

2. In einer Kleinstadt gibt es zwei Fitnessstudios. Zum Jahresbeginn gehen 27% regelmäßig in das Fitnessstudio A, 22% in das Fitnessstudio B und der Rest geht in gar kein Fitnessstudio. Alle Studios machen bei gleichbleibender Teilnehmerzahl Gewinne. Es wird angenommen, dass sich die Anzahl der Besucher nicht verändert. Die folgende Übergangstabelle zeigt den Wechsel pro Jahr.

von \ nach	A	B	N
A	0,45	0,2	0,7
B	0,35	0,55	0,2
N	0,2	0,25	0,7

a) Untersuchen Sie, um wieviel Prozent sich der Anteil der Trainierenden, die das Fitnessstudio B besuchen, nach 5 Jahren verändert hat!

M = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,2 & 0,7 \\ 0,35 & 0,55 & 0,2 \\ 0,2 & 0,25 & 0,7 \end{pmatrix}

\vec{z}_0 = \begin{pmatrix} 27 \\ 22 \\ 67 \end{pmatrix}

\vec{z}_1 = M \cdot \vec{z}_0 = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,2 & 0,7 \\ 0,35 & 0,55 & 0,2 \\ 0,2 & 0,25 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ 22 \\ 67 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20,65 \\ 28,25 \\ 57,7 \end{pmatrix}

\vec{z}_2 = M \cdot \vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,2 & 0,7 \\ 0,35 & 0,55 & 0,2 \\ 0,2 & 0,25 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20,65 \\ 28,25 \\ 57,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20,0525 \\ 32,985 \\ 46,9625 \end{pmatrix}

\vec{z}_3 = M \cdot \vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,2 & 0,7 \\ 0,35 & 0,55 & 0,2 \\ 0,2 & 0,25 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20,0525 \\ 32,985 \\ 46,9625 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20,316 \\ 34,562 \\ 45,73 \end{pmatrix}

\vec{z}_4 = M \cdot \vec{z}_3 = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,2 & 0,7 \\ 0,35 & 0,55 & 0,2 \\ 0,2 & 0,25 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20,316 \\ 34,562 \\ 45,73 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20,567 \\ 35,746 \\ 44,294 \end{pmatrix}

\vec{z}_5 = M \cdot \vec{z}_4 = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,2 & 0,7 \\ 0,35 & 0,55 & 0,2 \\ 0,2 & 0,25 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20,567 \\ 35,746 \\ 44,294 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20,713 \\ 35,387 \\ 43,905 \end{pmatrix}

b) Untersuchen Sie, ausgehend von der Startverteilung, die langfristige Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung und entscheiden Sie begründet, ob es sich lohnt, in das Fitnessstudio B zu investieren!

M = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,2 & 0,7 \\ 0,35 & 0,55 & 0,2 \\ 0,2 & 0,25 & 0,7 \end{pmatrix}

\vec{z}_f = \begin{pmatrix} A \\ B \\ N \end{pmatrix}

\vec{z}_f = M \cdot \vec{z}_f

\begin{pmatrix} A \\ B \\ N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,45 & 0,2 & 0,7 \\ 0,35 & 0,55 & 0,2 \\ 0,2 & 0,25 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ N \end{pmatrix}

A = 0,45 \cdot A + 0,2 \cdot B + 0,7 \cdot N \quad | -A
B = 0,35 \cdot A + 0,55 \cdot B + 0,2 \cdot N \quad | -B
N = 0,2 \cdot A + 0,25 \cdot B + 0,7 \cdot N \quad | -N

0 = -0,55 \cdot A + 0,2 \cdot B + 0,7 \cdot N
0 = 0,35 \cdot A - 0,45 \cdot B + 0,2 \cdot N
0 = 0,2 \cdot A + 0,25 \cdot B - 0,3 \cdot N

\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} \\ -0,55 & 0,2 & 0,7 & 0 \\ 0,35 & -0,45 & 0,2 & 0 \quad | \cdot 3 \\ 0,2 & 0,25 & -0,3 & 0 \quad | \cdot 2 \end{array}

\begin{array}{ccc|c} -0,55 & 0,2 & 0,7 & 0 \\ 7,05 & -7,35 & 0,6 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & -0,6 & 0 \end{array} \quad \leftarrow \textcircled{+}

\begin{array}{ccc|c} -0,55 & 0,2 & 0,7 & 0 \quad | \cdot 6 \\ 7,05 & -7,35 & 0,6 & 0 \\ 7,45 & -0,85 & 0 & 0 \end{array}

\begin{array}{ccc|c} -3,3 & 7,2 & 0,6 & 0 \\ 7,05 & -7,35 & 0,6 & 0 \\ 7,45 & -0,85 & 0 & 0 \end{array} \quad \leftarrow \textcircled{+}

\begin{array}{ccc|c} -3,3 & 7,2 & 0,6 & 0 \\ -4,35 & 2,55 & 0 & 0 \\ 7,45 & -0,85 & 0 & 0 \quad | \cdot 3 \end{array}

\begin{array}{ccc|c} -3,3 & 7,2 & 0,6 & 0 \\ -4,35 & 2,55 & 0 & 0 \\ 4,35 & -2,55 & 0 & 0 \end{array} \quad \leftarrow \textcircled{+}

\begin{array}{ccc|c} -3,3 & 7,2 & 0,6 & 0 \\ -4,35 & 2,55 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}

A = 7

-4,35 \cdot 7 + 2,55 \cdot B = 0
2,55 \cdot B = 4,35 \quad | : 2,55

B = \frac{25}{77} \approx 1,706

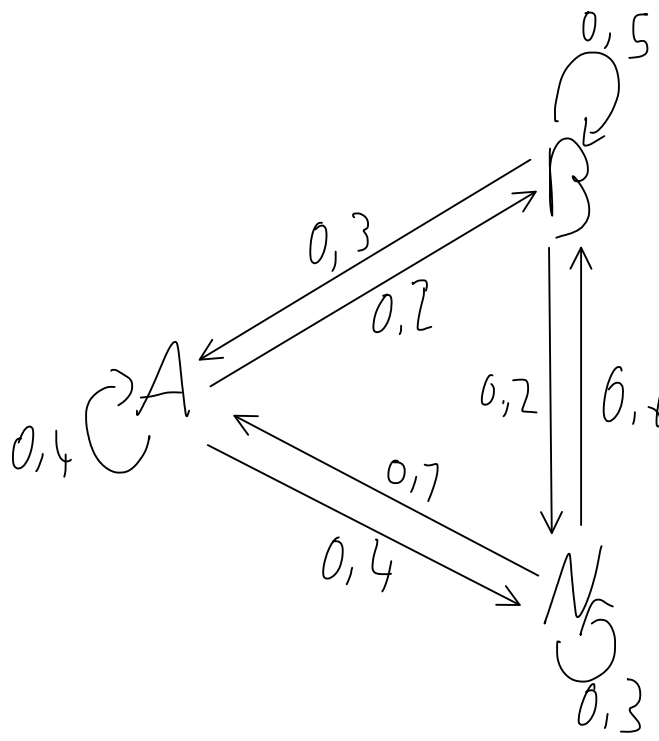
-3,3 \cdot 7 + 7,2 \cdot \frac{25}{77} + 0,6 \cdot C = 0
-7,2529 + 0,6C = 0
0,6C = 7,2529 \quad | : 0,6
C \approx 12,088

\vec{z}_f = \begin{pmatrix} 7 \\ 1,706 \\ 12,088 \end{pmatrix}

7A + 1,706B + 12,088C = \frac{100}{100}
4,794A = 100 \quad | : 4,794
A = 20,859 [%]
B = 35,585 [%]
N = 43,554 [%]

3. Der Übergangsgraph gibt das Übergangsverhalten der Menschen pro Monat an, die zwischen den Telefonanbietern A, B und N wechseln. Die Anfangsverteilung der Telefonanbieter ist unbekannt.

Berechnen Sie manuell die Anfangsverteilung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ so, dass sich die Verteilung nicht mehr verändert.



von \ nach	A	B	N
A	0,4	0,3	0,7
B	0,2	0,5	0,6
N	0,4	0,2	0,3

M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,7 \\ 0,2 & 0,5 & 0,6 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}

\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \\ -0,6 & 0,3 & 0,7 & 0 \cdot 7 \\ 0,2 & -0,5 & 0,6 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & -0,7 & 0 \end{array} \quad \leftarrow +

\begin{array}{ccc|c} -0,6 & 0,3 & 0,7 & 0 \cdot (-6) \\ 0,2 & -0,5 & 0,6 & 0 \\ -3,7 & 2,3 & 0 & 0 \end{array} \quad \leftarrow +

\begin{array}{ccc|c} -0,6 & 0,3 & 0,7 & 0 \\ -3,6 & -2,3 & 0 & 0 \\ -3,7 & 2,3 & 0 & 0 \end{array} \quad \leftarrow +

\begin{array}{ccc|c} -0,6 & 0,3 & 0,7 & 0 \\ -3,6 & -2,3 & 6 & 0 \\ -6,7 & 0 & 0 & 0 \end{array}

A = -6,7