

# Basis-Rechenarten

## Addition

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

## Subtraktion

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

## Multiplikation ist kalar-Produkt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = (-3) \cdot \frac{2 \cdot (-4)}{1 \cdot 7} + 1 = -8 + -3 + 7 = \underline{\underline{-4}}$$

Multiplikation mit  
ganzen Zahlen darf einen  
Vektor ergeben!

## Kreuzprodukt / Normalenvektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-5) \cdot (-2) - 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 4 - (-5) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 19 \end{pmatrix}$$

## Betrag / Länge

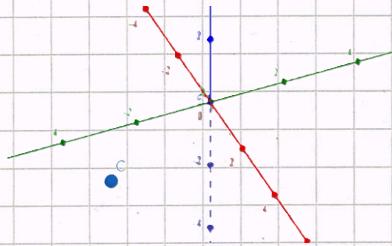
$$\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 9 + 1} = \sqrt{26} \approx 5,099$$

→ Eine Division von Vektoren wurde iiiiigens mathematisch nicht definiert. Stattdessen muss man  $(1/x) \cdot \vec{v}$  rechnen.

# Geometrische Objekte

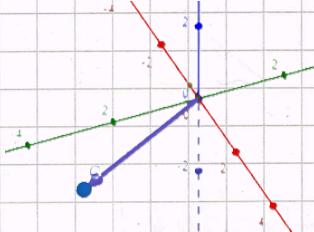
## Punkt

$$P = (3| -4 | 1)$$



## Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$



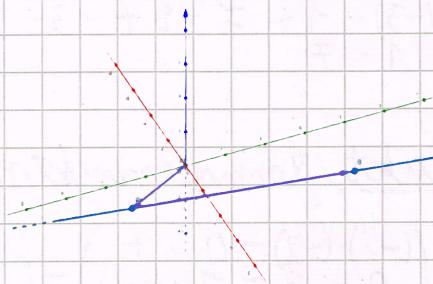
## Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Irgendein kleiner Buchstabe

Richtungsvektor

Stützvektor



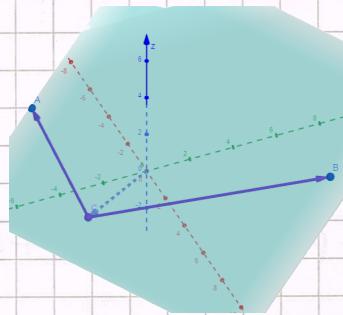
## Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

Irgendein großer Buchstabe

Spannvektor

Stützvektor



## Zusätzliche Definitionen

### Stützvektor / Ortsvektor:

- gilt den Startpunkt / die Basis für andere Vektoren, zum Beispiel in einer Geraden oder Ebene. Lässt sich als eine Art Offset für alles was folgt darstellen.

### Spannvektor / Planarvektor:

- Definieren zusammen mit dem Stützvektor eine Ebene. Mit dieser Kombination dieser Vektoren kann man jeden Punkt auf der Ebene erreichen. Sie müssen linear unabhängig sein.

### Richtungsvektor:

- Gibt die Richtung oder Orientierung einer Geraden oder Ebene an. Spannvektoren sind auch Richtungsvektoren. Normalenmeise stehen sie auf einem Stützvektor.

# Berechnen Spezieller Vektoren

## Verbindungsvektor

Der Vektor von einem Punkt zu einem anderen

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

\* Meistens eher  $\overrightarrow{ab}$ , bedeutet einfach die Strecke von a nach b

## Normalenvektor

Ein Vektor der senkrecht auf zwei anderen steht. Wird oft verwendet um eine Ebene zu definieren (statt Spannr.).

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) - 7 \cdot 7 \\ 7 \cdot 3 - (-4) \cdot (-1) \\ (-4) \cdot 7 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -51 \\ 17 \\ -34 \end{pmatrix}$$

## Einheitsvektor

Ein Einheitsvektor ist identisch zum ursprünglichen Vektor, jedoch auf die Länge 1 gekürzt.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad |\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 7^2} \approx 8,3$$

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{8,3} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,48 \\ 0,24 \\ 0,84 \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor hat die Länge 1 (Betrag) von 1!

# Winkel berechnen

## Winkel zwischen Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 1 + (-2)^2} = \sqrt{14} \approx 3,742$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} \approx 4,472$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \cos^{-1} \frac{10}{16,734} \approx \cos^{-1} 0,598 \approx 53,273$$

## Bei Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das hier, dafür interessierst du dich.  
Damit machst du dann das gleiche wie oben mit den Vektoren.

## Bei Ebenen

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 2 - 0 \\ 0 - 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 3 - (-2) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 1 + (-2)^2} = \sqrt{14} \approx 3,742$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 10^2} = \sqrt{180} \approx 13,416$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} - 90^\circ = \cos^{-1} \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}}{3,742 \cdot 13,416} - 90^\circ \approx \cos^{-1} \frac{-40}{50,203} - 90^\circ$$

$$\approx \cos^{-1} -0,797 - 90^\circ \approx 142,845 - 90^\circ = 52,845$$

Da der Normalenvektor  $\vec{n}$  senkrecht auf der Ebene steht, müssen die  $90^\circ$  am Ende wieder abgezogen werden.