Rozvrhovanie a logistika

OBSAH PREDNÁŠKY

- Lineárne programovanie (LP)
  - stručné opakovanie
- Celočíselné programovanie (CP)
  - Bivalentné programovanie (špeciálny prípad CP)
  - Metóda vetvenia a medzí
- Riešenie úlohy celočíselného programovania metódou vetvenia a medzí

https://jan.paralic.website.tuke.sk/ral.html

Lineárne programovanie

- Je to riešenie optimalizačnej úlohy, tzv. problému lineárneho programovania. Pritom je potrebné:

1. **nájsť takú *n*-ticu reálnych čísel** $x^T, \; \bar{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
2. pre ktorú nadobúda **kriteriálna funkcia**

   $$f(\bar{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

   minimum alebo maximum a ktorá

3. spĺňa **obmedzujúce podmienky**

   $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \; (i = 1, \ldots, m)$$

   - prípadne aj podmienky nezápornosti

   $$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Metódy riešenia úloh lineárneho programovania

- **Graficky pre prípad že máme len 2 premenné**
  1. Zakresliť ohraničenia a identifikovať MPR
  2. Preskúmať vrcholy MPR, nájsť medzi nimi optimálne riešenie
- **Simplexový algoritmus** založený na efektívnom prieskume krajných bodov MPR. Postupuje iteratívne takto:
  1. Vyjdeme z ľubovoľného krajného bodu (vrcholu).
  2. Prejdeme k takému krajnému bodu MPR, ktorého hodnota kriteriálnej funkcie je lepšia (ak taký existuje) a pokračujeme krokom 2 v novom krajnom bode.
     – Ak takýto bod neexistuje, potom aktuálne najlepšie nájdené bázické riešenie je optimálne.

Celočíselné programovanie

- Je to riešenie optimalizačnej úlohy, tzv. problému celočíselného programovania. Pritom je potrebné:

1. **nájsť takú *n*-ticu celých čísel** $x^T, \overline{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
2. pre ktorú nadobúda **kriteriálna funkcia**

   $$f(\overline{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

   minimum alebo maximum a ktorá
3. spĺňa **obmedzujúce podmienky**

   $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

- prípadne aj podmienky nezápornosti

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

Bivalentné programovanie

- Je to špeciálny prípad celočíselného programovania. Premenné sú **dvojhodnotové (bivalentné)**,

1. je potrebné nájsť takú *n*-ticu čísel 0 alebo 1

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i \in \{0,1\}, \forall i = 1..n$$

2. pre ktorú nadobúda **kriteriálna funkcia**

$$f(\overline{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

minimum alebo maximum,

3. a ktorá spĺňa **obmedzujúce podmienky**

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \quad (i = 1..m)$$

Metódy riešenia úloh celočíselného programovania

1. **Úplné** (napr. *metóda vetvenia a medzí* alebo *metóda sečných nadrovín*) – zaručujú nájdenie optimálneho riešenia, ale v nepolynomiálnom čase v závislosti od veľkosti úlohy (tj. od počtu premenných ***n***)
2. **Približné** (napr. *simulované žíhanie*, *genetické algoritmy*) – tieto metódy nikdy nezaručia nájdenie optimálneho riešenia, ale v rozumnom čase poskytnú celkom dobré („suboptimálne“) riešenie

Metóda vetvenia a medzí – základné princípy

- **Princíp vetvenia** – množina prípustných riešení (MPR) sa rozkladá na radu disjunktných podmnožín
- **Princíp odhadu medzí** – ide o odhady hodnoty kriteriálnej funkcie na MPR, resp. na niektorej jej podmnožine (tzv. horná medza a dolná medza)

Metóda vetvenia a medzí – algoritmus pre prípad maximalizácie (1)

1. **Inicializácia** – Množina prípustných riešení (MPR) ako jediný kandidát vetvenia (koreňový uzol priestoru prehľadávania): stanovíme dolnú medzu kriteriálnej funkcie $f_S = -\infty$ (pre prípad maximalizácie) a odhadneme hornú medzu kriteriálnej funkcie f_H pre celú MPR
2. **Vetvenie** – podľa vybraného pravidla vetvenia (napr. najvyššia hodnota f_H), vyberieme najsľubnejšieho kandidáta vetvenia a rozložíme ho na jednu alebo viac podmnožín prípustných riešení (rozvetvíme zodpovedajúci uzol priestoru prehľadávania)
   – Ak je súbor kandidátov prázdny, tak algoritmus končí. Pritom riešenie zodpovedajúce hodnote f_S je optimálne. Ak je ešte stále $f_S = -\infty$, potom riešenie neexistuje (MPR je prázdna)

Metóda vetvenia a medzí – algoritmus pre prípad maximalizácie (2)

3. **Stanovenie hornej medze f_H** – pre každdú novú podmnožinu stanovíme hornú medzu kriteriálnej funkcie na tejto podmnožine
4. **Orezávanie** – z ďalšieho skúmania vylúčime tie podmnožiny, pre ktoré $f_H < f_S$ alebo ktoré sú prázdne
5. **Stanovenie spodnej medze f_S** – určíme najlepšie prípustné riešenie pre každdú novú podmnožinu
   – Ak $f(\bar{x}) \geq f_S$ => upravíme aktuálnu dolnú medzu $f_S = f(\bar{x})$ a $\underline{x}$ je najlepšie doteraz nájdené riešenie. **Opätovne sa vykoná orezávanie tak ako v kroku 4**
6. Pokračuj opäť krokom 2.

Príklad – Výber zákaziek

V skúmanom období môže podnik prevziať 6 rôznych zákaziek, ktoré sa líšia spotrebou času a materiálu. Kapacity výrobného zariadenia a zásoby materiálu sú obmedzené. Úlohou je rozhodnúť, ktoré zákazky má podnik prijať.

zákazka	1	2	3	4	5	6	kapacita
zisk	11	63	9	5	4	8	–
čas	1	7	1	1	1	5	15
materiál	15	70	10	5	3	2	100

Príklad – zostavenie matematického modelu

1. **Identifikácia premenných:**

   Nech x_i ($i = 1 .. 6$) je 1 v prípade prijatia i-tej zákazky a 0 v prípade jej odmietnutia, t.j. $x_i \in \{0, 1\}$, $\forall i = 1 .. 6$

2. **Formulácia kriteriálnej funkcie:**

   $11x_1 + 63x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 8x_6$ má byť maximálne

3. **Formulácia ohraničení:**

   $x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 5x_6 \leq 15$

   $15x_1 + 70x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 3x_5 + 2x_6 \leq 100$

1. **Inicializácia** – Množina prípustných riešení (MPR) ako jediný kandidát vetvenia (koreňový uzol priestoru prehľadávania): stanovíme dolnú medzu kriteriálnej funkcie $f_S = -\infty$ a odhadneme hornú medzu kriteriálnej funkcie f_H pre celú MPR
2. **Vetvenie** – podľa vybraného pravidla vetvenia (napr. najvyššia hodnota f_H), vyberieme najsľubnejšieho kandidáta vetvenia a rozložíme ho na jednu alebo viac podmnožín prípustných riešení (rozvetvíme zodpovedajúci uzol priestoru prehľadávania)
   - Ak je súbor kandidátov prázdny, tak algoritmus končí. Pritom riešenie zodpovedajúce hodnote f_S je optimálne. Ak je ešte stále $f_S = -\infty$, potom riešenie neexistuje (MPR je prázdna)
3. **Stanovenie hornej medze f_H** – pre každú novú podmnožinu stanovíme hornú medzu kriteriálnej funkcie na tejto podmnožine
4. **Orezávanie** – z ďalšieho skúmania vylúčime tie podmnožiny, pre ktoré $f_H < f_S$ alebo ktoré sú prázdne
5. **Stanovenie spodnej medze f_S** – určíme najlepšie prípustné riešenie **pre každú novú podmnožinu**
   - Ak $f\left(\bar{x}\right) \geq f_S$ => upravíme aktuálnu dolnú medzu $f_S = f\left(\bar{x}\right)$ a $\bar{x}$ je najlepšie doteraz nájdené riešenie. **Opätovne sa vykoná orezávanie tak ako v kroku 4**.
6. **Pokračuj** opäť **krokom 2**.

Riešenie úlohy celočíselného programovania metódou vetvenia a medzí

1. **Inicializácia**

$x_i \in \{0, 1\}, \ \forall i = 1 \,..\, 6$

(0) $11x_1 + 63x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 8x_6 \to \text{MAX}$

$x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 5x_6 \leq 15$

$15x_1 + 70x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 3x_5 + 2x_6 \leq 100$

2. **Vetvenie** (testovanie ukončenia)
3. **Stanovenie hornej medze**
4. **Orezávanie**
5. **Stanovenie dolnej medze**
6. **Ďalšia iterácia, pokračuj krokom 2.**

Úloha z 2. prednášky

1. Sformulujte slovné zadanie úlohy, ktorá sa dá riešiť pomocou modelu bivalentného alebo celočíselného programovania s aspoň štyrmi premennými.
2. Zostavte matematický model danej úlohy.

Nepovinné: Vyriešte úlohu použitím metódy vetvenia a medzí.

Pozor, musí to byť iná úloha než tá, ktorá bola na prednáške alebo cvičení.