AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Teoria sygnałów

Wykład 11

Dr inż. Przemysław Korohoda
Katedra Elektroniki, AGH, Kraków

home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2

UPEL: TS 2022

Plan wykładu

1. Transformacja Hilberta.

2. Transformata Fouriera z transformaty Hilberta.

3. Sygnał analityczny.

4. Transformata Fouriera dla sygnału analitycznego.

5. Przykłady sygnałów analitycznych.

Transformacja Hilberta

Definicja:

$$x(t) \underset{IHT}{\overset{HT}{\longleftrightarrow}} x^H(t)$$

$$x^H(t) = -\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{\tau - t}\, d\tau$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = Vp. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{\tau - t}\, d\tau}$$

Przydatna interpretacja:

$$x^H(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \frac{1}{t - \tau}\, d\tau = \frac{1}{\pi \cdot t} * x(t)$$

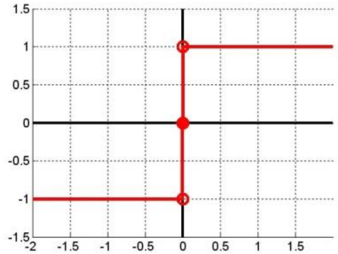
$$x^H(t) = h_H(t) * x(t) \quad gdzie \quad h_H(t) = \frac{1}{\pi \cdot t} \qquad \boxed{t \neq 0}$$

Wniosek: transformacja Hilberta jest liniowa (cecha splotu)

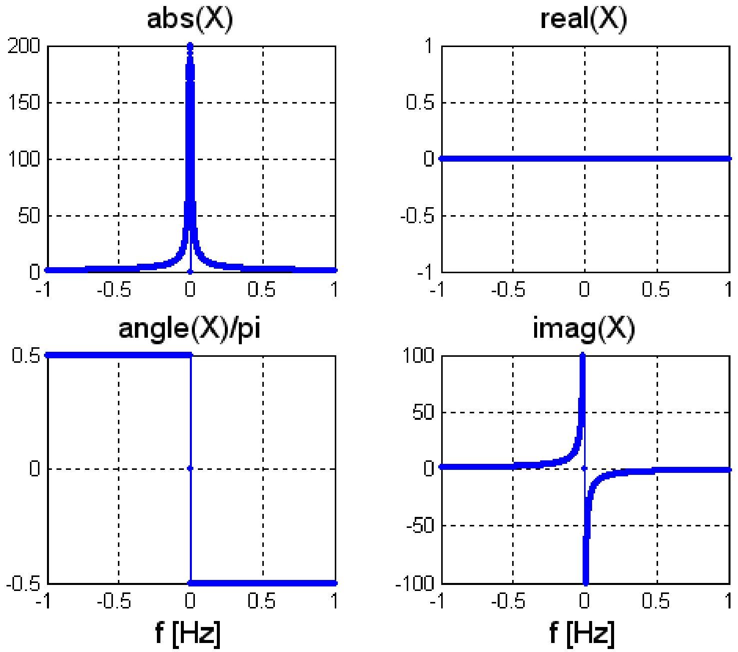
Transformata Fouriera (*CFT*) z transformaty Hilberta

Przypomnijmy, że:

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & dla \quad t > 0 \\ 0 & dla \quad t = 0 \\ -1 & dla \quad t < 0 \end{cases}$$



$$\operatorname{sgn}(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} = \begin{cases} -j \cdot \dfrac{1}{\pi \cdot f} & dla \quad f \neq 0 \\ 0 \quad dla & f = 0 \end{cases}$$



Transformata Fouriera (*CFT*) z transformaty Hilberta

$$\mathrm{sgn}(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} = \begin{cases} -j \cdot \dfrac{1}{\pi \cdot f} & dla \quad f \neq 0 \\ 0 \quad dla & f = 0 \end{cases}$$

<u>Podobnie</u> „w druga stronę”:

$$\begin{cases} j \cdot \dfrac{1}{\pi \cdot t} & dla \quad t \neq 0 \\ 0 \quad dla & t = 0 \end{cases} \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} \mathrm{sgn}(f)$$

Zatem wygodnie jest przyjąć, że:

$$h_H(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi \cdot t} & dla \quad t \neq 0 \\ 0 & dla \quad t = 0 \end{cases}$$

$$h_H(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} -j \cdot \mathrm{sgn}(f)$$

$$czyli \quad h_H(0) = 0$$

Czyli dla:

$$x^H(t) = h_H(t) * x(t)$$

otrzymujemy:

$$X^H(f) = \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^H(f) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \, dt \right]}_{CFT} = -j \cdot \mathrm{sgn}(f) \cdot X(f)$$

Zatem składowa stała (transformata Fouriera dla *f*=0):

$$X^H(f)\Big|_{f=0} = X^H(0) = 0$$

Właściwości transformaty Fouriera (*CFT*) z transformaty Hilberta

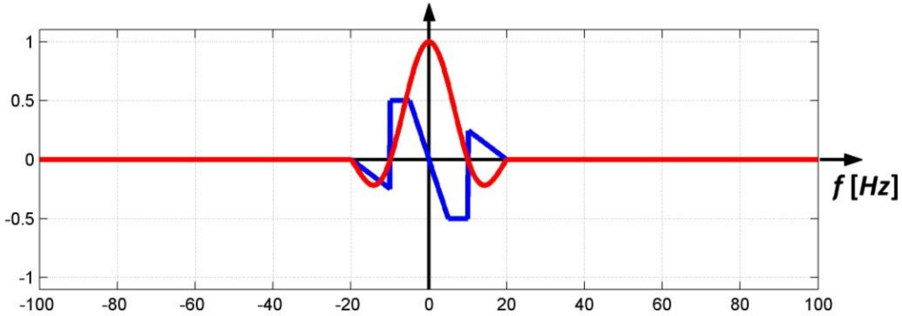
Na razie skoncentrujemy się na sygnałach rzeczywistych

…a ponadto:

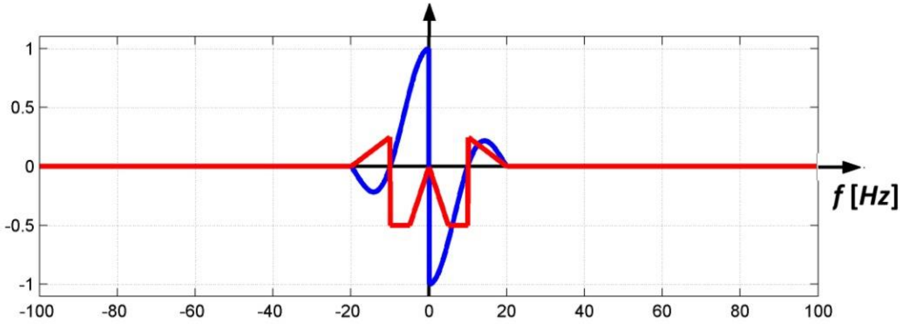
$$f>0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Re}\left(X^{H}(f)\right) = \mathrm{Im}\left(X(f)\right)$$
$$f<0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Re}\left(X^{H}(f)\right) = -\mathrm{Im}\left(X(f)\right)$$

$$f>0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Im}\left(X^{H}(f)\right) = -\mathrm{Re}\left(X(f)\right)$$
$$f<0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Im}\left(X^{H}(f)\right) = \mathrm{Re}\left(X(f)\right)$$

Widmo rzeczywiste i urojone dla $x(t)$



Widmo rzeczywiste i urojone dla $x^{H}(t)$



Sygnał analityczny

Dla sygnału rzeczywistego *x*(*t*) jego sygnał analityczny jest zespolony:

$$x(t) \longrightarrow x^a(t) = x(t) + j \cdot x^H(t)$$

$$x(t) \longrightarrow x^a(t) = x(t) + j \cdot h_H(t) * x(t)$$

Transformata *CFT* dla sygnału analitycznego:

$$\boxed{x(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(f)}$$

$$x^a(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X^a(f) = X(f) + j \cdot X^H(f)$$

$$x^a(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X^a(f) = X(f) + j \cdot (-j \cdot \mathrm{sgn}(f)) \cdot X(f)$$

$$x^a(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X^a(f) = X(f) + \mathrm{sgn}(f) \cdot X(f)$$

Sygnał analityczny

$$x(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X(f)$$

Transformata *CFT* dla sygnału analitycznego:

$$x^a(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X^a(f) = X(f) + \mathrm{sgn}(f) \cdot X(f)$$

$$x^a(t) \xleftrightarrow[ICFT]{CFT} X^a(f) = \begin{cases} 2 \cdot X(f) & dla \quad f > 0 \\ X(0) & dla \quad f = 0 \\ 0 & dla \quad f < 0 \end{cases}$$

W „drugą stronę” czyli odwrotna transformacja „analityczna” :

$$x(t) = \frac{x^a(t) + \overline{x^a(t)}}{2} \qquad X(f) = \frac{X^a(f) + \overline{X^a(-f)}}{2}$$

Jak widać zależności dla *CFT* sygnału zespolonego mogą się czasem przydać.

Wykresy w dziedzinie *CFT*...

Sygnał analityczny

Przykłady:

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \longrightarrow x^a(t) = e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}$$

$$x(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \longrightarrow x^a(t) = e^{j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \pi/2)}$$

$$\boxed{X(f) = 0 \quad dla \quad |f| \geq f_0}$$

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \longrightarrow y^a(t) = x(t) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}$$

$$y(t) = x(t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \longrightarrow y^a(t) = x(t) \cdot e^{j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \pi/2)}$$

Wykresy w dziedzinie *CFT*...

Sygnał analityczny dla sygnału zespolonego

Powtarzając wszystkie rozważania dla sygnałów zespolonych wystarczy pamiętać o liniowości splotu (transformacja Hilberta) oraz *CFT*, gdy:

$$x(t) = \mathrm{Re}(x(t)) + j \cdot \mathrm{Im}(x(t))$$

Podsumowanie

1. Transformacja Hilberta.
2. Transformata Fouriera z transformaty Hilberta.
3. Sygnał analityczny.
4. Transformata Fouriera dla sygnału analitycznego.
5. Przykłady sygnałów analitycznych.

AGH

Zapraszam na ćwiczenia ...
lub do laboratorium …