

Wzory, równania i zależności **z teorii sygnałów**

Łukasz Przystupa

28 marca 2023

całość opara na wykładach Kohorty i Sypki.

1. Wzory Eulera

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$$

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2. Sygnał jako wektor

Iloczyn skalarny:

$$\langle x, y \rangle = \int_D x(t) \cdot \overline{y(t)} dt$$

Norma (długość wektora):

$$\|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle$$

Metryka (odległość sygnałów):

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x(t) - y(t), x(t) - y(t) \rangle}$$

Korelacja (jak bardzo sygnały są podobne):

$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \overline{x(\tau - t)} d\tau$$

Energia sygnału:

$$Energia(x(t)) = \|X(t)\|_{L^2}^2 = \int_D |x(t)|^2 dt$$

Wektory są ortogonalne (czyli prostopadłe względem siebie (czyli liniowo niezależne)) jeśli:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \|x(t)\| \cdot \|y(t)\| \cdot \cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow x \perp y$$

2.1. Twierdzenie Parsevala - o zachowaniu energii

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

2.2. Twierdzenie o zmianie skali

$$\delta(a \cdot t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \frac{1}{|a|} \cdot \delta(f)$$

2.3. Twierdzenie o zachowaniu odległości

Jeżeli:

$$x(t) \circ y(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(f) \circ Y(f)$$

to:

$$||x(t) - y(t)|| = ||X(f) - Y(f)||$$

2.4. Twierdzenie o zmianie fazy (lub przesunięciu w czasie)

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(f) \cdot e^{-2\pi i \cdot f \phi}$$

dla sygnału dyskretnego:

$$x(n - n_0) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X(k) \cdot e^{-2\pi i \cdot \frac{kn_0}{N}}$$

gdzie:

n – numer próbki od 0

N – ilość próbek

k – numer harmonicznej

2.5. Splot

Definicja:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$$
$$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

Właściwości splotu:

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} X_1(f) X_2(f)$$
$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

3. Szereg Fouriera

Postać numeryczna:

$$x_F = a_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot \cos(2\pi n) + b_n \cdot \sin(2\pi n)$$

Postać zespolona:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+j2\pi n f_T t} \quad \text{gdzie : } f_T = 1/T$$
$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-j2\pi n f_T \cdot t} dt \quad \text{gdzie : } T - \text{okres } x(t)$$

Więc w CFT:

$$c_n = \frac{\Delta t}{T} X_0\left(n \cdot \frac{1}{T}\right)$$

Sygnał musi spełniać warunki Dirichleta!!!

Postać okresowa:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T)$$

4. Definicje różnych transformat

4.1. Transformata Fouriera (CFT i ICFT)

$$\begin{aligned}
 x(t) &\overset{\text{bbb}}{\underset{\text{aaa}}{\longleftrightarrow}} X(f) & x(at) &\overset{\text{CFT}}{\underset{\text{ICFT}}{\longleftrightarrow}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \\
 X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt & x(t-t_0) &\overset{\text{CFT}}{\underset{\text{ICFT}}{\longleftrightarrow}} X(f) e^{-2j\pi ft_0} \\
 & & \overline{x(t)} &\overset{\text{CFT}}{\underset{\text{ICFT}}{\longleftrightarrow}} \overline{X(-f)}
 \end{aligned}$$

Należy wspomnieć że iloczyn skalarny jest niezależny od wybranej dziedziny:

$$\begin{aligned}
 x(t) \circ (y) &\overset{\text{CFT}}{\underset{\text{ICFT}}{\longleftrightarrow}} X(f) \circ Y(t) \\
 &\Downarrow \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{y(t)} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \overline{Y(f)} df
 \end{aligned}$$

4.2. Transformacja sygnału próbkowanego

$$\begin{aligned}
 x_p(t) &= x(t) \cdot g_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) \cdot \delta(t - \Delta t) \\
 &\Downarrow \\
 X_p(f) &= X(f) * G_{\Delta t}(f) = X(f) * \left[\frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n \cdot f_p) \right]
 \end{aligned}$$

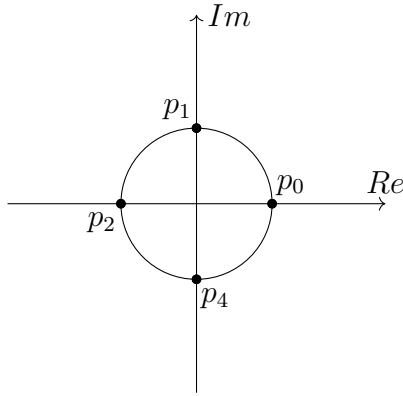
4.3. Transformacja Dyskretna (DTFT)

$$\begin{aligned}
 x_p &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) \cdot \delta(t - n\Delta t) & X(f) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) \cdot e^{-j2\pi \frac{f}{f_p} \cdot n} \\
 & & \text{gdzie : } f_p &= f \text{ probkowania} \\
 & & n &= 0, 1, 2, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

Dla sygnałów okienkowanych można przyjąć wzór:

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-2j\pi \frac{k}{N} \cdot n} & x(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{2j\pi \frac{k}{N} \cdot n} \\
 k &= 0, 1, \dots, N-1 & n &= 0, 1, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

4.3.1. Sposób obliczania poprzez wskaz



$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot w^{kn}$$

$$w^{kn} = e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

$$\phi(n) = -\frac{2\pi}{N} \cdot kn$$

I tak przykładowo dla $N = 4$:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^{0,0} & w^{0,1} & w^{0,2} & w^{0,3} \\ w^{1,0} & w^{1,1} & w^{1,2} & w^{1,3} \\ w^{2,0} & w^{2,1} & w^{2,2} & w^{2,3} \\ w^{3,0} & w^{3,1} & w^{3,2} & w^{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

4.4. Transformacja Hilberta

Czyli:

$$x(t) \xleftrightarrow[\text{IHT}]{HT} x^H(t)$$

$$x^H(t) = -\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

$$x^H(t) = \frac{1}{\pi \cdot t} * x(t) = h_H(t) * x(t)$$

$$\Downarrow$$

$$h_H(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} -j \cdot \text{sgn}(f)$$

4.5. Transformacja okienkowana

Odpowiednik transmitancji Fouriera, pomnożonej przez okno:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot w(\tau - t) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$w(t)$ - funkcja okienkowa. Funkcja, która poza przedziałem osiąga 0!

4.6. Transformacja Gabora

To specjalny rodzaj transmitancji okienkowej, w której okno jest funkcją Gausa.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^G(f, t) \cdot e^{+j2\pi \cdot f \cdot t} df$$

$$X^G(f, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot w(\tau - t) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} d\tau$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^G(f, t) dt$$

$$\text{gdzie : } w(t) = e^{-\pi \cdot f^2}$$

4.7. Transformacja falkowa

$$\begin{aligned}
 X_\psi(a, t) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h_\psi\left(\frac{t - \tau}{a}\right) d\tau \\
 &\quad \Updownarrow \\
 x(t) &= \frac{1}{c_\psi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 \cdot \sqrt{a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X_\psi(a, \tau) h_\psi\left(\frac{\tau - t}{a}\right) d\tau da \\
 &\quad \text{przy czym : } c_\psi 2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{|H_\psi(f)|^2}{f} df < +\infty
 \end{aligned}$$

$h_\psi(t)$ - falka sygnału. Funkcja, która poza przedziałem dąży do 0

5. Sygnały podstawowe i ich transformaty

$$x(t) = \sin(2\pi ft)$$

$$x(t) = \cos(2\pi ft)$$

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |t| < 1/2 \\ 1/2 & \text{dla } |t| = 1/2 \\ 0 & \text{dla } |t| > 1/2 \end{cases}$$

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f} & \text{dla } t \neq 1 \\ 1 & \text{dla } t = 0 \end{cases}$$

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1 & \text{dla } -1 \leq t \leq 0 \\ -t+1 & \text{dla } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } t \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } t = 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } t = 0 \\ -1 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$

$$\text{Gaus}(t) = e^{-at^2}$$

$$g_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta t)$$

$$\cos(x) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \frac{1}{2}(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$$

$$\sin(x) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} j\frac{1}{2}(\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0))$$

$$\delta(x) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} 1$$

$$\Pi(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \text{sinc}(\pi f)$$

$$\Lambda(x) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \text{sinc}^2(\pi f)$$

$$g_T(t) = \sum \frac{1}{T} e^{j2\pi f_n t} \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} G_T(f) = \sum \delta(f - \frac{n}{T})$$

$$u(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \frac{1}{2}\delta(f) + \begin{cases} -j \cdot \frac{1}{2\pi f} & \text{dla } f \neq 0 \\ 0 & \text{dla } f = 0 \end{cases}$$

$$\text{sgn}(t) \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} \begin{cases} -j \cdot \frac{1}{2\pi f} & \text{dla } f \neq 0 \\ 0 & \text{dla } f = 0 \end{cases}$$

$$e^{-at^2} \xleftrightarrow[\text{ICFT}]{\text{CFT}} e^{-af^2}$$

$$G_{\Delta t}(F) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n\frac{1}{\Delta t})$$

6. Sygnały okresowe:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T)$$

Gdzie $x_0(t)$ - wzorzec sygnału,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - n \cdot T) = x_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot T) = x_0(t) * g_T(t)$$

Fukcja $g_T(t)$ jest to pseudo funkcja reprezentująca grzebień Diraca

Dla funkcji zespolonych:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{j2\pi n f_T t} \quad f_T = \frac{1}{T}$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n c_n = \frac{1}{T} X_0(f_n) \quad f_n = n \cdot f_T$$

7. Aproksymacja sygnału

Aproksymacją sygnału $x(t)$ jest:

$$x(t) \approx \sum_{n=1}^N a_n b_n(t)$$

czyli:

$$x(t) + e(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cdot b_n(t)$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cdot b_n - e(t)$$

gdzie współczynniki a i b odpowiadają macierzom:

$$b = A \cdot a$$

$$b = \begin{bmatrix} x \circ b_1 \\ x \circ b_2 \\ x \circ b_3 \\ \dots \\ x \circ b_N \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} b_1 \circ b_1 & b_2 \circ b_1 & \dots & b_N \circ b_1 \\ b_1 \circ b_2 & b_2 \circ b_2 & \dots & b_N \circ b_2 \\ b_1 \circ b_3 & b_2 \circ b_3 & \dots & b_N \circ b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 \circ b_N & b_2 \circ b_N & \dots & b_N \circ b_N \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_N \end{bmatrix}$$

W gdyby wektory byłyby ortogonalne, całość sprowadza się do prostego równania:

$$a_k = \frac{x \circ b_k}{||b_k||^2} \quad k = 1, 2, \dots, N$$

Kiedy nasze wektory są znormalizowane to:

$$||b_k||^2 = 1$$

$$a_k = x \circ b_k \quad k = 1, 2, \dots, N$$

8. Baza Harra (ortonormalna)

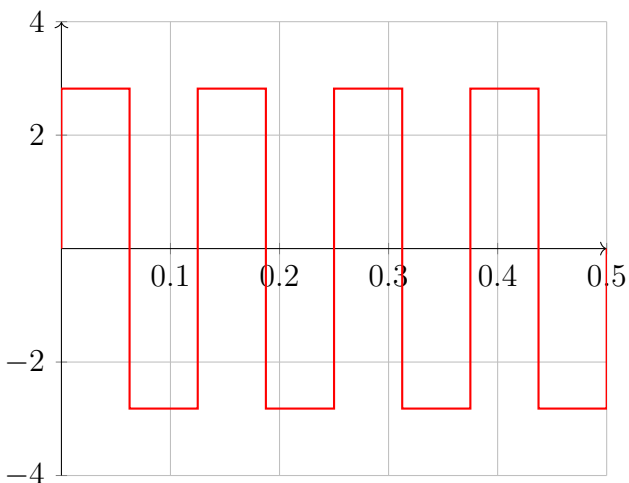
$$H_{0,0}(t) = \Pi(t - 0.5)$$

$$D : t \in < 0, 1 >$$

$$H_{0,1} = \Pi(2 \cdot (t - 0.25)) - \Pi(2 \cdot (t - 0.75))$$

$$H_{k,m} = 2^{\frac{k}{2}} \cdot H(2^k \cdot (t - \frac{m-1}{2^k}))$$

$$m = 1, 2, \dots, 2^k$$



Czyli kolejne sygnały bazy:

$$b_1(t) = H_{0,0}(t)$$

$$b_2(t) = H_{1,\Sigma}(t)$$

$$b_3(t) = H_{2,\Sigma}(t)$$

$$b_4(t) = H_{3,\Sigma}(t)$$

...

9. Baza Walsha

$$W_{0,0}(t) = \Pi(t - 0.5)$$

$$D : t \in < 0, 1 >$$

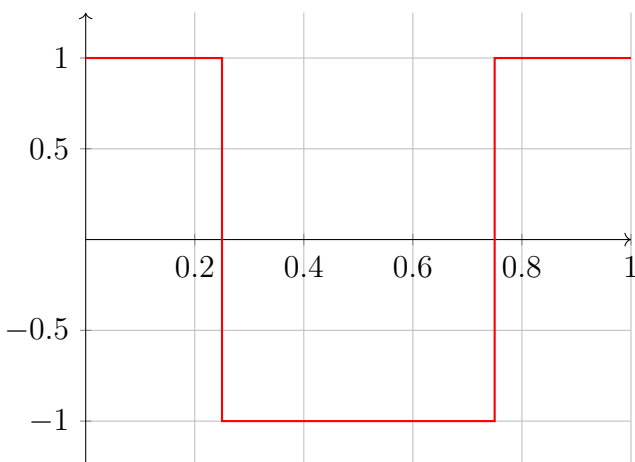
$$W_{0,1}(t) = W_{0,0}(2t) + (-1)^1 \cdot W_{0,0}(2 \cdot (t - 0.5))$$

$$W_{k,2m-1}(t) = W_{k-1,m}(2t) + (-1)^{m-1} \cdot W_{k-1,m}(2 \cdot (t - 0.5))$$

$$\text{dla } k > 1$$

$$W_{k,2m}(t) = W_{k-1,m}(2t) + (-1)^m \cdot W_{k-1,m}(2 \cdot (t - 0.5))$$

$$\text{dla } k > 1$$



Analogicznie jak w bazie Harra

10. Twierdzenie o pochodnej

Pochodna pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} \text{dla } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) &= 0 \\ \frac{d}{dt}x(t) &\overset{\text{CFT}}{\underset{\text{ICFT}}{\longleftrightarrow}} j2\pi f \cdot X(f) \end{aligned}$$

Pochodna n-tego rzędu:

$$\begin{aligned} \text{dla } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} x^{(m)}(t) &= 0 : m = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{d^n}{dt^n}x(t) &\overset{\text{CFT}}{\underset{\text{ICFT}}{\longleftrightarrow}} (j2\pi f)^n \cdot X(f) \end{aligned}$$

11. Twierdzenie o całce

$$\int_t^{-\infty} x(\tau) d\tau \overset{\text{CFT}}{\underset{\text{ICFT}}{\longleftrightarrow}} \frac{1}{j2\pi f} \cdot X(f) \text{ dla } f = 0$$

dla $f = 0$ liczymy osobno.

12. Filtry

Głównym parametrem określającym filtr jest jego transmitancja:

$$H(s) = \frac{b_0 \cdot s^0 + b_1 \cdot s^1 + b_2 \cdot s^2 \dots}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 \dots}$$

Transmitancje można rozłożyć na ułamki proste, tak że miejsca zerowania licznika to „zera” a miejsca zerowania mianownika to „bieguny”

$$H(s) = \frac{b}{a} \cdot \frac{(s - z_0) \cdot (s - z_1) \dots}{(s - p_0) \cdot (s - p_1) \dots}$$

Następnie zgodnie z zasadą na rozkładanie na ułamki proste:

$$H(s) = \frac{c_0}{s - p_0} + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_3}{s - p_3} + \dots$$

Z założeniem że:

$$c_k = H(s) \cdot (s - p_k) \big|_{s=p_k}$$

Dla tych biegunów których część rzeczywista jest ujemna, filtr jest stabilny. Dla części leżącej na 0 układ jest meta stabilny i potrzebne są dodatkowe obliczenia aby potwierdzić jego stabilność. Natomiast dla tych, których część rzeczywista jest dodatnia układ jest niestabilny.

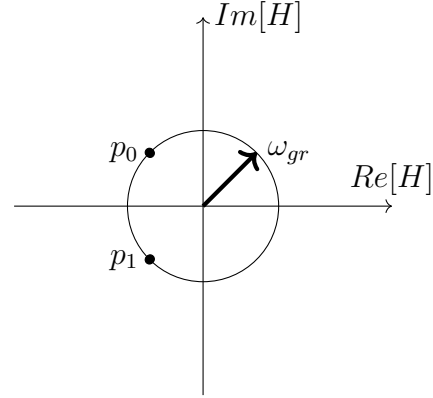
12.1. Filtr dolnoprzepustowy Butterwortha

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_{gr}}\right)^{2N}} \Rightarrow |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_{gr}}\right)^{2N}}}$$

gdzie N oznacza rząd filtru (im wyższy tym bardziej strome zbocze zaraz po f_{gr})

Dużo łatwiej jednak wyjść z:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\omega_{gr}^N}{(s - p_0)(s - p_1)\dots} = \\ &= \frac{c_0}{s - p_0} + \frac{c_1}{s - p_1} + \dots \end{aligned}$$



gdzie N - ilość biegunów

$$\begin{aligned} \text{gdy } s &= j2\pi f \\ H(f) &= \frac{c_0}{j2\pi f - p_0} + \frac{c_1}{j2\pi f - p_1} + \dots \end{aligned}$$

Odpowiedz impulsowa :

$$h(t) = u(t) \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot e^{p_n \cdot t}$$

12.2. Filtr dolnoprzepustowy, górno i pasmowe

Wszystkie powyższe rozważania były dla filtru dolnoprzepustowego

$$\begin{aligned} H_{FDP}(f) &= H_0 \left(\frac{f}{f_g} \right) & H_{FPP}(f) &= H_0 \left(\frac{f^2 - f_d \cdot f_g}{f \cdot (f_g - f_d)} \right) \\ H_{FGP}(f) &= H_0 \left(-\frac{f_d}{f} \right) & H_{FPZ}(f) &= H_0 \left(-\frac{f \cdot (f_g - f_d)}{f^2 - f_d \cdot f_g} \right) \end{aligned}$$

Dla charakterystyk Laplaca:

$$\begin{aligned} H_{FDP}(s) &= H_0 \left(j2\pi \frac{s}{s_g} \right) & H_{FPP}(s) &= H_0 \left(2\pi \frac{s^2 - s_d \cdot s_g}{s \cdot (s_g - s_d)} \right) \\ H_{FGP}(s) &= H_0 \left(-j2\pi \frac{s_d}{s} \right) & H_{FPZ}(s) &= H_0 \left(-2\pi \frac{s \cdot (s_g - s_d)}{s^2 - s_d \cdot s_g} \right) \end{aligned}$$

13. Próbkowanie

Próbkujemy sygnał pseudo funkcją grzebieniową:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - n\Delta t)$$

W dziedzinie Fouriera odpowiada to:

$$X_p(f) = \frac{1}{\Delta t} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n \cdot f_p)$$

gdzie : $f_p = \frac{1}{\Delta t}$

Aby odtworzyć sygnał należy:

Gdzie:

$$X(f) = X_p(f) \cdot H(f) \qquad H(f) = \Delta t \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_p}\right)$$

$H(f)$ - funkcja transmitancji idealnego filtra dolnoprzepustowego

Czyli, funkcja odtworzona w dziedzinie czasu ma postać:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) \cdot \text{sinc}(\pi f_p \cdot (t - \Delta t))$$

Zgodnie z twierdzeniem **Niquista-Shannona** poprawnie spróbkowany sygnał zawsze jesteśmy w stanie odtworzyć! Zgodnie z w/w twierdzeniem, częstotliwość sygnału próbkującego powinna spełniać zależność:

$$f_{\text{sampling}} \geq 2 \cdot f_{\text{sygnału}}$$

W przypadku nie spełnienia tej zależności powstanie tak zwany *aliasing* – czyli sygnał o częstotliwości mniejszej od $\frac{f_{\text{sampling}}}{2}$!

Dodatkowo jeśli częstotliwość sygnału będzie: $f_{\text{sygnału}} == \frac{f_{\text{sampling}}}{2}$ to wystąpi próbkowanie krytyczne, które wynika z zależności od różnicy faz sygnału głównego i próbkującego.