AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Teoria sygnałów

Wykład 3

Dr inż. Przemysław Korohoda
Instytut Elektroniki, AGH, Kraków

home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2

UPEL: TS 2022

Plan wykładu

1. Sygnał sinc.
2. Ciągła transformacja Fouriera (CFT).
3. Pary: sygnał-transformata.
4. Własności CFT - twierdzenia.

Ważne sygnały - funkcja sinc

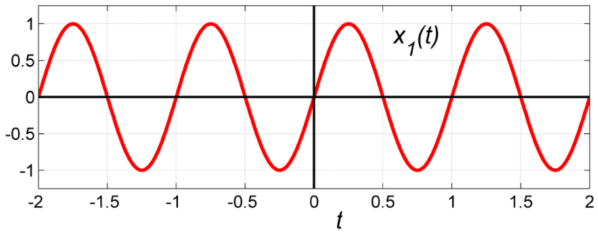
$$x_1(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot t)$$

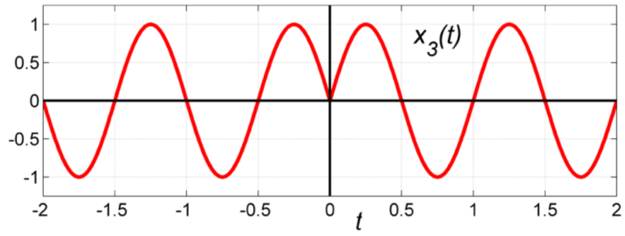
$$x_2(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot t}$$

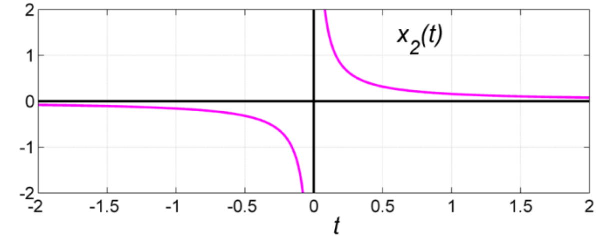
$$\boxed{t \in \Re \setminus \{0\}}$$

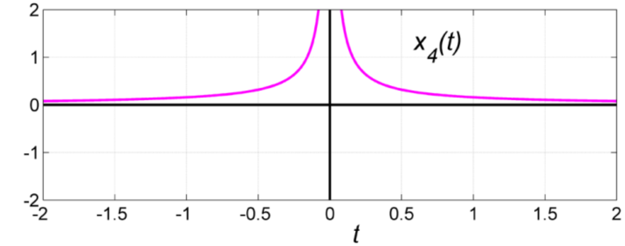
$$x_3(t) = x_1(|t|) = \sin(2 \cdot \pi \cdot |t|)$$

$$x_4(t) = x_2(|t|) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot |t|}$$

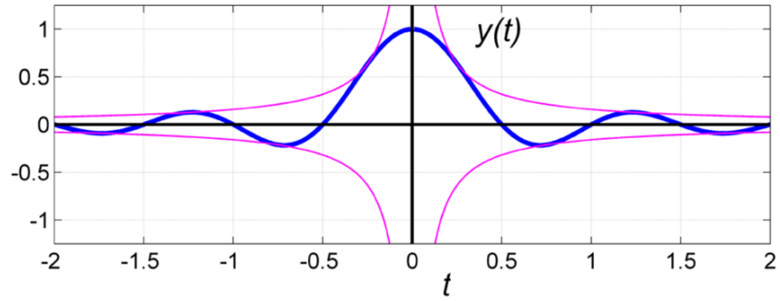








$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$$

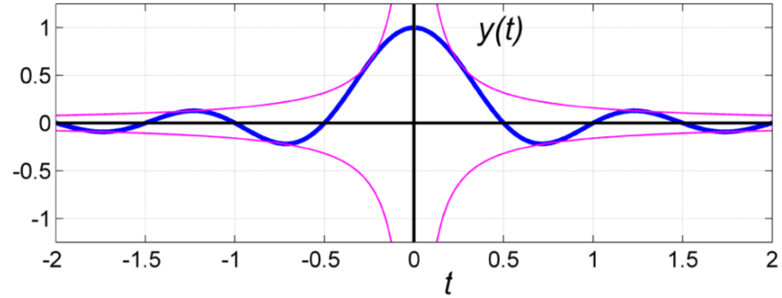


$$y(t) = x_3(t) \cdot x_4(t)$$

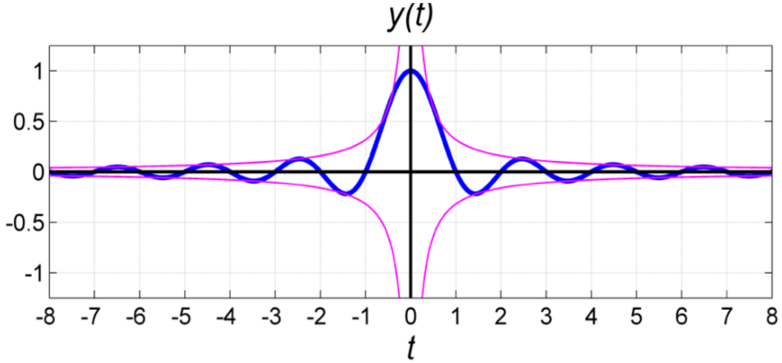
Ważne sygnały - funkcja sinc (cd.)

$\boxed{t \in \Re}$

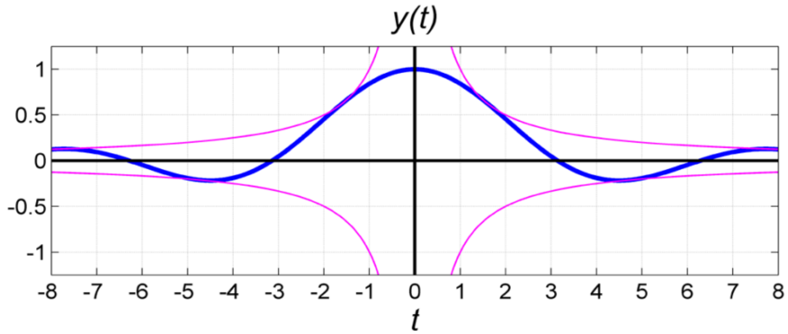
$$y(t) = \mathrm{sinc}(2 \cdot \pi \cdot t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2 \cdot \pi \cdot t)}{2 \cdot \pi \cdot t} & dla \quad t \neq 0 \\ 1 & dla \quad t = 0 \end{cases}$$



$$y(t) = \mathrm{sinc}(\pi \cdot t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi \cdot t)}{\pi \cdot t} & dla \quad t \neq 0 \\ 1 & dla \quad t = 0 \end{cases}$$



$$y(t) = \mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} & dla \quad t \neq 0 \\ 1 & dla \quad t = 0 \end{cases}$$



Ważne sygnały - funkcja sinc (cd.)

Można tę funkcję (sygnał), podobnie jak i inne, określić na dowolnej dziedzinie „fizycznej”, np. ogólnie *x*:

$$f(x) = \mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & dla \quad x \neq 0 \\ 1 & dla \quad x = 0 \end{cases}$$

Funkcja ta (sygnał) znana jest także pod nazwą Sa:

$$\mathrm{Sa}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & dla \quad x \neq 0 \\ 1 & dla \quad x = 0 \end{cases}$$

Niekiedy funkcja ta (sygnał) wprowadza mnożenie przez *π* w ramach przepisu:

$$\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi \cdot x)}{\pi \cdot x} & dla \quad x \neq 0 \\ 1 & dla \quad x = 0 \end{cases}$$

tak jest np. w MATLAB’ie

Pytanie

Co otrzymamy z okresowego powielenia sygnału sinc?

Np. tak:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}(\pi \cdot (t - n \cdot \Delta t))$$

$$a) \quad \Delta t = 1$$

$$b) \quad \Delta t = 2$$

$$c) \quad \Delta t = 7$$

$$d) \quad \Delta t = 8$$

$$x(t) = a(t) + j \cdot b(t) = \mathrm{Re}(x(t)) + j \cdot \mathrm{Im}(x(t))$$

Elementy powtórkowe
Całka z funkcji zespolonej

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| \cdot e^{j \cdot \varphi(x(t))}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| \cdot \left[\cos(\varphi(x(t))) + j \cdot \sin(\varphi(x(t)))\right] dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| \cdot \cos(\varphi(x(t)))\, dt + j \cdot \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| \cdot \sin(\varphi(x(t)))\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}(x(t))\, dt + j \cdot \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{Im}(x(t))\, dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{j \cdot c \cdot t}\, dt = \left\{ dla\ c \neq 0 \right\} = \left[\frac{e^{j \cdot c \cdot t}}{j \cdot c}\right]_{t_1}^{t_2} = \frac{e^{j \cdot c \cdot t_2} - e^{j \cdot c \cdot t_1}}{j \cdot c}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{j \cdot c \cdot t}\, dt = \left\{ dla\ c = 0 \right\} = \int_{t_1}^{t_2} e^{0}\, dt = [t]_{t_1}^{t_2} = t_2 - t_1$$

Ciągła Transformacja Fouriera = Całkowe Przekształcenie Fouriera (*ang. Continuous Fourier Transform=CFT*)

Wersja z *f* (częstotliwość w [Hz]):

$$x(t) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X(f)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \, dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \, df$$

Wersja z *ω* (pulsacja w [rad/s]):

$$x(t) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X(\omega)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \, dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot e^{+j \cdot \omega \cdot t} \, d\omega$$

Pod warunkiem, że powyższe wzory są zbieżne!

Istota *CFT* oraz *ICFT* (*ang. Inverse CFT*):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \, dt \right] \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \, df$$

Analogicznie dla *X*(*f*) , a także w obie strony dla *ω* zamiast *f*.

Komentarz

Dlatego tak ważne jest, by studiując problematykę funkcji, jak np. ich przekształcanie, nie przywiązywać się do tego, że dziedzina to czas, *t*. Analogiczne efekty uzyskamy przecież dla *f* lub *ω*.

Jeszcze inny – dość często spotykany zapis:

$$X(j \cdot \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \, dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(j \cdot \omega) \cdot e^{+j \cdot \omega \cdot t} \, d\omega$$

Przykład wyliczenia CFT(f)

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}\,dt$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\cdot e^{+j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}\,df$$

$$x(t)=\Pi(t)$$

$$X(f)=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 1\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}\,dt=\quad\{f\neq 0\}\quad=\frac{1}{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f}\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}=$$

$$=\quad\frac{e^{-j\cdot\pi\cdot f}-e^{+j\cdot\pi\cdot f}}{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f}=\frac{e^{+j\cdot\pi\cdot f}-e^{-j\cdot\pi\cdot f}}{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f}=\frac{\sin(\pi\cdot f)}{\pi\cdot f}$$

$$X(f=0)=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 1\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}\,dt=\quad\{f=0\}\quad=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 1\,dt=\quad 1$$

Przykład wyliczenia CFT(ω)

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \, dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot e^{+j \cdot \omega \cdot t} \, d\omega$$

$$x(t) = \Pi(t)$$

$$X(\omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \, dt = \quad \{\omega \neq 0\} \quad = \quad \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} =$$

$$= \quad \frac{e^{-j \cdot \omega / 2} - e^{+j \cdot \omega / 2}}{-j \cdot \omega} = \frac{e^{+j \cdot \omega / 2} - e^{-j \cdot \omega / 2}}{j \cdot \omega} = \frac{\sin(\omega / 2)}{\omega / 2}$$

$$X(\omega = 0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \, dt = \quad \{\omega = 0\} \quad = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 1 \, dt = \quad 1$$

Spojrzenie wstecz

Przypomnijmy, że wszystkie poznane funkcje mogą być określone na dowolnej dziedzinie, np. tak:

$$\Pi(t), \Pi(f), \Pi(\omega),$$
$$\mathrm{sinc}(t), \mathrm{sinc}(f), \mathrm{sinc}(\omega)$$

Może przy okazji warto się zastanowić, jaką funkcję otrzymamy z zapisu:

$$\cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0)$$

... i jaki będzie jej wykres.

Przykład wyliczenia ICFT

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t}\, dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t}\, df$$

$$X(f) = \Pi(f)$$

$$x(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t}\, df = \{t \neq 0\} = \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot t} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{e^{j \cdot \pi \cdot t} - e^{-j \cdot \pi \cdot t}}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot t} = \frac{\sin(\pi \cdot t)}{\pi \cdot t}$$

$$x(t=0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t}\, df = \{t = 0\} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 1\, df = 1$$

Przykład wyliczenia ICFT

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}\, dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot e^{+j\cdot\omega\cdot t}\, d\omega$$

$$X(\omega) = \Pi(\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\, d\omega = \quad \{t \neq 0\} \quad = \quad \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \frac{1}{j\cdot t} \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} =$$

$$= \quad \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \frac{e^{j\cdot t/2} - e^{-j\cdot t/2}}{j\cdot 2\cdot t/2} = \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \frac{\sin(t/2)}{t/2}$$

$$x(t=0) = \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\, d\omega = \quad \{t = 0\} \quad = \quad \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 1\, d\omega = \quad \frac{1}{2\cdot\pi}$$

Pary: sygnał-transformata

$$x(t) = \Pi(t) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X(f) = \mathrm{sinc}(\pi \cdot f)$$

$$x(t) = \mathrm{sinc}(\pi \cdot t) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X(f) = \Pi(f)$$

$$x(t) = \Pi(t) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X(\omega) = \mathrm{sinc}(\omega / 2)$$

$$x(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \mathrm{sinc}(t/2) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X(\omega) = \Pi(\omega)$$

Relacje między transformatami

$X(\omega) = X(2 \cdot \pi \cdot f)$	$X(f) = X\left(\dfrac{\omega}{2 \cdot \pi}\right)$
$\Pi(\omega) = \Pi(2 \cdot \pi \cdot f)$	$\Pi(f) = \Pi\left(\dfrac{\omega}{2 \cdot \pi}\right)$
$\mathrm{sinc}(\omega) = \mathrm{sinc}(2 \cdot \pi \cdot f)$	$\mathrm{sinc}(f) = \mathrm{sinc}\left(\dfrac{\omega}{2 \cdot \pi}\right)$

Co takie podstawienia oznaczają dla wykresów?

Właściwości CFT: liniowość

Jeżeli *N* sygnałów posiada transformaty:

$$x_1(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X_1(f)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X_2(f)$$

$$\cdot$$

$$x_N(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X_N(f)$$

oraz weźmiemy ciąg *N* dowolnych liczb (rzeczywistych lub zespolonych):

$$a_1, a_2, \quad \dots \quad , a_N$$

to:

$$a_1 \cdot x_1(t) + a_2 \cdot x_2(t) + \quad \dots \quad + a_N \cdot x_N(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} a_1 \cdot X_1(f) + a_2 \cdot X_2(f) + \quad \dots \quad + a_N \cdot X_N(f)$$

Jest to <u>liniowość</u>, wynikająca wprost z liniowości całki.

Analogicznie można tę właściwość zapisać dla CFT(*ω*).

Właściwości CFT: zmiana skali osi czasu

Jeżeli mamy parę sygnał-transformata: $x(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(f)$

to: $$dla \quad a \in \Re \setminus \{0\}: \quad x(a \cdot t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Jeżeli mamy parę sygnał-transformata: $x(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(\omega)$

to: $$dla \quad a \in \Re \setminus \{0\}: \quad x(a \cdot t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Jak powyższe twierdzenie przejawia się na wykresach?

Dowód pierwszej wersji twierdzenia (część pierwsza)

$$\boxed{x(a\cdot t)\ \xleftrightarrow[ICFT]{CFT}\ \frac{1}{|a|}\cdot X\left(\frac{f}{a}\right)}\quad \boxed{dla\quad a\neq 0}$$

$$x_1(t)=x(a\cdot t)$$

Dla a>0:

$$X_1(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(a\cdot t)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}\,dt \overset{a>0}{=} \left\{\begin{matrix} \tau=a\cdot t\Rightarrow t=\dfrac{\tau}{a} \\ \dfrac{1}{a}\cdot d\tau=dt \\ t\to\infty\Rightarrow\tau\to\infty \\ t\to-\infty\Rightarrow\tau\to-\infty \end{matrix}\right\} = \frac{1}{a}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot\frac{\tau}{a}}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{a}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{f}{a}\cdot\tau}\,d\tau = \frac{1}{a}\cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Dowód pierwszej wersji twierdzenia (część druga)

$$x(a\cdot t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \frac{1}{|a|}\cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$$ $dla \quad a \neq 0$

$$x_1(t) = x(a\cdot t)$$

Dla a<0:

$$X_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(a\cdot t)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}\, dt \overset{a<0}{=} \left\{\begin{array}{c} \tau = a\cdot t \Rightarrow t = \dfrac{\tau}{a} \\ \dfrac{1}{a}\cdot d\tau = dt \\ t \to +\infty \Rightarrow \tau \to -\infty \\ t \to -\infty \Rightarrow \tau \to +\infty \end{array}\right\} = -\frac{1}{a}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot\frac{\tau}{a}}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{|a|}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{f}{a}\cdot\tau}\, d\tau = \frac{1}{|a|}\cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Ciąg przekształceń:

Dla: $\boxed{a \neq 0}$

$$x_1(t) = x(a \cdot t) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X_1(f) = \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$$

jeżeli: $\boxed{b = 1/a}$ **to:**

$$x_1(t) = x\left(\frac{t}{b}\right) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X_1(f) = |b| \cdot X(b \cdot f)$$

jeżeli:

$$\boxed{x_2(t) = \frac{1}{|b|} \cdot x_1(t)}$$

to:

$$x_2(t) = \frac{1}{|b|} \cdot x\left(\frac{t}{b}\right) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X_2(f) = X(b \cdot f)$$

czyli:

$$\frac{1}{|b|} \cdot x\left(\frac{t}{b}\right) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\rightleftarrows}} X(b \cdot f)$$

Właściwości CFT: zmiana skali osi *f* lub *ω*

Jeżeli mamy parę sygnał-transformata: $x(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(f)$

to: $$dla \quad a \in \Re \setminus \{0\}: \quad \frac{1}{|a|} \cdot x\left(\frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(a \cdot f)$$

Jeżeli mamy parę sygnał-transformata: $x(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(\omega)$

to: $$dla \quad a \in \Re \setminus \{0\}: \quad \frac{1}{|a|} \cdot x\left(\frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(a \cdot \omega)$$

Jak powyższe twierdzenie przejawia się na wykresach?

Przykład zastosowania twierdzenia

$$x(a \cdot t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Na postawie następującej pary sygnał-transformata:

$$\Pi(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \mathrm{sinc}(\pi \cdot f)$$

otrzymujemy, że:

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} T \cdot \mathrm{sinc}(\pi \cdot f \cdot T)$$

Analogicznie dla *ω*.

Szczególny przypadek

$$\boxed{x(a \cdot t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)}$$

$$x(-t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(-f)$$

$$\boxed{x(a \cdot t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$

$$x(-t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(-\omega)$$

Właściwości CFT: opóźnienie w czasie

Jeżeli mamy parę sygnał-transformata: $x(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(f)$

to: $x(t-t_d) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(f) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_d}$

Jeżeli mamy parę sygnał-transformata: $x(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(\omega)$

to: $x(t-t_d) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(\omega) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_d}$

Dowód jednej z wersji twierdzenia

$$x(t-t_d) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(f)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot \pi\cdot f\cdot t_d}$$

$$x_1(t) = x(t-t_d)$$

$$X_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_d)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot \pi\cdot f\cdot t}\, dt = \left\{\begin{matrix} \tau = t - t_d \Rightarrow t = \tau + t_d \\ d\tau = dt \\ t \to \infty \Rightarrow \tau \to \infty \\ t \to -\infty \Rightarrow \tau \to -\infty \end{matrix}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot \pi\cdot f\cdot (\tau + t_d)}\, d\tau =$$

$$= e^{-j\cdot 2\cdot \pi\cdot f\cdot t_d} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot \pi\cdot f\cdot \tau}\, d\tau = e^{-j\cdot 2\cdot \pi\cdot f\cdot t_d}\cdot X(f)$$

Właściwości CFT: przesunięcie w dziedzinie *f* lub *ω*

Jeżeli mamy parę sygnał-transformata: $x(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(f)$

to: $x(t)\cdot e^{+j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(f-f_0)$

Jeżeli mamy parę sygnał-transformata: $x(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(\omega)$

to: $x(t)\cdot e^{+j\cdot\omega_0\cdot t} \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(\omega-\omega_0)$

Odpowiednie dowody – analogicznie, jak poprzednio…

Przykład

Dla sygnału:

$$x(t) = 2 \cdot \Pi\left(\frac{t-1}{3}\right)$$

możemy zatem wyznaczyć transformatę CFT(*f*) na dwa sposoby:

a) z definicji CFT:

$$X(f) = 2 \cdot \int_{-1/2}^{+5/2} e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t}\, dt = \quad \ldots$$

b) ze znanych par (sygnał-transformata) i odpowiednich twierdzeń:

$$X(f) = 2 \cdot 3 \cdot \mathrm{sinc}(\pi \cdot f \cdot 3) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot 1} = 6 \cdot \mathrm{sinc}(\pi \cdot f \cdot 3) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}$$

Najpierw zmiana skali czasu, a potem opóźnienie.

Warto umieć porównać oba wyniki! Czyli zastosować odpowiednie przekształcenia.

Przykład (cd.)

Gdyby w tym przykładzie najpierw zastosować opóźnienie, a potem zmianę skali osi czasu, to należałoby najpierw przekształcić odpowiednio sygnał, by jawnie otrzymać odpowiednie parametry:

$$x(t) = 2 \cdot \Pi\left(\frac{t-1}{3}\right) = 2 \cdot \Pi\left(\frac{1}{3} \cdot t - \frac{1}{3}\right)$$

Warto sprawdzić, czy otrzymamy ten sam wynik!

Transformata sygnału schodkowego

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta t &= const\\ t_n &= n\cdot\Delta t\end{aligned}} \qquad \boxed{x_n = x(n\cdot\Delta t)}$$

Przybliżenie sygnału *x*(*t*) sygnałem schodkowym:

$$x_1(t) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x_n \cdot \Pi\left(\frac{t-t_n}{\Delta t}\right)$$

$$\boxed{\Pi\left(\frac{t-t_d}{T}\right) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} T\cdot\mathrm{sinc}(\pi\cdot f\cdot T)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t_d}}$$

$$X_1(f) = \Delta t\cdot\sum_{n=n_1}^{n_2} x_n\cdot\mathrm{sinc}\left(\pi\cdot f\cdot\Delta t\right)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t_n}$$

Granice sumowania mogą się rozciągać do nieskończoności, ale nie muszą.

Wartość główna całki

Na przykładzie sygnału sinusoidalnego:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\cdot\pi\cdot f\cdot t)\, dt = ???$$

$$\mathrm{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\cdot\pi\cdot f\cdot t)\, dt = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} \sin(2\cdot\pi\cdot f\cdot t)\, dt = 0$$

Analogiczny wynik uzyskamy dla każdej funkcji nieparzystej.

Transformata sygnału rzeczywistego

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x_{parz}(t)+x_{niep}(t)\right]\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot t}\,dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x_{parz}(t)+x_{niep}(t)\right]\cdot\left[\cos(2\cdot\pi\cdot f\cdot t)-j\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f\cdot t)\right]dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x_{parz}(t)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f\cdot t)\,dt-j\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}x_{parz}(t)\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f\cdot t)\,dt+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}x_{niep}(t)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f\cdot t)\,dt-j\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}x_{niep}(t)\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f\cdot t)\,dt=\{\mathrm{V.p.}\}=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x_{parz}(t)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f\cdot t)\,dt-j\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}x_{niep}(t)\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f\cdot t)\,dt=$$

$$=\mathrm{Re}(X(f))+j\cdot\mathrm{Im}(X(f))$$

Transformata sygnału rzeczywistego

Jeżeli:

$$x(t) \overset{CTF}{\underset{ICFT}{\longleftrightarrow}} X(f)$$

to:

$$x_{parz}(t) \overset{CTF}{\underset{ICFT}{\longleftrightarrow}} \mathrm{Re}(X(f))$$

$$x_{niep}(t) \overset{CTF}{\underset{ICFT}{\longleftrightarrow}} j \cdot \mathrm{Im}(X(f))$$

Analogicznie dla ω.

Transformata sygnału rzeczywistego

$$\mathrm{Re}(X(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{parz}(t)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f\cdot t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{parz}(t)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot(-f)\cdot t)\,dt = \mathrm{Re}(X(-f))$$

$$\mathrm{Im}(X(f)) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x_{niep}(t)\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f\cdot t)\,dt \Rightarrow \mathrm{Im}(X(-f)) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x_{niep}(t)\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot(-f)\cdot t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_{niep}(t)\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f\cdot t)\,dt = -\mathrm{Im}(X(f))$$

Zatem część rzeczywista transformaty jest parzystą funkcją *f*,
natomiast część urojona transformaty jest nieparzystą funkcją *f*.

Analogicznie pokazujemy, że
część rzeczywista transformaty jest parzystą funkcją *ω*,
natomiast część urojona transformaty jest nieparzystą funkcją *ω*.

… wykresy!

Transformata sygnału rzeczywistego

$$X(f) = \mathrm{Re}(X(f)) + j \cdot \mathrm{Im}(X(f)) = \left|X(f)\right| \cdot e^{j \cdot \varphi(X(f))} : \quad \left|X(f)\right| \in \Re_{0+} \wedge \varphi(X(f)) \in \Re$$

Z powyższej zależności wynika, że dla sygnału rzeczywistego także:
a) moduł transformaty jest parzystą funkcją *f*,
b) faza transformaty jest nieparzystą funkcją *f*.

Analogicznie dla *X*(*ω*).

... wykresy!

Warto potwierdzić wykazane parzystości (symetrie wykresów) za pomocą dotychczas wyznaczonych par sygnał-transformata.

Podsumowanie

1. **Sygnał sinc.**

2. **Ciągła transformacja Fouriera (CFT).**

3. **Pary: sygnał-transformata.**

4. **Własności CFT - twierdzenia.**

Zapraszam na ćwiczenia ...
lub do laboratorium …