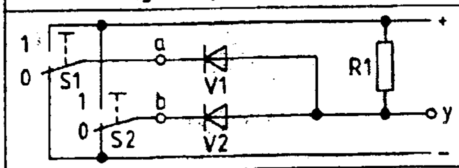
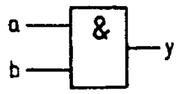
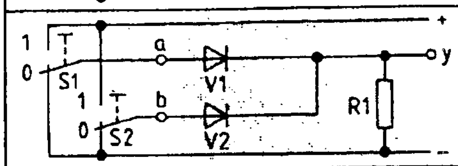
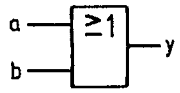
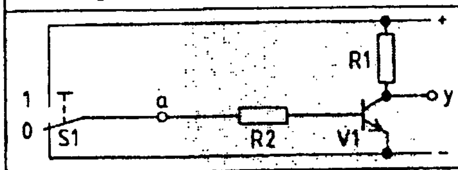
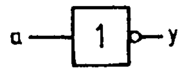
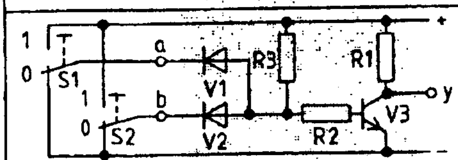
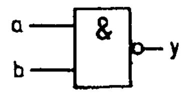
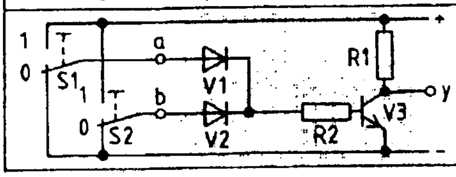
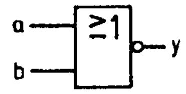
# 2 Logik-Funktionen

## 2.1 Darstellung von Logik-Funktionen

<table>
<tr><th>Schaltungsbeispiel</th><th>Wahrheitstabelle</th><th>Gleichung</th><th>Name und Symbol</th></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><td>a</td><td>b</td><td>y</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td>$a \wedge b = y$<br>$a \cdot b = y$</td><td>UND - Element<br></td></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><td>a</td><td>b</td><td>y</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td>$a \vee b = y$<br>$a + b = y$</td><td>ODER - Element<br></td></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><td>a</td><td>y</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table></td><td>$\overline{a} = y$</td><td>NICHT-Element<br></td></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><td>a</td><td>b</td><td>y</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td><td>$\overline{a \wedge b} = y$<br>$\overline{a \cdot b} = y$</td><td>NAND - Element<br></td></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><td>a</td><td>b</td><td>y</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td><td>$\overline{a \vee b} = y$<br>$\overline{a + b} = y$</td><td>NOR - Element<br></td></tr>
</table>

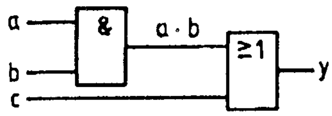
**1. Beispiel**

Eine Logik-Funktion ist durch die Gleichung $a \cdot b + c = y$ gegeben.

a) Zeichnen Sie den Schaltplan der Funktion mit den Symbolen der Logik-Elemente.

b) Stellen Sie die Wahrheitstabelle der Logik-Funktion auf.

**Lösung** a)



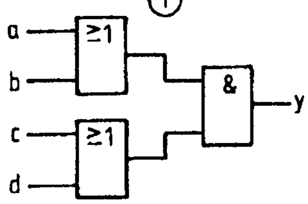
b)

| a | b | c | y |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

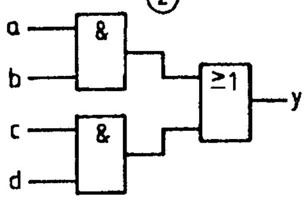
**2. Beispiel**

Zu den gegebenen Schaltplänen sollen die Gleichungen der Logik-Funktionen aufgestellt werden.

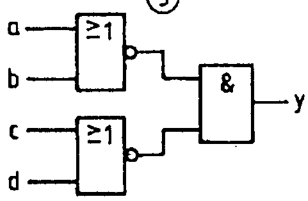
①



②



③



**Lösung**

① Oder-Elemente, deren Ausgänge UND-verknüpft werden, ergeben in der Gleichung Klammerausdrücke: $(a + b) \cdot (c + d) = y$

② UND-Elemente, deren Ausgänge ODER-verknüpft werden, müssen in der Gleichung nicht durch Klammern zusammengefaßt werden (Punktrechnung geht vor Strichrechnung): $a \cdot b + c \cdot d = y$

③ Negationskennzeichen ersetzen eine Klammer (Negation hat Vorrang auch vor der UND-Verknüpfung): $\overline{a + b} \cdot \overline{c + d} = y$

## 2.2 Gesetze von De Morgan

**1. Gesetz von De Morgan**

$$\overline{a+b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \quad \xRightarrow{\text{Negieren der Gleichung}} \quad a+b = \overline{\bar{a} \cdot \bar{b}}$$

Die logische ODER-Funktion kann durch die UND-Funktion ersetzt werden.

**2. Gesetz von De Morgan**

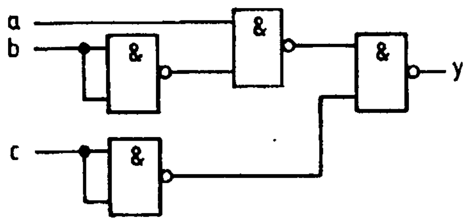
$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b} \quad \xRightarrow{\text{Negieren der Gleichung}} \quad a \cdot b = \overline{\bar{a} + \bar{b}}$$

Die logische UND-Funktion kann durch die ODER-Funktion ersetzt werden.

### Beispiel

Die Logik-Funktion $y = a \cdot \bar{b} + c$ soll mit NAND-Elementen realisiert werden.

### Lösung



$y = a \cdot \bar{b} + c$ doppelte Negierung

$\Leftrightarrow y = \overline{\overline{a \cdot \bar{b} + c}}$ 1. Gesetz von De Morgan

$\Leftrightarrow y = \overline{\overline{a \cdot \bar{b}} \cdot \bar{c}}$

### Aufgaben

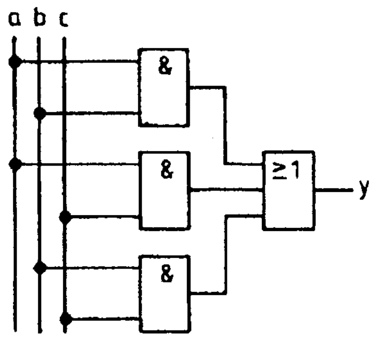
1. Die ODER-Funktion $y = a + b$ soll mit NAND-Elementen realisiert werden.
   a) Formen Sie mit Hilfe der doppelten Negierung und der De Morgan-Gesetze die gegebene Gleichung um.
   b) Zeichnen Sie die ODER-Funktion mit NAND-Elementen.

2. Die Äquivalenz-Funktion $y = \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b$ soll mit NAND-Elementen realisiert werden.
   a) Formen Sie die gegebene Gleichung um.
   b) Zeichnen Sie die Äquivalenz-Funktion mit NAND-Elementen.

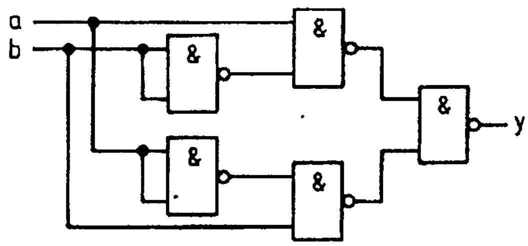
3. Die Äquivalenz-Funktion soll mit NOR-Elementen ausgeführt werden. Entwickeln Sie durch Umformen der Äquivalenz-Gleichung die gesuchte Schaltung.

4. Die Exclusiv-ODER-Funktion (EXOR) $y = \bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}$ soll
   a) mit NAND-Elementen,
   b) mit NOR-Elementen
   ausgeführt werden.
   Entwickeln Sie die Gleichungen, und zeichnen Sie die Funktion mit NAND- bzw. mit NOR-Elementen.

5. Die dargestellte Logik-Funktion soll
   a) mit NAND-Elementen,
   b) mit NOR-Elementen
   realisiert werden.
   Entwickeln Sie aus der Gleichung der gegebenen Funktion die Gleichungen der gesuchten Schaltungen, und zeichnen Sie diese.



**6.** Dargestellt ist eine Logik-Funktion mit NAND-Elementen. Die Funktion soll in ihre Grundform, bestehend aus UND-, ODER- und NICHT-Elementen, umgeformt werden.

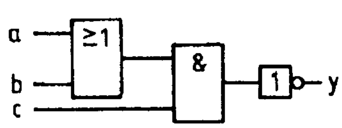



a) Stellen Sie zur gegebenen Funktion die Gleichung auf.
b) Formen Sie die Gleichung mit Hilfe der De Morgan-Gesetze soweit um, bis keine NAND- bzw. NOR-Elemente mehr auftreten.
c) Zeichnen Sie die Funktion mit den Grundelementen UND, ODER und NICHT.

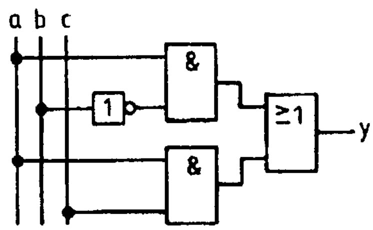
**7.** Gegeben ist die Gleichung $y = \overline{\bar{a} + \bar{b} + \overline{\overline{a + b}}}$.
a) Zeichnen Sie die Funktion mit NOR-Elementen.
b) Formen Sie die gegebene Funktionsgleichung soweit um, bis nur noch Grundelemente (keine NAND und NOR) auftreten.
c) Zeichnen Sie die Funktion in ihrer Grundform.
d) Überprüfen Sie beide Schaltungen durch Aufstellen der Wahrheitstabellen.

**8.** Gegeben sind die Logik-Funktionen:

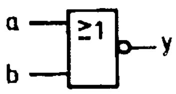
a)




b)

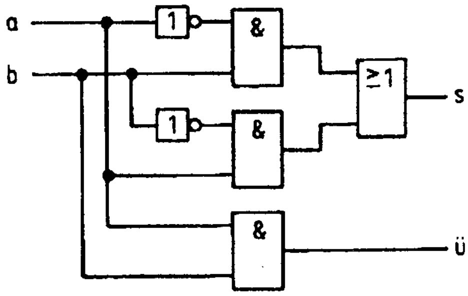



c)



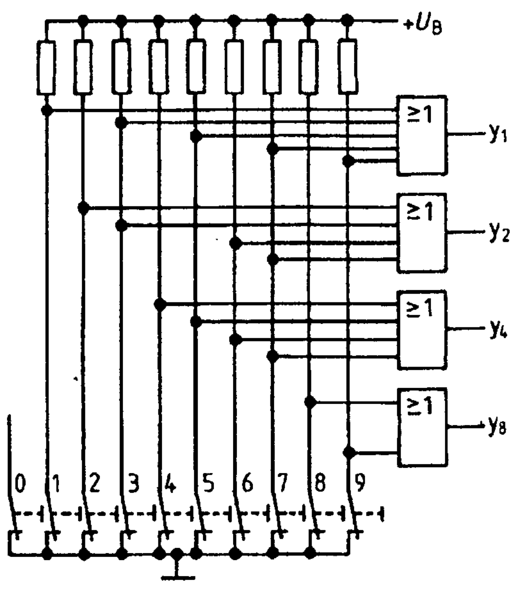

Die Schaltungen sollen mit NAND-Elementen aufgebaut werden. Stellen Sie zu jeder gegebenen Funktion zunächst ihre Gleichung auf. Formen Sie sodann die Gleichung um, und zeichnen Sie die Funktion mit NAND-Elementen.

**9.** Die dargestellte Schaltung (Halbaddierer) soll mit NAND-Elementen aufgebaut werden.




a) Stellen Sie für die Ausgänge S (Summe) und Ü (Übertrag) je eine Gleichung auf, und formen Sie um.
b) Zeichnen Sie den Stromlaufplan des Halbaddierers mit NAND-Elementen.
c) Stellen Sie die Wahrheitstabelle des Halbaddierers auf.

**10.** Dargestellt ist ein Code-Umsetzer von Dezimal- auf BCD-Code. Der Codierer soll mit NAND- und NICHT-Elementen realisiert werden.



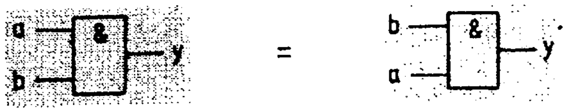

a) Stellen Sie zu jedem Ausgang die Funktionsgleichung auf.
b) Formen Sie die Gleichungen soweit um, bis nur noch NAND- und NICHT-Elemente auftreten.
c) Zeichnen Sie den Codierer mit NAND- und NICHT-Elementen.

## 2.3 Gesetze der Schaltalgebra

**Kommutativgesetz**

$a \cdot b = b \cdot a$

$a + b = b + a$

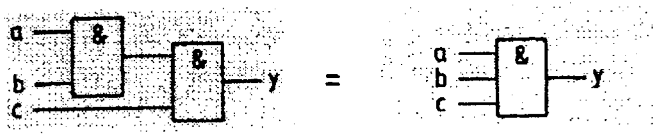



Eingänge von Logik-Elementen dürfen *vertauscht* werden.

**Assoziativgesetz**

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$

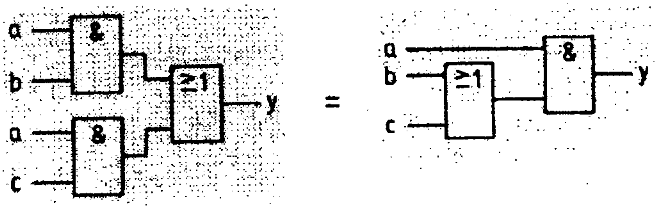
$(a + b) + c = a + b + c$




Durch *Zusammenschaltung* gleicher Logik-Elemente kann die Zahl der Eingänge erhöht werden.

**1. Distributivgesetz**

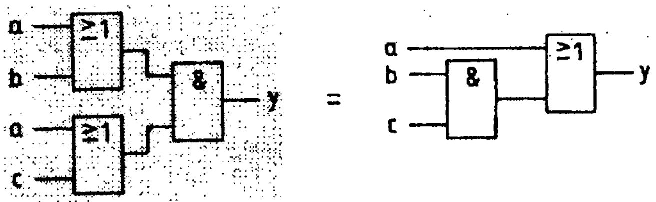
$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$




Durch „*Ausklammern*" einer UND-Variablen können Logik-Funktionen oft vereinfacht werden.

**2. Distributivgesetz**

$(a + b) \cdot (a + c) = a + b \cdot c$

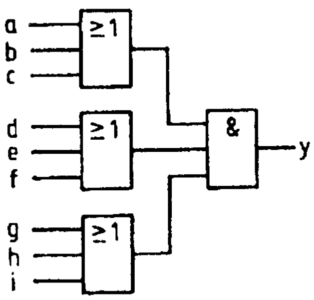



Durch *Auflösen* von ODER-Klammern können Logik-Funktionen oft vereinfacht werden.

**Beispiel**

Die unten gegebene Logik-Funktion soll mit UND- und ODER-Elementen mit je zwei Eingängen aufgebaut werden.

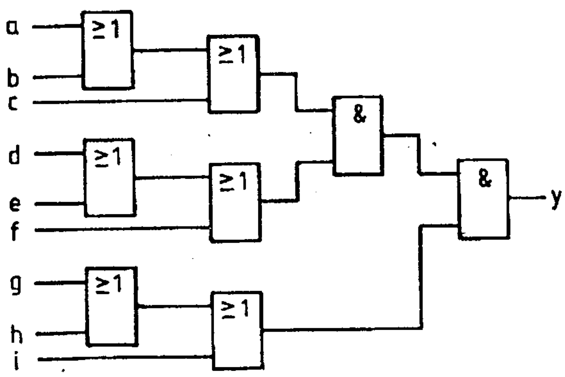
$y = (a+b+c) \cdot (d+e+f) \cdot (g+h+i)$




**Lösung**

Die Umformung der gegebenen Gleichung erfolgt mit Hilfe des Assoziativgesetzes, indem durch zusätzliche Klammern jeweils zwei zu verknüpfende Eingänge geschaffen werden.

$y = (((a+b)+c) \cdot ((d+e)+f)) \cdot ((g+h)+i)$



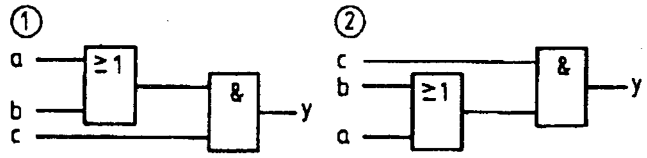
# Aufgaben

1. Gegeben ist die Funktionsgleichung $y = (((a \cdot b) \cdot c) \cdot d)$.
   a) Zeichnen Sie die Funktion.
   b) Die gegebene Funktion soll durch Einsatz eines UND-Elements mit drei Eingängen und eines UND-Elements mit zwei Eingängen realisiert werden. Geben Sie die Gleichung an, und zeichnen Sie die Funktion.

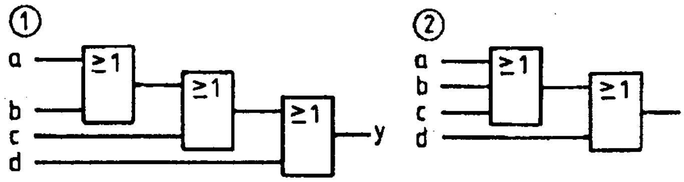
2. Gegeben ist die Funktion $y = a + b + c + d + e$.
   Die Funktion soll mit ODER-Elementen mit je drei Eingängen ausgeführt werden. Geben Sie die Gleichung an, und zeichnen Sie die Funktion.

3. Vereinfachen Sie die Funktion $y = a \cdot b + c \cdot d + d \cdot a + e \cdot c$ durch Ausklammern (Distributivgesetz), und zeichnen Sie diese.

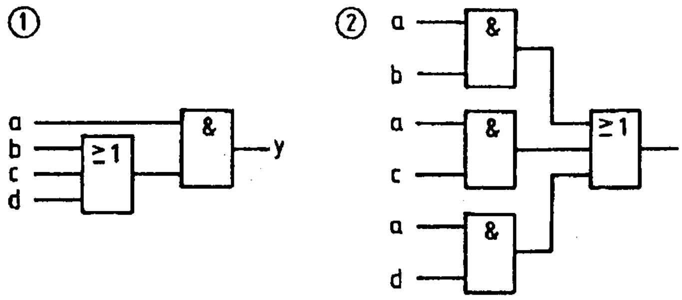
4. a) Geben Sie zu jeder Schaltung die Gleichung an.
   b) Welches Gesetz wurde bei der Umwandlung von Schaltung ① in Schaltung ② angewendet?



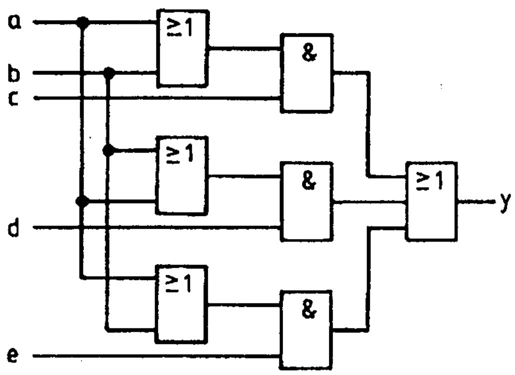

5. a) Geben Sie zu jeder Schaltung die Gleichung an.
   b) Welches Gesetz wurde bei der Umwandlung angewendet?



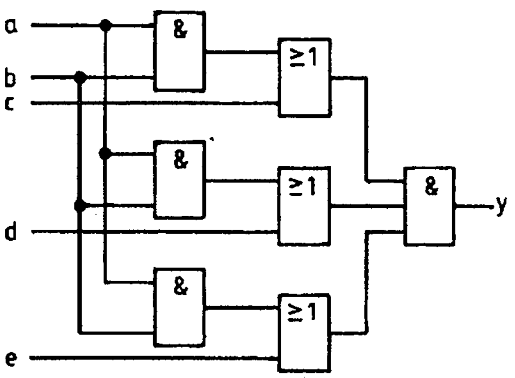

6. a) Geben Sie zu jeder Schaltung die Gleichung an.
   b) Welches Gesetz wurde bei der Umwandlung angewendet?




7. Gegeben ist nebenstehender Plan einer Logik-Funktion.
   a) Stellen Sie die Funktionsgleichung der dargestellten Schaltung auf.
   b) Vereinfachen Sie durch Anwenden des Distributivgesetzes die Funktionsgleichung. Zeichnen Sie den vereinfachten Plan.



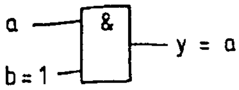

8. Gegeben ist nebenstehender Plan einer Logik-Funktion.
   a) Stellen Sie die Funktionsgleichung der dargestellten Schaltung auf.
   b) Vereinfachen Sie die Gleichung durch Anwenden des Distributivgesetzes.
   c) Zeichnen Sie den Plan der vereinfachten Schaltung.



## 2.4 Vereinfachungsregeln der Schaltalgebra

**Regel 1**

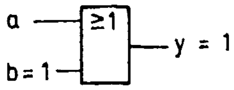
$a \cdot 1 = a$




| a | b | y |
|---|---|---|

**Regel 6**

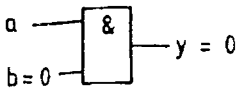
$a + 1 = 1$




| a | b | y |
|---|---|---|

**Regel 2**

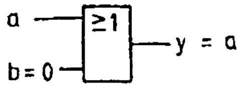
$a \cdot 0 = 0$




| a | b | y |
|---|---|---|

**Regel 7**

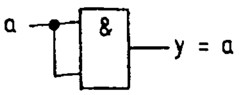
$a + 0 = a$




| a | b | y |
|---|---|---|

**Regel 3**

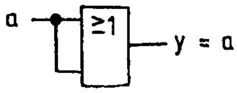
$a \cdot a = a$




| a | a | y |
|---|---|---|

**Regel 8**

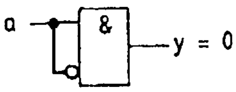
$a + a = a$




| a | a | y |
|---|---|---|

**Regel 4**

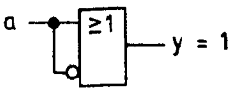
$a \cdot \bar{a} = 0$




| a | ā | y |
|---|---|---|

**Regel 9**

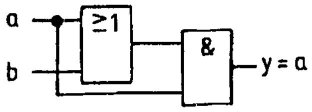
$a + \bar{a} = 1$




| a | ā | |
|---|---|---|

**Regel 5**

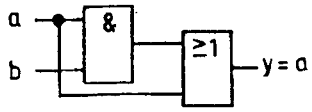
$a \cdot (a + b) = a$




| a | b | y |
|---|---|---|

**Regel 10**

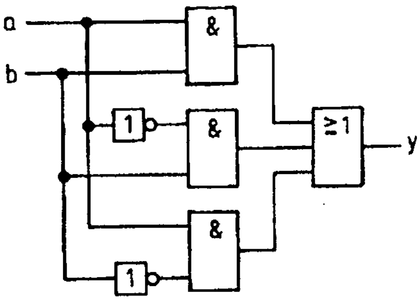
$a + a \cdot b = a$




| a | b | y |
|---|---|---|

### Beispiel

Die unten dargestellte Logik-Funktion soll mit Hilfe der Schaltalgebra vereinfacht werden.




### Lösung

Zunächst wird aus dem Plan heraus die Logik-Gleichung aufgestellt.

Logik-Gleichung: $y = a \cdot b + \bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}$

1. Distributivgesetz: $y = a \cdot (b + \bar{b}) + \bar{a} \cdot b$
   (Ausklammern)
   Regel 9: $y = a \cdot 1 + \bar{a} \cdot b$
   Regel 1: $y = a + \bar{a} \cdot b$
2. Distributivgesetz: $y = (a + \bar{a}) \cdot (a + b)$
   (s. Hinweis)
   Regel 9: $y = 1 \cdot (a + b)$
   Regel 1: $y = \mathbf{a + b}$

*Lösungshinweis:*
Das 2. Distributivgesetz wird hier in rückwärtiger Richtung benutzt. Das heißt es werden Klammern gesetzt, wodurch der Ausdruck zunächst wieder umfangreicher wird. Die weiteren Schritte zeigen, daß dieser „Rechentrick" schließlich jedoch zur gewünschten Vereinfachung der Funktion führt.

### Aufgaben

**1.** Vereinfachen Sie die Logik-Funktionen so, daß sie mit möglichst wenigen Logik-Elementen realisiert werden können.

**a)** $y = a \cdot (b + \bar{a}) + b \cdot c \cdot \bar{c}$

**b)** $y = a \cdot b + a \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot b + a \cdot c$

**c)** $y = (a + b) \cdot (a + \bar{b})$

**d)** $y = a \cdot c + b \cdot c + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c}$

2. Weisen Sie die Gültigkeit der beiden folgenden Regeln durch Anwenden des 2. Distributivgesetzes nach.
   a) $a + \bar a \cdot b = a + b$      b) $\bar a + a \cdot b = \bar a + b$

3. Vereinfachen Sie:
   a) $y = (\bar a + \bar b) \cdot (\bar a + b) \cdot (a + \bar b)$      c) $y = (a \cdot \bar b + a \cdot c) \cdot (b + c)$
   b) $y = (\bar a + \bar b) \cdot (\bar a + b) \cdot (a + b)$      d) $y = (\bar b + a \cdot c) \cdot (b + c)$

4. Vereinfachen Sie:
   a) $y = \overline{\overline{a \cdot b}} \cdot \bar c \cdot \overline{\bar d + d + d}$      b) $y = \overline{\overline{a \cdot b}} \cdot (\overline{\overline{\overline{\bar a \cdot b}} + \overline{a + b} \cdot \overline{\overline{a \cdot b}}})$      c) $y = \overline{\overline{\bar a \cdot \bar b} + \overline{\bar a + \bar b}}$

5. Die nachfolgend dargestellten Logik-Funktionen sollen mit möglichst wenigen Logik-Elementen realisiert werden.

5.1 Stellen Sie jeweils aus dem Logik-Plan heraus die zugehörige Gleichung auf.

5.2 Vereinfachen Sie so weit wie möglich die Gleichung mit Hilfe der Gesetze und Regeln der Schaltalgebra.

5.3 Zeichnen Sie den Logik-Plan (Schaltplan) der vereinfachten Funktion.