Basis-Rechenarten

Addition

$$\begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\-5\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}3\\-4\\-2\end{pmatrix}}$$

Subtraktion

$$\begin{pmatrix}-3\\5\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}-5\\9\\2\end{pmatrix}}$$

Multiplikation / Skalar-Produkt

$$\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\1\\7\end{pmatrix}=\begin{matrix}2\cdot(-4)+\\(-3)\cdot 1+\\1\cdot 7\end{matrix}=-8+-3+7=\underline{-4}$$

Multiplikation mit ganzen Zahlen darf einen Vektor ergeben!

Kreuzprodukt / Normalenvektor

$$\begin{pmatrix}1\\-5\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-5)\cdot(-2)-0\cdot 4\\0\cdot 3-1\cdot(-2)\\1\cdot 4-(-5)\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10-0\\0-(-2)\\4-(-15)\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}10\\2\\19\end{pmatrix}}$$

$$\begin{matrix}1 & 3\\-5 & 4\\0 & -2\\1 & 3\\-5 & 4\end{matrix}$$

Betrag / Länge

$$\left|\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{16+9+1}=\sqrt{26}\mathrel{\hat{=}}\underline{5{,}099}$$

→ Eine Division von Vektoren wurde übrigens Mathematisch nicht definiert. Stattdessen muss man $(1/x)\cdot\vec{v}$ rechnen.

Geometrische Objekte

Punkt

$P=(3|-4|1)$

Vektor

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}$$

Gerade

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}5\\9\\3\end{pmatrix}$$

Irgendein kleiner Buchstabe

Richtungs-vektor

Stützvektor

Ebene

$$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}5\\9\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\1{,}5\end{pmatrix}$$

Irgendein großer Buchstabe

Spann-vektor

Stützvektor

Zusätzliche Definitionen

Stützvektor/Ortsvektor:

- Gibt den Startpunkt/die Basis für andere Vektoren, zum Beispiel in einer Geraden oder Ebene. Lässt sich als eine Art Offset für alles was folgt forstellen.

Spannvektor/Planarvektor:

- Definieren zusammen mit dem Stützvektor eine Ebene. Mit deder kombination dieser Vektoren kann man jeden Punkt auf der Ebene erreichen. Sie müssen linear unabhängig sein.

Richtungsvektor:

- Gibt die Richtung oder Orientierung einer Geraden oder Ebene an. Spannvektoren sind auch Richtungsvektoren. Normalerweise stehen sie auf einem Stützvektor.

Berechnen Spezieller Vektoren

Verbindungsvektor

Der Vektor von einem Punkt zu einem Anderen

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

* Meistens eher $\overrightarrow{ab}$, bedeutet einfach die Strecke von a nach b

$$\underset{\nwarrow *}{\vec{v}} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}}$$

Normalenvektor

Ein Vektor der senkrecht auf zwei anderen steht. Wird oft verwendet um eine Ebene zu definieren (statt Spannv.).

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) - 7 \cdot 7 \\ 7 \cdot 3 - (-4) \cdot (-1) \\ (-4) \cdot 7 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -51 \\ 17 \\ -34 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{matrix} -4 & 3 \\ 2 & 7 \end{matrix}$$

Einheitsvektor

Ein Einheitsvektor ist identisch zum ursprünglichen Vektor, jedoch auf die Länge 1 gekürzt.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad |a| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 7^2} \mathrel{\hat{=}} \underline{8{,}3}$$

$$\vec{e_a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{8{,}3} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} \underline{\begin{pmatrix} -0{,}48 \\ 0{,}24 \\ 0{,}84 \end{pmatrix}}$$

Dieser Vektor hat die Länge / (Betrag) von 1!

Winkel berechnen

Winkel zwischen Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 1 + (-2)^2} = \sqrt{14} \mathrel{\hat=} \underline{3{,}742}$$

$$|b| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} \mathrel{\hat=} \underline{4{,}472}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \mathrel{\hat=} \cos^{-1} \frac{10}{16{,}734} \mathrel{\hat=} \cos^{-1} 0{,}598 \mathrel{\hat=} \underline{53{,}273}$$

Bei Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das hier, dafür interressierst du dich. Damit machst du dann das gleiche wie oben mit den Vektoren.

Bei Ebenen

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 2 - 0 \\ 0 - 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 3 - (-2) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{matrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{matrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 1 + (-2)^2} = \sqrt{14} \mathrel{\hat=} \underline{3{,}742}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 10^2} = \sqrt{180} \mathrel{\hat=} \underline{13{,}416}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{a \cdot n}{|a| \cdot |n|} - 90 = \cos^{-1} \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}}{3{,}742 \cdot 13{,}416} - 90 \mathrel{\hat=} \cos^{-1} \frac{-40}{50{,}203} - 90$$

$$\mathrel{\hat=} \cos^{-1} -0{,}797 - 90 \mathrel{\hat=} 142{,}845 - 90 = 52{,}845$$

Da der Normalenvektor n senkrecht auf der Ebene steht, mussen die 90° am Ende wieder abgezogen werden.