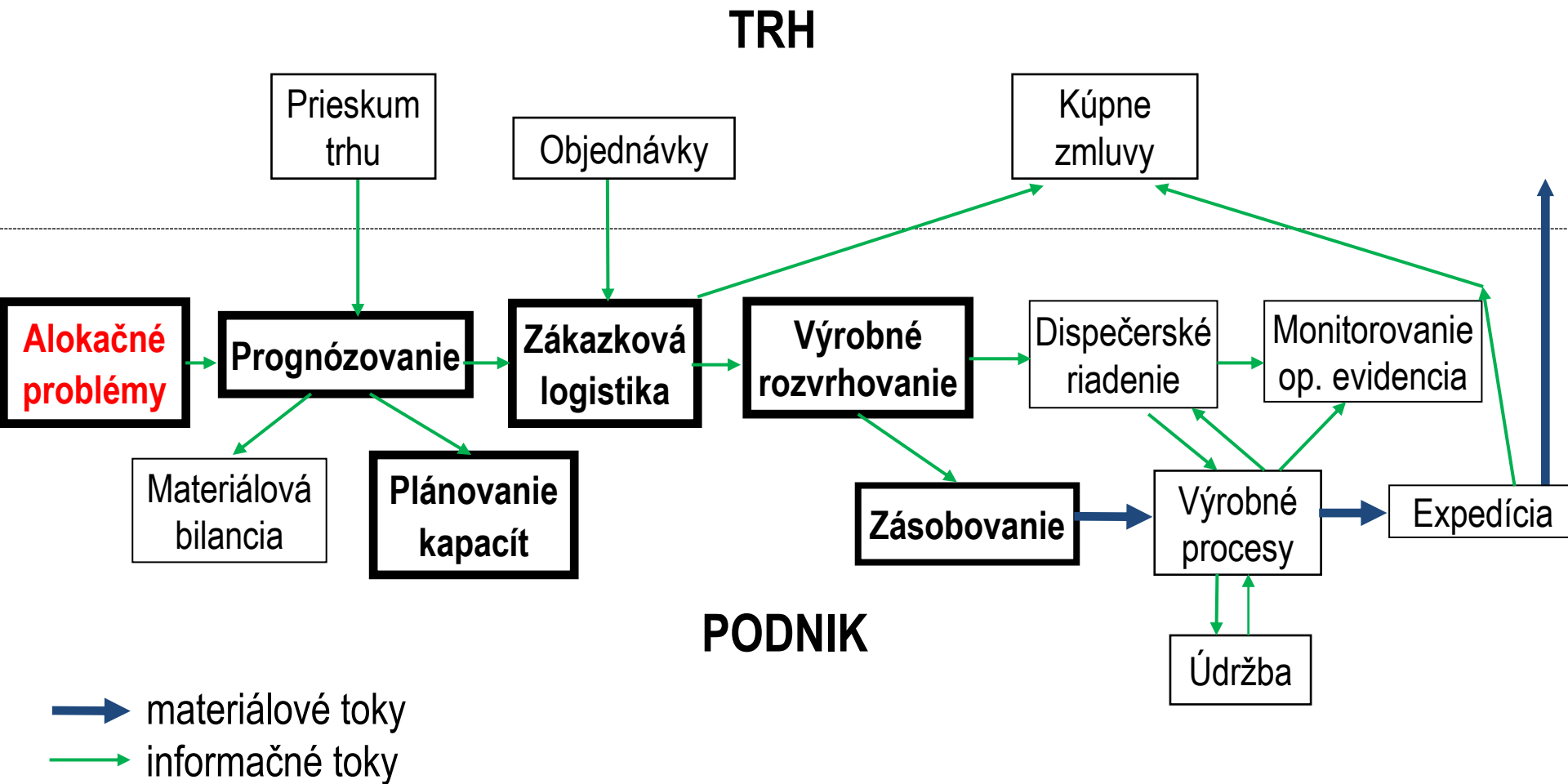


Štruktúra činností výrobnjej logistiky



Alokačné úlohy

I. Alokácia (výrobných procesov) **do jedného miesta:**

1. Ak nie sú k dispozícii presné údaje možno použiť Pomerovo-indexovú metódu
2. Ak sú k dispozícii presné údaje ide o úlohu Optimálneho umiestnenia distribučného centra, pričom možno použiť rôzne typy vzdialenosti, napr.:
 - a) Euklidovská vzdialenosť
 - b) Kvadrát euklidovskej vzdialenosti
 - c) Rektilineárna (Mannhatanská) vzdialenosť
 - d) Minimalizácia vzdialenosti najvzdialenejšieho odberateľa

II. Alokácia (výrobných procesov) **do viacerých miest**

1. Priradzovací problém (n objektov do n miest – základná verzia)
2. Priradzovací problém (väzby len medzi novými a existujúcimi objektmi)
3. Kvadratický priradzovací problém (väzby medzi novými objektmi navzájom)
4. Zovšeobecnený distribučný problém (vyberáme podmnožinu m miest pre distribučné centrá a optimalizujeme dodávky n zákazníkom)

I. Alokácia do jedného miesta

1. Ak nie sú k dispozícii presné údaje

- **Predpoklady (popis úlohy):**
 - ak sú známe lokality a treba vybrať najvhodnejšiu
 - ak je ťažké vyčíslieť presné náklady
 - ak nie sú presne známi dodávateľia ani odberatelia
 - ak existuje veľa faktorov (kritérií), ktoré je ťažko ohodnotiť,
 - ale je možné vyjadriť závažnosť každého faktoru (kritéria) voči ostatným faktorom (kritériám)
 - a porovnať hodnoty faktorov (kritérií) pre jednotlivé lokality
- **Riešenie: pomerovo-indexová metóda**
(anglicky *SAW Simple Additive Weighting*),
na UHI preberané za účelom **hodnotovej analýzy**

Pomerovo-indexová metóda (1)

1. Pre vybrané lokality ($L = 1 \dots n$) a daný výrobný proces najprv stanovíme rozhodujúce **faktory** F_i ($i = 1 \dots m$), resp. **kritériá výberu**
2. Každému faktoru F_i prisúdime **váhu** w_i najlepšie tak, aby suma váh všetkých faktorov bola 1, t.j. $\sum_{i=1}^m w_i = 1$
3. Pre hodnotenie jednotlivých faktorov F_i zvolíme **interval hodnôt** $< KD_i, KH_i >$ tj. definičný obor hodnôt HF_i a spôsob ohodnocovania tohto faktoru
 - KD_i je tzv. dolná hranica intervalu hodnôt HF_i
 - KH_i je tzv. horná hranica intervalu hodnôt HF_i

Pomerovo-indexová metóda (2)

4. Experti stanovia **hodnotenie** HF_i^L pre všetky lokality L a pre všetky a faktory F_i
(*t.j. pre všetky $L = 1 \dots n, i = 1 \dots m$*)
5. Výsledné hodnotenie danej lokality L je dané **váženým súčtom**: $C^L = \sum_{i=1}^m w_i \cdot HF_i^L$
6. Ako najlepšia bude vybraná tá lokalita, pre ktorú je hodnota C^L **maximálna**, t.j.

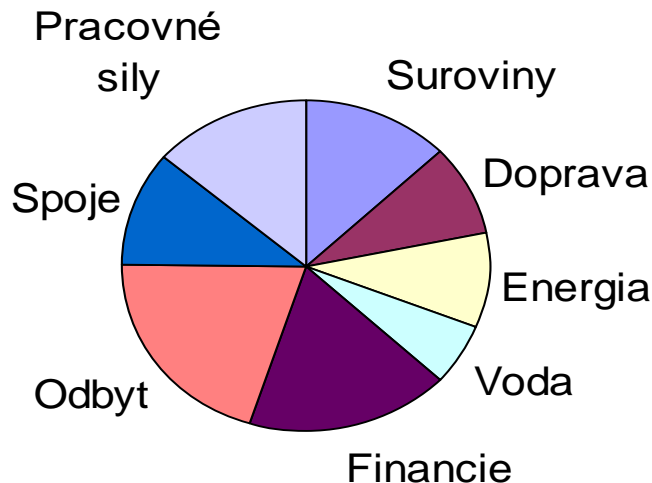
$$L \approx \max C^L$$

Príklad (1)

- Úlohou je vybrať najvhodnejšiu lokalitu pre umiestnenie výroby drevených hračiek z troch vytipovaných lokalít:
 - Spišská Nová Ves – SNV (Lokalita $L = 1$)
 - Rožňava – RV (Lokalita $L = 2$)
 - Svidník – SK (Lokalita $L = 3$)

Príklad (2)

1. Výber faktorov F_i ($i = 8$)
2. Priradenie váh w_i jednotlivým faktorom
3. $KD_i = 0$, $KH_i = 10$ pre všetky faktory F_i ($i = 1$ až 8)



Faktor F_i	Váha w_i
Suroviny (F_1)	0,13
Doprava (F_2)	0,09
Energia (F_3)	0,09
Voda (F_4)	0,06
Financie (F_5)	0,18
Odbyt (F_6)	0,20
Spoje (F_7)	0,11
Pracovné sily (F_8)	0,14

$$\sum_{i=1}^8 w_i = 1$$

Príklad (3)

4. Expertmi stanovené hodnoty HF_i^L pre všetky L (1 až 3)

Faktor F_i	HF_i^1	HF_i^2	HF_i^3
Suroviny (F_1)	8	6	7
Doprava (F_2)	8	4	6
Energia (F_3)	4	4	2
Voda (F_4)	8	5	9
Financie (F_5)	7	2	6
Odbyt (F_6)	5	2	4
Spoje (F_7)	7	7	3
Pracovné sily (F_8)	5	5	5

Príklad (4)

5. Výpočet hodnôt ($w_i \cdot HF_i^L$) pre všetky faktory F_i a všetky lokality L

Faktor F_i	$W_i \cdot HF_i^1$	$W_i \cdot HF_i^2$	$W_i \cdot HF_i^3$
Suroviny (F_1)	1,04	0,78	0,91
Doprava (F_2)	0,72	0,36	0,54
Energia (F_3)	0,36	0,36	0,18
Voda (F_4)	0,48	0,3	0,54
Financie (F_5)	1,26	0,36	1,08
Odbyt (F_6)	1	0,4	0,8
Spoje (F_7)	0,77	0,77	0,33
Pracovné sily (F_8)	0,7	0,7	0,7
$C^L =$	6,33	4,03	5,08

6. Porovnanie súhrnných hodnotení C^L : $C^1 = \max(C^L) \Rightarrow$
najvhodnejšia lokalita je $L = 1$, t.j. Spišská Nová Ves

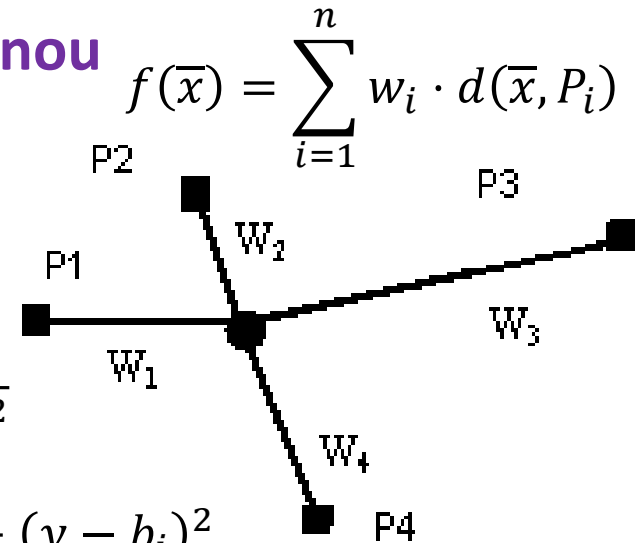
2. Sú k dispozícii presné údaje => Optimálne umiestnenie (jedného) distribučného centra

- **Predpoklady (popis úlohy):**
 - V rovine existuje n objektov (odberateľov) ($P_1 .. P_n$) so súradnicami $(a_1, b_1), ... (a_n, b_n)$.
 - Treba nájsť súradnice pre umiestnenie nového objektu (distribučného centra) $\bar{x} = (x, y)$ tak, aby celkové náklady na realizáciu väzieb medzi existujúcimi objektmi a novým objektom \bar{x} boli minimálne.
 - Intenzitu väzby medzi objektmi P_i a novým objektom (distribučným centrom) vyjadrujú koeficienty w_i ($i = 1..n$).
- **Riešenie:** závisí od spôsobu merania vzdialenosti
 - Používajú sa 4 rôzne typy vzdialeností

Matematický model (4 rôzne varianty úlohy)

- Matematický model je vyjadrený kriteriálnou funkciou, ktorej základ je stále rovnaký:

- Pričom sa mení spôsob výpočtu vzdialenosti $d(\bar{x}, P_i)$



a) **Euklidovská:** $d(\bar{x}, P_i) = \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$

b) **Kvadrát euklidovskej:** $d(\bar{x}, P_i) = (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2$

c) **Rektilineárna (Manhattanská):** $d(\bar{x}, P_i) = |x - a_i| + |y - b_i|$

d) **Minimálna (euklidovská) vzdialenosť**

najvzdialenejšieho objektu: $f(\bar{x}) = \max_{i=1..n} \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$

Pre každý typ vzdialenosti je iný postup výpočtu optimálneho umiestnenia nového objektu (distribučného centra).

1. Euklidovská vzdialenosť (1)

- **Model:** minimalizovať $f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$
- **Riešenie: numerický iteračný postup** (hyperbolická aproximácia)
- Hľadáme extrém funkcie dvoch premenných (súradnica x a súradnica y pre umiestnenie distribučného centra),
- preto derivujeme funkciu nákladov parciálne

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n w_i \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$$

- a jednotlivé parciálne derivácie položíme rovné nule,

t.j. pre súradnicu x : $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{2w_i(x - a_i)}{\sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}} \stackrel{!}{=} 0$

$$\sum_{i=1}^n \frac{xw_i}{\sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}} = \sum_{i=1}^n \frac{w_i a_i}{\sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}}$$

1. Euklidovská vzdialenosť (2)

Po úprave:
$$x \cdot \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}} = \sum_{i=1}^n \frac{w_i \cdot a_i}{\sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}}$$

a zavedení substitúcie:
$$g_i(x, y) = \frac{w_i}{\sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + \xi}}$$

dostávame:
$$x \cdot \sum_{i=1}^n g_i(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot g_i(x, y) \Rightarrow x = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \cdot g_i(x, y)}{\sum_{i=1}^n g_i(x, y)}$$

čo iteratívne znamená:

$$x^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \cdot g_i(x^{(k-1)}, y^{(k-1)})}{\sum_{i=1}^n g_i(x^{(k-1)}, y^{(k-1)})}$$

počiatočná hodnota
(ťažisko):

$$x^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

1. Euklidovská vzdialenosť (3)

- Dostávame iteratívne vzorce pre výpočet súradníc optimálneho umiestnenia distribučného centra $x^{(k)}$ a $y^{(k)}$.
 1. Na začiatku stanovíme hodnoty pre ťažisko ($x^{(0)}$ a $y^{(0)}$)
 2. Postupne v každej ďalšej iterácii (k) počítame $x^{(k)}$ a $y^{(k)}$ a následne $f(x^{(k)}, y^{(k)})$, pričom sa aktuálne riešenie ($x^{(k)}, y^{(k)}$) stále priblíži k optimu, t.j. klesne $f(x^{(k)}, y^{(k)})$.
 3. Po dosiahnutí požadovanej presnosti (napríklad ak sa hodnota kritériálnej funkcie na druhom ráde za desatinnou čiarkou už nemení) **výpočet ukončíme** a aktuálne hodnoty $x^{(k)}$ a $y^{(k)}$ určujú odporúčané umiestnenie distribučného centra.

1. Euklidovská vzdialenosť (4)

- Analogicky pre súradnicu y derivujeme funkciu nákladov parciálne podľa y , t.j.

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n w_i \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$$

- a položíme rovnú nule, t.j.

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial y} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{2 \cdot w_i \cdot (y - b_i)}{\sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{y \cdot w_i}{\sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}} = \sum_{i=1}^n \frac{w_i \cdot b_i}{\sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}}$$

1. Euklidovská vzdialenosť (5)

- Po úprave a zavedení substitúcie $g_i(x, y) = \frac{w_i}{\sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + \xi}}$

dostávame:
$$y \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}} = \sum_{i=1}^n \frac{w_i \cdot b_i}{\sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}}$$

$$y \sum_{i=1}^n g_i(x, y) = \sum_{i=1}^n b_i \cdot g_i(x, y) \Rightarrow y = \frac{\sum_{i=1}^n b_i \cdot g_i(x, y)}{\sum_{i=1}^n g_i(x, y)}$$

$$y^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i \cdot g_i(x^{(k-1)}, y^{(k-1)})}{\sum_{i=1}^n g_i(x^{(k-1)}, y^{(k-1)})} \quad y^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

Príklad (1)

- Nájdite optimálne umiestnenie trafostanice pre 4 stanice s danými súradnicami: A[2,6], B[6,7], C[7,4], D[5,2], káblom s mernými ročnými nákladmi 3 PJ/km. Nová stanica bude napájaná káblom s ročnými nákladmi 5 PJ/km z existujúcej trafostanice E[1,1].

i	Miesto	a_i	b_i	w_i
1	A	2	6	3
2	B	6	7	3
3	C	7	4	3
4	D	5	2	3
5	E	1	1	5

Príklad (2)

i	Miesto	a_i	b_i	w_i
1	A	2	6	3
2	B	6	7	3
3	C	7	4	3
4	D	5	2	3
5	E	1	1	5

- Vyjdeme z počiatočných hodnôt súradníc $x^{(0)}$ a $y^{(0)}$ pre ťažisko a vypočítame zodpovedajúcu hodnotu kritériálnej funkcie $f(x^{(0)}, y^{(0)})$.

$$x^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^5 a_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^5 w_i} \quad x^{(0)} = \frac{2 * 3 + 6 * 3 + 7 * 3 + 5 * 3 + 1 * 5}{3 + 3 + 3 + 3 + 5} = \frac{65}{17} \doteq 3,82$$

$$y^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^5 b_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^5 w_i} \quad y^{(0)} = \frac{6 * 3 + 7 * 3 + 4 * 3 + 2 * 3 + 5 * 1}{3 + 3 + 3 + 3 + 5} = \frac{62}{17} \doteq 3,65$$

$$f(x^{(0)}, y^{(0)}) = \sum_{i=1}^5 w_i \sqrt{(x^{(0)} - a_i)^2 + (y^{(0)} - b_i)^2}$$

$$f(x^{(0)}, y^{(0)}) = 3 \cdot \sqrt{(3,82 - 2)^2 + (3,65 - 6)^2} + \dots + 5 \cdot \sqrt{(3,82 - 1)^2 + (3,65 - 1)^2} = 55,93$$

Príklad (3)

- Potom vypočítame substitučné koeficienty $g_i(x^{(0)}, y^{(0)})$ a dosadíme ich do iteračných vzorcov pre výpočet $x^{(1)}, y^{(1)}$

$$x^{(0)} = 3,82; \quad y^{(0)} = 3.65$$

$$g_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = \frac{w_i}{\sqrt{(x^{(0)} - a_i)^2 + (y^{(0)} - b_i)^2 + \xi}}$$

$$g_1(x^{(0)}, y^{(0)}) = \frac{3}{\sqrt{(3,82 - 2)^2 + (3,65 - 6)^2 + 0,001}} = 1,009$$

$$g_2(x^{(0)}, y^{(0)}) = \frac{3}{\sqrt{(3,82 - 6)^2 + (3,65 - 7)^2 + 0,001}} = 0,751$$

$$g_3(x^{(0)}, y^{(0)}) = \frac{3}{\sqrt{(3,82 - 7)^2 + (3,65 - 4)^2 + 0,001}} = 0,938$$

$$g_4(x^{(0)}, y^{(0)}) = \frac{3}{\sqrt{(3,82 - 5)^2 + (3,65 - 2)^2 + 0,001}} = 1,479$$

$$g_5(x^{(0)}, y^{(0)}) = \frac{5}{\sqrt{(3,82 - 1)^2 + (3,65 - 1)^2 + 0,001}} = 1,292$$

i	Miesto	a_i	b_i	w_i
1	A	2	6	3
2	B	6	7	3
3	C	7	4	3
4	D	5	2	3
5	E	1	1	5

Príklad (4)

- A dosadíme ich do iteračných vzorcov pre výpočet $x^{(1)}$, $y^{(1)}$

$$x^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^5 a_i \cdot g_i(x^{(0)}, y^{(0)})}{\sum_{i=1}^5 g_i(x^{(0)}, y^{(0)})} \quad y^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^5 b_i \cdot g_i(x^{(0)}, y^{(0)})}{\sum_{i=1}^5 g_i(x^{(0)}, y^{(0)})}$$

$$x^{(1)} = \frac{2 \cdot 1,009 + 6 \cdot 0,751 + 7 \cdot 0,938 + 5 \cdot 1,478 + 1 \cdot 1,292}{1,009 + 0,759 + 0,938 + 1,478 + 1,292} = 3,98$$

$$y^{(1)} = \frac{6 \cdot 1,009 + 7 \cdot 0,751 + 4 \cdot 0,938 + 2 \cdot 1,479 + 1 \cdot 1,292}{1,009 + 0,751 + 0,938 + 1,479 + 1,292} = 3,53$$

- Opäť vypočítame hodnotu kritériálnej funkcie pre nové umiestnenie distribučného centra $f(x^{(1)}, y^{(1)})$

$$f(x^{(1)}, y^{(1)}) = 3 \cdot \sqrt{(3,98 - 2)^2 + (3,53 - 6)^2} + \dots + 5 \cdot \sqrt{(3,98 - 1)^2 + (3,53 - 1)^2} = 55,77$$

Príklad (5)

- A celý postup iteratívne opakujeme až do chvíle, kým zmena hodnoty kritériálnej funkcie v dvoch po sebe nasledujúcich iteráciách klesne pod jednu stotinu PJ.

(k)	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$f(x^{(k)}, y^{(k)})$
0	3,82	3,65	55,935
1	3,98	3,53	55,772
2	4,06	3,47	55,730
3	4,10	3,44	55,719
4	4,12	3,42	55,716

2. Kvadrát euklidovskej vzdialenosti

- **Model:** minimalizovať $f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot [(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2]$
- **Riešenie:** dá sa dokázať, že optimálne umiestnenie distribučného centra je **v ťažisku**, t.j. presne v tom bode, z ktorého vychádza iteratívny výpočet v prípade euklidovskej vzdialenosti, t.j.:

$$x^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad y^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

3. Rektilineárna vzdialenosť

- **Model:** minimalizovať $f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot (|x - a_i| + |y - b_i|)$
- **Riešenie:** v prípade rektilineárnej vzdialenosti sa používa na výpočet optimálneho umiestnenia distribučného centra tzv. **mediánové umiestnenie**.
- Dá sa totiž dokázať, že optimálne hodnoty pre súradnicu x aj y totiž musia ležať v x -ovej, resp. y -ovej súradnici niektorého zo vstupných objektov (pre každú súradnicu to samozrejme môže byť iný objekt).
- Použijeme nasledovný postup:

3. Rektilineárna vzdialenosť – postup riešenia

1. V tomto prípade je potrebné najprv jednotlivé objekty usporiadať vzostupne podľa ich súradnice x a tiež podľa y
$$a_{(1)} \leq a_{(2)} \leq \dots \leq a_{(n)} \quad b_{(1)} \leq b_{(2)} \leq \dots \leq b_{(n)}$$
2. Potom vypočítať jednotlivé čiastkové súčty váh w_i prislúchajúcich týmto objektom:
$$S_{(k)} = \sum_{i=1}^k w_i$$
3. a polovicu celkového súčtu váh:
$$s_{(m)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i$$
4. Vypočítané čiastkové súčty váh w_i pre x -ovú a y -ovú súradnicu tvoria usporiadanú postupnosť, pričom optimálne umiestnenie distribučného centra pre danú súradnicu zodpovedá súradnici odberateľa k , pre ktorého platí:
$$S_{(k-1)} \leq s_m \leq S_{(k)}$$

Príklad (1)

- Použijeme tie isté vstupné údaje ako v príklade pre prípad Euklidovskej vzdialenosti vyššie.
- Pre x-ovú súradnicu:**

$$a_5 (1) \leq a_1 (2) \leq a_4 (5) \leq a_2 (6) \leq a_3 (7)$$

$$s_5 = 5$$

$$s_1 = 5 + 3 = 8$$

$$s_4 = 5 + 3 + 3 = 11$$

$$s_2 = 5 + 3 + 3 + 3 = 14$$

$$s_3 = 5 + 3 + 3 + 3 + 3 = 17$$

i	Miesto	a_i	b_i	w_i
1	A	2	6	3
2	B	6	7	3
3	C	7	4	3
4	D	5	2	3
5	E	1	1	5

$s_m = 8,5 \Rightarrow (s_4)$, čo zodpovedá x-ovej súradnici v poradí 4.zákazníka $\Rightarrow x = a_4 = 5$

Príklad (2)

- Pre **y**-ovú súradnicu:

$$b_5 (1) \leq b_4 (2) \leq b_3 (4) \leq b_1 (6) \leq b_2 (7)$$

$$s_5 = 5$$

$$s_4 = 5 + 3 = 8$$

$$s_3 = 5 + 3 + 3 = 11$$

$$s_1 = 5 + 3 + 3 + 3 = 14$$

$$s_2 = 5 + 3 + 3 + 3 + 3 = 17$$

i	Miesto	a_i	b_i	w_i
1	A	2	6	3
2	B	6	7	3
3	C	7	4	3
4	D	5	2	3
5	E	1	1	5

$s_m = 8,5 \Rightarrow (s_3)$, čo zodpovedá **y**-ovej súradnici v poradí

3.zákazníka $\Rightarrow y = b_3 = 4$

- Takže optimálne umiestnenie distribučného centra v prípade použitia rektilineárnej vzdialenosti by bolo **(5, 4)**

4. Minimalizácia vzdialenosti najvzdialenejšieho bodu

- **Matematický model:** minimalizovať

$$f(\bar{x}) = \max_{i=1..n} \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$$

- To je ekvivalentné úlohe $\min \{z: \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2} \leq z; i = 1, 2, \dots, n\}$
- **Riešenie:** v prípade minimalizácie vzdialenosti najvzdialenejšieho objektu je optimálnym umiestnením distribučného centra **stred kružnice s minimálnym polomerom (z) opísanej tak, že v nej ležia všetci odberatelia.**

Úloha z 3. prednášky – skupinová

1. Prediskutujte v skupine (veľkosti 3 až 4 členov) medzi sebou prebrané typy úloh alokácie do jedného miesta, overte si vaše pochopenie prebranej látky, najmä rozdiely medzi jednotlivými typmi úloh. **Zapíšte z tohto kroku stručný sumár.**
2. Spoločne **identifikujte aspoň dva rôzne príklady konkrétnych reálnych aplikácií úloh alokácie do jedného miesta** (iné než boli uvedené v prednáške).
3. Identifikované príklady stručne popíšte a **správne zaradíte podľa typu do jednej z preberaných kategórií úloh** alokácie do jedného miesta.
4. Pre jeden z identifikovaných príkladov **napíšte matematický model.**

*Pozn.: Do výsledného dokumentu s riešením tejto skupinovej úlohy **napíšte mená členov skupiny a odovzdajte každý sám za seba.***