Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Međuispit iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 28. studenog 2019.

Pravilo bodovanja zadataka

Svaki točno odgovoreni zadatak donosi 5 bodova, netočno odgovoreni 2 negativna boda, a neodgovoreni 0 bodova.

Zadatak 1. Instrument mjeri slučajnu veličinu čije su vrijednosti zadane skupom $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Sve su vrijednosti jednako vjerojatne. Pokazivač instrumenta, namijenjen brojčanom prikazu izmjerene vrijednosti, je u kvaru koji se manifestira tako da se znak za "minus" ne upali u 30% slučajeva. Promatrajte opisani mjerni sustav kao komunikacijski kanal i odredite transinformaciju u kanalu.

a) 1,9167 bit/simbol;

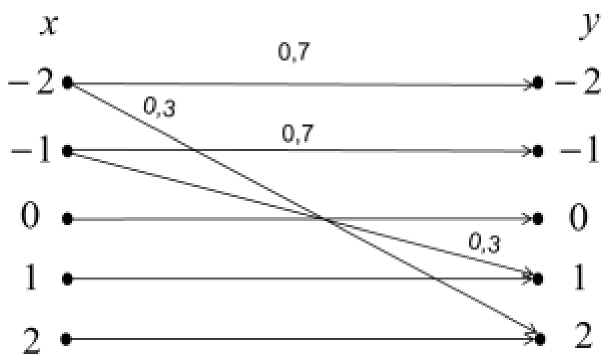
b) 0,4053 bit/simbol;

c) 2,3219 bit/simbol;

d) 2,2692 bit/simbol;

e) ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:



Informacijski kanal

Na gornjoj slici x određuje mjerenu veličinu, a y prikazanu. One se ponekad međusobno razlikuju zbog kvara pokazivača. Temeljem skice kanala moguće je odrediti matricu uvjetnih vjerojatnosti prijelaza i matricu združenih vjerojatnosti:

$$\left[P\left(y_j|x_i\right)\right]=\begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nadalje, s obzirom da su sve vrijednosti mjerene veličine međusobno jednako vjerojatne, vrijedi $P(x_i) = 0,2$, $i = 1, \ldots, 5$. Koristeći matricu kanala i apriorne vjerojatnosti mjerene veličine moguće je odrediti matricu parova vjerojatnosti (x_i, y_j) koje čine mjerena i prikazana veličina:

$$\left[P\left(x_i,y_j\right)\right]=\left[P\left(x_i\right)\cdot P\left(y_j|x_i\right)\right]=\begin{bmatrix}0{,}14 & 0 & 0 & 0 & 0{,}06\\ 0 & 0{,}14 & 0 & 0{,}06 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2\end{bmatrix}$$

Zbrajanjem po stupcima matrice $[P(x_i, y_j)]$ dobivamo vjerojatnosti pojave izmjerene veličine na pokazivaču, $P(y_j) = [0{,}14\ \ 0{,}14\ \ 0{,}2\ \ 0{,}26\ \ 0{,}26]$, $j = 1, \ldots, 5$. Transinformaciju u kanalu moguće je odrediti koristeći izraz:

$$I\left(X;Y\right)=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}P\left(x_i,y_j\right)\log\left(\frac{P\left(x_i,y_j\right)}{P\left(x_i\right)\cdot P\left(y_j\right)}\right)$$

Uvrštavanjem otprije poznatih vrijednosti dobivamo $I(X; Y) = 1{,}9167$ bit/simbol.

Zadatak 2. Binarni izvor generira dva simbola iz abecede $X_1 = \{x_1, x_2\}$ s pripadajućim vjerojatnostima pojavljivanja $P(x_1) = 2/3$ i $P(x_2) = 1/3$. Nadalje, pretpostavimo da isti izvor kombinira simbole x_1 i x_2 u združene simbole abecede $X_2 = \{x_1x_1, x_1x_2, x_2x_1, x_2x_2\}$, $P(x_i,x_j) = P(x_i)\cdot P(x_j)$, $\forall\ i, j \in \{1, 2\}$. Odredite omjer efikasnosti kôda ako se Huffmanov kôd primijeni nad proširenom abecedom X_2 u odnosu na njegovu primjenu na početnu abecedu X_1.

a) 2

b) 18/17

c) 17/9

d) 36/17

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Ako se Huffmanov kôd primijeni na simbole iz abecede X, tada se x_1 kodira binarnim simbolom 1, a x_2 binarnim simbolom 0. Srednja duljina kodne riječi iznosi 1 bit/simbol, a entropija $H(X)$ iznosi $-[2/3 + \log_2(1/3)]$ bit/simbol. Ako primijenimo prošireni Huffmanov kôd, dobivamo četiri združena simbola:

Združeni simbol	Vjerojatnost	Huffmanov kôd
$x_1\ x_1$	4/9	0
$x_1\ x_2$	2/9	10
$x_2\ x_1$	2/9	111
$x_2\ x_2$	1/9	110

Srednja duljina kodne riječi iznosi 17/9 bit/združeni simbol, a entropija združenih simbola, $H_2(X)$, jednaka je $2\cdot H(X)$ [bit/združeni simbol]. Dakle, omjer učinkovitosti Huffmanova koda nad proširenim skupom simbola prema učinkovitosti nad izbornim skupom od dva simbola iznosi:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}=\frac{\dfrac{2H(X)}{17/9}}{\dfrac{H(X)}{1}}=\frac{18}{17}$$

Zadatak 3. Na ulaz kodera informacije dolazi poruka sastavljena od jedanaest simbola *a* i oznake kraja poruke (simbol *), *aaaaaaaaaaa**. Koliko mora iznositi duljina prozora za kodiranje pa da izlaz iz kodera informacije koji koristi kôd LZ77 bude određen sljedećim trojkama: (0,0,*a*), (1,9,*a*), (0,0,*)?

a) 11 simbola;

b) 9 simbola;

c) 12 simbola;

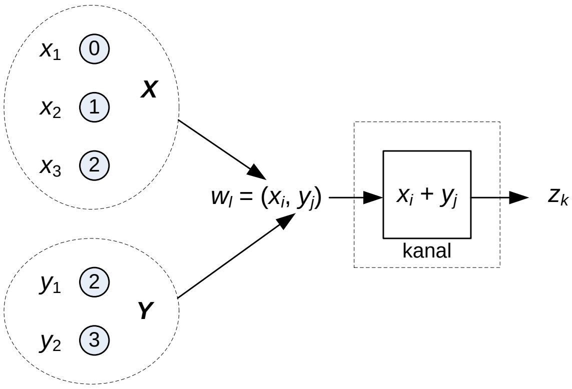
d) 10 simbola.

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Nakon prvog koraka kodiranja, koji generira trojku (0,0,*a*), u posmičnom prozoru sadržan je simbola *a*, a prozor za kodiranje obuhvaća naredne simbole u nizu. Kako bi druga trojka bila (1,9,*a*), a treća (0,0,*) prozor za kodiranje mora obuhvaćati 10 simbola *a* (devet kako označava drugi element trojke i jedan kojeg označava treći element trojke). To je ujedno i duljina prozora za kodiranje, tj. 10 simbola.

Zadatak 4. Sukladno slici, na ulaz kanala dolaze parovi simbola (x_i, y_j), $x_i \in X$, $x_i = i - 1$, $\forall\, i \in \{1, 2, 3\}$, i $y_j \in Y$, $y_j = j + 1$, $\forall\, j \in \{1, 2\}$. Nadalje, vrijedi $p(x_i) = 1/3$, $\forall\, x_i \in X$, i $p(y_j) = 1/2$, $\forall\, y_j \in Y$. Simboli x_i i y_j su potpuno neovisni jedni o drugima. Svaki par simbola (x_i,y_j) tvori simbol w_l, $l = 2i + j - 2$, $w_l \in W$. U kanalu se simboli x_i i y_j algebarski zbrajaju uslijed čega se na izlazu kanala pojavljuju simboli $z_k = x_i + y_j$, $k = i + j - 1$, $z_k \in Z$.



Odredite transinformaciju u promatranom kanalu.

a) 0,667 bit/simbol

b) 1,918 bit/simbol

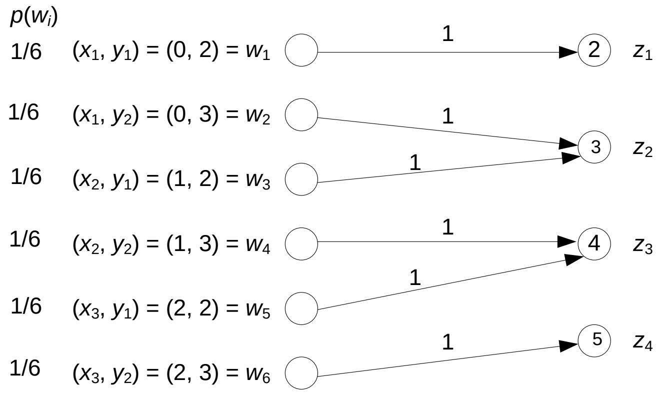
c) 2,585 bit/simbol

d) 0 bit/simbol

e) ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Temeljem teksta zadatka moguće je konstruirati preslikavanja parova simbola (x_i,y_j) u simbole w_l, odnosno z_k.



Temeljem slike na jednostavan način određujemo matricu $[P(Z|W)] = [p(z_k|w_l)]$:

$$\left[P\left(Z|W\right)\right]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

S obzirom da su simboli x_i i y_j međusobno neovisni i vrijedi $p(x_i, y_j) = p(x_i)\cdot p(y_j)$, tada je

$$H\left(W\right)=-\sum_{l=1}^{6}p\left(w_l\right)\log_2\left[p\left(w_l\right)\right]=-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}p\left(x_i\right)p\left(y_j\right)\log_2\left[p\left(x_i\right)p\left(y_j\right)\right]=$$
$$=-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}p\left(x_i\right)p\left(y_j\right)\log_2\left[p\left(x_i\right)\right]-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}p\left(x_i\right)p\left(y_j\right)\log_2\left[p\left(y_j\right)\right]=$$
$$-\sum_{j=1}^{2}p\left(y_j\right)\sum_{i=1}^{3}p\left(x_i\right)\log_2\left[p\left(x_i\right)\right]-\sum_{i=1}^{3}p\left(x_i\right)\sum_{j=1}^{2}p\left(y_j\right)\log_2\left[p\left(y_j\right)\right]=$$
$$H\left(X\right)\left[\sum_{j=1}^{2}p\left(y_j\right)\right]+H\left(Y\right)\left[\sum_{i=1}^{3}p\left(x_i\right)\right]=H\left(X\right)+H\left(Y\right)[\text{bit/simbol}]$$

S obzirom da vrijedi $p(x_i) = 1/3$, $\forall\ x_i \in X$, i $p(y_j) = 1/2$, $\forall\ y_j \in Y$, entropije $H(X)$ i $H(Y)$ je moguće odrediti kao $\log_2(3)$, odnosno $\log_2(2)$ [bit/simbol], pa entropija $H(W)$ ima iznos $\log_2(6) = 2{,}585$ bit/simbol. S obzirom da vrijedi $[P(W,Z)] = [p(w_l,z_k)] = [p(z_k|w_l)\cdot p(w_l)]$, matrica $[P(W,Z)]$ ima sljedeće elemente

$$\left[P\left(W,Z\right)\right]=\begin{bmatrix}1/6&0&0&0\\0&1/6&0&0\\0&1/6&0&0\\0&0&1/6&0\\0&0&1/6&0\\0&0&0&1/6\end{bmatrix}$$

Zbrajajući elemente matrice po stupcima dobivamo: $p(z_1) = 1/6$, $p(z_2) = 1/3$, $p(z_3) = 1/3$, $p(z_4) = 1/6$. Nadalje, s obzirom da vrijedi $[P(W|Z)] = [p(w_l|z_k)] = [p(w_l,z_k)/p(z_k)]$, matrica $[P(W|Z)]$ ima sljedeće elemente

$$\left[P\left(W|Z\right)\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Entropiju $H(W|Z)$ određujemo na sljedeći način:

$$H\left(W|Z\right)=-\sum_{l=1}^{6}\sum_{k=1}^{4}p\left(w_l,z_k\right)\log_2\left[p\left(w_k|z_l\right)\right]=-4\frac{1}{6}\log_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\left[\text{bit/simbol}\right]$$

Konačno, transinformaciju u kanalu moguće je odrediti izrazom

$$I\left(W;Z\right)=H\left(W\right)-H\left(W|Z\right)=\log_2\left(6\right)-\frac{2}{3}=\log_2\left(3\right)+\frac{1}{3}=1{,}918\left[\text{bit/simbol}\right]$$

Isti rezultat dobivamo i pomoću izraza $I(W;Z) = H(Z) - H(Z|W) = H(Z) = 1{,}918$ bit/simbol, jer je $H(Z|W)$ jednaka nuli, što je evidentno iz matrice $[P(Z|W)]$.

Zadatak 5. Čestica se može nalaziti u jednom od stanja $\{1, 2,\ldots, m\}$. Ako se nalazi u stanju i, $i>1$, tada se s vjerojatnošću 1 vraća u stanje $i-1$. Iz stanja 1 prelazi s jednakom vjerojatnošću u bilo koje stanje $1, 2,\ldots, m$. Odredite stacionarnu vjerojatnost stanja 1 uz $m = 5$.

a) 4/15

b) 1/3

c) 2/15

d) 1/5

e) ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Sukladno zadanome moguće je napisati matricu prijelaznih vjerojatnosti

$$\Pi=\begin{bmatrix}\frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \cdots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m}\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Matrica Π^m ima sve elemente pozitivne, u m koraka moguće je iz bilo kojeg stanja otići u bilo koje drugo, te je $p_{ij}\left(m\right)>0$. Zato je Markovljev lanac ergodičan i postoje stacionarne vjerojatnosti. Moguće ih je odrediti iz jednadžbe u matričnom obliku

$$
\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_{m-1} \\ \pi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_{m-1} \\ \pi_m \end{bmatrix}
$$

Dakle

$$\pi_1 = \frac{1}{m}\pi_1 + \pi_2 ,$$

$$\pi_2 = \frac{1}{m}\pi_1 + \pi_3 ,$$

$$\vdots$$

$$\pi_{m-1} = \frac{1}{m}\pi_1 + \pi_m ,$$

$$\pi_m = \frac{1}{m}\pi_1 .$$

Rješavajući unatrag dobivamo

$$\pi_{m-1} = 2\pi_m, \qquad \pi_{m-2} = 3\pi_m, \quad \ldots \quad , \pi_1 = m\pi_m .$$

S obzirom da mora vrijediti da je $\sum_{i=1}^{m} \pi_i = 1$, vrijedi

$$[m + (m-1) + \ldots + 2 + 1]\pi_m = 1 \Rightarrow \pi_m = \frac{2}{m(m+1)} .$$

Stacionarne vjerojatnosti su $\pi_j = \frac{2(m-j+1)}{m(m+1)}, \quad j = 1,\ldots,m$. Konačno, ako je $m = 5$, $\pi_1 = 1/3$.

Zadatak 6. Razmatrajte izvor koji generira četiri simbola iz skupa $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ s odgovarajućim vjerojatnostima pojavljivanja za koje vrijedi:

$$1 > p(x_1) = p_1 > p(x_2) = p_2 > p(x_3) = p_3 > p(x_4) = p_4 > 0 \text{ i } \sum_{i=1}^{4} p_i = 1.$$

Svi su simboli potpuno neovisni jedni o drugima. Nadalje, izvor je spojen s koderom informacije koji navedene simbole kodira binarnim simbolima sukladno algoritmu Shannon-Fano, a rezultat toga je prefiksni kôd. Kodne riječi na izlazu kodera informacije, $C(x_i)$, ovise o razdiobi vjerojatnosti simbola $x_i \in X$. Zadane su vjerojatnosti $p_3 = 0{,}19$ i $p_4 = 0{,}15$. Neka izvor informacije generira poruku duljine 10 simbola x_2. Sukladno pretpostavci da $C(x_1)$ mora imati duljinu jedan bit, odredite koliko može iznositi najveći sadržaj informacije prenijet porukom sastavljenom od 10 simbola x_2.

a) $I < 16{,}44$ bit;

b) $I < 10$ bit;

c) $I < 23{,}96$ bit;

d) $I < 20$ bit;

e) ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Način kodiranja algoritmom Shannon-Fano ovisi o razdiobi vjerojatnosti $p(x_i)$. Pri tome je važno kako se simboli x_i, ovisno o $p(x_i)$, grupiraju. Bit je algoritma da prilikom podjele simbola u dvije grupe razlika zbroja vjerojatnosti simbola u jednoj i drugoj grupi bude minimalna. U slučaju zadanih simbola x_i i adekvatne razdiobe vjerojatnosti $p(x_i)$, konačan rezultat kodiranja algoritmom Shannon-Fano može biti:

1) $C(x_1) = 00$, $C(x_2) = 01$, $C(x_3) = 10$, $C(x_4) = 11$, ili

2) $C(x_1) = 0$, $C(x_2) = 10$, $C(x_3) = 110$, $C(x_4) = 111$.

Dakle, samo u drugom ishodu kodiranja moguće je ostvariti da $C(x_1)$ ima duljinu jednog bita. Da bi se simboli x_i dijelili u grupe na način koji odgovara binarnom kodu kreiranom u ishodu 2, mora vrijediti:

$| p_1 - (p_2 + p_3 + p_4)| \leq | (p_1 + p_2) - (p_3 + p_4)|$, tj. s obzirom da je $p_3 + p_4 = 0{,}19 + 0{,}15 = 0{,}34$

$| p_1 - p_2 - 0{,}34 | \leq | p_1 + p_2 - 0{,}34|$

Desna strana nejednakosti uvijek je jednaka $p_1 + p_2 - 0{,}34$ zbog uvjeta $1 > p(x_1) > p(x_2) > p(x_3) > p(x_4) > 0$. Lijeva strana nejednakosti može polučiti sljedeće rezultate:

1. za $p_1 \geq p_2 + p_3 + p_4$ vrijedi: $p_1 - p_2 - p_3 - p_4 \leq p_1 + p_2 - p_3 - p_4$, što daje: $2p_2 \geq 0$, a to uvijek vrijedi;

Međutim, iz uvjeta $p_1 \geq p_2 + p_3 + p_4$, tj. $p_1 \geq p_2 + 0{,}34$, te uz $p_2 = 1 - p_1 - (p_3 + p_4) = 0{,}66 - p_1$ mora vrijediti: $2p_1 \geq 1$, tj. $\boldsymbol{p_1 \geq 0{,}5}$; istovremeno, zbog uvjeta $p_2 > p_3$, tj. $p_2 > 0{,}19$, te zbog jednakosti $p_1 + p_2 = 1 - (p_3 + p_4)$, slijedi $p_1 < 0{,}66 - 0{,}19$, tj. $\boldsymbol{p_1 < 0{,}47}$. S obzirom da je ova dva uvjeta za p_1 nemoguće istovremeno zadovoljiti, $p_1 \geq p_2 + p_3 + p_4$ nije opcija koja pogoduje rješenju;

2. za $p_1 \leq p_2 + p_3 + p_4$ vrijedi: $-p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \leq p_1 + p_2 - p_3 - p_4$, tj.

$-p_1 + p_2 + 0{,}34 \leq p_1 + p_2 - 0{,}34$,

i konačno: $\boldsymbol{p_1 \geq 0{,}34}$

Kao što je već ranije rečeno, zbog jednakosti $p_1 + p_2 = 1 - (p_3 + p_4)$, slijedi $p_1 < 0{,}66 - 0{,}19$, tj. $\boldsymbol{p_1 < 0{,}47}$. Ova dva uvjeta u opciji 2 moguće je istovremeno zadovoljiti pa je konačno rješenje: $p_1 \in [0{,}34,\ 0{,}47)$.

Sukladno proračunatom te zbog $p_2 = 1 - (p_1 + p_3 + p_4)$, mora vrijediti: $p_2 \in (0{,}19,\ 0{,}32]$. Sadržaj informacije sadržan u jednom simbolu x_2 iznosi $I(x_2) = -\log_2(p_2)$ bita. Dakle, maksimalan sadržaj informacije kojeg može prenositi simbol x_2 uz ograničenje u zadatku iznosi $I(x_2) < -\log_2(0{,}19) = 2{,}396$ bita. Konačno, sadržaj informacije u poruci duljine 10 uzastopnih simbola x_2 mora zadovoljavati uvjet:

$$I\Big(\underbrace{x_2 \ldots x_2}_{10\,\text{puta}}\Big) < 23{,}96\,[\text{bit}]$$

Zadatak 7. Zadan je diskretni binarni kanal. Na izvoru informacije pojavljuju se simboli x_1 i x_2, a na odredištu simboli y_1 i y_2. Matrica šuma u kanalu koji povezuje izvor i odredište, $[P(Y|X)]$, zadana je kao

$$P[Y\,|\,X] = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Odredite za koliko se kapacitet takvog kanala razlikuje od maksimalnog mogućeg kapaciteta binarnog simetričnog kanala (traži se apsolutna vrijednost razlike).

a) 0 bit/simbol;

b) 1 bit/simbol;

c) 0,08 bit/simbol;

d) 0,92 bit/simbol;

e) ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

U zadanom kanalu vjerojatnost pogrešnog prijenosa simbola je p_g = 1/3. Kapacitet binarnog simetričnog kanala dan je izrazom:

$$C = 1 + p_g \log_2(p_g) + (1 - p_g)\log_2(1 - p_g)\,[\text{bit/simbol}]$$

Ako u izraz uvrstimo p_g = 1/3, dobit ćemo C = 0,08 bit/simbol. Maksimalan mogući kapacitet binarnog simetričnog kanala, C_{max}, iznosi 1 bit/simbol. Sukladno tome, apsolutna vrijednost razlike između C_{max} i C iznosi 0,92 bit/simbol.

Zadatak 8. Zadan je izvor na čijem se izlazu pojavljuju dva simbola, točka i crta. Trajanje točke iznosi 0,2 s, a crte tri puta dulje. Vjerojatnost pojavljivanja točke je dvostruko veća od vjerojatnosti pojavljivanja crte, dok je trajanje stanke između simbola 0,2 s. Izračunajte prosječnu brzinu generiranja informacije na izvoru u bit/s.

a) 0,918 bit/s;

b) 0,581 bit/s;

c) 2,754 bit/s;

d) 1,721 bit/s;

e) ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Dakle, trajanja i vjerojatnosti pojave simbola su sljedeće:

$$\begin{aligned} t_{(\bullet)} &= 0{,}2\,s, \qquad & p_{(\bullet)} &= 2/3 \\ t_{(-)} &= 0{,}6\,s, \qquad & p_{(-)} &= 1/3 \\ t_s &= 0{,}2\,s \end{aligned}$$

Prosječna količina informacije po jednom simbolu iznosi:

$$H(X) = -p_{(\bullet)}\log_2 p_{(\bullet)} - p_{(-)}\log_2 p_{(-)} = 0,\dot{6}\cdot 0,585 + 0,\dot{3}\cdot 1,585$$
$$= 0,918 \text{ bit/simbol}$$

Prosječno trajanje simbola je:

$$T_s = p_{(\bullet)}\cdot t_{(\bullet)} + p_{(-)}\cdot t_{(-)} + t_s = 0,5\dot{3} \text{ s/simbol}$$

Informacijska brzina izvorišta iznosi:

$$R = \frac{0,918 \text{ bit/simbol}}{0,5\dot{3} \text{ s/simbol}} = 1,721 \text{ bit/s}$$

Zadatak 9. Zadana je stohastička matrica slabo simetričnog kanala:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix}.$$

Odredite koliko iznosi kapacitet kanala zadanog sljedećom matricom kanala:

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & c & d \end{bmatrix}.$$

a) 1,585 bit/simbol;

b) 0,667 bit/simbol:

c) 1 bit/simbol;

d) 2 bit/simbol;

e) ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Iz uvjeta da je matrica $\mathbf{K}_1$ stohastička matrica slabo simetričnog kanala slijedi:

$a = b + c = d$

$a + b = 1$

$c + d = 1$

Dakle, $a = 1 - a + 1 - d$, $2a + d = 2$, $3a = 2$ i konačno $a = d = 2/3$, a $b = c = 1/3$.

Sad je moguće proračunati kapacitet kanala zadanog matricom $\mathbf{K}_2$.

$$C = \max_{\{p(x_i)\}} I(X;Y) = \max_{\{p(x_i)\}} \left[H(Y) - H(Y \mid X)\right]$$

$$\left[P(y_1), P(y_2), \ldots, P(y_m)\right] = \left[P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)\right]\cdot \mathbf{K}_2$$

Neka je $P(x_1) = p_1$, $P(x_2) = p_2$ i $P(x_3) = p_3$. Tada vrijedi:

$$P(y_1) = \frac{2}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2$$
$$P(y_2) = \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_3 = \frac{1}{3}.$$
$$P(y_3) = \frac{1}{3}p_2 + \frac{2}{3}p_3$$

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{3} P(y_i)\log P(y_i) =$$
$$= \log_2(3) - \frac{1}{3}(2p_1 + p_2)\log_2(2p_1 + p_2) - \frac{1}{3}(p_2 + 2p_3)\log_2(p_2 + 2p_3)$$

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} P(x_i, y_j)\log_2 P(y_j \mid x_i) =$$
$$= \log_2 3 - \frac{2}{3}(p_1 + p_3)$$

Sada je moguće provesti sljedeće razmatranje. Prvo pretpostavimo da će kapacitet kanala, C, biti maksimalan kad je $H(Y|X)$ minimalan. U tom slučaju vrijedi: $p_1 + p_3 = 1$ i $p_2 = 0$, te je sukladno tome

$$H(Y \mid X) = \log_2 3 - \frac{2}{3}\,\text{bit/simbol}$$

No sada treba pokazati da uz takvu razdiobu vjerojatnosti $P(x_i)$ entropija izlaza, $H(Y)$, može postići svoju maksimalnu vrijednost, tj. $\log_2 3$ bit/simbol (to je ujedno vrijednost koju bi $H(Y)$ poprimio kad bi svi izlazi y_j bili jednako vjerojatni. Dakle, za $p_1 + p_3 = 1$ i $p_2 = 0$, te uz dodatnu pretpostavku da je $p_1 = p_2 = 0{,}5$, $H(Y)$ poprima vrijednost u iznosu $\log_2 3$ bit/simbol, čime je opravdan ovakav način optimizacije kapaciteta kanala. U konačnici, kapacitet kanala iznosi

$$C = \log_2 3 + \frac{2}{3} - \log_2 3 = \frac{2}{3}\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Zadatak 10. Temeljem polaznog rječnika $D[0] = a$ i $D[1] = b$ dekodirajte primljenu poruku 0 1 0 4 5 koristeći algoritam LZW.

a) abaaaaa (7 znakova);

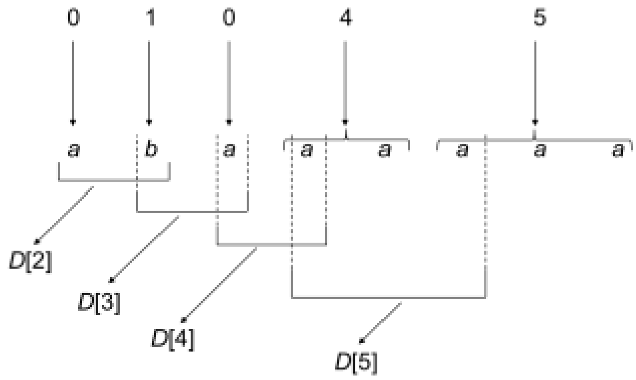
b) abaaaaaa (8 znakova);

c) abaaaaaaa (9 znakova);

d) abaaaa (6 znakova);

e) ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:



Prošireni rječnik: $D[2] = ab$, $D[3] = ba$, $D[4] = aa$, $D[5] = aaa$. Dekodirana poruka: *abaaaaaa*.