Naloga 4. *Opisi krožnice z Bézierjevimi krivuljami.*

Ker s polinomskimi krivuljami ne moremo eksaktno opisati krožnice, je treba v sistemih, ki omogočajo le delo s polinomskimi krivuljami, poseči po aproksimaciji. Z Bézierjevo krivuljo nizke stopnje ni moč dobiti kvalitetne aproksimacije celotne krožnice, zato jo aproksimiramo po delih. Če pripravimo Bézierjevo krivuljo $\boldsymbol{b} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ nizke stopnje, ki dobro opisuje krožni lok za kote v območju $(-\varphi, \varphi)$ za nek $\varphi > 0$ ter v robovih interpolira krožnico, lahko celotno krožnico aproksimiramo tako, da zlepimo več Bézierjevih krivulj, ki jih dobimo z rotacijami $\boldsymbol{b}$.

Naj bodo $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ kontrolne točke Bézierjeve krivulje $\boldsymbol{b}$ nizke stopnje n ($n = 2$ ali $n = 3$). Iz interpolacije točk v robovih krožnega loka sledi

$$\boldsymbol{b}_0 = (\cos(\varphi), -\sin(\varphi)), \qquad \boldsymbol{b}_n = (\cos(\varphi), \sin(\varphi)).$$

Nadalje, smeri tangent krivulje $\boldsymbol{b}$ se v robovih ujema s smerema tangent krožnice, če za neki pozitivni realni števili d_1 in d_2 velja $\dot{\boldsymbol{b}}(0) = d_1(\sin(\varphi), \cos(\varphi))$ in $\dot{\boldsymbol{b}}(1) = d_2(-\sin(\varphi), \cos(\varphi))$, od kjer po formuli za odvod Bézierjeve krivulje sledi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_0 + \tfrac{1}{n}\dot{\boldsymbol{b}}(0) &= \Big(\cos(\varphi) + \tfrac{1}{n} d_1 \sin(\varphi), -\sin(\varphi) + \tfrac{1}{n} d_1 \cos(\varphi)\Big), \\ \boldsymbol{b}_{n-1} = \boldsymbol{b}_n - \tfrac{1}{n}\dot{\boldsymbol{b}}(1) &= \Big(\cos(\varphi) + \tfrac{1}{n} d_2 \sin(\varphi), \sin(\varphi) - \tfrac{1}{n} d_2 \cos(\varphi)\Big). \end{aligned}$$

1. Določimo Bézierjevo krivuljo stopnje $n = 2$, ki v robovih interpolira krožnico ter smer njenih tangent. Ker ima taka Bézierjeva krivulja samo tri kontrolne točke, iz zgornjih ugotovitev sledi, da sta $\boldsymbol{b}_0$ in $\boldsymbol{b}_2$ že določeni, za $\boldsymbol{b}_1$ pa dobimo pogoja

   $$\begin{aligned} \cos(\varphi) + \tfrac{1}{2} d_1 \sin(\varphi) &= \cos(\varphi) + \tfrac{1}{2} d_2 \sin(\varphi), \\ -\sin(\varphi) + \tfrac{1}{2} d_1 \cos(\varphi) &= \sin(\varphi) - \tfrac{1}{2} d_2 \cos(\varphi). \end{aligned}$$

   Iz prve enačbe sledi $d_1 = d_2$, iz druge pa še $d_1 = d_2 = 2\tan(\varphi)$. To pomeni, da je $\boldsymbol{b}_1 = (1/\cos(\varphi), 0)$.

2. Določimo Bézierjevo krivuljo stopnje $n = 3$, ki v robovih interpolira krožnico ter njena odvoda. To pomeni, da mora biti $d_1 = d_2 = 1$. S tem so po zgornjih formulah določene vse štiri kontrolne točke ($\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$) Bézierjeve krivulje.

3. Določimo Bézierjevo krivuljo stopnje $n = 3$, ki v robovih interpolira krožnico ter smer njenih tangent, poleg tega pa zanjo velja še $\boldsymbol{b}(1/2) = (1, 0)$. Ta dodaten pogoj implicira

   $$\tfrac{1}{8}\boldsymbol{b}_0 + \tfrac{3}{8}\boldsymbol{b}_1 + \tfrac{3}{8}\boldsymbol{b}_2 + \tfrac{1}{3}\boldsymbol{b}_3 = (1, 0).$$

   V drugi komponenti zgornje enačbe dobimo

   $$-\tfrac{1}{8}\sin(\varphi) + \tfrac{3}{8}\Big(-\sin(\varphi) + \tfrac{1}{3} d_1 \cos(\varphi)\Big) + \tfrac{3}{8}\Big(\sin(\varphi) - \tfrac{1}{3} d_2 \cos(\varphi)\Big) + \tfrac{1}{8}\sin(\varphi) = 0,$$

   od koder je razvidno, da mora biti $d = d_1 = d_2$. Iz prve komponente enačbe, ki jo zapišemo v obliki

   $$\tfrac{1}{8}\cos(\varphi) + \tfrac{3}{8}\Big(\cos(\varphi) + \tfrac{1}{3} d_1 \sin(\varphi)\Big) + \tfrac{3}{8}\Big(\cos(\varphi) + \tfrac{1}{3} d_2 \sin(\varphi)\Big) + \tfrac{1}{8}\cos(\varphi) = 1,$$

✉ jan.groselj@fmf.uni-lj.si

potem sledi

$$\cos(\varphi) + \tfrac{1}{4} d \sin(\varphi) = 1,$$

kar pomeni, da je $d = 4(1/\sin(\varphi) - \cot(\varphi))$. Z nekaj dodatnega računanja izpeljemo, da sta kontrolni točki $\boldsymbol{b}_1$ in $\boldsymbol{b}_2$ dani z

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_1 &= \frac{1}{3}\left(4 - \cos(\varphi), 4\cot(\varphi) - \frac{4}{\sin(\varphi)} + \sin(\varphi)\right),\\ \boldsymbol{b}_2 &= \frac{1}{3}\left(4 - \cos(\varphi), -4\cot(\varphi) + \frac{4}{\sin(\varphi)} - \sin(\varphi)\right).\end{aligned}$$

V Matlabu narišite aproksimacije krožnic iz (1), (2) in (3) pri izbiri $\varphi = \pi/6$. Primerjajte napake $\max_{t\in \boldsymbol{t}} |1 - \|\boldsymbol{b}(t)\||$ za $\boldsymbol{t} = (i/1000)_{i=0}^{1000}$. Rezultati so prikazani na spodnji sliki. Rdeča krivulja je aproksimacija iz točke (1), napaka je $1.0363\cdot 10^{-2}$. Zelena krivulja je aproksimacija iz točke (2), napaka je $8.9746 \cdot 10^{-3}$. Modra krivulja je aproksimacija iz točke (3), napaka je $2.3864 \cdot 10^{-5}$, zato aproksimacija na sliki prekriva dejansko krožnico.