AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Teoria sygnałów

Wykład 8

Dr inż. Przemysław Korohoda
Katedra Elektroniki, AGH, Kraków

home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2

UPEL: TS 2022

Temat wykładu

1. Okna definiowane w dziedzinie czasu.
2. Okna definiowane w dziedzinie częstotliwości.

Efekt modulacji (zmiana długości okna)

$x_1(t)=\cos(2\cdot\pi\cdot f_x\cdot t)$

$x_2(t)=\Pi(t\,/\,T)$

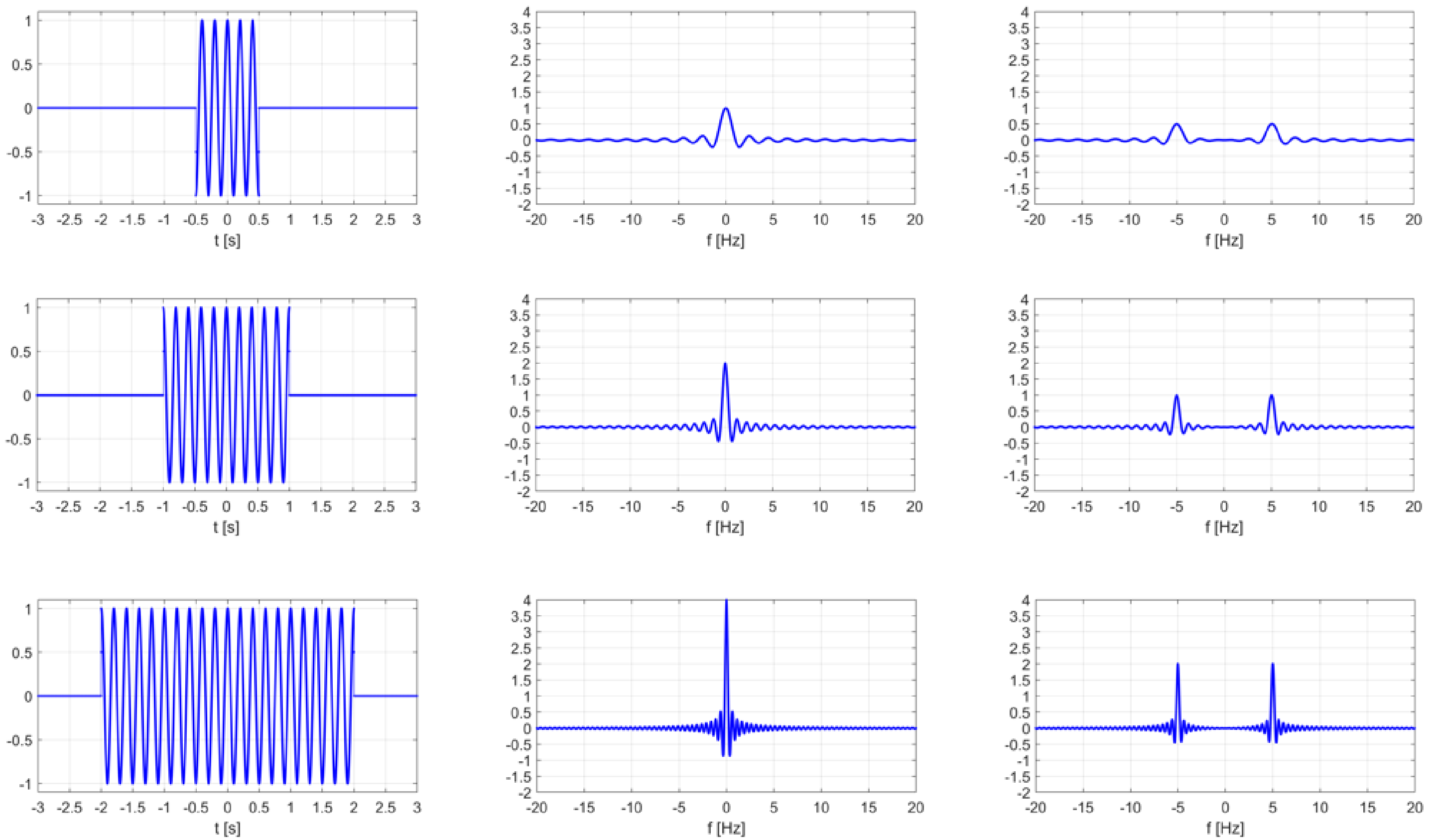
$y(t)=x_1(t)\cdot x_2(t)$

$f_x = 5$ Hz

a) $T = 1$ s
b) $T = 2$ s
c) $T = 4$ s

$y(t)$ | $X_2(f)$ | $Y(f)$

a)
b)
c)



Efekt modulacji (sygnał - „sprężynka”)

$x_1(t)=\cos(2\cdot\pi\cdot f_x\cdot t)$

$x_2(t)=\Pi(t\,/\,T)$

$y(t)= x_1(t)\cdot x_2(t)$

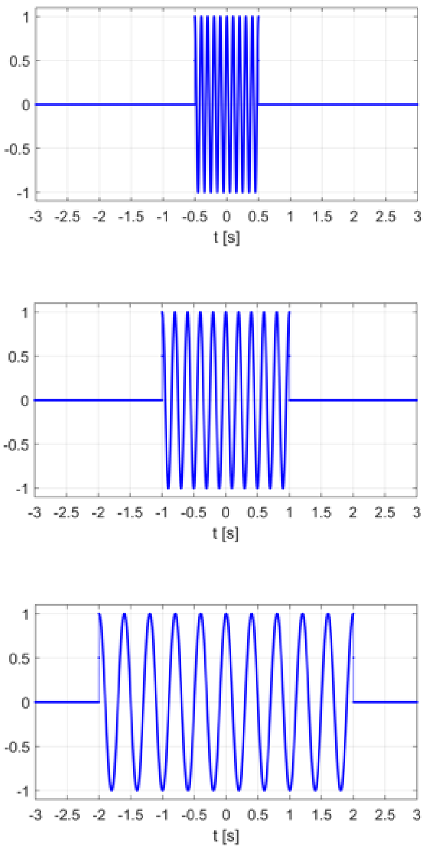
a) $T = 1$ s
$f_x = 10$ Hz

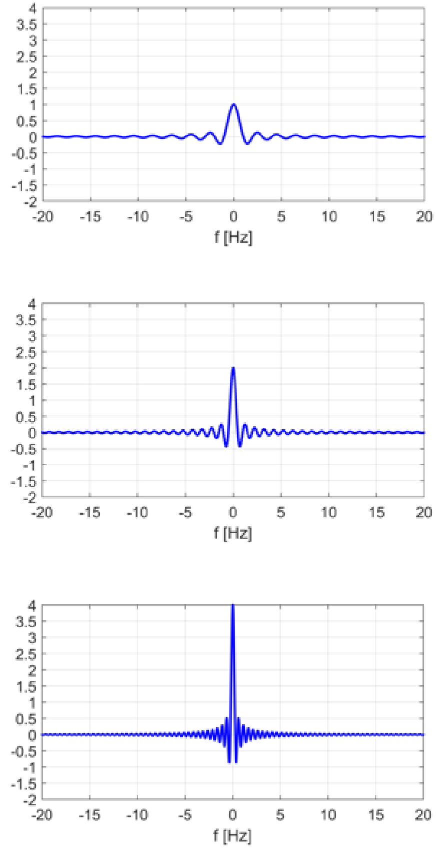
b) $T = 2$ s
$f_x = 5$ Hz

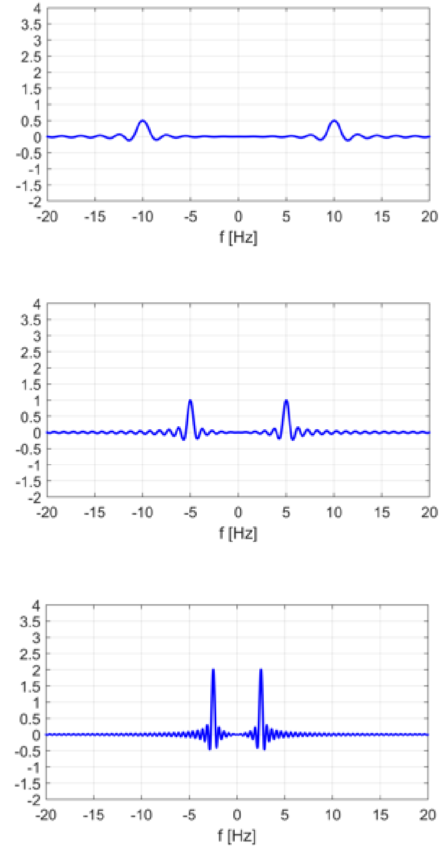
c) $T = 4$ s
$f_x = 2{,}5$ Hz

$y(t)$ | **$X_2(f)$** | **$Y(f)$**

a)
b)
c)



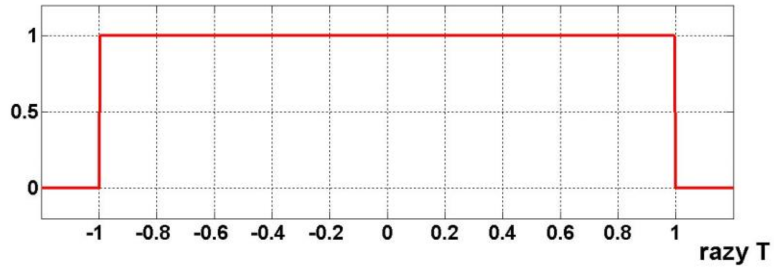




Okno prostokątne

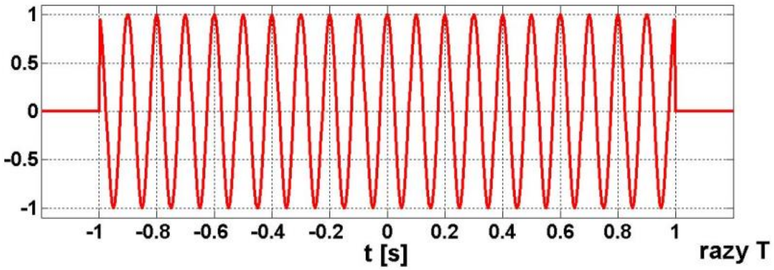
Przebiegi czasowe okna oraz iloczynu okna i sygnału:

$$w(t) = \Pi\left(\frac{t}{2\cdot T}\right)$$



$$x(t) = \cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t)$$

$$y(t) = x(t)\cdot w(t) = \Pi\left(\frac{t}{2\cdot T}\right)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t)$$

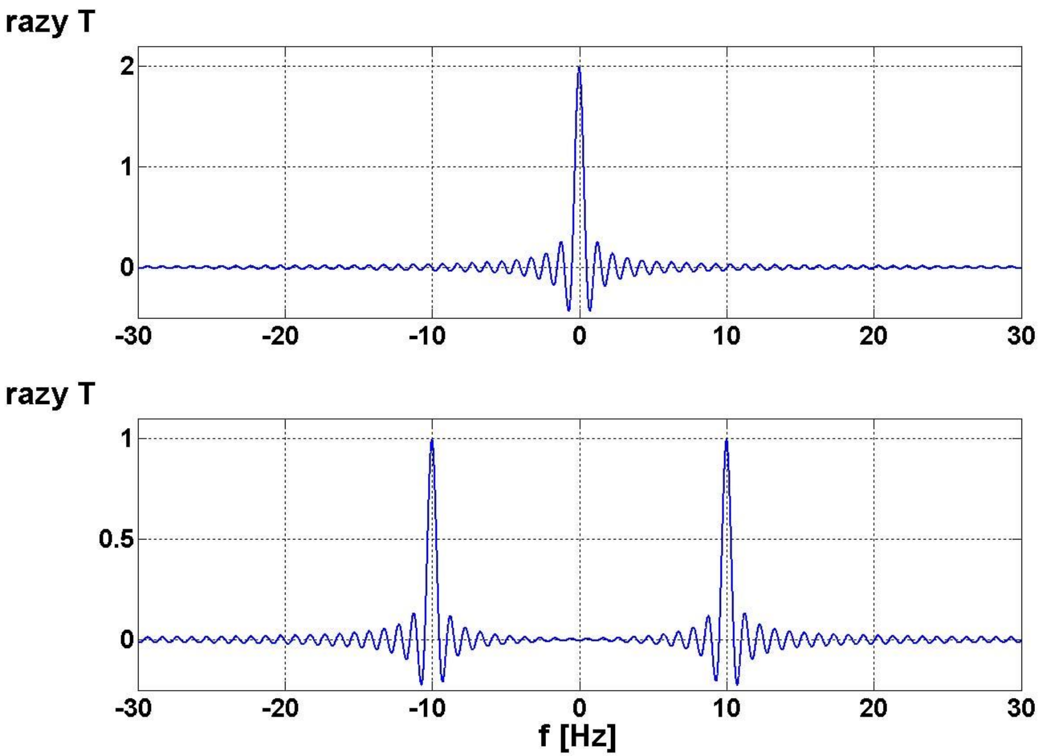


$$\boxed{x(t) = \cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) \quad \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\longleftrightarrow}} \quad X(f) = \frac{1}{2}\cdot\left[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)\right]}$$

Warto się zastanowić: co zależy of *f_0*, a co od *T* ?

Okno prostokątne

Widma częstotliwościowe okna oraz iloczynu okna i sygnału:



$$w(t) = \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot T}\right) \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\longleftrightarrow}} W(f) = 2 \cdot T \cdot \mathrm{sinc}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)$$

Ponieważ wszystkie sygnały są parzyste, więc widma mają tylko część rzeczywistą – dlatego nie pokazano wykresów zerowej części urojonej.

Okno prostokątne – widma amplitudowe w *dB*

$$X_{dB} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{x}{x_{ref}}\right)$$

Często: x_{ref} =1

$$x = 2 \cdot x_{ref} \quad \xleftrightarrow{dB} \quad x_{dB} = +6\,\mathrm{dB}$$

$$x = \sqrt{2} \cdot x_{ref} \quad \xleftrightarrow{dB} \quad x_{dB} = +3\,\mathrm{dB}$$

$$x = x_{ref} \quad \xleftrightarrow{dB} \quad x_{dB} = 0\,\mathrm{dB}$$

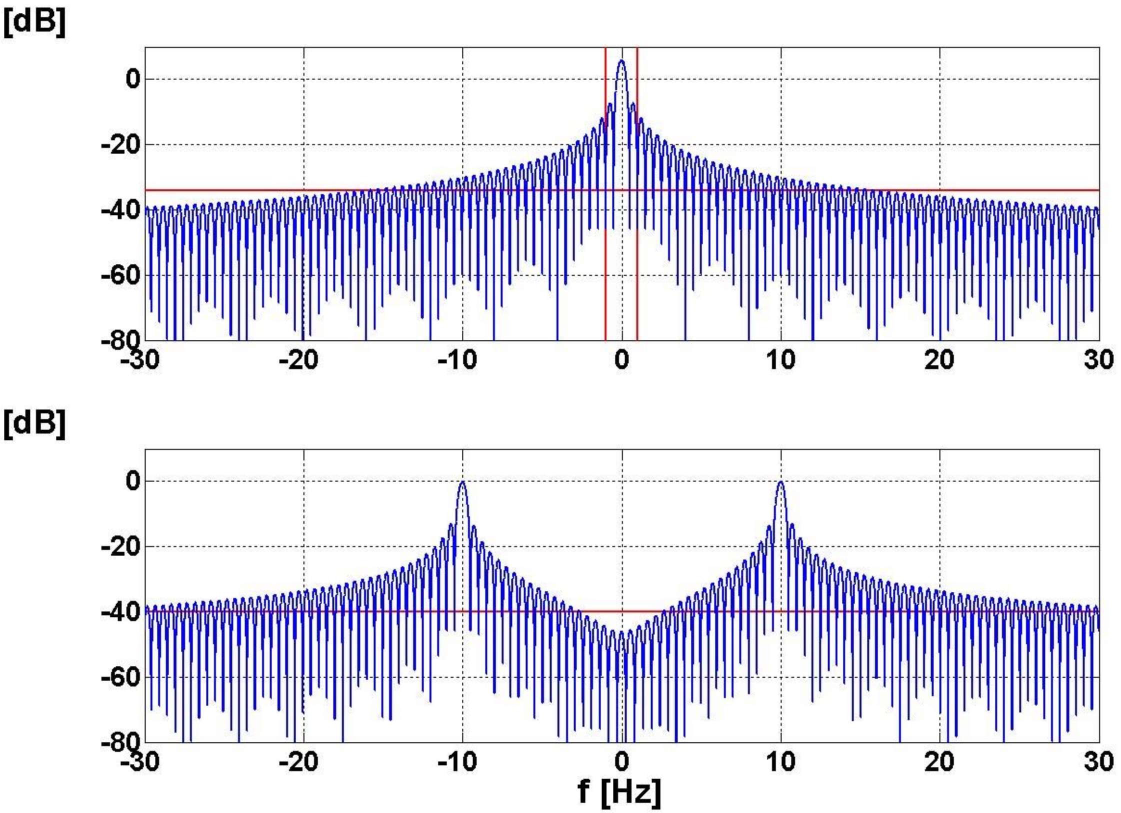
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x_{ref} \quad \xleftrightarrow{dB} \quad x_{dB} = -3\,\mathrm{dB}$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot x_{ref} \quad \xleftrightarrow{dB} \quad x_{dB} = -6\,\mathrm{dB}$$

$$x = \frac{1}{10} \cdot x_{ref} \quad \xleftrightarrow{dB} \quad x_{dB} = -20\,\mathrm{dB}$$

$$x = \frac{1}{100} \cdot x_{ref} \quad \xleftrightarrow{dB} \quad x_{dB} = -40\,\mathrm{dB}$$

$$x = \frac{1}{1000} \cdot x_{ref} \quad \xleftrightarrow{dB} \quad x_{dB} = -60\,\mathrm{dB}$$



$$w(t) = \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot T}\right) \quad \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\longleftrightarrow}} \quad W(f) = 2 \cdot T \cdot \mathrm{sinc}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)$$

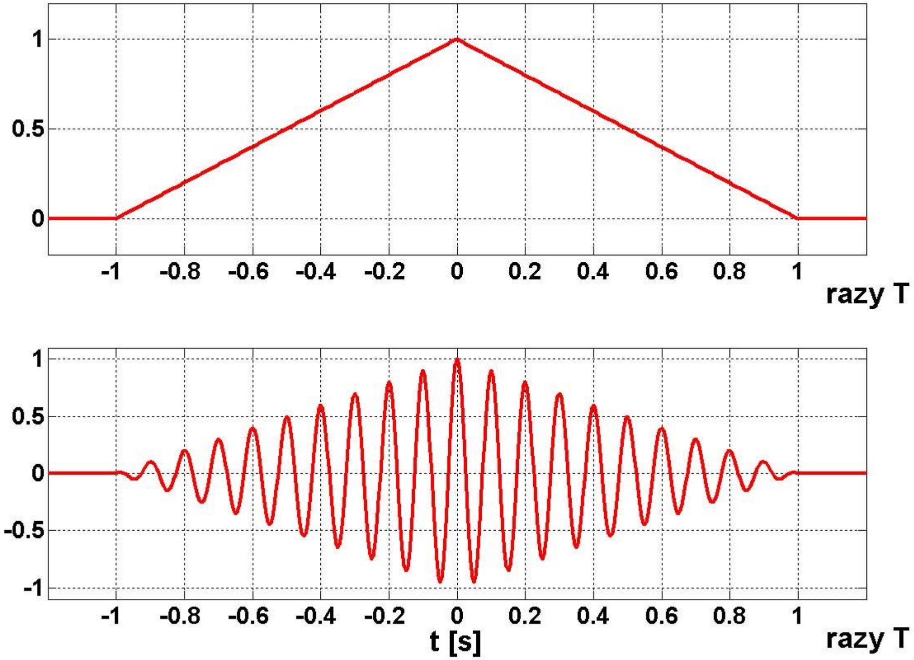
Czerwone linie pokazują poziom -40*dB* w odniesieniu do maksimum oraz f_T=1/T.

Okno trójkątne (Bartletta)

$$w(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

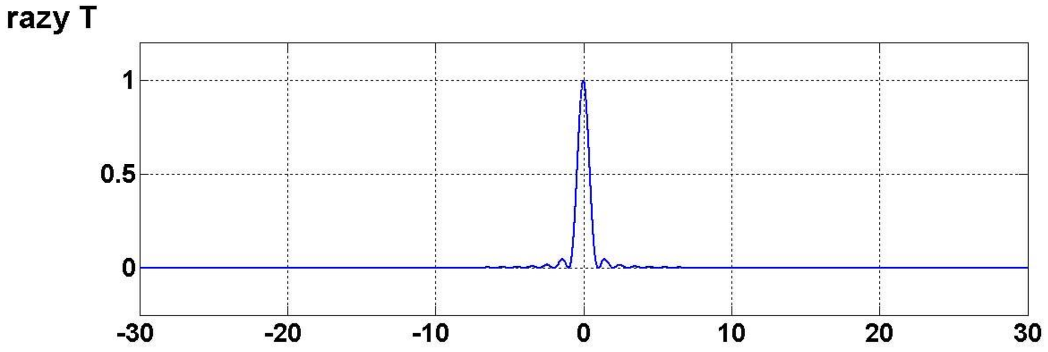
$$y(t) = x(t) \cdot w(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

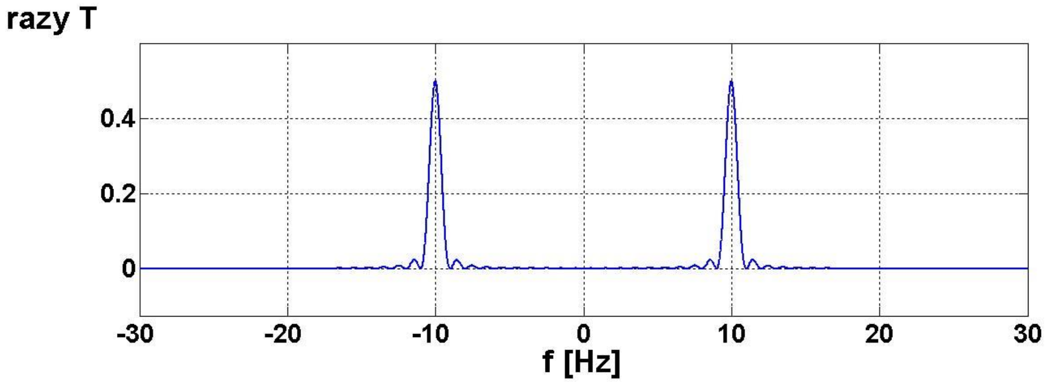


$$w(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} W(f) = T \cdot \mathrm{sinc}^2(\pi \cdot f \cdot T)$$

Okno trójkątne (Bartletta)

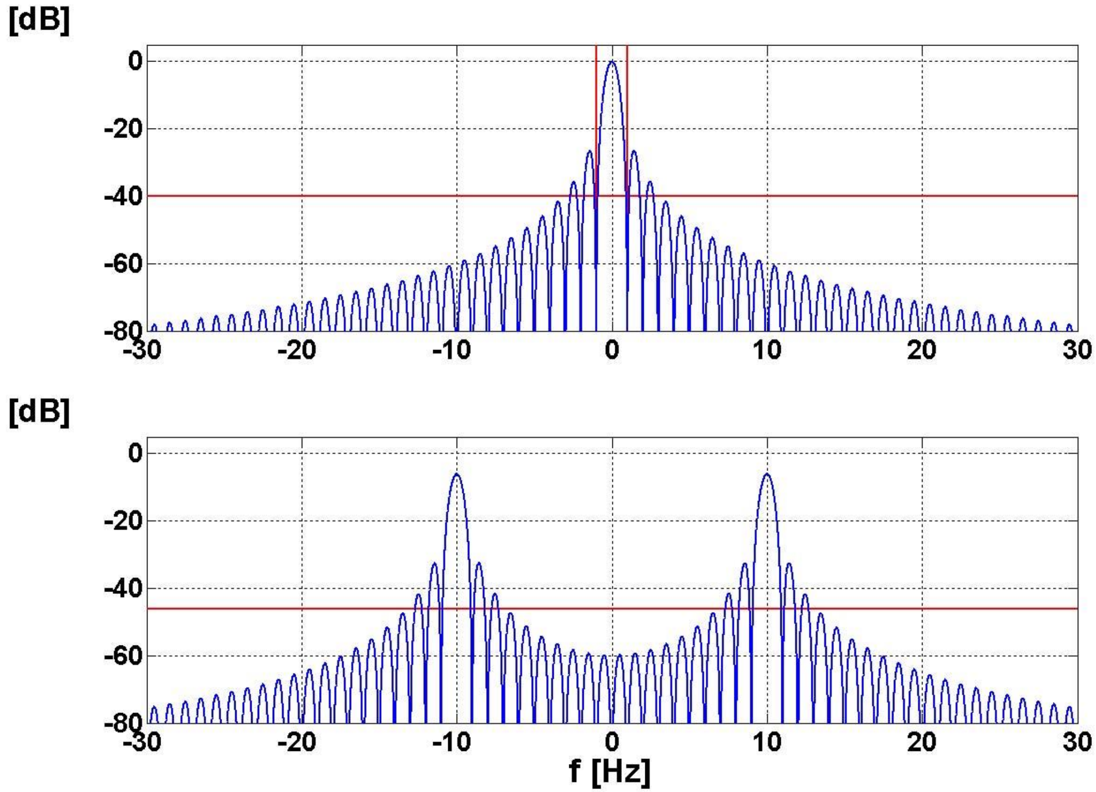
Widma częstotliwościowe okna oraz iloczynu okna i sygnału:





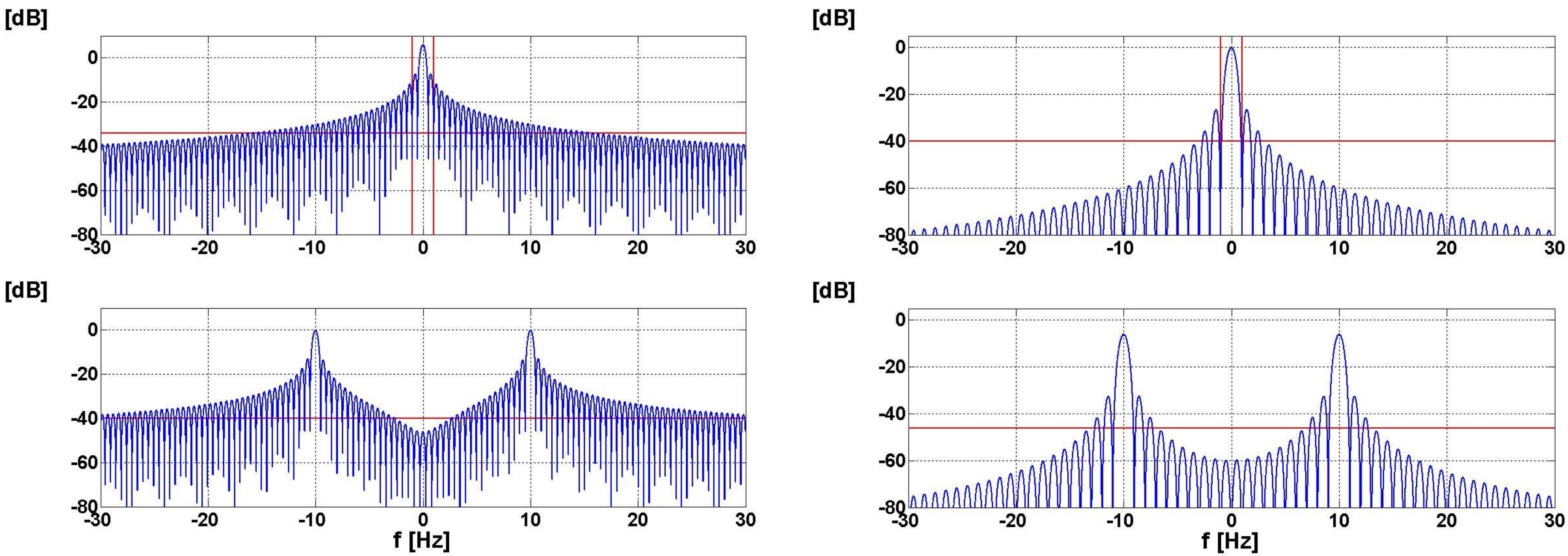
$$w(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} W(f) = T \cdot \mathrm{sinc}^2(\pi \cdot f \cdot T)$$

Okno Bartletta – widma amplitudowe w *dB*



$$W(f) = T \cdot \mathrm{sinc}^2(\pi \cdot f \cdot T) \cong \frac{\sin^2(\pi \cdot f \cdot T)}{\pi^2 \cdot f^2 \cdot T} \quad \rightarrow \quad (\bullet) \cdot \frac{1}{f^2}$$

Porównanie okna prostokątnego i trójkątnego



$$w(t) = \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot T}\right) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} W(f) = 2 \cdot T \cdot \operatorname{sinc}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)$$

$$w(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} W(f) = T \cdot \operatorname{sinc}^2(\pi \cdot f \cdot T)$$

Sygnał „podniesiony kosinus”

$$x(t)=\left[\cos(2\cdot\pi\cdot t)+1\right]\cdot\Pi(t)\quad\xleftrightarrow[ICFT]{CFT}\quad X(f)=\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\delta(f+1)+\delta(f-1)\right)+\delta(f)\right]*\mathrm{sinc}(\pi\cdot f)$$

$$X(f)\quad=\quad\frac{1}{2}\cdot\left[\mathrm{sinc}\left(\pi\cdot(f+1)\right)+\mathrm{sinc}\left(\pi\cdot(f-1)\right)\right]+\mathrm{sinc}(\pi\cdot f)$$

$$\sin(\pi\cdot(f+1))=\sin(\pi\cdot f+\pi)=-\sin(\pi\cdot f)$$
$$\sin(\pi\cdot(f-1))=\sin(\pi\cdot f-\pi)=-\sin(\pi\cdot f)$$

$$X(f)\quad=\quad\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{-\sin(\pi\cdot f)}{\pi\cdot(f+1)}+\frac{-\sin(\pi\cdot f)}{\pi\cdot(f-1)}\right]+\frac{\sin(\pi\cdot f)}{\pi\cdot f}$$

Uwaga - tu mamy trzy „niewygodne” wartości *f* (dla których można jednak wyprowadzić cały wzór – dla każdej z osobna): -1, 0, +1.

Sygnał „podniesiony kosinus" (cd.)

$$\boxed{X(f) = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{-\sin(\pi\cdot f)}{\pi\cdot(f+1)}+\frac{-\sin(\pi\cdot f)}{\pi\cdot(f-1)}\right]+\frac{\sin(\pi\cdot f)}{\pi\cdot f}}$$

$$X(f) = \frac{1}{\pi}\cdot\sin(\pi\cdot f)\cdot\left[\frac{-\frac{1}{2}}{(f+1)}+\frac{-\frac{1}{2}}{(f-1)}+\frac{1}{f}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\sin(\pi\cdot f)\cdot\left[\frac{-\frac{1}{2}\cdot f\cdot(f-1)-\frac{1}{2}\cdot f\cdot(f+1)+(f+1)\cdot(f-1)}{f\cdot(f+1)\cdot(f-1)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\sin(\pi\cdot f)\cdot\left[\frac{-1}{f\cdot(f^2-1)}\right] = \frac{\sin(\pi\cdot f)}{\pi\cdot f}\cdot\frac{1}{(1-f^2)}$$

Jeżeli teraz uzupełnimy przepis o „niewygodne" wartości *f*, to:

$$X(f) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sinc}(\pi\cdot f)}{(1-f^2)} & dla \quad |f|\neq 1 \\ 1/2 & dla \quad |f|=1 \end{cases} \cong \frac{\mathrm{sinc}(\pi\cdot f)}{(1-f^2)}$$

Sygnał „podniesiony kosinus” (cd.)

Ostatecznie para: sygnał – transformata jest następująca:

$$x(t)=\left[\cos(2\cdot\pi\cdot t)+1\right]\cdot\Pi(t) \quad \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\longleftrightarrow}} \quad X(f)\overset{(*)}{=}\frac{\operatorname{sinc}(\pi\cdot f)}{(1-f^2)}$$

Z faktu, że obie funkcje są parzyste, a także z podobieństwa wzorów na transformaty w przód i wstecz otrzymujemy, że również:

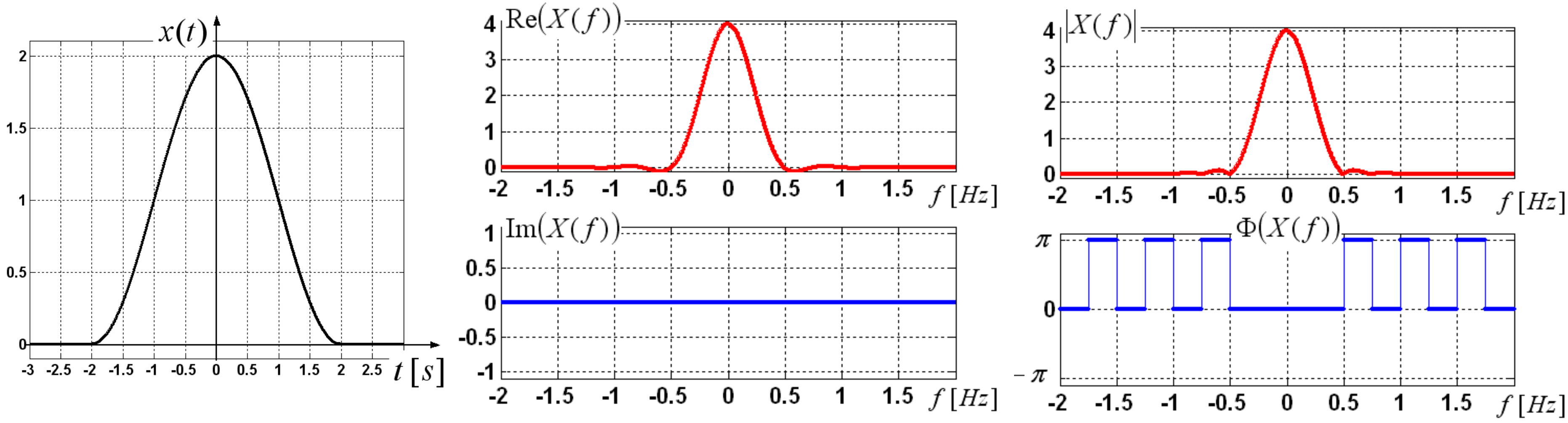
$$x(t)\overset{(*)}{=}\frac{\operatorname{sinc}(\pi\cdot t)}{(1-t^2)} \quad \underset{ICFT}{\overset{CFT}{\longleftrightarrow}} \quad X(f)=\left[\cos(2\cdot\pi\cdot f)+1\right]\cdot\Pi(f)$$

(*) – z dodatkową interpretacją dla „niewygodnych” wartości *f* lub *t*.

Sygnał „podniesiony kosinus" - przykład

$$x(t)=\left[\cos\left(2\cdot\pi\cdot\frac{t}{T}\right)+1\right]\cdot\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\xleftrightarrow[ICFT]{CFT}X(f)=T\cdot\frac{\operatorname{sinc}(\pi\cdot f\cdot T)}{\left(1-(f\cdot T)^2\right)}$$

***T*=4s**

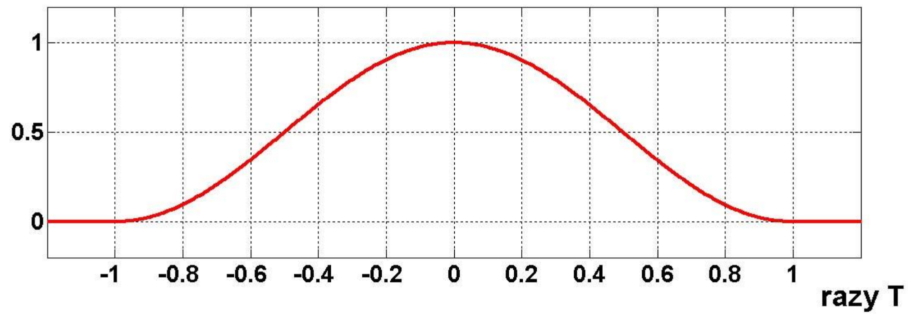


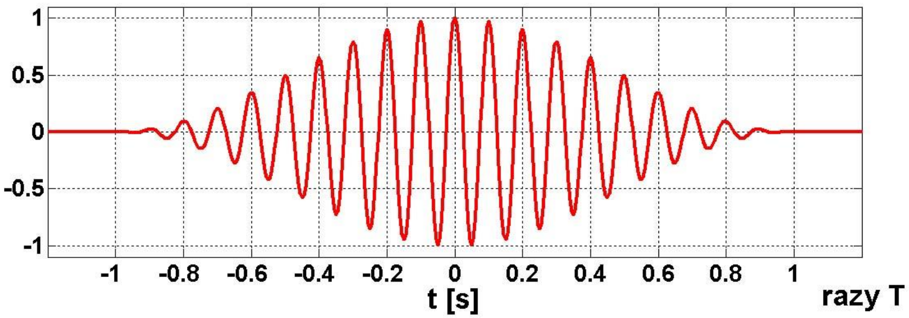
Okno podniesiony cosinus (Hanna)

$$x(t)=\left[\cos\left(2\cdot\pi\cdot\frac{t}{T}\right)+1\right]\cdot\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\xleftrightarrow[ICFT]{CFT}$$

$$X(f)=T\cdot\frac{\mathrm{sinc}(\pi\cdot f\cdot T)}{\left(1-(f\cdot T)^2\right)}$$



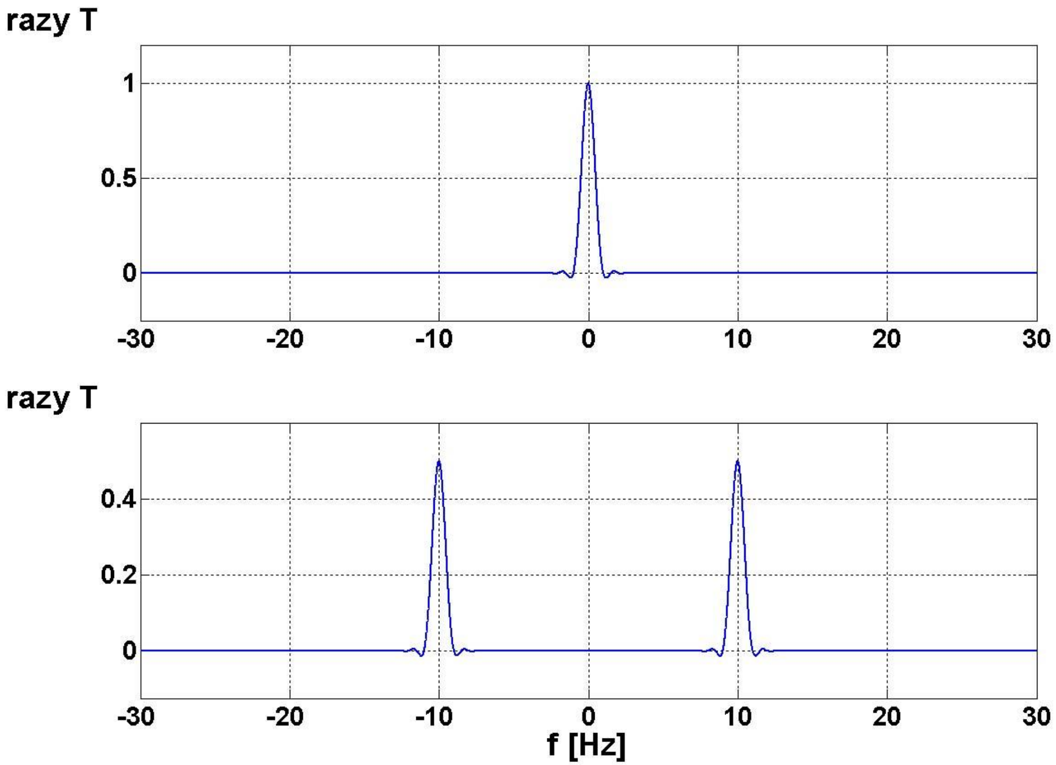


$$w(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot t}{2\cdot T}\right)+1\right] & \text{dla} \quad |t|\le T\\ 0 & \text{dla} \quad |t|>T\end{cases}$$

$$w(t)=\frac{1}{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot t}{2\cdot T}\right)+1\right]\cdot\Pi\left(\frac{t}{2\cdot T}\right)\xleftrightarrow[ICFT]{CFT}W(f)=T\cdot\frac{\mathrm{sinc}(2\cdot\pi\cdot f\cdot T)}{(1-4\cdot f^2\cdot T^2)}$$

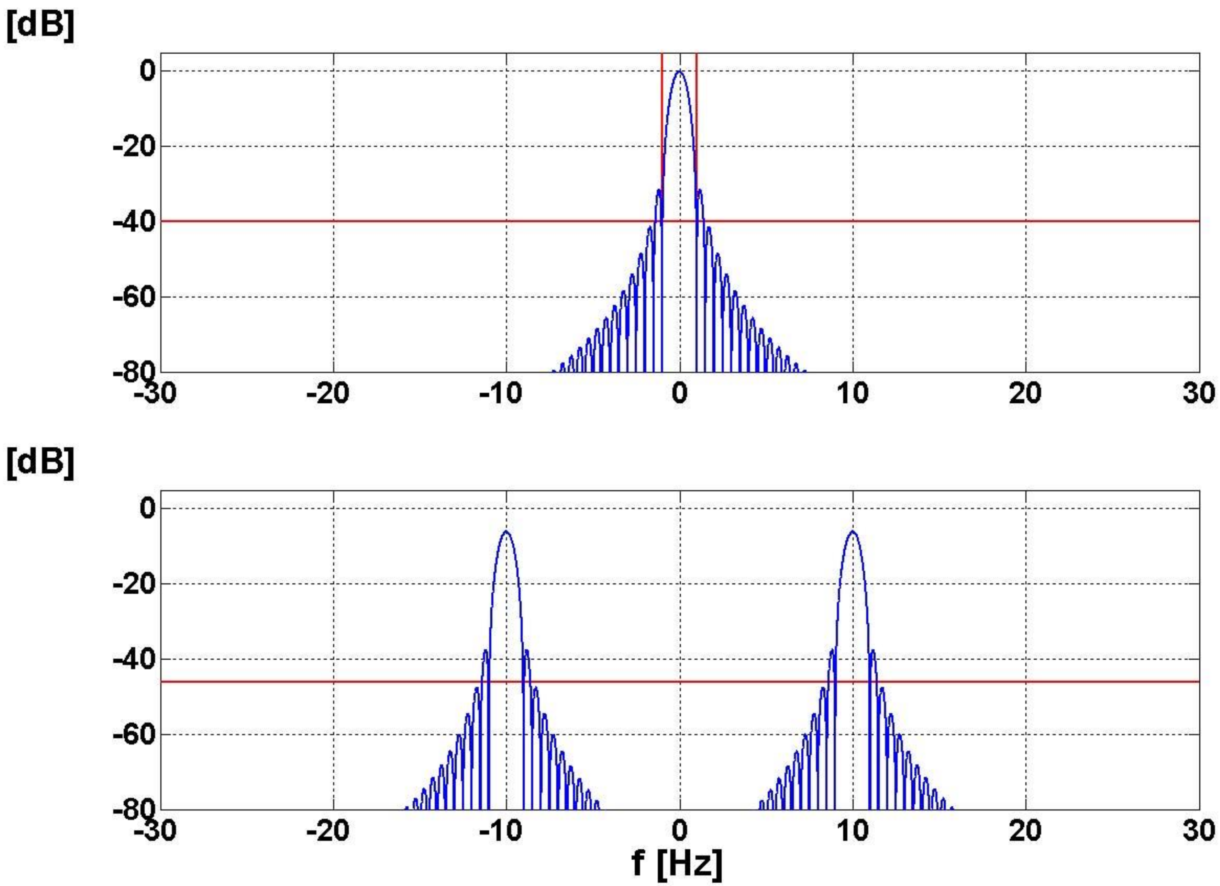
Okno podniesiony cosinus (Hanna)

Widma częstotliwościowe okna oraz iloczynu okna i sygnału:



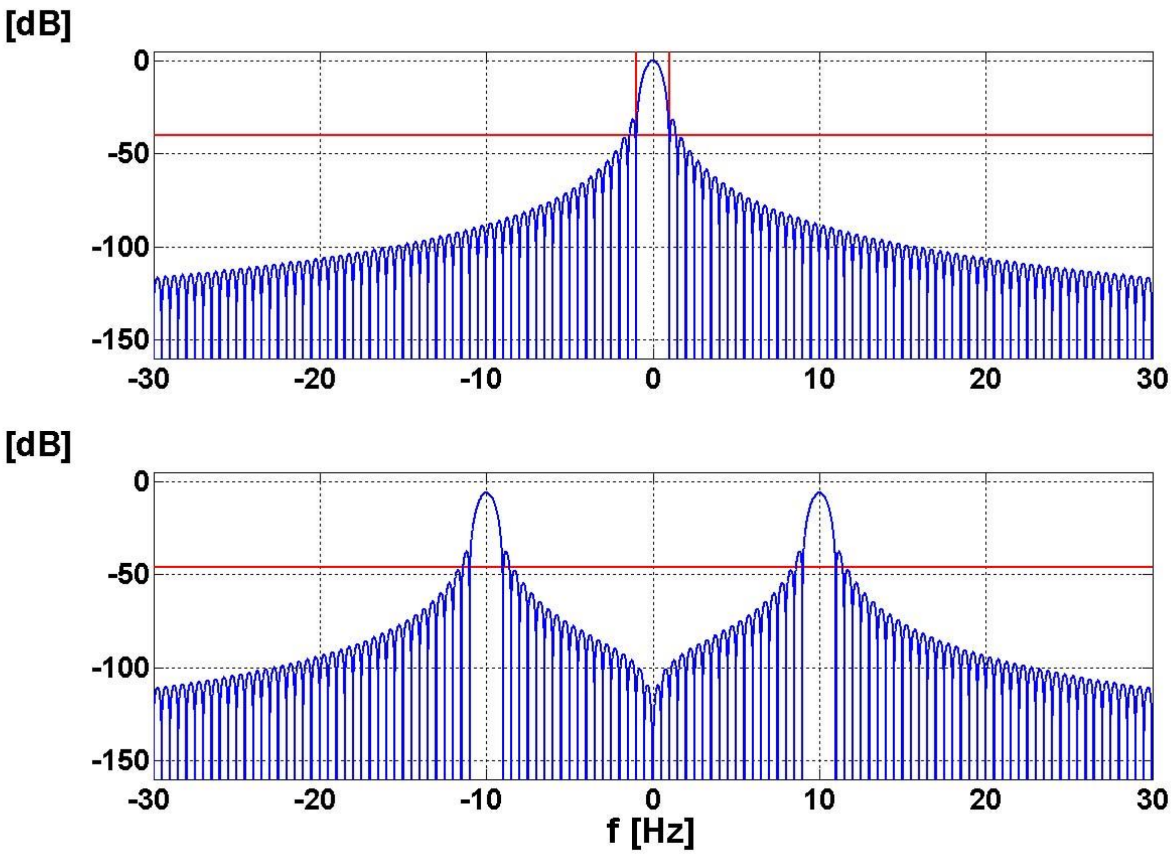
$$W(f) = T \cdot \frac{\mathrm{sinc}(2\cdot\pi\cdot f\cdot T)}{(1-4\cdot f^2\cdot T^2)} = \frac{\sin(2\cdot\pi\cdot f\cdot T)}{(1-4\cdot f^2\cdot T^2)\cdot 2\cdot\pi\cdot f} \quad \rightarrow \quad (\bullet)\cdot\frac{1}{f^3}$$

Okno Hanna
– widma amplitudowe w *dB*



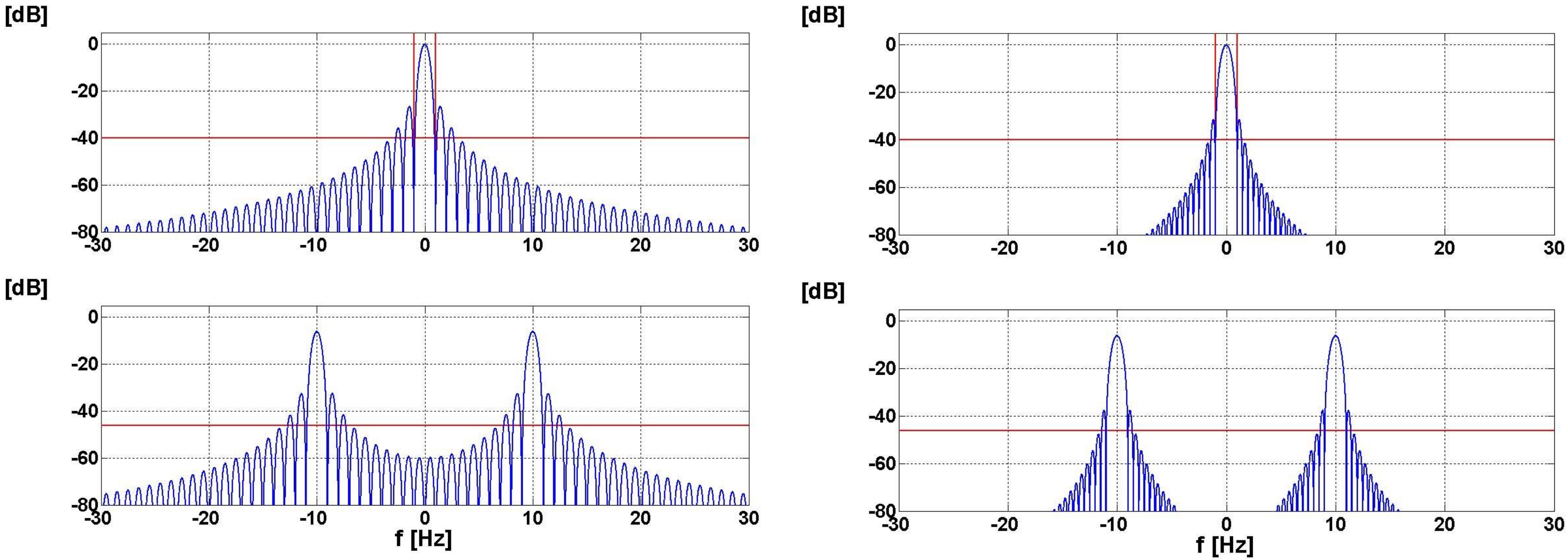
$$W(f) = T \cdot \frac{\mathrm{sinc}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot f^2 \cdot T^2)} = \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot f^2 \cdot T^2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \quad \to \quad (\bullet) \cdot \frac{1}{f^3}$$

Okno Hanna
– widma amplitudowe w *dB*



$$W(f) = T \cdot \frac{\mathrm{sinc}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot f^2 \cdot T^2)} = \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot f^2 \cdot T^2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \quad \rightarrow \quad (\bullet) \cdot \frac{1}{f^3}$$

Porównanie okna trójkątnego i podniesiony kosinus

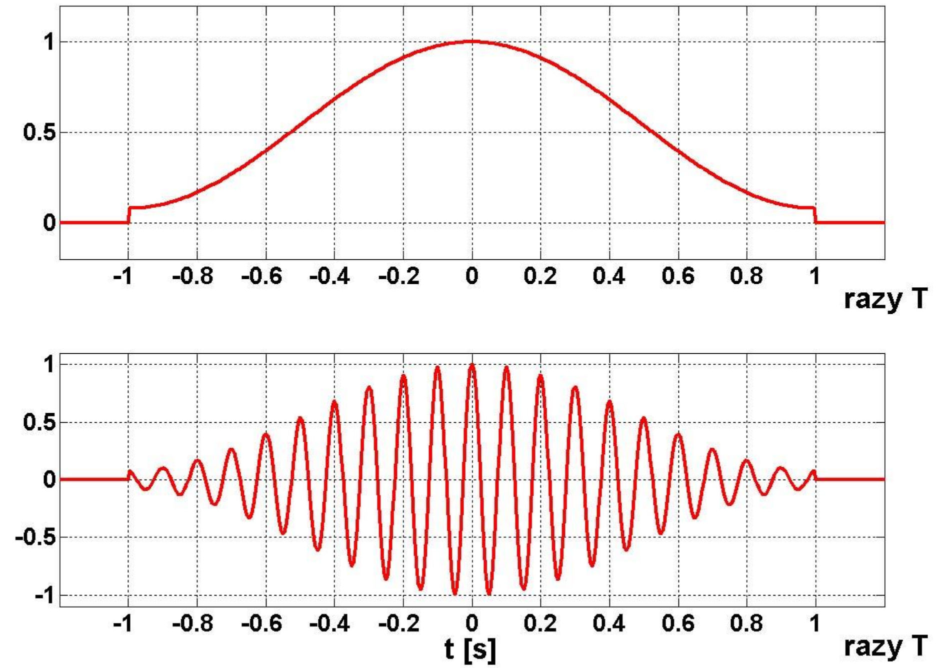


$$w(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} W(f) = T \cdot \operatorname{sinc}^2(\pi \cdot f \cdot T)$$

$$w(t) = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{2 \cdot T}\right) + 1\right] \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot T}\right) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} W(f) = T \cdot \frac{\operatorname{sinc}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot f^2 \cdot T^2)}$$

Okno Hamminga

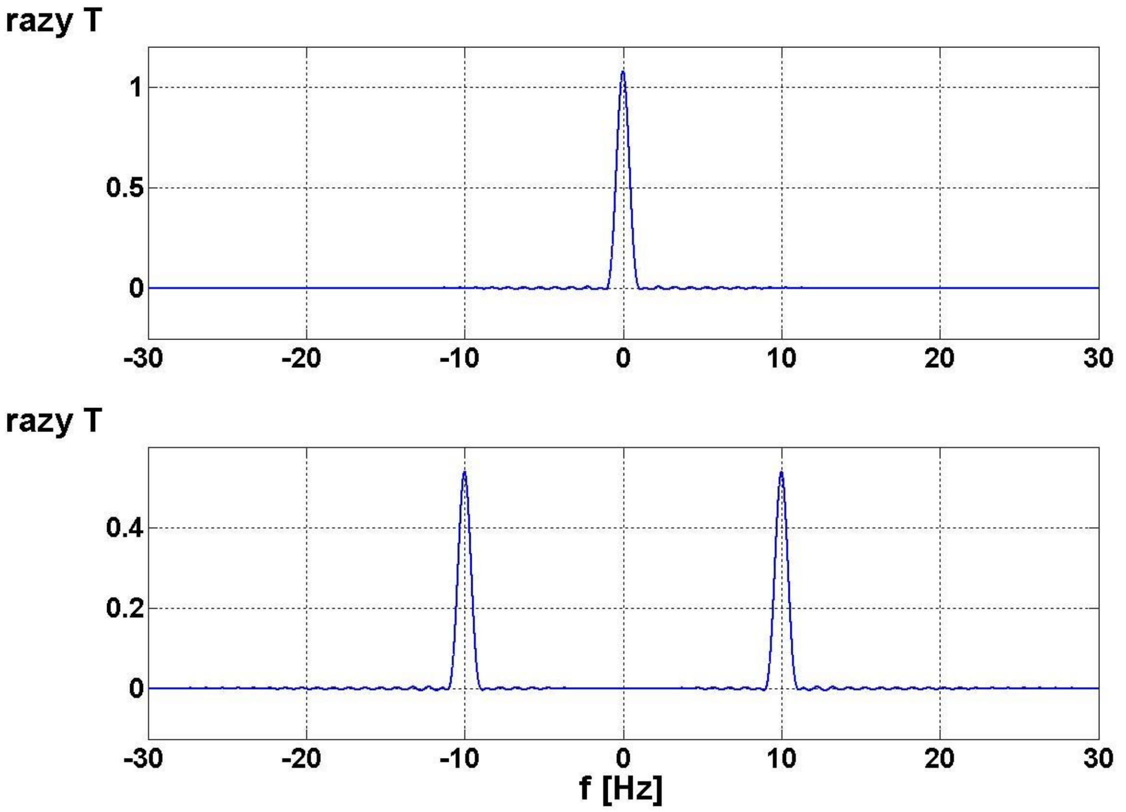
$$w(t) = \begin{cases} 0{,}46 \cdot \cos\left(\dfrac{\pi \cdot t}{T}\right) + 0{,}54 & \text{dla} \quad |t| \le T \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > T \end{cases}$$



$$W(f) = \frac{(1{,}08 - 0{,}64 \cdot f^2 \cdot T^2) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot T^2 \cdot f^2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}$$

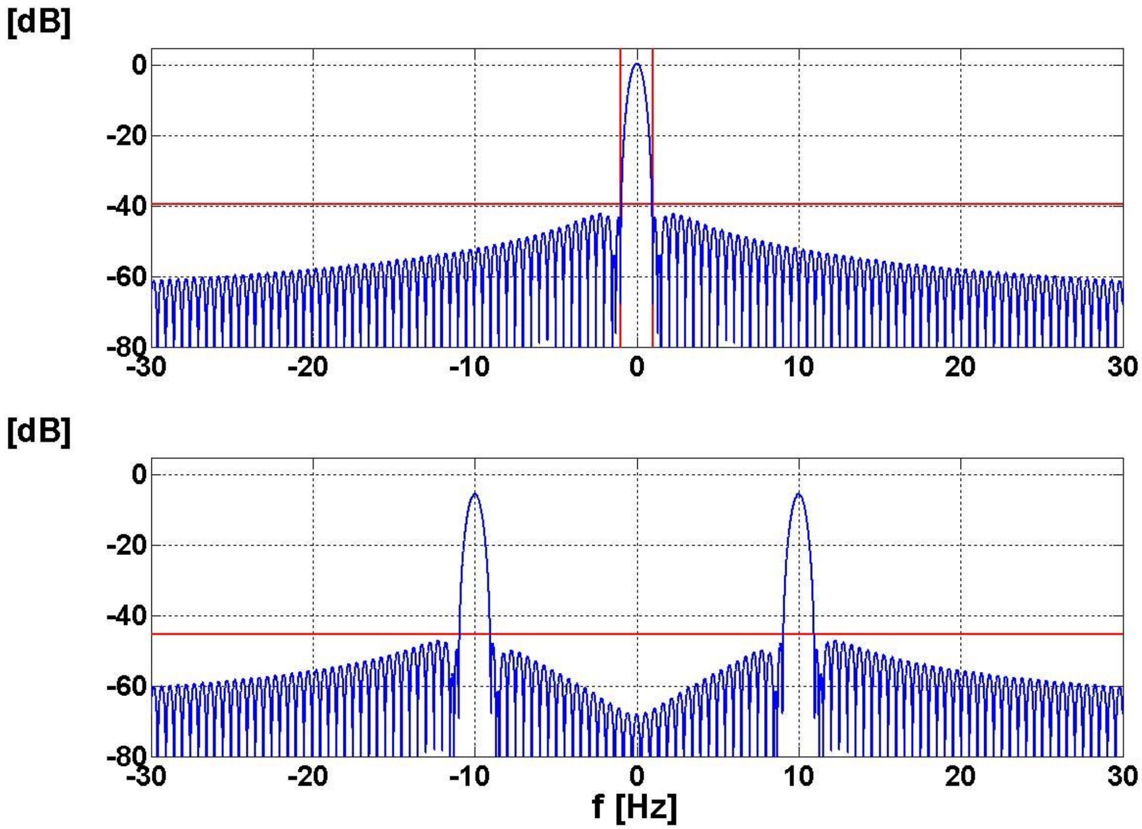
Okno Hamminga

Widma częstotliwościowe okna oraz iloczynu okna i sygnału:



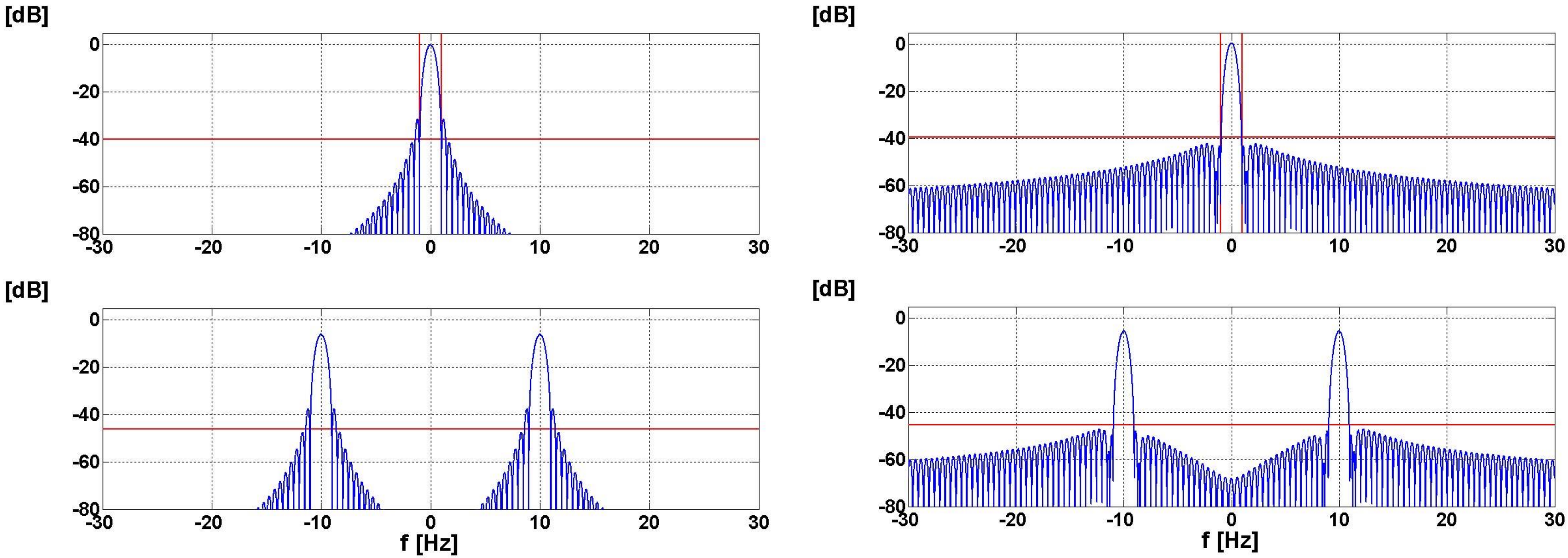
$$W(f) = \frac{(1{,}08 - 0{,}64 \cdot f^2 \cdot T^2) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot T^2 \cdot f^2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}$$

Okno Hamminga – widma amplitudowe w *dB*



$$W(f)=\frac{(1{,}08-0{,}64\cdot f^{2}\cdot T^{2})\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f\cdot T)}{(1-4\cdot T^{2}\cdot f^{2})\cdot 2\cdot\pi\cdot f}$$

Porównanie okna Hanna i Hamminga



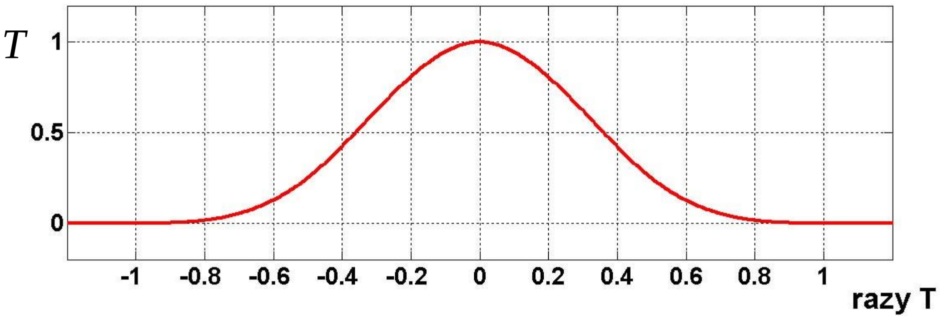
$$w(t)=\frac{1}{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot t}{2\cdot T}\right)+1\right]\cdot\Pi\left(\frac{t}{2\cdot T}\right)\quad\underset{ICFT}{\overset{CFT}{\longleftrightarrow}}\quad W(f)=T\cdot\frac{\mathrm{sinc}(2\cdot\pi\cdot f\cdot T)}{(1-4\cdot f^{2}\cdot T^{2})}$$

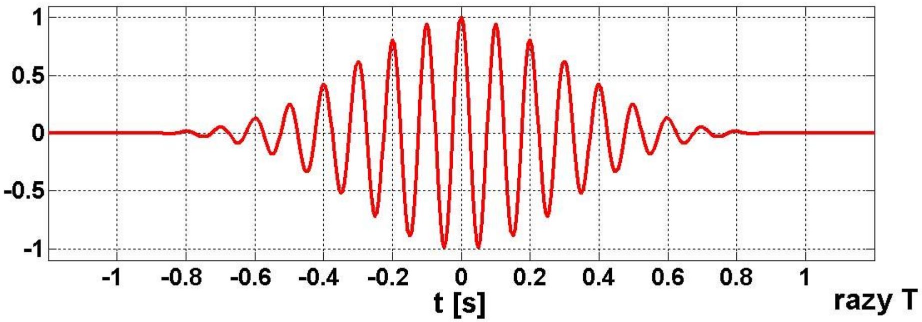
$$w(t)=\begin{cases}0{,}46\cdot\cos\left(\dfrac{\pi\cdot t}{T}\right)+0{,}54 & \text{dla}\quad |t|\le T\\ 0 & \text{dla}\quad |t|>T\end{cases}$$

$$W(f)=\frac{(1{,}08-0{,}64\cdot f^{2}\cdot T^{2})\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f\cdot T)}{(1-4\cdot T^{2}\cdot f^{2})\cdot 2\cdot\pi\cdot f}$$

Okno Parzena

$$w(t)=\begin{cases}1-6\cdot t^2/T^2+6\cdot|t|^3/T^3 & dla \quad |t|\le T/2\\ 2\cdot(1-|t|/T)^3 & dla \quad T/2<|t|\le T\\ 0 & dla \quad |t|>T\end{cases}$$

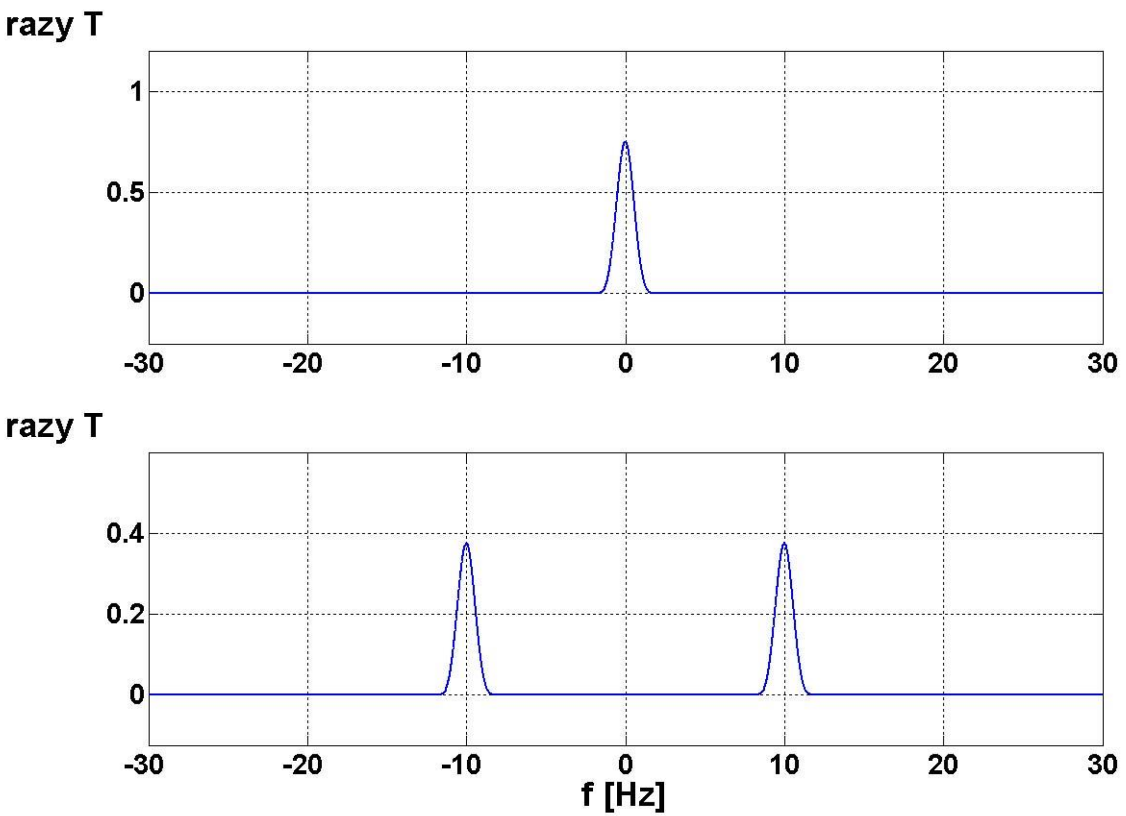




$$W(f)=\frac{3}{4}\cdot T\cdot\mathrm{sinc}^4\left(\frac{\pi\cdot f\cdot T}{2}\right)=\frac{12\cdot\sin^4(\pi\cdot f\cdot T/2)}{\pi^4\cdot f^4\cdot T^3}\quad\rightarrow\quad(\bullet)\cdot\frac{1}{f^4}$$

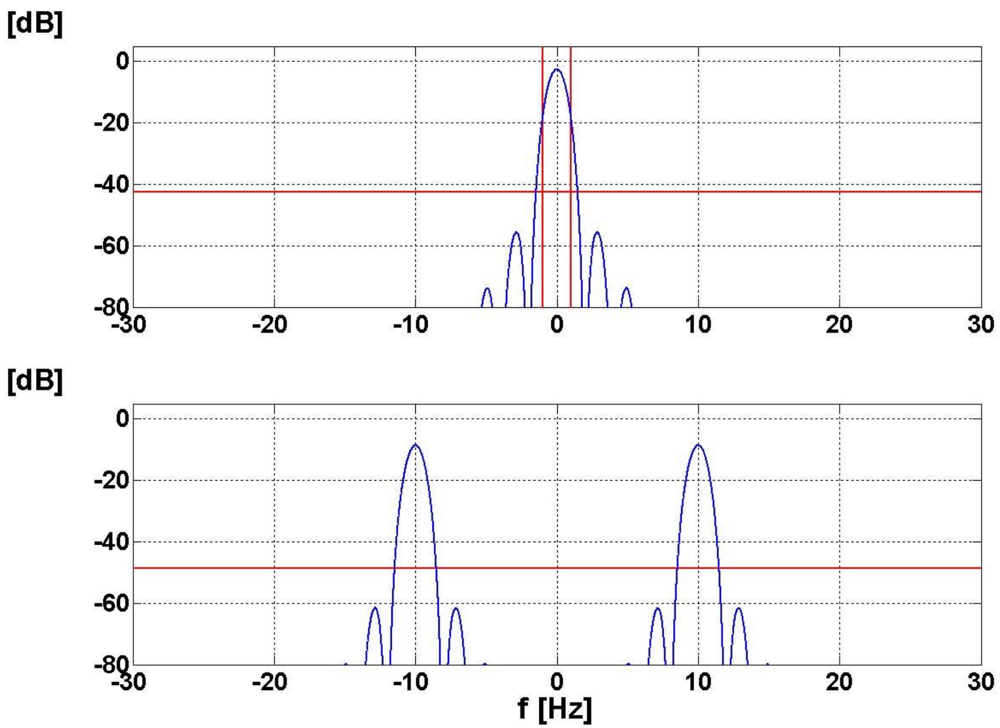
Okno Parzena

Widma częstotliwościowe okna oraz iloczynu okna i sygnału:



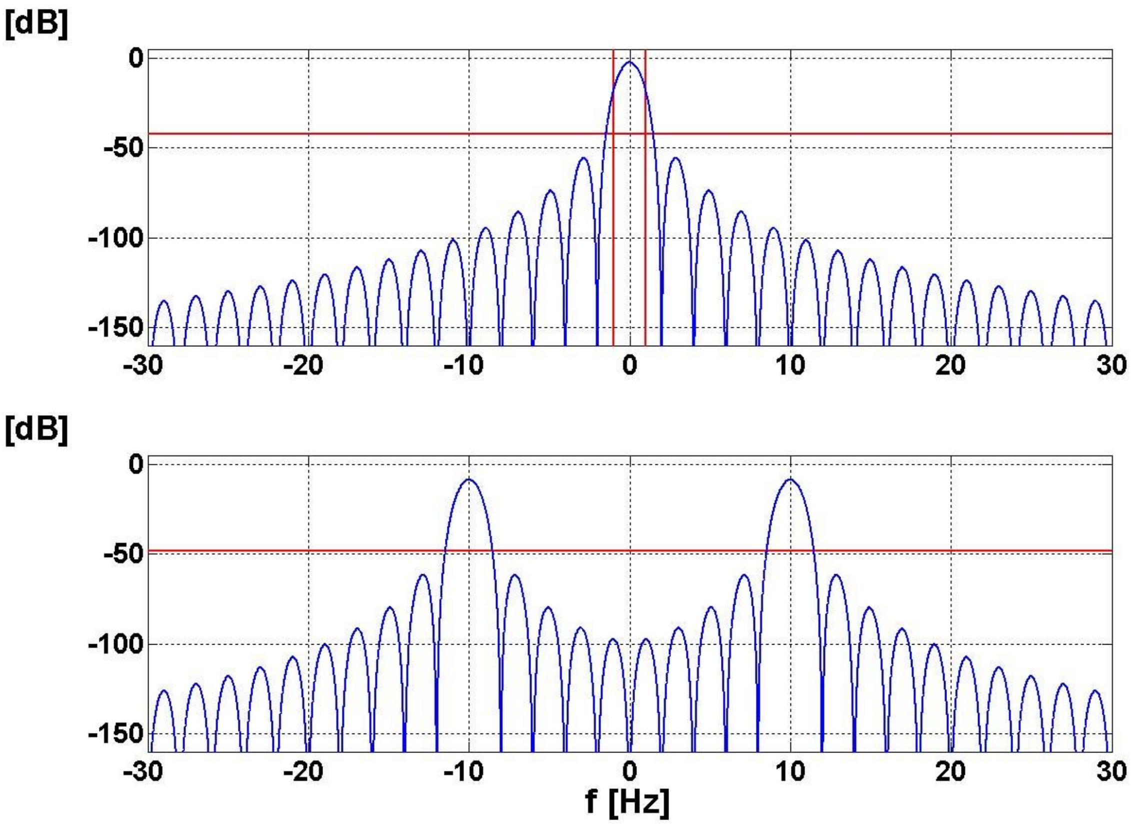
$$W(f) = \frac{3}{4} \cdot T \cdot \mathrm{sinc}^4\left(\frac{\pi \cdot f \cdot T}{2}\right) = \frac{12 \cdot \sin^4(\pi \cdot f \cdot T/2)}{\pi^4 \cdot f^4 \cdot T^3} \quad \to \quad (\bullet) \cdot \frac{1}{f^4}$$

Okno Parzena
- widma amplitudowe w *dB*



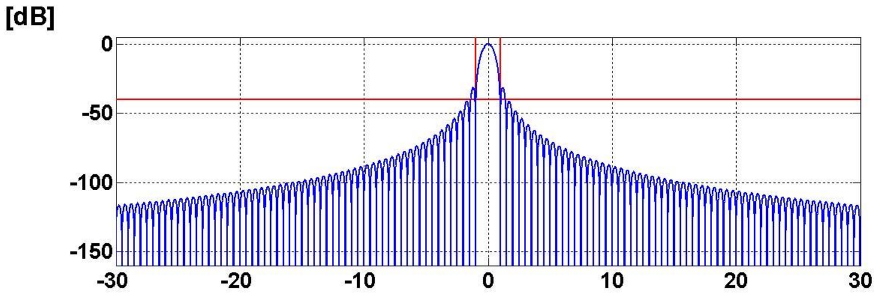
$$W(f) = \frac{3}{4} \cdot T \cdot \mathrm{sinc}^4\left(\frac{\pi \cdot f \cdot T}{2}\right) = \frac{12 \cdot \sin^4(\pi \cdot f \cdot T/2)}{\pi^4 \cdot f^4 \cdot T^3} \rightarrow (\bullet) \cdot \frac{1}{f^4}$$

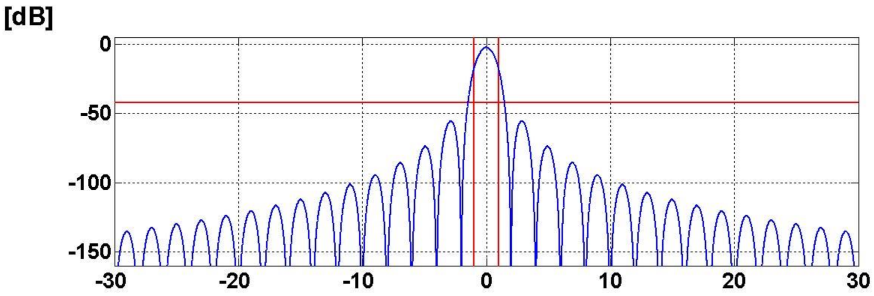
Okno Parzena
- widma amplitudowe w *dB*

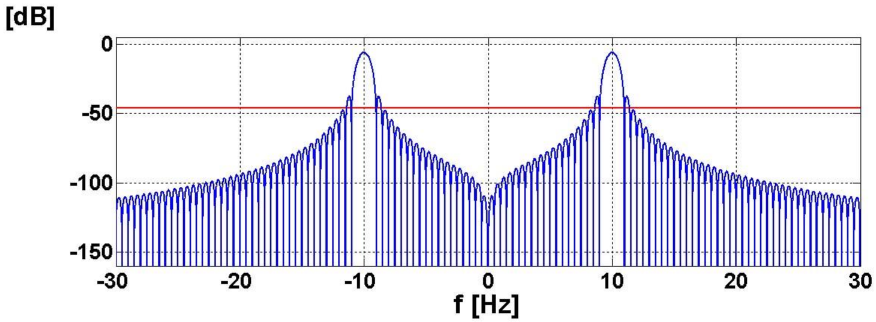


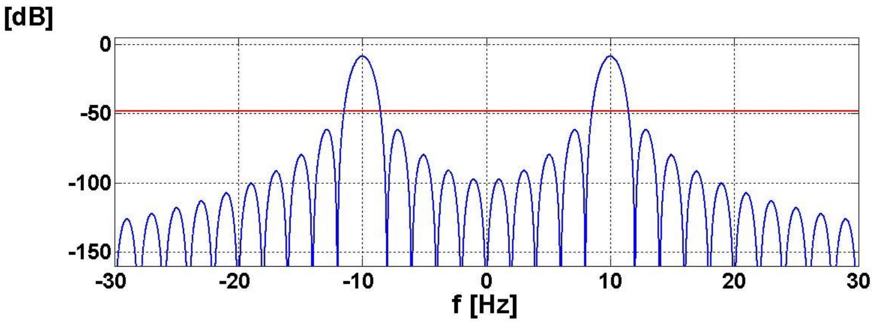
$$W(f) = \frac{3}{4} \cdot T \cdot \mathrm{sinc}^4\left(\frac{\pi \cdot f \cdot T}{2}\right) = \frac{12 \cdot \sin^4(\pi \cdot f \cdot T/2)}{\pi^4 \cdot f^4 \cdot T^3} \quad \rightarrow \quad (\bullet) \cdot \frac{1}{f^4}$$

Porównanie okna Hanna i Parzena









$$w(t) = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{2 \cdot T} \right) + 1 \right] \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot T} \right)$$

$$W(f) = T \cdot \frac{\operatorname{sinc}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{(1 - 4 \cdot f^2 \cdot T^2)}$$

$$w(t) = \begin{cases} 1 - 6 \cdot t^2 / T^2 + 6 \cdot |t|^3 / T^3 & dla \quad |t| \le T/2 \\ 2 \cdot \left(1 - |t|/T\right)^3 & dla \quad T/2 < |t| \le T \\ 0 & dla \quad |t| > T \end{cases}$$

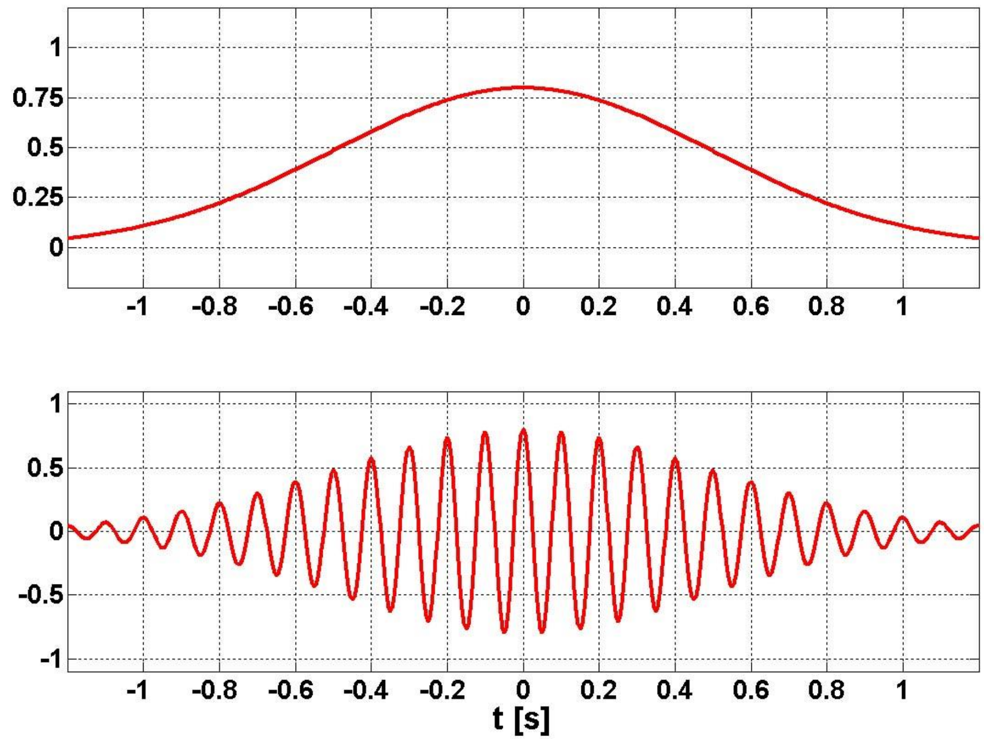
$$W(f) = \frac{3}{4} \cdot T \cdot \operatorname{sinc}^4\left(\frac{\pi \cdot f \cdot T}{2} \right)$$

Okno Gaussa

Dla α=1/8

$$w(t) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot \alpha}} \cdot e^{-\frac{t^2}{4 \cdot \alpha}}$$

$$t_\sigma = \sqrt{2 \cdot \alpha}$$

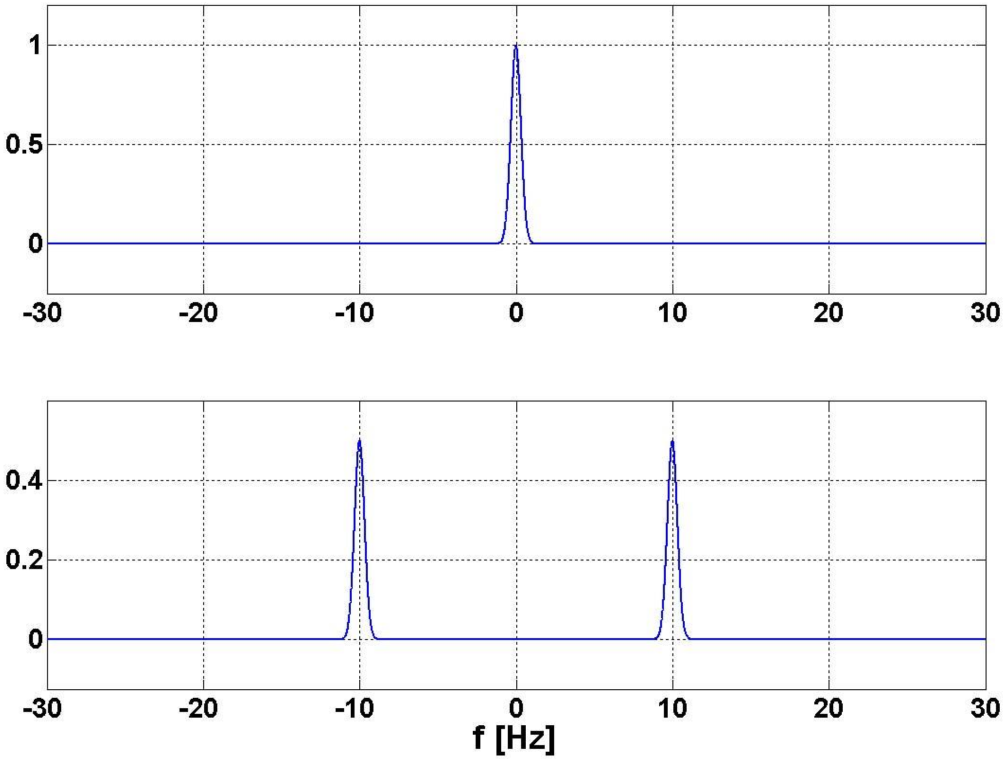


$$W(f) = e^{-4 \cdot \pi^2 \cdot \alpha \cdot f^2}$$

Okno Gaussa

Widma częstotliwościowe okna oraz iloczynu okna i sygnału:

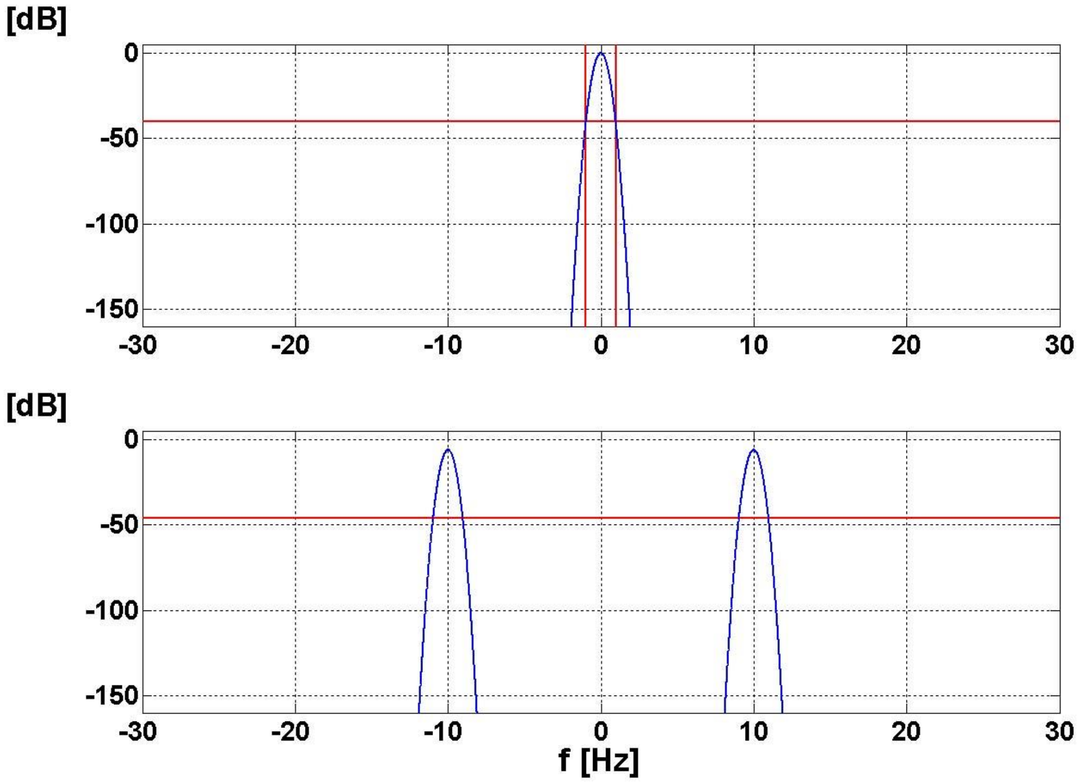
Dla a=1/8



$$W(f) = e^{-4\cdot\pi^2\cdot\alpha\cdot f^2}$$

Okno Gaussa
- widma amplitudowe w *dB*

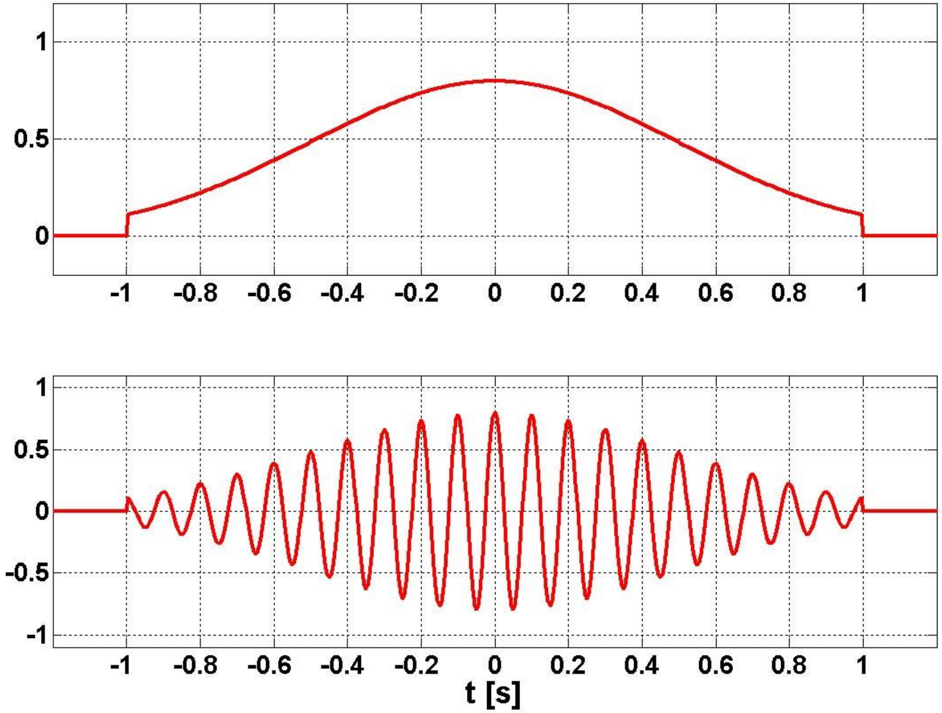
Dla α=1/8



$$W(f) = e^{-4\cdot\pi^2\cdot\alpha\cdot f^2}$$

Okno Gaussa (obcięte)

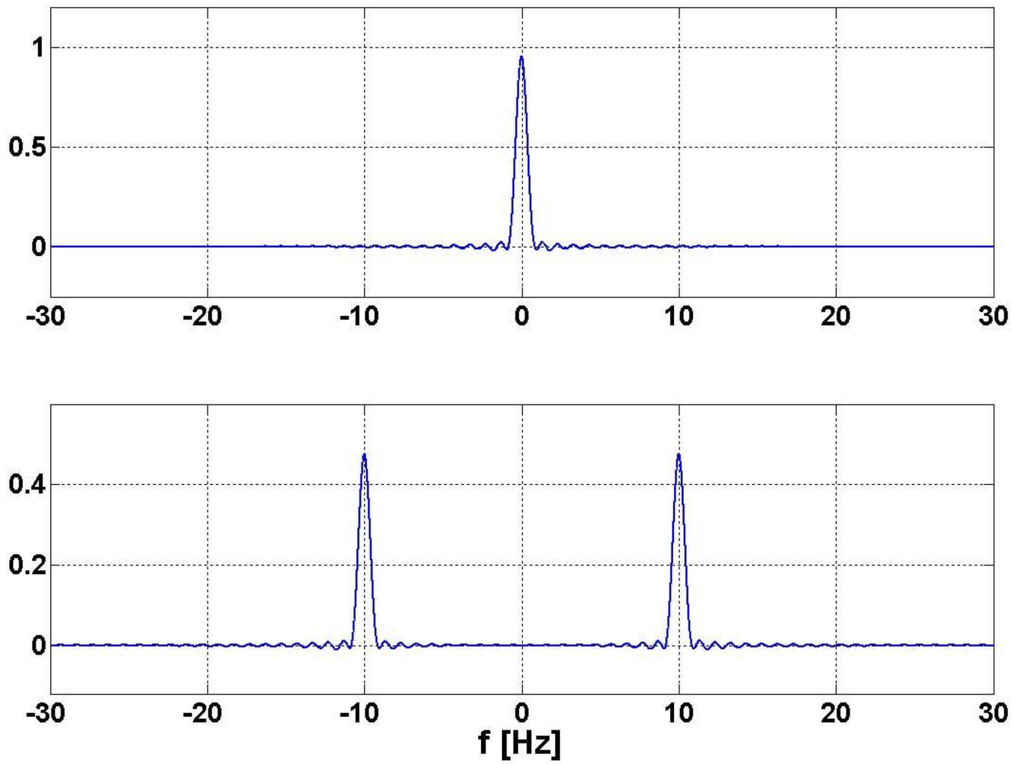
Dla a=1/8



Okno Gaussa (obcięte)

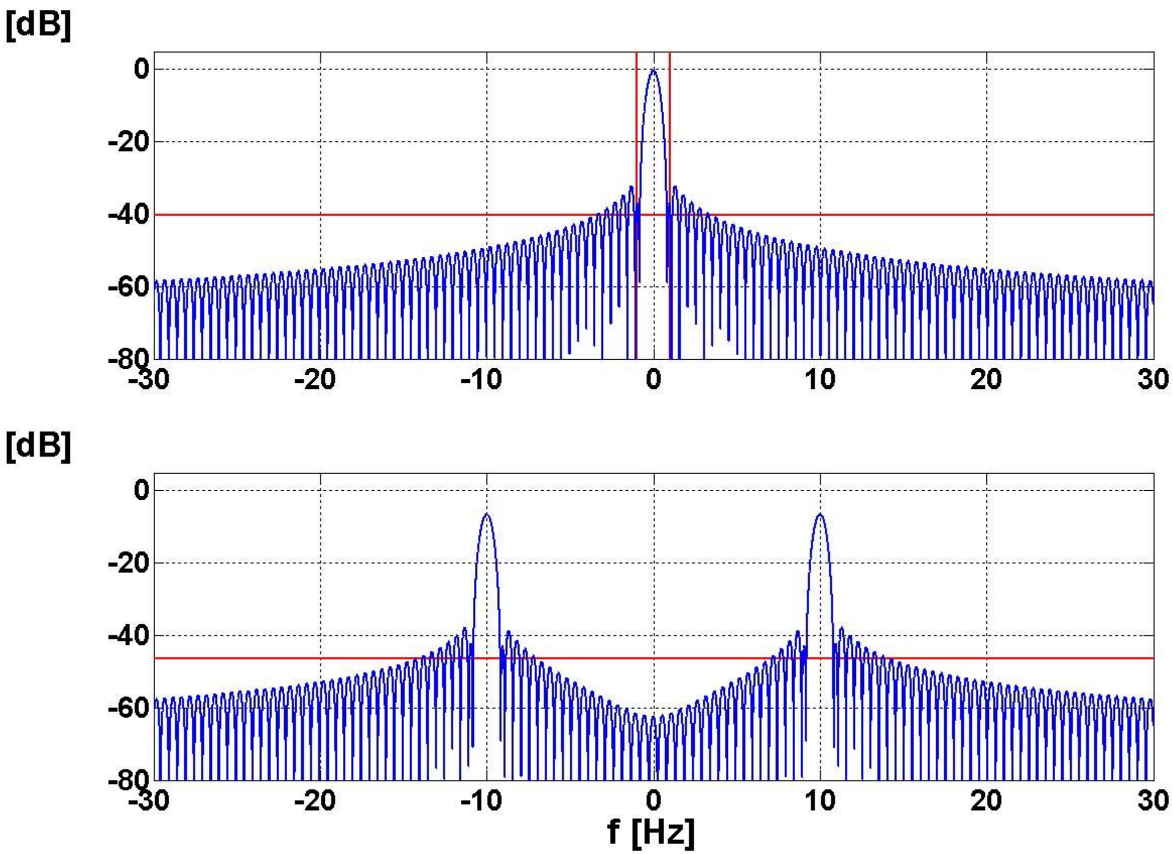
Widma częstotliwościowe okna oraz iloczynu okna i sygnału:

Dla a=1/8



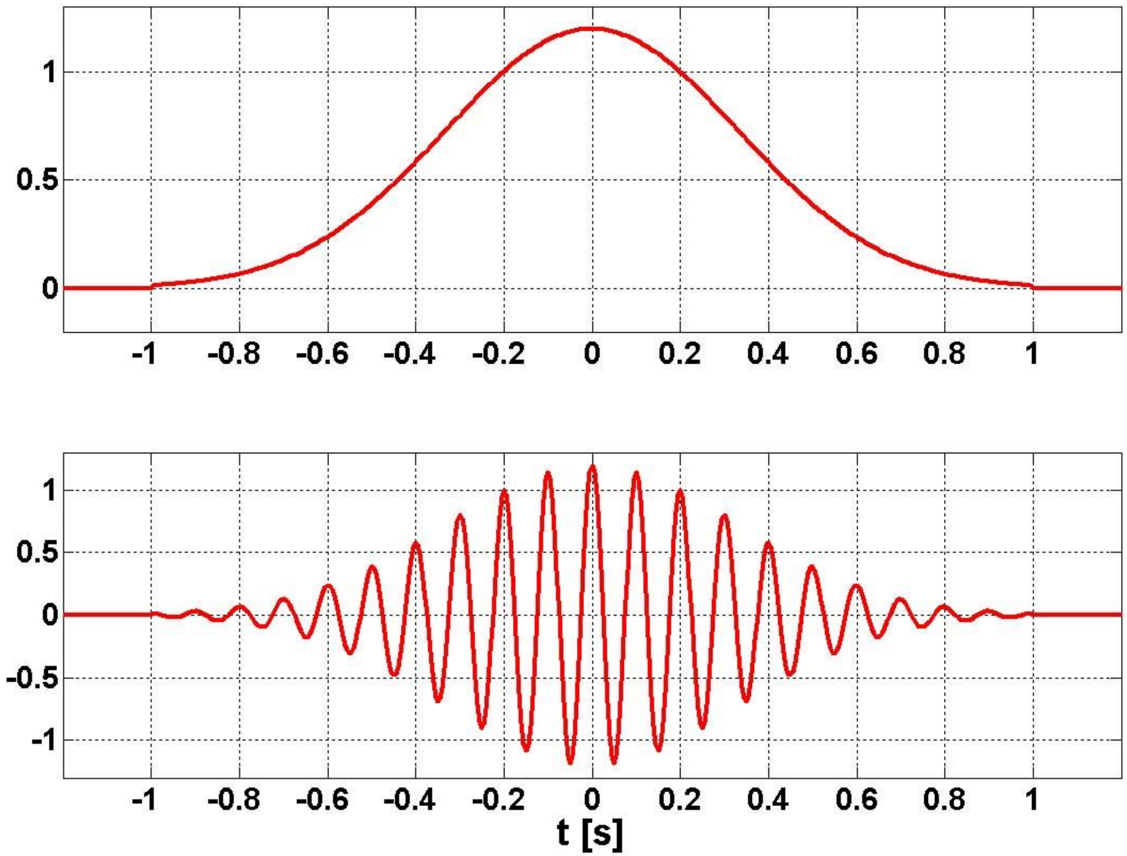
Okno Gaussa (obcięte) - widma amplitudowe w *dB*

Dla a=1/8



Okno Gaussa (obcięte)

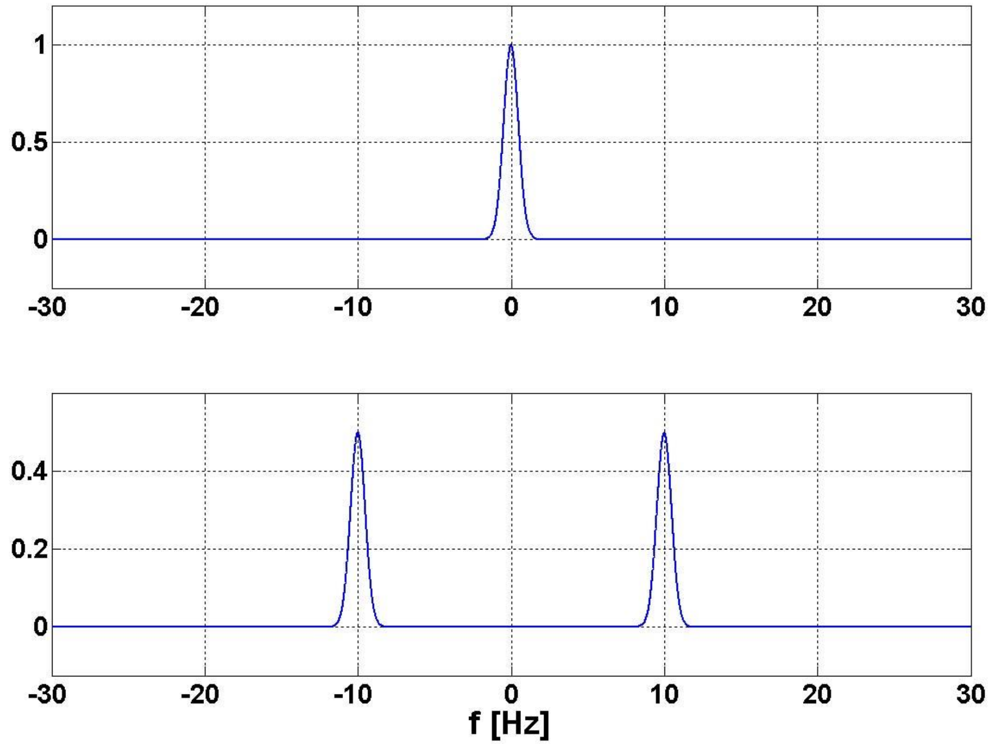
Dla a=1/18



Okno Gaussa (obcięte)

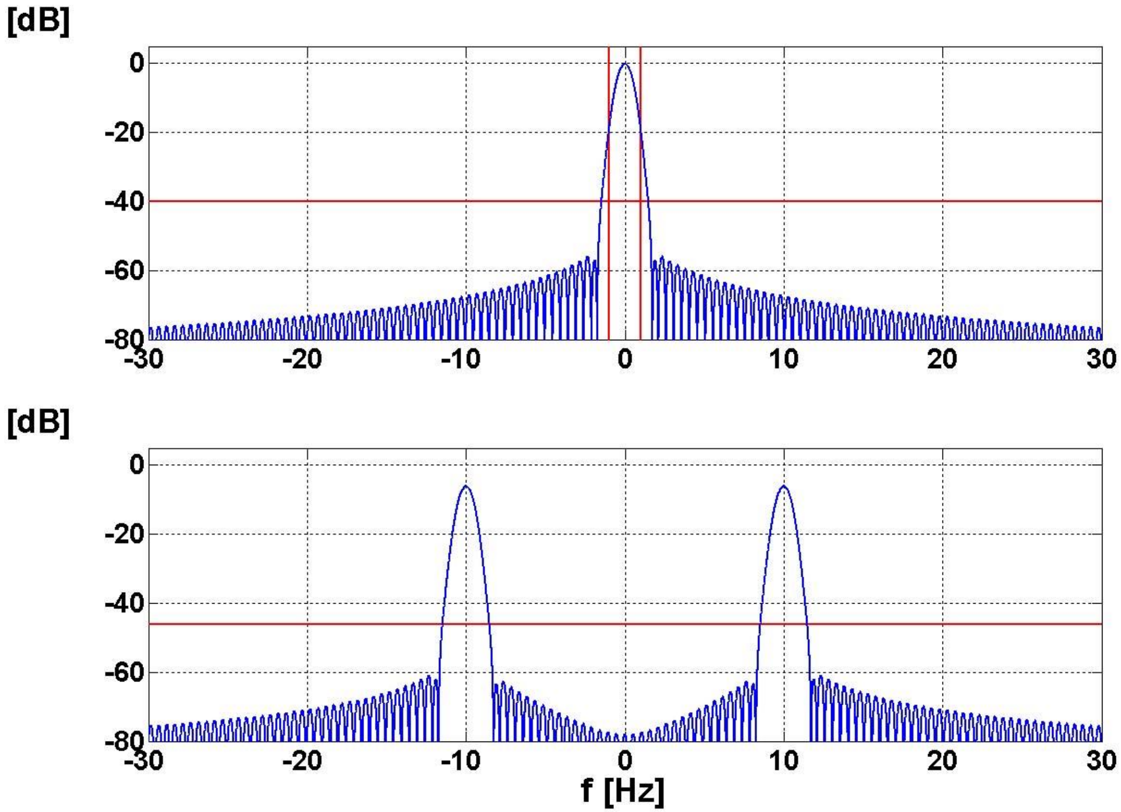
Widma częstotliwościowe okna oraz iloczynu okna i sygnału:

Dla a=1/18

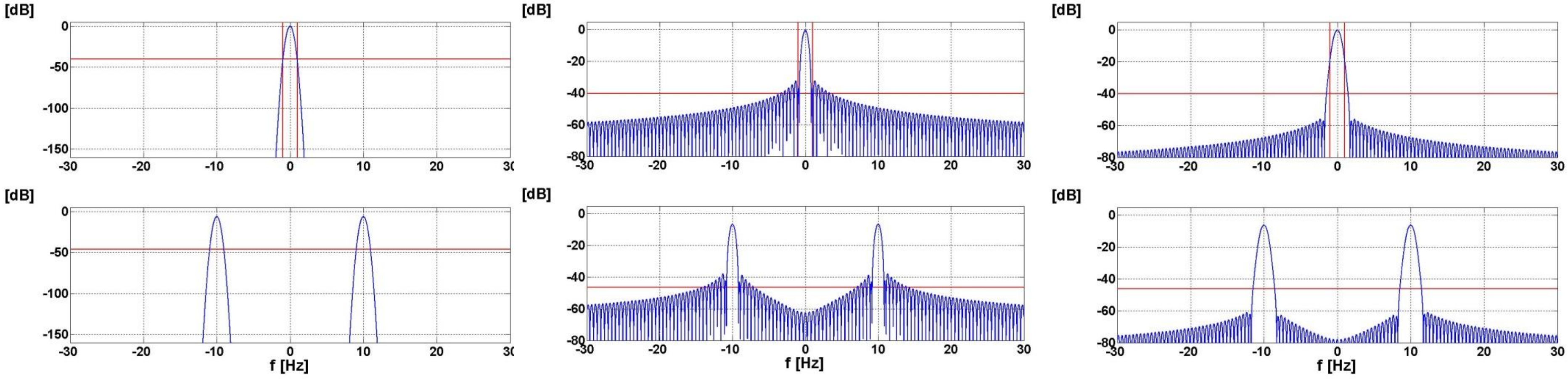


Okno Gaussa (obcięte)
- widma amplitudowe w *dB*

Dla a=1/18



Porównanie okien Gaussa



Dla α=1/8 **Dla α=1/8** **Dla α=1/18**

$$W(f) = e^{-4\cdot\pi^2\cdot\alpha\cdot f^2}$$

Okna definiowane w dziedzinie częstotliwości

Wszystkie rozważane dotąd okna są funkcjami parzystymi *t.*
Dlatego ich transformaty są także funkcjami rzeczywistymi, parzystymi od *f*.
Zatem wszystkie pokazane relacje można odwrócić.

W przypadku stosowania okna odpowiednio przesuniętego należy zastosować odpowiednie twierdzenie „o przesunięciu”.

Warto zastanowić się chwilę, jakie mogą być konsekwencje, np. w dziedzinie *f* , gdy okno – zdefiniowane w dziedzinie *t* – zostanie opóźnione o t_d.

Zapraszam na ćwiczenia lub do laboratorium...