Probabilidade Computacional – Trabalho G2 – 2023.2

Professora: Ana Carolina Letichevsky

Você recebeu um trabalho com 6 questões que devem ser resolvidas utilizando R ou Python, dependendo do que for solicitado no enunciado da questão. Caso não seja indicada a linguagem a ser utilizada, você poderá selecionar uma das duas linguagens para implementar a sua solução. A resolução deverá ser feita em arquivos separados, um para cada questão. Os arquivos deverão ser entregues seguindo o padrão "INF1036_MATRICULA_QX.R" ou "INF1036_MATRICULA_QX.py", onde "MATRICULA" deve ser a sua matrícula e "X" deve ser o número da questão.

O trabalho é individual, e todas as atividades relacionadas à solução do trabalho proposto devem ser realizadas, respeitando-se o código de ética do CTC disponível na plataforma EAD, e devem incluir o que se descreve a seguir.

- A implementação das questões 1 a 6. O código implementado nos moldes estabelecidos no enunciado deverá ser enviado, por meio da plataforma EAD, até 23/11/2023, às 20h.
- A documentação de cada um dos códigos criados no próprio arquivo.

Como parte da avaliação, também será realizada uma apresentação oral.

O trabalho deve ser entregue, impreterivelmente, no prazo estabelecido, para que não haja penalidade na nota. Trabalhos entregues com até 2h de atraso sofrerão 10% de penalidade na nota. Trabalhos entregues com até 3h de atraso sofrerão 15% de penalidade. Trabalhos entregues com até 4h de atraso sofrerão penalidade de 25% na nota.

1) Em simulação estocástica, nos interessa ter uma sequência de números pseudoaleatórios distribuídos de forma uniforme entre 0 e 1.

Um possível algoritmo que pode ser utilizado para gerar a sequência desejada é o LCG. Outro possível método para geração de números pseudoaleatórios, chamado aqui de algoritmo LM, toma como base o lançamento de uma moeda comum que pode gerar dois eventos, cara ou coroa, cada um com probabilidade 0,5. Transformando estes eventos em números binários sendo cara = 0 e coroa = 1, podemos, assim, gerar números decimais a partir de números binários segundo a formulação abaixo usando os lançamentos de uma moeda para definir os coeficientes a_i:

$$Número = a_n 2^{(n-1)} + \cdots + a_4 2^3 + a_3 2^2 + a_2 2^1 + a_1 2^0$$

Por exemplo, se $n = 5$, o que equivale a fazer 5 lançamentos de uma moeda, podemos criar 32 números decimais de 0 a $(2^5 - 1) = 31$. Supondo um número binário de 5 dígitos $(a_5 a_4 a_3 a_2 a_1) = 10011$, obtido a partir de 5 lançamentos de uma moeda, obtemos o número decimal:

$$Número = 1x2^4 + 0x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0$$

$$Número = 1x16 + 0x8 + 0x4 + 1x2 + 1x1 = 19$$

Se dividirmos o número obtido 19 pelo total de possíveis números 31, geramos o valor 0,6129 que consequentemente está no intervalo $[0, 1]$. Assim, a partir deste processo, é possível gerar números pseudoaleatórios com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$.

Um algoritmo mais robusto que os apresentados acima é o Mersenne Twister que fornece uma geração rápida com alta qualidade de aleatoriedade.

A partir do que foi exposto e usando os conceitos de simulação, faça: (3,0 pontos)

a) Construa um código baseado no LCG e no Mersenne Twister para realizar uma simulação com $\mathbf{10.000}$ lançamentos simultâneos de uma moeda e de um dado de $\mathbf{8}$ faces, ambos honestos, e apresentar em quantos lançamentos o resultado obtido foi **cara** e **face $\mathbf{4}$**. O LCG deve ser utilizado para tratar o lançamento da moeda e o Mersenne Twister para tratar o lançamento do dado.

b) Construa um código baseado no LCG e no Mersenne Twister para realizar uma simulação com $\mathbf{10.000}$ lançamentos simultâneos de uma moeda honesta e de um dado de $\mathbf{8}$ faces viciado (probabilidade de obter a **face $\mathbf{2}$** é zero e é a mesma para as demais faces) e apresentar em quantos lançamentos o resultado obtido foi **cara** e **face $\mathbf{8}$**. O LCG deve ser utilizado para tratar o lançamento da moeda e o Mersenne Twister para tratar o lançamento do dado.

c) Construa um código baseado no Mersenne Twister e no LM para realizar uma simulação com $\mathbf{10.000}$ lançamentos simultâneos de uma moeda viciada (probabilidade de tirar **coroa** é **0,45**) e de um dado de $\mathbf{8}$ faces honesto, e apresentar a probabilidade de se obter pelo menos um dos resultados: **cara** e **face $\mathbf{2}$**; **cara** e **face $\mathbf{3}$**; **coroa** e **face** 5. O Mersenne Twister deve ser utilizado para tratar o lançamento da moeda e o LM para tratar o lançamento do dado.

2) Estime, usando simulação, a área da região formada pela união das áreas definidas pelas funções $f(x) = -x^2 + x + 6$ e $g(x) = -x^2 + 6x - 5$ e o eixo x, em que $f(x)$ e $g(x)$ apresentam valores maiores ou iguais a 0. (1,0 pontos)

3) Uma variável aleatória contínua apresenta a seguinte função de densidade:

$$f(x) = \begin{cases} bx^4(1-x) & se\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}$$

Usando simulação: (2,0 pontos)

a) Encontre a constante c que faz $f(x)$ uma densidade de probabilidade. Sabe-se que b é um inteiro e está no intervalo $(25, 32)$.

b) Usando simulação, calcule $P(X \leq 0.7)$.

c) Usando simulação, calcule a média de X.

4) Usando o Método da Rejeição, implemente uma função que gere uma amostra de uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade dada por:

$$p(x) = 30x(1-x)^4, \qquad 0 < x < 1$$

Use uma distribuição Uniforme $(0, 1)$ como $h(x)$. A função implementada deverá receber como parâmetro o tamanho da amostra. (1,0 pontos)

5) Usando o Método da Inversa, implemente uma função para gerar uma variável aleatória contínua X cuja função densidade é dada por: (2,0 pontos)

a) $f(x) = 5x^4, \quad 0 \leq x \leq 1$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{10}{3}x, & 0 \leq x \leq 0{,}6 \\ 5(1-x), & 0{,}6 < x \leq 1 \end{cases}$

6) Considere uma farmácia que possui n atendentes para realizar o atendimento dos clientes. Cada atendente pode ou não atender um cliente que entra na farmácia em um determinado tempo TC, chamado tempo de chegada. Se um cliente entra na farmácia e existe um atendente disponível então esse cliente é atendido durante um certo tempo TA, chamado tempo de atendimento. Por outro lado, se um cliente entra na farmácia e não há nenhum atendente disponível pois todos os n atendentes estão em atendimento, então esse cliente vai embora e seu atendimento não ocorre. Busca-se determinar quantos clientes serão atendidos ou não após um determinado período de tempo T, chamado de tempo total. Observe que TC e TA são aleatórios e apresentam distribuição exponencial com tempos médios $(1/\lambda)$ de 2 e 4 $minutos$ respectivamente. Supondo que a farmácia apresenta 5 atendentes e que $T = 36000\ minutos$, faça: (1,0 pontos)

a) Simule um único período T de $36000\ minutos$ e calcule o total de atendimentos realizados e não realizados.

b) Simule 50 experimentos de período T de $36000\ minutos$ e calcule a média do total de atendimentos realizados e não realizados.