

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Ime Priimek

**NASLOV DELA**

Delo diplomskega seminarja

Mentorica: izr. prof. dr. Ime Priimek  
Somentor: doc. dr. Ime Priimek

Ljubljana, 2016



# Kazalo

<b>1 Drugi komplementarni zagrebški indeks</b>	<b>1</b>
1.1 k kot funkcija parametra n . . . . .	1
<b>2 Naloga</b>	<b>4</b>
<b>3 Uvod</b>	<b>4</b>
<b>4 Zveznost</b>	<b>4</b>
4.1 Naslov morebitnega (pod)razdelka . . . . .	6
4.2 Pisanje algoritmov . . . . .	6
<b>5 Konec dela</b>	<b>7</b>
<b>Literatura</b>	<b>9</b>



## **Naslov dela**

### **POVZETEK**

V povzetku na kratko opišemo vsebinske rezultate dela. Sem ne sodi razлага organizacije dela – v katerem poglavju/razdelku je kaj, pač pa le opis vsebine.

## **Angleški prevod slovenskega naslova dela**

### **ABSTRACT**

Prevod slovenskega povzetka v angleščino.

**Math. Subj. Class. (2020):** 74B05, 65N99

**Ključne besede:** integracija, kompleks,  $C^*$ -algebri

**Keywords:** integration, complex,  $C^*$ -algebras



# 1 Drugi komplementarni zagrebški indeks

**Definicija 1.1.** Naj bo  $G$  graf ter  $E(G)$  množica njegovih povezav. Z  $d_G(u)$  označimo stopnjo vozlišča  $u \in E(G)$ . Tedaj definiramo drugi komplementarni zagrebški indeks kot:

$$cM_2(G) := \sum_{uv \in E(G)} |d_G(u)^2 - d_G(v)^2| \quad (1.1)$$

Do nedavnega je veljala naslednja domneva, ki pa jo je dokazal Gao [3].

**Trditev 1.2.** *Naj bo  $\mathcal{G}_n$  množica povezanih grafov reda  $n$ ,  $K_m$  popoln graf, torej  $(m-1)$ -regularen, in  $\overline{K}_m$  njegov komplement, torej nepovezan graf z  $m$  vozlišči.*

*Tedaj za vsak  $n \geq 5$  velja, da če  $G^* \in \mathcal{G}_n$  doseže maksimalno vrednost drugega komplementarnega Zagrebškega indeksa  $cM_2(G)$ , potem obstaja  $k < \lceil n/2 \rceil$ , tak da je  $G^*$  izomorfen grafu  $K_k + \overline{K}_{n-k}$ :*

$$\forall n \geq 5 : G^* \in \arg \max_{G \in \mathcal{G}_n} cM_2(G) \implies \exists k < \lceil \frac{n}{2} \rceil : G^* \cong K_k + \overline{K}_{n-k}, \quad (1.2)$$

kjer je operacija  $+$  definirana kot

$$G_1 + G_2 := \left( V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{\{v_1, v_2\} \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\} \right).$$

## 1.1 $k$ kot funkcija parametra $n$

Ker zdaj po Gao [3] vemo, da domneva 1.2 drži, si želimo izraziti  $k$  kot funkcijo parametra  $n$ . V tem razdelku bomo tako funkcijo izpeljali.

**Trditev 1.3.** *Naj bo  $n \geq k$ , tedaj je drugi komplementarni zagrebški indeks grafa  $G = K_k + \overline{K}_{n-k}$  enak  $cM_2(G) = k(n-k)((n-1)^2 - k^2)$ .*

*Dokaz.* Naj bo  $G = K_k + \overline{K}_{n-k}$ . Graf  $G$  je очitno dvodelen, zato njegove povezave razdelimo na notranje povezave podgrafa  $K_k$ , povezave med  $K_k$  in  $\overline{K}_{n-k}$  ter na notranje povezave podgrafa  $\overline{K}_{n-k}$ .

$$\begin{aligned} cM_2(G) &= \sum_{uv \in E(G)} |d_G(u)^2 - d_G(v)^2| \\ &= \sum_{uv \in E(K_k)} |((k-1) + (n-k))^2 - ((k-1) + (n-k))^2| + \\ &\quad \sum_{u \in V(K_k) \wedge v \in V(\overline{K}_{n-k})} |((k-1) + (n-k))^2 - k^2| + \\ &\quad \sum_{uv \in E(\overline{K}_{n-k})} |k^2 - k^2| \\ &= |V(K_k)||V(\overline{K}_{n-k})|((n-1)^2 - k^2) \\ &= k(n-k)((n-1)^2 - k^2) \end{aligned}$$

□

Za lažje nadaljevanje brez dokaza navedimo Cardanovo formulo, ki jo bomo uporabili pri naši funkcijski analizi.

**Izrek 1.4** (Cardanova formula). *Naj bo  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  splošna kubična enačba z  $a \neq 0$  ter naj bodo  $\Delta_0 = b^2 - 3ac$ ,  $\Delta_1 = 2b^2 - 9abc + 27a^2d$  in  $C = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}}$ . Potem so rešitve dane kubične enačbe enake:*

$$x_k = -\frac{1}{3a} \left( b + \xi^k C + \frac{\Delta_0}{\xi^k C} \right), \quad (1.3)$$

za  $\xi = e^{2\pi i/3}$ , ter  $k \in \{0, 1, 2\}$ .

**Trditev 1.5.** Za poljuben  $n \in \mathbb{R}$  funkcija  $f(n, k) = k(n - k)((n - 1)^2 - k^2)$  doseže maksimum pri

$$k = \frac{1}{12} \left( 3n - \sqrt[3]{3} e^{\frac{4i\pi}{3}} \sqrt[3]{A} + \frac{3^{2/3} B}{e^{\frac{4i\pi}{3}} \sqrt[3]{A}} \right),$$

kjer sta  $A$  in  $B$  enaka:

$$\begin{aligned} A &= 9(n - 2)n(3n - 2) \\ &\quad + 4\sqrt{3} \sqrt{-(n - 1)^2 \left( n(n(2n(34n - 73) + 201) - 128) + 32 \right)} ; \\ B &= (16 - 11n)n - 8. \end{aligned}$$

Velja tudi, da je  $f$  konkavna na intervalu

$$\left[ \frac{n}{4} - \frac{\sqrt{11n^2 - 16n + 8}}{4\sqrt{3}}, \frac{n}{4} + \frac{\sqrt{11n^2 - 16n + 8}}{4\sqrt{3}} \right]$$

in konveksna drugod.

*Dokaz.* V dokazu si bomo pomagali s parcialnimi odvodi funkcije  $f$ :

$$\frac{\partial f}{\partial k} = 4k^3 - 3nk^2 - 2(n - 1)^2k + n(n - 1)^2 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial k^2} = 12k^2 - 6nk - 2(n - 1)^2 \quad (1.5)$$

- Ob razrešitvi neenačbe  $\frac{\partial^2 f}{\partial k^2} \leq 0$ , dobimo rešitev

$$k \in \left[ \frac{n}{4} - \frac{\sqrt{11n^2 - 16n + 8}}{4\sqrt{3}}, \frac{n}{4} + \frac{\sqrt{11n^2 - 16n + 8}}{4\sqrt{3}} \right], \quad (1.6)$$

$f$  je na tem intervalu torej res konkavna, drugod pa konveksna.

- Zanima nas rešitev enačbe  $\frac{\partial f}{\partial k} = 0$ . Najprej pokažimo, da so vse njene rešitve realne. Res, funkcija  $\frac{\partial f}{\partial k}$  doseže maksimuma ravno na robovih intervala konkavnosti 1.6. Z numeričnimi ter asymptotskimi metodami se da pokazati, da sta si, za vsak  $n$ , funkciji v robovih intervala nasprotno predznačeni. Velja namreč:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial k} \left( n, \frac{n}{4} - \frac{\sqrt{11n^2 - 16n + 8}}{4\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial k} \left( n, \frac{n}{4} + \frac{\sqrt{11n^2 - 16n + 8}}{4\sqrt{3}} \right) \\ &= -\frac{17}{27}n^6 + \frac{47}{18}n^5 - \frac{187}{36}n^4 + \frac{169}{27}n^3 - \frac{163}{36}n^2 + \frac{16}{9}n - \frac{8}{27} < 0 \end{aligned}$$

Sedaj enačbo  $\frac{\partial f}{\partial k} = 0$  razrešimo s pomočjo Cardanove formule 1.4. Po daljših izračunih dobimo, da je  $k$ -ta rešitev enačbe enaka:

$$x_k = \frac{1}{12} \left( \underbrace{3n}_{\text{prvi člen}} - \underbrace{\sqrt[3]{3} e^{\frac{2i\pi k}{3}} \sqrt[3]{A}}_{\text{drugi člen}} + \underbrace{\frac{3^{2/3} e^{-\frac{2i\pi k}{3}} B}{\sqrt[3]{A}}}_{\text{tretji člen}} \right),$$

kjer se  $A$  in  $B$  ujemata z definicijama v trditvi 1.5. S tem zaključimo dokaz.  $\square$

Lahko pa še pokažemo, da je funkcija  $f$ , za vsak  $n \geq 5$ , konkavna tudi na intervalu  $[0, \lceil \frac{n}{2} \rceil]$ . To res velja, saj

$$\forall n : \frac{n}{4} - \frac{\sqrt{11n^2 - 16n + 8}}{4\sqrt{3}} \leq 0.$$

Podobno za vsak  $n \geq 5$  velja:

$$\frac{n}{4} + \frac{\sqrt{11n^2 - 16n + 8}}{4\sqrt{3}} > \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

Če nam uspe pokazati še, da rešitev  $x_k$ , ki je po velikosti druga, leži na intervalu  $[0, \lceil \frac{n}{2} \rceil]$ ; potem lahko sklepamo, da je  $\arg \max_{1 \leq k \leq \lceil n/2 \rceil} f$  v neposredni bližini rešitve  $x_k$ .

In res empirična in asimptotska analiza pokaže, da je  $x_0 \leq x_2 \leq x_1$  za vsak  $n$  ter, da  $x_2 < \lceil \frac{n}{2} \rceil$  za vsak  $n \geq 5$ .

Od tu sledi naslednji izrek, katerega smo ravnokar tudi dokazali.

**Izrek 1.6** ( $\mathbf{k}$  kot funkcija  $\mathbf{n}$ ). *Naj bo  $\mathcal{G}_n$  množica povezanih grafov reda  $n$ . Naj bo  $cM_2 : \mathcal{G}_n \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija, ki grafu priredi drugi komplementarni zagrebški indeks. Naj bo  $\Gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  "funkcija" s predpisom:*

$$\Gamma(n) = \arg \max_{x \in \{\lceil h(n) \rceil, \lfloor h(n) \rfloor\}} cM_2(x), \quad (1.7)$$

kjer so  $h$ , A ter B podani kot:

$$h(n) = \frac{1}{12} \left( 3n - \sqrt[3]{3} e^{\frac{4i\pi}{3}} \sqrt[3]{A} + \frac{3^{2/3} B}{e^{\frac{4i\pi}{3}} \sqrt[3]{A}} \right);$$

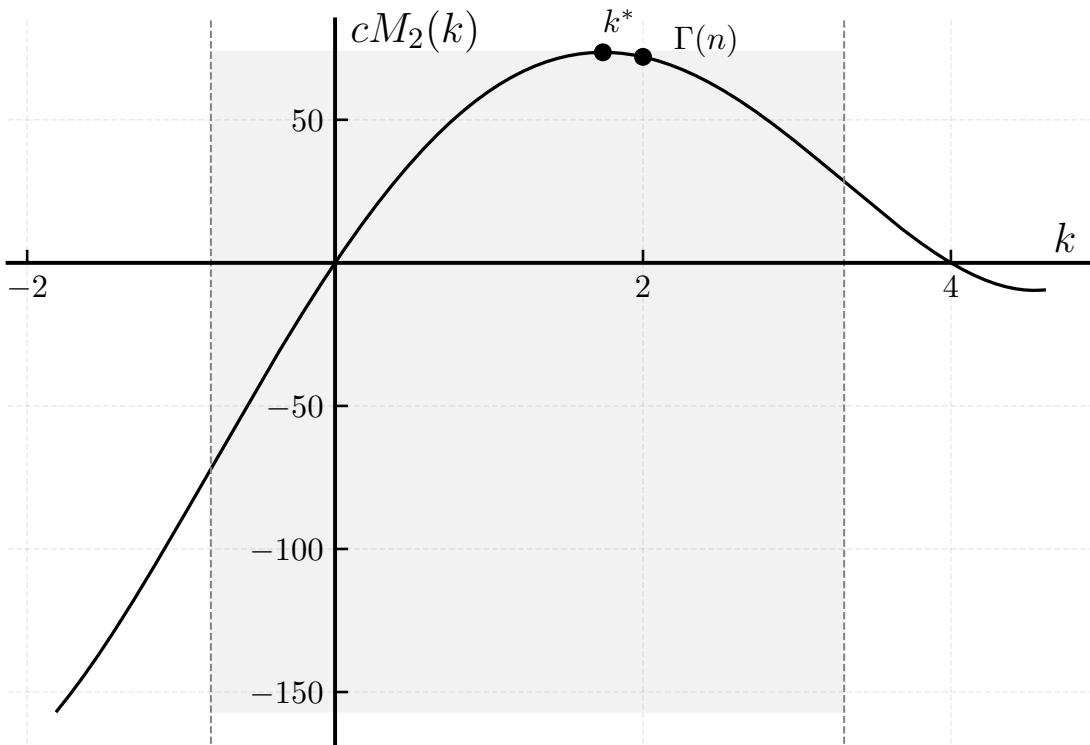
$$A = 9(n-2)n(3n-2) \\ + 4\sqrt{3} \sqrt{-(n-1)^2 \left( n(n(2n(34n-73)+201)-128)+32 \right)};$$

$$B = (16-11n)n-8$$

Tedaj za vsak  $n \geq 5$  velja:

$$G^* \in \arg \max_{G \in \mathcal{G}_n} cM_2(G) \implies \exists k \in \Gamma(n) : G^* \cong K_k + \overline{K}_{n-k} \quad (1.8)$$

**Opomba 1.7.** "Funkcija"  $\Gamma$  iz izreka 1.6 ni čista funkcija, saj obstajajo števila  $n \geq 5$  za katere je  $\Gamma(n)$  množica dveh števil. Primeri takih (zaporednih) vrednosti  $n$  so: 12, 117, 450, 4674, 48620, 505829, 1955714, 20347010, ...



Slika 1:  $k^* := \arg \max_{x \in [0, \lceil n/2 \rceil]} f(n, x)$  in  $\Gamma(n) := \arg \max_{x \in [0, \lceil n/2 \rceil] \wedge x \in \mathbb{N}} f(n, x)$

## 2 Naloga

### 3 Uvod

Na začetku prvega poglavja/razdelka (ali v samostojnem razdelku z naslovom Uvod) napišite kratek zgodovinski in matematični uvod. Pojasnite motivacijo za problem, kje nastopa, kje vse je bil obravnavan. Na koncu opišite tudi organizacijo dela – kaj je v kakšnem razdelku.

Če se uvod naravno nadaljuje v besedilo prvega poglavja, lahko nadaljujete z besedilom v istem razdelku, sicer začnete novega. Na začetku vsakega razdelka/podrazdelka poveste, čemu se bomo posvetili v nadaljevanju. Pri pisanju uporabljajte ukaze za matematična okolja, med formalnimi enotami dodajte vezno razlagalno besedilo. ■

### 4 Zveznost

V tem poglavju bomo ponovili osnovne pojme, povezane z zveznostjo funkcij. Pri tem bomo sledili [4].

Viri se v seznamu literature prikažejo le, če jih uporabimo v besedilu, zato moramo citirati tudi [6, 2, 5, 7, 1].

**Definicija 4.1.** Funkcija  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je *zvezna*, če ...

### Group 11: The Complementary Second Zagreb Index (2 students, round 1)

The *Complementary Second Zagreb Index* (also CSZ index) of a graph  $G$  is defined as

$$cM_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} |(d_G(u))^2 - (d_G(v))^2|,$$

where  $d_G(u)$  denotes the degree of a vertex  $u$  in  $G$  and  $E(G)$  represents the set of edges of  $G$ . Note that  $+$  is the operation join of two graphs in the following conjecture.

**Conjecture 9.** If  $G^*$  is a graph having the maximum value of  $cM_2$  among all connected graphs of order  $n$ , then  $G^*$  is isomorphic to  $K_k + \bar{K}_{n-k}$  for some  $k$  satisfying  $k < \lceil n/2 \rceil$ , where  $n \geq 5$  and the graph  $K_k + \bar{K}_{n-k}$ .

Your tasks are the following:

- Test the above conjecture.
- Assuming it is true, determine  $k$  as a function of  $n$ .
- Find which graphs have minimum and which have maximum among graphs on  $n$  vertices with cyclomatic number  $k$ .

In order to do so test systematically for smaller graphs. For larger graph use some metaheuristic.

Slika 2: Problem

Podrobneje si poglejmo naslednji rezultat. Ker se bomo kasneje nanj sklicevali, si pripravimo oznako z ukazom `\label{oznaka}`. Seveda morajo biti označke različnih trditev različne. Enako označujemo tudi druga okolja oziroma enote besedila.

**Izrek 4.2.** Zvezna funkcija na zaprtem intervalu je enakomerno zvezna.

*Dokaz.* Na začetku dokaza, če je to le mogoče in smiselno, razložite idejo dokaza.

Dokazovali bomo s protislovjem. Pomagali si bomo z definicijo zveznosti in s kompaktnostjo intervala. Izberimo  $\varepsilon > 0$ . Če  $f$  ni enakomerno zvezna, potem za vsak  $\delta > 0$  obstajata  $x, y$ , ki zadoščata

$$|x - y| < \delta \quad \text{in} \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon. \quad (4.1)$$

□

V zgornjem primeru smo kvadratek za konec dokaza postavili v zadnjo vrstico besedila, ki je vrstična formula, s pomočjo ukaza `\qedhere`. Ta ukaz ustrezno deluje znotraj okolij *equation, align\** in podobnih, ne pa znotraj `$$ ... $$`.

Oglejmo si še enkrat neenačbi (4.1). Na formule se sklicujemo z ukazom `\eqref{oznaka}`, ■■■ ki postavi zaporedno številko enačbe v oklepaje, na trditve in ostale enote pa z ukazom `\ref{oznaka}`. Črni pravokotnik ob robu strani označuje predolgo vrstico, kjer L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xni uspel pravilno postaviti besedila, zato mu morate pomagati, npr. tako, da stavek nekoliko preoblikujete, sami razdelite nedeljivo enoto (npr. razdelite matematično formulo na dva dela) ali pa ponudite možnosti za deljenje težavne besede s pomočjo znakov `\text{--}`, ki jih postavite na mesto, kjer se besedo sme deliti, npr. `te\text{--}žav\text{--}nost\text{--}ni\text{--}ca`. Zgoraj bi tako lahko zapisali:

Oglejmo si še enkrat neenačbi (4.1). Za sklicevanje na označene enote besedila imamo na razpolago dva ukaza; na formule se sklicujemo z ukazom `\eqref{oznaka}`,

...

V predzadnjem odstavku je v oklepaju za okrajšavo npr. nastal predolg presledek sredi stavka, saj je L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X zaradi pike sklepal, da je na tem mestu stavka konec. Tak predolg presledek preprečimo tako, da za piko sredi stavka postavimo poševnico in za njo presledek, torej \ .

Če dokaz trditve ne sledi neposredno formulaciji trditve, moramo povedati, kaj bomo dokazovali. To naredimo tako, da ob ukazu za okolje dokaz dodamo neobvezni parameter, v katerem napišemo besedilo, ki se bo izpisalo namesto besede *Dokaz*, npr. \begin{Dokaz}[Dokaz izreka \ref{izr:enakomerno}].

*Dokaz izreka 4.2.* Dokazovanja te trditve se lahko lotimo tudi takole ... □

## 4.1 Naslov morebitnega (pod)razdelka

Besedilo naj se nadaljuje v vrstici naslova, torej za ukazom \subsection{} ne smete izpustiti prazne vrstice.

Podobno kot lahko spremenimo ime dokaza, lahko dodamo komentar v ime trditve, torej s pomočjo neobveznega parametra; prvega od spodnjih izpisov dosežemo z ukazom \begin{posledica}[izrek o vmesni vrednosti]. Če želimo v paratu navesti vir, pri katerem bomo navedli podatek o tem, kje v viru to trditev najdemo, pa uporabimo ukaz \begin{posledica}[\protect\cite[izrek 3.14]{glob}]. ■ Seveda lahko obe možnosti kombiniramo.

**Posledica 4.3** (izrek o vmesni vrednosti). *Naj bo f zvezna in ...*

Ali pa

**Posledica 4.4** (izrek o vmesni vrednosti [4, izrek 3.14]). *Naj bo f zvezna in ...*

Podobno lahko napovemo tudi vsebino primera.

**Primer 4.5** (nezvezna funkcija nima nujno lastnosti povprečne vrednosti). Naj bo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana s predpisom ... ◇

## 4.2 Pisanje algoritmov

Za pisanje algoritmov sta na voljo okolji `algorithm` in `algorithmic` iz paketov `algorithm` in `algorithmicx`, ki sodeljujeta podobno kot `table` in `tabular`. Algoritmi plavajo med tekstrom, enako kot slike in tabele, nanje se lahko tudi sklicujemo, kot prikazano v izvorni kodi in v algoritmu 1. Sklicujemo se lahko tudi na pomembne vrstice, npr. na vrstico 19, ki predstavlja glavni del algoritma. Za primer pisanja algoritma se posvetujte s primerom v tem dokumentu, za bolj napredne primere uporabe, kot na primer razbijanje algoritma na več kosov, pa z (precej razumljivo) uradno dokumentacijo<sup>1</sup>. Če želite vključiti izvorno kodo nekega programa, priporočamo paket `minted`<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup><http://tug.ctan.org/macros/latex/contrib/algorithmicx/algorithmicx.pdf>

<sup>2</sup><https://github.com/gpoore/minted>

---

**Algoritem 1** Opis, ki ima enako funkcionalnost kot opis pod sliko.

---

**Vhod:** Števili  $n, m \in \mathbb{N}, n > m$ .

**Izhod:** Decimalno število  $x$ , ki aproksimira rešitev enačbe  $nx = m$ .

```
1: function REŠI( $n, m$ )           ▷ Vsi vhodni parametri morajo biti opisani.  
2:    $a \leftarrow []$                   ▷ Spremenljivka  $a$  naj postane prazna kopica.  
3:   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do  
4:     if  $i \bmod 7 = 5$  then  
5:       HEAPOP( $a$ )  
6:     else if  $i < 5$  then  
7:       HEAPPUSH( $a, \frac{i+12}{7} + \pi$ )      ▷ Lahko uporabljamo matematiko.  
8:     else  
9:       HEAPPUSH( $a, i$ )  
10:    end if  
11:   end for                      ▷ Prazna vrstica  
12:    $x \leftarrow 0$                   ▷ To je primer komentarja.  
13:   for each e in a do  
14:      $x \leftarrow 1 + \sqrt[e]{x}$   
15:   end for  
16:   while  $|x| > \varepsilon$  do  
17:      $x \leftarrow x/2$   
18:   end while  
19:    $x \leftarrow m/n$   
20:   return x          ▷ Vsi izhodni parametri morajo biti opisani nad algoritmom.  
21: end function
```

---

## 5 Konec dela

Na konec dela sodita angleško-slovenski slovarček strokovnih izrazov in seznam uporabljenih literatur, morebitne priloge (programska koda, daljša ponovitev dela snovi, ki je bil obravnavan med študijem ...) pa neposredno pred ti enoti. Slovar naj vsebuje vse pojme, ki ste jih spoznali ob pripravi dela, pa tudi že znane pojme, ki ste jih spoznali pri izbirnih predmetih. Najprej navedite angleški pojem (ti naj bodo urejeni po abecedi) in potem ustrezni slovenski prevod; zaželeno je, da temu sledi tudi opis pojma, lahko komentar ali pojasnilo. Slovarska gesla navajajte z ukazom \geslo{}, npr. \geslo{continuous}{zvezen}.

Pri navajanju literature si pomagajte s spodnjimi primeri; najprej je opisano pravilo za vsak tip vira, nato so podani primeri. Člen literature napišete z ukazom \bibitem{oznaka} podatki o viru, kjer mora ozmaka enolično določati vir. Poselj opozarjam, da spletni viri uporabljajo paket url, ki je vključen v .cls datoteki. Polje "ogled" pri spletnih virih je obvezno; če je kak podatek neznani, ustrezno "polje" seveda izpustimo. Literaturo je potrebno urediti po abecednem vrstnem redu; najprej navedemo vse vire z zanimimi avtorji (tiskane in spletnne) po abecednem redu avtorjev (po priimkih, nato imenih), nato pa spletnne vire brez avtorjev, urejene po naslovnih strani. Če isti vir navajamo v dveh oblikah, kot tiskani in spletni vir, najprej navedemo tiskani vir, nato pa še podatek o tem, kje je dostopen v elektronski

obliki.

## Slovar strokovnih izrazov

**continuous** zvezen

**uniformly continuous** enakomerno zvezen

**compact** kompakten – metrični prostor je kompakten, če ima v njem vsako zaporedje stekališče; podmnožica evklidskega prostora je kompaktna natanko tedaj, ko je omejena in zaprta

**glide reflection** zrcalni zdrs ali zrcalni pomik – tip ravninske evklidske izometrije, ki je kompozitum zrcaljenja in translacije vzdolž iste premice

**lattice** mreža

**link** splet

**partition**  $\sim$  of a set razdelitev množice;  $\sim$  of a number razčlenitev števila

## Literatura

- [1] P. Angelini, F. Frati in M. Kaufmann, *Straight-line rectangular drawings of clustered graphs*, Discrete Comput. Geom. **45**(1) (2011) 88–140.
- [2] S. E. Cappell in J. L. Shaneson, *Singularities and immersions*, Annals of Mathematics **105**(3) (1977) 539–552, [ogled 1. 1. 2023].
- [3] H. Gao, *Extremal graphs with maximum complementary second zagreb index*, AIMS Mathematics **10**(7) (2025) 16105–16116, dostopno na <https://www.aimspress.com/article/doi/10.3934/math.2025721>.
- [4] J. Globevnik in M. Brojan, *Analiza 1*, Matematični rokopisi **25**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2010.
- [5] J. Kališnik in J. Mrčun, *Upodobitev orbiterosti: diplomska delo : Prešernova nagrada študentom*, J. Kališnik, 2004, dostopno na <https://books.google.si/books?id=yhI8NQAACAAJ>.
- [6] S. Lang, *Fundamentals of differential geometry*, Springer New York, 1999.
- [7] Wikipedia contributors, *Matrix (mathematics)* — Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2022, [ogled 1. 1. 2023], dostopno na [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Matrix\\_\(mathematics\)&oldid=1128559126](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Matrix_(mathematics)&oldid=1128559126).