Wzory, równania i zależności
z teorii sygnałów

Łukasz Przystupa

31 stycznia 2023

całość opara na wykładach Kohorty.

1. Wzory Eulera

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$
$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$
$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

2. Sygnał jako wektor

Iloczyn skalarny:

$$< x, y >= \int_D x(t) \cdot \overline{y(t)} dt$$

Norma (długość wektora):

$$||x(t)||^2 =< x(t), x(t) >$$

Metryka (odległość sygnałów):

$$\rho(x, y) = ||x - t|| = \sqrt{< x(t) - y(t), x(t) - y(t) >}$$

Korelacja (jak bardzo sygnały są podobne):

$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \overline{x(\tau - t)}\ dt$$

Energia sygnału:

$$Energia(x(t)) = ||X(t)||^2_{L^2} = \int_D |x(t)|^2 dt$$

Wektory są ortogonalne (czyli prostopadłe względem siebie (czyli liniowo niezależne)) jeśli:

$$< x(t), y(t) >= ||x(t)|| \cdot ||y(t)|| \cdot cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow x \perp y$$

2.1. Twierdzenie Percevala - o zachowaniu energii

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \ = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

2.2. Twierdzenie o zmianie skali

$$\delta(a \cdot t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \frac{1}{|a|} \cdot \delta(f)$$

2.3. Twierdzenie o zachowaniu odległości

Jeżeli:

$$x(t) \circ y(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(f) \circ Y(f)$$

to:

$$||x(t) - y(t)|| = ||X(f) - Y(f)||$$

2.4. Splot

Definicja:

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

Właściwości splotu:

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X_1(f)X_2(f)$$

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t0)$$

3. Szereg Fouriera

Postać numeryczna:

$$x_F = a_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot cos\,(2\pi n) + b_n \cdot sin\,(2\pi n)$$

Postać zespolona:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j2\pi n f_T t} \qquad gdzie:\ f_T = 1/T$$

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int\limits_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-j2\pi n f_T \cdot t}\, dt \qquad gdzie:\ T - okres\ x(t)$$

Więc w CFT: $$c_n = \frac{\Delta t}{T} X_0(n \cdot \frac{1}{T})$$

Sygnał musi spełniać warunki Dirichleta!!!

Postać okresowa:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T)$$

4. Definicje różnych transformat

4.1. Transformata Fouriera (CFT i ICFT)

$$x(t) \xleftrightarrow[\text{aaa}]{\text{bbb}} X(f)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft}\, dt$$

$$x(at) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \frac{1}{|a|} X(\frac{f}{a})$$

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(f)e^{-2j\pi f t_0}$$

$$\overline{x(t)} \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \overline{X(-f)}$$

Należy wspomnieć że iloczyn skalarny jest niezależny od wybranej dziedziny:

$$x(t) \circ (y) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(f) \circ Y(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{y(t)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\overline{Y(f)}df$$

4.2. Transformacja sygnału próbkowanego

$$x_p(t) = x(t) \cdot g_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) \cdot \delta(t - \Delta t)$$

$$\Downarrow$$

$$X_p(f) = X(f) * G_{\Delta t}(f) = X(f) * \left[\frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n \cdot f_p) \right]$$

4.3. Transformacja Dyskretna (DTFT)

$$x_p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) \cdot \delta(t - n\Delta t)$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) \cdot e^{-j2\pi \frac{f}{f_p} \cdot n}$$

$$gdzie: \; f_p = \; f \; probkowania$$

4.4. Transformacja Hilberta

$$x(t) \xleftrightarrow[\text{IHT}]{HT} x^H(t)$$

$$x^H(t) = -\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{\tau - t}\, d\tau$$

Czyli:

$$x^H(t) = \frac{1}{\pi \cdot t} * x(t) = h_H(t) * x(t)$$

$$\Downarrow$$

$$h_H(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} -j \cdot sgn(f)$$

4.5. Transformacja okienkowana

Odpowiednik transmitancji Fouriera, pomnożonej przez okno:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot w(\tau - t) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$w(t)$ - funkcja okienkowa. Funkcja, która poza przedziałem osiąga 0!

4.6. Transformacja Gabora

To specjalny rodzaj transmitancji okienkowej, w której okno jest funkcją Gausa.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^G(f,t) \cdot e^{+j2\pi \cdot f \cdot t}\, df$$

$$X^G(f,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot w(\tau - t) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t}\, d\tau$$

$$gdzie: \ w(t) = e^{-\pi \cdot f^2}$$

4.7. Transformacja falkowa

$$X_\psi(a,t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h_\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\, d\tau$$

$$\Updownarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{c_\psi} \cdot \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{a^2 \cdot \sqrt{a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X_\psi(a,\tau) h_\psi\left(\frac{\tau - t}{a}\right)\, d\tau\ da$$

$$przy\ czym: \ c_\psi 2 \cdot \int_{0}^{+\infty} \frac{|H_\psi(f)|^2}{f} df < +\infty$$

$h_\psi(t)$ - falka sygnału. Funkcja, która poza przedziałem dąży do 0

5. Sygnały podstawowe i ich transformaty

$$x(t) = \sin(2\pi f t)$$
$$x(t) = \cos(2\pi f t)$$

$$\cos(x) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \frac{1}{2}(\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0))$$
$$\sin(x) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} j\frac{1}{2}(\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0))$$

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & dla\ |t| < 1/2 \\ 1/2 & dla\ |t| = 1/2 \\ 0 & dla\ |t| > 1/2 \end{cases}$$

$$\delta(x) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} 1$$

$$sinc(t) = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f} & dla\ t \neq 1 \\ 1 & dla\ t = 0 \end{cases}$$

$$\Pi(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} sinc(\pi f)$$

$$\Lambda(x) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} sinc^2(\pi f)$$

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1 & dla\ -1 \leqslant t \leqslant 0 \\ -t+1 & dla\ 0 < t \leqslant 1 \\ 0 & dla\ pozostalych\ t \end{cases}$$

$$g_T(t) = \sum \frac{1}{T} e^{j2\pi f_n t} \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} G_T(f) = \sum \delta(f - \frac{n}{T})$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & dla\ t > 0 \\ \frac{1}{2} & dla\ t = 0 \\ 0 & dla\ t < 0 \end{cases}$$

$$u(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \frac{1}{2}\delta(f) + \begin{cases} -j \cdot \frac{1}{2\pi f} & dla\ f \neq 0 \\ 0 & dla\ f = 0 \end{cases}$$

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & dla\ t > 0 \\ \frac{1}{2} & dla\ t = 0 \\ -1 & dla\ t < 0 \end{cases}$$

$$sgn(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \begin{cases} -j \cdot \frac{1}{2\pi f} & dla\ f \neq 0 \\ 0 & dla\ f = 0 \end{cases}$$

$$Gaus(t) = e^{-at^2}$$

$$e^{-at^2} \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} e^{-af^2}$$

$$g_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta t)$$

$$G_{\Delta t}(F) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n\frac{1}{\Delta t})$$

6. Sygnały okresowe:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T)$$

Gdzie $x_0(t)$ - wzorzec sygnału,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T) = x_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot T) = x_0(t) * g_T(t)$$

Fukcja $g_T(t)$ jest to pseudo funkcja reprezentująca grzebień Diraca

Dla funkcji zespolonych:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{j2\pi n f_T t} \qquad f_T = \frac{1}{T}$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n c_n = \frac{1}{T} X_0(f_n) \qquad f_n = n \cdot f_T$$

7. Aproksymacja sygnału

Aproksymacją sygnału $x(t)$ jest:

$$x(t) \approx \sum_{n=1}^{N} a_n b_n(t)$$

czyli:

$$x(t) + e(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot b_n(t)$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot b_n - e(t)$$

gdzie współczynniki a i b odpowiadają macierzom:

$$b = A \cdot a$$

$$b = \begin{bmatrix} x \circ b_1 \\ x \circ b_2 \\ x \circ b_3 \\ ... \\ x \circ b_N \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} b_1 \circ b_1 & b_2 \circ b_1 & ... & b_N \circ b_1 \\ b_1 \circ b_2 & b_2 \circ b_2 & ... & b_N \circ b_2 \\ b_1 \circ b_3 & b_2 \circ b_3 & ... & b_N \circ b_3 \\ ... & ... & ... & ... \\ b_1 \circ b_N & b_2 \circ b_N & ... & b_N \circ b_N \end{bmatrix} \qquad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ ... \\ a_N \end{bmatrix}$$

W gdyby wektory byłyby ortogonalne, całość sprowadza się do prostego równania:

$$a_k = \frac{x \circ b_k}{||b_k||^2} \qquad k = 1, 2, ..., N$$

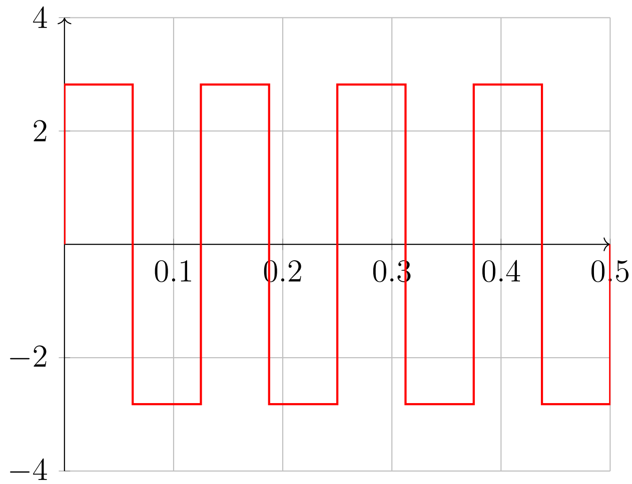
Kiedy nasze wektory są znormalizowane to:

$$||b_k||^2 = 1$$

$$a_k = x \circ b_k \qquad k = 1, 2, ..., N$$

8. Baza Harra (ortonormalna)

$$H_{0,0}(t) = \Pi(t - 0.5) \qquad D : t \in < 0, 1 >$$
$$H_{0,1} = \Pi(2 \cdot (t - 0.25)) - \Pi(2 \cdot (t - 0.75))$$
$$H_{k,m} = 2^{\frac{k}{2}} \cdot H(2^k \cdot (t - \frac{m-1}{2^k})) \qquad m = 1, 2, ..., 2^k$$



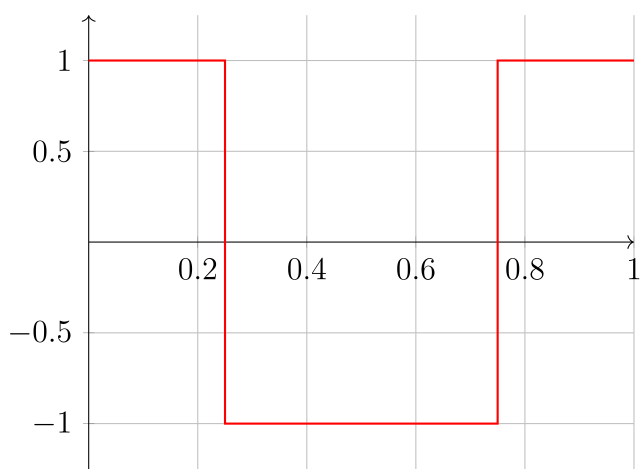
Czyli kolejne sygnały bazy:

$$b_1(t) = H_{0,0}(t)$$
$$b_2(t) = H_{1,\sum}(t)$$
$$b_3(t) = H_{2,\sum}(t)$$
$$b_4(t) = H_{3,\sum}(t)$$
$$...$$

9. Baza Walsha

$$W_{0,0}(t) = \Pi(t - 0.5) \qquad D : t \in < 0, 1 >$$
$$W_{0,1}(t) = W_{0,0}(2t) + (-1)^1 \cdot W_{0,0}(2 \cdot (t - 0.5))$$

$$W_{k,2m-1}(t) = W_{k-1,m}(2t) + (-1)^{m-1} \cdot W_{k-1,m}(2 \cdot (t - 0.5)) \qquad dla\ k > 1$$
$$W_{k,2m}(t) = W_{k-1,m}(2t) + (-1)^{m} \cdot W_{k-1,m}(2 \cdot (t - 0.5)) \qquad dla\ k > 1$$



Analogicznie jak w bazie Harra

10. Twierdzenie o pochodnej

Pochodna pierwszego rzędu:

$$dla \lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$$
$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} j2\pi f \cdot X(f)$$

Pochodna n-tego rzędu:

$$dla \lim_{t\to\pm\infty} x^{(m)}(t) = 0 \ : \ m = 0, 1, 2, ..., n-1$$
$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} (j2\pi f)^n \cdot X(f)$$

11. Twierdzenie o całce

$$\int_t^{-\infty} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \frac{1}{j2\pi f} \cdot X(f) \ dla \ f = 0$$

dla $f = 0$ liczymy osobno.

12. Filtry

Głównym parametrem określającym filtr jest jego transmitancja:

$$H(s) = \frac{b_0 \cdot s^0 + b_1 \cdot s^1 + b_2 \cdot s^2 ...}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 ...}$$

Transmitancje można rozłożyć na ułamki proste, tak że miejsca zerowania licznika to „zera” a miejsca zerowania mianownika to „bieguny”

$$H(s) = \frac{b}{a} \cdot \frac{(s - z_0) \cdot (s - z_1)...}{(s - p_0) \cdot (s - p_1)...}$$

Następnie zgodnie z zasadą na rozkładanie na ułamki proste:

$$H(s) = \frac{c_0}{s - p_0} + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_3}{s - p_3} + ...$$

Z założeniem że:

$$c_k = H(s) \cdot (s - p_k)|_{s=p_k}$$

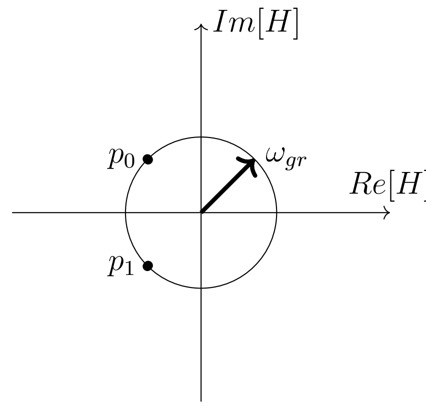
Dla tych biegunów których część rzeczywista jest ujemna, filtr jest stabilny. Dla części leżącej na 0 układ jest meta stabilny i potrzebne są dodatkowe obliczenia aby potwierdzić jego stabilność. Natomiast dla tych, których część rzeczywista jest dodatnia układ jest niestabilny.

12.1. Filtr dolnoprzepustowy Butterwortha

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{f}{f_{gr}}\right)^{2N}} \Rightarrow |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_{gr}}\right)^{2N}}}$$

gdzie N oznacza rząd filtru (im wyższy tym bardziej strome zbocze zaraz po f_{gr}
Dużo łatwiej jednak wyjść z:

$$H(s) = \frac{\omega_{gr}^N}{(s-p_0)(s-p_1)...} =$$
$$= \frac{c_0}{s-p_0} + \frac{c_1}{s-p_1} + ...$$



gdzie N - ilość biegunów

$$gdy : s = j2\pi f$$
$$H(f) = \frac{c_0}{j2\pi f - p_0} + \frac{c_1}{j2\pi f - p_1} + ...$$

$$Odpowiedz\ impulsowa :$$
$$h(t) = u(t)\sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot e^{p_n \cdot t}$$

12.2. Filtr dolnoprzepustowy, górno i pasmowe

Wszystkie powyższe rozważania były dla filtru dolnoprzepustowego

$$H_{FDP}(f) = H_0\left(\frac{f}{f_g}\right) \qquad H_{FPP}(f) = H_0\left(\frac{f^2 - f_d\cdot f_g}{f\cdot(f_g - f_d)}\right)$$
$$H_{FGP}(f) = H_0\left(-\frac{f_d}{f}\right) \qquad H_{FPZ}(f) = H_0\left(-\frac{f\cdot(f_g - f_d)}{f^2 - f_d\cdot f_g}\right)$$

Dla charakterystyk Laplaca:

$$H_{FDP}(s) = H_0\left(j2\pi\frac{s}{s_g}\right) \qquad H_{FPP}(s) = H_0\left(2\pi\frac{s^2 - s_d\cdot s_g}{s\cdot(s_g - s_d)}\right)$$
$$H_{FGP}(s) = H_0\left(-j2\pi\frac{s_d}{s}\right) \qquad H_{FPZ}(s) = H_0\left(-2\pi\frac{s\cdot(s_g - s_d)}{s^2 - s_d\cdot s_g}\right)$$

13. Próbkowanie

Próbkujemy sygnał pseudo funkcją grzebieniową:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - n\Delta t)$$

W dziedzinie Fouriera odpowiada to:

$$X_p(f) = \frac{1}{\Delta t} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n \cdot f_p)$$

$$gdzie: \ f_p = \frac{1}{\Delta t}$$

Aby odtworzyć sygnał należy:

$$X(f) = X_p(f) \cdot H(f)$$

Gdzie:

$$H(f) = \Delta t \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_p}\right)$$

$H(f)$ - funkcja transmitancji idealnego filtru dolnoprzepustowego

Czyli, funkcja odtworzona w dziedzinie czasu ma postać:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) \cdot sinc(\pi f_p \cdot (t - \Delta t))$$