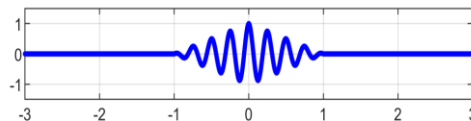
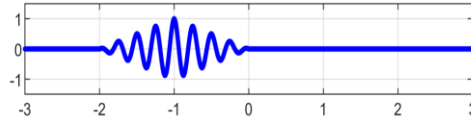
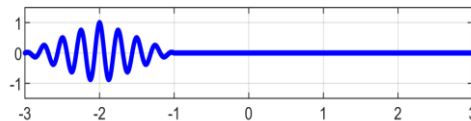
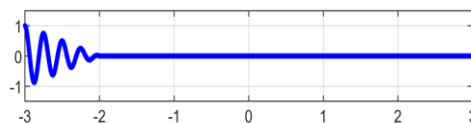
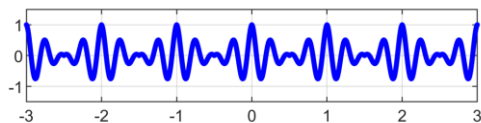
$$x_0(t-2 \cdot T)$$



$$x_0(t-3 \cdot T)$$



$$x(t)$$



Sygnał okresowy

$$x(t) = x(t + n \cdot T)$$

$$n = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

T – okres podstawowy (zwykle zakładamy $T > 0$)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T) = x_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot T) = x_0(t) * g_T(t)$$

pseudo-funkcja: grzebień Diraca

Szereg Fouriera (wersja zespolona)

Sygnał musi spełniać warunki Dirichleta!

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_T \cdot t} \quad : \quad f_T = \frac{1}{T}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} \quad : \quad f_n = n \cdot f_T$$

czyli:

$$f_1 = f_T$$

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} dt$$

Szereg Fouriera (wersja zespolona)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T)$$

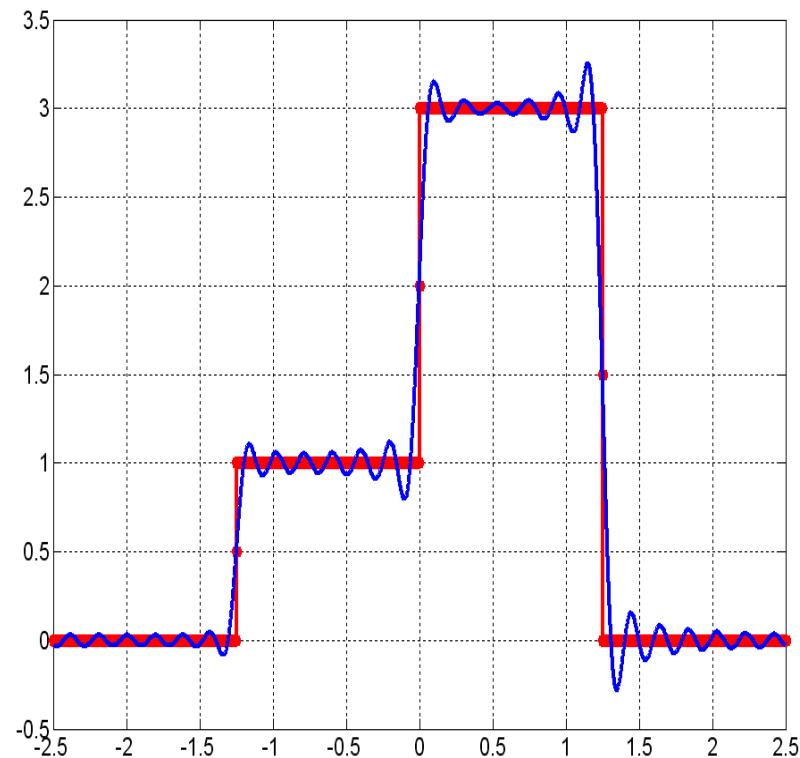
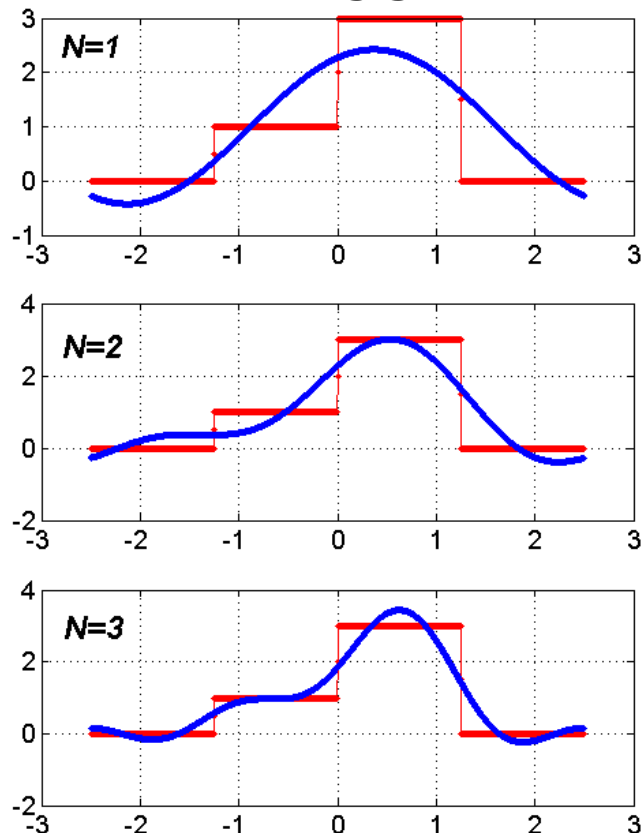
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot n \cdot \omega_T \cdot t} \quad : \quad \omega_T = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot \omega_n \cdot t} \quad : \quad \omega_n = n \cdot \omega_T$$

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega_n \cdot t} dt$$

Przykład aproksymacji szeregiem Fouriera dla sygnałów schodkowych z okresem T

$T = 5 \text{ s}$



Szereg Fouriera w dziedzinie f

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_0(f - n \cdot F)$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot n \cdot t_F} \quad : \quad t_F = \frac{1}{F}$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n} \quad : \quad t_n = n \cdot t_F$$

$$c_n = \frac{1}{F} \cdot \int_{f_0}^{f_0+F} X(f) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n} df$$

Szereg Fouriera w dziedzinie ω

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_0(\omega - n \cdot \Omega)$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot \omega \cdot n \cdot t_{\Omega}} \quad : \quad t_{\Omega} = \frac{1}{\Omega}$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot \omega \cdot t_n} \quad : \quad t_n = n \cdot t_{\Omega}$$

$$c_n = \frac{1}{\Omega} \cdot \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Omega} X(\omega) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_n} d\omega$$

Przykład

$$x_0(t) = \Pi\left(\frac{t}{\Delta t}\right) \quad : \quad \Delta t < T$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T)$$

$n \neq 0$:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot t / T} dt = \frac{1}{T} \cdot \left[\frac{e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot t / T}}{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n / T} \right]_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} = \frac{1}{T} \cdot \frac{e^{-j \cdot \pi \cdot n \cdot \Delta t / T} - e^{+j \cdot \pi \cdot n \cdot \Delta t / T}}{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n / T} = \\ &= \frac{\Delta t}{T} \cdot \frac{e^{j \cdot \pi \cdot n \cdot \Delta t / T} - e^{-j \cdot \pi \cdot n \cdot \Delta t / T}}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \Delta t / T} = \frac{\Delta t}{T} \cdot \frac{\sin(\pi \cdot n \cdot \Delta t / T)}{\pi \cdot n \cdot \Delta t / T} \end{aligned}$$

$n = 0$:

$$c_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot t / T} dt = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} 1 dt = \frac{\Delta t}{T}$$

Czyli:

$$c_n = \frac{\Delta t}{T} \cdot \text{sinc}(\pi \cdot n \cdot \Delta t / T)$$

Porównanie szeregu i CFT

Dla ostatniego przykładu:

$$c_n = \frac{\Delta t}{T} \cdot \text{sinc}(\pi \cdot n \cdot \Delta t / T) \qquad \Pi\left(\frac{t}{\Delta t}\right) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \Delta t \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot \Delta t)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot X_0(f_n)$$

Porównując odpowiednie wzory bez trudu stwierdzamy, że jest to ogólna zależność

– w pierwszym podejściu można założyć, że sygnał x_0 jest niezerowy tylko na odcinku o długości okresu, po którym całkujemy wyznaczając c_n .

Czyli dla sygnału rzeczywistego wartości c_n i c_{-n} są zawsze sprzężone. Można to także wykazać wprost ze wzoru na c_n .

Interpretacja szeregu Fouriera dla sygnału rzeczywistego

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} \quad : \quad f_n = n \cdot f_T$$

$$c_n = |c_n| \cdot e^{j \cdot \varphi_n}$$

$$e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) + j \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t)$$

$$\begin{aligned} c_n \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} + c_{-n} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_{-n} \cdot t} &= c_n \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} + \overline{c_n} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} = \\ &= |c_n| \cdot e^{j \cdot \varphi_n} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) + |c_n| \cdot e^{j \cdot \varphi_n} \cdot j \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) + \\ &\quad + |c_n| \cdot e^{-j \cdot \varphi_n} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) - |c_n| \cdot e^{-j \cdot \varphi_n} \cdot j \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) = \\ &= 2 \cdot |c_n| \cdot [\cos(\varphi_n) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) - \sin(\varphi_n) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t)] \end{aligned}$$

Interpretacja szeregu Fouriera dla sygnału rzeczywistego

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} \quad : \quad f_n = n \cdot f_T$$

$$c_n = |c_n| \cdot e^{j \cdot \varphi_n}$$

$$2 \cdot |c_n| \cdot [\cos(\varphi_n) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) - \sin(\varphi_n) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t)] =$$

$$= 2 \cdot |c_n| \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t + \varphi_n)$$

$$x(t) = |c_0| \cdot e^{j \cdot \varphi_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \cdot |c_n| \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t + \varphi_n) =$$

$$= d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t - \beta_n)$$

Ważny wzorek:

Dla $n > 0$: $d_n = 2 \cdot |c_n|$; $\beta_n = -\varphi_n$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$d_0 = c_0; \quad |d_0| = \pm d_0 \quad \wedge \quad (\beta_0 = 0 \vee \beta_0 = \pm \pi); \quad \beta_0 = \pm \varphi_0$$

Interpretacja szeregu Fouriera

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} \quad : \quad f_n = n \cdot f_T$$

$$x(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t - \beta_n)$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) + b_n \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t)$$

Dla $n > 0$: $a_n = 2 \cdot |c_n| \cdot \cos(\varphi_n); \quad b_n = -2 \cdot |c_n| \cdot \sin(\varphi_n)$

$$a_n = d_n \cdot \cos(\beta_n); \quad b_n = d_n \cdot \sin(\beta_n)$$

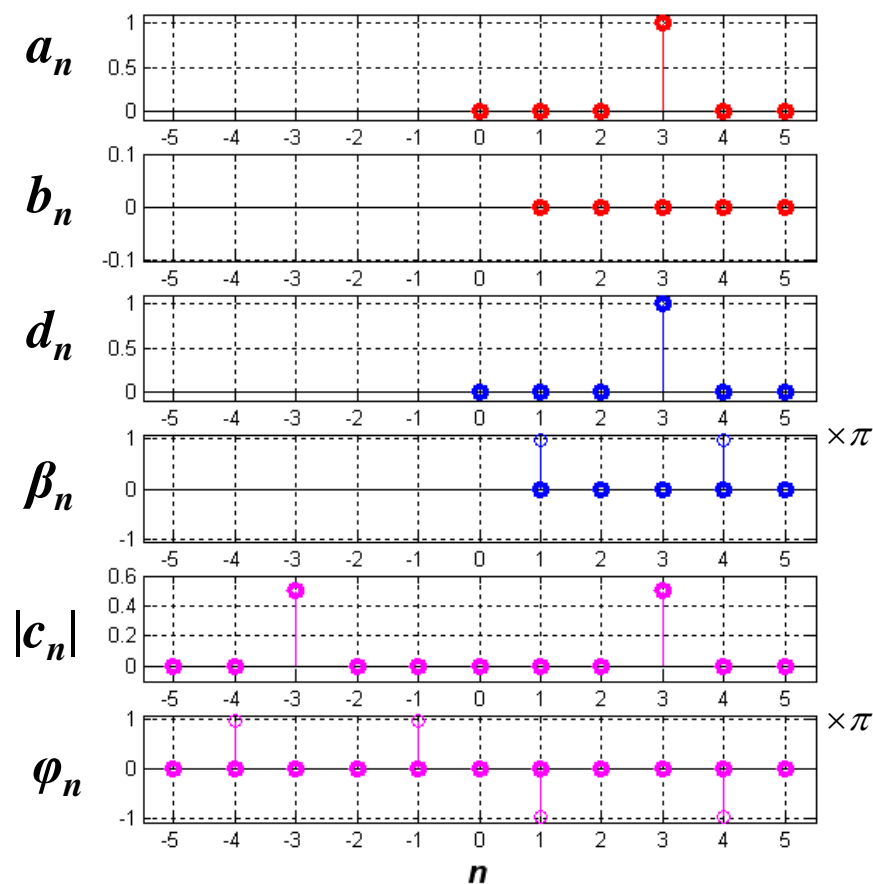
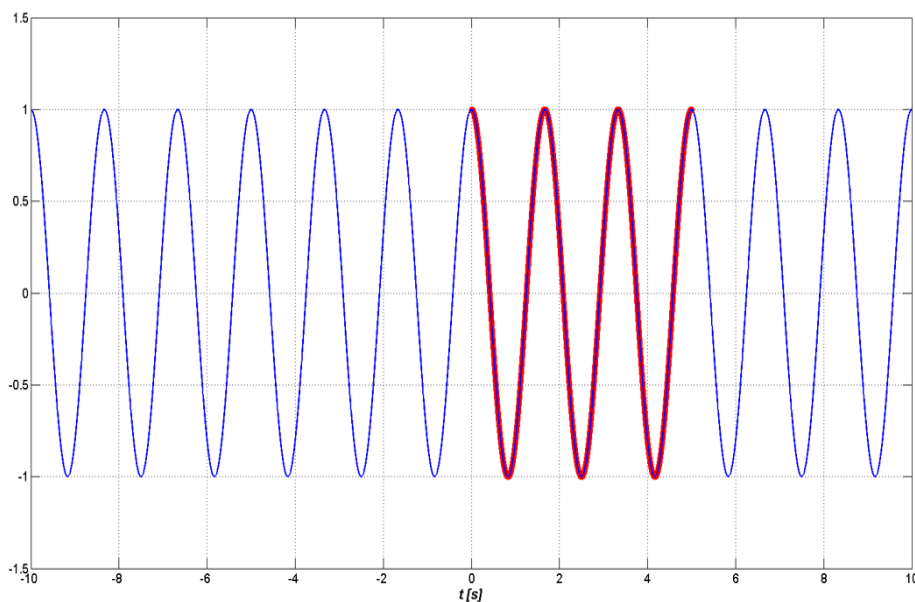
Ważny wzorek:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Przykład wyznaczania szeregu Fouriera dla sygnału kosinusoidalnego o całkowitej liczbie okresów w odcinku T

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot t + \varphi_s) & \text{dla } t \in (0, T) \\ \text{z war. Dirichleta} & \text{dla } t = 0 \text{ lub } t = T \end{cases}$$

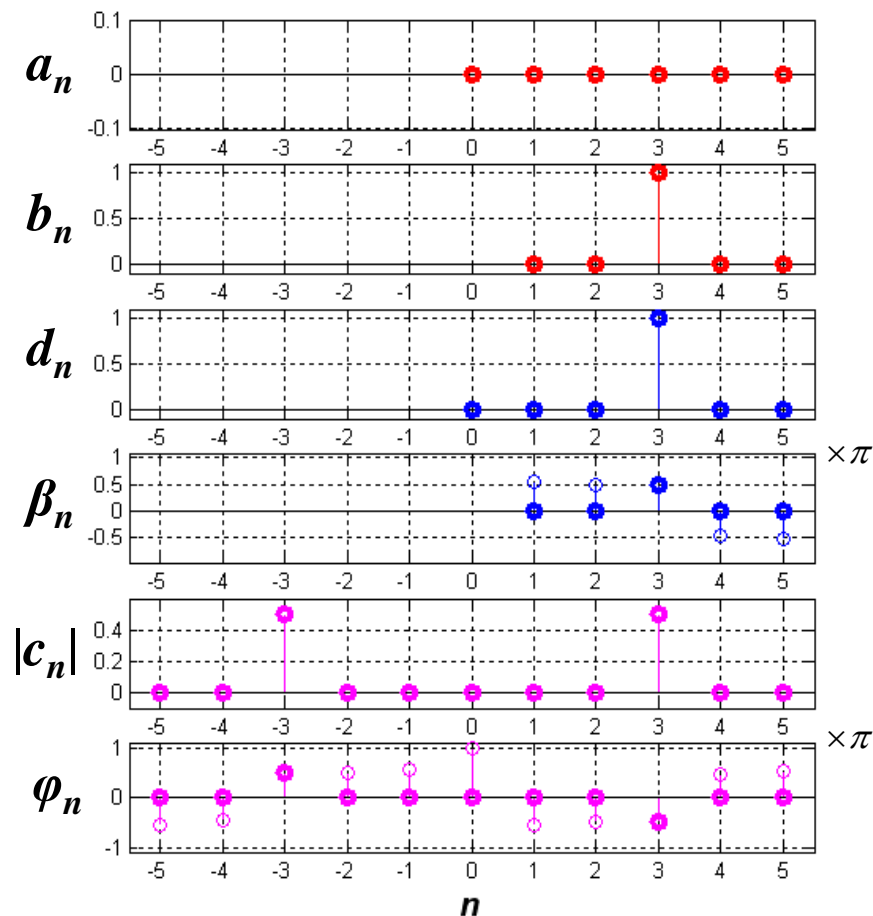
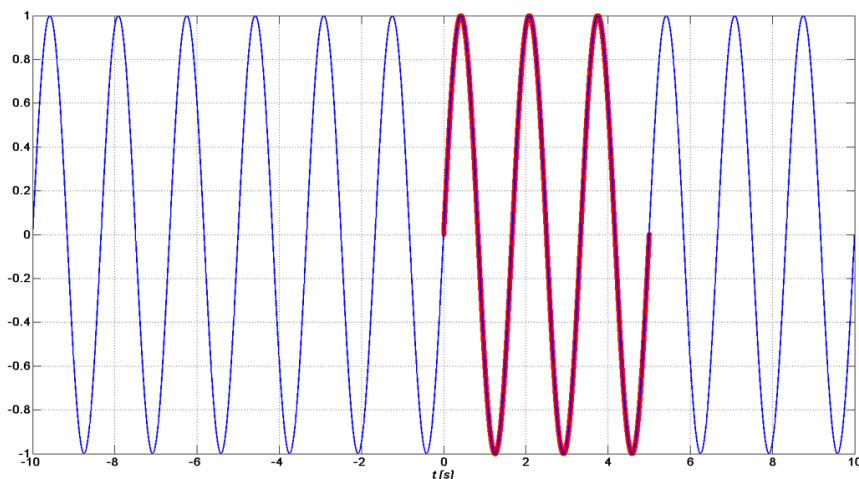
$$f_s = 3 \cdot f_T; \quad \varphi_s = 0; \quad T = 5s:$$



Przykład wyznaczania szeregu Fouriera dla sygnału sinusoidalnego o całkowitej liczbie okresów w odcinku T

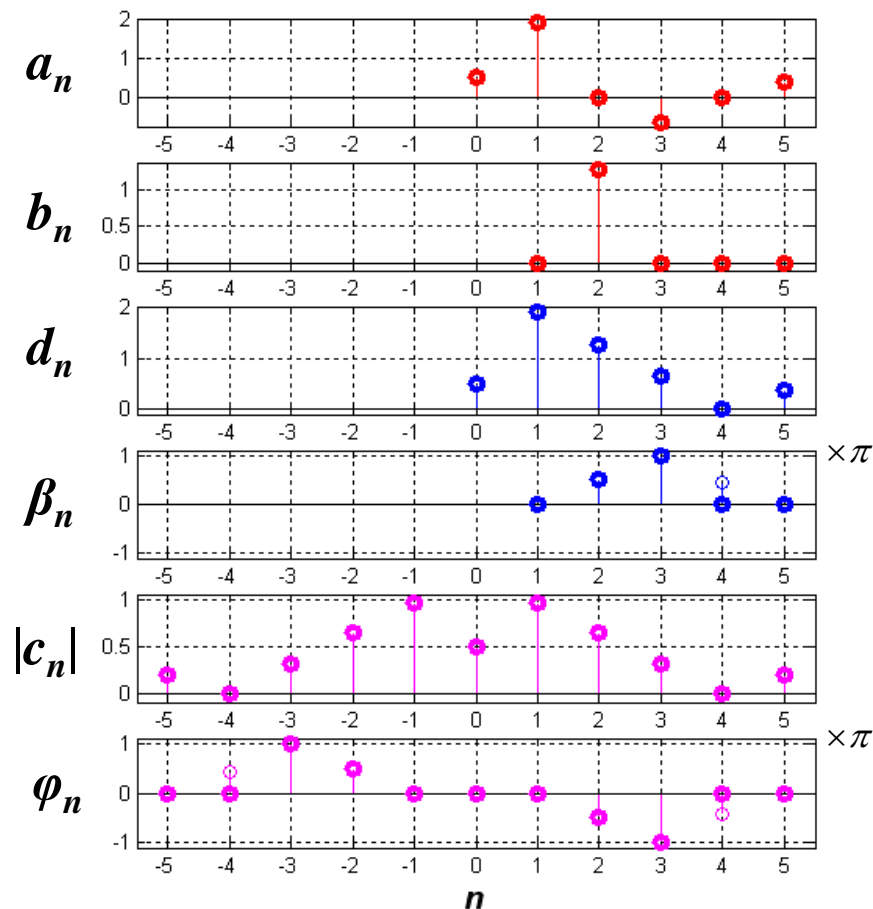
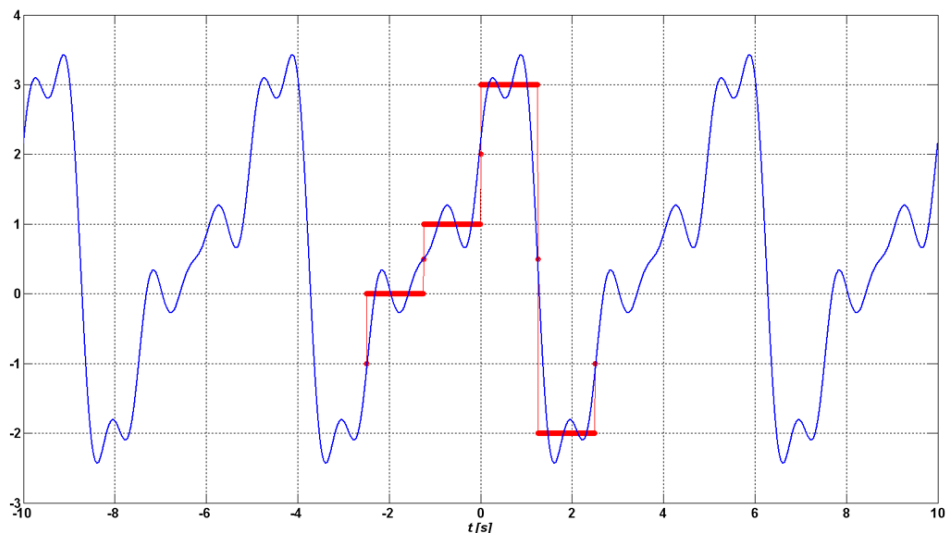
$$x(t) = \begin{cases} \cos(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot t + \varphi_s) & \text{dla } t \in (0, T) \\ \text{z war. Dirichleta} & \text{dla } t = 0 \text{ lub } t = T \end{cases}$$

$$f_s = 3 \cdot f_T; \quad \varphi_s = -\frac{\pi}{2}; \quad T = 5s:$$



Przykład wyznaczania szeregu Fouriera dla sygnału schodkowego

$N=5$



Wyliczenie pomocnicze

Założenie, że (ko)sinusoida o częstotliwości f_s ma w całkowanym odcinku całkowitą liczbę okresów bardzo ułatwia całkowanie!

$$t_2 - t_1 = T$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_s \cdot t) dt &= \frac{1}{2} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \cos(4 \cdot \pi \cdot n \cdot f_s \cdot t) + 1 dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (t_2 - t_1) = \frac{T}{2} \end{aligned}$$

Ważny wzorek:

$$\cos^2(\alpha) = \frac{\cos(2 \cdot \alpha) + 1}{2}$$

Przykład

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot (t - t_d))$$

$$T = \frac{1}{f_T}$$

$$f_T = f_s$$

$$t_d = \frac{\varphi_d}{2 \cdot \pi \cdot f_s}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} \cos(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot (t - t_d)) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_T \cdot t} dt =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} \cos(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot t - \varphi_d) \cdot [\cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_T \cdot t) - j \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_T \cdot t)] dt =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} [\cos(\varphi_d) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot t) + \sin(\varphi_d) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot t)] \cdot [\cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_T \cdot t) - j \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_T \cdot t)] dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{dalej} \\ \text{tylko} \\ \text{dla} \\ n = 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{\cos(\varphi_d)}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} \cos^2(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot t) dt - j \cdot \frac{\sin(\varphi_d)}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} \sin^2(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot t) dt = \left[\frac{\cos(\varphi_d)}{T} - j \cdot \frac{\sin(\varphi_d)}{T} \right] \cdot \frac{T}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{-j \cdot \varphi_d}$$

Proszę sprawdzić samodzielnie, co otrzymamy dla: $n = -1$ oraz dla n innych niż 1 lub -1.

Przykład (cd.)

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot (t - t_d))$$

$$f_T = f_1 = f_s$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \cdot e^{-j \cdot \varphi_d}; \quad c_{-1} = \frac{1}{2} \cdot e^{+j \cdot \varphi_d}$$

$$\text{dla } n \neq 1 \text{ i } n \neq -1 : c_n = 0$$

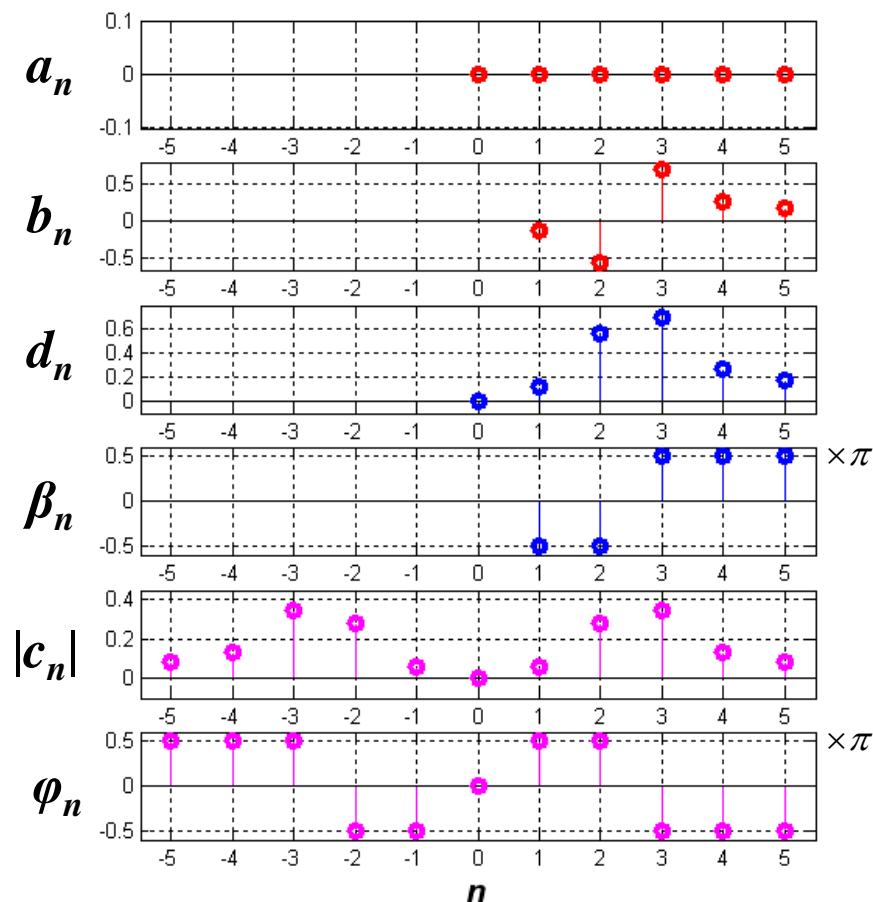
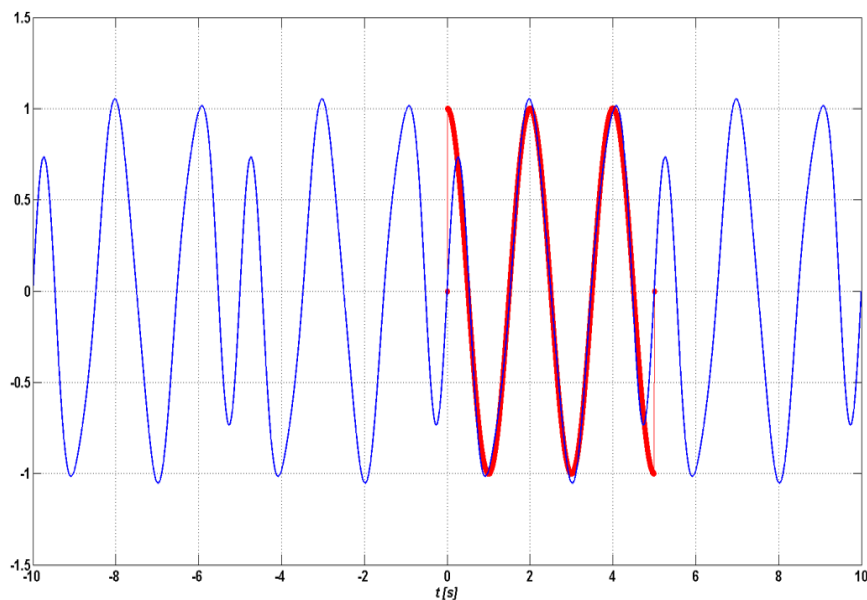
$$t_d = \frac{\varphi_d}{2 \cdot \pi \cdot f_s}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} = \frac{1}{2} \cdot e^{-j \cdot \varphi_d} \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t} + \frac{1}{2} \cdot e^{+j \cdot \varphi_d} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t} = \\ &= \frac{e^{+j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t - \varphi_d)} + e^{-j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t - \varphi_d)}}{2} = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t - \varphi_d) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot (t - t_d)) \end{aligned}$$

Przykład wyznaczania szeregu Fouriera dla sygnału kosinusoidalnego o niecałkowitej liczbie okresów w odcinku T

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot t + \varphi_s) & \text{dla } t \in (0, T) \\ \text{z war. Dirichleta} & \text{dla } t = 0 \text{ lub } t = T \end{cases} \quad a_n$$

$$f_s = 2.5 f_T; \quad \varphi_s = 0; \quad T = 5s:$$



Transformata CFT szeregu Fouriera

Transformata sygnału okresowego

Wyznamy transformatę dla szeregu Fouriera:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} \quad \begin{matrix} \xleftarrow{CFT} \\ \xrightarrow{ICFT} \end{matrix} \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \delta(f - f_n)$$

a zatem dla sygnału okresowego:

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot X_0(f_n)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T) \quad \begin{matrix} \xleftarrow{CFT} \\ \xrightarrow{ICFT} \end{matrix} \quad X(f) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_0(f_n) \cdot \delta(f - f_n)$$

Można założyć wstępnie, że sygnał x_0 jest niezerowy tylko na odcinku o długości T , ale generalnie nie jest to konieczne.

Analagiczne zależności „w drugą stronę”

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \delta(t + t_n) \quad \begin{matrix} \xleftarrow{CFT} \\ \xrightarrow{ICFT} \end{matrix} \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n}$$

a zatem:

(po uwzględnieniu różnic wynikających z faktu stosowania tym razem ICFT, a nie – jak poprzednio – CFT)

$$x(t) = \frac{1}{F} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t_n) \cdot \delta(t - t_n) \quad \begin{matrix} \xleftarrow{CFT} \\ \xrightarrow{ICFT} \end{matrix} \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_0(f - n \cdot F)$$

Tym razem można wstępnie dla ułatwienia założyć, że transformata $X_0(f)$ jest niezerowa tylko na odcinku o długości F , ale wzory są poprawne także w innym przypadku.

Transformata grzebienia Diraca

$$g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_n) \quad : \quad t_n = n \cdot T$$

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \delta(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} dt = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \delta(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot 0} dt = \frac{1}{T}$$

$$g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t} \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad G_T(f) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n/T)$$

$\Delta f = 1/T$

$$g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot T) \quad \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \quad G_T(f) = \Delta f \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n \cdot \Delta f)$$

- 1. Transformaty: sygnału stałego, delty Diraca, sygnału harmonicznego oraz \cos/\sin .**
- 2. Delta Diraca jako pseudo-funkcja graniczna ciągu funkcji – definicja i właściwości.**
- 3. Splot: definicja, twierdzenie o splocie, splot z deltą Diraca, transformata sygnału $\Lambda(t)$, twierdzenie o modulacji.**
- 4. Szereg Fouriera: różne wersje, efekt okresowości.**
- 5. Zależność szeregu i transformaty dla sygnału okresowego.**
- 6. Transformata szeregu Fouriera.**
- 7. Transformata pseudo-funkcji grzebienia Diraca.**

***Zapraszam na ćwiczenia ...
lub do laboratorium ...***