

## Upogib tanke opne na krožni zanki

Ogledali si bomo primer tanke opne, napete na krožno zanko, ki se povesi pod vplivom zunanje sile.

V ravnini  $xy$  leži krožna zanka s središčem v točki  $(0,0)$  in polmerom  $R$ . Naj  $\mathcal{D}$  označuje notranjost kroga. Iščemo funkcijo  $u: \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  dveh spremenljivk, za katero je  $u(x,y)$  upogib opne v točki  $(x,y) \in \mathcal{D}$ . Funkcija  $u$  je rešitev *Poissonove enačbe*

$$\begin{aligned}\Delta u(x,y) &= f(x,y), & (x,y) \in \mathcal{D}, \\ u(x,y) &= 0, & (x,y) \in \partial\mathcal{D},\end{aligned}$$

kjer je

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Laplaceov operator in  $f$  zunanja sila na opno. Poseben primer, ko je  $f = 0$ , imenujemo *Laplaceova enačba*.

Glede na geometrijo problema uvedemo polarne koordinate

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi,\end{aligned}$$

kjer je  $r \in [0, R]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Laplaceov operator se v polarnih koordinatah prepiše v

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Zaradi krožne simetrije lahko predpostavimo, da sta funkciji  $u$  in  $f$  neodvisni od kota  $\varphi$ . Pri tem se zgornja parcialna diferencialna enačba pretvori v navadno diferencialno enačbo oblike

$$u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) = f(r), \quad r \in [0, R]. \quad (1)$$

Pri tem funkcija  $u$  zadošča robnima pogojevma  $u'(0) = 0$  in  $u(R) = 0$ .

### *Numerično reševanje robnega problema*

Za reševanje bomo uporabili *diferenčno metodo*, pri kateri odvode nadomestimo s končnimi diferencami. Interval  $[a, b] = [0, R]$  ekvidistantno razdelimo na  $n$  delov in dobimo točke

$$r_i = r_0 + ih = ih, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

kjer je korak  $h = \frac{b-a}{n} = \frac{R}{n}$ . Z diferenčno metodo iščemo približke  $u_i$  za točne vrednosti  $u(r_i)$  v delilnih točkah intervala,

$$u_i \approx u(r_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Zaradi robnih pogojev velja  $u_n = u(R) = 0$ . Približke določimo tako, da odvode v diferencialni enačbi nadomestimo s simetričnimi diferencami

$$u''(r_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2},$$

$$u'(r_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}.$$

Ko zgornje aproksimacije uporabimo v enačbi (1) in pišemo  $f(r_i) = f_i$ , dobimo

$$\left(1 - \frac{h}{2r_i}\right) u_{i-1} - 2u_i + \left(1 + \frac{h}{2r_i}\right) u_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Pri  $i = n-1$  upoštevamo pogoj  $u_n = 0$  in dobimo

$$\left(1 - \frac{h}{2r_{n-1}}\right) u_{n-2} - 2u_{n-1} = h^2 f_{n-1}.$$

Pri  $i = 0$  pa zaradi pogoja  $u'(0) = 0$  velja  $u_{-1} = u_1$  in zato sledi

$$-2u_0 + 2u_1 = h^2 f_0.$$

To vodi do sledečega sistema linearnih enačb

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & & & \\ 1 - \frac{1}{2 \cdot 1} & -2 & 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 - \frac{1}{2 \cdot (n-2)} & -2 & 1 + \frac{1}{2 \cdot (n-2)} \\ & & & 1 - \frac{1}{2 \cdot (n-1)} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{bmatrix}$$

za neznane količine  $u_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Matrika sistema je tridiagonalne oblike

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_1 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-2} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix}.$$

Za predstavitev potrebujemo le vektorje  $a$ ,  $b$  in  $c$  za diagonalne in obdiagonalne elemente. Gaussova eliminacija sisteme linearnih enačb s tridiagonalno matriko reši v linearnem času  $\mathcal{O}(n)$ .

### Naloge

1. Sestavite funkcijo `resi3.m` za reševanje tridiagonalnega sistema linearnih enačb  $Ax = f$  velikosti  $n \times n$ , podanega z vektorji  $a$ ,  $b$ ,  $c$  in desno stranjo  $f$ .
2. Izračunajte obliko tanke opne napete na krožno zanko, ki se povesi pod vplivom zunanje sile. Predpostavite naslednje
  - Sila je konstantna  $f(r) = 1$ .
  - Sila se spreminja sorazmerno z  $1 - r^2$ .
  - Sila se spreminja sorazmerno s  $\sin(2\pi r)$ .
3. 🕒 Z ukazom `tic/toc` izmerite skupno časovno zahtevnost konstrukcije matrik, vektorja in reševanja linearnega sistema za dovolj velik  $n$ . Primerjate časovno zahtevnost z običajnim pristopom s polnimi matrikami in ukazom `A\f`, ter z razpršenimi matrikami.

Razpršeno matriko sestavite npr. z ukazom `spdiags([diag1, diag2, ..., diagk], [indeks1, indeks2, ..., indeksk], n, n);`, kjer z `diagi` podamo vektorje na diagonalah, z `indeksi` pa določimo njene lokacije. Velikost matrike določimo z zadnjima dvema argumentoma.