Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie

Teoria sygnałów

Wykład 7

Dr inż. Przemysław Korohoda
Katedra Elektroniki, AGH, Kraków

home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2

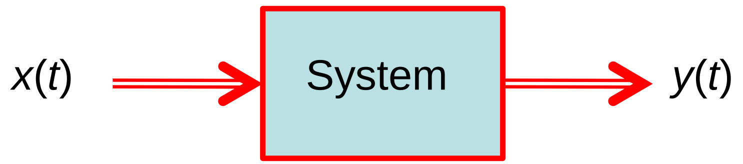
UPEL: TS 2022

Główne tematy

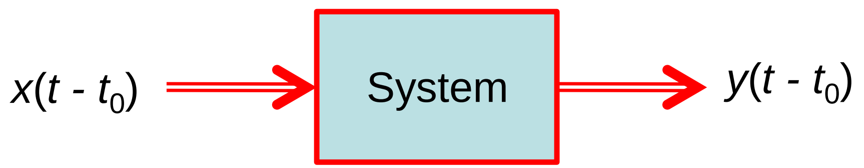
1. Systemy liniowe i stacjonarne.
2. Odpowiedź impulsowa filtru.
3. Transmitancja filtru i jej cechy.
4. Filtr Butterwortha.
5. Filtry Czebyszewa.
6. Filtr eliptyczny.
7. Przekształcanie filtrów.
8. Przykłady charakterystyk filtrów.

System stacjonarny (*ang. Time Invariant*) = niezmienny w czasie

Jeżeli:



to:



dla dowolnego t_0.

System liniowy (*ang. Linear*)

Jeżeli:

$$x_1(t) \Rightarrow \boxed{\text{System}} \Rightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \Rightarrow \boxed{\text{System}} \Rightarrow y_2(t)$$

to:

$$a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) \Rightarrow \boxed{\text{System}} \Rightarrow a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$

dla dowolnych liczb a i b (rzeczywistych, a nawet zespolonych!).

System liniowy stacjonarny (*ang. Linear Time Invariant*) = *LTI*

Jeżeli:

$$x_1(t) \Rightarrow \boxed{h(t)} \Rightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \Rightarrow \boxed{h(t)} \Rightarrow y_2(t)$$

***h(t)* – odpowiedź impulsowa**

to:

$$a \cdot x_1(t - t_0) + b \cdot x_2(t - t_0) \Rightarrow \boxed{h(t)} \Rightarrow a \cdot y_1(t - t_0) + b \cdot y_2(t - t_0)$$

dla dowolnych t_0 oraz a i b (jak poprzednio).

Odpowiedź impulsowa

Twierdzenie o splocie:

Dziedzina sygnału (czasu) | Dziedzina transformaty Fouriera (częstotliwości)

$$x(t)*h(t) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X(f)\cdot H(f)$$

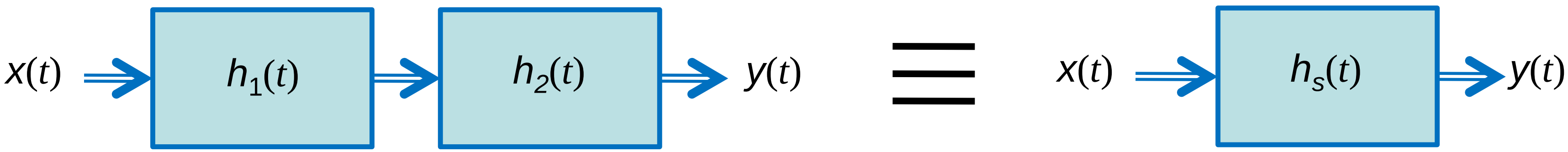
Dla systemu liniowego, stacjonarnego (*LTI = ang. Linear Time Invariant*):

***h*(*t*) – odpowiedź impulsowa**

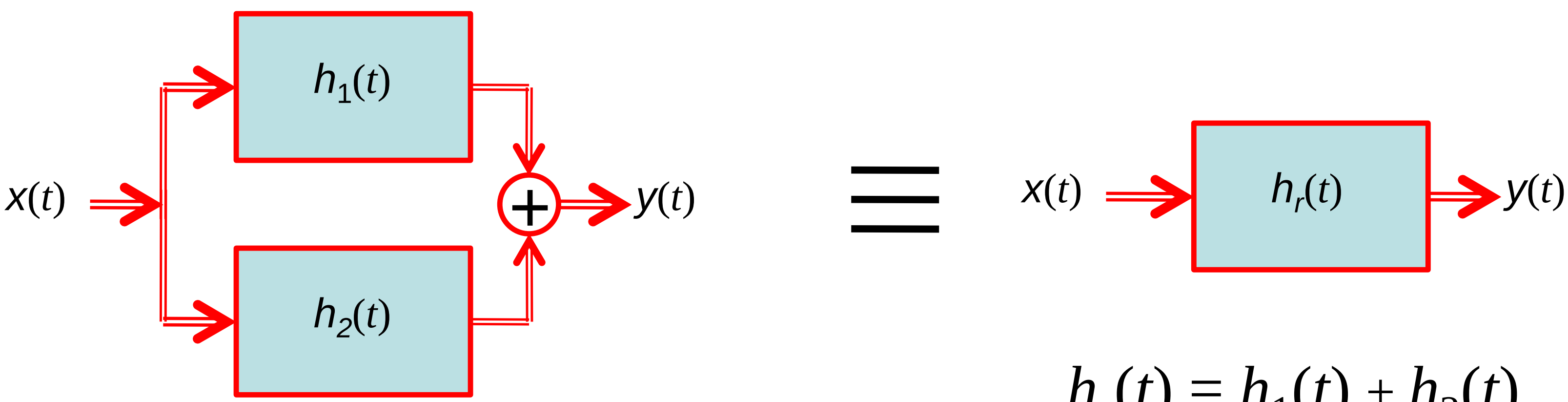
$$\delta(t) \Rightarrow \boxed{h(t)} \Rightarrow h(t)$$

$$\delta(t)*h(t)=h(t)$$

Połączenia systemów *LTI* w dziedzinie czasu



$$h_s(t) = h_1(t) * h_2(t)$$



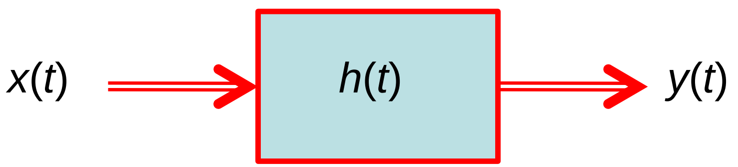
$$h_r(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

Dla systemów *LTI* można stosować różne, równoważne sposoby opisu

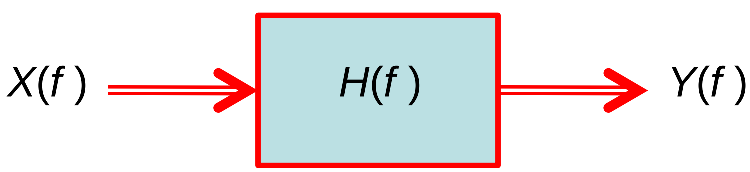
$$x(t) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X(f)$$

$$y(t) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} Y(f)$$

$$h(t) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} H(f)$$



$$y(t) = x(t) * h(t)$$



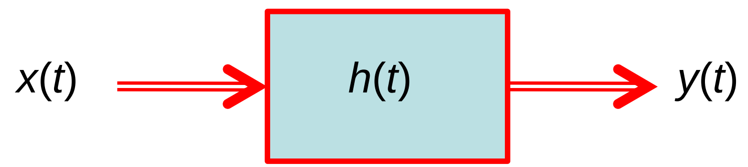
$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

Dla systemów *LTI* można stosować różne, równoważne sposoby opisu

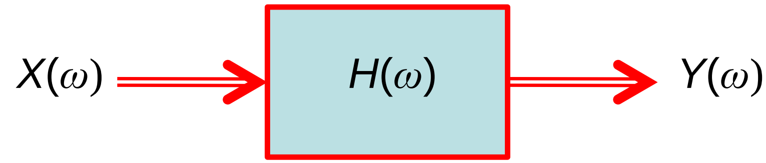
$$x(t) \underset{ICFT_\omega}{\overset{CFT_\omega}{\rightleftarrows}} X(\omega)$$

$$y(t) \underset{ICFT_\omega}{\overset{CFT_\omega}{\rightleftarrows}} Y(\omega)$$

$$h(t) \underset{ICFT_\omega}{\overset{CFT_\omega}{\rightleftarrows}} H(\omega)$$

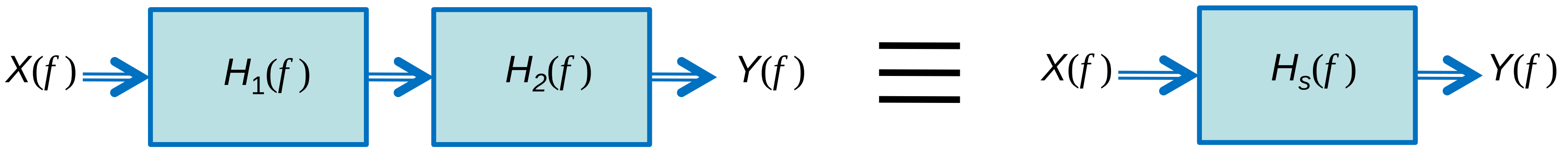


$$y(t) = x(t) * h(t)$$

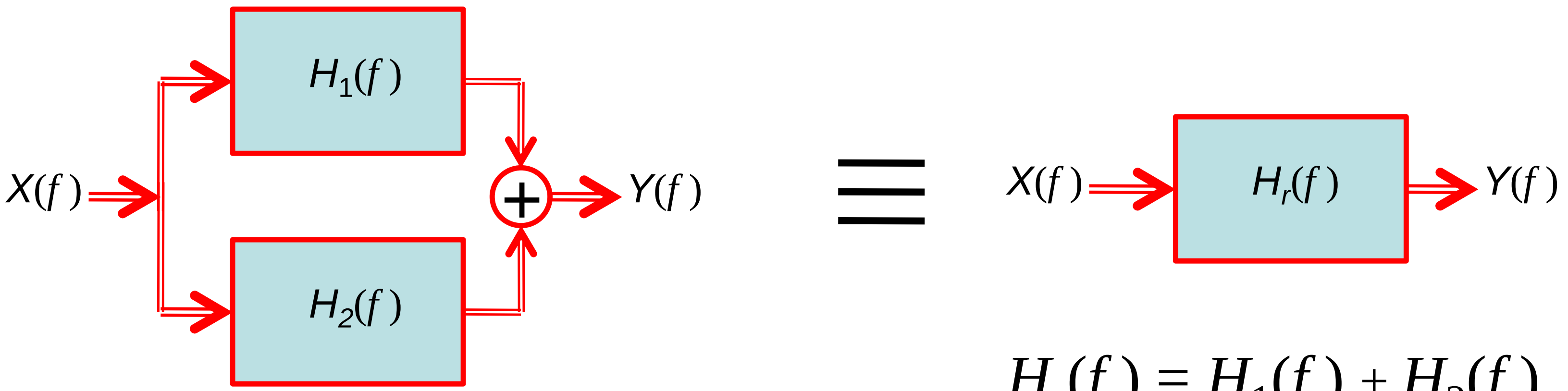


$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

Połączenia systemów *LTI* w dziedzinie częstotliwości

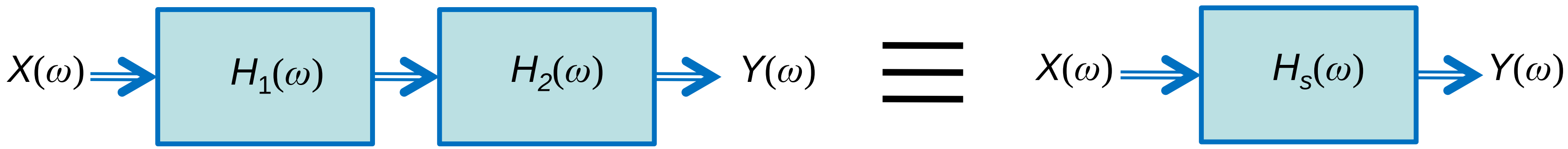


$$H_s(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$$

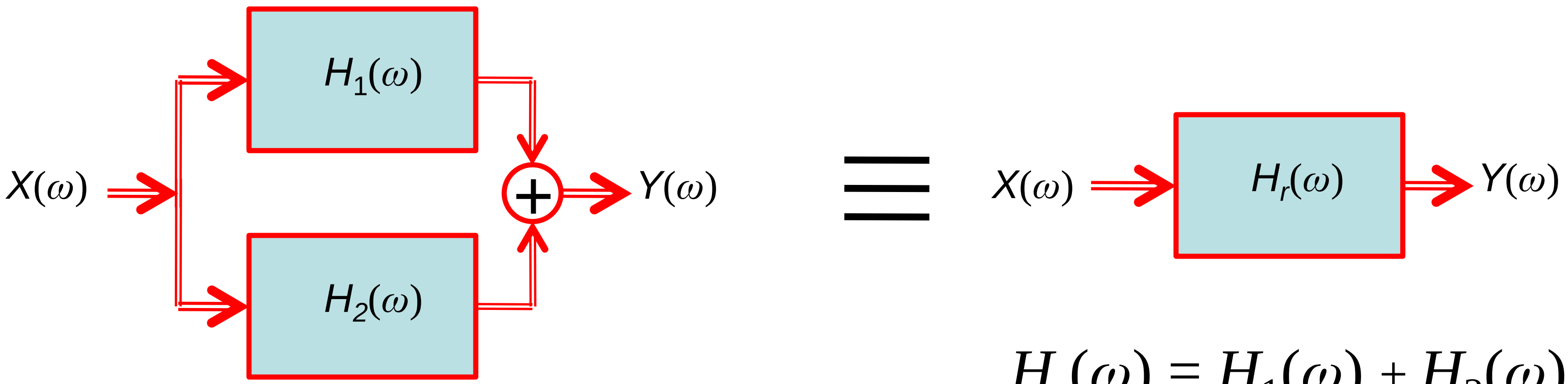


$$H_r(f) = H_1(f) + H_2(f)$$

Połączenia systemów *LTI* w dziedzinie pulsacji



$$H_s(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega)$$



$$H_r(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega)$$

Efekt przetwarzania (filtracji) opisany w dziedzinie częstotliwości

System (filtr):

$$H(f) = \mathrm{Re}\big(H(f)\big) + j \cdot \mathrm{Im}\big(H(f)\big) = \big|H(f)\big| \cdot e^{j \cdot \Phi\left(H(f)\right)}$$

Przetwarzanie (filtracja):

$$Y(f) = |Y(f)| \cdot e^{j \cdot \varphi_Y(f)} = |X(f)| \cdot e^{j \cdot \varphi_X(f)} \cdot |H(f)| \cdot e^{j \cdot \varphi_H(f)} =$$

$$= |X(f)| \cdot |H(f)| \cdot e^{j \cdot [\varphi_X(f) + \varphi_H(f)]}$$

czyli:

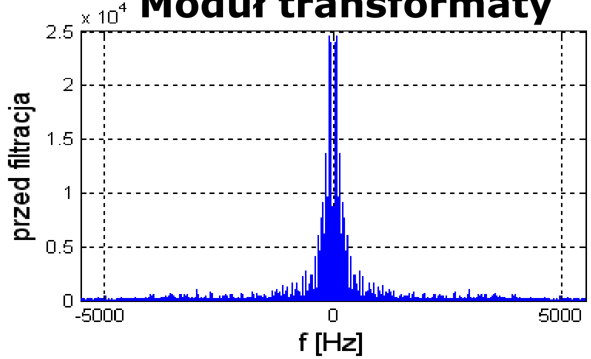
$$|Y(f)| = |X(f)| \cdot |H(f)|$$

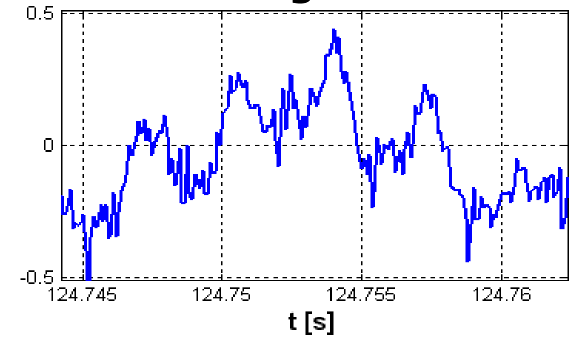
$$\varphi_Y(f) = \varphi_X(f) + \varphi_H(f)$$

Filtracja w dziedzinie transformaty Fouriera i czasu

Moduł transformaty | **Przebiegi w czasie**

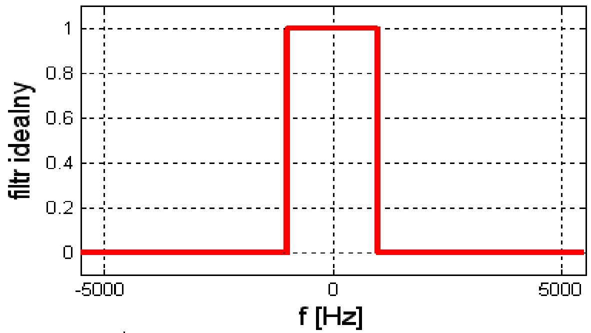
$|X(f)|$

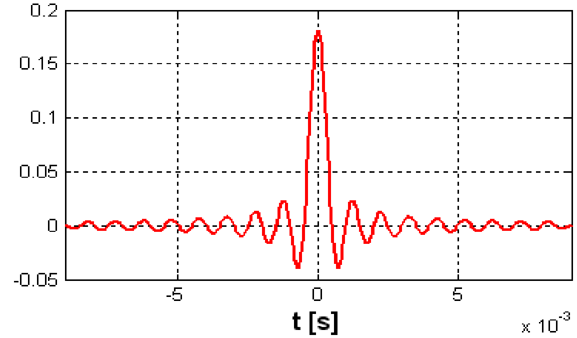




$x(t)$

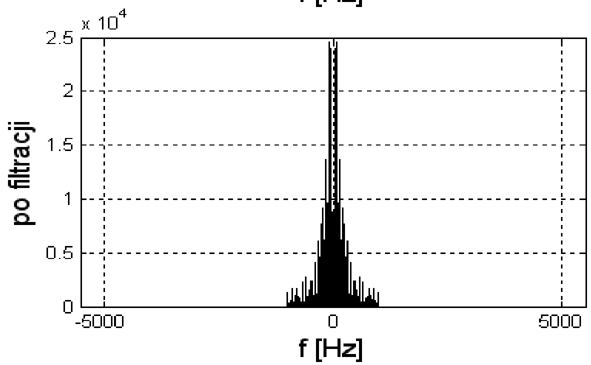
$|H(f)| = H(f)$

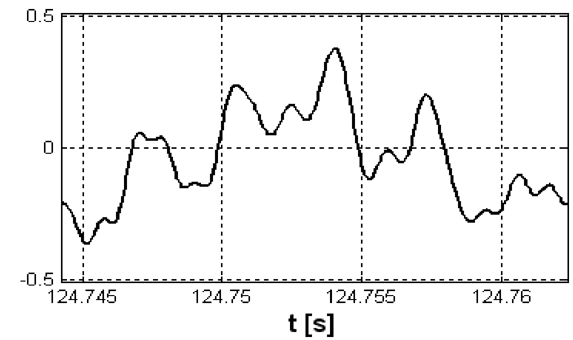




$h(t)$

$|Y(f)|$





$y(t)$

Transformacja Laplace'a

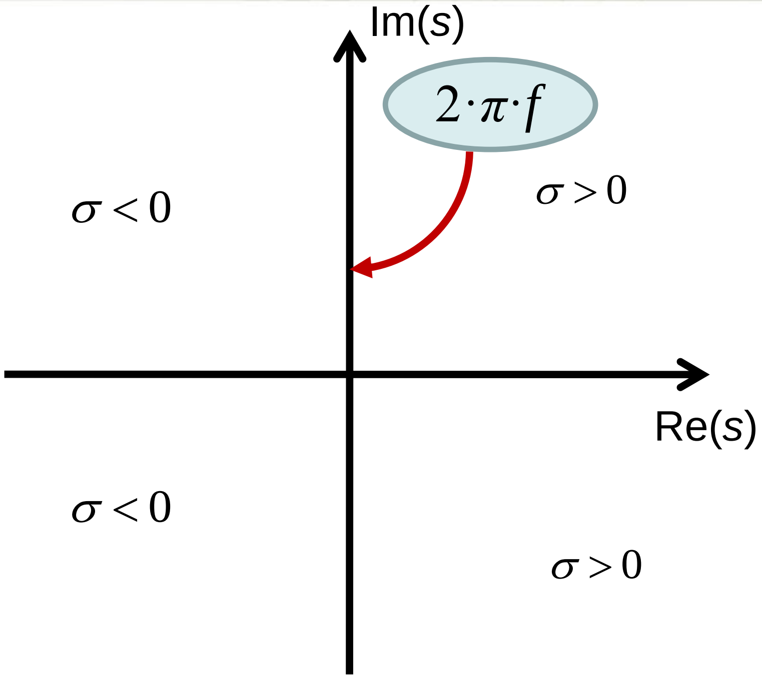
$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} \, dt$$

$$X(s) \in \mathbf{C}$$

$$s = \sigma + j \cdot \omega$$

$$s = \sigma + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$\boxed{\mathrm{Im}(s) = 2 \cdot \pi \cdot f}$$



Transformacja Fouriera:

$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \, dt}$$

Transformacja Laplace'a jest liniowa!

Przykład wyliczenia dla $x(t) = u(t) \cdot e^{a \cdot t}$

$$\int_0^{+\infty} e^{a \cdot t} \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s) \cdot t} dt =$$

$$\lim_{t \to \infty} e^{(a-s) \cdot t} = e^{j \cdot \mathrm{Im}(a-s) \cdot t} \lim_{t \to \infty} e^{\mathrm{Re}(a-s) \cdot t}$$

$$= \{a - s \neq 0\} = \left[\frac{e^{(a-s) \cdot t}}{a - s} \right]_0^{+\infty} = \{\mathrm{Re}(a-s) < 0\} = -\frac{1}{a - s}$$

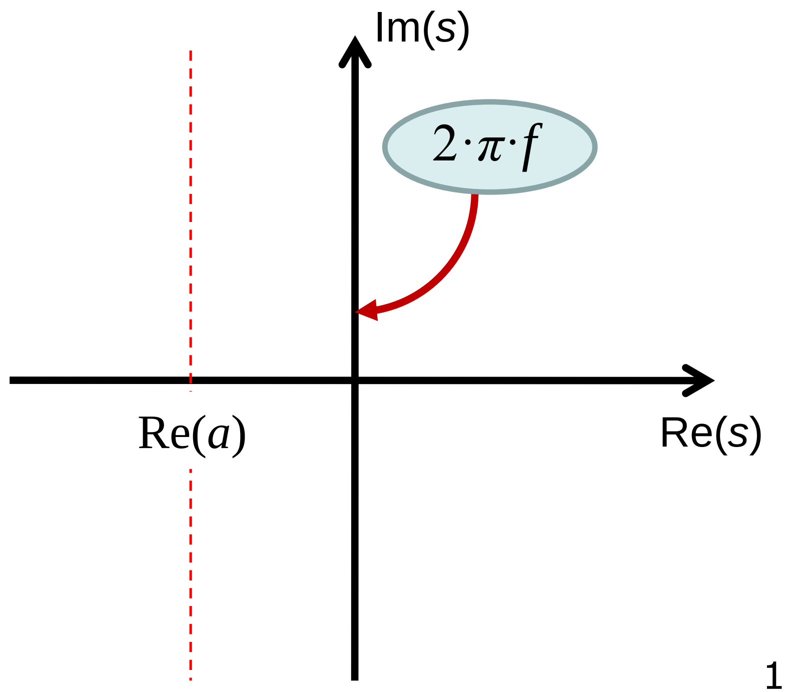
Obszar zbieżności, OZ (*ang. ROC = Region of Convergence*):

$$\mathrm{Re}(a - s) < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$$

Sygnał i jego transformata Laplace'a

$$e^{a\cdot t}\cdot u(t) \xleftrightarrow[ILT]{LT} \frac{1}{s-a} \quad : \quad \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$$

Sens transformaty Fouriera dla tego przypadku…

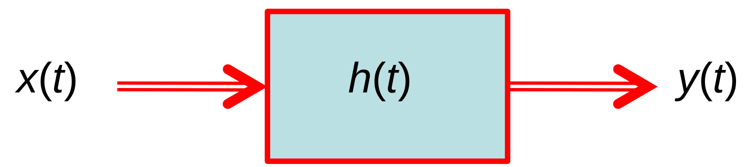


Dla systemów *LTI* można stosować różne, równoważne sposoby opisu

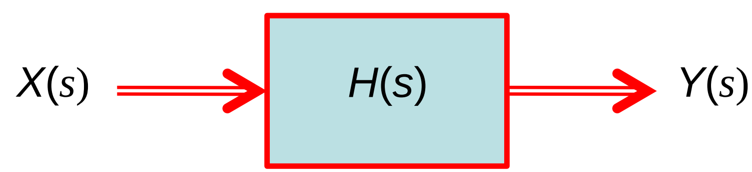
$$x(t) \underset{ILT}{\overset{LT}{\rightleftarrows}} X(s)$$

$$y(t) \underset{ILT}{\overset{LT}{\rightleftarrows}} Y(s)$$

$$h(t) \underset{ILT}{\overset{LT}{\rightleftarrows}} H(s)$$



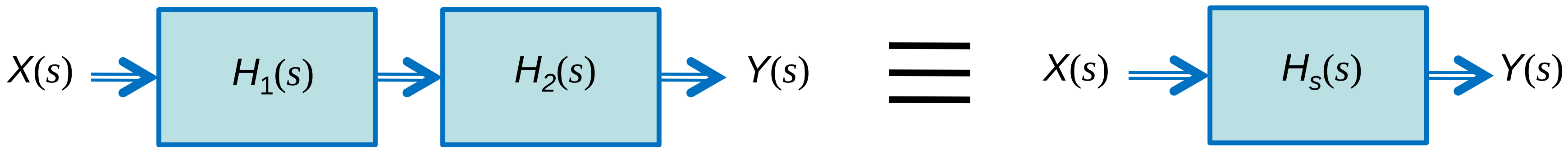
$$y(t) = x(t) * h(t)$$



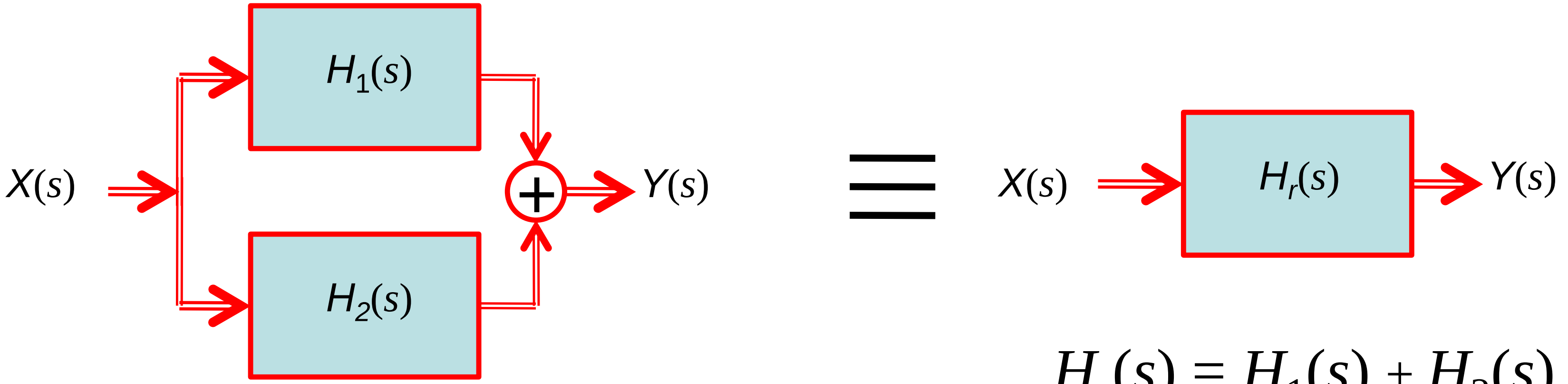
$$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

Twierdzenie o splocie dla transformacji Laplace'a

Połączenia systemów *LTI* w dziedzinie Laplace'a



$$H_s(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$$



$$H_r(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

Transmitancja systemu

Twierdzenie o splocie

$$\boxed{x(t) * h(t) \xleftrightarrow[ILT]{LT} X(s) \cdot H(s)}$$

$$\boxed{Y(s) = X(s) \cdot H(s)}$$

Transmitancja

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \ldots + b_M \cdot s^M}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \ldots + a_N \cdot s^N}$$

$$H(s) = \frac{b_M}{a_N} \cdot \frac{(s - z_0) \cdot (s - z_1) \cdot \ldots \cdot (s - z_{M-1})}{(s - p_0) \cdot (s - p_1) \cdot \ldots \cdot (s - p_{N-1})}$$

… zera (z_m) i bieguny (p_n) transmitancji.

Rozkład transmitancji na ułamki proste

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \ldots + b_M \cdot s^M}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \ldots + a_N \cdot s^N}$$

Zwykle *M<N*
… i wtedy rozkład na ułamki proste

$$dla \quad p_k \neq p_l$$

jest następujący:

$$H(s) = \frac{c_0}{s - p_0} + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \ldots + \frac{c_{N-1}}{s - p_{N-1}}$$

Recepta jest prosta:

$$c_k = H(s) \cdot (s - p_k)\Big|_{s = p_k}$$

Odpowiedź impulsowa systemu (*LTI*) o danej transmitacji

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \ldots + b_M \cdot s^M}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \ldots + a_N \cdot s^N}$$

$$H(s) = \frac{c_0}{s - p_0} + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \ldots + \frac{c_{N-1}}{s - p_{N-1}}$$

$$H(s) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{c_n}{s - p_n} \quad \xrightarrow{ILT} \quad h(t) = u(t) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} c_n \, e^{p_n \cdot t}$$

$$\boxed{e^{a \cdot t} \, u(t) \quad \underset{ILT}{\overset{LT}{\longleftrightarrow}} \quad \frac{1}{s - a} \quad : \quad \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)}$$

Związki między transmitancją w dziedzinie Laplace'a i Fouriera
(pod warunkiem zgodności obszaru zbieżności)

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \ldots + b_M \cdot s^M}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \ldots + a_N \cdot s^N}$$

Charakterystyki częstotliwościowe (Fouriera):

$$H(s)\Big|_{s=j\cdot\omega} = H(\omega) = \frac{b_0 + b_1 \cdot (j\cdot\omega) + b_2 \cdot (j\cdot\omega)^2 + \ldots + b_M \cdot (j\cdot\omega)^M}{1 + a_1 \cdot (j\cdot\omega) + a_2 \cdot (j\cdot\omega)^2 + \ldots + a_N \cdot (j\cdot\omega)^N}$$

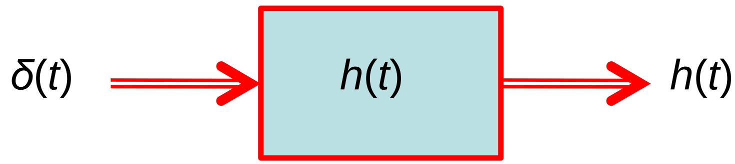
$$dla \quad \omega = 2\cdot\pi\cdot f$$

$$H(s)\Big|_{s=j\cdot 2\cdot\pi\cdot f} = H(f) = \frac{b_0 + b_1 \cdot (j\cdot 2\cdot\pi\cdot f) + b_2 \cdot (j\cdot 2\cdot\pi\cdot f)^2 + \ldots + b_M \cdot (j\cdot 2\cdot\pi\cdot f)^M}{1 + a_1 \cdot (j\cdot 2\cdot\pi\cdot f) + a_2 \cdot (j\cdot 2\cdot\pi\cdot f)^2 + \ldots + a_N \cdot (j\cdot 2\cdot\pi\cdot f)^N}$$

Stabilność i przyczynowość filtru

Filtr *LTI* jest przyczynowy, gdy: $h(t)=0$ dla $t<0$

Wyjaśnienie:



$$\delta(t)*h(t)=h(t)$$

Idealny filtr (DP):
$\boldsymbol{H(f)=\Pi(f/(2\cdot f_g))}$
nie jest przyczynowy !

Filtr jest stabilny, gdy ograniczony sygnał wejściowy daje zawsze ograniczony sygnał wyjściowy.

Filtr jest asymptotycznie stabilny, gdy z faktu, iż sygnał wejściowy od pewnej chwili staje się zerowy (i pozostaje taki aż do nieskończoności) wynika, że gdy *t* dąży do nieskończoności, to sygnał wyjściowy dąży do zera.

Jest tak, gdy: $\lim_{t \to \infty} h(t) = 0$ **,** **czyli, gdy:** $H(s)$: $\mathrm{Re}(p_k)<0$

Filtr Butterwortha

Założenie projektowe:

$$\left|H(f)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{f}{f_g}\right)^{2\cdot N}} \quad \Rightarrow \quad \left|H(f)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_g}\right)^{2\cdot N}}} \qquad \textbf{(1)}$$

Charakterystyka maksymalnie płaska:
pochodne wszystkich rzędów dążą do zera
dla $f \to 0 \quad oraz \quad f \to \infty$

$$\left|H(s)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j\cdot\omega_g}\right)^{2\cdot N}} = \frac{1}{1+(-1)^N\left(\frac{s}{\omega_g}\right)^{2\cdot N}} \qquad \textbf{(2)}$$

Można sprawdzić, że (2) sprowadza się do (1) po podstawieniu: *s=j·2·π·f*

Projektowanie filtru Butterwortha

$$\left|H(s)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\dfrac{s}{j\cdot\omega_g}\right)^{2\cdot N}} = \frac{1}{1+(-1)^N\left(\dfrac{s}{\omega_g}\right)^{2\cdot N}}$$

$$\downarrow$$

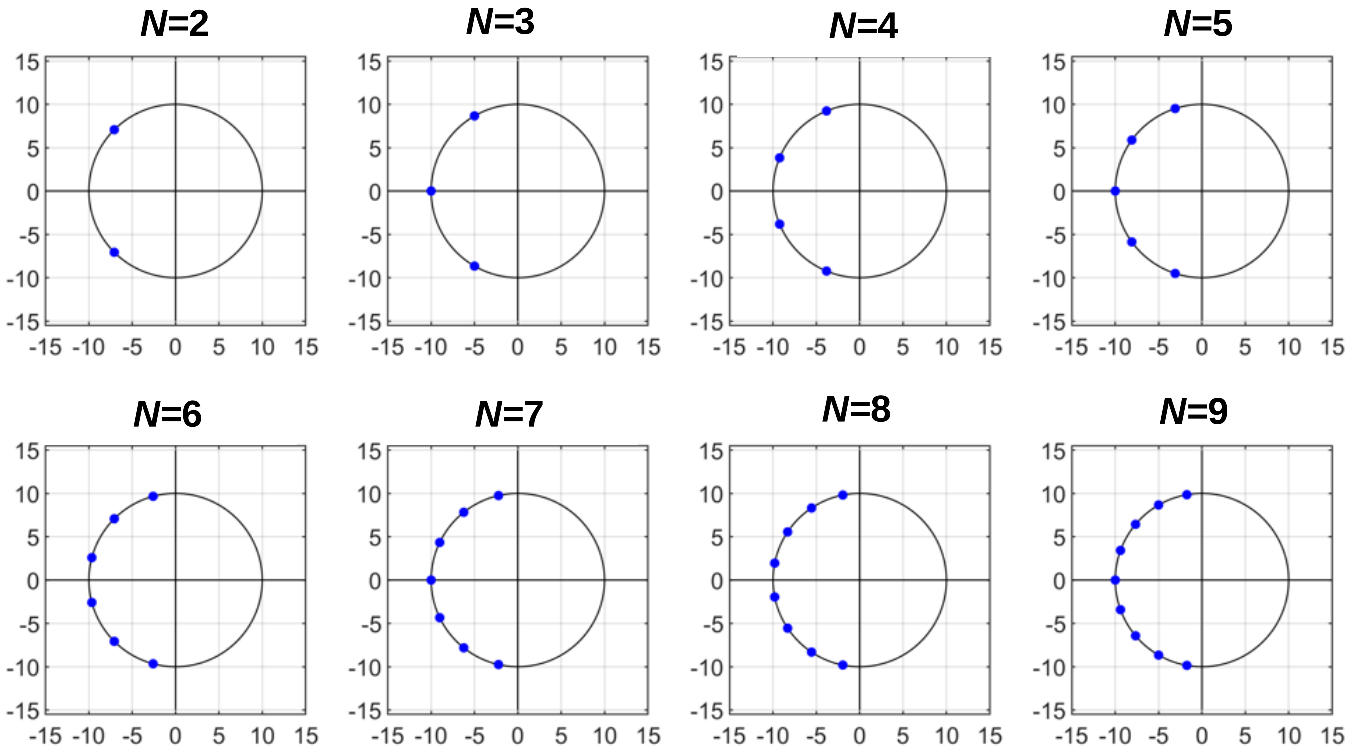
$$H(s) = \frac{b_0+b_1\cdot s+b_2\cdot s^2+\ldots+b_M\cdot s^M}{1+a_1\cdot s+a_2\cdot s^2+\ldots+a_N\cdot s^N}$$

Projektowanie filtru Butterwortha

Dolnoprzepustowy ($\omega_g=2\pi f_g$ **rad/s) filtr Butterwortha jest opisany w dziedzinie Laplace'a następująco:**

$$H(s)=\frac{(\omega_g)^N}{(s-p_0)\cdot(s-p_1)\cdot\ldots\cdot(s-p_{N-1})}=\prod_{k=0}^{N-1}\frac{\omega_g}{s-p_k}$$

$$\omega_g=10$$



Filtr Butterwortha
- odpowiedź impulsowa

$$H(s) = \frac{c_0}{s-p_0} + \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{s-p_2} + \ldots + \frac{c_{N-1}}{s-p_{N-1}}$$

$$H(s) = \sum_{n=0}^{N\text{-}1} \frac{c_n}{s-p_n} \xrightarrow{ILT} h(t) = u(t) \cdot \sum_{n=0}^{N\text{-}1} c_n \, e^{p_n \cdot t}$$

Dla filtru 2. rzędu (f_g = 1 Hz):

$$h(t) = u(t) \cdot 2 \cdot \left(\pi \cdot \sqrt{2}\right) \cdot e^{-\sqrt{2} \cdot \pi \cdot t} \cdot \sin\left(\sqrt{2} \cdot \pi \cdot t\right)$$

Dla filtru 3. rzędu (f_g = 1 Hz):

$$h(t) = u(t) \cdot \left[2 \cdot \pi \cdot e^{-2 \cdot \pi \cdot t} + e^{-\pi \cdot t} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\sqrt{3} \cdot \pi \cdot t\right) - 2 \cdot \pi \cdot \cos\left(\sqrt{3} \cdot \pi \cdot t\right) \right) \right]$$

Filtr Butterwortha
skala decybelowa i częstotliwość graniczna

$$\boxed{A(f) = |H(f)|}$$

$$A_{dB}(f) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{A(f)}{A_{ref}}\right) [dB]$$

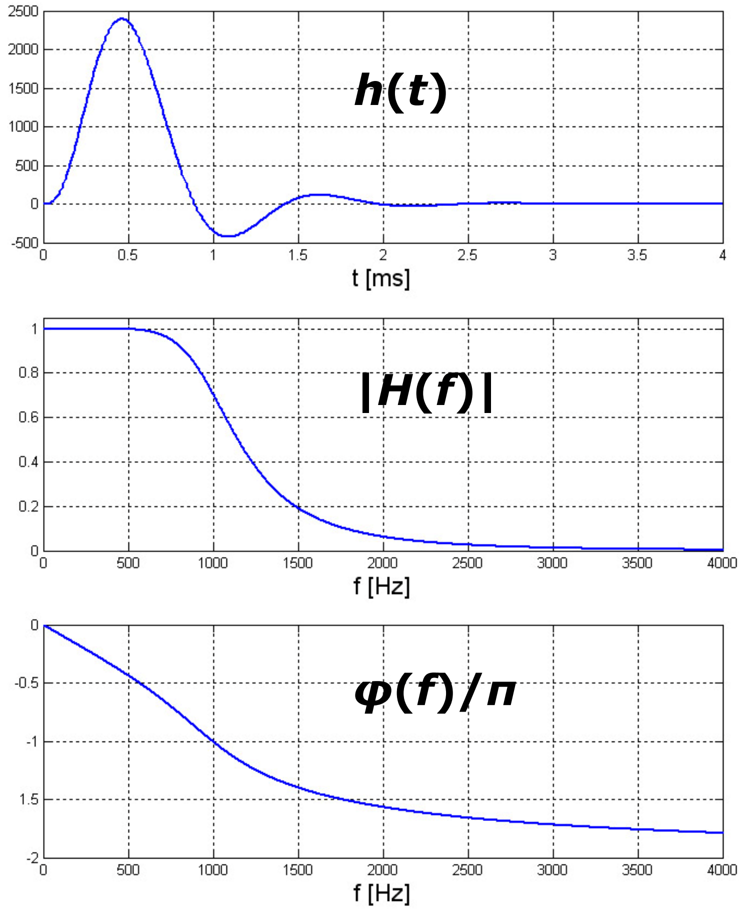
$$A_{dB}^2(f) = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{(A(f))^2}{(A_{ref})^2}\right) [dB]$$

$$f_g : A(f_g) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow A_{dB}(f_g) = -3dB$$

Tu zwykle przyjmujemy: A_{ref}=1

$$10 \Leftrightarrow +20dB$$
$$2 \Leftrightarrow +6dB$$
$$\sqrt{2} \Leftrightarrow +3dB$$
$$1 \Leftrightarrow 0dB$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow -3dB$$
$$\frac{1}{2} \Leftrightarrow -6dB$$
$$\frac{1}{10} \Leftrightarrow -20dB$$
$$\frac{1}{100} \Leftrightarrow -40dB$$
$$\frac{1}{1000} \Leftrightarrow -60dB$$

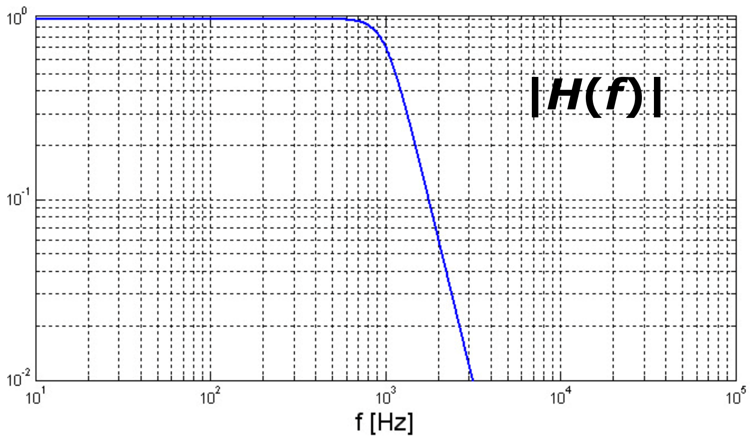
Filtr Butterwortha przykłady

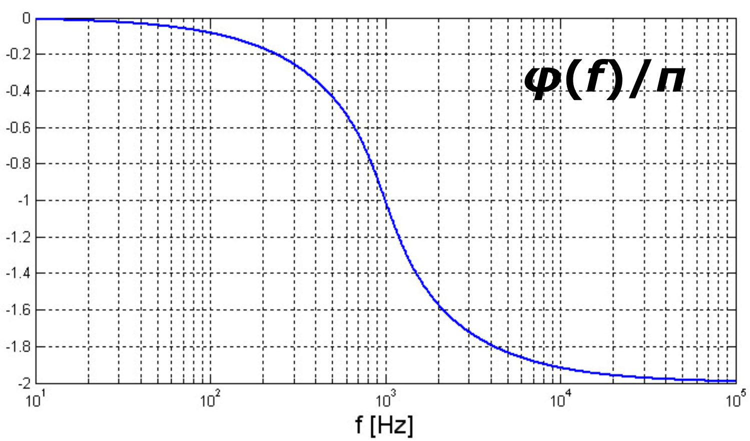


Filtr Butterwortha, 4. rzędu, f_g=1kHz.

Odpowiedź impulsowa $h(t)$ oraz ch-ki: amplitudowa i fazowa.

Filtr Butterwortha przykłady





Filtr Butterwortha, 4. rzędu, f_g=1kHz.

Ch-ki: amplitudowa w skali logarytmicznej i fazowa w skali półlogarytmicznej.

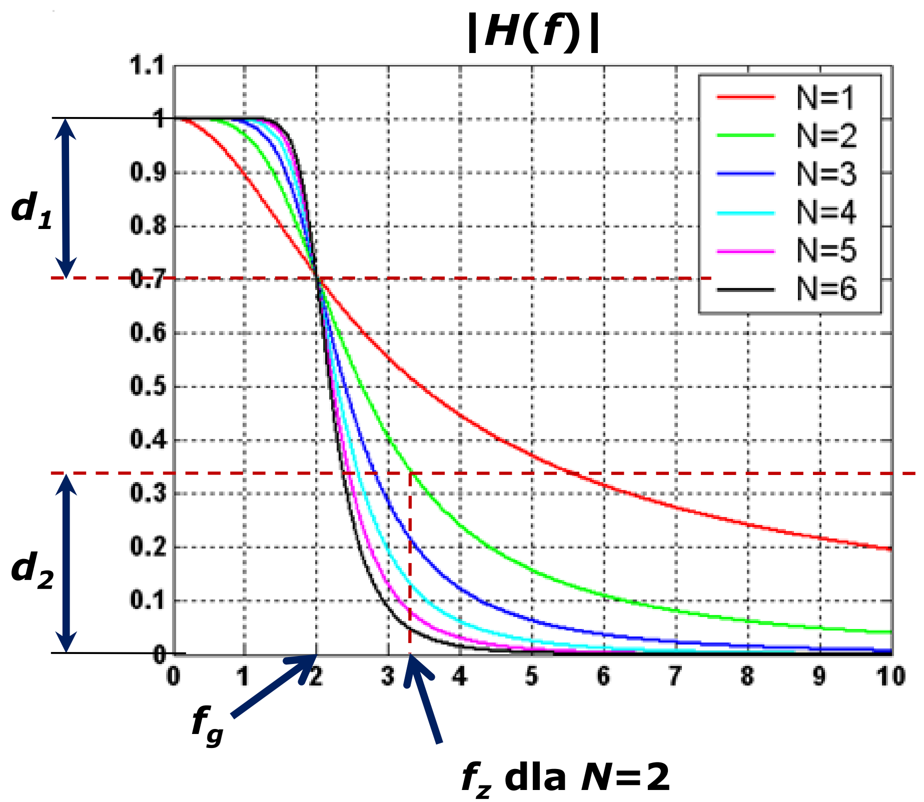
Filtr Butterwortha
– zależność charakterystyk od rzędu filtru

Porównanie wykresów charakterystyk amplitudowych dla kolejnych rzędów filtru:
f_g=2Hz

Założenia projektowe:

$f_g, f_z, d_2 \longrightarrow N$

lub np.: $N, f_g, d_2 \longrightarrow f_z$



f [Hz]

Filtr dolnoprzepustowy Czebyszewa

Typu I :

$$\left|H(f)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 \cdot C_N^2\left(\dfrac{f}{f_g}\right)}$$

Typu II :

$$\left|H(f)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 \cdot C_N^2\left(\dfrac{f_z}{f_g}\right) / C_N^2\left(\dfrac{f_z}{f}\right)}$$

Wielomiany Czebyszewa:

$$C_N(x) = \cos(N \cdot v) \quad : \quad \cos(v) = x$$

$$C_N(x) = \cosh(N \cdot v) \quad : \quad \cosh(v) = x$$

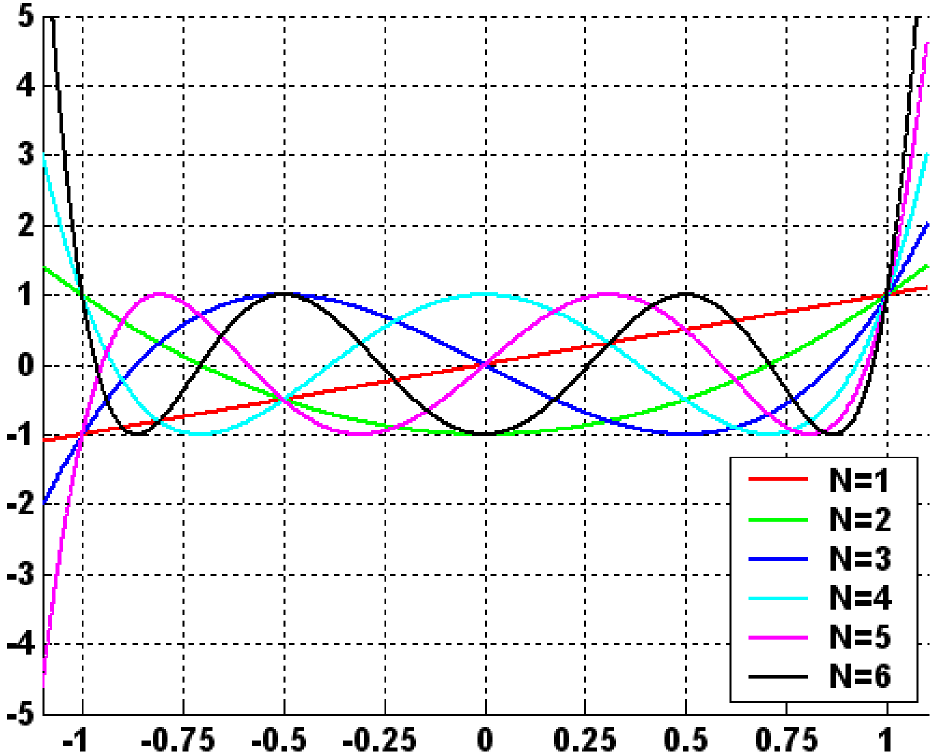
czyli:

$$C_N(x) = \cosh\left(N \cdot \cosh^{-1}(x)\right)$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Filtr Czebyszewa
- wielomiany Czebyszewa

$$C_N(x) = \cosh\left(N \cdot \cosh^{-1}(x)\right)$$

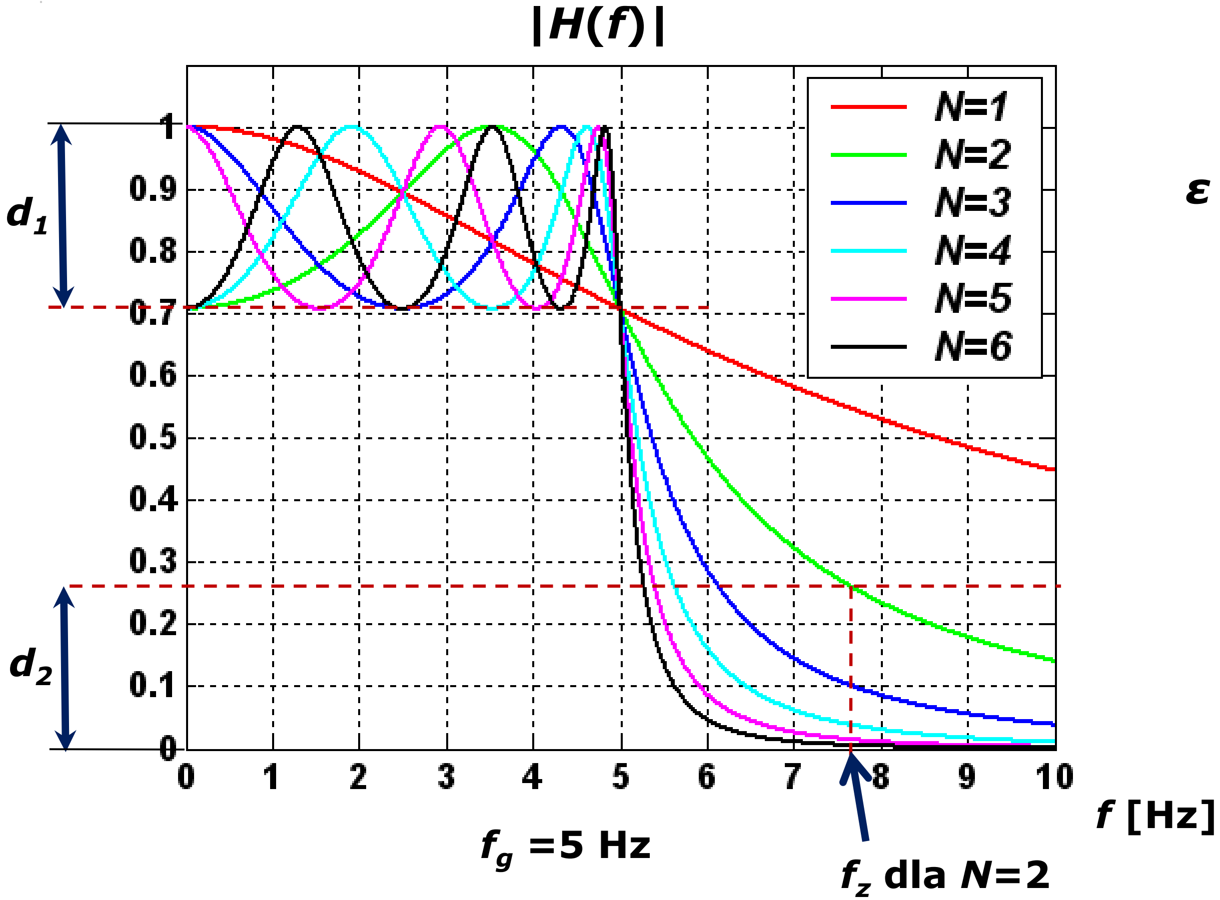


$$C_1(x) = x$$
$$C_2(x) = 2 \cdot x^2 - 1$$
$$C_3(x) = 4 \cdot x^3 - 3 \cdot x$$
$$C_4(x) = 8 \cdot x^4 - 8 \cdot x^2 + 1$$
$$C_5(x) = 16 \cdot x^5 - 20 \cdot x^3 + 5 \cdot x$$
$$C_6(x) = 32 \cdot x^6 - 48 \cdot x^4 + 18 \cdot x^2 - 1$$

Filtr Czebyszewa (typ I) - ograniczenia projektowe dla amplitudy

Pasma: przepustowe, przejściowe i zaporowe.

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 \cdot C_N^2\left(\frac{f}{f_g}\right)}$$

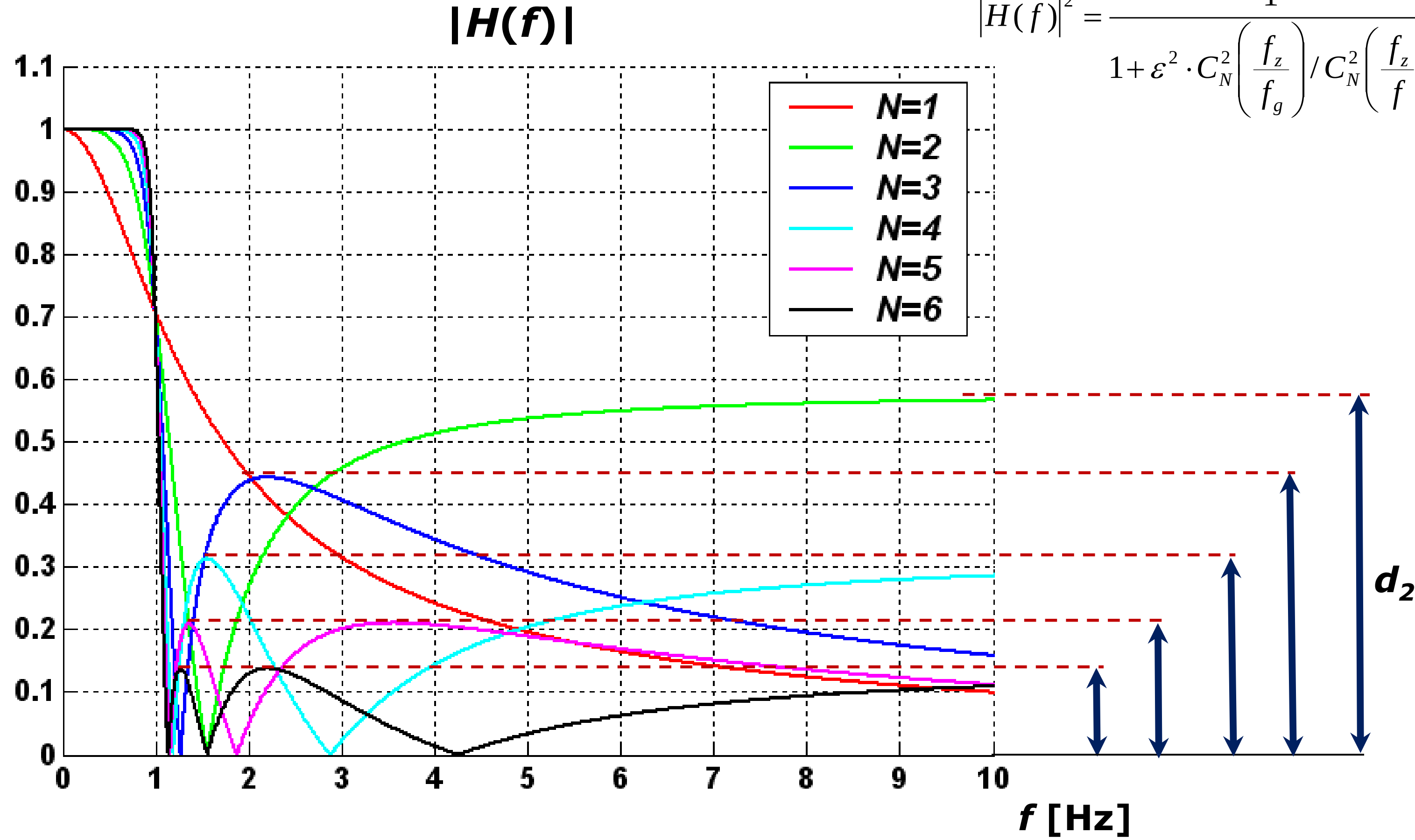


ε =1

Charakterystyki amplitudowe dla filtru Czebyszewa typu II

f_g =1 Hz
f_z =1,1 Hz
ε =1

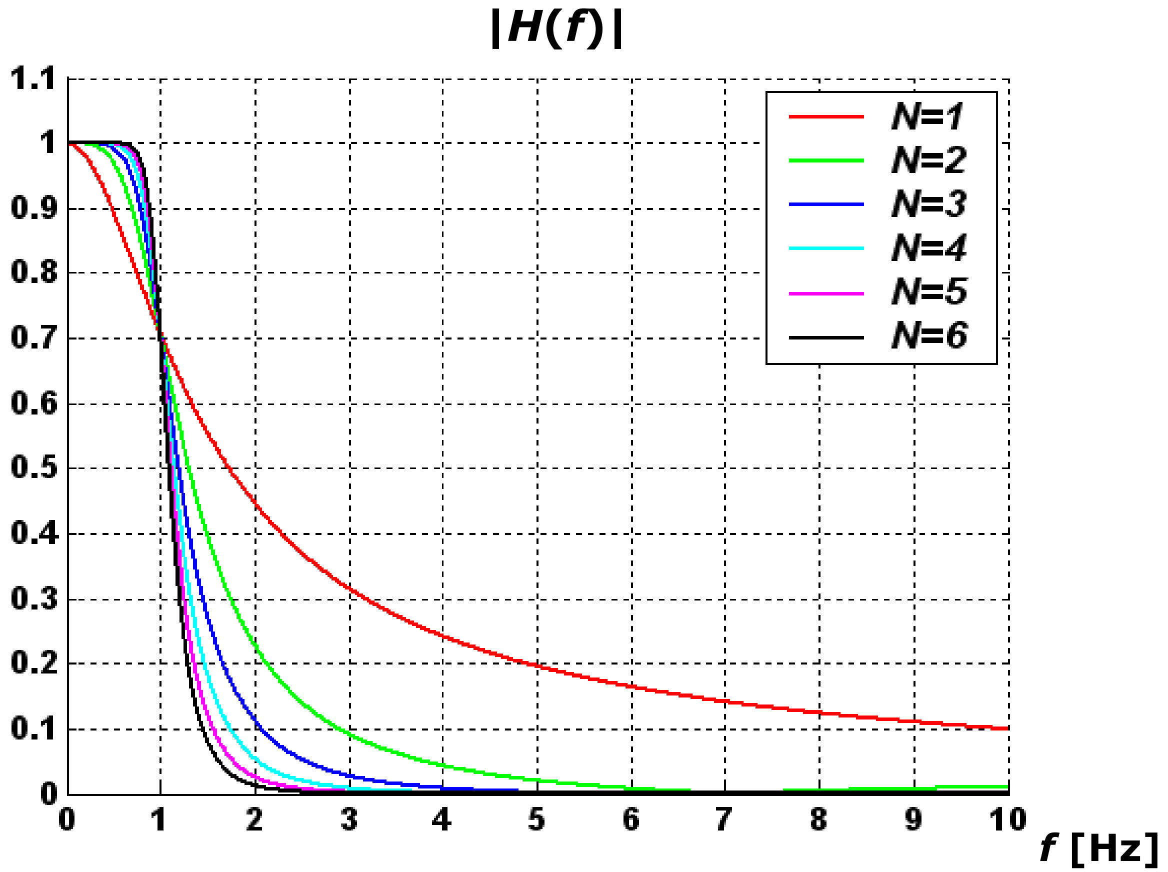
$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 \cdot C_N^2\left(\frac{f_z}{f_g}\right) / C_N^2\left(\frac{f_z}{f}\right)}$$



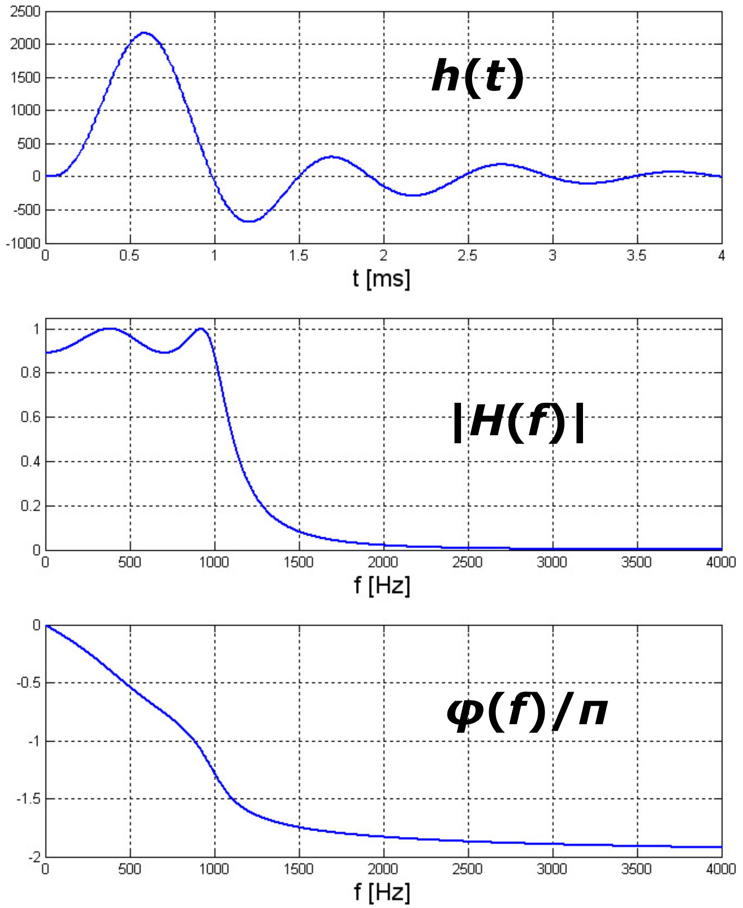
Wartości: *N, d_2 oraz f_g* całkowicie określają filtr.

Charakterystyki amplitudowe dla filtru Czebyszewa typu II szerokie pasmo przejściowe

f_g =1 Hz
f_z =5 Hz
ε =1



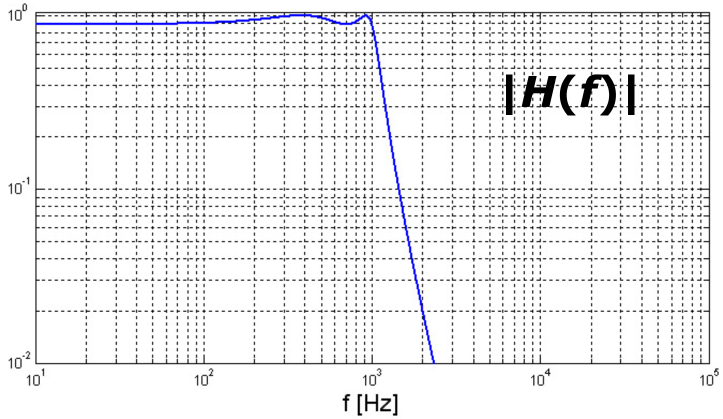
Filtr Czebyszewa typu I przykład

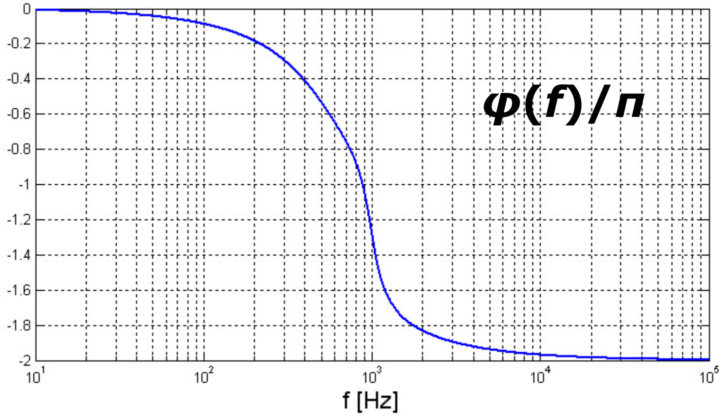


Filtr Czebyszewa typu I, 4. rzędu,
f_g=1kHz,
maks. zafalowania w paśmie przepustowym: 1dB.

Odpowiedź impulsowa *h*(*t*)
oraz ch-ki: amplitudowa i fazowa.

Filtr Czebyszewa typu I, przykład (cd.)



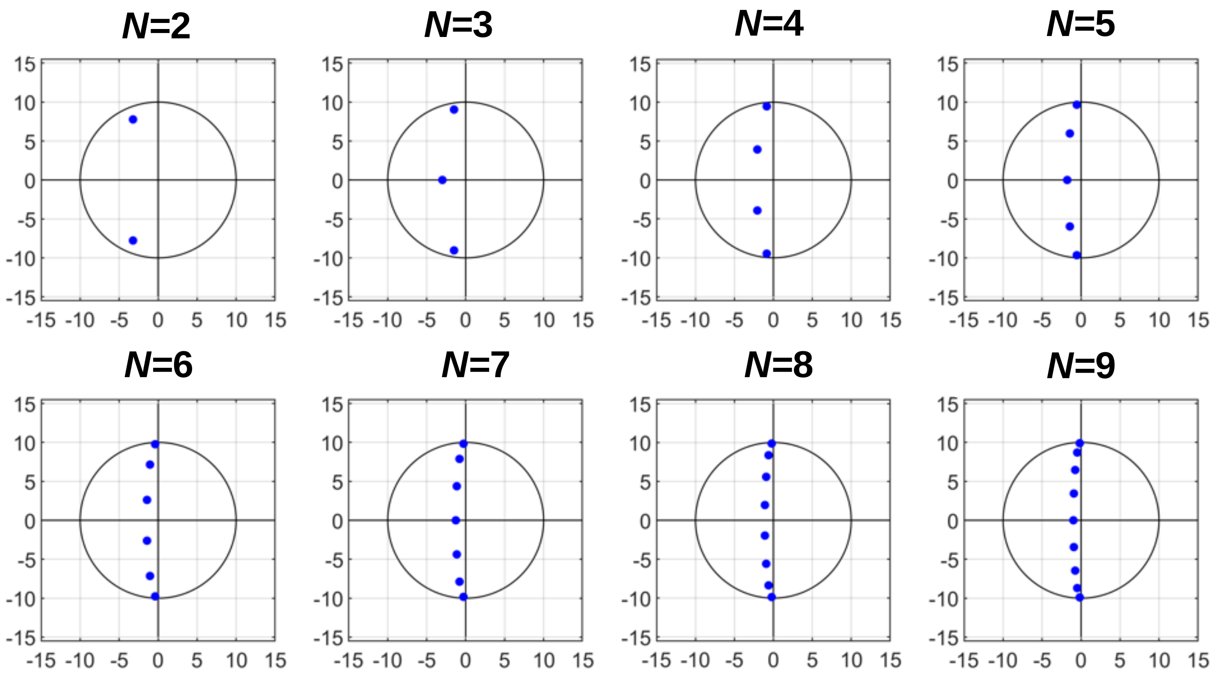


Filtr Czebyszewa typu I, 4. rzędu,
f_g=1kHz,
maks. zafalowania w paśmie przepustowym: 1dB.

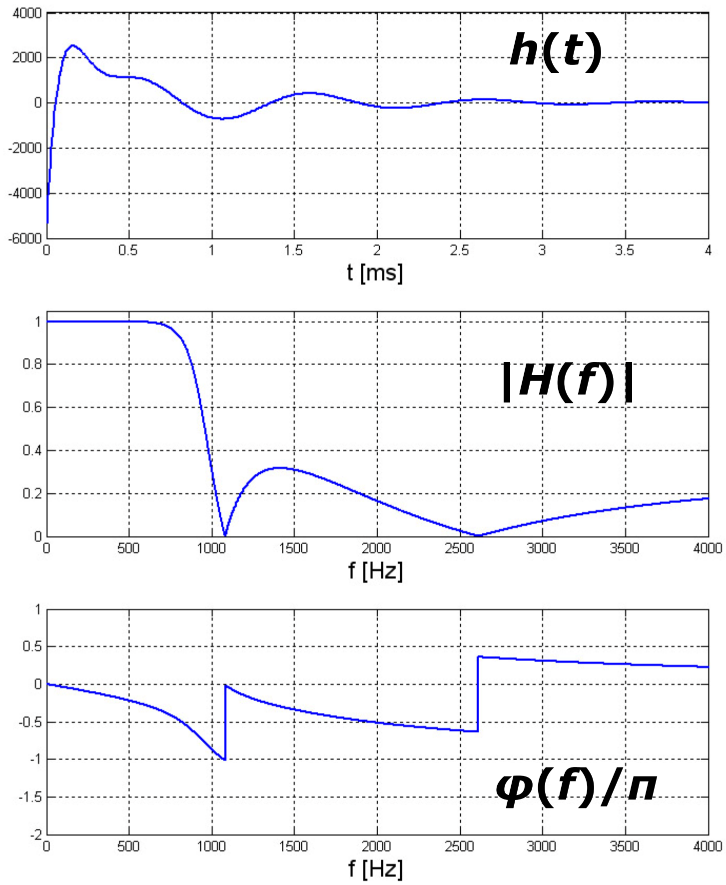
Ch-ki: amplitudowa i fazowa w odpowiednich skalach logarytmicznych.

Filtr Czebyszewa typu I – rozmieszczenie biegunów

$\omega_g = 10$



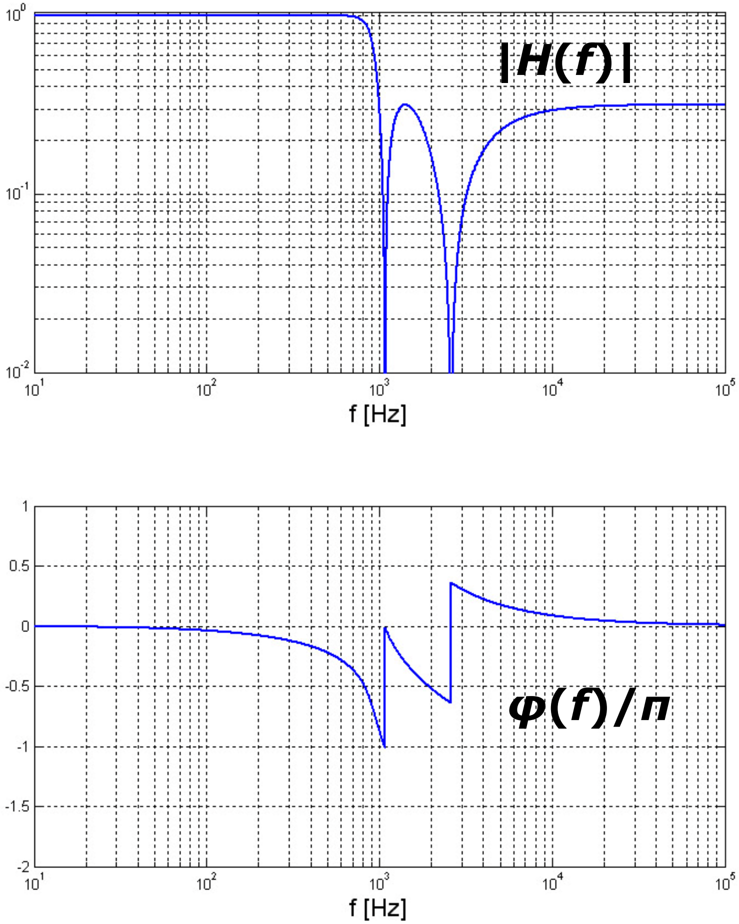
Filtr Czebyszewa typu II przykład



Filtr Czebyszewa typu II, 4. rzędu,
f_g=1kHz,
min. tłumienie w paśmie zaporowym: 10dB.

Odpowiedź impulsowa *h*(*t*)
oraz ch-ki: amplitudowa i fazowa.

Filtr Czebyszewa typu II, przykład (cd.)

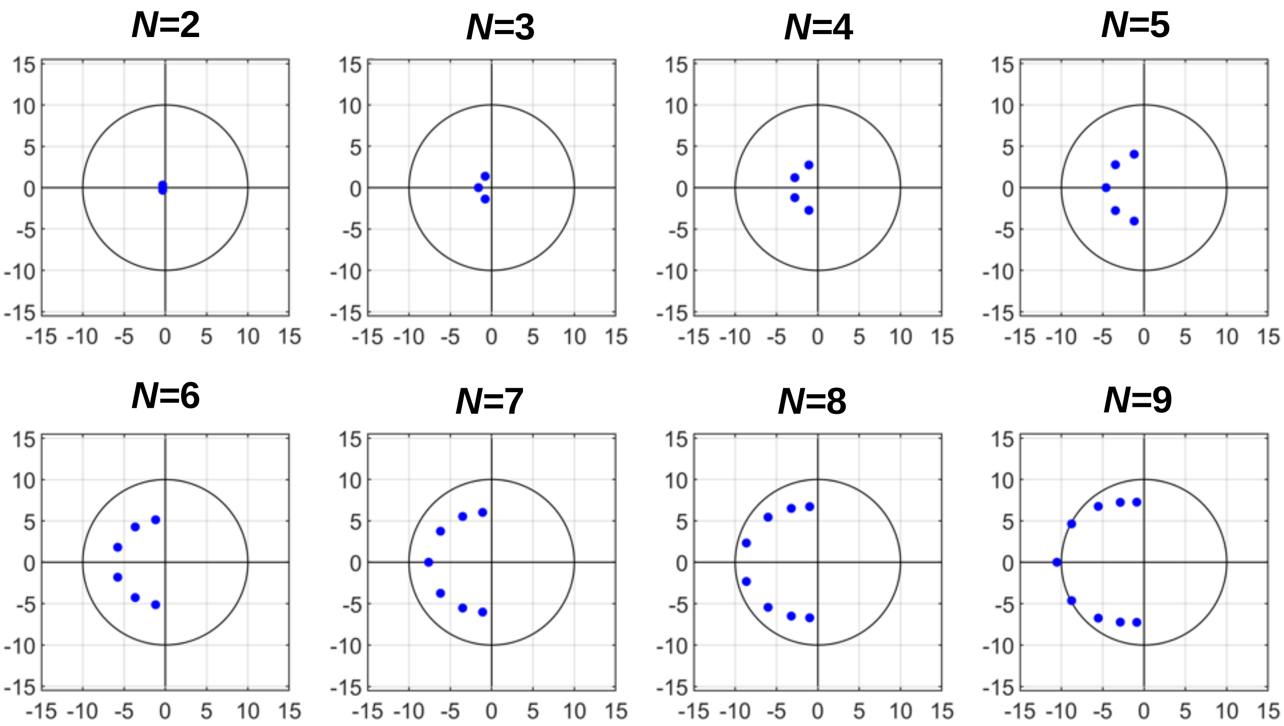


Filtr Czebyszewa typu II, 4. rzędu,
f_g=1kHz,
min. tłumienie w paśmie zaporowym: 10dB.

Ch-ki: amplitudowa i fazowa w odpowiednich skalach logarytmicznych.

Filtr Czebyszewa typu II – rozmieszczenie biegunów

$$\omega_g = 10$$



Filtr eliptyczny (Cauera)

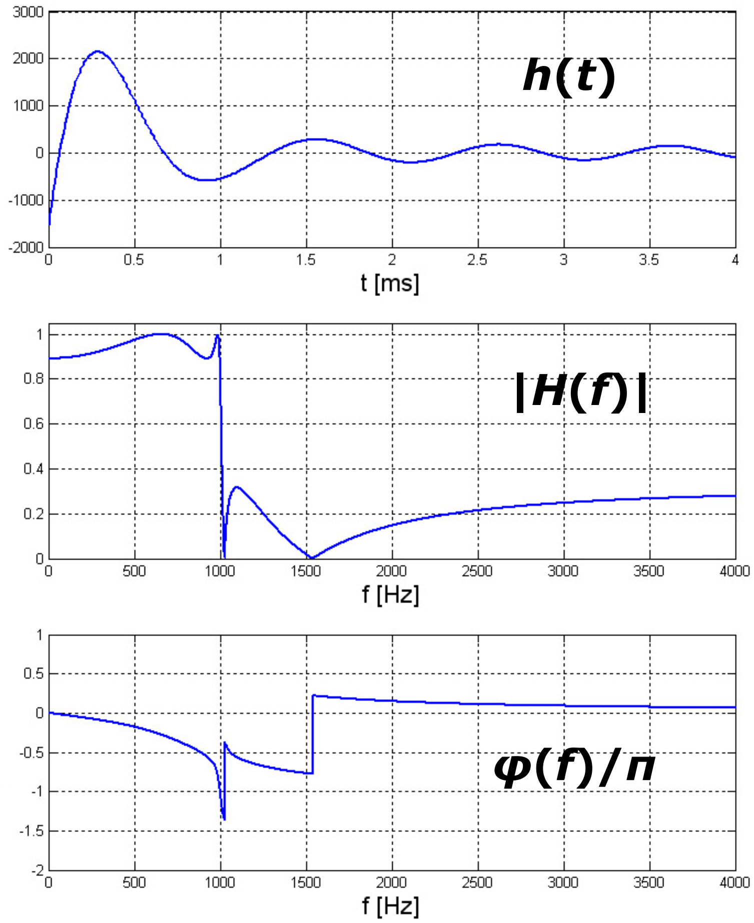
$$\left|H(f)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 \cdot U_N^2\left(\xi, \frac{f}{f_g}\right)}$$

gdzie:

$U_N(\xi, x)$

to funkcja eliptyczna, zależna od parametru ξ .
Gdy ten parametr dąży do nieskończoności, to funkcja dąży do wielomianu Czebyszewa, czyli filtr staje się filtrem Czebyszewa typu I.
Wartości: *N, d_1, d_2 oraz f_g* całkowicie określają filtr.

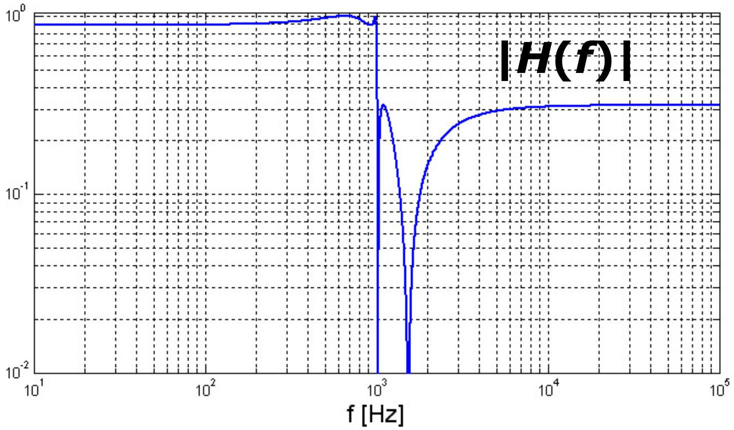
Filtr eliptyczny (Cauera) przykład

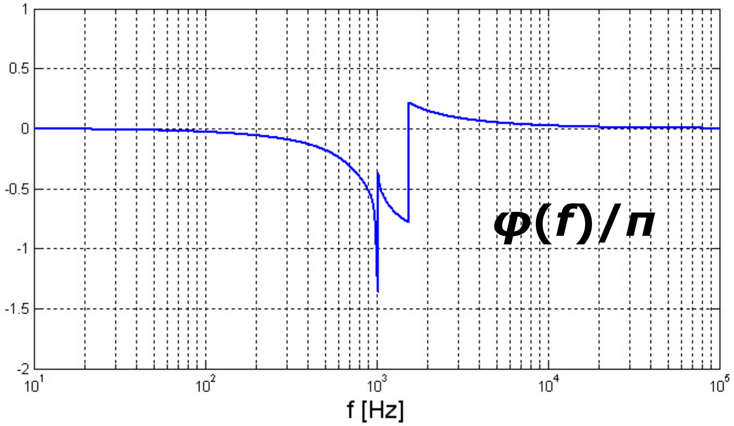


Filtr eliptyczny, 4. rzędu,
f_g=1kHz,
maks. zafalowania w paśmie przepustowym: 1dB,
min. tłumienie w paśmie zaporowym: 10dB,

Odpowiedź impulsowa *h*(*t*)
oraz ch-ki: amplitudowa i fazowa.

Filtr eliptyczny (Cauera), przykład (cd.)



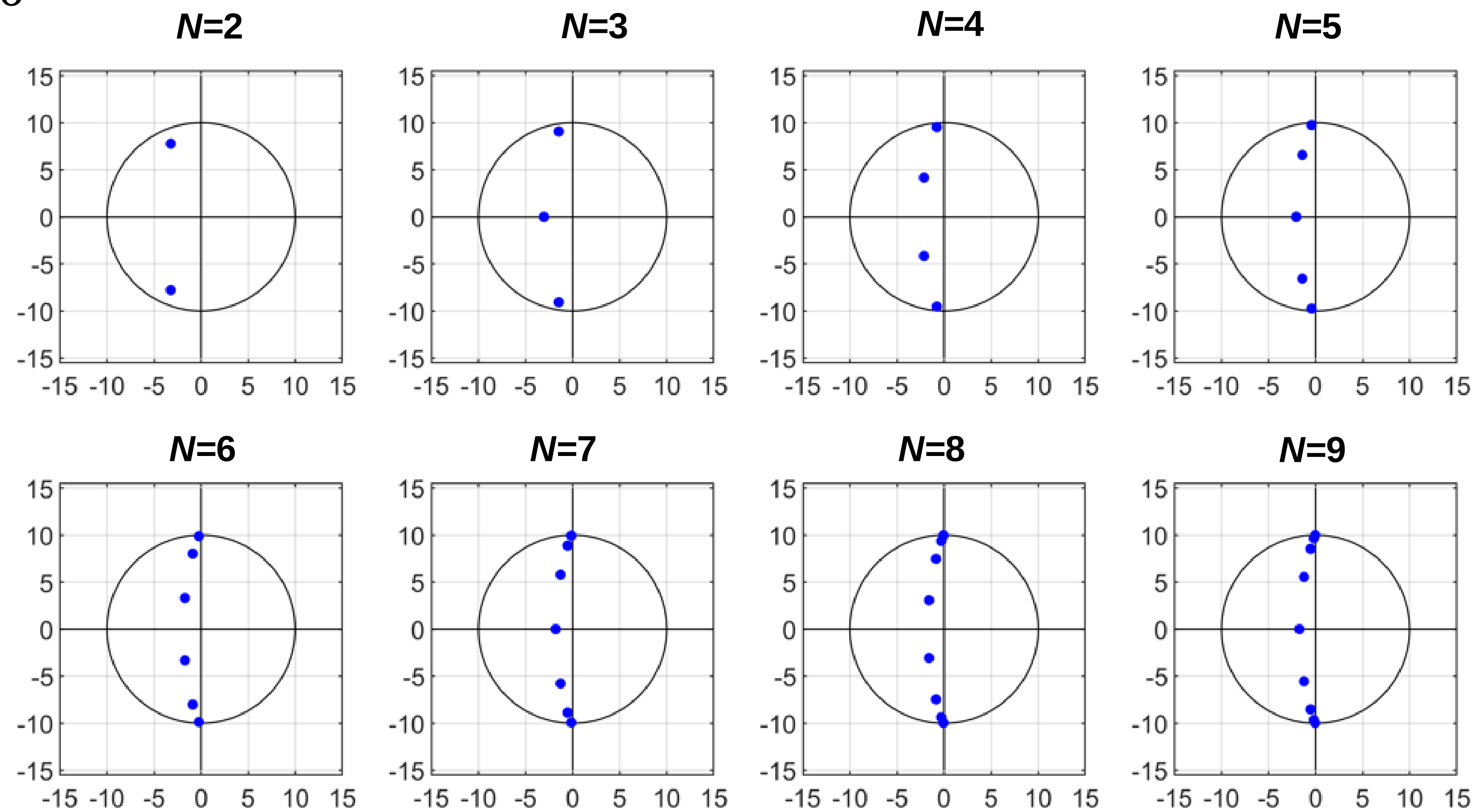


Filtr eliptyczny, 4. rzędu,
f_g=1kHz,
maks. zafalowania w paśmie przepustowym: 1dB,
min. tłumienie w paśmie zaporowym: 10dB,

Ch-ki: amplitudowa i fazowa w odpowiednich skalach logarytmicznych.

Filtr eliptyczny
– rozmieszczenie biegunów

$\omega_g = 10$



Przeliczenia filtrów dolnoprzepustowych (FDP, f_g=1Hz) na inne postacie filtrów

$$H_0(f): \quad FDP \; dla \; f_g = 1Hz;$$

$$H_{FDP}(f) = H_0\left(\frac{f}{f_g}\right)$$

$$H_{FPP}(f) = H_0\left(\frac{f^2 - f_d \cdot f_g}{f \cdot (f_g - f_d)}\right): \quad f_g > f_d$$

$$H_{FGP}(f) = H_0\left(-\frac{f_d}{f}\right)$$

$$H_{FPZ}(f) = H_0\left(\frac{f \cdot (f_g - f_d)}{f_d \cdot f_g - f^2}\right): \quad f_g > f_d$$

Analogiczne przepisy dla „*s*" :

$$H_{FDP}(s) = H_0\left(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{s}{s_g}\right)$$

$$H_{FPP}(s) = H_0\left(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{s^2 - s_d \cdot s_g}{s \cdot (s_g - s_d)}\right): \quad f_g > f_d$$

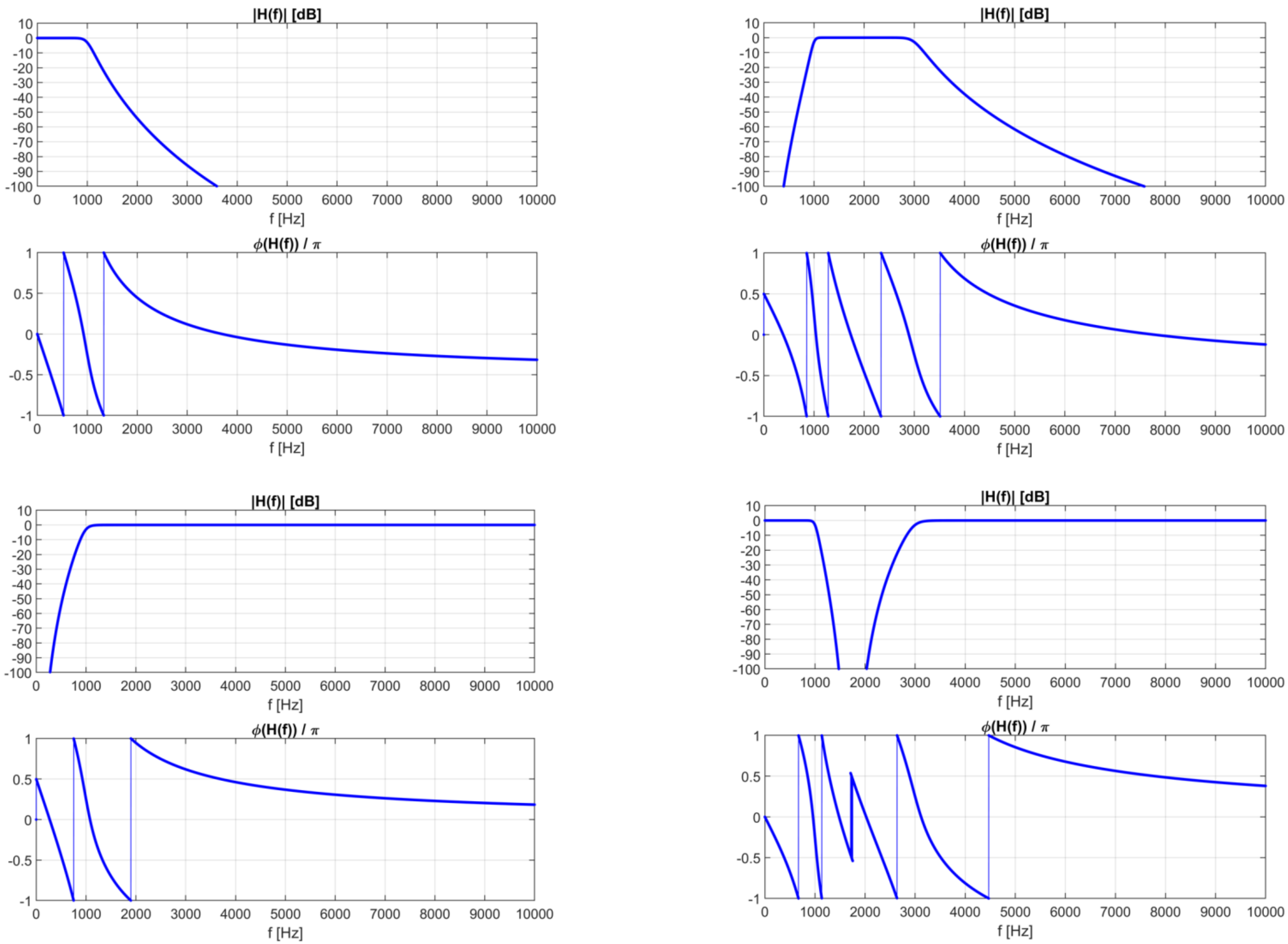
$$H_{FGP}(s) = H_0\left(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{s_d}{s}\right)$$

$$H_{FPZ}(s) = H_0\left(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{s \cdot (s_g - s_d)}{s^2 - s_d \cdot s_g}\right): \quad f_g > f_d$$

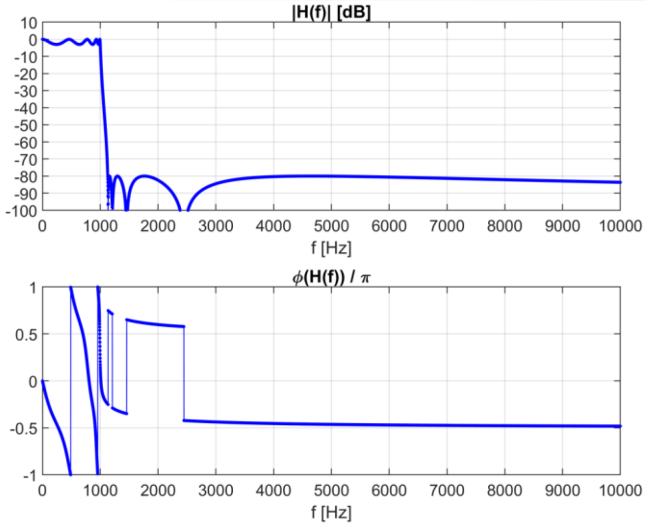
Podstawienie dla szczególnego przypadku :

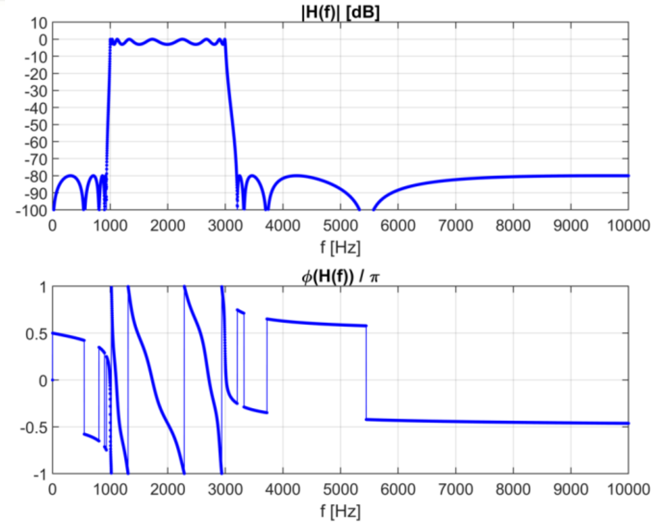
$$\boxed{s = j \cdot \omega = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}$$

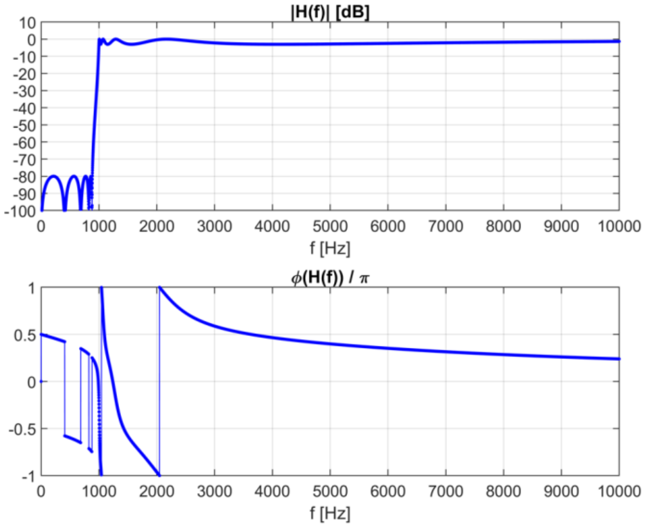
Filtry Butterwortha 9. rzędu: DP (1 kHz), GP (1 kHz), PP (1 kHz – 3 kHz), PZ (1 kHz – 3 kHz)

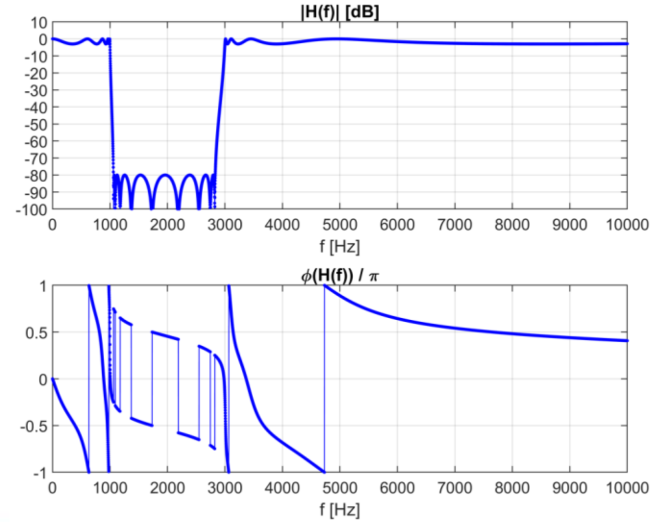


Filtry eliptyczne (Cauera) 9. rzędu: DP (1 kHz), GP (1 kHz), PP (1 kHz – 3 kHz), PZ (1 kHz – 3 kHz)









Podsumowanie

1. Systemy liniowe i stacjonarne.
2. Odpowiedź impulsowa filtru.
3. Transmitancja filtru i jej cechy.
4. Filtr Butterwortha.
5. Filtry Czebyszewa.
6. Filtr eliptyczny.
7. Przekształcanie filtrów.
8. Przykłady charakterystyk filtrów.

Zapraszam na ćwiczenia ...
lub do laboratorium …