Posplošena dualna števila in višjeredna avtomatska diferenciacija

Lavš Luka

Osnova algebre

Definicija (Posplošena dualna števila)**.** *Naj bo* $n \in \mathbb{N}$ *število spremenljivk in* $m \in \mathbb{N}$ *red Taylorjeve razvite funkcije. Definirajmo množico simbolov* $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ *s sledečimi lastnostmi:*

$$\varepsilon_i^{m+1} = 0, \quad \varepsilon_i^j \neq 0 \text{ za } 1 \leq j \leq m, \quad \text{in } \varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_j \varepsilon_i$$

Naj bo večindeks $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$, *in* $\varepsilon^\alpha := \varepsilon_1^{\alpha_1} \cdots \varepsilon_n^{\alpha_n}$. *Potem je posplošeno dualno število oblike:*

$$X := f_0 + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} f_\alpha \, \varepsilon^\alpha, \quad f_\alpha \in \mathbb{R}$$

Izrek (Taylorjeva razširitev preko posplošenih dualnih števil)**.** *Naj bo* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *gladka funkcija. Potem velja:*

$$f(\boldsymbol{x} + \varepsilon) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \, \partial^\alpha f(\boldsymbol{x}) \, \varepsilon^\alpha$$

kjer je $\partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Dokaz (osnutek). *Sledi iz večdimenzionalnega Taylorjevega razvoja funkcije* f *okoli točke* $\boldsymbol{x}$, *pri čemer se simboli* ε_i *obnašajo kot formalni odvodni elementi (analogno simbolični diferenciaciji), a z nilpotentnostjo* $\varepsilon_i^{m+1} = 0$, *kar povzroči prekinitev vrste.*

Trditev (Praktična uporaba)**.** *Z ovitjem funkcije* f *znotraj posplošene dualne algebre lahko simultano izračunamo vse parcialne odvode do reda* m *v eni sami evalvaciji funkcije.*

[1]

[1] Teoretično ozadje: https://darioizzo.github.io/audi/theory_algebra.html