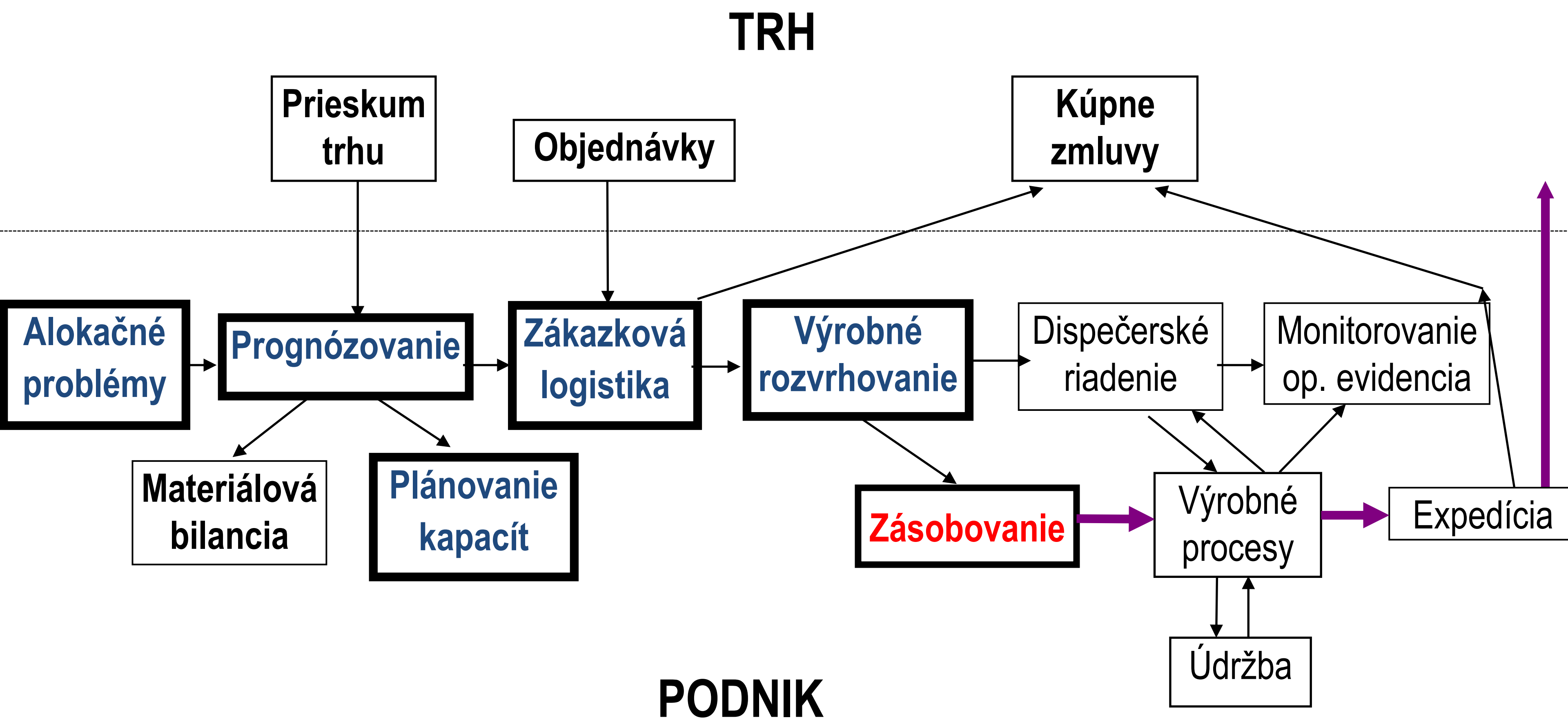
Zásobovanie

OBSAH PREDNÁŠKY

- Základné pojmy
- Klasifikácia modelov zásobovania
- Stratégie riadenia zásob
- Vybrané modely zásobovania:
  1. M1 – statický, stochastický, s diskrétnym dopytom
  2. M2 – statický, stochastický, so spojitým dopytom
  3. M3 – dynamický, deterministický, so spojitým dopytom
  4. M4 – ako M3, ale zásoby dopĺňané vlastnou výrobou
  5. M5 – ako M3, ale s prípustným nedostatkom pohotovej zásoby
- Termíny skúšok z RaL (zamerať sa na špecifické ciele)

Štruktúra činností výrobnej logistiky



Zásobovanie – základné pojmy (1)

- **Cieľom zásobovania** je zaistiť optimálne veľkosti **zásob** a spôsob optimálneho riadenia ich úrovne (pohybu).
  - Optimalizačným kritériom je minimalizácia celkových nákladov.
- **Zásoba** je ľubovoľný pohotový ekonomický zdroj, ktorý nie je v danom časovom intervale plne využívaný, avšak jeho výška je stanovená tak, aby z ekonomického hľadiska umožňoval čo najvýhodnejšie krytie budúceho dopytu.

Zásobovanie – základné pojmy (2)

- **DOPYT** môže byť:
  1. **Deterministický** (vopred známy)
  2. **Stochastický**
     a) so známym zákonom rozdelenia pravdepodobnosti
     b) s neznámym zákonom rozdelenia pravdepodobnosti
- **NÁKLADY** rozdeľujeme na dve skupiny:
  1. **Rastúce s veľkosťou zásob**, napr. náklady na udržiavanie zásob (skladovacie náklady) – n_1
  2. **Klesajúce s veľkosťou zásob**, napr. náklady vyplývajúce z nedostatku pohotových zásob – n_2

Klasifikácia modelov zásobovania (1)

- Podľa počtu dopĺňaní stavu zásob za sledované obdobie:
  A. **Statické** (za celé obdobie sa objednáva iba raz)
  B. **Dynamické** (za celé obdobie sa objednáva viackrát)
- Podľa priebehu dopytu počas sledovaného obdobia:
  A. **Deterministické** (dopyt je počas daného obdobia presne známy)
  B. **Stochastické** (dopyt nie je presne známy, ale riadi sa známym rozdelením pravdepodobnosti)
- Podľa charakteru dopytu počas sledovaného obdobia:
  A. **So spojitým dopytom** (spojito sa mení, napr. množstvo suroviny v kg)
  B. **S nespojitým dopytom** (mení sa diskrétne, nadobúda iba určité konkrétne hodnoty, napr. počet náhradných dielov)

Klasifikácia modelov zásobovania (2)

- Podľa počtu skladových položiek:
  A. **Jednopoložkové** (uvažuje iba jednu skladovú položku)
  B. **Viacpoložkové** (uvažuje viacero skladových položiek naraz)
- Podľa počtu skladov:
  A. **S jedným skladom**
  B. **S viacerými skladmi**

Stratégie riadenia zásob

- Je daná dvojicou parametrom **(P_1, P_2)**, pričom
- P_1 hovorí o tom, kedy objednávame (dopĺňame) zásoby:
  - $P_1 = t$, ak sa zásoby dopĺňajú v pravidelných časových intervaloch dĺžky t
  - $P_1 = s$, ak sa zásoby dopĺňajú v okamžiku, keď ich stav klesne pod hranicu s
- P_2 hovorí o tom na akú úroveň sa zásoby dopĺňajú:
  - $P_2 = x$, ak sa zásoby dopĺňajú o množstvo x
  - $P_2 = S$, ak sa zásoby dopĺňajú na úroveň S
- Takže modely riadenia zásob môžu byť štyroch typov:
  - (t, x) ... modely M1 a M2 (statické)
  - (s, x) ... modely M3, M4 a M5 (dynamické)
  - (t, S)
  - (s, S)

Model M1

- Model je **statický**, **stochastický**, **s nespojitým (diskrétnym) dopytom**
- Ide o stratégiu typu (t, $\boldsymbol{x}$)
- **Zadanie**
  - Nech dopyt je diskrétna náhodná veličina Y so známym zákonom rozdelenia pravdepodobnosti P(Y=y) = p(y)
  - Náklady na jednotku nadbytočných zásob sú n_1
  - Náklady plynúce z nedostatku jednotky pohotovej zásoby sú n_2
- **Úlohou** je určiť takú hodnotu objednaného množstva zásob $\boldsymbol{x}$, aby celkové náklady $N(\boldsymbol{x})$ boli minimálne
  - objednáva sa iba raz, na začiatku sledovaného obdobia
  - čas od objednávky do dodania tovaru je zanedbateľný

Model M1

- Zásoby x môžu vo vzťahu ku skutočnému dopytu y nadobúdať tri rôzne kategórie hodnôt, čomu zodpovedajú príslušné náklady určitého typu:
  1. Ak $x = y$, potom nevzniknú žiadne náklady, t.j. $N(x) = 0$
  2. Ak $x > y$, potom vzniknú skladovacie náklady $N(x) = n_1 .(x - y)$
  3. Ak $x < y$, potom vzniknú náklady z nedostatku pohotových zásob $N(x) = n_2 .(y - x)$
- Celkové náklady možno potom vyjadriť takto:

$$N(x) = \sum_{y=0}^{x-1} n_1 \cdot (x - y) \cdot p(y) + 0 + \sum_{y=x+1}^{\infty} n_2 \cdot (y - x) \cdot p(y)$$

- Optimálnu hodnotu objednávaného množstva zásob x_o získame postupným vyčíslením nákladov $N(x)$ pre $x = 0, 1, 2 \ldots$
- Za predpokladu, že $N(x)$ má len jedno lokálne minimum, možno ho určiť analyticky z dvojice nerovníc:

$$N(x_o) \leq N(x_o - 1) \;\wedge\; N(x_o) \leq N(x_o + 1)$$

Model M1

- Kumulatívna pravdepodobnosť $P(y)$ sa vypočíta:

$$P(y) = P(Y \leq y) = \sum_{z=0}^{y} p(z)$$

- Pre optimálnu hodnotu x_o sa dá odvodiť, že platí:

$$P(x_o - 1) \leq \frac{n_2}{n_1 + n_2} \leq P(x_o)$$

- Pri výpočte optimálnej hodnoty x_o je teda potrebné:
  1. Vypočítať kumulatívne pravdepodobnosti pre všetky možné hodnoty y
  2. Vypočítať kritickú hodnotu $\frac{n_2}{n_1 + n_2}$
  3. Určiť optimálne x_o pre ktoré platí $P(x_o - 1) \leq \frac{n_2}{n_1 + n_2} \leq P(x_o)$

Príklad (1) – zadanie

- V podniku má byť inštalovaný nový stroj a treba určiť, koľko má byť pri jeho nákupe zakúpených nových náhradných dielov.
- Sú známe pravdepodobnosti $p(y)$ počtu výmen danej súčiastky stroja počas doby jeho životnosti (v tabuľke).

y	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(y)$	0,9	0,05	0,02	0,01	0,01	0,01	0	0

- Náklady na skladovanie náhradných súčiastok sú zanedbateľné. Cena 1ks náhradnej súčiastky nezáleží na objednanom množstve a činí n_1 = 5 000 PJ/ks.
- Ale ak náhradná súčiastka nebude k dispozícii, vzniknú podniku straty n_2 = 100 000 PJ/ks .

Príklad (1) – riešenie

1. Vypočítať kumulatívne pravdepodobnosti pre všetky možné hodnoty y

y	0	*1*	*2*	3	4	5	6	7
$p(y)$	0,9	0,05	0,02	0,01	0,01	0,01	0	0
$P(y)$	0,9	0,95	0,97	0,98	0,99	1	1	1

2. Vypočítať kritickú hodnotu $\frac{n_2}{n_1 + n_2} = \frac{100000}{100000 + 5000} = 0{,}9524$

3. Určiť optimálnu hodnotu x_o kedy $P(x_o - 1) \leq 0{,}9524 \leq P(x_o)$

y	0	*1*	***2***	3	4	5	6	7
$p(y)$	0,9	0,05	0,02	0,01	0,01	0,01	0	0
$P(y)$	0,9	0,95	0,97	0,98	0,99	1	1	1

Model M2

- Model je **statický**, **stochastický**, **so spojitým dopytom**
- Ide o stratégiu typu $(t, \boldsymbol{x})$
- **Zadanie**
  - Dopyt y aj zásoba x sú spojité veličiny
  - Dopyt je spojitá náhodná veličina popísaná hustotou pravdepodobnosti $f(y)$ a zodpovedajúcou distribučnou funkciou $F(y)$, pričom platí

$$F(x) = \int_0^x f(y) \cdot dy \qquad \int_0^\infty f(y) \cdot dy = 1$$

- **Úlohou** je určiť takú hodnotu objednaného množstva zásob $\boldsymbol{x}$, aby celkové náklady $N(\boldsymbol{x})$ boli minimálne
  - objednáva sa iba raz, na začiatku sledovaného obdobia
  - čas od objednávky do dodania tovaru je zanedbateľný

Model M2

- Funkcia celkových nákladov $N(x)$ sa vypočíta

$$N(x) = \int_{0}^{x} n_1 \cdot (x - y) \cdot f(y) \cdot dy + \int_{x}^{\infty} n_2 \cdot (y - x) \cdot f(y) \cdot dy$$

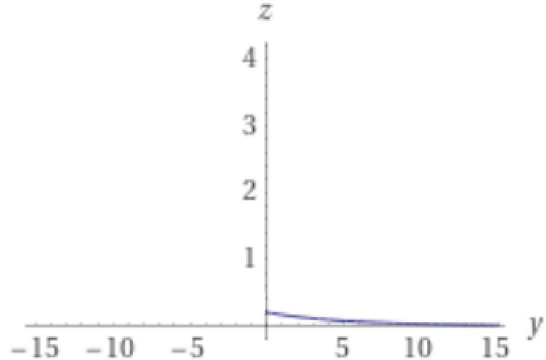
$$\frac{dN(x)}{dx} = n_1 \cdot \int_{0}^{x} f(y) \cdot dy - n_2 \cdot \int_{x}^{\infty} f(y) \cdot dy$$

- Ak chceme nájsť extrém takejto funkcie, potom:

$$\frac{dN(x)}{dx} = n_1 \cdot F(x_O) - n_2 \cdot (1 - F(x_O)) \overset{!}{=} 0$$

$$n_1 \cdot F(x_o) - n_2 + n_2 \cdot F(x_o) = 0 \qquad (n_1 + n_2) \cdot F(x_o) = n_2$$

$$F(x_O) = \frac{n_2}{n_1 + n_2}$$



Príklad (2)

- Dopyt je popísaný exponenciálnym rozdelením s hustotou pravdepodobnosti $f(y) = 0{,}2.e^{-0{,}2.y}$ ($y \geq 0$).
- Jednotkové náklady z nedostatku pohotovej zásoby sú n_2 = 100 PJ/kg a jednotkové náklady z nadbytočných zásob sú n_1 = 40 PJ/kg.

$$F(x_O) = \frac{n_2}{n_1 + n_2} = \frac{100}{100 + 40}$$

$$\int_0^{x_0} 0{,}2 \cdot e^{-0{,}2y} \cdot dy = \frac{100}{140}$$

$$\int_0^{x_0} 0{,}2 \cdot e^{-0{,}2y} \cdot dy = 0{,}714$$

$$1 - e^{-0{,}2 \cdot x_O} = 0{,}714$$

$$e^{-0{,}2 \cdot x_O} = 0{,}286$$

$$-0{,}2 \cdot x_O = \ln(0{,}286)$$

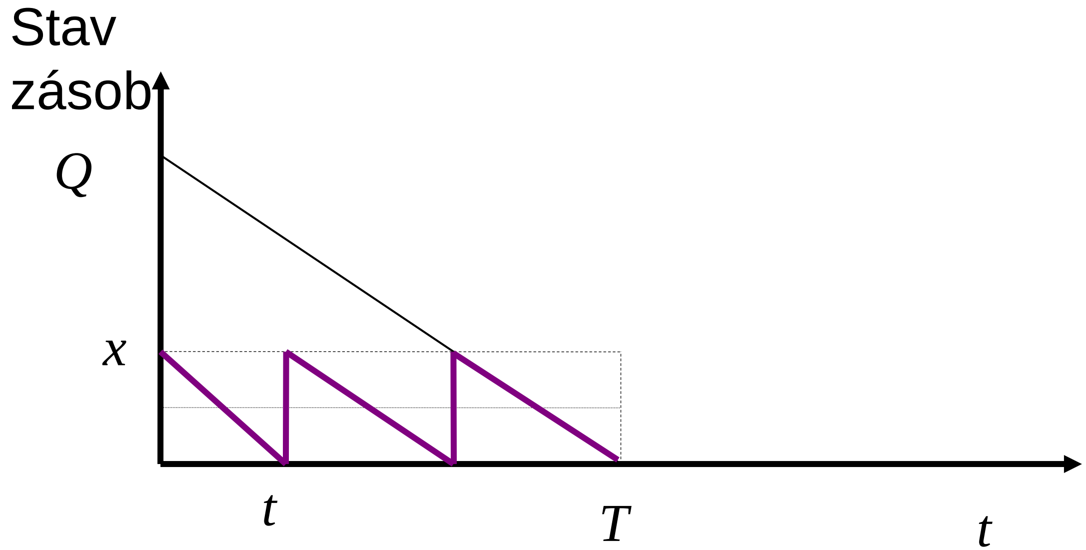
$$\boldsymbol{x_O} = -5.\ln(0{,}286) = \mathbf{6{,}264}$$

Model M3

- Model je **dynamický**, **deterministický**, **so spojitým dopytom**
- Ide o stratégiu typu $(s, \boldsymbol{x})$
- **Zadanie**
  - Počas dostatočne dlhého obdobia T je dopyt Q jednotiek za celé obdobie (t.j. v intervale <0, T>) rovnomerný a spojitý
  - Zásoba sa dopĺňa objednávkami rovnakej veľkosti x, a to vždy v okamžiku vyčerpania zásob (t.j. $s = 0$)
  - S každou jednotlivou objednávkou a dodávkou sú spojené náklady N_D, nezávislé od veľkosti objednávky
  - Náklady na skladovanie jednotkového množstva zásob sú n_1
- **Úlohou** je určiť takú hodnotu objednávaného množstva zásob $\boldsymbol{x}$, aby celkové náklady $N(\boldsymbol{x})$ boli minimálne
  - čas od objednávky do dodania tovaru je zanedbateľný

Model M3

- Priebeh stavu zásob je znázornený na nasledujúcom obrázku:



- Celkové náklady $N(x)$ vypočítame nasledovne:

$$N(x) = N_D \cdot \frac{Q}{x} + n_1 \cdot \frac{x}{2} \cdot T$$

Model M3

- Celkové náklady *N(x)*: $N(x) = N_D \cdot \frac{Q}{x} + n_1 \cdot \frac{x}{2} \cdot T$
- Pre výpočet optimálnej hodnoty x_o musíme nájsť extrém funkcie nákladov, t.j.:

$$\frac{dN(x)}{dx} = -N_D \cdot \frac{Q}{x^2} + n_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot T$$

- Optimálna veľkosť objednávky x_o:

$$\frac{N_D \cdot Q}{x_0^2} = \frac{n_1 \cdot T}{2} \qquad {x_0}^2 = \frac{2 \cdot N_D \cdot Q}{n_1 \cdot T} \qquad x_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot N_D \cdot Q}{n_1 \cdot T}}$$

Príklad (3)

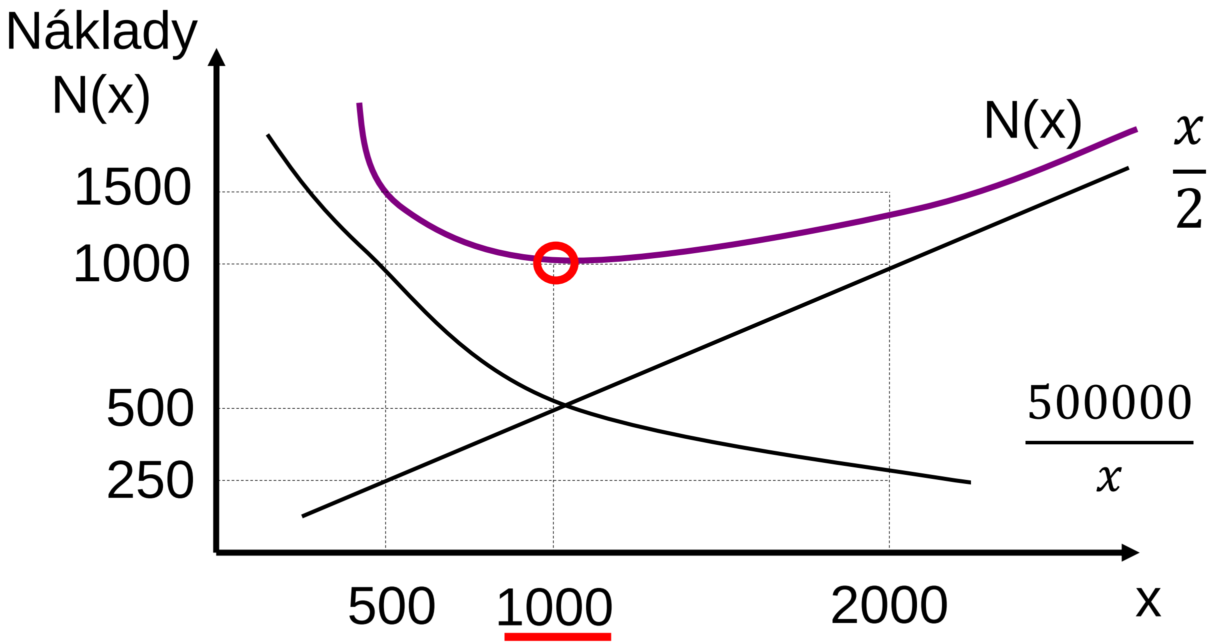
- Obchodná organizácia má zabezpečiť dodávku určitého výrobku v množstve Q = 2000 MJ/rok.
- Náklady na objednávku sú N_D = 250 PJ/objednávku bez ohľadu na jej veľkosť.
- Náklady na skladovanie sú n_1 = 1 PJ/MJ za rok.
- Určte optimálnu dodávku zásob na časový interval T = 1 rok.
- Riešenie:

$$x_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot N_D \cdot Q}{n_1 \cdot T}} = \sqrt{\frac{2.250.2000}{1.1}} = \sqrt{1000000} = 1000$$

$$N(x) = 250 \cdot \frac{2000}{x} + 1 \cdot \frac{x}{2} = \frac{500000}{x} + \frac{x}{2}$$

Príklad (3) – grafické znázornenie

- Priebeh nákladov na skladovanie, nákladov spojených s objednávaním a celkových nákladov je približne znázornený na obrázku. Na obrázku je naznačená aj optimálna veľkosť objednávky.

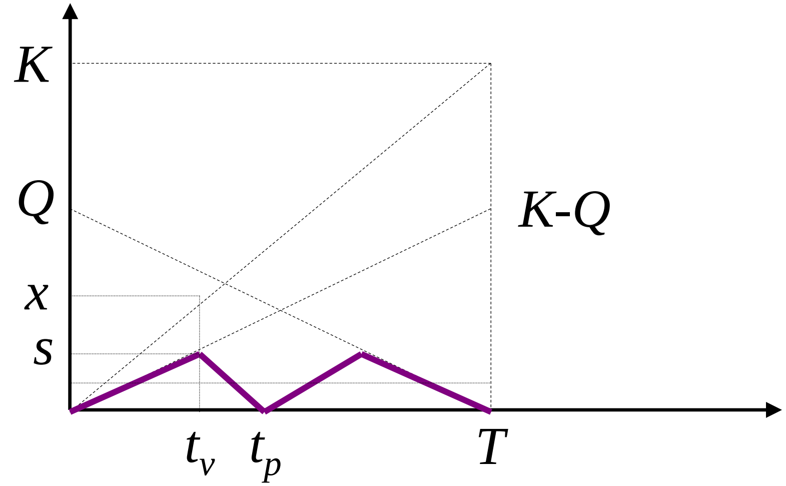


Model M4

- Ide o stratégiu typu (s, $\boldsymbol{x}$) pričom vychádza z modelu M3
- Model je **dynamický**, **deterministický**, **so spojitým dopytom**, **zásoby doplňané vlastnou výrobou**
- **Zadanie**
  - Tento model je v hlavných parametroch veľmi podobný predchádzajúcemu modelu M3, ale na rozdiel od neho sa zásoby neobjednávajú u externých dodávateľov, ale sú vyrábané vlastnou výrobou.
  - Q je celkový dopyt za celé sledované obdobie T
  - Nech výroba trvá t_v časových jednotiek a jej kapacita je $K > Q$ počas T
  - t_p je doba potrebná k vyprázdneniu skladu
  - N_D sú náklady spojené so spustením výrobnej linky
  - n_1 sú skladovacie náklady na jednotkové množstvo zásob
- **Úlohou** je určiť takú hodnotu objednaného množstva zásob $\boldsymbol{x}$, aby celkové náklady $N(\boldsymbol{x})$ boli minimálne

Model M4

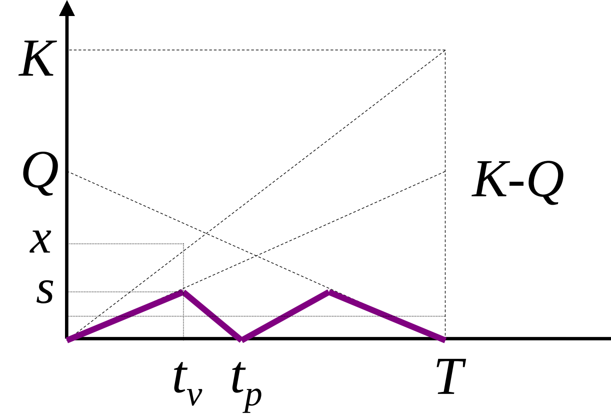
- Priebeh stavu zásob je znázornený na nasledujúcom obrázku:



- Celkové náklady $N(x)$ vypočítame nasledovne:

$$N(x) = N_D \cdot \frac{Q}{x} + n_1 \cdot \frac{s}{2} \cdot T$$

Model M4



- Z podobnosti trojuholníkov vyplýva:

$$\frac{s}{t_v} = \frac{K-Q}{T} \qquad s = t_v \cdot \frac{K-Q}{T} \qquad s = x \cdot \frac{T}{K} \cdot \frac{K-Q}{T} = x \cdot \frac{K-Q}{K}$$

$$\frac{x}{t_v} = \frac{K}{T} \qquad x \cdot \frac{T}{K} = t_v$$

- Po dosadení do funkcie nákladov a nájdením jej extrému x_o

$$N(x) = N_D \cdot \frac{Q}{x} + n_1 \cdot \frac{s}{2} \cdot T \qquad \frac{dN(x)}{dx} = 0\ldots$$

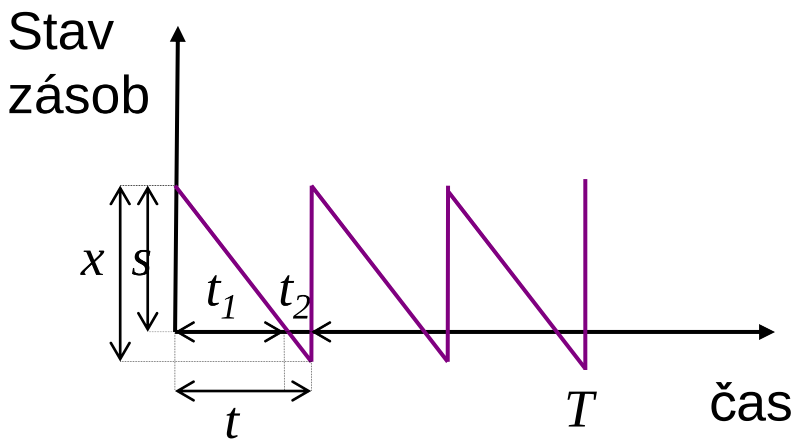
$$x_o = \sqrt{\frac{2 \cdot N_D \cdot Q \cdot K}{n_1 \cdot T \cdot (K-Q)}}$$

Model M5

- Ide o stratégiu typu (s, x) pričom vychádza z modelu M3
- Model je **dynamický**, **deterministický**, **so spojitým dopytom**, **s prípustným nedostatkom pohotovej zásoby**
- **Zadanie**
  - Tento model je zovšeobecnením modelu M3 v tom, že môže dôjsť k okamžitému nedostatku pohotových zásob za cenu nákladov n_2 na jednotkové množstvo chýbajúcej zásoby.
  - Celkový dopyt Q za sledované obdobie T musí však byť uspokojený
  - N_D sú náklady spojené s objednávkou
  - n_1 sú skladovacie náklady na jednotkové množstvo zásob
- **Úlohou** je určiť takú hodnotu objednaného množstva zásob x a úroveň s na ktorú sa dopĺňajú aby celkové náklady $N(s,x)$ boli minimálne.

Model M5

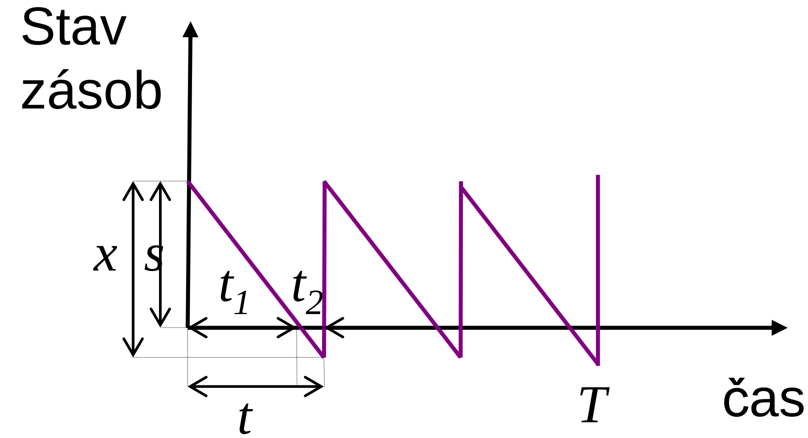
- Priebeh stavu zásob je znázornený na nasle-dujúcom obrázku:



- Celkové náklady $N(x)$ vypočítame nasledovne:

$$N(s,x) = N_D \cdot \frac{Q}{x} + n_1 \cdot \frac{s}{2} \cdot t_1 \cdot \frac{Q}{x} + n_2 \cdot \frac{x-s}{2} \cdot t_2 \cdot \frac{Q}{x}$$

Model M5



- Z podobnosti trojuholníkov vyplýva:

$$\frac{t_1}{s} = \frac{t}{x} \quad \Rightarrow \quad t_1 = t \cdot \frac{s}{x} \qquad\qquad \frac{t_2}{x-s} = \frac{t}{x} \quad \Rightarrow \quad t_2 = t \cdot \frac{(x-s)}{x}$$

$$\frac{T}{t} = \frac{Q}{x} \quad \Rightarrow \quad t = T \cdot \frac{x}{Q}$$

- Po dosadení do funkcie nákladov a nájdením jej extrému pre x_o a s_o (je potrebné derivovať parciálne) dostaneme:

$$x_o = \sqrt{\frac{(n_1 + n_2)}{n_1} \cdot \frac{2 \cdot N_D \cdot Q}{n_1 \cdot T}} \qquad\qquad s_o = \sqrt{\frac{n_2}{(n_1 + n_2)} \cdot \frac{2 \cdot N_D \cdot Q}{n_1 \cdot T}}$$

Príklad (4)

- Strojárenský podnik potrebuje ročne 100 000 ks súčiastok určitého typu.
- Náklady na jednu dodávku sú 2000 PJ.
- Ročné skladovacie náklady pre tieto súčiastky sú 4 PJ/ks/rok.
- Pri nedostatku súčiastok na sklade vzniknú dodatočné jednotkové náklady 12 PJ/ks/rok.
- Koľko súčiastok a ako často má podnik objednať?
- Riešenie:

$$\boldsymbol{x_o} = \sqrt{\frac{(n_1+n_2)}{n_1}\cdot\frac{2\cdot N_D\cdot Q}{n_1\cdot T}} = \sqrt{\frac{4+12}{12}\cdot\frac{2\cdot 2000\cdot 100000}{4\cdot 1}} = \mathbf{11547}$$

$$\boldsymbol{s_o} = \sqrt{\frac{n_2}{(n_1+n_2)}\cdot\frac{2\cdot N_D\cdot Q}{n_1\cdot T}} = \sqrt{\frac{12}{4+12}\cdot\frac{2\cdot 2000\cdot 100000}{4\cdot 1}} = \mathbf{8660}$$

Príklad (4) – dokončenie

- To znamená, že objednávať sa bude množstvo **11547 ks** súčiastok
- Signálna úroveň zásob bude 8660 - 11547 = **-2887 ks** súčiastok
- Interval objednávania zásob bude

$$t = T \cdot \frac{x}{Q} = 1 \cdot \frac{11547}{100000} = 0{,}11547 \quad \text{roku,}$$

tj. približne **42 dní**

Termíny skúšok z RaL

Vždy **UTOROK od 9:00 v miestnosti V4_V010**

- 2.5.2023 – Predtermín 1.
- 9.5.2023 – Predtermín 2.
- 16.5.2023 – RaL 3.
- 30.5.2023 – RaL 4.
- 6.6.2023 – RaL 5.
- 13.6.2023 – RaL 6.
- 27.6.2023 – RaL 7. – len opravné termíny