Alokačné úlohy

OBSAH PREDNÁŠKY

I. Alokácia (výrobných procesov) **do jedného miesta**:
   1. Nie sú k dispozícii presné údaje: Pomerovo-indexová metóda
   2. Sú k dispozícii presné údaje: Optimálne umiestnenie distribučného centra
      a) Euklidovská vzdialenosť
      b) Kvadrát euklidovskej vzdialenosti
      c) Rektilineárna (Manhattanská) vzdialenosť
      d) Minimalizácia vzdialenosti najvzdialenejšieho odberateľa

II. Alokácia (výrobných procesov) **do viacerých miest**
   1. Priradzovací problém (základná verzia)
   2. Priradzovací problém (väzby len medzi novými a existujúcimi objektmi)
   3. Kvadratický priradzovací problém (väzby medzi novými objektmi navzájom)
   4. Zovšeobecnený distribučný problém

Alokácia do viacerých miest

1. Priradzovací problém (základná verzia)

- **Predpoklady (popis úlohy)**:
  - Majme n-objektov, ktoré je potrebné umiestniť do n-miest s minimálnymi nákladmi.
  - Ak poznáme náklady c_{ij} (i = 1 ... n, j = 1 ... n) pre umiestnenie i-teho objektu do j-teho miesta, potom je možné zostaviť jednoduchý bivalentný model (dvojhodnotové premenné)
- **Riešenie**: **celočíselné** (bivalentné) **programovanie**

1. Priradzovací problém (základná verzia)

1. **Premenné:** $x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i = 1..n, \forall j = 1..n$
2. **Kriteriálna funkcia:** $f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \overset{!}{=} MIN$
3. **Ohraničenia:**
   - Pre každý objekt i : $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall i = 1..n$
   - Pre každé miesto j : $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall j = 1..n$

Príklad

Máme 3 objekty *A, B, C* a 3 miesta na ich umiestnenie *K, L, M*. Zadaná je matica nákladov $\bar{C}$ (c_{ij}, i =1..3, j =1..3)

$$\bar{C} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} K & L & M \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Premenné: $x_{AK}, x_{AL}, x_{AM}, x_{BL}, x_{BK}, x_{BM}, x_{CK}, x_{CL}, x_{CM} \in \{0,1\}$

Krit. f.: $2x_{AK} + 4x_{AL} + 3x_{AM} + 5x_{BK} + 3x_{BL} + 4x_{BM} + 3x_{CK} + 2x_{CL} + x_{CM} \to MIN$

Ohraničenia:

$x_{AK} + x_{AL} + x_{AM} = 1$ $\quad$ $x_{AK} + x_{BK} + x_{CK} = 1$

$x_{BK} + x_{BL} + x_{BM} = 1$ $\quad$ $x_{AL} + x_{BL} + x_{CL} = 1$

$x_{CK} + x_{CL} + x_{CM} = 1$ $\quad$ $x_{AM} + x_{BM} + x_{CM} = 1$

2. Priradzovací problém (väzby len medzi starými a novými objektmi)

- **Predpoklady**:
  - Máme *p* existujúcich objektov, *n* nových objektov a *n* miest. V tomto prípade existujú väzby medzi novými a existujúcimi objektmi.
  - Je známa matica prepravných sadzieb $\overline{W} = \left[w_{ik}\right]_p^n$ ktorá vyjadruje intenzitu **väzby medzi novými** (i=1..n) **a starými (existujúcimi) objektmi** (k=1..p)
  - a matica **vzdialeností** $\overline{D} = \left[d_{kj}\right]_n^p$ **medzi existujúcimi objektmi** (k=1..p) **a novými miestami** (j=1..n)
- Riešenie: **celočíselné programovanie**

2. Priradzovací problém (väzby len medzi starými a novými objektmi)

1. **Premenné:** $x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i = 1..n, \forall j = 1..n$
2. **Kriteriálna funkcia:** $f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \stackrel{!}{=} MIN$
3. **Ohraničenia:**

   Pre každý objekt i : $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall i = 1..n$

   Pre každé miesto j : $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall j = 1..n$

- **Matica nákladov:** $\overline{C} = \overline{W} \cdot \overline{D} = [w_{ik}]_p^n \cdot [d_{kj}]_n^p = [c_{ij}]_n^n$

Príklad – zadanie

- V tabuľke dole sú uvedené:
  - denné počty prepravovaných paliet medzi existujúcimi strojmi P, O, R a novými strojmi A, B, C (horná časť tabuľky),
  - vzdialenosti v metroch medzi existujúcimi strojmi P, O, R a jednotlivými miestami pre nové stroje E, F, G, H (dolná časť tabuľky).
- Z priestorových dôvodov nemožno premiestniť stroj B do miesta H.
- Nájdite optimálne rozmiestnenie nových strojov A, B, C do miest E, F, G, H

	Existujuce stroje [ks]	P	O	R
Nove stroje [ks]	A	5	4	2
	B	0	4	3
	C	4	3	2
	D	0	0	0
Mozne miesta [m]	E	1	3	4
	F	4	4	3
	G	5	3	5
	H	6	4	2

$$\bar{W} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ \rightarrow D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P & O & R \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\bar{D} = \begin{array}{c} \\ P \\ O \\ R \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E & F & G & H \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Príklad – riešenie

- **Matematický model:** $x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i = 1..4,\ j = 1..4$
  - Kriteriálna funkcia: $f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} \cdot x_{ij} \stackrel{!}{=} MIN$
  - Ohraničenia pre každý objekt: $\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1 \qquad \forall i = 1..4$
  - Ohraničenia pre každé miesto: $\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1 \qquad \forall j = 1..4$
- **Matica nákladov**:

$$\overline{C} = \overline{W} \cdot \overline{D} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P & O & R \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} . \begin{array}{c} \\ P \\ O \\ R \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E & F & G & H \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E & F & G & H \end{array} \\ \begin{bmatrix} 25 & 34 & 47 & 50 \\ 24 & 17 & 27 & 1000 \\ 21 & 28 & 39 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. Kvadratický priradzovací problém

- **Predpoklady**:
  - Majme *n* objektov, ktoré je potrebné umiestniť do *n* miest s minimálnymi nákladmi (neuvažujeme žiadne existujúce objekty).
  - Medzi novými objektmi existujú vzájomné väzby. Je známa matica vzdialeností medzi miestami pre umiestnenie objekty $\overline{D} = \left[d_{ij}\right]_n^n$
  - a matica prepravných sadzieb medzi objektami $\overline{W} = \left[w_{ij}\right]_n^n$
  - w_{ij} je intenzita väzby medzi *i*-tym a *j*-tym novým objektom.
- **Riešenie**:
  - **Metóda CRAFT** je heuristická a nezaručí nájdenie najlepšieho riešenia
  - **Metóda vetvenia a medzí** zaručuje nájdenie optimálneho riešenia, ale v nepolynomiálnom čase v závislosti od veľkosti vstupu *n*.

3. Kvadratický priradzovací problém

- Každé prípustné riešenie možno vyjadriť ako permutáciu: $\overline{P} = \left(p(1), p(2), \ldots, p(n)\right)$
- kde $p(i) = k$ znamená, že i-ty objekt bude umiestnený do miesta k
- Náklady pre akúkoľvek permutáciu sú:

$$f\left(\overline{P}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \cdot d_{p(i)p(j)}$$

- kde $d_{p(i)p(j)}$ je vzdialenosť medzi miestami $p(i)$ a $p(j)$

Metóda *CRAFT*

1. Z východiskovej (náhodnej) permutácie $\overline{P}$ sa vytvorí: $\binom{n}{2}$ nových permutácií výmenami všetkých dvojíc objektov vo východiskovej permutácii
2. Pre každú permutáciu sa vypočíta hodnota kriteriálnej funkcie $f\left(\overline{P}\right)$
3. Vyberie sa to najlepšie riešenie a stane sa východiskovou permutáciou pre nasledujúcu iteráciu algoritmu.
4. Celý postup sa opakuje dovtedy, kým sa zlepšuje kriteriálna funkcia z jednej iterácie na druhú.

Príklad (1)

- 4 nové stroje (1,2,3,4) môžu byť umiestené do miest A, B, C, D. Vzdialenosti medzi novými miestami sú uvedené v matici $\overline{D}$, denné počty prepravovaných paliet medzi dvojicami nových strojov sú v matici $\overline{W}$. Jednotkové prepravné náklady sú rovnaké.

$$\overline{W} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \overline{D} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 0 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Príklad (2)

- Vyjdeme z náhodného rozmiestnenia objektov reprezentovaného napr. permutáciou: $\overline{P} = (3,1,4,2)$
- Pre rozmiestnenie objektov zodpovedajúce uvedenej permutácii, t.j. (C, A, D, B) je hodnota kriteriálnej funkcie: $f(\overline{P}) = w_{12}d_{CA} + w_{13}d_{CD} + w_{14}d_{CB} + w_{23}d_{AD} + w_{24}d_{AB} + w_{34}d_{DB} =$
  $= 4.5 + 1.3 + 3.3 + 2.6 + 0.4 + 7.6 = 86$
- Všetkými možnými výmenami dvojíc objektov vytvoríme nové (susedné permutácie) a pre každdú z nich vypočítame hodnotu kriteriálnej funkcie:

Stroj	Stroj	$f(\overline{p})$
1 2 3 4	1 2 3 4	
C A D B	A C D B	86
	D A C B	76
	$\boxed{\text{B A D C}}$	$\boxed{64}$
	C D A B	66
	C B D A	84
	C A B D	82

Príklad (3)

- Najlepšia hodnota kriteriálnej funkcie v 1. iterácii zodpovedá permutácii $\overline{P} = (2,1,4,3)$, t.j. (B, A, D, C) s hodnotou kriteriálnej funkcie 64.
  - Preto táto permutácia sa stane východiskovou pre nasledujúcu iteráciu:

Stroj	Stroj	$f(\overline{p})$
1 2 3 4	1 2 3 4	
B A D C	A B D C	70
	$\boxed{\text{D A B C}}$	$\boxed{68}$
	C A D B	86
	B D A C	84
	B C D A	78
	B A C D	68

- Najlepšia hodnota kriteriálnej funkcie je po druhej iterácii 68, čo nie je lepšie, ako hodnota predchádzajúcej permutácie, takže výpočet končí.
- Výpočet je možné opakovať podľa potreby niekoľkokrát pre ľubovoľné východzie permutácie.

4. Zovšeobecnený distribučný problém

- **Predpoklady**:
  - Výrobca dodáva tovar n odberateľom a má k dispozícii konečný počet m miest pre postavenie distribučných centier.
  - Pre každé miesto sú určené fixné náklady $\boldsymbol{f_i}$ spojené so zriadením distribučného centra a prepravné náklady $\boldsymbol{c_{ij}}$ od i-teho distribučného centra k j-temu odberateľovi.
  - Úlohou je vybrať miesta pre zriadenie distribučných centier tak, aby celkové náklady (fixné aj prepravné) boli minimálne.
- **Riešenie**:
  A. **Celočíselné programovanie**
  B. **Heuristika** (klasický – procedurálny programovací prístup)
  C. **Logické programovanie ohraničení** (deklaratívny programovací prístup)

A. Celočíselné programovanie (1)

1. **Premenné**: Potrebujeme jednu binárnu premennú pre každdú potenciálnu lokalitu y_i (i = 1, 2 ... m)
   – y_i = 1 ak dané miesto bude vybrané pre zriadenie distribučného centra, ináč y_i = 0

- Podobne potrebujeme binárnu premennú pre každé možné priradenie odberateľa (j = 1, 2, ..., n) potenciálnemu distribučnému centru (i = 1, 2, ..., m)
  – x_{ij} = 1 ak i-te distribučné centrum bude dodávať j-temu odberateľovi, ináč x_{ij} = 0

2. **Kriteriálna funkcia**: Celkové náklady (fixné plus prepravné) majú byť mininálne:

$$f\left(\overline{x}, \overline{y}\right) = \sum_{i=1}^{m} f_i \cdot y_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

A. Celočíselné programovanie (2)

3. Ohraničenia:

- týkajúce sa priradenia každého odberateľa práve jednému distribučnému centru, t.j.

$$\forall j = 1..n: \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$$

- Ohraničenia ktoré zabezpečia, že ak niektoré miesto pre distribučné centrum nebude vybrané, potom mu nie je možné priradiť žiadneho odberateľa

$$\forall i = 1..m, \forall j = 1..n: \quad x_{ij} \le y_i$$

A. Celočíselné programovanie (3)

- **Výhody**:
  - Jednoduché a priamočiare riešenie
  - Deklaratívny prístup, stačí sformulovať celočíselný program
- **Nevýhody**:
  - Počet možností je $2^n.2^{n.m} = 2^{n.(1+m)}$. Pre úlohu reálneho rozmeru (napr. n = 80, m = 20) nezvládnuteľný rozmer
- **Záver**:
  - Ak nie sú dané špeciálne ohraničenia a rozmer úlohy nie je veľký, potom tento prístup je rozhodne najlepší

B. Heuristika (procedurálne programovanie) (1)

- Pre každý možný výber distribučných centier
  - t.j. každdú ich možnú podmnožinu, ktorých je spolu 2^m
- Priradenie odberateľov je triviálne - každého odberateľa priradíme najbližšiemu distribučnému centru.
  - Výpočet hodnoty nákladov pre takéto riešenie
- Výber riešenia s najnižšou hodnotou kriteriálnej funkcie (celkových nákladov)

B. Heuristika (procedurálne programovanie) (2)

- **Výhody**:
  - Výrazné zmenšenie priestoru prehľadávania, a teda omnoho rýchlejší výpočet
- **Nevýhody**:
  - Vývoj takéhoto programu (pre úlohu n = 80, m = 20) trval ca. 2 mesiace.
  - Pomerne malá zmena zadania, napr. **ak obmedzíme kapacity distribučných centier**, alebo ak pripustíme, že **odberateľ môže odoberať tovar z viacerých distribučných centier** znamená, že je nutné program úplne zmeniť.
- **Záver**:
  - Ak je rozmer úlohy veľký a zadanie úlohy sa určite neskôr už nebude meniť, potom je tento prístup vhodný

C. Logické programovanie ohraničení (deklaratívne programovanie)

- **Výhody**:
  - Naprogramovanie tej istej úlohy trvalo podstatne kratšie (cca. 2 týždne) a zdrojový kód je takisto rádovo kratší než v prípade procedurálneho programovania (alternatíva B)
  - Program je omnoho flexibilnejší, t.j. napr. zmena zadania si vyžiada jednoduchú zmenu programu.
- **Nevýhody**:
  - Pomalší výpočet ako v prípade alternatívy B.
- **Záver**:
  - Výborný prototypovací nástroj.

Úloha na prácu v skupinách

1. Prediskutujte v skupine medzi sebou prebrané typy úloh alokácie do viacerých miest, overte si pochopenie a rozdiely medzi jednotlivými typmi úloh. Zapíšte z toho kroku stručný sumár.
2. Spoločne identifikujte príklad konkrétnej reálnej aplikácie vybranej úlohy alokácie do viacerých miest (iný než tie, ktoré boli uvedené v prednáške). Slovne ju popíšte a sformulujte jej matematický model.
3. Uvažujte modifikovanú úlohu alokácie regionálneho distribučného centra do jedného miesta (konkrétne mesto). Distribučné centrum bude dodávať odberateľom do n miest v danom regióne (M_1, M_2 až M_n), pričom pre pokrytie všetkých odberateľov v jednom meste má k dispozícii samostatné auto. Náklady na zriadenie distribučného centra sú vo všetkých mestách približne rovnaké. Vzdialenosti medzi mestami sú presne dané vzhľadom na aktuálnu cestnú sieť (symetrická matica vzdialeností $\boldsymbol{D}$ s údajmi d_{ij}, i, j=1..n). Počet odberateľov v jednotlivých mestách je približne rovnaký a kapacita auta stačí na pokrytie objednávok všetkých odberateľov v jednom meste. Ako by ste riešili úlohu nájsť optimálne umiestnenie pre regionálne distribučné centrum?

Pomôcka: Stačí zostaviť vhodný matematický model. Úlohu môžete riešiť alebo všeobecne (preferované), alebo si ju skonkretizovať napr. pre 5 miest.