AGH

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Teoria sygnałów

Wykład 5

Dr inż. Przemysław Korohoda
Katedra Elektroniki, AGH, Kraków

home.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2022_2023_zima/TS_EL_2

UPEL: TS 2022

Plan wykładu

1. Sygnał jako wektor.
2. Iloczyn skalarny.
3. Norma.
4. Metryka.
5. Aproksymacja sygnału w zadanej bazie.
6. Baza kanoniczna, baza Haara i baza Walsha.
7. Wyjaśnienie wzorów na współczynniki szeregu Fouriera.

Sygnał jako wektor

Sygnały = funkcje określone na dziedzinie, *D*, zawartej w osi „czasu”.

$$\mathbf{x}_1 \equiv x_1(t): \quad t \in D$$
$$\mathbf{x}_2 \equiv x_2(t): \quad t \in D$$
$$\mathbf{x}_3 \equiv x_3(t): \quad t \in D$$
$$\mathbf{x}_4 \equiv x_4(t): \quad t \in D$$

$$\mathbf{x} \equiv x(t): \quad t \in D$$
$$\mathbf{y} \equiv y(t): \quad t \in D$$
$$\mathbf{z} \equiv z(t): \quad t \in D$$
$$\mathbf{u} \equiv u(t): \quad t \in D$$
$$\mathbf{v} \equiv v(t): \quad t \in D$$
$$\mathbf{w} \equiv wt): \quad t \in D$$
$$\mathbf{h} \equiv h(t): \quad t \in D$$

Wektorowa przestrzeń liniowa nad ciałem L:

$$\left(\mathbf{X}, \left(\mathbf{L}, +, \cdot\right), \oplus, \otimes\right) \qquad a, b \in \mathbf{L}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X} \quad \wedge \quad \mathbf{y} \in \mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad a \otimes \mathbf{x} \oplus b \otimes \mathbf{y} \in \mathbf{X}$$

Dla sygnałów można to zapisać (upraszczając symbole działań) tak:

$$x(t) \in \mathbf{X} \quad \wedge \quad y(t) \in \mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \in \mathbf{X}$$

Iloczyn skalarny ogólnie

Odwzorowanie

$\mathbf{X}\times\mathbf{X}\rightarrow\mathbf{R}$ **lub** $\mathbf{X}\times\mathbf{X}\rightarrow\mathbf{C}$

$$\boxed{\forall_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{X}} \quad \wedge \quad \forall_{a,b\in\mathbf{L}}}$$

1) $\mathbf{x}\circ\mathbf{y}=\overline{\mathbf{y}\circ\mathbf{x}}$ **-> wniosek:** $\mathbf{x}\circ\mathbf{x}\in\mathbf{R}$

2) $(a\otimes\mathbf{x}\oplus b\otimes\mathbf{y})\circ\mathbf{z}=a\cdot\mathbf{x}\circ\mathbf{z}+b\cdot\mathbf{y}\circ\mathbf{z}$

3) $\left[\,\mathbf{x}\circ\mathbf{x}\geq 0\,\right] \wedge \left[\,\mathbf{x}\circ\mathbf{x}=0 \Leftrightarrow \mathbf{x}=\mathbf{0}\,\right]$

... i wtedy jest to przestrzeń wektorowa *unitarna* .

Iloczyn skalarny dla sygnałów

W naszym przypadku będziemy stosować szczególną wersję:

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} \quad = \quad < x(t), y(t) > \quad = \quad \int_D x(t) \cdot \overline{y(t)} \, dt$$

Ale można zaproponować nieskończenie wiele iloczynów skalarnych, np. takich:

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} \quad = \quad < x(t), y(t) > \quad = \quad \int_D x(t) \cdot \overline{y(t)} \cdot w(t) \, dt$$

$$w(t) > 0$$

(Dwu)liniowość iloczynu skalarnego

Ta własność jest oczywista dla „naszego” iloczynu skalarnego.

$$\boxed{\overline{\mathbf{x} \circ \mathbf{y}} = \overline{\mathbf{x}} \circ \overline{\mathbf{y}}}$$

$$\boxed{(a \otimes \mathbf{x} \oplus b \otimes \mathbf{y}) \circ \mathbf{z} = a \cdot \mathbf{x} \circ \mathbf{z} + b \cdot \mathbf{y} \circ \mathbf{z}}$$

$$\mathbf{x} \circ (a \otimes \mathbf{y} \oplus b \otimes \mathbf{z}) = \overline{(a \otimes \mathbf{y} \oplus b \otimes \mathbf{z}) \circ \mathbf{x}} = \overline{(a \otimes \mathbf{y} \oplus b \otimes \mathbf{z})} \circ \overline{\mathbf{x}} =$$

$$= \overline{a} \cdot \overline{\mathbf{y}} \circ \overline{\mathbf{x}} + \overline{b} \cdot \overline{\mathbf{z}} \circ \overline{\mathbf{x}} = \overline{a} \cdot \mathbf{x} \circ \mathbf{y} + \overline{b} \cdot \mathbf{x} \circ \mathbf{z}$$

Dla zespolonych współczynników jest to antyliniowość, ale dla rzeczywistych współczynników jest to liniowość – czyli razem z aksjomatem (2) oznacza to dwuliniowość.

Szczególne przypadki:

$$(a \cdot \mathbf{x}) \circ \mathbf{y} = a \cdot (\mathbf{x} \circ \mathbf{y})$$

$$\mathbf{x} \circ (a \cdot \mathbf{y}) = \overline{a} \cdot (\mathbf{x} \circ \mathbf{y})$$

Przykład: sygnały schodkowe ze stałym odcinkiem Δt

$$D: \quad t \in [\, 0\,, 4 \cdot \Delta t \,]$$

$$x(t) = x_1 \cdot \Pi\left(\frac{t - 0.5 \cdot \Delta t}{\Delta t}\right) + x_2 \cdot \Pi\left(\frac{t - 1.5 \cdot \Delta t}{\Delta t}\right) + x_3 \cdot \Pi\left(\frac{t - 2.5 \cdot \Delta t}{\Delta t}\right) + x_4 \cdot \Pi\left(\frac{t - 3.5 \cdot \Delta t}{\Delta t}\right)$$

$$y(t) = y_1 \cdot \Pi\left(\frac{t - 0.5 \cdot \Delta t}{\Delta t}\right) + y_2 \cdot \Pi\left(\frac{t - 1.5 \cdot \Delta t}{\Delta t}\right) + y_3 \cdot \Pi\left(\frac{t - 2.5 \cdot \Delta t}{\Delta t}\right) + y_4 \cdot \Pi\left(\frac{t - 3.5 \cdot \Delta t}{\Delta t}\right)$$

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} \quad = \quad < x(t), y(t) > \quad = \quad \int_0^{4 \cdot \Delta t} x(t) \cdot \overline{y(t)}\, dt \quad =$$

$$= \int_0^{\Delta t} x(t) \cdot \overline{y(t)}\, dt + \int_{\Delta t}^{2 \cdot \Delta t} x(t) \cdot \overline{y(t)}\, dt + \int_{2 \cdot \Delta t}^{3 \cdot \Delta t} x(t) \cdot \overline{y(t)}\, dt + \int_{3 \cdot \Delta t}^{4 \cdot \Delta t} x(t) \cdot \overline{y(t)}\, dt \quad =$$

$$= \int_0^{\Delta t} x_1 \cdot \overline{y_1}\, dt + \int_{\Delta t}^{2 \cdot \Delta t} x_2 \cdot \overline{y_2}\, dt + \int_{2 \cdot \Delta t}^{3 \cdot \Delta t} x_3 \cdot \overline{y_3}\, dt + \int_{3 \cdot \Delta t}^{4 \cdot \Delta t} x_4 \cdot \overline{y_4}\, dt \quad =$$

$$= \Delta t \cdot \sum_{n=1}^{4} x_k \cdot \overline{y_k}$$

...to samo graficznie – na tablicy

Przykład:
wielomiany określone na odcinkach„czasu”

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t-0.5\cdot\Delta t}{\Delta t}\right)\cdot t^2 + \Pi\left(\frac{t-1.5\cdot\Delta t}{\Delta t}\right)\cdot t$$

$$\boxed{D: \quad t \in [\,0\,, 2\cdot\Delta t\,]}$$

$$y(t) = \Pi\left(\frac{t-0.5\cdot\Delta t}{\Delta t}\right)\cdot (1-t) + \Pi\left(\frac{t-1.5\cdot\Delta t}{\Delta t}\right)\cdot 2\cdot t^3$$

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{y} \quad = \quad < x(t), y(t) > \quad = \quad \int_0^{2\cdot\Delta t} x(t)\cdot\overline{y(t)}\,dt \quad =$$

$$= \int_0^{\Delta t} x(t)\cdot\overline{y(t)}\,dt + \int_{\Delta t}^{2\cdot\Delta t} x(t)\cdot\overline{y(t)}\,dt \quad = \quad \int_0^{\Delta t} t^2\cdot(1-t)\,dt + \int_{\Delta t}^{2\cdot\Delta t} 2\cdot t\cdot t^3\,dt \quad =$$

$$= \int_0^{\Delta t} t^2 - t^3\,dt + 2\cdot\int_{\Delta t}^{2\cdot\Delta t} t^4\,dt \quad = \quad \left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}\right]_0^{\Delta t} + 2\cdot\left[\frac{t^5}{5}\right]_{\Delta t}^{2\cdot\Delta t} \quad = \quad \frac{(\Delta t)^3}{3}-\frac{(\Delta t)^4}{4}+2\cdot\frac{(32-1)\cdot(\Delta t)^5}{5} \quad =$$

$$= \frac{(\Delta t)^3}{3}-\frac{(\Delta t)^4}{4}+62\cdot\frac{(\Delta t)^5}{5}$$

Przykład:
sygnały typu cos/sin

$$x(t) = \cos(2\cdot\pi\cdot n\cdot f_1\cdot t)$$
$$y(t) = \cos(2\cdot\pi\cdot m\cdot f_1\cdot t)$$

$$\boxed{D:\quad t\in[\,0\,,T\,]}$$

$$\boxed{f_1 = \frac{1}{T}}$$

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{y} \quad=\quad <x(t), y(t)> \quad=\quad \int_0^T x(t)\cdot\overline{y(t)}\,dt \quad=$$

$$= \int_0^T \cos(2\cdot\pi\cdot n\cdot f_1\cdot t)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot m\cdot f_1\cdot t)\,dt \quad=$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_0^T \cos(2\cdot\pi\cdot(n+m)\cdot f_1\cdot t)\,dt + \frac{1}{2}\cdot\int_0^T \cos(2\cdot\pi\cdot(n-m)\cdot f_1\cdot t)\,dt \quad=\quad \begin{cases} 0 & dla \quad n\neq m \\ \dfrac{T}{2} & dla \quad n=m \end{cases}$$

$$\boxed{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cdot\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]}$$

Przykład:
sygnały typu cos/sin (cd.)

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_1 \cdot t)$$
$$y(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_1 \cdot t)$$

$$\boxed{D: \quad t \in [\, 0 \,, T \,]}$$

$$\boxed{f_1 = \frac{1}{T}}$$

Iloczyn funkcji trygonometrycznych można też zastąpić korzystając ze wzorów Eulera:

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} \quad = \quad < x(t), y(t) > \quad = \quad \int_0^T x(t) \cdot \overline{y(t)}\, dt \quad =$$

$$= \int_0^T \frac{e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_1 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_1 \cdot t}}{2} \cdot \frac{e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_1 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_1 \cdot t}}{2}\, dt \quad =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int_0^T e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (n+m) \cdot f_1 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (n+m) \cdot f_1 \cdot t} + e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (n-m) \cdot f_1 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (n-m) \cdot f_1 \cdot t}\, dt \quad = \begin{cases} 0 & dla \quad n \neq m \\ \dfrac{T}{2} & dla \quad n = m \end{cases}$$

Przykład:
sygnały typu cos/sin (cd.)

$$\boxed{D: \quad t \in [\,0\,, T\,]}$$

$$\boxed{f_1 = \frac{1}{T}}$$

Analogicznie dla pozostałych par typu:

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_1 \cdot t)$$
$$y(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_1 \cdot t)$$

$$x(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_1 \cdot t)$$
$$y(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_1 \cdot t)$$

$$\boxed{\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot \left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right]}$$

$$\boxed{\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]}$$

lub ze wzorów Eulera...

Przykład:
sygnały typu exp($j\varphi$)

$$x(t) = e^{j\cdot 2\cdot \pi \cdot n\cdot f_1 \cdot t}$$

$$y(t) = e^{j\cdot 2\cdot \pi \cdot m\cdot f_1 \cdot t}$$

$$\boxed{D: \quad t \in [\,0\,, T\,]}$$

$$\boxed{f_1 = \frac{1}{T}}$$

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} \quad = \quad < x(t), y(t) > \quad = \quad \int_0^T x(t) \cdot \overline{y(t)}\, dt \quad =$$

$$= \quad \int_0^T e^{j\cdot 2\cdot \pi \cdot n\cdot f_1 \cdot t} \cdot e^{-j\cdot 2\cdot \pi \cdot m\cdot f_1 \cdot t}\, dt \quad = \quad \int_0^T e^{j\cdot 2\cdot \pi \cdot (n-m)\cdot f_1 \cdot t}\, dt \quad = \quad \begin{cases} 0 & dla \quad n \neq m \\ T & dla \quad n = m \end{cases}$$

Przykład: sygnały trójkątne

$$x(t) = 2 \cdot \Lambda\left(\frac{t-4}{4}\right)$$

$$y(t) = 3 \cdot \Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{t-6}{2}\right)$$

$$\boxed{D: \quad t \in [\,0\,,8\,]}$$

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} \quad = \quad < x(t), y(t) > \quad = \quad \int_0^T x(t) \cdot \overline{y(t)}\, dt \quad = \quad \int_0^8 x(t) \cdot y(t)\, dt$$

$$= \quad \int_0^2 x(t) \cdot y(t)\, dt + \int_2^4 x(t) \cdot y(t)\, dt + \int_4^6 x(t) \cdot y(t)\, dt + \int_6^8 x(t) \cdot y(t)\, dt \quad =$$

$$= \quad 2 \cdot (1 \cdot 3) \cdot \frac{1}{3} + \left[2 \cdot (1 \cdot 3) \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (1 \cdot 3) \cdot \frac{1}{6} \right] + \left[2 \cdot (1 \cdot (-1)) \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (1 \cdot (-1)) \cdot \frac{1}{6} \right] + 2 \cdot (1 \cdot (-1)) \cdot \frac{1}{3} \quad =$$

$$= \quad 2 + [3 + 1] + [-1 - 1/3] + (-2/3) \quad = \quad 6 - 2 \quad = \quad 4$$

wyjaśnienie skrótu myślowego na tablicy…

Norma, czyli „długość wektora”

$\boxed{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}}$

$$\mathbf{X} \ni \mathbf{x} \rightarrow \|\mathbf{x}\| \in \mathbf{R}_{0+}$$

$\boxed{a \in \mathbf{L}}$

1) $$\left[\|\mathbf{x}\| \geq 0\right] \wedge \left[\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}\right]$$

2) $$\|\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

3) $$\|a \otimes \mathbf{x}\| = |a| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

Przykład użytecznej normy...

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x} \circ \mathbf{x} = < x(t), x(t) >$$

czyli:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \circ \mathbf{x}} = \sqrt{< x(t), x(t) >}$$

Przykład dla sygnału *x*(*t*):

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \|x(t)\|^2 = \|x(t)\|^2_{L^2} = \int_D x(t) \cdot \overline{x(t)}\, dt$$

Energia sygnału *x*(*t*):

$$Energia\left(x(t)\right) = \|x(t)\|^2_{L^2} = \int_D |x(t)|^2\, dt$$

Ortogonalność wektorów

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos(\alpha)$$

Uwaga – przy takim zapisie kosinus może się okazać zespolony!

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = 0$$

gdy:

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \vee \quad \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \vee \quad \cos(\alpha) = 0$$

...bo to wynika z definicji normy „powiązanej" z rozważanym iloczynem skalarnym.

Dwa wektory uznajemy za ortogonalne, gdy ich iloczyn skalarny jest zerowy:

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} \perp \mathbf{y}$$

Przykłady energii sygnału

$\boxed{D: \quad t \in [\,0\,, T\,]}$ $\boxed{f_1 = \frac{1}{T}}$

$$\left\| \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_1 \cdot t) \right\|^2 = \frac{T}{2}$$

$$\left\| \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_1 \cdot t) \right\|^2 = \frac{T}{2}$$

$$\left\| e^{\,j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_1 \cdot t} \right\|^2 = T$$

Odległość sygnałów (metryka)

$\boxed{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}}$ $\rho : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbf{R}_{0+}$

1) $\left[\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0\right] \quad \wedge \quad \left[\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}\right]$

2) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x})$

3) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z})$

Przykład użytecznej metryki...

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{y})\circ(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = \sqrt{< x(t)-y(t), x(t)-y(t) >}$$

... i teraz mamy już przestrzeń Hilberta.

Czyli w naszym przypadku:

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) \quad = \quad \sqrt{\int_D (x(t)-y(t))\cdot\overline{(x(t)-y(t))}\,dt} \quad = \quad \sqrt{\int_D |x(t)-y(t)|^2\,dt}$$

Iloczyn skalarny, norma i metryka mogą być określone dla przestrzeni wektorowej funkcji określonych na dowolnej dziedzinie (*t*, *f* lub *ω*).

Przykład wyznaczania odległości

$$X(f) = 2\cdot\Pi(f-0.5) + j\cdot 3\cdot\Pi(f-1.5)$$

$$Y(f) = \Pi(f-0.5) - j\cdot 2\cdot\Pi(f-1.5)$$

$$\boxed{D: \quad f \in [\,0\,,2\,]}$$

$$X(f) - Y(f) = \Pi(f-0.5) + j\cdot 5\cdot\Pi(f-1.5)$$

$$\rho^2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \quad = \quad \left(\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})\right)^2 \quad = \quad \int_D (X(f)-Y(f))\cdot\overline{(X(f)-Y(f))}\, df \quad =$$

$$= \quad \int_0^2 \left[\Pi(f-0.5) + j\cdot 5\cdot\Pi(f-1.5)\right]\cdot\left[\Pi(f-0.5) - j\cdot 5\cdot\Pi(f-1.5)\right] df \quad =$$

$$= \quad \int_0^1 1\, df + \int_1^2 25\, df \quad = \quad 26$$

czyli: $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) \quad = \quad \sqrt{26}$

czasem wykresy mogą być pomocne...

Zapis sygnału za pomocą „alfabetu” sygnałów „standardowych” (baza)

Baza: układ liniowo niezależnych wektorów.

Reprezentacja:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot b_n(t)$$

Aproksymacja:

$$x(t) \cong \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot b_n(t)$$

Uwaga – *N* może być także „nieskończonością”.

Zwykle mamy „alfabet” czyli bazę, ale skąd wziąć współczynniki?

Sygnał (wektor) błędu aproksymacji

$$\boxed{x_{apr}(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot b_n(t)}$$

$$x(t) + e(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot b_n(t)$$

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \mathbf{b}_n - \mathbf{e}$$

$$\boxed{\mathbf{x}_{apr} = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \mathbf{b}_n}$$

$$\mathbf{e} = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \mathbf{b}_n - \mathbf{x}$$

$$\boxed{\mathbf{e} = \mathbf{x}_{apr} - \mathbf{x}}$$

Rzut ortogonalny

Weźmy dowolny wektor bazy (o indeksie *k*) i obie strony równania pomnóżmy „skalarnie”:

$$\mathbf{x} = \left[\sum a_n \cdot \mathbf{b}_n\right] - \mathbf{e} \qquad \Big/ \circ \mathbf{b}_k \qquad\qquad k = 1, 2, ..., N$$

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{b}_k = \left[\sum a_n \cdot \mathbf{b}_n \circ \mathbf{b}_k\right] - \mathbf{e} \circ \mathbf{b}_k$$

Wektor błędu wziął się stąd, że nie udało się go zapisać za pomocą żadnego z wektorów bazowych, czyli że dla każdego *k*:

$$\mathbf{e} \circ \mathbf{b}_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e} \perp \mathbf{b}_k$$

Zatem do rozwiązania otrzymujemy równanie:

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{b}_k = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \mathbf{b}_n \circ \mathbf{b}_k$$

Rozwiązanie ogólne

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{b}_k = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \mathbf{b}_n \circ \mathbf{b}_k$$

$$k = 1, 2, \ldots, N$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{x} \circ \mathbf{b}_1 = \sum a_n \cdot \mathbf{b}_n \circ \mathbf{b}_1 \\ &\mathbf{x} \circ \mathbf{b}_2 = \sum a_n \cdot \mathbf{b}_n \circ \mathbf{b}_2 \\ &. \\ &. \\ &. \\ &\mathbf{x} \circ \mathbf{b}_N = \sum a_n \cdot \mathbf{b}_n \circ \mathbf{b}_N \end{aligned}}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \circ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{x} \circ \mathbf{b}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{x} \circ \mathbf{b}_N \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_1 & \ldots & \mathbf{b}_N \circ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{b}_N \circ \mathbf{b}_2 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_N & \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_N & \ldots & \mathbf{b}_N \circ \mathbf{b}_N \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

Rozwiązanie dla bazy ortogonalnej

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \circ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{x} \circ \mathbf{b}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{x} \circ \mathbf{b}_N \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_N \circ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_N \circ \mathbf{b}_2 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_N & \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_N & \dots & \mathbf{b}_N \circ \mathbf{b}_N \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_2 & \dots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{b}_N \circ \mathbf{b}_N \end{bmatrix}$$

czyli:

$$\boxed{a_k = \frac{\mathbf{x} \circ \mathbf{b}_k}{\left\| \mathbf{b}_k \right\|^2}}$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

Rozwiązanie dla bazy ortonormalnej

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \circ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{x} \circ \mathbf{b}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{x} \circ \mathbf{b}_N \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_N \circ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_N \circ \mathbf{b}_2 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_N & \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_N & \dots & \mathbf{b}_N \circ \mathbf{b}_N \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

czyli:

$$\boxed{a_k = \mathbf{x} \circ \mathbf{b}_k}$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

Baza kanoniczna (ortonormalna)

$$\boxed{D: \quad t \in [\,0\,,1\,]}$$

$$V_n(t) = \Pi\left(\frac{t-(2\cdot n-1)/(2\cdot N)}{1/N}\right)$$

$$\boxed{n = 1, 2, \ldots, N}$$

W razie potrzeby przesuwamy dziedzinę i/lub skalujemy – ale wtedy zazwyczaj zmienią się też wartości norm.

Normalizacja funkcji bazowej (gdyby okazała się konieczna):

$$B_n(t) = \frac{V_n(t)}{\left\|V_n(t)\right\|}$$

Baza Haara (ortonormalna)

$$H_{0,0}(t) = \Pi(t - 1/2)$$

$$\boxed{D: \quad t \in [\,0\,,1\,]}$$

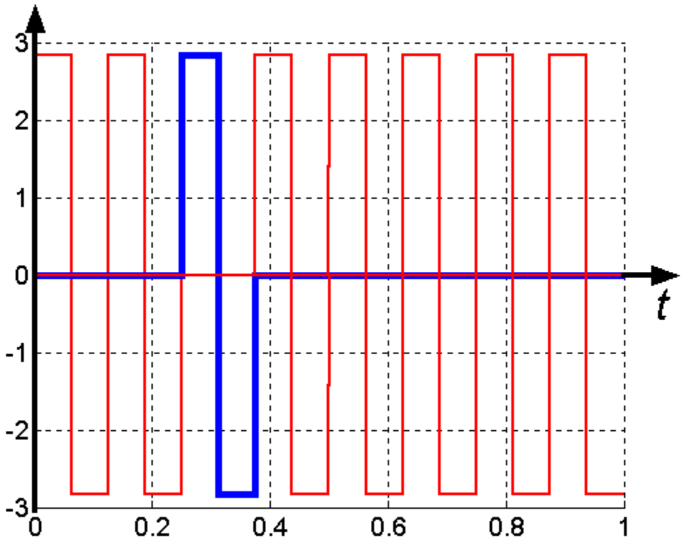
$$H_{0,1}(t) = Haar(t) = \Pi(2\cdot(t-1/4)) - \Pi(2\cdot(t-3/4))$$

Dla *k*>0:

$$H_{k,m}(t) = 2^{k/2}\cdot Haar\left(2^k\cdot\left(t-\frac{m-1}{2^k}\right)\right)$$

$$\boxed{m = 1, 2, ..., 2^k}$$

***k*=3, *m*=3**



Czyli kolejne sygnały bazy:

$b_1(t) = H_{0,0}(t)$

$b_2(t) = H_{0,1}(t)$

$b_3(t) = H_{1,1}(t)$

$b_4(t) = H_{1,2}(t)$

$b_5(t) = H_{2,1}(t)$

$b_6(t) = H_{2,2}(t)$

...

Baza Walsha (ortonormalna)

$$W_{0,0}(t) = \Pi(t - 1/2) \qquad \boxed{D: \quad t \in [\,0\,,1\,]}$$

Czyli kolejne sygnały bazy:

$$W_{0,1}(t) = W_{0,0}(2 \cdot t) + (-1)^1 \cdot W_{0,0}(2 \cdot (t - 1/2))$$

$$W_{1,1}(t) = W_{0,1}(2 \cdot t) + (-1)^1 \cdot W_{0,1}(2 \cdot (t - 1/2))$$

$$W_{1,2}(t) = W_{0,1}(2 \cdot t) + (-1)^2 \cdot W_{0,1}(2 \cdot (t - 1/2))$$

Dla *k*>1:

$$W_{k,2 \cdot m-1}(t) = W_{k-1,m}(2 \cdot t) + (-1)^{m-1} \cdot W_{k-1,m}(2 \cdot (t - 1/2))$$

$$W_{k,2 \cdot m}(t) = W_{k-1,m}(2 \cdot t) + (-1)^{m} \cdot W_{k-1,m}(2 \cdot (t - 1/2)) \qquad \boxed{m = 1, 2, 3, \ldots, 2^{k-1}}$$

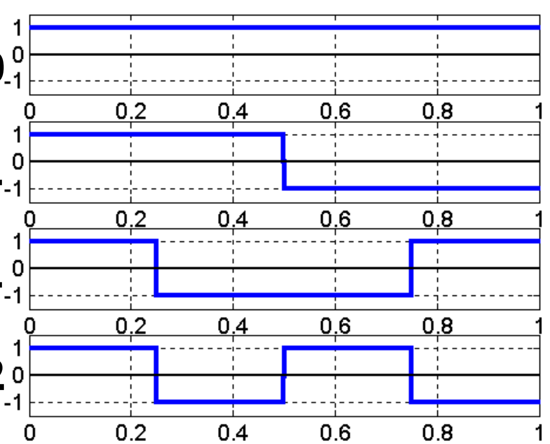
$$\boxed{\begin{aligned} b_1(t) &= W_{0,0}(t) \\ b_2(t) &= W_{0,1}(t) \\ b_3(t) &= W_{1,1}(t) \\ b_4(t) &= W_{1,2}(t) \\ b_5(t) &= W_{2,1}(t) \\ b_6(t) &= W_{2,2}(t) \\ &\ldots \end{aligned}}$$

***k*=0, *m*=0**

***k*=0, *m*=1**

***k*=1, *m*=1**

***k*=1, *m*=2**

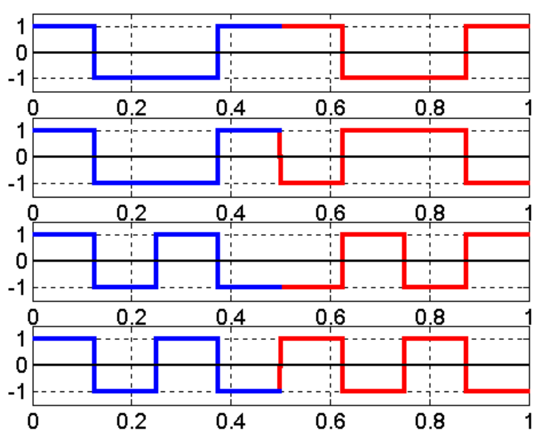


***k*=2, *m*=1**

***m*=2**

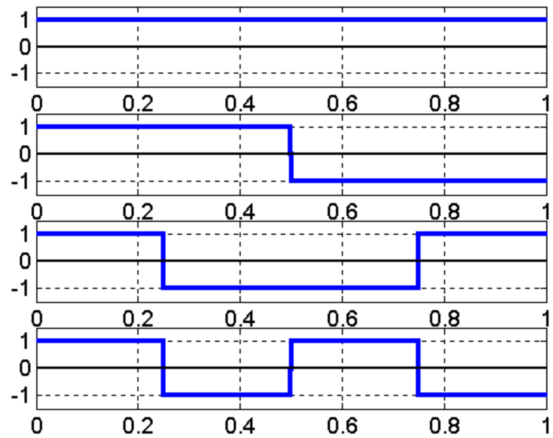
***m*=3**

***m*=4**



Baza Walsha (cd.)

Jeden ze sposobów na uporządkowanie:

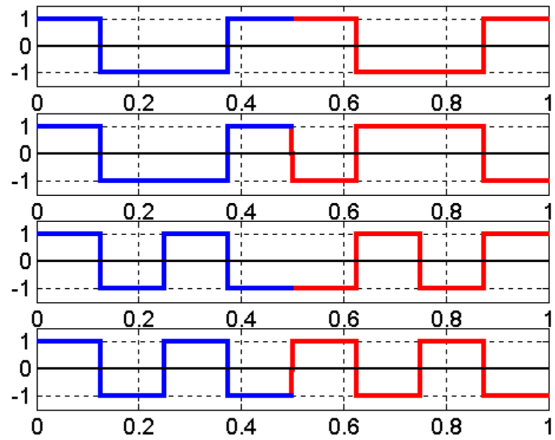


1

10

1**0**1

1010



1**0**1**0**1

1**0**10**1**0

101 **0**101

10101010

Szereg Fouriera (baza ortogonalna)

$$\boxed{D: \quad t \in [\, t_0 \,, t_0 + T \,]}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_T \cdot t} \quad : \quad f_T = \frac{1}{T}$$

$$c_n = \frac{\mathbf{x} \circ \mathbf{b}_n}{\left\| b_n(t) \right\|^2} = \frac{1}{\left\| b_n(t) \right\|^2} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \overline{b_n(t)}\, dt$$

$$\boxed{b_n(t) = e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_T \cdot t}}$$

$$\boxed{\left\| \mathbf{b}_n \right\|^2 = T}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t}\, dt$$

Szereg Fouriera (cd.)

$$\boxed{D: \quad t \in [\, t_0 \,, t_0 + T \,]}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) + b_n \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t)$$

$$\boxed{f_n = n \cdot f_T}$$

Dla *n*=0:

$$\|1\|^2 = T$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, dt$$

Dla *n*>0:

$$\|\cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t)\|^2 = \frac{T}{2}$$

$$\|\sin(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t)\|^2 = \frac{T}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t)\, dt$$

Uwaga na inne na tym slajdzie znaczenie symbolu *b* !!!

Przypomnienie

Te wszystkie rozważania można prowadzić dla funkcji określonych na DOWOLNEJ dziedzinie.

Podsumowanie

1. Sygnał jako wektor.
2. Iloczyn skalarny.
3. Norma.
4. Metryka.
5. Aproksymacja sygnału w zadanej bazie.
6. Baza kanoniczna, baza Haara i baza Walsha.
7. Wyjaśnienie wzorów na współczynniki szeregu Fouriera.

Zapraszam na ćwiczenia ...
lub do laboratorium …