习题-VI (高等线性代数 (1), 2025.10.29)

6.1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}$, (2) $\begin{vmatrix} a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & (a-3)^2 \\ b^2 & (b-1)^2 & (b-2)^2 & (b-3)^2 \\ c^2 & (c-1)^2 & (c-2)^2 & (c-3)^2 \\ d^2 & (d-1)^2 & (d-2)^2 & (d-3)^2 \end{vmatrix}$,

(3) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$, (4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -n+1 & 0 \end{vmatrix}$.

6.2. 设

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

是一个分块上三角方阵, 其中 $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{ss}$ 分别是 $n_1, n_2, \ldots, n_s$ 阶方阵. 证明:

$$|A| = |A_{11}||A_{22}|\cdots|A_{ss}|.$$

6.3. 设 A 是一个 n 阶可逆矩阵. 证明: 只用第三类初等变换可将 A 化为对角矩阵

$$\mathrm{diag}\{1, \ldots, 1, |A|\}.$$

6.4. 设 $A = (a_{ij})$ 是一个 n 阶实方阵. 证明:

(1) 若

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} |a_{ij}|, \ \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n,$$

则 $|A| \neq 0$.

(2) 若

$$a_{ii} > \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} |a_{ij}|, \ \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n,$$

则 $|A| > 0$.

6.5. 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵. 证明: $r = \mathrm{rank}(A)$ 当且仅当 A 有一个非零的 r 阶子式并且所有的 $r+1$ 阶子式 (如果有的话) 全为零.

6.6. 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 n 阶的可逆矩阵且 $1 \leq r < n$. 证明:

$$\eta_j = (A_{j1}, A_{j2}, \ldots, A_{jn})^T,\ j = r+1, \ldots, n$$

是齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系, 其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式.