

Analiza sistemov - dodatna naloga

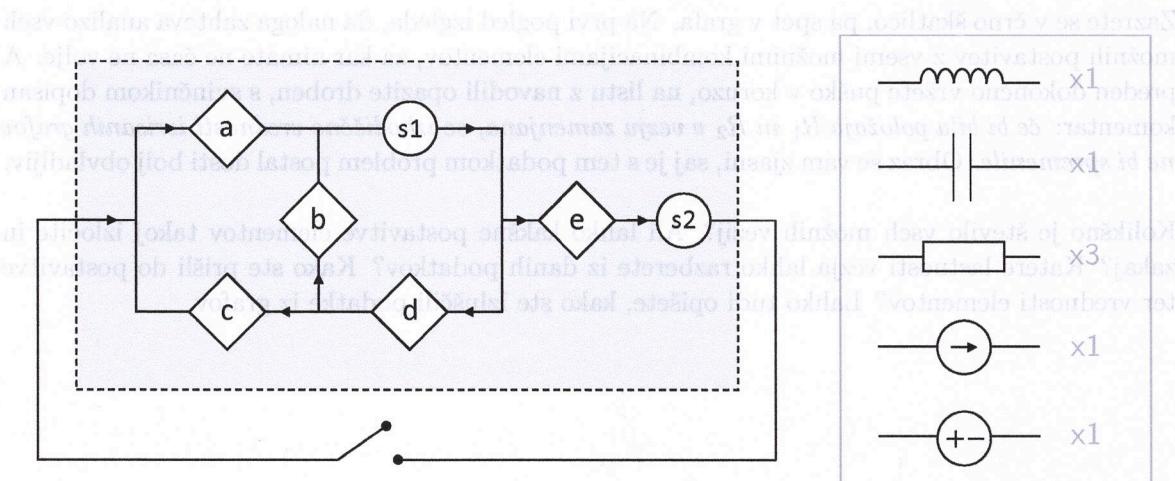
Po koncu vaj Analize sistemov ste že hoteli oditi iz predavalnice, ko ste opazili, da je na mizi ostala črna škatlica. Na njej je vgravirana nekakšna shema, iz nje pa izhaja žička s stikalom, ki ni sklenjeno. Iz radovednosti pritisnete na stikalo in iz reže na strani začne izhajati papir, na katerem se izrisuje dva grafa. Šele sedaj opazite list z navodili, ki je bil pod škatlico. Na njih piše:

Pred vami je črna škatlica z neznanim vezjem, ki vsebuje en kondenzator, eno tuljavo, tri upornike ter konstantna napetostni in tokovni vir. Topologija vam ni čisto neznanata, saj je delno skicirana na škatlici. Na mestih a, b, c in d se lahko nahajajo le kondenzator, tuljava ter dva upornika. Na mestih s1 in s2 se lahko nahajata le vira. Na mestu e se nahaja upornik R_3 . Smeri tokov, ki jih upoštevajte, so narisane s puščico. Notranje stikalo je bilo prižgano pred začetkom vaj (ni narisano na shemi), ko ni niti tekel tok skozi tuljavjo, niti ni bilo naboja na kondenzatorju. Vaša naloga je, da ugotovite, na katerih pozicijah se nahajajo elementi, njihove vrednosti ter ali je postavitev unikatna. Na voljo imate elemente s sledečimi vrednostmi:

element	L	C	R_1	R_2	R_3	i_g	v_g
vrednost*	0,5 ali 1,5	0,7 ali 1,3	2 ali 4	1,6 ali 2,4	1	3	5

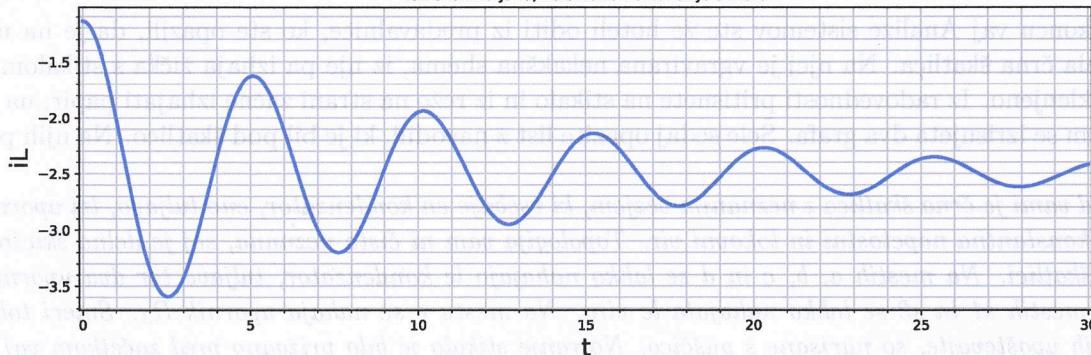
*vrednosti elementov niso realistične zaradi lažjega reševanja

Pobližje si ogledate shemo na škatlici, ki izgleda tako:

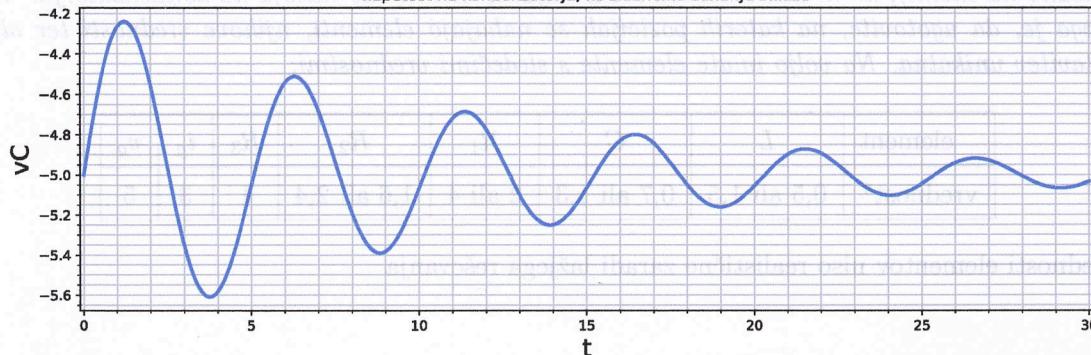


V vmesnem času je naprava do konca izrisala oba grafa. Vidite, da predstavlja časovno spremenjanje toka skozi tuljavjo in napetosti na kondenzatorju.

tok skozi tuljavo, ko sklenemo zunanje stikalo



napetost na kondenzatorju, ko sklenemo zunanje stikalo

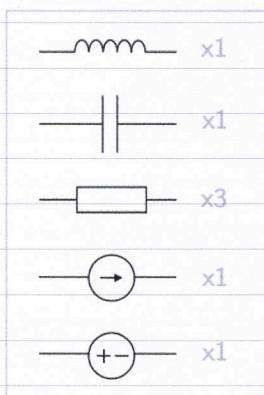
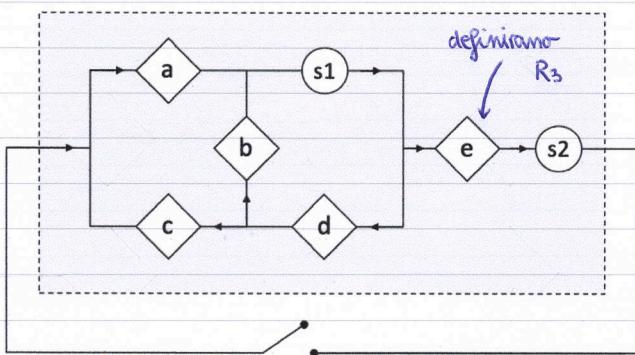


Zazrete se v črno škatlico, pa spet v grafa. Na prvi pogled izgleda, da naloga zahteva analizo vseh možnih postavitev z vsemi možnimi kombinacijami elementov, za kar nimate ne časa ne volje. A preden dokončno vržete puško v koruzo, na listu z navodili opazite droben, s svinčnikom dopisan komentar: *če bi bila položaja R_1 in R_2 v vezju zamenjana, se izhodiščne vrednosti izrisanih grafov ne bi spremenile*. Obraz se vam zjasni, saj je s tem podatkom problem postal dosti bolj obvladljiv.

Kolikšno je število vseh možnih vezij? Ali lahko kakšne postavitve elementov takoj izločite in zakaj? Katere lastnosti vezja lahko razberete iz danih podatkov? Kako ste prišli do postavitve ter vrednosti elementov? Lahko tudi opišete, kako ste izluščili podatke iz grafov.

DODATNA NALOGA - ANALIZA SISTEMOV

①

SHEMA NA ŠKATICI:

element	L	C	R_1	R_2	R_3	i_g	v_g
vrednost*	0,5 ali 1,5	0,7 ali 1,3	2 ali 4	1,6 ali 2,4	1	3	5

1.) Kolikšno je število vseh možnih vezij?I. Kombinacije pozicij elementov (TOPOLOGIJA)

- Mesta a,b,c,d: Imamo 4 mesta in 4 različne elemente (L, C, R_1, R_2). Število načinov, kako jih lahko razporedimo, je permutacija 4 elementov:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ kombinacij}$$

- Mesta s1,s2: Imamo 2 mesta in 2 vira (i_g, v_g). Število razporeditev je: $2! = 2 \cdot 1 = 2$ kombinaciji

SKUPNO ŠTEVILLO TOPOLOGIJ: $24 \cdot 2 = 48$ možnih postavitev.II. Kombinacije vrednosti elementov

↪ Vsak element ima po dve možni vrednosti, razen R_3 in obeh virov, ki so fiksni.

- L : 2 možnosti (0,5 ali 1,5)
 - C : 2 možnosti (0,7 ali 1,3)
 - R_1 : 2 možnosti (2 ali 4)
 - R_2 : 2 možnosti (1,6 ali 2,4)
- } SKUPNO ŠTEVILLO KOMBINACIJ VREDNOSTI: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ možnih mabolov vrednosti

III. Skupno število vseh možnih vezij

↪ da dobimo končno število vseh možnih različnih vezij, moramo pomnožiti število topologij z številom kombinacij vrednosti:

$$48(\text{topologij}) \cdot 16(\text{vrednosti}) = 768 \text{ možnih vezij}$$

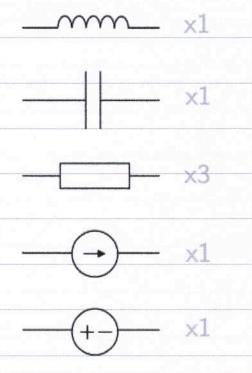
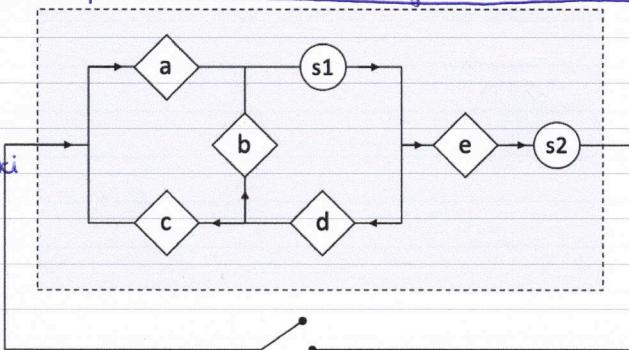
↪ Ročno preverjanje vseh 768 možnosti je praktično nemogoče. To je odlično izhodiščno vprašanje, saj nam pokazuje, zakaj je namig s uporabnikih R_1 in R_2 tako kritičen za reševanje. Brez njega bi bilo število kombinacij ogromno:

↪ Namig: "če bi bila položaja R_1 in R_2 v vezju zamjenjana, se izhodiščne vrednosti izrisanih grafov ne bi spremenile"

2.) Ali lahko kakršne postavitve elementov takoj izločite in razkaj?

(2)

↳ pri določanju topologije sem uporabil eliminacijski postopek (glede na specifične namighe v navodilih in fizikalnih/elektrotehničkih zakonih)



element	L	C	R_1	R_2	R_3	i_g	v_g
vrednost*	0,5 ali 1,5	0,7 ali 1,3	2 ali 4	1,6 ali 2,4	1	3	5

I.) Upora R_1 in R_2 (namig o zamenljivosti) → Namig: "Če bi bila položaja R_1 in R_2 v vezju zamenjana, se izhodišče vrednosti izrisanih grafov ($t=0$) ne bi spremenile."

- Stacionarno stanje evenergičnih vezij (DC analiza): Pred vklopom stikala je sistem v stacionarnem stanju, kar pomeni, da se tuljava obnaša kot "kratki stik" (prevodnik), kondenzator pa kot "odprte sponke" (prekinitev).

↳ Če želimo, da zamenjava upor ne vpliva na energijsko stanje (il in v_c) → začetnih tokov in napetosti, morata upora biti v vejah, ki sta električno simetrični glede na virje in "hraničnike energije" (tuljava in kondenzator).

↳ npr.: Če bi bil upor na mestu "b" (prečna veja) ali "d", bi zamenjava iz uporom v veji "a" popolnoma spremenila delilnik napetosti in s tem začetni naboj na kondenzatorju.

SKLEP ↓ ↳ Edini mesti, ki sta topološko simetrični glede na vhodno sponko/vzelj, sta "a" in "c". Zato sta tam upora R_1 in R_2 .

- Samo veje lahko interpretiramo tudi kot Wheatstone bridge, vendar moramo poziti, da tu ne želimo dosegiti stabilnega, stacionarnega stanja (uravnovežen mostič). Razlika med stacionarnim in dinamičnim mostičem.

II.) Tokovi (i_g) in napetostni vir (v_g) → vira se lahko malajata le na mestih "s1" in "s2"

- Asimptotična vrednost (stacionarno stanje pri $t \rightarrow \infty$):

↳ Utjemljitev za v_g na "s1": Na grafu napetosti vidimo, da se v_c po nizkanju ustoli okoli (skoraj точно) pri $-5V$. Ker je vrednost napetostnega vira v tabeli $5V$, je logično, da ta vir neposredno diktira napetostno stanje v mostiču. Mesto "s1" je v zgornji veji, ki v stacionarnem stanju (kar ne kondenzator napolnii in tuljava postane kratki stik) neposredno določa potencial na kondenzatorju.

↳ Utjemljitev za i_g na "s2": Mesto "s2" je v senji iz uporom R_3 in predstavlja glavni izhodni/vhodni tok celotnega mostička. Če bi bil tokovi vir na mestu "s1", bi to povzročilo, da bi bil tok skozi kondenzatorsko vejo v stacionarnem stanju nemogoč, kar pa bi povsem spremenilo način asimptote toka il pri $il(t \rightarrow \infty) = -2,5$.

SKLEP ↓ ↳ Sklep: "s1" je napetostni vir v_g , "s2" pa tokovni vir i_g

III) Kondenzator (c) in tuljava (L) → ker smo zasedli mesta "a", "c", "s1" in "s2", ostaneta za L in C le še mesti "b" in "d", kar bi lahko rešili tako s "brute-force" pristopom in pogledali za obe, ali pa pa ma podlagi predznakov in poznanih smeri tokov/polaritet določili lokacijo

• Kontinuiteta stanj in odvod

↪ V elektrotehniki veljata ključni pravili:

1.) NAPETOST NA KONDENZATORJU (U_C) se ne more spremeniti zankovito. Njen odvod (strmina) je sorazmerna

$$\text{z tokom: } i_C = C \cdot \frac{dU_C}{dt}$$

2.) TOK SKOZI TULJAVO (i_L) se ne more spremeniti zankovito. Njegov odvod je sorazmerni z napetostjo:

$$i_L = L \cdot \frac{dU}{dt}$$

↪ Utemeljitev za kondenzator na mestu "b": Graf napetosti ob času $t=0$ je $U_C = -5.0V$. Takoj po vključu stikala krivulja naravnča (postaja manj negativna, npr. proti $-4.2V$). Ker U_C naravnča, mora biti odvod $\frac{dU_C}{dt}$ pozitiven, kar pomeni, da v kondenzator teče pozitiven tok ($i_C > 0$). Mesto "b" je v mostični konfiguraciji "most", ki povezuje zgornji in spodnji del. Če bi bil kondenzator na mestu "d", bi bila njegova povezava z viri in tuljava drugačna, kar bi ob vključu povzročila padec napetosti (bolj negativen odziv), kar bi bilo v nasprotju z grafom $U_C(t)$.

↪ Utemeljitev za tuljavu na mestu "d": Graf tokov ob času $t=0$ je $i_L = -1.13A$. Takoj po vključu stikala krivulja pada (postaja bolj negativna, npr. proti $-3.5A$). Ker je postaja bolj negativnega (pada), je njegov odvod $\frac{dU}{dt}$ negativen. To pomeni, da je napetost na tuljavi U_L v trenutku vključa negativna glede dt na definirano smer puščice. Mesto "d" je v senji z spodnjim delom mostička in tuljava neposredno razvina spremembu v razoreditvi tokov po sklenitvi zunanjega stikala. Njen tok začne nihati okoli move, bolj negativne asymptote ($-2.5A$).

↪ Zakaj postavitev ni zanesljiva (ELIMINACIJA): Če bi tuljava in kondenzator zamenjali (tuljava na "b", kondenzator na "d"), bi se spremenila sklopitev med stanjem → spremenila bi se struktura matrike A.

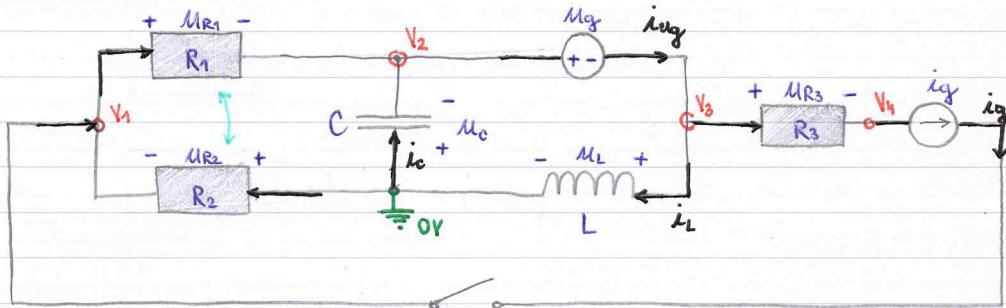
↪ Fazni zamik: Na grafih vidimo, da vrhovi napetosti U_C časovno zaostajajo za vrhovi tokov i_L . Pri zamenjanah pozicijah bi se ta fazni odnos obrnil ali pa bi sistem potencialno postal predušen (ne bi mihal), kar me ustreza izraznim grafiom.

POVZETEK:

- 1.) Izločili smo vse postavitev, kjer R_1 in R_2 mesta na "a" in "c", ker ne bi zadostčale namigu o simetriji izračunih pogojev.
- 2.) Izločili smo postavitev Mg na "s2", ker asymptota napetosti ne bi bila tako čisto vezana na vrednost $5V$.
- 3.) Izločili smo zamenjavo L in C na mestih "b" in "d", ker bi povzročila napacičen fazni odziv (napetost bi se odzvala "v proti fazzi" glede na meritve).

VEZJE JE ŠLEDEĆE:

(4.)



↳ Določitev matrike enačbe stanja

$$V_1: \frac{V_1 - V_2}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} - i_g = 0 \quad | \cdot R_1 R_2 \rightarrow V_1 \cdot R_2 - V_2 \cdot R_2 + V_1 \cdot R_1 - i_g \cdot R_1 R_2 = 0$$

$$V_1 (R_1 + R_2) = V_2 \cdot R_2 + i_g \cdot R_1 R_2$$

$$V_2: \frac{V_2 - V_1}{R_1} - i_C + i_{ug} = 0$$

$$V_1 = \frac{V_2 \cdot R_2 + i_g \cdot R_1 R_2}{R_1 + R_2} = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot i_C + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot i_g$$

$$V_3: -i_{ug} + i_L + \frac{V_3 - V_4}{R_3} = 0$$

$$i_C = i_{ug} + \frac{V_2 - V_1}{R_1} = i_L + i_g - \frac{1}{R_1} \cdot i_C + \frac{R_2}{R_1(R_1+R_2)} \cdot i_C - \frac{R_2}{(R_1+R_2)} \cdot i_g =$$

$$V_4: \frac{V_4 - V_3}{R_3} + i_g = 0$$

$$i_{ug} = i_L + i_g$$

$$= i_L + \frac{R_1 + R_2 - R_2}{(R_1 + R_2)} \cdot i_g + \frac{-R_1 - R_2 + R_2}{R_1(R_1+R_2)} \cdot i_C =$$

$$= i_L + \frac{R_1}{(R_1 + R_2)} \cdot i_g - \frac{R_1 \cdot i_C}{R_1(R_1+R_2)}$$

$$Mg: Mg = V_2 - V_3 \rightarrow V_3 = V_2 - Mg = -i_C - Mg \quad | \quad V_3 = -i_C - Mg$$

$$V_4 - V_3 + i_g \cdot R_3 = 0$$

$$V_4 = -i_C - Mg - i_g \cdot R_3$$

$$M_C: M_C = 0V - V_2 \rightarrow V_2 = -M_C$$

$$i_C: i_C = C \cdot \frac{dU_C}{dt} \rightarrow \frac{dU_C}{dt} = \frac{i_C}{C} = \frac{1}{C} \left(i_L + \frac{R_1}{(R_1+R_2)} \cdot i_g - \frac{1}{(R_1+R_2)} \cdot i_C \right) = \frac{1}{C} \cdot i_L + \frac{R_1}{C(R_1+R_2)} \cdot i_g - \frac{1}{C(R_1+R_2)} \cdot i_C$$

$$i_L: i_L = L \cdot \frac{dU_L}{dt} \rightarrow \frac{dU_L}{dt} = \frac{i_L}{L} = \frac{V_3}{L} = -\frac{1}{L} \cdot i_C - \frac{1}{L} \cdot Mg$$

$$M_L = V_3 - 0V = V_3$$

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ M_C(t) \end{bmatrix} \quad \vec{x}_0 = \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} i_L(0) \\ M_C(0) \end{bmatrix} \quad \vec{u}(t) = \vec{u} = \begin{bmatrix} i_g \\ Mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = A \cdot \vec{x}(t) + B \cdot \vec{u}$$

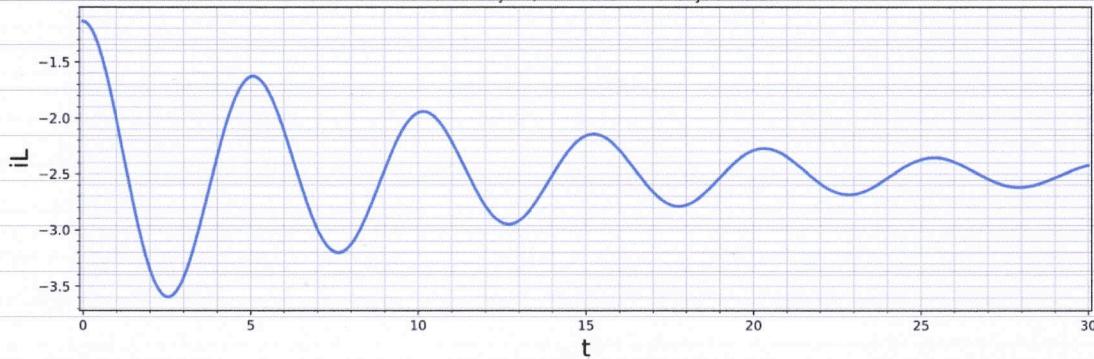
$$y(t) = C \cdot \vec{x}(t) + D \cdot \vec{u}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{dU_L}{dt} \\ \frac{dU_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_L & M_C \\ 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{C(R_1+R_2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ M_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_g & Mg \\ 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{R_1}{C(R_1+R_2)} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_g \\ Mg \end{bmatrix}$$

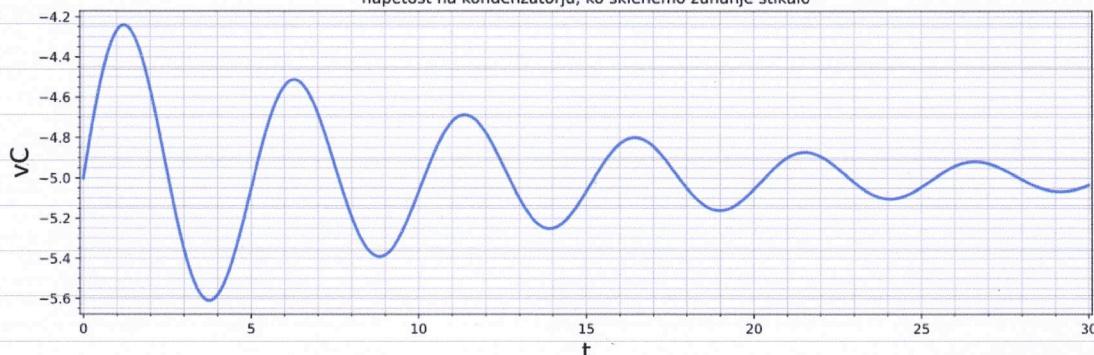
$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{C(R_1+R_2)} \end{bmatrix} \cdot \vec{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{R_1}{C(R_1+R_2)} & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{u}$$

↳ sedaj potrebova določiti vrednosti komponent, ter odčitati potrebne parametre z grafa (fot sov \vec{x}_0 , frekvencija, etc.)

tok skozi tuljavo, ko sklenemo zunanje stikalo



napetost na kondenzatorju, ko sklenemo zunane stikalo



3.) Katerje lastnosti vezja lahko razberete iz danih podatkov? Lahko tudi oprijete, kakor ste izluščili podatke iz grafov.

↪ bravje podatkov z grafov ključno za nastavitev simulacije in določitev parametrov. Iz dveh osilogramov lahko izluščimo praktično vse informacije o marnavi in vrednostih elementov v "čini skrinici".

I. Odčitovanje računih pogojev ($t=0$) → določajo energijsko stanje vezja v trenutku sklenitve stikala

↪ Tok skozi tuljavo $i_L(0)$: Na zgornjem grafu ob času $t=0$ vidimo, da krivulja me neka níže, temveč se začne med vrednostima -1.0 in -1.5 . Z matematičnim opazovanjem (vektorska slika \rightarrow zoom) smo ocenili vrednost na -1.13 A . To pomeni, da je skozi tuljavo že pred vklopom tekel tok v nasprotni smeri od označene pravice.

↪ Napetost na kondenzatorju $V_C(0)$: Na spodnjem grafu ob $t=0$ krivulja račne točno ma črti, ki označuje -5.0 V . To pomeni, da je bil kondenzator pred vklopom mabit na vrednost napetostičnega vira 10 V .

$$\vec{x}_0 = \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} i_L(0) \\ V_C(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.13 \\ -5.0 \end{bmatrix}$$

II. Narava odziva: PODKRITIČNO DUŠENJE → iz oblike grafov takoj razberemo, da gre za podkritično dušen

↪ To je fizikalni dokaz, da vezje

system (underdamped system)

vsebuje obe "eurojski" elementa (L in C),



ki ni izmenjujeta energijo, ter upore (R),

Vidimo harmonično osilacijo, katere amplituda \propto časom eksponentno

ki to energijo troši (povzročaj dušenje).

pada.

Če bi bil sistem kritično dušen ali predvražen, osilacije ne bi bilo, ampak bi se krivulji le asymptotično približali končni vrednosti.

III. Frekvenca osilacije in perioda (T) → frekvenca mikanja nam pomaga neposredno omejiti moker možnih vrednosti za L in C ⑥

Na grafu merimo/ocenimo čas med dvema zaporednima vrhom (perioda T). Na katerem koli grafu lahko vidimo prvi in drugi vrh ter čas med njima (npr. na grafu ω vidimo prvi vrh pri $t \approx 1.2\pi$ in drugi vrh pri $t \approx 6.2\pi$). Za bolj matematično vrednost lahko vzamemo več period in delimo z njihovim številom $\frac{25.4\pi}{5} = 5.08\pi$.

Perioda mikanja iznosi približno 5.08π . Ker je lastna frekvenca $\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$, nam ta podatek takoj pove, ali izbrati večje ali manjše vrednosti komponent iz tabele.

IV. Ocena asimptot ($t \rightarrow \infty$)

Asimptota predstavlja stacionarno stanje, v katero se vezje umiri po prehodnem pojavi.

Asimptota v_L : Napetost na kondenzatorju niha okoli vrednosti $-5.0V$. To je močan indikator, da napetostni vir $U_g = 5V$ v stacionarnem stanju diktira napetost v reji v kondenzatorju.

Asimptota i_L : Tok skozi tuljava se umirja proti vrednosti $-2.5A$. Ker imamo tokovni vir $3A$, ta odštek (razlika $0.5A$) kaže na to, kako se tok iz virja ig razporedi med veje mostička, ko tuljava postane "kratki stik".

I. Stabilnost sistema

Ker se mikanje izmanjavi in ne krivulje ustalijo pri končnih vrednostih, lahko potrdimo, da je sistem asimptotično stabilen. To pomeni, da so vse lastne vrednosti sistemske matrice A v levi polavnini kompleksne ravnine (imajo negativen realni del), kar je ključna lastnost pasivnih RLC vezij.

4.) Kako ste prišli do postavitev ter vrednosti elementov?

element	L	C	R_1	R_2	R_3	i_g	v_g
vrednost*	0,5 ali 1,5	0,7 ali 1,3	2 ali 4	1,6 ali 2,4	1	3	5

iz zgornjega sklopa iz maborom dovoljenih vrednosti iz tabele

I. Določanje L in C preko lastne frekvence (ω_0) → za sistem drugega reda, kot je naše RLC vezje, frekvenca mikanja (ω) primarno zavisi od zmožka L in C .

V prejšnjem koraku smo ocenili perioda iz grafa ($T \approx 5.08\pi$). Sedaj lahko določimo iskano krožno frekvenco. Iz periode izračunamo krožno frekvenco po enačbi $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\omega = \frac{2\pi}{5.08\pi} = 1.237 \text{ rad/s}$

Theoretična povezava: Ker vemo, da je $\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$, smo preverili kombinacije iz tabele:

če izberemo: $L = 0,5H$ in $C = 0,7F$, je $\omega_0 \approx 1,690 \text{ rad/s}$ (prehitno)

če izberemo: $L = 0,5H$ in $C = 1,3F$, je $\omega_0 \approx 1,240 \text{ rad/s}$ IDEALNO!

če izberemo: $L = 1,5H$ in $C = 0,7F$, je $\omega_0 \approx 0,976 \text{ rad/s}$ (prepočasi)

če izberemo: $L = 1,5H$ in $C = 1,3F$, je $\omega_0 \approx 0,716 \text{ rad/s}$ (prepočasi)

SKLEP
Ta kombinacija ne skoraj idealno ujemata iz izmerjenih ocenjeno perioda na grafu, zato morati dve vrednosti določili posameznima komponentama (tuljava $L=0,5H$, kondenzator $C=1,3F$) → nato tudi vnesli v model

določili posameznima komponentama (tuljava $L=0,5H$, kondenzator $C=1,3F$) → nato tudi vnesli v model

- ① Določitev uporov R_1 in R_2 preko dajevega \rightarrow upornost v vezju določa, kako hitro bo mihanje zamrlo
- ↪ vpliv na ovjnice: Večja skupna upornost pomeni hitrejše dajevo. Iz grafa vidimo, da po 30 sekundah mihanje še vedno ni povsem izginilo.
- ↪ Razmerje med R_1 in R_2 vpliva na končno asimptoto toka iz. Z uporabo Kirchhoffovih zakonov za stacionarno stanje ($t \rightarrow \infty$) smo ugotovili, da vrednost asimptote $-2.5A$ zahteva specifično razmerje uporov.
- ↪ Zadevo je bilo močnejše kar posimulirati za možne kombinacije. Preiskusili smo vrednosti $R_1 \in \{2, 4\} \Omega$ in $R_2 \in \{1.6, 2.4\} \Omega$. Najboljše ujemanje amplituda in dajeva smo dosegli \approx vrednostma $R_1 = 2.0 \Omega$ in $R_2 = 2.4 \Omega$.

5.) Zaključek analitičnega dela in simulacija \rightarrow zaključili teoretično identifikacijo

- ↪ Topologija: Določili pozicijo vsakega elementa v mostičnem vezju z L in C v ključnih vejah, določeno s simetrijo in računarskimi numeričnimi gibanji.
- ↪ Parametri: Vrednosti, ki so bile izbrane tako, da matematično zadostujejo izmerjeni periodi mihanja in končnim vrednostim (asimptotam).

Zadnjo potrditev pravilnosti teh sklepov izvedemo \approx v morom vseh parametrov v Python simulacijo. Če se izrisani grafi simulacije prekrivajo (znotrahi \approx originalnimi), smo uspešno rešili problem "črne skrinice".

