UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Luka Lavš, Tinka Napret-Kaučič

KOMPLEMENTARNI DRUGI ZAGREBŠKI INDEKS

Delo diplomskega seminarja

Mentorica: dr. Riste Škrekovski
Somentor: dr. Timotej Hrga

Ljubljana, december, 2025

Kazalo

Komplementarni drugi zagrebški indeks

Povzetek

V povzetku na kratko opišemo vsebinske rezultate dela. Sem ne sodi razlaga organizacije dela – v katerem poglavju/razdelku je kaj, pač pa le opis vsebine.

The Complementary Second Zagreb Index

Abstract

Prevod slovenskega povzetka v angleščino.

Math. Subj. Class. (2020): 74B05, 65N99

Ključne besede: integracija, kompleks, C^*-algebre

Keywords: integration, complex, C^*-algebras

1 Drugi komplementarni zagrebški indeks

Definicija 1.1. Naj bo G graf ter $E(G)$ množica njegovih povezav. Z $d_G(u)$ označimo stopnjo vozlišča $u \in E(G)$. Tedaj definiramo drugi komplementarni zagrebški indeks kot:

$$\mathrm{cM}_2(G) := \sum_{uv \in E(G)} |\, d_G(u)^2 - d_G(v)^2 \,| \tag{1.1}$$

Do nedavnega je veljala naslednja domneva, ki pa jo je dokazal Gao [3].

Trditev 1.2. *Naj bo $\mathcal{G}_n$ množica povezanih grafov reda n, K_m popoln graf, torej $(m-1)$-regularen, in $\overline{K}_m$ njegov komplement, torej nepovezan graf z m vozlišči.*

Tedaj za vsak $n \geq 5$ velja, da če $G^* \in \mathcal{G}_n$ doseže maksimalno vrednost drugega komplementarnega Zagrebškega indeksa $\mathrm{cM}_2(G)$, potem obstaja $k < \lceil n/2 \rceil$, tak da je G^* izomorfen grafu $K_k + \overline{K}_{n-k}$:

$$\forall\, n \geq 5 :\ G^* \in \operatorname*{arg\,max}_{G \in \mathcal{G}_n} \mathrm{cM}_2(G) \implies \exists\, k < \lceil \frac{n}{2} \rceil :\ G^* \cong K_k + \overline{K}_{n-k}, \tag{1.2}$$

kjer je operacija $+$ definirana kot

$$G_1 + G_2 := \Big(V_1 \cup V_2,\ E_1 \cup E_2 \cup \{\{v_1, v_2\} \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\} \Big).$$

1.1 k kot funkcija parametra n

Ker zdaj po Gao [3] vemo, da domneva 1.2 drži, si želimo izraziti k kot funkcijo parametra n. V tem razdelku bomo tako funkcijo izpeljali.

Trditev 1.3. *Naj bo $n \geq k$, tedaj je drugi komplementarni zagrebški indeks grafa $G = K_k + \overline{K}_{n-k}$ enak $\mathrm{cM}_2(G) = k(n-k)((n-1)^2 - k^2)$.*

Dokaz. Naj bo $G = K_k + \overline{K}_{n-k}$. Graf G je očitno dvodelen, zato njegove povezave razdelimo na notranje povezave podgrafa K_k, povezave med K_k in $\overline{K}_{n-k}$ ter na notranje povezave podgrafa $\overline{K}_{n-k}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{cM}_2(G) &= \sum_{uv \in E(G)} |\, d_G(u)^2 - d_G(v)^2 \,| \\
&= \sum_{uv \in E(K_k)} |\, ((k-1) + (n-k))^2 - ((k-1) + (n-k))^2 \,| + \\
&\quad \sum_{u \in V(K_k) \,\wedge\, v \in V(\overline{K}_{n-k})} |\, ((k-1) + (n-k))^2 - k^2 \,| + \\
&\quad \sum_{uv \in E(\overline{K}_{n-k})} |\, k^2 - k^2 \,| \\
&= |V(K_k)||V(\overline{K}_{n-k})|((n-1)^2 - k^2) \\
&= k(n-k)((n-1)^2 - k^2)
\end{aligned}$$

□

Za lažje nadaljevanje brez dokaza navedimo Cardanovo formulo, ki jo bomo uporabili pri naši funkcijski analizi.

Izrek 1.4 (Cardanova formula)**.** *Naj bo $ax^3+bx^2+cx+d=0$ splošna kubična enačba z $a \neq 0$ ter naj bodo $\Delta_0 = b^2 - 3ac$, $\Delta_1 = 2b^2 - 9abc + 27a^2d$ in $C = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1+\sqrt{\Delta_1^2-4\Delta_0^3}}{2}}$. Potem so rešitve dane kubične enačbe enake:*

$$x_k = -\frac{1}{3a}\left(b + \xi^k C + \frac{\Delta_0}{\xi^k C}\right), \tag{1.3}$$

za $\xi = e^{2\pi i/3}$, ter $k \in \{0, 1, 2\}$.

Trditev 1.5. *Za poljuben $n \in \mathbb{R}$ funkcija $f(n,k) = k(n-k)((n-1)^2 - k^2)$ doseže maksimum pri*

$$k = \frac{1}{12}\Big(3n - \sqrt[3]{3}e^{\frac{4i\pi}{3}}\sqrt[3]{A} + \frac{3^{2/3}B}{e^{\frac{4i\pi}{3}}\sqrt[3]{A}}\Big),$$

kjer sta A in B enaka:

$$\begin{aligned} A &= 9(n-2)n(3n-2) \\ &\quad + 4\sqrt{3}\sqrt{-(n-1)^2\Big(n(n(2n(34n-73)+201)-128)+32\Big)}\ ; \\ B &= (16-11n)n - 8. \end{aligned}$$

Velja tudi, da je f konkavna na intervalu

$$\left[\frac{n}{4} - \frac{\sqrt{11n^2-16n+8}}{4\sqrt{3}}, \frac{n}{4} + \frac{\sqrt{11n^2-16n+8}}{4\sqrt{3}}\right]$$

in konveksna drugod.

Dokaz. V dokazu si bomo pomagali s parcialnimi odvodi funkcije f:

$$\frac{\partial f}{\partial k} = 4k^3 - 3nk^2 - 2(n-1)^2k + n(n-1)^2 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial k^2} = 12k^2 - 6nk - 2(n-1)^2 \tag{1.5}$$

- Ob razrešitvi neenačbe $\frac{\partial^2 f}{\partial k^2} \leq 0$, dobimo rešitev

  $$k \in \left[\frac{n}{4} - \frac{\sqrt{11n^2-16n+8}}{4\sqrt{3}}, \frac{n}{4} + \frac{\sqrt{11n^2-16n+8}}{4\sqrt{3}}\right], \tag{1.6}$$

  f je na tem intervalu torej res konkavna, drugod pa konveksna.

- Zanima nas rešitev enačbe $\frac{\partial f}{\partial k} = 0$. Najprej pokažimo, da so vse njene rešitve realne. Res, funkcija $\frac{\partial f}{\partial k}$ doseže ekstrema ravno na robovih intervala konkavnosti 1.6. Z numeričnimi ter asimptotskimi metodami se da pokazati, da sta si, za vsak n, funkciji v robovih intervala nasprotno predznačeni. Velja namreč:

  $$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial k}(n, \frac{n}{4} - \frac{\sqrt{11n^2-16n+8}}{4\sqrt{3}}) \cdot \frac{\partial f}{\partial k}(n, \frac{n}{4} + \frac{\sqrt{11n^2-16n+8}}{4\sqrt{3}}) \\ &= -\frac{17}{27}n^6 + \frac{47}{18}n^5 - \frac{187}{36}n^4 + \frac{169}{27}n^3 - \frac{163}{36}n^2 + \frac{16}{9}n - \frac{8}{27} < 0 \end{aligned}$$

Sedaj enačbo $\frac{\partial f}{\partial k} = 0$ razrešimo s pomočjo Cardanove formule 1.4. Po daljših izračunih dobimo, da je k-ta rešitev enačbe enaka:

$$x_k = \frac{1}{12}\Big(\underbrace{3n}_{\text{prvi člen}} - \underbrace{\sqrt[3]{3}e^{\frac{2i\pi k}{3}}\sqrt[3]{A}}_{\text{drugi člen}} + \underbrace{\frac{3^{2/3}e^{-\frac{2i\pi k}{3}}B}{\sqrt[3]{A}}}_{\text{tretji člen}} \Big),$$

kjer se A in B ujemata z definicijama v trditvi 1.5. S tem zaključimo dokaz.

$\square$

Lahko pa še pokažemo, da je funkcija f, za vsak $n \geq 5$, konkavna tudi na intervalu $[0, \lceil \frac{n}{2} \rceil]$. To res velja, saj

$$\forall n: \ \frac{n}{4} - \frac{\sqrt{11n^2 - 16n + 8}}{4\sqrt{3}} \leq 0.$$

Podobno za vsak $n \geq 5$ velja:

$$\frac{n}{4} + \frac{\sqrt{11n^2 - 16n + 8}}{4\sqrt{3}} > \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

Če nam uspe pokazati še, da rešitev x_k, ki je po velikosti druga, leži na intervalu $[0, \lceil \frac{n}{2} \rceil]$; potem lahko sklepamo, da je $\underset{1 \leq k \leq \lceil n/2 \rceil}{\arg\max} f$ v neposredni bližini rešitve x_k.

In res empirična in asimptotska analiza pokaže, da je $x_0 \leq x_2 \leq x_1$ za vsak n ter, da $x_2 < \lceil \frac{n}{2} \rceil$ za vsak $n \geq 5$.

Od tu sledi naslednji izrek, katerega smo ravnokar tudi dokazali.

Izrek 1.6 (***k*** kot funkcija ***n***)**.** *Naj bo $\mathcal{G}_n$ množica povezanih grafov reda n. Naj bo $\mathrm{cM}_2 : \mathcal{G}_n \to \mathbb{R}$ funkcija, ki grafu priredi drugi komplementarni zagrebški indeks. Naj bo $\Gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ "funkcija" s predpisom:*

$$\Gamma(n) = \underset{x \in \{\lceil h(n) \rceil, \lfloor h(n) \rfloor\}}{\arg\max} \mathrm{cM}_2(x), \tag{1.7}$$

kjer so h, A ter B podani kot:

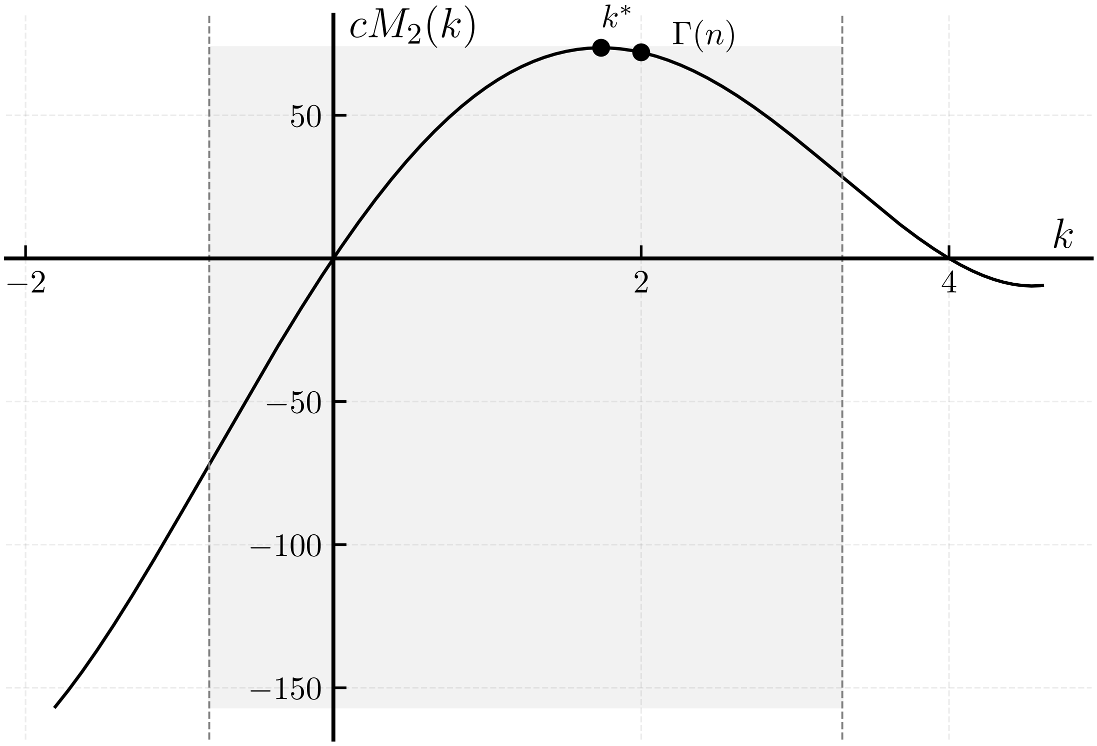
$$h(n) = \frac{1}{12}\Big(3n - \sqrt[3]{3}e^{\frac{4i\pi}{3}}\sqrt[3]{A} + \frac{3^{2/3}B}{e^{\frac{4i\pi}{3}}\sqrt[3]{A}}\Big);$$

$$\begin{aligned} A &= 9(n-2)n(3n-2) \\ &\quad + 4\sqrt{3}\sqrt{-(n-1)^2\Big(n(n(2n(34n-73)+201)-128)+32\Big)}\ ; \\ B &= (16-11n)n - 8 \end{aligned}$$

Tedaj za vsak $n \geq 5$ velja:

$$G^* \in \underset{G \in \mathcal{G}_n}{\arg\max}\, \mathrm{cM}_2(G) \implies \exists k \in \Gamma(n): \ G^* \cong K_k + \overline{K}_{n-k} \tag{1.8}$$

Opomba 1.7. "Funkcija" Γ iz izreka 1.6 ni čista funkcija, saj obstajajo števila $n \geq 5$ za katere je $\Gamma(n)$ množica dveh števil. Primeri takih (zaporednih) vrednosti n so: 12, 117, 450, 4674, 48620, 505829, 1955714, 20347010, ...



Slika 1: $k^* := \underset{x\in[0,\lceil n/2\rceil]}{\arg\max} f(n,x)$ in $\Gamma(n) := \underset{x\in[0,\lceil n/2\rceil]\wedge x\in\mathbb{N}}{\arg\max} f(n,x)$

2 Preverjanje manjših grafov

V tem razdelku empirično preverimo doseganje minimalnih in maksimalnih vrednosti drugega komplementarnega Zagrebškega indeksa $\mathrm{cM}_2(G)$ za vse povezane grafe majhnega reda n. Postopek je sledeč:

1. Sistematično generiramo vse neizomorfne povezane grafe za izbrana števila vozlišč ($n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$).
2. Za vsak graf izračunamo $\mathrm{cM}_2(G)$ po definiciji.
3. Zabeležimo grafe z minimalno in maksimalno vrednostjo indeksa.
4. Preverimo, ali ima graf z maksimalnim indeksom obliko $K_k + \overline{K}_{n-k}$, kot napoveduje izrek.

V spodnji tabeli je za vsako število vozlišč n prikazana minimalna in maksimalna dosežena vrednosti komplementarnega drugega zagrebškega indeksa $\mathrm{cM}_2(G)$ ter pripadajoč parameter k.

n	Min cM_2	Je join	k	Max cM_2	k
3	0	Da	2	6	1
4	0	-	-	24	1
5	0	-	-	72	2
6	0	-	-	168	2
7	0	-	-	324	3
8	0	-	-	600	3

Pri minimalnih vrednostih indeksa se pogosto pojavljajo grafi, kjer je večina vozlišč povezanih oziroma je skoraj celoten graf popoln, medtem ko je preostali del izoliran. Zaradi tega so razlike med kvadrati stopenj sosednjih vozlišč zelo majhne ali celo ničelne. Iz tabele je razvidno, da za vse obravnavane vrednosti $n \leq 8$ minimalno vrednost indeksa $\mathrm{cM}_2(G)$ dosežejo grafi, ki so regularni ali ciklični, saj imajo vozlišča enako stopnjo, kar zmanjša razliko kvadratov stopenj na povezavah na nič. Posledično je minimalna vrednost indeksa enaka nič.

Pri maksimalnih vrednostih indeksa pa prevladujejo grafi, ki so izomorfni grafu oblike $K_k + \overline{K}_{n-k}$, torej sestavljeni iz popolnega grafa z k vozlišči in nepovezanih vozlišč z ostankom $n - k$, med katerima so vse možne povezave. Ti grafi zaradi močne razlike v stopnjah vozlišč med komponentama dosegajo največje vrednosti indeksa. Iz tabele je razvidno da so bile maksimalne vrednosti vedno dosežene pri takšnih strukturah, kar je skladno z trditvijo 1.2.

Na slikah so prikazani minimalni in maksimalni grafi za $n = 3, 4, 5$.

3 Analiza minimalnih in maksimalnih vrednosti indeksa glede na ciklomatsko število grafa

Definicija ciklomatskega števila

Naj bo $G = (V, E)$ graf, kjer je $n = |V|$ število vozlišč, $m = |E|$ število robov, in p število povezanih komponent grafa.

Definicija 3.1. Ciklomatsko število grafa G, označeno s k, je definirano kot

$$k = m - n + p.$$

Za povezane grafe, kjer je $p = 1$, se formula poenostavi v

$$k = m - n + 1.$$

Ciklomatsko število predstavlja število neodvisnih ciklov v grafu. Lahko ga razumemo kot minimalno število robov, ki jih je potrebno odstraniti, da graf spremenimo v drevo. Višje ciklomatsko število pomeni kompleksnejšo strukturo z več neodvisnimi cikli, kar se odraža v večji "mrežnosti"grafa.

Pri analizi povezav med strukturnimi lastnostmi grafov in indeksi, kot je komplementarni drugi Zagrebški indeks, ciklomatsko število omogoča klasifikacijo grafov glede na njihovo topološko kompleksnost. S preiskovanjem grafa s fiksiranim številom vozlišč n in ciklomatskim številom k lahko ugotovimo, kateri grafi v tej skupini imajo ekstremalne vrednosti izbranega indeksa. Takšen pristop omogoča bolj razčlenjen vpogled v vpliv topoloških lastnosti na obravnavane indekse.

4 Ciklomatični grafi

Definicija 4.1. Naj bo G graf reda n, m število njegovih povezav ter p število povezanih komponent, ki sestavljajo graf G. Tedaj je ciklomatično število k grafa G enako:

$$k = m - n + p.$$

Sedaj se osredotočimo na povezane grafe reda n s ciklomatičnem številom k. Taki grafi imajo seveda natanko $m = n + k - 1$ povezav. Označimo množico takih grafov s $\mathcal{C}_{n,k}$.
Za dan n ter k opazujmo grafe $G \in \mathcal{C}_{n,k}$ za katere je drugi komplementarni zagrebški indeks cM_2 minimalen ter tiste pri katerih je maksimalen.

$$\min_{G \in \mathcal{C}_{n,k}} \mathrm{cM}_2(G) \qquad \max_{G \in \mathcal{C}_{n,k}} \mathrm{cM}_2(G) \tag{4.1}$$

Kot prvo modelirajmo minimizacijski problem s pomočjo mešano številčnega linearnega programiranja. Naj bo za vsak urejen par $i < j$ spremenljivka x_{ij} enaka 1 natanko tedaj ko sta vozlišči i ter j povezani. S s_i modelirajmo kvadrat stopnje i-tega vozlišča. S z_{ij} modelirajmo absolutno vrednost razlike kvadratov stopenj. S spremenljivkami f_{uv} pa modelirajmo povezanost grafa.

$$\min \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} z_{ij} \tag{4.2}$$

$$\text{p. p.} \tag{4.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_{ij} = m \tag{4.4}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \quad \sum_{t=1}^{n-1} y_{it} = 1 \tag{4.5}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \quad \sum_{t=1}^{n-1} t y_{it} = \sum_{j<i} x_{ji} + \sum_{i<j} x_{ij} \tag{4.6}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \quad s_i = \sum_{t=1}^{n-1} t^2 y_{it} \tag{4.7}$$

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\},\ i < j : \quad z_{ij} \geq s_i - s_j - (n-1)^2(1 - x_{ij}) \tag{4.8}$$

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\},\ i < j : \quad z_{ij} \geq s_j - s_i - (n-1)^2(1 - x_{ij}) \tag{4.9}$$

$$\forall u, v \in \{1, \dots, n\},\ u \neq v : \quad f_{uv} \leq (n-1) x_{\min(u,v),\max(u,v)} \tag{4.10}$$

$$\forall v \in \{2, \dots, n\} : \quad \sum_{\substack{u=1 \\ u \neq v}}^{n} f_{uv} - \sum_{\substack{u=1 \\ u \neq v}}^{n} f_{vu} = 1 \tag{4.11}$$

$$\sum_{v=2}^{n} f_{1v} = n - 1 \tag{4.12}$$

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\},\ i < j : \quad x_{ij} \in \{0, 1\} \tag{4.13}$$

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\},\ i < j : \quad z_{ij} \geq 0 \tag{4.14}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \quad s_i \geq 0 \tag{4.15}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall t \in \{1, \dots, n-1\} : \quad y_{it} \in \{0, 1\} \tag{4.16}$$

5 Naloga

Group 11: The Complementary Second Zagreb Index (2 students, round 1)

The *Complementary Second Zagreb Index* (also CSZ index) of a graph G is defined as

$$\mathrm{cM}_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} \left| (d_G(u))^2 - (d_G(v))^2 \right|,$$

where $d_G(u)$ denotes the degree of a vertex u in G and $E(G)$ represents the set of edges of G. Note that $+$ is the operation join of two graphs in the following conjecture.

Conjecture 9. *If G^* is a graph having the maximum value of cM_2 among all connected graphs of order n, then G^* is isomorphic to $K_k + \overline{K}_{n-k}$ for some k satisfying $k < \lceil n/2 \rceil$, where $n \geq 5$ and the graph $K_k + \overline{K}_{n-k}$.*

Your tasks are the following:

- Test the above conjecture.
- Assuming it is true, determin k as a function of n.
- Find which graphs has minimum and which has maximum among graphs on n vertices with cyclomatic number k.

In order to do so test systematically for smaller graphs. For larger graph use some metahevristic.

Slika 2: Problem

6 Uvod

Na začetku prvega poglavja/razdelka (ali v samostojnem razdelku z naslovom Uvod) napišite kratek zgodovinski in matematični uvod. Pojasnite motivacijo za problem, kje nastopa, kje vse je bil obravnavan. Na koncu opišite tudi organizacijo dela – kaj je v kakšnem razdelku.

Če se uvod naravno nadaljuje v besedilo prvega poglavja, lahko nadaljujete z besedilom v istem razdelku, sicer začnete novega. Na začetku vsakega razdelka/podrazdelka poveste, čemu se bomo posvetili v nadaljevanju. Pri pisanju uporabljajte ukaze za matematična okolja, med formalnimi enotami dodajte vezno razlagalno besedilo.

7 Zveznost

V tem poglavju bomo ponovili osnovne pojme, povezane z zveznostjo funkcij. Pri tem bomo sledili [4].

Viri se v seznamu literature prikažejo le, če jih uporabimo v besedilu, zato moramo citirati tudi [6, 2, 5, 7, 1].

Definicija 7.1. Funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je *zvezna*, če ...

Podrobneje si poglejmo naslednji rezultat. Ker se bomo kasneje nanj sklicevali, si pripravimo oznako z ukazom `\label{oznaka}`. Seveda morajo biti oznake različnih trditev različne. Enako označujemo tudi druga okolja oziroma enote besedila.

Izrek 7.2. *Zvezna funkcija na zaprtem intervalu je enakomerno zvezna.*

Dokaz. Na začetku dokaza, če je to le mogoče in smiselno, razložite idejo dokaza.

Dokazovali bomo s protislovjem. Pomagali si bomo z definicijo zveznosti in s kompaktnostjo intervala. Izberimo $\varepsilon > 0$. Če f ni enakomerno zvezna, potem za vsak $\delta > 0$ obstajata x, y, ki zadoščata

$$|x - y| < \delta \quad \text{in} \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon. \tag{7.1}$$

□

V zgornjem primeru smo kvadratek za konec dokaza postavili v zadnjo vrstico besedila, ki je vrstična formula, s pomočjo ukaza `\qedhere`. Ta ukaz ustrezno deluje znotraj okolij *equation, align** in podobnih, ne pa znotraj `$$ ... $$`.

Oglejmo si še enkrat neenačbi (7.1). Na formule se sklicujemo z ukazom `\eqref{oznaka}`, ki postavi zaporedno številko enačbe v oklepaje, na trditve in ostale enote pa z ukazom `\ref{oznaka}`. Črni pravokotnik ob robu strani označuje predolgo vrstico, kjer LaTeXni uspel pravilno postaviti besedila, zato mu morate pomagati, npr. tako, da stavek nekoliko preoblikujete, sami razdelite nedeljivo enoto (npr. razdelite matematično formulo na dva dela) ali pa ponudite možnosti za deljenje težavne besede s pomočjo znakov`\-`, ki jih postavite na mesto, kjer se besedo sme deliti, npr. `te\-žav\-nost\-ni\-ca`. Zgoraj bi tako lahko zapisali:

Oglejmo si še enkrat neenačbi (7.1). Za sklicevanje na označene enote besedila imamo na razpolago dva ukaza; na formule se sklicujemo z ukazom `\eqref{oznaka}`, ...

V predzadnjem odstavku je v oklepaju za okrajšavo npr. nastal predolg presledek sredi stavka, saj je LaTeXzaradi pike sklepal, da je na tem mestu stavka konec. Tak predolg presledek preprečimo tako, da za piko sredi stavka postavimo poševnico in za njo presledek, torej `\ `.

Če dokaz trditve ne sledi neposredno formulaciji trditve, moramo povedati, kaj bomo dokazovali. To naredimo tako, da ob ukazu za okolje dokaz dodamo neobvezni parameter, v katerem napišemo besedilo, ki se bo izpisalo namesto besede *Dokaz*, npr. `\begin{Dokaz}[Dokaz izreka \ref{izr:enakomerno}]`.

Dokaz izreka 7.2. Dokazovanja te trditve se lahko lotimo tudi takole ... □

7.1 Naslov morebitnega (pod)razdelka

Besedilo naj se nadaljuje v vrstici naslova, torej za ukazom `\subsection{}` ne smete izpustiti prazne vrstice.

Podobno kot lahko spremenimo ime dokaza, lahko dodamo komentar v ime trditve, torej s pomočjo neobveznega parametra; prvega od spodnjih izpisov dosežemo z ukazom `\begin{posledica}[izrek o vmesni vrednosti]`. Če želimo v parametru navesti vir, pri katerem bomo navedli podatek o tem, kje v viru to trditev najdemo, pa uporabimo ukaz `\begin{posledica}[\protect{\cite[izrek 3.14]{glob}}]`. Seveda lahko obe možnosti kombiniramo.

Posledica 7.3 (izrek o vmesni vrednosti)**.** *Naj bo f zvezna in ...*

Ali pa

Posledica 7.4 (izrek o vmesni vrednosti [4, izrek 3.14])**.** *Naj bo f zvezna in …*

Podobno lahko napovemo tudi vsebino primera.

Primer 7.5 (nezvezna funkcija nima nujno lastnosti povprečne vrednosti)**.** Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s predpisom … ♢

7.2 Pisanje algoritmov

Za pisanje algoritmov sta na voljo okolji `algorithm` in `algorithmic` iz paketov `algorithm` in `algorithmix`, ki sodelujeta podobno kot `table` in `tabular`. Algoritmi plavajo med tekstom, enako kot slike in tabele, nanje se lahko tudi sklicujemo, kot prikazano v izvorni kodi in v algoritmu 1. Sklicujemo se lahko tudi na pomembne vrstice, npr. na vrstico 19, ki predstavlja glavni del algoritma. Za primer pisanja algoritma se posvetujte s primerom v tem dokumentu, za bolj napredne primere uporabe, kot na primer razbijanje algoritma na več kosov, pa z (precej razumljivo) uradno dokumentacijo[1]. Če želite vključiti izvorno kodo nekega programa, priporočamo paket `minted`[2].

Algoritem 1 Opis, ki ima enako funkcionalnost kot opis pod sliko.

Vhod: Števili $n, m \in \mathbb{N}, n > m$.
Izhod: Decimalno število x, ki aproksimira rešitev enačbe $nx = m$.

1: **function** REŠI(n, m) ▷ Vsi vhodni parametri morajo biti opisani.
2: $a \leftarrow [\,]$ ▷ Spremenljivka a naj postane prazna kopica.
3: **for** $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
4: **if** $i \bmod 7 = 5$ **then**
5: HEAPOP(a)
6: **else if** $i < 5$ **then**
7: HEAPPUSH(a, $\frac{i+12}{7} + \pi$) ▷ Lahko uporabljamo matematiko.
8: **else**
9: HEAPPUSH(a, i)
10: **end if**
11: **end for**
▷ Prazna vrstica
12: $x \leftarrow 0$ ▷ To je primer komentarja.
13: **for each** e **in** a **do**
14: $x \leftarrow 1 + \sqrt[e]{x}$
15: **end for**
16: **while** $|x| > \varepsilon$ **do**
17: $x \leftarrow x/2$
18: **end while**
19: $x \leftarrow m/n$
20: **return** x ▷ Vsi izhodni parametri morajo biti opisani nad algoritmom.
21: **end function**

[1] `http://tug.ctan.org/macros/latex/contrib/algorithmicx/algorithmicx.pdf`
[2] `https://github.com/gpoore/minted`

8 Konec dela

Na konec dela sodita angleško-slovenski slovarček strokovnih izrazov in seznam uporabljene literature, morebitne priloge (programska koda, daljša ponovitev dela snovi, ki je bil obravnavan med študijem ...) pa neposredno pred ti enoti. Slovar naj vsebuje vse pojme, ki ste jih spoznali ob pripravi dela, pa tudi že znane pojme, ki ste jih spoznali pri izbirnih predmetih. Najprej navedite angleški pojem (ti naj bodo urejeni po abecedi) in potem ustrezni slovenski prevod; zaželeno je, da temu sledi tudi opis pojma, lahko komentar ali pojasnilo. Slovarska gesla navajajte z ukazom `\geslo{}{}`, npr. `\geslo{continuous}{zvezen}`.

Pri navajanju literature si pomagajte s spodnjimi primeri; najprej je opisano pravilo za vsak tip vira, nato so podani primeri. Člen literature napišete z ukazom `\bibitem{oznaka} podatki o viru`, kjer mora *ozmaka* enolično določati vir. Posebej opozarjam, da spletni viri uporabljajo paket url, ki je vključen v .cls datoteki. Polje "ogled" pri spletnih virih je obvezno; če je kak podatek neznan, ustrezno "polje" seveda izpustimo. Literaturo je potrebno urediti po abecednem vrstnem redu; najprej navedemo vse vire z znanimi avtorji (tiskane in spletne) po abecednem redu avtorjev (po priimkih, nato imenih), nato pa spletne vire brez avtorjev, urejene po naslovih strani. Če isti vir navajamo v dveh oblikah, kot tiskani in spletni vir, najprej navedemo tiskani vir, nato pa še podatek o tem, kje je dostopen v elektronski obliki.

Slovar strokovnih izrazov

continuous zvezen

uniformly continuous enakomerno zvezen

compact kompakten – metrični prostor je kompakten, če ima v njem vsako zaporedje stekališče; podmnožica evklidskega prostora je kompaktna natanko tedaj, ko je omejena in zaprta

glide reflection zrcalni zdrs ali zrcalni pomik – tip ravninske evklidske izometrije, ki je kompozitum zrcaljenja in translacije vzdolž iste premice

lattice mreža

link splet

partition **∼ of a set** razdelitev množice; **∼ of a number** razčlenitev števila

Literatura

[1] P. Angelini, F. Frati in M. Kaufmann, *Straight-line rectangular drawings of clustered graphs*, Discrete Comput. Geom. **45**(1) (2011) 88–140.

[2] S. E. Cappell in J. L. Shaneson, *Singularities and immersions*, Annals of Mathematics **105**(3) (1977) 539–552, [ogled 1. 1. 2023].

[3] H. Gao, *Extremal graphs with maximum complementary second zagreb index*, AIMS Mathematics **10**(7) (2025) 16105–16116, dostopno na `https://www.aimspress.com/article/doi/10.3934/math.2025721`.

[4] J. Globevnik in M. Brojan, *Analiza 1*, Matematični rokopisi **25**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2010.

[5] J. Kališnik in J. Mrčun, *Upodobitev orbiterosti: diplomsko delo : Prešernova nagrada študentom*, J. Kališnik, 2004, dostopno na `https://books.google.si/books?id=yhI8NQAACAAJ`.

[6] S. Lang, *Fundamentals of differential geometry*, Springer New York, 1999.

[7] Wikipedia contributors, *Matrix (mathematics) — Wikipedia, The Free Encyclopedia*, 2022, [ogled 1. 1. 2023], dostopno na `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Matrix_(mathematics)&oldid=1128559126`.