V1.1

Prof.dr.sc. Bojana Dalbelo Bašić

Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za elektroniku, mikroelektroniku, računalne i inteligentne sustave

www.zemris.fer.hr/~bojana
bojana.dalbelo@fer.hr

UMJETNA INTELIGENCIJA

Zaključivanje uporabom predikatne logike (1)

AUTOMATSKO ZAKLJUČIVANJE UPORABOM PREDIKATNE LOGIKE

- PROPOZICIJSKA LOGIKA << LJUDSKO ZAKLJUČIVANJE

- *Premise:*

  Svaki student pohađa predavanja.

  Ivan je student.

- *Intuitivno zaključujemo:*

  Ivan pohađa predavanja.

- Ovakvo jednostavno zaključivanje nije moguće u propozicijskoj logici.

ONTOLOŠKA PRETPOSTAVKA

- **Ontologija?**
- **Ontološka pretpostavka** predikatne logike prvog reda:
  - postoje:
    - **Objekti**
    - **Relacije između objekata**
  - Svojstva objekata: 1-mjesne relacije
  - Propozicije: 0-mjesne relacije
- Jače ontološke pretpostavke od onih propozicijske logike
  - Propozicijska logika: postoje sudovi koji su istiniti/lažni
  - Zbog toga: **veća ekspresivnost od propozicijske logike!**
- Naprednije logike imaju još jače ontološke pretpostavke!

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

- Skup elemenata nad kojim se izvodi zaključivanje uporabom predikatne logike naziva se **domena**
- Elementi domene označeni su posebnim imenima i nazivaju se **konstante**
  - Mala slova s početka abecede: *a*, *b*, *c*, ... ili nizovi znakova s velikim početnim slovom: *Ivan*, *Ana*, ...
  - *Primjer:* Domena može biti skup cijelih brojeva Z, tada su 1,2,3,… konstante
- **Varijable** se označavaju simbolima *u*,*v*, *w*, *x*, *y*,… i mogu poprimiti bilo koju vrijednost iz domene
- **Funkcije** preslikavaju jedan ili više elemenata domene u taj isti skup
  - *Primjer*: Funkcija *add* preslikava dva elementa domene u njihov zbroj. Dakle, *add*(2, 3) = 5

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

- *Definicija*
- **Predikati** su “funkcije” koje preslikavaju jedan ili više elemenata domene u jednu od vrijednosti istinitosti: *istinu* ili *laž*
- Predikati nam govore o svojstvima elemenata domene ili o njihovim međusobnim odnosima.
- *Primjeri* predikata:
  - Neka je domena skup cijelih brojeva Z.
  - Predikati su: ODD(x), EVEN(x), GT(u, v).
    - ODD(6) ≡ laž
    - EVEN(6) ≡ istina
    - GT(*add*(1,2), 4) ≡ laž

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

Konstante, **varijable**, **funkcije** i **predikat**i čine četiri disjunktna skupa u predikatnoj logici.

Definicija

- **Izraz** (*engl. term*) je definiran rekurzivno:
  - konstanta je izraz
  - varijabla je izraz
  - $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ je izraz akko je f funkcija od n argumenata, gdje su $t_1, t_2, \dots, t_n$ izrazi
- *Primjer:* Izrazi su 2, 3, *add*(3,4), *add*(v, *add*(1, 4))

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

Definicija

- P(t_1, t_2, … , t_n) je **atom** akko P označava predikat od n argumenata, a t_1, t_2, … , t_n su izrazi

Primjer

- GT(*add*(1, 2), 4) je atom

FORMULE

- Za izgradnju formula u predikatnoj logici koriste se isti logički veznici kao i u propozicijskog logici $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Primjer

- (ODD(3) $\wedge$ GT(5,2)) čini formulu

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

- U predikatnoj logici još se koriste dva posebna simbola:
  - $\forall$ univerzalni kvantifikator (čita se “za svaki”),
  - $\exists$ egzistencijalni kvantifikator (čita se “postoji”).

Primjer

- Formula $\forall x(GT(add(x,1),x))$ se interpretira:
  “za svaki x domene vrijedi da je $x+1$ veći od x”
- Za formulu u gornjem primjeru se kaže da je pojavljivanje varijable x **ograničeno** (kvantificirano) sa $\forall x$
- Kažemo da je varijabla **vezana** ako je negdje ograničena kvantifikatorom, a **slobodna** ako to negdje nije

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

- Podformula (GT(*add*(x,1),x)) zove se **doseg** (područje djelovanja, djelokrug, dohvat, domena) od $\forall$x jer se na tu formulu odnosi $\forall$x

Primjer

- $\exists$y(GT(y, 4))
- postoji (*postoji barem jedan* ili *za neki*) element domene *y* tako da je *y* veći od 4;
- *y* je vezana varijabla, tj. pojavljivanje *y* ograničeno je sa $\exists$y,
- doseg od $\exists$y je GT(y, 4)

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

Primjer

- $\forall u(ODD(u) \rightarrow EVEN(add(u,1)))$
- za svaki element domene *u* vrijedi: ako je *u* neparan tada je *u+1* paran.
- *u* je vezana varijabla, tj. pojavljivanje *u* ograničeno je sa $\forall u$,
- doseg $\forall u$ je $(ODD(u) \rightarrow EVEN(ADD(u,1)))$

- $\forall x(\exists y(GT(x, y)))$
- za svaki *x* iz domene postoji *y* iz domene tako da je *x* veće od *y*.
- pojavljivanje *x* ograničeno je sa $\forall x$, pojavljivanje *y* ograničeno je sa $\exists y$.
- doseg od $\forall x$ je $\exists y(GT(x, y))$, doseg od $\exists y$ je $GT(x, y)$ – doseg jednog kvantifikatora je unutar dosega drugog kvantifikatora!

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

Definicija

- Kaže se da je varijabla **vezana** u formuli akko je barem jedno pojavljivanje varijable ograničeno. Varijabla je **slobodna** u formuli akko barem jedno pojavljivanje nije ograničeno

Primjer

- U formuli $\forall x(GT(x,y))$, *x* je vezana, ali *y* je slobodna
- U formuli $(\forall x(GT(x,y)) \wedge \exists y(ODD(y)))$, *y* je ujedno i slobodna i vezana varijabla
  - Slobodna varijabla *y* nezavisna je od vezane

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

Formula u predikatnoj logici je definirana rekurzivno:

Definicija

- **Dobro oblikovana formula (wff)** gradi se na sljedeći način:
  1. atom je formula;
  2. ako je F formula tada je i (~F) formula;
  3. ako su F i G formule tada su formule:
     - $(F \wedge G)$
     - $(F \vee G)$
     - $(F \rightarrow G)$
     - $(F \leftrightarrow G)$

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

4. Ako je F formula takva da **sadržava varijablu *x*** koja u **njoj nije vezana**, tada su formule:
   - $(\forall x)$ F,
   - $(\exists x)$ F.
5. Nema drugih formula osim upravo definiranih

- **Dogovorno dopuštamo uklanjanje zagrada:**
  - u pravilu 2 (zagrade oko negirane formule)
  - u pravilu 3 ako su to **vanjske zagrade**
  - u pravilu 4 (zagrade oko kvantifikatora)

- Uočite da se definicije atoma i formule razlikuju u propozicijskoj i predikatnoj logici.

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

Primjer :

- Formula $((\forall x)\ GT(x,y) \wedge (\exists y)\ ODD(y))$ može se napisati kraće kao $\forall x\ GT(x,y) \wedge \exists y\ ODD(y)$
- Zagrade uvijek moraju zatvarati argumente funkcije ili predikata

Zadatak

- Kako bi formulom predikatne logike izrazili da za svaki cijeli broj *x* vrijedi da je *x* paran ili je *x+1* paran ?
- Je li izraz $\forall x(ODD(x \vee \mathit{add}(x+1)))$ dobro oblikovana formula?

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

- Ovdje razmatrana predikatna logika je tzv. PREDIKATNA LOGIKA PRVOG REDA *(engl. First Order Predicate Logic -* ***FOPL****)* u kojoj samo varijable mogu biti kvantificirane

- Ako je P predikat i *f* funkcija tada formule poput $\forall P(P(x))$ i $\exists f(f(x))$ nisu razmatrane u predikatnoj logici prvog reda

SEMANTIKA PREDIKATNE LOGIKE

SEMANTIKA PREDIKATNE LOGIKE

- **Interpretacija formule** u predikatnoj logici sastoji se od sljedećeg:
  - Određivanje elemenata domene. Svaki element domene označava se simbolom za konstantu.
  - Definiranje preslikavanja *f* za svaku funkciju *f* od *n* argumenata $f(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n)$, gdje c_i predstavljaju konstante iz domene.
  - Pridruživanje vrijednosti istinitosti svakom predikatu od n argumenata $P(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n)$

SEMANTIKA PREDIKATNE LOGIKE

- Za danu interpretaciju formuli se pridružuje odgovarajuća vrijednost istinitosti
- **Ne mogu se interpretirati formule koje sadrže slobodne varijable** pa ćemo od sada podrazumijevati da formule ne sadrže slobodne varijable
- Formule su **ekvivalentne** ako poprimaju istu vrijednosti istinitosti za svaku moguću interpretaciju

TABLICA EKVIVALENCIJA PREDIKATNE LOGIKE

- F(x) i G(x) označavaju formule koje sadrže slobodnu varijablu *x* dok H{x} označava formulu koja ne sadrži varijablu *x*

[1]	$\forall x\ F(x)$	$\equiv$	$\forall y\ F(y)$
[2]	$\exists x\ F(x)$	$\equiv$	$\exists y\ F(y)$
[3]	$\sim\forall x\ F(x)$	$\equiv$	$\exists x\ (\sim F(x))$
[4]	$\sim\exists x\ F(x)$	$\equiv$	$\forall x\ (\sim F(x))$
[5]	$(\forall x\ F(x) \vee \forall x\ G(x))$	$\equiv$	$(\forall x\ F(x) \vee \forall y\ G(y))$
[6]	$(\forall x\ F(x) \vee \exists x\ G(x))$	$\equiv$	$(\forall x\ F(x) \vee \exists y\ G(y))$

TABLICA EKVIVALENCIJA PREDIKATNE LOGIKE

[7]	$(\exists x\, F(x) \vee \forall x\, G(x))$	$\equiv$	$(\exists x\, F(x) \vee \forall y\, G(y))$
[8]	$(\exists x\, F(x) \vee \exists x\, G(x))$	$\equiv$	$(\exists x\, F(x) \vee \exists y\, G(y))$
[9]	$(\forall x\, F(x) \wedge \forall x\, G(x))$	$\equiv$	$(\forall x\, F(x) \wedge \forall y\, G(y))$
[10]	$(\forall x\, F(x) \wedge \exists x\, G(x))$	$\equiv$	$(\forall x\, F(x) \wedge \exists y\, G(y))$
[11]	$(\exists x\, F(x) \wedge \forall x\, G(x))$	$\equiv$	$(\exists x\, F(x) \wedge \forall y\, G(y))$
[12]	$(\exists x\, F(x) \wedge \exists x\, G(x))$	$\equiv$	$(\exists x\, F(x) \wedge \exists y\, G(y))$
[13]	$(\forall x\, F(x) \vee \forall y\, G(y))$	$\equiv$	$\forall x\, \forall y\, (F(x) \vee G(y))$
[14]	$(\forall x\, F(x) \wedge \forall y\, G(y))$	$\equiv$	$\forall x\, \forall y\, (F(x) \wedge G(y))$
[15]	$(\forall x\, F(x) \vee H\{x\})$	$\equiv$	$\forall x\, (F(x) \vee H\{x\})$
[16]	$(\forall x\, F(x) \wedge H\{x\})$	$\equiv$	$\forall x\, (F(x) \wedge H\{x\})$
[17]	$(\exists x\, F(x) \vee H\{x\})$	$\equiv$	$\exists x\, (F(x) \vee H\{x\})$
[18]	$(\exists x\, F(x) \wedge H\{x\})$	$\equiv$	$\exists x\, (F(x) \wedge H\{x\})$
[19]	$\forall x\, (F(x) \wedge G(x))$	$\equiv$	$(\forall x\, F(x) \wedge \forall x\, G(x))$
[20]	$\forall x\, (F(x) \wedge G(x))$	$\equiv$	$(\forall x\, F(x) \wedge \forall y\, G(y))$

TABLICA EKVIVALENCIJA PREDIKATNE LOGIKE

[21] $\forall x\ (F(x) \land G(x)) \equiv \forall x\ \forall y\ (F(x) \land G(y))$

[22] $\exists x\ (F(x) \lor G(x)) \equiv (\exists x\ F(x) \lor \exists x\ G(x))$

[23] $\exists x\ (F(x) \lor G(x)) \equiv (\exists x\ F(x) \lor \exists y\ G(y))$

[24] $\exists x\ (F(x) \lor G(x)) \equiv \exists x\ \exists y\ (F(x) \lor G(y))$

- Jesu li ekvivalencije formule [22]-[23] ako se umjesto kvantifikatora $\exists$ koristi kvantifikator $\forall$?

Primjer 1

- Odredite vrijednosti istinitosti formule

  $$\forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ (\mathbf{P(x)} \land \mathbf{Q(x,f(y))})$$

  za interpretaciju:

  - Domena {a, b}
  - f(a) = b i f(b) = a i sljedeće vrijednosti istinitosti atoma

P(a)	P(b)	Q(a,a)	Q(a,b)	Q(b,a)	Q(b,b)
false	true	true	true	false	true

- Za x = a, P(x) je false.
  - Formula nije istinita za sve vrijednosti x iz domene.
- Dakle $\forall x\ \exists y\ (P(x) \land Q(x,f(y)))$ je laž

Primjer 2

- Odredite vrijednosti istinitosti formule

  $$\forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ (\mathbf{P(x)} \wedge\ \mathbf{Q(x,f(y))})$$

  za interpretaciju:

  - Domena {1, 2}
  - f(1) = 2 i f(2) = 1 i sljedeće vrijednosti istinitosti atoma

P(1)	P(2)	Q(1,1)	Q(1,2)	Q(2,1)	Q(2,2)
true	true	true	true	false	true

SEMANTIKA PREDIKATNE LOGIKE

- Evaluacija istinitosti:
  - Za x = 1, P(1) je true.
  - Q(x,f(y)) je istinito za y=1 i y=2

  - Za x = 2, P(2) je true.
  - Q(x,f(y)) je istinito za y=1

- Pokazali smo da za sve vrijednosti x iz domene postoji vrijednost y iz domene za koju je formula istinita
- Dakle, $\forall x\ \exists y\ (P(x) \wedge Q(x,f(y)))$ je istinita

POLUODLUČLJIVOST PREDIKATNE LOGIKE

- Podsjetimo se pojmova:
  - **tautologije**, **kontradikcije** i **konzistencije** formula propozicijske logike. Iste definicije vrijede i u predikatnoj logici.
- Kako bismo dokazali da je formula G je logička posljedica formula $F_1, F_2, \dots, F_n$, uveli smo dvije temeljne metode:
- Izravnu metodu
  - pokazujemo da je $((F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n) \rightarrow G)$ tautologija
- Metoda opovrgavanja
  - pokazujemo da je $(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n \wedge \sim G)$ proturječje

POLUODLUČLJIVOST PREDIKATNE LOGIKE

- Te dvije metode temelje se na provjeri svih mogućih interepretacija formula. Kako u predikatnoj logici domena može biti beskonačna, (npr. skup cijelih brojeva), može biti i beskonačno mnogo interpretacija formule

- Dakle, u takvim slučajevima nije moguće provjeravati tautologiju ili kontradikciju formule pod svim mogućim interpretacijama pa se izravna metoda i metoda opovrgavanja **ne mogu primijeniti na predikatnu logiku**

POLUODLUČLJIVOST PREDIKATNE LOGIKE

- Važan matematički rezultat:

U predikatnoj logici **ne postoji općenit postupak** kojim se može dokazati cilj G, ako je G teorem (logička posljedica), odnosno, kojim će se dokazati da G nije teorem (nije logička posljedica), ako on to nije.
Ipak, postoje postupci kojim se može pokazati cilj G, ako je G teorem (logička posljedica), ali ti postupci mogu **nikad ne završiti u slučajevima kada G nije teorem** (nije logička posljedica).
U tom smislu **predikatna logika je poluodlučljiva**.

- **Rezolucija opovrgavanjem** koristi se u predikatnoj logici, ali je njezina moć ograničena poluodlučljivošću predikatne logike

TEORIJA DOKAZA

TEORIJA DOKAZA PREDIKATNE LOGIKE

- Sva pravila zaključivanja (uvedena u okviru “prirodnog zaključivanja”) koja vrijede za propozicijsku logiku vrijede i za predikatnu logiku
- Pored toga predikatna logika ima dodatno pravilo:

  Pravilo univerzalne specijalizacije

- Ako je formula istinita za svaki element domene onda je istinita i za jedan određeni element domene

- Ako je *x* varijabla i *b* **bilo koja konstanta iz domene** tada:

$$\forall x\, \mathbf{F(x)} \;\vdash\; \mathbf{F(b)}$$

Pravilo univerzalne specijalizacije

Svaki element domene može biti zamjena za univerzalno kvantificiranu varijablu

- Primjer uporabe pravila univerzalne specijalizacije u postupku zaključivanja:
- *Premise*
  - Svaki muž voli svoju ženu.
  - Marko je muž.
- *Cilj koji treba dokazati*
  - Marko voli svoju ženu

TEORIJA DOKAZA PREDIKATNE LOGIKE

- *Predikati:*
  - MUŽ(x); definira da je x muž.
  - VOLI(x,y)
- *Funkcija:*
  - *žena*(x): funkcija koja preslikava *x* u *žena_od_x*. Ako je z = *žena*(x), to znači da je z žena od x
- *Cilj koji treba dokazati:*
  - VOLI(Marko, žena(Marko))

TEORIJA DOKAZA PREDIKATNE LOGIKE

- Premise se mogu napisati

  [1] ∀x(MUŽ(x) → VOLI(x, žena(x)))

  [2] MUŽ(Marko)

- Zaključivanje:
- Marko je konstanta u domeni osoba, stoga primjenjujući pravilo univerzalne specijalizacije na [1] zaključujemo:

  [3] (MUŽ(Marko) → VOLI(Marko, žena(Marko))

- Primjenjujući Modus ponens na [2] i [3] dobivamo:

  [4] VOLI(Marko, žena(Marko))

- Tako smo dokazali da je cilj teorem

PREDUVJETI ZA REZOLUCIJSKO ZAKLJUČIVANJE

Pretvaranje formule u klauzalni oblik

- Rezolucijsko pravilo u predikatnoj logici zahtijeva pretvaranje formule u **klauzalni oblik** (konačna disjunkcija od *n* literala)
- Implicitno se podrazumijeva:
  - sve varijable u klauzuli su **univerzalno kvantificirane**
  - između klauzula je konjunkcija
- Sve klauzule u predikatnoj logici su **standardizirane** – ne postoje dvije klauzule koje sadrže iste **varijable**
- Formula u predikatnoj logici se pretvara u klauzalni oblik u 10 koraka

PRETVARANJE FORMULE U KLAUZALNI OBLIK

1. **Uklanjanje $\leftrightarrow$**
   - $(F \leftrightarrow G) \equiv (\sim F \vee G) \wedge (\sim G \vee F)$
2. **Uklanjanje $\rightarrow$**
   - $(F \rightarrow G) \equiv (\sim F \vee G)$
3. **Smanjivanje dosega operatora** negacije tako da se odnosi samo na jedan atom
   - $\sim(F \vee G) \equiv (\sim F \wedge \sim G)$
   - $\sim(F \wedge G) \equiv (\sim F \vee \sim G)$
   - $\boldsymbol{\sim\forall x\, F(x) \equiv \exists x\, (\sim F(x))}$
   - $\boldsymbol{\sim\exists x\, F(x) \equiv \forall x\, (\sim F(x))}$
   - Kada se u nekom od prethodna tri koraka pojavi dvostruka negacija, eliminiraj je primjenom **involutivnosti**
   - $\boldsymbol{(\sim(\sim F)) \equiv F}$

PRETVARANJE FORMULE U KLAUZALNI OBLIK

4. **Preimenuj varijable** tako da svaki kvantifikator vezuje jedinstvenu varijablu. Vrijednost istinitosti formule neće se mijenjati jer se varijable mogu smatrati kao “dummy” varijable
   - $(\forall x\, F(x) \lor \forall x\, G(x)) \equiv (\forall x\, F(x) \lor \forall y\, G(y))$
   - $(\forall x\, F(x) \lor \exists x\, G(x)) \equiv (\forall x\, F(x) \lor \exists y\, G(y))$
   - $(\exists x\, F(x) \lor \forall x\, G(x)) \equiv (\exists x\, F(x) \lor \forall y\, G(y))$
   - $(\exists x\, F(x) \lor \exists x\, G(x)) \equiv (\exists x\, F(x) \lor \exists y\, G(y))$
   - $(\forall x\, F(x) \land \forall x\, G(x)) \equiv (\forall x\, F(x) \land \forall y\, G(y))$
   - $(\forall x\, F(x) \land \exists x\, G(x)) \equiv (\forall x\, F(x) \land \exists y\, G(y))$
   - $(\exists x\, F(x) \land \forall x\, G(x)) \equiv (\exists x\, F(x) \land \forall y\, G(y))$
   - $(\exists x\, F(x) \land \exists x\, G(x)) \equiv (\exists x\, F(x) \land \exists y\, G(y))$

PRETVARANJE FORMULE U KLAUZALNI OBLIK

5. **Skolemizacija**
   - Zamijeni sve egzistencijalno kvantificirane varijable *Skolem izrazima*

Primjer:

- $\exists x$ SESTRA(x, Ivan);
- Skolemizacija daje:
  - SESTRA (Ana, Ivan)

PRETVARANJE FORMULE U KLAUZALNI OBLIK

- U složenijim izrazima u kojima vrijednost zamjene zavisi od ostalih varijabli u formuli, egzistencijalno kvantificirane varijable zamjenjuju se tzv. SKOLEM FUNKCIJOM

Primjer:

- U formuli $\forall x \, \exists y$ MAJKA(y, x);
  - vrijednost od *y* zavisi o *x*.
- Skolemizacija daje
  - $\forall x$ MAJKA (f(x), x),
  - gdje je f(x) Skolem funkcija

PRETVARANJE FORMULE U KLAUZALNI OBLIK

- Argumenti Skolem funkcije su one univerzalno kvantificirane varijable čiji doseg uključuje doseg egzistencijalno kvantificirane varijable koja se zamjenjuje

Primjer:

- $\exists u\, \forall v\, \forall w\, \exists x\, \forall y\, \exists z\, F(u, v, w, x, y, z)$;
- Eliminiraju se $\exists u$, $\exists x$, i $\exists z$:
- $\forall v\, \forall w\, \forall y\, F(a, v, w, f(v, w), y, g(v, w, y))$;
- i zamjenjuju redom SKOLEM IZRAZIMA:
- a, $f(v, w)$, $g(v, w, y)$, gdje su a, f, g Skolem funkcije.

- Niti jedan od simbola a, f, g ne smije se pojavljivati u izvornoj formuli

PRETVARANJE FORMULE U KLAUZALNI OBLIK

- Skolemizacija kao postupak ne daje nužno definiciju Skolem funkcije nego se radi o metodi pridjeljivanja imena funkcijama koje moraju postojati

Primjer:

- $\forall x \, \exists y \, GT(y, x)$
- Skolemizacija daje $\forall x \, GT(f(x), x)$, gdje je *f* Skolem funkcija. Ona može biti:
  - $f(x) = x + 1$ ili
  - $f(x) = x + 5$ itd.

PRETVARANJE FORMULE U KLAUZALNI OBLIK

- **OPRAVDANJE ZA SKOLEMIZACIJU?**
  - Zašto egzistencijalno kvantificiranu varijablu smijemo zamijeniti konstantom?
  - $\exists x$ SESTRA(x, Ivan) $\equiv$ SESTRA(Ana, Ivan) **???**
- Odgovor:
  - gornja ekvivalencija općenito ne vrijedi, ali...
  - **... skolemizacija ne utječe na svojstvo <u>nezadovoljivosti</u> formule!**
  - Ako $\exists$**x** SESTRA(**x**, Ivan) $\equiv$ **false**

    onda SESTRA(**Ana**, Ivan) $\equiv$ **false**
  - U kontekstu rezolucije opovrgavanjem to je dovoljno
    - Ako su premise + negirani cilj proturječni, bit će takvi i nakon skolemizacije

PRETVARANJE FORMULE U KLAUZALNI OBLIK

6. Premjesti sve kvantifikatore (preostali su samo univerzalni) na lijevu stranu formule tako da se na lijevoj strani nalazi niz kvantifikatora koji se nazivaju **prefiks**. Desna strana formule koja se naziva **matrica**, oslobođena je svih kvantifikatora. Međusobni uređaj kvantifikatora ostaje nepromijenjen! Formula u takvom obliku se naziva **PRENEKS NORMALNI OBLIK**
   - $(\forall x\, F(x) \lor \forall y\, G(y)) \equiv \forall x\, \forall y\, (F(x) \lor G(y))$
   - $(\forall x\, F(x) \land \forall y\, G(y)) \equiv \forall x\, \forall y\, (F(x) \land G(y))$
   - $(\forall x\, F(x) \lor H\{x\}) \equiv \forall x\, (F(x) \lor H\{x\})$
   - $(\forall x\, F(x) \land H\{x\}) \equiv \forall x\, (F(x) \land H\{x\})$

PRETVARANJE FORMULE U KLAUZALNI OBLIK

7. **Eliminiraj prefix**, ostavi samo matricu. Podrazumijeva se da su sve varijable u formuli univerzalno kvantificirane. (Nema slobodnih varijabli u formuli)

8. Pretvori matricu u **konjunkciju disjunkcija** (konjunktivnu normalnu formu) koristeći distributivnost
   - $(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$
   - $((G \wedge H) \vee F) \equiv ((G \vee F) \wedge (H \vee F))$

9. Napiši konjunktivnu normalnu formu kao **skup klauzula** brišući operatore konjunkcija. Implicitno se podrazumijava konjunkcija između klauzula

PRETVARANJE FORMULE U KLAUZALNI OBLIK

10. **Standardiziraj** klauzule preimenovanjem varijabli tako da nema dvije klauzule koje sadrže iste varijable
    - Sve varijable u klauzulama implicitno su kvantificirane (korak 7) i postoji implicitna konjunkcija između klauzula (korak 9) pa je preimenovanje varijabli valjano i dopušteno jer se temelji na slijedećoj ekvivalenciji:

$$\forall x\ (F(x) \wedge G(x)) \equiv \forall x\ \forall y\ (F(x) \wedge G(y))$$

- **Pazi!** Svrha preimenovanja nije ukloniti višestruko pojavljivanje iste varijable **unutar iste klauzule**!
    - Npr. općenito ne vrijedi:

$$\forall x\ P(x,x) \equiv \forall x\ \forall y\ P(x,y)$$

PRETVARANJE FORMULE U KLAUZALNI OBLIK

Primjer

- Pretvorba formule

  $\forall y \; \forall z \; (\exists u(P(y, u) \vee P(z,u)) \rightarrow \exists uQ(y, z, u))$

  u klauzalni oblik

1. **Uklanjanje $\leftrightarrow$**

   OK

2. **Uklanjanje $\rightarrow$**

   $\forall y \; \forall z \; (\sim(\exists u \; (P(y, u) \vee P(z,u))) \vee \exists uQ(y, z, u))$

3. **Smanjivanje dosega operatora ~**

   $\forall y \; \forall z \; (\forall u(\sim P(y, u) \wedge \sim P(z,u)) \vee \exists uQ(y, z, u))$

4. **Preimenovanje varijabli**

   $\forall y \; \forall z \; (\forall u(\sim P(y, u) \wedge \sim P(z,u)) \vee \exists vQ(y, z, v))$

PRETVARANJE FORMULE U KLAUZALNI OBLIK

5. **Skolemizacija**

   $\forall y\ \forall z\ (\forall u(\sim P(y, u) \wedge \sim P(z,u)) \vee Q(y, z, f(y,z)))$

6. **Preneks normalni oblik**

   $\forall y\ \forall z\ \forall u((\sim P(y, u) \wedge \sim P(z,u)) \vee Q(y, z, f(y,z)))$

7. **Eliminiraj prefiks**

   $(\sim P(y, u) \wedge \sim P(z,u)) \vee Q(y, z, f(y,z))$

8. **Konjunktivni normalni oblik**

   $(\sim P(y, u) \vee Q(y, z, f(y, z))) \wedge$
   $(\sim P(z, u) \vee Q(y, z, f(y, z)))$

PRETVARANJE FORMULE U KLAUZALNI OBLIK

9. **Skup klauzula**

$\sim P(y, u) \vee Q(y, z, f(y, z))$

$\sim P(z, u) \vee Q(y, z, f(y, z))$

10. **Standardizacija**

$\sim P(y, u) \vee Q(y, z, f(y, z))$

$\sim P(x, v) \vee Q(w, x, f(w, x))$