

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Luka Lavš, Tinka Napret-Kaučič

KOMPLEMENTARNI DRUGI ZAGREBŠKI INDEKS

Delo finančnega praktikuma

Mentor: dr. Riste Škrekovski
Somentor: dr. Timotej Hrga

Ljubljana, december, 2025

Kazalo

1	Drugi komplementarni Zagrebški indeks	1
2	k kot funkcija parametra n	1
3	Graf danega ciklometričnega števila	5
3.1	Problem minimuma	6
3.2	Problem maksimuma	7
4	Preverjanje manjših grafov	7
5	Metaheuristične metode	8
	Literatura	9

1 Drugi komplementarni Zagrebški indeks

Definicija 1.1. Naj bo G graf ter $E(G)$ množica njegovih povezav. Z $d_G(u)$ označimo stopnjo vozlišča $u \in E(G)$. Tedaj definirajmo drugi komplementarni Zagrebški indeks (DKZI) kot:

$$\text{cM}_2(G) := \sum_{uv \in E(G)} |d_G(u)^2 - d_G(v)^2| \quad (1.1)$$

V tem delu se bomo osredotočili na problem, pri katerih povezanih grafih DKZI doseže ekstremne vrednosti. Za začetek navedimo trditev, ki jo je dokazal Gao [1], leta 2025.

Trditev 1.2. Naj bo \mathcal{G}_n množica povezanih grafov reda n , K_m popoln graf, torej $(m-1)$ -regularen, in \overline{K}_m njegov komplement, torej nepovezan graf z m vozlišči.

Tedaj za vsak $n \geq 5$ velja, da če $G^* \in \mathcal{G}_n$ doseže maksimalno vrednost drugega komplementarnega Zagrebškega indeksa $\text{cM}_2(G)$, potem obstaja $k < \lceil n/2 \rceil$, tak da je G^* izomorfen grafu $K_k + \overline{K}_{n-k}$. Oziroma krajše:

$$\forall n \geq 5 : G^* \in \arg \max_{G \in \mathcal{G}_n} \text{cM}_2(G) \implies \exists k < \lceil \frac{n}{2} \rceil : G^* \cong K_k + \overline{K}_{n-k}. \quad (1.2)$$

Tu je operacija $+$ definirana kot join grafov, torej za grafa G in H je $G + H$ graf, ki ga dobimo tako, da vzamemo disjunktna grafa G in H ter dodamo vse povezave med vsakim vozliščem grafa G in vsakim vozliščem grafa H .

2 k kot funkcija parametra n

Trditev 1.2 nam pove, da so grafi, ki za dano število vozlišč n dosežejo maksimalno vrednost drugega komplementarnega Zagrebškega indeksa, oblike $K_k + \overline{K}_{n-k}$. Glede parametra k pa zgolj omeji območje iskanja na $[0, \lceil \frac{n}{2} \rceil]$. S tem se ne zadovoljimo prehitro ter analitično poiščimo funkcijo Γ , ki bo za dani parameter n vrnila ustrezno število k .

Najprej predstavimo DKZI grafa iz trditve 1.2 kot funkcijo parametrov n in k . Nato pa dano funkcijo maksimizirajmo, kjer se seveda omejimo na naravna števila.

Trditev 2.1. Naj bo $n \geq k$, tedaj je DKZI grafa $G = K_k + \overline{K}_{n-k}$ enak $\text{cM}_2(G) = k(n-k)((n-1)^2 - k^2)$.

Dokaz. Naj bo $G = K_k + \overline{K}_{n-k}$. Graf G je očitno sestavljen iz dveh gruč, zato njegove povezave razdelimo na notranje povezave podgrafa K_k , povezave med K_k in

\overline{K}_{n-k} ter na notranje povezave podgrafa \overline{K}_{n-k} .

$$\begin{aligned}
\text{cM}_2(G) &= \sum_{uv \in E(G)} |d_G(u)^2 - d_G(v)^2| \\
&= \sum_{uv \in E(K_k)} |((k-1) + (n-k))^2 - ((k-1) + (n-k))^2| + \\
&\quad \sum_{u \in V(K_k) \wedge v \in V(\overline{K}_{n-k})} |((k-1) + (n-k))^2 - k^2| + \\
&\quad \sum_{uv \in E(\overline{K}_{n-k})} |k^2 - k^2| \\
&= |V(K_k)| |V(\overline{K}_{n-k})| ((n-1)^2 - k^2) \\
&= k(n-k)((n-1)^2 - k^2)
\end{aligned}$$

□

Sedaj funkcijo imamo, označimo jo z $f(n, k) = k(n-k)((n-1)^2 - k^2)$. Najprej poiščimo njen maksimum (pri fiksnem n) na množici realnih števil. Pri tem si bomo pomagali s Cardanovo formulo [3] ter z analizo odvodov.

Izrek 2.2 (Cardanova formula). *Naj bo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ splošna kubična enačba z $a \neq 0$ ter naj bodo $\Delta_0 = b^2 - 3ac$, $\Delta_1 = 2b^2 - 9abc + 27a^2d$ in $C = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}}$. Potem so rešitve dane kubične enačbe enake:*

$$x_j = -\frac{1}{3a} \left(b + \xi^j C + \frac{\Delta_0}{\xi^j C} \right), \quad (2.1)$$

za $\xi = e^{2\pi i/3}$, ter $j \in \{0, 1, 2\}$.

Trditev 2.3. *Za poljuben $n \in \mathbb{R}$ funkcija $f(n, k) = k(n-k)((n-1)^2 - k^2)$ doseže maksimum pri*

$$k = \frac{1}{12} \left(3n - \sqrt[3]{3} e^{\frac{4i\pi}{3}} \sqrt[3]{A} + \frac{3^{2/3} B}{e^{\frac{4i\pi}{3}} \sqrt[3]{A}} \right),$$

kjer sta A in B definirana kot:

$$\begin{aligned}
A &= 9(n-2)n(3n-2) \\
&\quad + 4\sqrt{3} \sqrt{-(n-1)^2(n(2n(34n-73) + 201) - 128) + 32}; \\
B &= (16 - 11n)n - 8.
\end{aligned}$$

Velja tudi, da je f konkavna na intervalu

$$\left[\frac{n}{4} - \frac{\sqrt{11n^2 - 16n + 8}}{4\sqrt{3}}, \frac{n}{4} + \frac{\sqrt{11n^2 - 16n + 8}}{4\sqrt{3}} \right]$$

in konveksna drugod.

Dokaz. V dokazu si bomo pomagali s parcialnima odvodoma funkcije f :

$$\frac{\partial f}{\partial k} = 4k^3 - 3nk^2 - 2(n-1)^2k + n(n-1)^2 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial k^2} = 12k^2 - 6nk - 2(n-1)^2 \quad (2.3)$$

Kvadratna neenačba $\frac{\partial^2 f}{\partial k^2} \leq 0$, glede na parameter k , nam da rešitev

$$k \in \left[\frac{n}{4} - \frac{\sqrt{11n^2 - 16n + 8}}{4\sqrt{3}}, \frac{n}{4} + \frac{\sqrt{11n^2 - 16n + 8}}{4\sqrt{3}} \right], \quad (2.4)$$

f je torej tu res konkavna.

Pokažimo, da so vse rešitve enačbe $\frac{\partial f}{\partial k} = 0$ realne. To velja, saj sta si vrednosti ekstremov funkcije $\frac{\partial f}{\partial k}$ (parametra k) nasprotno predznačeni. Velja namreč:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial k} \left(n, \frac{n}{4} - \frac{\sqrt{11n^2 - 16n + 8}}{4\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial k} \left(n, \frac{n}{4} + \frac{\sqrt{11n^2 - 16n + 8}}{4\sqrt{3}} \right) \\ &= -\frac{17}{27}n^6 + \frac{47}{18}n^5 - \frac{187}{36}n^4 + \frac{169}{27}n^3 - \frac{163}{36}n^2 + \frac{16}{9}n - \frac{8}{27} < 0 \end{aligned}$$

Sedaj pa enačbo $\frac{\partial f}{\partial k} = 0$ razrešimo s pomočjo Cardanove formule 2.2. Po nekaj izračunih vidimo, da je j -ta rešitev enačbe enaka:

$$x_j = \frac{1}{12} \left(\underbrace{3n}_{\text{prvi člen}} - \underbrace{\sqrt[3]{3e^{\frac{2i\pi j}{3}} \sqrt[3]{A}}}_{\text{drugi člen}} + \underbrace{\frac{3^{2/3} e^{-\frac{2i\pi j}{3}} B}{\sqrt[3]{A}}}_{\text{tretji člen}} \right),$$

kjer sta A in B enaka kot v trditvi 2.3. S tem zaključimo dokaz. □

Z nekaj dodatnimi izračuni lahko še pokažemo, da je funkcija f , za vsak $n \geq 5$, konkavna tudi na intervalu $[0, \lceil \frac{n}{2} \rceil]$. To je res, saj

$$\forall n \in \mathbb{R} : \frac{n}{4} - \frac{\sqrt{11n^2 - 16n + 8}}{4\sqrt{3}} \leq 0.$$

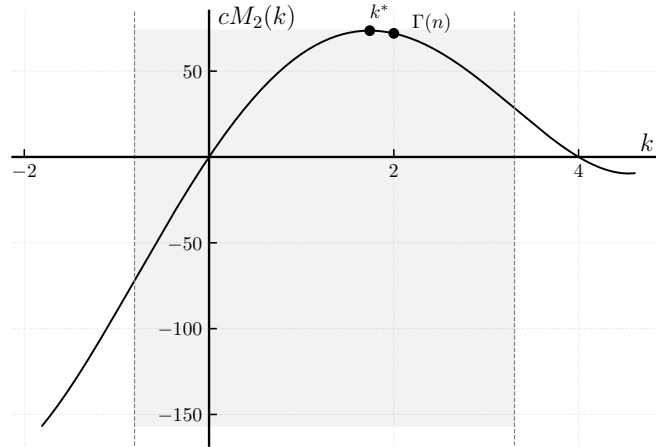
in tudi:

$$\forall n \geq 5 : \frac{n}{4} + \frac{\sqrt{11n^2 - 16n + 8}}{4\sqrt{3}} > \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

Če nam uspe pokazati še, da rešitev x_j , ki je po velikosti druga, leži na intervalu $[0, \lceil \frac{n}{2} \rceil]$; potem lahko sklepamo, da je $\arg \max_{1 \leq k \leq \lceil n/2 \rceil} f$ v neposredni bližini rešitve x_j .

In res empirična in asimptotska analiza pokaže, da je $x_0 \leq x_2 \leq x_1$ za vsak n ter, da $0 < x_2 < \lceil \frac{n}{2} \rceil$ za vsak $n \geq 5$.

Od tu sledi naslednji izrek, katerega smo ravnokar tudi dokazali. Funkcijo Γ smo namreč našli.



Slika 1: $k^* := \arg \max_{x \in [0, \lceil n/2 \rceil]} f(n, x)$ in $\Gamma(n) := \arg \max_{x \in [0, \lceil n/2 \rceil] \wedge x \in \mathbb{N}} f(n, x)$

Izrek 2.4 (k kot funkcija n). Naj bo \mathcal{G}_n množica povezanih grafov reda n . Naj bo $cM_2 : \mathcal{G}_n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, ki grafu priredi DKZI. Naj bo $\Gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ "funkcija" s predpisom:

$$\Gamma(n) = \arg \max_{x \in \{\lfloor h(n) \rfloor, \lceil h(n) \rceil\}} cM_2(x), \quad (2.5)$$

kjer so h , A ter B podani kot:

$$h(n) = \frac{1}{12} \left(3n - \sqrt[3]{3} e^{\frac{4i\pi}{3}} \sqrt[3]{A} + \frac{3^{2/3} B}{e^{\frac{4i\pi}{3}} \sqrt[3]{A}} \right);$$

$$\begin{aligned} A &= 9(n-2)n(3n-2) \\ &\quad + 4\sqrt{3} \sqrt{-(n-1)^2 (n(2n(34n-73) + 201) - 128) + 32}; \\ B &= (16 - 11n)n - 8 \end{aligned}$$

Tedaj za vsak $n \geq 5$ velja:

$$G^* \in \arg \max_{G \in \mathcal{G}_n} cM_2(G) \implies \exists k \in \Gamma(n) : G^* \cong K_k + \overline{K}_{n-k} \quad (2.6)$$

Opomba 2.5. "Funkcija" Γ iz izreka 2.4 ni čista funkcija, saj obstajajo števila $n \geq 5$ za katere je $\Gamma(n)$ množica dveh števil. Primeri takih (zaporednih) vrednosti n so: 12, 117, 450, 4674, 48620, 505829, 1955714, 20347010, ...

Opremljeni s funkcijo Γ prikažimo tabelo vrednosti k za dane n , ki po trditvi 1.2 tvorijo graf, ki doseže maksimalen DKZI. Ta tabela nadaljuje vrednosti tabele, ki so jo podali Saber in dr. [2].

n	k	n	k	n	k	n	k	n	k	n	k	n	k
150	58	151	59	152	59	153	60	154	60	155	60	156	61
157	61	158	62	159	62	160	62	161	63	162	63	163	63
164	64	165	64	166	65	167	65	168	65	169	66	170	66
171	67	172	67	173	67	174	68	175	68	176	69	177	69
178	69	179	70	180	70	181	70	182	71	183	71	184	72
185	72	186	72	187	73	188	73	189	74	190	74	191	74
192	75	193	75	194	76	195	76	196	76	197	77	198	77
199	78	200	78	201	78	202	79	203	79	204	79	205	80
206	80	207	81	208	81	209	81	210	82	211	82	212	83
213	83	214	83	215	84	216	84	217	85	218	85	219	85
220	86	221	86	222	86	223	87	224	87	225	88	226	88
227	88	228	89	229	89	230	90	231	90	232	90	233	91
234	91	235	92	236	92	237	92	238	93	239	93	240	94
241	94	242	94	243	95	244	95	245	95	246	96	247	96
248	97	249	97	250	97	251	98	252	98	253	99	254	99
255	99	256	100	257	100	258	101	259	101	260	101	261	102
262	102	263	102	264	103	265	103	266	104	267	104	268	104
269	105	270	105	271	106	272	106	273	106	274	107	275	107
276	108	277	108	278	108	279	109	280	109	281	110	282	110
283	110	284	111	285	111	286	111	287	112	288	112	289	113
290	113	291	113	292	114	293	114	294	115	295	115	296	115
297	116	298	116	299	117	300	117	301	117	302	118	303	118
304	119	305	119	306	119	307	120	308	120	309	120	310	121
311	121	312	122	313	122	314	122	315	123	316	123	317	124
318	124	319	124	320	125	321	125	322	126	323	126	324	126
325	127	326	127	327	127	328	128	329	128	330	129	331	129
332	129	333	130	334	130	335	131	336	131	337	131	338	132
339	132	340	133	341	133	342	133	343	134	344	134	345	135
346	135	347	135	348	136	349	136	350	136	351	137	352	137
353	138	354	138	355	138	356	139	357	139	358	140	359	140
360	140	361	141	362	141	363	142	364	142	365	142	366	143
367	143	368	143	369	144	370	144	371	145	372	145	373	145
374	146	375	146	376	147	377	147	378	147	379	148	380	148
381	149	382	149	383	149	384	150	385	150	386	151	387	151
388	151	389	152	390	152	391	152	392	153	393	153	394	154
395	154	396	154	397	155	398	155	399	156	400	156	401	156
402	157	403	157	404	158	405	158	406	158	407	159	408	159
409	159	410	160	411	160	412	161	413	161	414	161	415	162
416	162	417	163	418	163	419	163	420	164	421	164	422	165
423	165	424	165	425	166	426	166	427	167	428	167	429	167
430	168	431	168	432	168	433	169	434	169	435	170	436	170
437	170	438	171	439	171	440	172	441	172	442	172	443	173
444	173	445	174	446	174	447	174	448	175	449	175	450	175,176

3 Grafi danega ciklometričnega števila

Problem maksimalne vrednosti drugega komplementarnega Zagrebškega indeksa pri danem številu vozlišč smo rešili. Optimalen graf, je dan s trditvama 1.2 in 2.3. Podobno je znana tudi optimalna vrednost s trditvama 2.1 in 2.3.

V tem poglavju pa problem razširimo in se posvetimo grafom, ki za dano število vozlišč n in dano število povezav m dosežejo bodisi minimum bodisi maksimum drugega komplementarnega Zagrebškega indeksa. Ker se število povezav da enolično določiti s številom vozlišč in ciklometričnim številom ν , si za lažje prepoznavanje vzorcev raje ogledujemo grafe reda n ter ciklometričnega števila ν .

Definicija 3.1. Naj bo G graf reda n , m število njegovih povezav ter p število povezanih komponent, ki sestavljajo graf G . Tedaj je ciklometrično število k grafa G enako:

$$\nu = m - n + p.$$

Povezani grafi reda n s ciklometričnim številom ν imajo torej $m = n - 1 + \nu$ povezav.

Trditev 3.2. *Naj bo G povezan graf reda n ter s ciklometričnim številom ν , tedaj ima $n \geq \lceil (3 + \sqrt{1 + 8\nu})/2 \rceil$ vozlišč. Namreč to sledi iz tega, da ima graf lahko največ toliko povezav kot bi jih imel, če bi bil poln.*

3.1 Problem minimuma

Najprej se osredotočimo na grafe, ki pri danem n in ν DKZI minimizirajo. Manjše grafe poiščimo s pomočjo mešano celoštevilskega linearnega programiranja (MILP), večje pa poiščimo s preprosto heuristično metodo simulated annealing (SA).

MILP za problem minimuma je sledeč: Naj bo za vsak urejen par $i < j$ spremenljivka x_{ij} enaka 1 natanko tedaj ko sta vozlišči i ter j povezani. S s_i modelirajmo kvadrat stopnje i -tega vozlišča. S z_{ij} modelirajmo absolutno vrednost razlike kvadratov stopenj. S spremenljivkami f_{uv} pa modelirajmo povezanost grafa.

$$\min \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n z_{ij} \quad (3.1)$$

$$\text{p. p.} \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_{ij} = m := n - 1 + \nu \quad (3.3)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \sum_{t=1}^{n-1} y_{it} = 1 \quad (3.4)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \sum_{t=1}^{n-1} t y_{it} = \sum_{j < i} x_{ji} + \sum_{i < j} x_{ij} \quad (3.5)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : s_i = \sum_{t=1}^{n-1} t^2 y_{it} \quad (3.6)$$

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i < j : z_{ij} \geq s_i - s_j - (n-1)^2(1 - x_{ij}) \quad (3.7)$$

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i < j : z_{ij} \geq s_j - s_i - (n-1)^2(1 - x_{ij}) \quad (3.8)$$

$$\forall u, v \in \{1, \dots, n\}, u \neq v : f_{uv} \leq (n-1)x_{\min(u,v), \max(u,v)} \quad (3.9)$$

$$\forall v \in \{2, \dots, n\} : \sum_{\substack{u=1 \\ u \neq v}}^n f_{uv} - \sum_{\substack{u=1 \\ u \neq v}}^n f_{vu} = 1 \quad (3.10)$$

$$\sum_{v=2}^n f_{1v} = n - 1 \quad (3.11)$$

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i < j : x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (3.12)$$

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i < j : z_{ij} \geq 0 \quad (3.13)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : s_i \geq 0 \quad (3.14)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall t \in \{1, \dots, n-1\} : y_{it} \in \{0, 1\} \quad (3.15)$$

Najdeni grafi so sledeči, pri čemer pa je vredno omeniti, da prikazani grafi za dan red n ter ciklometrično število ν niso unikatni.

Hipoteza 3.3. Z $G_{n,\nu}$ označimo graf reda n , ki za dano ciklometrično število ν doseže minimalno vrednost DKZI, tedaj velja:

1. $\forall n \geq 7 : cM_2(G_{n,2}) = 16$
2. $\forall \nu \geq 3, \geq 2\nu : cM_2(G_{2\nu-1,\nu}) = 10.$
3. $\forall \nu \geq 3, \forall n \geq 2\nu : cM_2(G_{n,\nu}) = 8.$

3.2 Problem maksimuma

Hipoteza 3.4. Z $G_{n,\nu}$ označimo graf reda n , ki za dano ciklometrično število ν doseže maksimalno vrednost DKZI, tedaj velja:

1. Naj bo Z_n zvezda, \overline{K}_n prazen graf ter K_1 enovozliščen graf. Za poljuben ν in za vsak $n \geq \nu + 2$ velja $G_{n,\nu} = (Z_{\nu+1} \cup \overline{K}_{n-\nu-2} + K_1)$ in $cM_2(G_{n,\nu}) = 2\nu[(n-1)^2 - 4] + (n-\nu-2)[(n-1)^2 - 1]$.

4 Preverjanje manjših grafov

V tem razdelku empirično preverimo doseganje minimalnih in maksimalnih vrednosti drugega komplementarnega Zagrebskega indeksa $cM_2(G)$ za vse povezane grafe majhnega reda n . Postopek je sledeč:

1. Sistematično generiramo vse neizomorfne povezane grafe za izbrana števila vozlišč ($n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$).
2. Za vsak graf izračunamo $cM_2(G)$ po definiciji.
3. Zabeležimo grafe z minimalno in maksimalno vrednostjo indeksa.
4. Preverimo, ali ima graf z maksimalnim indeksom obliko $K_k + \overline{K}_{n-k}$, kot napoveduje izrek.

V spodnji tabeli je za vsako število vozlišč n prikazana minimalna in maksimalna dosežena vrednosti komplementarnega drugega zagrebskega indeksa $cM_2(G)$ ter pripadajoč parameter k .

n	Min cM_2	Je join	k	Max cM_2	k
3	0	Da	2	6	1
4	0	-	-	24	1
5	0	-	-	72	2
6	0	-	-	168	2
7	0	-	-	324	3
8	0	-	-	600	3

Pri minimalnih vrednostih indeksa se pogosto pojavljajo grafi, kjer je večina vozlišč povezanih oziroma je skoraj celoten graf popoln, medtem ko je preostali del izoliran. Zaradi tega so razlike med kvadrati stopenj sosednjih vozlišč zelo majhne ali celo ničelne. Iz tabele je razvidno, da za vse obravnavane vrednosti $n \leq 8$ minimalno vrednost indeksa $cM_2(G)$ dosežejo grafi, ki so regularni ali ciklični, saj

imajo vozlišča enako stopnjo, kar zmanjša razliko kvadratov stopenj na povezavah na nič. Posledično je minimalna vrednost indeksa enaka nič.

Pri maksimalnih vrednostih indeksa pa prevladujejo grafi, ki so izomorfni grafu oblike $K_k + \overline{K}_{n-k}$, torej sestavljeni iz popolnega grafa z k vozlišči in nepovezanih vozlišč z ostankom $n - k$, med katerima so vse možne povezave. Ti grafi zaradi močne razlike v stopnjah vozlišč med komponentama dosegajo največje vrednosti indeksa. Iz tabele je razvidno da so bile maksimalne vrednosti vedno dosežene pri takšnih strukturah, kar je skladno z trditvijo 1.2.

Na slikah so prikazani minimalni in maksimalni grafi za $n = 3, 4, 5$.

5 Metaheuristične metode

Metaheuristika je množica algoritemskih konceptov in strategij visoke ravni, ki se uporabljajo za definiranje heuristične metode, primerne za širok nabor optimizacijskih problemov. Iščejo dovolj dobre rešitve kompleksnih problemov, kjer je podrobno iskanje najboljše rešitve nemogoče ali pa traja predolgo.

Za večje grafe ($n \geq 20$), kjer točne metode (MILP) postanejo računsko prezahtevne, sv uporabili metahevristiko **Simulated Annealing**. To je stohastična optimizacijska metoda, ki začne z naključno rešitvijo in jo iterativno izboljšuje z zamenjavo povezav v grafu. Na začetku (pri visoki temperaturi) algoritem sprejema tudi slabše rešitve, kar omogoča izogibanje lokalnim optimumom. S časom temperatura pada in algoritem konvergira k dobri rešitvi.

Literatura

- [1] H. Gao, *Extremal graphs with maximum complementary second zagreb index*, AIMS Mathematics **10**(7) (2025) 16105–16116, dostopno na <https://www.aimspress.com/article/doi/10.3934/math.2025721>.
- [2] H. Saber in dr. *On a conjecture concerning the complementary second zagreb index*, arXiv preprint arXiv:2501.01295 (2025), dostopno na <https://arxiv.org/abs/2501.01295>.
- [3] Wikipedia contributors, *Cubic equation (mathematics)* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*, 2025, [ogled 8.12.2025], dostopno na https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_equation.