AGH
Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie

Inżynierskie techniki obliczeniowe 2021/2022

Wykład nr 3

Dr inż. Przemysław Korohoda
E-mail: korohoda@agh.edu.pl
Tel.wewn.AGH: (012-617)-27-52
Pawilon C3 - p.506

Strona www:
home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2021_2022_lato/ITO_EL_1
UPeL: ITOEL2022

Plan wykładu

1. Nowe spojrzenie na równanie algebraiczne 2. stopnia.
2. Metoda Cardano.
3. Metoda Ferrari.
4. Nasze narzędzie – czyli MATLAB (kont.).

Równanie algebraiczne drugiego stopnia (kwadratowe) z jedną niewiadomą

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad /(2 \cdot a) \qquad \boxed{a, b, c \in \mathbf{R}}$$

$$\boxed{a \neq 0}$$

$$\frac{1}{2} \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = \frac{1}{2} \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Wyróżnik: $D = a_1^2 - 2 \cdot a_0$

$$x_{1,2} = -a_1 \pm \sqrt{D}$$

$$D > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R} \quad \wedge \quad x_1 \neq x_2$$
$$D = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R} \quad \wedge \quad x_1 = x_2$$
$$D < 0 \quad \Rightarrow \quad x_1, x_2 \in \mathbf{C} \quad \wedge \quad x_1 = x_2^*$$

Równanie algebraiczne drugiego stopnia (kwadratowe) z jedną niewiadomą (cd.)

$$x_{1,2} = \left(-a_1\right) + j \cdot \left(\pm\sqrt{|D|}\right) = \left(-a_1\right) + j \cdot \left(\pm\sqrt{\left|a_1^2 - 2 \cdot a_0\right|}\right)$$

$$\mathrm{Re}\left(x_{1,2}\right) = -a_1$$

$$\boxed{D = a_1^2 - 2 \cdot a_0}$$

$$\boxed{D < 0 \quad \cancel{\Leftarrow} \quad a_0 > 0}$$

$$D < 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{2 \cdot a_0} < \mathrm{Im}\left(x_{1,2}\right) < +\sqrt{2 \cdot a_0}$$

$$\left|x_{1,2}\right|^2 = a_1^2 + \left(2 \cdot a_0 - a_1^2\right) = 2 \cdot a_0$$

A co by się zmieniło, gdyby współczynniki równania mogły być zespolone?

AGH

„Dobre rady”

Warto się zastanowić

- Kiedy przykład zaczynać od założenia (wylosowania)
a) współczynników,
b) miejsc zerowych,
c) wartości wyróżnika?

- Jakie powinny być kolejne kroki, w zależności od tego, od czego zaczęliśmy?

- Czy skoncentrować się na pojedynczym przykładzie, czy losować kolejne?

- Jak przetwarzać (przeliczać) i przedstawiać otrzymane wyniki?

Równanie algebraiczne trzeciego stopnia z jedną niewiadomą

$$\boxed{a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d \quad = \quad a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)=0}$$

Scipio **del Ferro** (1465-1526) – matematyk włoski. Znalazł metodę wyznaczania pierwiastków równania trzeciego stopnia o postaci $x^3+a\cdot x+b=0$.

Niccolo **Tartaglia** (1506-1557) – włoski matematyk, autor prac z dziedziny matematyki, mechaniki, balistyki, geodezji, teorii fortyfikacji itp. Współtwórca metody rozwiązywania równań algebraicznych trzeciego stopnia (1535).

Podawane dane biograficzne nie będą obiektem testowania na tzw. „części teoretycznej”.

Równanie algebraiczne trzeciego stopnia z jedną niewiadomą (cd.)

Girolamo/Geronimo **Cardano** (1501-1576) – włoski matematyk, lekarz i filozof. Zajmował sie m.in. algebrą i mechaniką.

Jako jeden z pierwszych w Europie używał liczb zespolonych i ujemnych pierwiastków równania.

Opublikował *wzory Cardana* (1545) dla równania algebraicznego trzeciego stopnia.

Patrz też: *wał Cardana*

Podawane dane biograficzne nie będą obiektem testowania na tzw. „części teoretycznej".

Równanie algebraiczne trzeciego stopnia z jedną niewiadomą (cd.)

Wzory Cardano

$$\boxed{a_2, a_1, a_0 \in \mathbf{R}}$$

$$x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \quad = \quad (x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot(x - x_3) = 0$$

$$y = x + \frac{a_2}{3} \quad \Rightarrow \quad y^3 + (3 \cdot p) \cdot y + (2 \cdot q) = 0$$

$$p = \frac{3 \cdot a_1 - a_2^2}{9} \quad , \quad q = \frac{a_2^3}{27} - \frac{a_2 \cdot a_1}{6} + \frac{a_0}{2}$$

$$D = q^2 + p^3$$

$$p, q \in \mathbf{R}$$

Równanie algebraiczne trzeciego stopnia z jedną niewiadomą (cd.)

Wzory Cardano

$$\boxed{x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0}$$

* = sprzężenie zespolone

$$\boxed{p = \frac{3 \cdot a_1 - a_2^2}{9}}$$

$$D > 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 \in \mathbf{R}, \quad \wedge \quad y_2, y_3 \in \mathbf{C} \quad \wedge \quad y_2 = y_3^*$$

$$D = 0 \quad (gdy: p < 0 \vee p = q = 0) \quad \Rightarrow \quad y_1, y_2, y_3 \in \mathbf{R} \quad \wedge \quad (y_1 \neq y_2 = y_3) \vee (y_1 = y_2 = y_3)$$

$$\boxed{D = q^2 + p^3}$$

$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} \quad , \quad v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}$$

Warto pomyśleć nad policzeniem tego pierwiastka 3-go stopnia...

$$y_1 = u + v$$

$$y_{2,3} = -\frac{1}{2} \cdot (u + v) \pm j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (u - v)$$

$$\boxed{y = x + \frac{a_2}{3} \quad \Rightarrow \quad x = y - \frac{a_2}{3}}$$

albo:

$$y_{2,3} = u \cdot e^{j \cdot \left(\pm \pi \cdot \frac{2}{3}\right)} + v \cdot e^{-j \cdot \left(\pm \pi \cdot \frac{2}{3}\right)}$$

nthroot (x,n) returns the real nth root of x.
Both x and n must be real, and if x is negative, n must be an odd integer.

Równanie algebraiczne trzeciego stopnia z jedną niewiadomą (cd.)

$$\boxed{x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0}$$

$$\boxed{y^3 + (3 \cdot p) \cdot y + (2 \cdot q) = 0} \qquad D = q^2 + p^3$$

A co zrobić, gdy *D*<0 ?

Rafael **Bombelli** (druga połowa XVI w.) – matematyk i inżynier włoski. Pierwszy (1572) podał własności i najprostsze działania na liczbach zespolonych oraz ich zastosowanie do przypadku nieprzywiedlnego w równaniach trzeciego stopnia.

Podawane dane biograficzne nie będą obiektem testowania na tzw. „części teoretycznej”.

Równanie algebraiczne trzeciego stopnia z jedną niewiadomą (cd.)

Wzory Cardano-Bombelliego

$$\boxed{D = q^2 + p^3}$$

Dla przypadku:

$$D < 0 \quad (gdy: p < 0) \quad \Rightarrow \quad y_1, y_2, y_3 \in \mathbf{R} \quad \wedge \quad y_1 \neq y_2 \neq y_3 \neq y_1$$

....i wtedy wyliczamy tak:

$$k = 1,2,3 \quad \Rightarrow$$

$$y_k = 2 \cdot \sqrt{-p} \cdot \cos\left(\frac{\varphi + 2 \cdot \pi \cdot (k-1)}{3}\right) \quad : \quad \varphi \in < 0; \pi >$$

$$\varphi : \quad \cos(\varphi) = \frac{-q}{\sqrt{-p^3}}$$

Pamiętajmy, że *y* to nie to samo co *x*:

$$\boxed{y = x + \frac{a_2}{3} \quad \Rightarrow \quad x = y - \frac{a_2}{3}}$$

Matlab: acos

A co by się zmieniło, gdyby współczynniki równania mogły być zespolone?

Równanie algebraiczne czwartego stopnia z jedną niewiadomą

$$\boxed{a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbf{R}}$$

$$\boxed{x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0}$$

Lodovico **Ferrari** (1522-1565) – włoski matematyk. Asystent Cardano. Podał metodę rozwiązywania równań czwartego stopnia opublikowaną przez Cardano (1545).

Cardano G. Hieronymi Cardani artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus (Book number one about the great art, or the rules of algebra). Edited by Cardano G. Nürnberg, 1545.

Podawane dane biograficzne nie będą obiektem testowania na tzw. „części teoretycznej".

AGH

Równanie algebraiczne czwartego stopnia z jedną niewiadomą (cd.)

Wzory Ferrari

$$x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0$$

$$k^3 + \left(-\frac{a_2}{2}\right) \cdot k^2 + \left(\frac{a_3 \cdot a_1 - 4 \cdot a_0}{4}\right) \cdot k + \frac{4 \cdot a_2 \cdot a_0 - a_3^2 \cdot a_0 - a_1^2}{8} = 0$$

$$p = \sqrt{2 \cdot k + \frac{a_3^2}{4} - a_2} \quad , \quad q = \frac{k \cdot a_3 - a_1}{2 \cdot p}$$

$$x^2 + \left(\frac{a_3}{2} \pm p\right) \cdot x + k \pm q = 0$$

podstawiamy, rozwiązujemy ... i mamy wynik!

A co by się zmieniło, gdyby współczynniki równania mogły być zespolone?

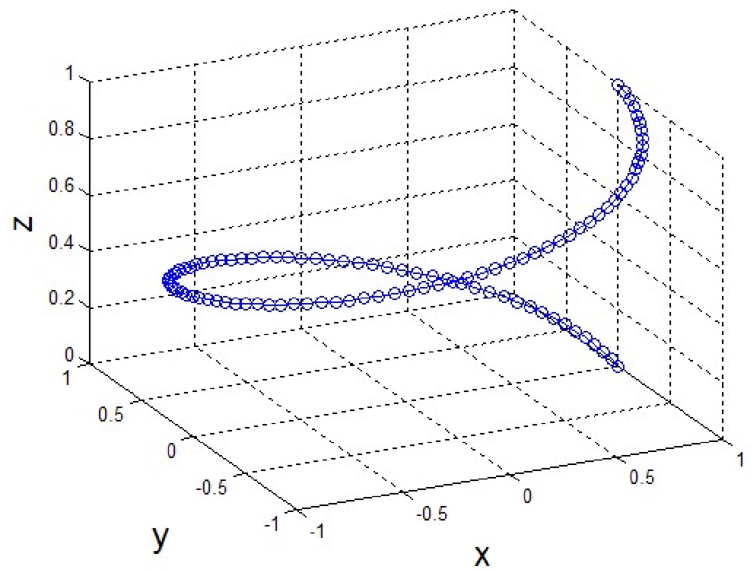
Zespolona dziedzina wielomianu

W przypadku rozważania zespolonej (a nie tylko rzeczywistej) dziedziny *x*, wygodnie jest opracować wykres tak, jakby część rzeczywista była jedną zmienną, a część urojona drugą – otrzymujemy wtedy wykres funkcji dwóch zmiennych.

Na takim wykresie możemy przedstawiać pierwiastki zespolone, których nie zobaczymy na klasycznym dwuwymiarowym wykresie wielomianu!

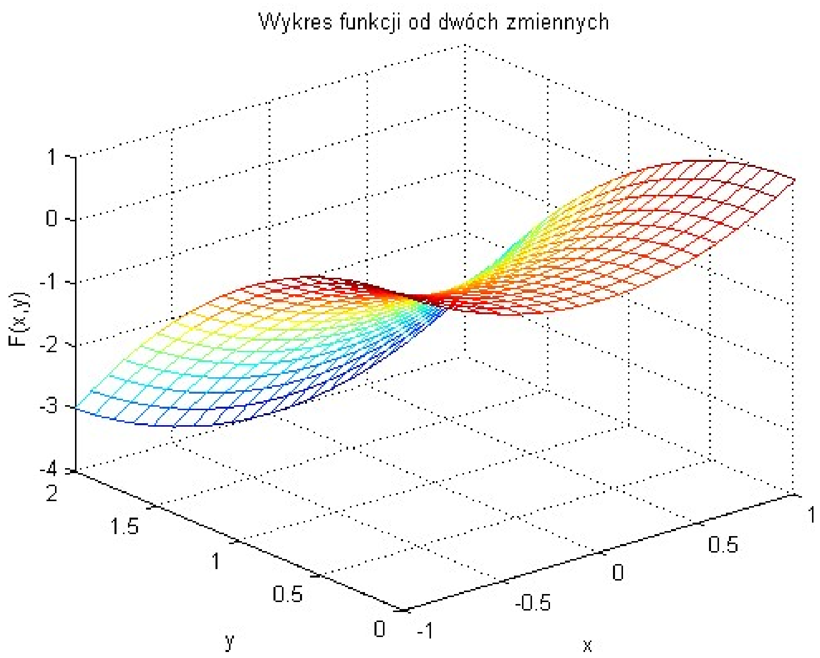
Przykład wykresu trójwymiarowego

```
% ...

% krzywa 3D w zapisie parametrycznym:
   t=0:0.01:1;
x=cos(2*pi*t);
y=sin(2*pi*t);
z=t;

  figure(1);   clf;   fs1=18;
     plot3(x,y,z,'bo-'); grid on;
        xlabel('x','fontsize',fs1);
        ylabel('y','fontsize',fs1);
        zlabel('z','fontsize',fs1);
        view([-25,30]); % [azymut, elewacja];

% ...
```



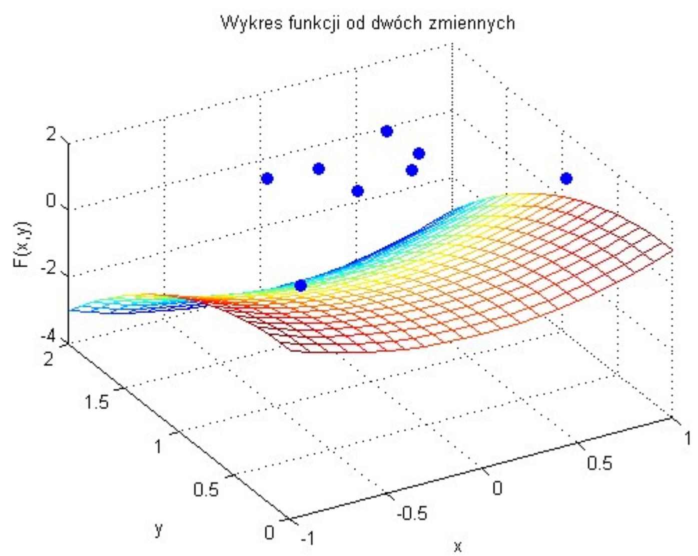
Inny przykład wykresu trójwymiarowego

```
% ...

% wykres funkcji 3D:
x=-1:0.1:1; y=0:0.1:2;    [X,Y]=meshgrid(x,y);

Fxy=X.^2-Y.^2; % glowny wzor jest wyrozniony;

   figure(1); clf;
       mesh(x,y,Fxy);
         xlabel('x');  ylabel('y');  zlabel('F(x,y)');
         title('Wykres funkcji od dwóch zmiennych’);
         view([-40,30]);

% ...
```



Kolejny przykład wykresu trójwymiarowego

```
% ...
x=-1:0.1:1; y=0:0.1:2;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Fxy=X.^2-Y.^2;
N=10;
   figure(1); clf;
      mesh(x,y,Fxy); hold on;
      plot3(rand(1,N)*2-1 ,  rand(1,N)*2 ,  rand(1,N)*4-2 ,  'bo' ,  'markerface' ,  'b');
      xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('F(x,y)');
      title('Wykres funkcji od dwóch zmiennych');
      view([-30,45]); % [azymut, elewacja];
% ...
```



Wybrane elementy MATLABa

Funkcje przydatne do „dopracowywania" wykresów (2D)

axis: axis([min_x, max_x, min_y, max_y]); axis equal; axis tight;
xlim: xlim([min_x,max_x]);
ylim: ylim([min_y,max_y]);
xlabel: xlabel('stala tekstowa');
ylabel: ylabel('stala tekstowa');
title: title('stala tekstowa');
xticks: xticks(wektor_kolejnych_wartosci);
yticks: yticks(wektor_kolejnych_wartosci);

Uwaga – niektóre symbole mogą mieć specjalne znaczenie, np.: „_" obniża kolejny znak, „^" podwyższa kolejny znak.

Inne przydatne funkcje:

max: [max_x, k_max]=max(x);
min: [min_x, k_min]=min(x);

Dla macierzy max i min „działają" na kolumnach – zatem wtedy wynikiem jest wektor wierszowy.

Wybrane elementy MATLABa

Przydatne funkcje

a) obliczeniowe (*):

- **log10** – logarytm o podstawie 10
- **log2** – logarytm o podstawie 2
- **log** – logarytm naturalny, czyli o podstawie e=2,71...

b) organizujące dane:

- **sort** – sortowanie danych, rosnąco (lub malejąco), z możliwością odczytu także pierwotnych indeksów elementów, które po posortowaniu ułożyły się kolejno
- **find** – wyszukiwanie indeksów dla elementów spełniających zadany warunek (potem można te indeksy wykorzystać)

c) rysujące:

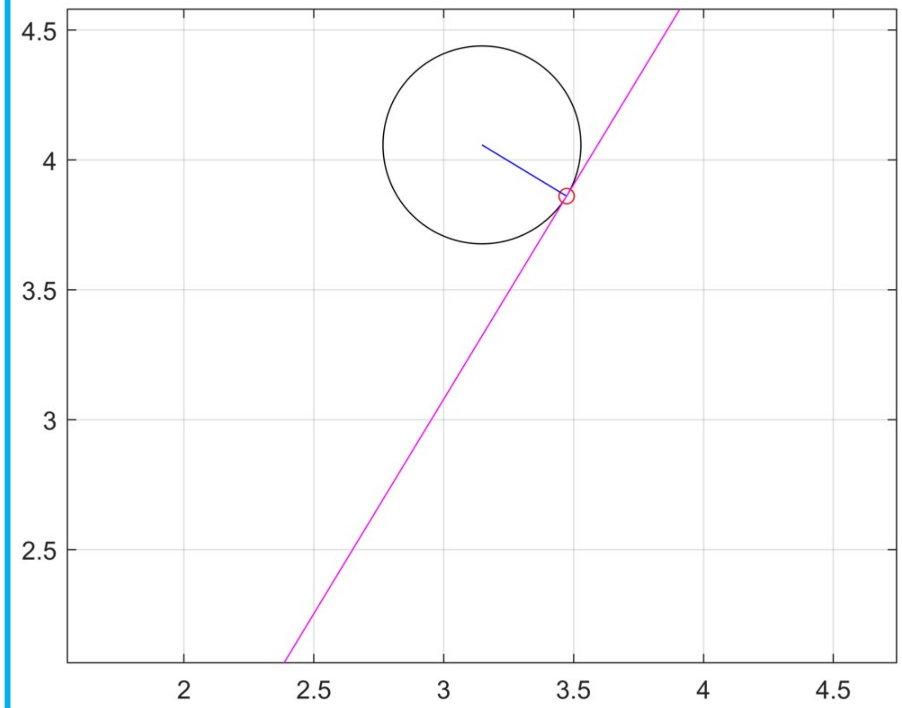
- **semilogx** – dokładnie jak plot, ale oś pozioma jest w skali logarytmicznej (oś pionowa jest w skali liniowej)
- **semilogy** – dokładnie jak plot, ale oś pionowa jest w skali logarytmicznej (oś pozioma jest w skali liniowej)
- **loglog** – dokładnie jak plot, ale obie osie są w skali logarytmicznej

(*) np. przy obserwacji wartości błędu, który szybko maleje w kolejnych iteracjach.

Przykład z geometrii analitycznej na płaszczyźnie

Zadanie: narysować prostą styczną do zadanego okręgu (ale otrzymanego w wyniku losowania) w wybranym losowo punkcie.

```
.....
c = (rand(2,1)-0.5)*10;      r = rand*3;
p = 0:pi/100:2*pi;
xr = c(1) + r*cos(p);
yr = c(2) + r*sin(p);

p0 = rand*2*pi;                % losowanie punktu;
x0 = c(1) + r*cos(p0);
y0 = c(2) + r*sin(p0);

R = [ x0-c(1) , y0-c(2) ];     % wektor promienia;
A = R(1);        B=R(2);          C=-A*x0-B*y0;
x = c(1)-2*r  :  4*r  :  c(1)+2*r;
y = -(A*x + C)/B;

   figure(1); clf;
      plot(xr,yr,'k');   axis equal;   hold on;   grid on;
      plot(x0,y0,'ro');
      plot([c(1),c(1)+R(1)],[c(2),c(2)+R(2)],'b');
      plot(x,y,'m');
 .....
```



Z jakich wzorów tu skorzystaliśmy?

UWAGA: w przykładzie nie ma żadnego zabezpieczenia przed przypadkiem z linią pionową (lub prawie pionową), czyli gdy B=0.

AGH

Zapraszam do laboratorium ...