

Vaje 22.3.2022: Numerično odvajanje in integriranje

1. Diferenčne formule

- Funkcija f je podana s predpisom $f(x) = 1/(x+1)$. Izračunajte premo in obratno diferenco ter simetrični diferenci za funkcijo f v točki $x_0 = 1/2$ za poljuben $h \in (0, 1)$ ter rezultate primerjajte z vrednostima $f'(x_0)$ in $f''(x_0)$ v limiti, ko gre h proti 0.
- V *Matlabu* implementirajte izračun diferenc za poljubno funkcijo. Program naj sprejme funkcijo, metodo, stopnjo odvoda, h in x_0 .

Rešitev: nalogi 3.1 in 3.3 v Gradivo s predavanj in vaj.

2. Metoda nedoločenih koeficientov

Radi bi izpeljali formulo za odvod dane funkcije f v točki x_0 oblike

$$F(x_0) = Af(x_0 - 2h) + Bf(x_0 - h) + Cf(x_0) + Df(x_0 + h) + Ef(x_0 + 2h),$$

kjer je $h > 0$ izbran korak.

- Določite konstante A, B, C, D in E tako, da bo formula točna za vse polinome stopnje manjše ali enake 4. Pomagajte si s sistemom enačb, ki ga dobite, če za funkcijo f vzamete funkcije

$$x \mapsto (x - x_0)^i, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

- Predpostavite, da je funkcija f dovoljkrat zvezno odvedljiva in poiščite izražavo ostanka $f'(x_0) - F(x_0)$ v obliki $Kf^{(r)}(\xi)$, kjer je K konstanta, ξ število z intervala $(x_0 - 2h, x_0 + 2h)$ in r najmanjše naravno število, za katero velja, da je formula točna za vse polinome stopnje manjše ali enake $r - 1$.

Rešitev: naloga 3.2 v Gradivo s predavanj in vaj.

3. Dan je integral

$$\int_0^{\pi/4} \sin(x) dx.$$

Numerično izračunajte vrednost integrala z uporabo trapeznega in Simpsonovega pravila ter primerjajte rezultata s točno vrednostjo.

Rešitev: naloga 3.4 v Gradivo s predavanj in vaj.

4. *Milneovo pravilo*

Milneovo pravilo je integracijsko pravilo odprtega tipa, določeno na treh točkah.

- a) S pomočjo metode nedoločenih koeficientov določite Milneovo pravilo, tako da bo točno za vse polinome stopnje manjše ali enake 2.
- b) Ali je izpeljano pravilo točno tudi za kubične polinome?

Rešitev: naloga 3.6 v Gradivo s predavanj in vaj.