Prof.dr.sc. Bojana Dalbelo Bašić

Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za elektroniku, mikroelektroniku, računalne i inteligentne sustave

www.zemris.fer.hr/~bojana
bojana.dalbelo@fer.hr

Zaključivanje uporabom propozicijske logike

AUTOMATSKO ZAKLJUČIVANJE UPORABOM PROPOZICIJSKE LOGIKE

- Neka su dane sljedeće četiri izjave:
  Ivan je budan
  Ivan nosi pribor za čišćenje
  Majka je zadovoljna ako je Ivan budan i čisti svoju sobu
  Ako Ivan nosi pribor za čišćenje, tada on čisti svoju sobu
- Ako su sve gornje izjave istinite, lako intuitivno zaključujemo: majka je zadovoljna

ta tvrdnja nije izričito zadana

- Što ako je dano više stotina (tisuća) izjava?

Želimo automatizirati zaključivanje tako da ga formaliziramo i implementiramo na računalu

AUTOMATSKO ZAKLJUČIVANJE UPORABOM PROPOZICIJSKE LOGIKE

- Izjave ili tvrdnje kojima pridjeljujemo jednu (i samo jednu) vrijednosti istinitosti (*istina* ili *laž*) nazivamo **propozicije** ili **sudovi**
- Jedan od jezika za prikaz znanja na području umjetne inteligencije jest **propozicijska logika**

SIMBOLI, SINTAKSA I SEMANTIKA PROPOZICIJSKE LOGIKE

SIMBOLI PROPOZICIJSKE LOGIKE

Napomene, sinonimi

- Skup entiteta V = {A, B, C, D,…} koji se nazivaju atomi ili elementarne propozicije (to su logičke varijable)

Logička varijabla – propozicija – sud

- Logički veznici:
  Unarni ~ (negacija)
  Binarni $\wedge$ konjunkcija
  $\vee$ disjunkcija
  $\rightarrow$ implikacija
  $\leftrightarrow$ ekvivalencija

Logički operatori

- Skup vrijednosti istinitosti { t, f } (to su logičke konstante)

t – istina, true,
f – laž, false.
Još se koristi: {0, 1} ili { T, $\perp$} ili { **T, F** }

SINTAKSA PROPOZICIJSKE LOGIKE

Formula se gradi na sljedeći način:
(i) Atom je formula
(ii) ako je F formula tada je i (~F) formula
(iii) ako su F i G formule tada su formule:
$(F \wedge G)$
$(F \vee G)$
$(F \rightarrow G)$
$(F \leftrightarrow G)$

Napomene, sinonimi

Umjesto izraza formula koriste se još i izrazi: rečenica ili dobro oblikovana formula, (engl. well formed formula ili ***wff****)*

- *Primjeri atoma :*
  A = "Zemlja je okrugla"
  B = "Harry Potter se školuje u Hogwartsu"
  C = "Propozicijska logika je najmoćnija shema za prikaz znanja"
  D = "Minotaur je mitsko biće"
- *Primjeri formula:*
  C
  (~C)
  $((A \vee B) \wedge \sim C)$
  $(((B \vee F) \wedge (\sim B \vee G)) \rightarrow (F \vee G))$
  $((C \vee D) \rightarrow (\sim A \leftrightarrow B))$

- Neka je **F** skup svih formula. Do sada je **F** samo skup simbola, nema značenja pridjeljenog elementima
- Neka je dana funkcija $t : V \rightarrow \{1, 0\}$
  - Funkcija t je **pridruživanje vrijednosti istinitosti** *1* ili 0 propozicijama (odnosno atomima, elementima skupa V)
  - Ako je t(A) = *1* kažemo da je propozicija **istinita**, ako je t(A) = *0* kažemo da je propozicija **lažna**

- Svaka funkcija $t : V \rightarrow \{1, 0\}$ određuje jednu moguću **evaluaciju istinitosti formule**, tj. funkciju **t**: $\mathbf{F} \rightarrow \{1, 0\}$ na sljedeći način:
  Za svaku formulu F iz **F** određuje se pridružena vrijednost istinitosti na sljedeći način:
  - Svako pojavljivanje nekog atoma A u formuli F zamijeni sa t(A). Tako dobiven izraz sastoji se od znakova *1*, *0*, ~, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - Pomoću tablica istinitosti koje definiraju značenja logičkih operatora ~, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, određuje se pridružena vrijednost istinitosti formule F

SEMANTIKA PROPOZICIJSKE LOGIKE

$\wedge$	1	0
1	1	0
0	0	0

$\vee$	1	0
1	1	1
0	1	0

	~
1	0
0	1

$\rightarrow$	1	0
1	1	0
0	1	1

$\leftrightarrow$	1	0
1	1	0
0	0	1

Napomena: redundancija $\rightarrow$ i $\leftrightarrow$

INTERPRETACIJA FORMULE

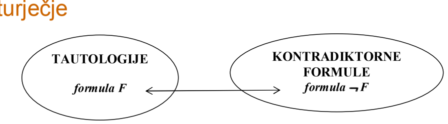
- *Definicija*
  Pridruživanje vrijednosti istinitosti svakom atomu formule (tj. funkcija t) naziva se **interpretacija formule.**
  Interpretacija zadovoljava formulu ako je formula istinita za tu interpretaciju
- *Primjer*
- Za formulu $((A \vee B) \wedge C) \wedge (\sim B \vee C)$ neka je dana sljedeća interpretacija: $t(A) = 0$
  $t(B) = 1$
  $t(C) = 1$
- Tada je evaluacija istinitosti formule:
  t $(((A \vee B) \wedge C) \wedge (\sim B \vee C))$
  $= ((t(A) \vee t(B)) \wedge t(C)) \wedge (\sim t(B) \vee t(C))$
  $= ((0 \vee 1) \wedge 1) \wedge (\sim 1 \vee 1)$
  $= (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1)$
  $= 1 \wedge 1$
  $= 1.$
- Zaključak: Zadana interpretacija zadovoljava formulu

INTERPRETACIJA FORMULE

- Ako formula ima *n* atoma $\Rightarrow 2^n$ različitih interpretacija formule
- Redoslijed izvođenja operacija je sljedeći:
  $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- *Primjer:*
  $(((\sim A) \wedge B) \rightarrow (C \vee D))$ je isto što i
  $\sim A \wedge B \rightarrow C \vee D$

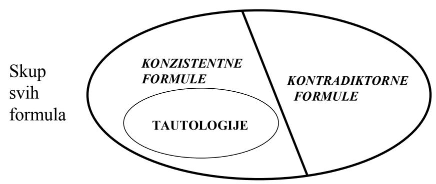
TAUTOLOGIJA I KONTRADIKCIJA

- *Definicija*
- Formula je **tautologija ili valjana** (*engl. tautology, valid formula)* akko je istinita za svaku svoju interpretaciju
- Formula je **kontradikcija ili proturječje** (*engl. contradiction, inconsistent, unsatisfiable*) akko je laž za svaku svoju interpretaciju
- *Primjer tautologije* $(B \vee \sim B)$
- *Primjer proturječja* $(B \wedge \sim B)$
- Vrijedi da je formula tautologija akko je njezina negacija proturječje



TAUTOLOGIJA I KONTRADIKCIJA

- *Definicija*
  Formula je **konzistentna** (*engl. consistent, satisfiable*) akko nije kontradikcija



Može se još reći da je formula konzistentna ako je istinita barem za jednu svoju interpretaciju

TAUTOLOGIJA I KONTRADIKCIJA

- Ako je formula tautologija onda je i konzistentna (tj. tautologija $\Rightarrow$ konzistencija), ali ne vrijedi obrat
- Ako formula nije tautologija onda ne znači da je kontradikcija
- Ako formula nije kontradikcija onda je po definiciji konzistentna, što ne znači da je tautologija

EKVIVALENCIJA

- *Definicija*
  Formula F je **ekvivalentna** formuli G akko je vrijednost istinitosti od F jednaka vrijednosti istinitosti od G za svaku moguću interpretaciju F i G. Piše se $F \equiv G$
- *Primjer*
  Dokazivanje ekvivalentnosti formula **$\sim(A \vee B)$** i **$(\sim A \wedge \sim B)$** tablicom istinitosti

A	B	$(A \vee B)$	$\sim(A \vee B)$	$\sim B$	$\sim A$	$(\sim A \wedge \sim B)$
1	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*
0	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*
0	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*

EKVIVALENCIJA

- **Tablica najčešće korištenih ekvivalencija u propozicijskoj i predikatnoj logici**

[1]	$\sim(\sim F)$	$\equiv$	F	involucija
[2]	$(F \rightarrow G)$	$\equiv$	$(\sim F \vee G)$	eliminacija implikacije
[3]	$(F \rightarrow G)$	$\equiv$	$(\sim G \rightarrow \sim F)$	kontrapozicija
[4]	$(F \rightarrow (G \rightarrow H))$	$\equiv$	$(G \rightarrow (F \rightarrow H))$	
[5]	$(F \rightarrow (G \rightarrow H))$	$\equiv$	$((F \wedge G) \rightarrow H)$	
[6]	$(F \leftrightarrow G)$	$\equiv$	$((F \wedge G) \vee (\sim F \wedge \sim G))$	
[7]	$(F \leftrightarrow G)$	$\equiv$	$((F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F))$	
[8]	$(F \leftrightarrow G)$	$\equiv$	$((\sim F \vee G) \wedge (\sim G \vee F))$	
[9]	$(G \wedge G)$	$\equiv$	G	idempotencija
[10]	$(G \wedge \textit{true})$	$\equiv$	G	

EKVIVALENCIJA

- **Tablica najčešće korištenih ekvivalencija u propozicijskoj i predikatnoj logici**

[11]	$(G \land \mathit{false})$	$\equiv$	false	
[12]	$(G \land \sim G)$	$\equiv$	false	zakon kontradikcije (ekskluzija)
[13]	$(G \lor G)$	$\equiv$	G	faktorizacija
[14]	$(G \lor \mathit{true})$	$\equiv$	true	
[15]	$(G \lor \mathit{false})$	$\equiv$	G	
[16]	$(G \lor \sim G)$	$\equiv$	true	zakon isključenja trećega (komplementiranje)
[17]	$((F \land G) \land H)$	$\equiv$	$(F \land (G \land H))$	asocijativnost
[18]	$((F \lor G) \lor H)$	$\equiv$	$(F \lor (G \lor H))$	
[19]	$(F \land G)$	$\equiv$	$(G \land F)$	komutativnost
[20]	$(F \lor G)$	$\equiv$	$(G \lor F)$	
[21]	$(F \lor (G \land H))$	$\equiv$	$((F \lor G) \land (F \lor H))$	distributivnost

EKVIVALENCIJA

- **Tablica najčešće korištenih ekvivalencija u propozicijskoj i predikatnoj logici**

[22]	$(F \land (G \lor H))$	$\equiv$	$((F \land G) \lor (F \land H))$	distributivnost
[23]	$\sim(F \lor G)$	$\equiv$	$(\sim F \land \sim G)$	De Morganovi zakoni
[24]	$\sim(F \land G)$	$\equiv$	$(\sim F \lor \sim G)$	
[25]	$(F \lor (F \land G))$	$\equiv$	F	apsorpcija
[26]	$(F \land (F \lor G))$	$\equiv$	F	
[27]	$(F \lor (\sim F \land G))$	$\equiv$	$(F \lor G)$	
[28]	$(F \land (\sim F \lor G))$	$\equiv$	$(F \land G)$	

NAPOMENE

- Neke napomene:
- Definicijom pridruživanja vrijednosti istinitosti $t: V \rightarrow \{1, 0\}$, definirali smo propozicije kao izreke (izjave, tvrdnje, sudove) kojima se pridružuje samo jedna od dviju mogućih vrijednosti istinitosti: ili *istina (t)* ili *laž (f)*
- U propozicijskoj logici ne zanima nas niti sadržaj, niti struktura propozicija nego samo je li propozicija istinita ili lažna, tj. zanima nas samo vrijednost istinitosti propozicije
- Semantika logičkih operatora uobičajeno se definira pomoću sljedećih tablica istinitosti...

TABLICE ISTINITOSTI

- Tablice istinitosti pet logičkih operatora:
  negacije, konjunkcije, disjunkcije, implikacije i ekvivalencije

F	G	~F	(F ∧ G)	(F ∨ G)	(F → G)	(F ↔ G)
1	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*
0	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*
0	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*

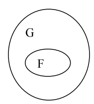
Slijede neke napomene o implikaciji i ekvivalenciji

IMPLIKACIJA

- **Implikacija** – pogodbeni sud $F \rightarrow G$
- Tablica istinitosti implikacije

F	G	(F →G)
1	*1*	*1*
1	*0*	*0*
0	*1*	*1*
0	*0*	*1*

- Čitamo: *Ako* F *onda* G, F *implicira* G, G ako F, G *je nužno za* F, F *je dovoljno* za G



$F \subseteq G$

IMPLIKACIJA

Ako F tada G

antecedens ili uvjet — konsekvens ili posljedica

- Kad god je istinito F tada je istinito i G
- Ako je F lažno, je li G lažno?
- Ako je F lažno, implikacija nam ništa ne govori o istinitosti G
- Antecedens se ne treba poistovjetiti s *uzrokom*!
- Konsekvens se ne treba poistovjetiti s *posljedicom ili učinkom*!

IMPLIKACIJA

- Primjer:
  - **Ako** (jedrenjak jedri) **tada** (vjetar puše)
- **Nužno je** da (vjetar puše) da (jedrenjak jedri)
- **Dovoljno je** da (jedrenjak jedri) pa da (vjetar puše)
- Ako jedrenjak ne jedri (tj. antecedens je lažan) ništa ne možemo zaključiti o puhanju vjetra (tj. o konsekvensu)!
- *Zadatak*

  Pokažite logičku ekvivalentnost $\mathbf{F \rightarrow G \equiv {\sim}F \vee G}$

EKVIVALENCIJA

- **Ekvivalencija** $F \leftrightarrow G$
- **Tablica istinitosti ekvivalencije**

F	G	(F ↔G)
1	*1*	*1*
1	*0*	*0*
0	*1*	*0*
0	*0*	*1*

- **Čitamo :**

  F *je ekvivalentno* G, F *onda i samo onda* G, F *ako i samo ako* G (skraćeno pišemo akko, na *engl. iff*), F *je nužno i dovoljno* za G

PRIMJER

- *Primjer:*
  Tablica istinitosti za formulu $((A \vee B) \wedge \sim B) \rightarrow C)$

A	B	C	(A ∨ B)	~B	((A ∨ B) ∧ ~B)	(((A ∨ B) ∧ ~B) → C)
1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0	1

Svaki redak tablice odgovara jednoj mogućoj interpretaciji formule. Neke interpretacije pridružuju formuli vrijednost *0-laž*, a neke vrijednost *1-istinu*

LOGIČKA POSLJEDICA

- *Definicija*
  Formula G je **logička posljedica** formula F1, F2, …, Fn <u>ako i samo ako</u> svaka interpretacija koja zadovoljava formulu F1 ∧ F2 ∧ … ∧ Fn također zadovoljava i formulu G
- Pišemo:
  F1, F2, …, Fn |= G ("|=" je *double-turnstile* simbol)
- Čitamo:
  - G je **logička (semantička) posljedica** (engl. logical consequence, semantic consequence) od F1,.., Fn
  - F1,..., Fn **logički (semantički) povlači** (engl. logically entails, semantically entails) G

LOGIČKA POSLJEDICA

- *Primjer:* P je logička posljedica P ∧ Q, tj.
  P ∧ Q |= P
  zato što za svaku interpretaciju za koju je P ∧ Q istinito, vrijedi da je i P istinito
- Vrijedi li da je P logička posljedica P ∨ Q?
  (Ne.)

F1, F2, …, Fn se nazivaju **premise**,
G se naziva **ciljna formula**

LOGIČKA POSLJEDICA

- Podsjetimo se:
  - interpretacija koja čini formulu istinitom, zadovoljava formulu
- Kad god su F1, F2, …, Fn istinite tada je i G istinita.
  - Prema definiciji logičke posljedice, to znači da
    F1 ∧ … ∧ Fn <u>implicira</u> G.
- U daljnjim razmatranjima pretpostavljat ćemo da je F1, F2, …, Fn konzistentno

Izravni dokazi i dokazi opovrgavanjem

- Koji su kriteriji za dokazivanje F1, F2, …, Fn |= G?
- Tvrdnja (1)

> **G je logička posljedica premisa F1, F2, …, Fn**
> **akko je**
> **$(F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn) \rightarrow G$ tautologija**
> odnosno
> **F1, F2, …, Fn |= G**
> **akko**
> **$\models (F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn) \rightarrow G$**

- Kako je negacija tautologije proturječje, može se reći tvrdnja (2):
  - G je logička posljedica premisa F1, F2, …, Fn **akko** je $\sim((F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn) \rightarrow G)$ proturječje

Izravni dokazi i dokazi opovrgavanjem

- Primijetimo da vrijedi:
  - $\sim((F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn) \rightarrow G) \equiv$ [eliminacija implikacije [2]]
  - $\sim(\sim(F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn) \vee G) \equiv$ [De Morganov zakon [23]]
  - $(\sim(\sim(F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn)) \wedge \sim G) \equiv$ [involucija [1]]
  - $(F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn \wedge \sim G)$
- Tvrdnja (2) se može, dakle, izreći kao:

> **G je logička posljedica premisa F1, F2, …, Fn**
> **akko je**
> **$(F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn \wedge \sim G)$ proturječje**
> odnosno
> **F1, F2, …, Fn |= G**
> **akko**
> **$\not\models F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn \wedge \sim G$**

Izravni dokazi i dokazi opovrgavanjem

- Na temelju ovih razmatranja oblikujemo dvije osnovne metode za dokaz logičke posljedice:

1. **izravna metoda** (*engl .direct method*) kojom pokazujemo da je $((F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn) \rightarrow G)$ **tautologija**,
   odnosno da vrijedi: $\models (F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn) \rightarrow G$

2. **metoda opovrgavanja** (*engl. refutation method)*
   kojom pokazujemo da je $((F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn) \wedge \sim G)$ **proturječje**,
   odnosno da vrijedi: $\not\models F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn \wedge \sim G$

Izravni dokazi i dokazi opovrgavanjem

Primjer: Dokažimo F, $F \rightarrow G \models G$

1. **Prema definiciji**

Prema definiciji G je logička posljedica premisa F i $F \rightarrow G$ ako i samo ako svaka interpretacija koja zadovoljava formulu $F \wedge (F \rightarrow G)$ istodobno zadovoljava i G

F	G	$(F \rightarrow G)$	$F \wedge (F \rightarrow G)$	G
1	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*0*	*0*
0	*1*	*1*	*0*	*1*
0	*0*	*1*	*0*	*0*

Izravni dokazi i dokazi opovrgavanjem

- *Primjer:* Dokažimo F, F → G |= G

2. **Izravna metoda**

Treba dokazati da je |= (F ∧ (F→ G)) → G

F	G	(F → G)	F ∧ (F →G)	((F ∧ (F → G)) → G)
1	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*0*	*1*
0	*1*	*1*	*0*	*1*
0	*0*	*1*	*0*	*1*

Izravni dokazi i dokazi opovrgavanjem

3. **Metoda opovrgavanja**

Treba dokazati |≠ (F ∧ (F→G)) ∧ ~G

F	G	(F → G)	F ∧ (F →G)	((F ∧ (F → G)) ∧~G)
1	*1*	*1*	*1*	*0*
1	*0*	*0*	*0*	*0*
0	*1*	*1*	*0*	*0*
0	*0*	*1*	*0*	*0*

Izravni dokazi i dokazi opovrgavanjem

- Problem kod ovakvog dokazivanja jest što koraci u postupku dokazivanja rastu **eksponencijalno sa *n***.
- Ako formula ima *n* atoma ⇒ 2^n redaka tablice istinitosti. Stoga je ovakav način dokazivanja primjenljiv, ali nije praktičan

Odlučljivost propozicijske logike

U propozicijskoj logici može se postupkom koji se sastoji od konačno koraka odlučiti je li zadani cilj teorem ili nije.
Zato se kaže da je propozicijska logika **ODLUČLJIVA** (engl. decidable).

Primjer

Je li P logička posljedica Q i ($P \vee Q$), tj.
$Q, (P \vee Q) \models P$?

P	Q	$P \vee Q$	$Q \wedge (P \vee Q)$	$(Q \wedge (P \vee Q)) \rightarrow P$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
0	1	1	1	**0**
0	0	0	0	1
			po definiciji	*izravnom metodom dokazano* ***nije tautologija***

Teorija dokaza

Teorija dokaza

- Logičku posljedicu ljudi tipično ne dokazuju na način da pokušaju pronaći interpretaciju u kojoj bi premise bile istinite a ciljna formula neistinita
  - ljudi pokušavaju pokazati kako se ciljna formula može izvesti iz premisa u konačnom broju koraka zaključivanja, svaki od kojih podupire ciljnu formulu
- Alternativni postupak dokazivanja logičke posljedice jest uporaba **pravila zaključivanja** za dedukciju **teorema** iz zadanih premisa
- Pravila zaključivanja omogućuju dobivanje novih izjava na temelju zadanih premisa, **bez eksplicitnog referenciranja na semantiku logike** (istinosne vrijednosti sudova)

TEOREM

- *Definicija*
  Formula G je **teorem** formula F1, F2, …, Fn
  ako i samo ako je G moguće **izvesti** (engl. derive) iz premisa F1,F2,...,Fn pravilima zaključivanja R
- Pišemo:
  F1, F2, …, Fn $\vdash_R$ G ("$\vdash$" je *turnstile* simbol)
- Čitamo:
  - G je **teorem** (engl. theorem,deduction) ili **deduktivna posljedica** (engl. deductive consequence) od F1,..,Fn
  - G **deduktivno slijedi** (engl. deductively follows) iz F1,..,Fn,
  - F1,...,Fn **izvodi** (engl. derives) ili **deduktivno povlači** (engl. deductively entails) G

Pravila zaključivanja

- **PRAVILO KONJUNKCIJE** – Ako su dvije tvrdnje (premise) istinite, tada je istinita i njihova konjunkcija. To je najjednostavnije pravilo zaključivanja.

  Premisa 1: A

  Premisa 2: B

  Deduktivna posljedica: $(A \wedge B)$

- Također pišemo: $\mathbf{A, B \vdash A \wedge B}$

- **Kako provjeravamo valjanost pravila zaključivanja?**
  (Podsjetimo se da se kaže da je $(A \wedge B)$ logička posljedica premisa A i B ako svaka interpretacija koja zadovoljava A i zadovoljava B zadovoljava i $(A \wedge B)$)

Ispravnost pravila

- Potvrda pravila tablicom istinitosti:

A	B	$(A \wedge B)$
1	*1*	*1*
1	*0*	*0*
0	*1*	*0*
0	*0*	*0*

> Ako pravilo zaključivanja primijenjeno na skup premisa **izvodi formulu koja je logička posljedica** tih premisa, tada kažemo da je pravilo zaključivanja **zdravo** odnosno **ispravno** (*engl. sound*)

Potpunost pravila

- Analogno:

> Ako **skup pravila** zaključivanja **može izvesti svaku logičku posljedicu** (iz bilo kojeg skupa premisa), tada kažemo da je skup pravila zaključivanja **potpun** (*engl. complete*)

- Potpunost skupa pravila je općenito teže dokazati nego ispravnost jednog pojedinačnog pravila
  - Lakše je dokazati nepotpunost

Ispravnost i potpunost

- Formalno:

> Pravilo zaključivanja *r* je **ispravno** (zdravo) akko:
>
> **Ako** $F1, F2, \ldots, Fn \vdash_r G$ **onda** $F1, F2, \ldots, Fn \models G$

> Skup pravila zaključivanja *R* je **potpun** akko:
>
> **Ako** $F1, F2, \ldots, Fn \models G$ **onda** $F1, F2, \ldots, Fn \vdash_R G$

- Pojmovi "ispravnost" i "potpunost" **povezuju semantiku i teoriju dokaza**, tj. povezuju relacije "$\vdash$" i "$\models$"

Ispravnost i potpunost

- Ako moramo birati, kakav skup pravila bismo izabrali: ispravan ili potpun?
  - **Što je važnije: ispravnost ili potpunost**?
- Srećom, za propozicijsku logiku postoje pravila zaključivanja koja su ujedno **i ispravna i potpuna**
  - Možemo biti sigurni da sve što takvim pravilima izvedemo jest logička posljedica, te da svaku logičku posljedicu možemo izvesti
- Nažalost, nadogradnje na propozicijsku (i predikatnu) logiku -- npr. logike višega reda (higher-order logics) – nemaju pravila koja su istovremeno i ispravna i potpuna

Pravila prirodnog zaključivanja

- Najpoznatije pravilo prirodnog zaključivanja je **PRAVILO MODUS PONENS** – ako je istinita premisa A i ako je istinita premisa A → B tada je propozicija B istinita
- Premisa 1: A
- Premisa 2: A → B
- Deduktivna posljedica: B

A, A → B $\vdash_{MP}$ B

- Ispravnost modus ponensa već smo dokazali izravnom metodom i metodom opovrgavanja. Dokaz po definiciji:

	A	B	(A → B)	B
⇨	1	1	1	1
	1	0	0	0
	0	1	1	1
	0	0	1	0

Pravila zaključivanja

- Modus ponens omogućava da se dvije formule (A i A → B) zamijene jednom (B), zato se kaže da je modus ponens implikacijsko-eliminacijsko pravilo

Zadatak

- Dokaži da pravilo abdukcije nije ispravno.
- Premisa 1: B
- Premisa 2: A → B
- Deduktivna posljedica: A

	A	B	(A → B)	A
⇨	1	1	1	1
	1	0	0	1
➡	0	1	1	0
	0	0	1	0

Pravila zaključivanja

- Modus ponens omogućava da se dvije formule (A i A → B) zamijene jednom (B), zato se kaže da je modus ponens implikacijsko-eliminacijsko pravilo

Zadatak

- Dokaži da pravilo abdukcije nije ispravno.
- Premisa 1: B
- Premisa 2: A → B
- Deduktivna posljedica: A

pravila zaključivanja

semantika

dokaz po definiciji LP

	A	B	(A → B)	A
⇨	1	1	1	1
	1	0	0	1
➡	0	1	1	0
	0	0	1	0

Primjer

- Izravnom metodom dokažimo ispravnost pravila modus tollens:

$$\sim G\ ,\ F \rightarrow G \ \ \vdash_{MT} \ \sim F$$

- To znači da treba dokazati da je $((\sim G \wedge (F \rightarrow G)) \rightarrow \sim F)$ tautologija, tj. $\models (\sim G \wedge (F \rightarrow G)) \rightarrow \sim F$

F	G	~F	~G	(F → G)	~G∧(F→G)	((~G ∧(F → G)) →~F)
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Pregled važnijih pravila prirodnog zaključivanja

- Neka F, G, i H predstavljaju bilo koju formulu u propozicijskoj ili predikatnoj logici

[1]	Ako F i G tada $(F \wedge G)$	uvođenje konjunkcije
[2]	Ako $(F \wedge G)$ tada F	eliminiranje konjunkcije
[3]	Ako $(F \wedge G)$ tada G	
[4]	Ako F tada $(F \vee G)$	uvođenje disjunkcije
[5]	Ako G tada $(F \vee G)$	
[6]	Ako F i $(F \rightarrow G)$ tada G	modus ponens
[7]	Ako ~G i $(F \rightarrow G)$ tada ~F	modus tollens
[8]	Ako $(F \rightarrow G)$ i $(G \rightarrow H)$ tada $(F \rightarrow H)$	ulančavanje (silogizam)
[9]	Ako F i $(F \equiv G)$ tada G	
[10]	Ako G i $(F \equiv G)$ tada F	

Prirodno zaključivanje

- Navedena pravila zaključivanja koriste se u postupku zaključivanja koji se naziva **prirodno zaključivanje**
- U postupku prirodnog zaključivanja primjenjujemo jedno od pravila zaključivanja na zadani skup premisa. Izvedena formula logička je posljedica premisa i ona sadrži atome onih premisa iz kojih je izvedena
- Izvedena formula se pridodaje skupu premisa
- Ponavljanjem postupka, tj. ponovnom primjenom pravila zaključivanja, izvode se nove formule

Prirodno zaključivanje

- Zaustavljamo se kada:
  - je izvedena formula identična cilju (to znači da smo pokazali da je cilj teorem) ili
  - više ne možemo izvesti nove formule (to znači da cilj nije teorem)
- Jedan od dva uvjeta zaustavljanja mora biti ispunjen u **konačnom** broju koraka jer s **konačnim** brojem premisa (tj. konačnim brojem atoma u premisama) i ciljem možemo izgraditi **konačan** broj različitih formula

Prirodno zaključivanje

Primjer prirodnog zaključivanja

[i] Ivan se probudio
[ii] Ivan nosi pribor za čišćenje
[iii] Majka je zadovoljna ako se Ivan probudi i čisti svoju sobu
[iv] Ako Ivan nosi pribor za čišćenje, tada on čisti svoju sobu

Dokažite prirodnom dedukcijom cilj: *Majka je zadovoljna*

Označujemo propozicije sadržane u premisama sljedećim atomima:

- A = *Ivan se probudio*
- B = *Ivan nosi pribor za čišćenje*
- C = *Ivan čisti svoju sobu*
- **D = *Majka je zadovoljna***
- Cilj koji treba dokazati je D

Prirodno zaključivanje

- Možemo ispisati premise i kao formule

[1] A
[2] B
[3] $(A \wedge C) \rightarrow D$
[4] $B \rightarrow C$

- Iz ovih premisa možemo izvesti sljedeće logičke posljedice

[5] C — uporabom modus ponensa na [2] i [4]
[6] $A \wedge C$ — uvođenjem konjunkcije na [1] i [5]
[7] D — uporabom modus ponensa na [3] i [6]

- Cilj je izveden kao logička posljedica premisa
- Time smo dokazali da je D (*Majka je zadovoljna*) teorem

Prirodno zaključivanje

Nedostatci prirodnog zaključivanja:

- Implementacija postupka je vrlo složena. Program mora sadržavati sofisticiranu upravljačku strukturu koja će određivati koja pravila kada uporabiti i na kojim premisama da bi se dokazao teorem

- Primjerice, uporaba pravila *uvođenje konjunkcije* na premisama [1] i [2] daje novu formulu $A \wedge B$. Međutim, ona je beskorisna u daljnjem postupku dokazivanja cilja D

Dokazivanje teorema uporabom pravila rezolucije (pravila razrješavanja)

Rezolucijsko pravilo

Uvodimo novo pravilo zaključivanja – **rezolucijsko pravilo**

- Neka su dani atomi F, G, A i njegova negacija ~A
- Zadane su dvije premise $A \vee F$ i $\sim A \vee G$. Te se dvije premise kombiniraju tako da daju jednu logičku posljedicu:

- **Deduktivna posljedica:**

$$\frac{\begin{array}{c} \mathbf{A \vee F} \\ \mathbf{\sim A \vee G} \end{array}}{\mathbf{F \vee G}}$$

- Odnosno: $\mathbf{A \vee F,\ \sim A \vee G\ \ \vdash\ \ F \vee G}$

Rezolucijsko pravilo

- Je li rezolucijsko pravilo ispravno (zdravo)?
- Kako to možemo provjeriti?

Podsjetimo se da je pravilo ispravno (zdravo) ako izvodi formulu koja je logička posljedica premisa

Ispravnost rezolucijskog pravila

- Tablicama istinitosti kojima se pokazuje da je:
  - Deduktivna posljedica logička posljedica
  - $(((B \vee F) \wedge (\sim B \vee G)) \rightarrow (F \vee G))$ tautologija, tj.

    $\models \mathbf{((B \vee F) \wedge (\sim B \vee G)) \rightarrow (F \vee G)}$
  - $(((B \vee F) \wedge (\sim B \vee G)) \wedge \sim(F \vee G))$ kontradikcija, tj.

    $\not\models\ \mathbf{((B \vee F) \wedge (\sim B \vee G)) \wedge \sim(F \vee G)}$

Literali i klauzule

Definicija

- **Literal** je atom ili njegova negacija

Primjeri atoma su A, B, C, D, ~A, ~B, ~C, ...

Definicija

- **Klauzula** je disjunkcija od n literala, $n \geq 0$

Primjeri klauzula

- $A \vee C \vee \sim B$
- $\sim B \vee D$
- G
- *NIL*

Klauzula koja ima samo jedan literal naziva se **jedinična klauzula**.
Simbol ***NIL*** predstavlja praznu klauzulu.

Dokazivanje teorema uporabom rezolucije

Rezolucijsko pravilo zaključivanja može se primijeniti **samo** na formulu koja je u obliku konjunkcije klauzula.

- Je li time rezolucijsko pravilo ograničeno? **NE!**
- Svaka se formula može pretvoriti u njoj ekvivalentnu konjunkciju klauzula

Pretvaranje formula u klauzalni oblik

- Svaka se formula može pretvoriti u njoj ekvivalentnu konjunkciju klauzula u četiri slijedna koraka:

Korak	Svrha koraka	Ekvivalencija koja se koristi u koraku
1	Uklanjanje $\leftrightarrow$	[1] $(F \leftrightarrow G) \equiv ((\sim F \vee G) \wedge (\sim G \vee F))$
2	Uklanjanje $\rightarrow$	[2] $(F \rightarrow G) \equiv (\sim F \vee G)$
3	Smanjivanje dosega operatora negacije tako da se odnosi samo na jedan atom	[De Morganovi zakoni] [3a] $\sim(F \vee G) \equiv (\sim F \wedge \sim G)$ [3b] $\sim(F \wedge G) \equiv (\sim F \vee \sim G)$
4	Transformacija u konjunkciju klauzula	[Distributivnost] [4a] $(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$ [4b] $((G \wedge H) \vee F) \equiv ((G \vee F) \wedge (H \vee F))$

Pretvaranje formula u klauzalni oblik

- *Primjer:* Pretvori formulu $((C \vee D) \rightarrow (\sim A \leftrightarrow B))$ u njoj ekvivalentnu konjunkciju klauzula slijedeći 4 prethodna koraka

$((C \vee D) \rightarrow (\sim A \leftrightarrow B))$	ekvivalencijom [1]
$\equiv ((C \vee D) \rightarrow ((\sim(\sim A) \vee B) \wedge (\sim B \vee \sim A)))$	eliminacija dvostruke negacije
$\equiv ((C \vee D) \rightarrow ((A \vee B) \wedge (\sim B \vee \sim A)))$	ekvivalencijom [2]
$\equiv (\sim(C \vee D) \vee ((A \vee B) \wedge (\sim B \vee \sim A)))$	ekvivalencijom [3a]
$\equiv ((\sim C \wedge \sim D) \vee ((A \vee B) \wedge (\sim B \vee \sim A)))$	ekvivalencijom [4a]
$\equiv (((\sim C \wedge \sim D) \vee (A \vee B)) \wedge ((\sim C \wedge \sim D) \vee (\sim B \vee \sim A)))$	ekvivalencijom [4b]
$\equiv ((\sim C \vee A \vee B) \wedge (\sim D \vee A \vee B)) \wedge ((\sim C \wedge \sim D) \vee (\sim B \vee \sim A))$	ekvivalencijom [4b]
$\equiv ((\sim C \vee A \vee B) \wedge (\sim D \vee A \vee B) \wedge (\sim C \vee \sim B \vee \sim A) \wedge (\sim D \vee \sim B \vee \sim A))$	

Pretvaranje formula u klauzalni oblik

- Prije primjene rezolucijskog pravila formula se mora pretvoriti u konjunkciju klauzula
- Istinitost konjunkcije klauzula znači istinitost svake pojedine klauzule, pa se konjunkcija klauzula može pisati kao skup klauzula u kojem se implicitno podrazumijeva konjunkcija
- Formula je u **klauzalnom obliku** ako je napisana u obliku skupa klauzula između kojih se implicitno podrazumijeva konjunkcija
- *Primjer:* $(\sim C \vee A \vee B) \wedge (\sim D \vee A \vee B) \wedge (\sim C \vee \sim B)$
- u klauzalnom obliku: $\{ (\sim C \vee A \vee B), (\sim D \vee A \vee B), (\sim C \vee \sim B) \}$
- ili se klauzule mogu pisati jedna ispod druge:
- $\sim C \vee A \vee B$
- $\sim D \vee A \vee B$
- $\sim C \vee \sim B$

Rezolucijsko pravilo

- Razmotrimo primjer:

komplementarni literali

disjunkcija n literala, n ≥ 0

RODITELJSKE KLAUZULE

(I1) **B** $\vee$ **F**
(I2) **~B** $\vee$ **G**

- Rezolucijskim pravilom se izvodi (I3)

REZOLVENTNA KLAUZULA **(I3) F $\vee$ G**

Rezolucijsko pravilo

- **Rezolventna klauzula** (engl. *resolvent*) dobivena je zaključivanjem ili razrješavanjem roditeljskih klauzula (I1) i (I2) s obzirom na komplementarne literale B i ~B
- Klauzule (I1) i (I2) su premise iz kojih se izvodi (I3)
- Poseban slučaj:

  (I1) B
  (I2) ~B
  (I3) *NIL*

Rezolucijsko pravilo

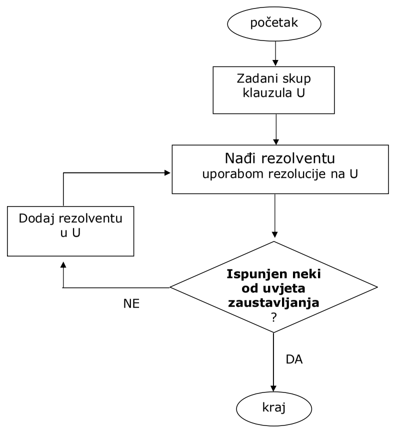
- **Čime je poduprto rezolucijsko pravilo?**
- Dokažimo i na drugi način da je rezolucijsko pravilo ispravno (odnosno zdravo), tj. da je (I3) logička posljedica (I1) i (I2)
- Prirodnim zaključivanjem uz pretpostavku da je ulančavanje ispravno pravilo
- (I1) je uporabom ekvivalencija [1], [20], [2]…**(F1) ~F $\rightarrow$ B**
- (I2) je uporabom ekvivalencije [2]……………**(F2) B $\rightarrow$ G**
- (F1) i (F2) uz pravilo ulančavanja [8]………..**(F3) ~F $\rightarrow$ G**
- (F3) primjenom ekvivalencije [2], [1]…………..**(I3) F $\vee$ G**

Rezolucijsko pravilo

- **Rezolucijsko pravilo kao generalizacija pravila modus ponensa i modus tollensa**
- Rezolucijsko pravilo može se shvatiti kao generalizacija pravila zaključivanja modus ponensa i modus tollensa, ako je jedna od roditeljskih klauzula jedinična

	Premise	Izvedena deduktivna posljedica
1	C C $\rightarrow$ D	D prema modusu ponensu
	C ~C $\vee$ D	D prema rezoluciji
2	~D C $\rightarrow$ D	~C prema modusu tollensu
	~D ~C $\vee$ D	~C prema rezoluciji

Rezolucijsko zaključivanje



Rezolucijsko zaključivanje

- Uvjeti zaustavljanja:
  - izvedena je ciljna formula
  - ne može se više izvesti nova formula
  - iscrpljeni su računalni resursi
- Primjer rezolucijskog zaključivanja:
- Skup U

  [I1] ~A ∨ ~C
  [I2] ~A ∨ C ∨ D
  [I3] A ∨ D ∨ E
  [I4] ~ D
  [I5] ~ E

Rezolucijsko zaključivanje

- Primjer rezolucijskog zaključivanja:
- Skup U

  [I1] ~A ∨ ~C
  [I2] ~A ∨ C ∨ D
  [I3] A ∨ D ∨ E
  [I4] ~ D
  [I5] ~ E

- Slijedi niz rezolventi izvedenih rezolucijskim zaključivanjem:

[I6] ~A ∨ C	/ I2 i I4 /
[I7] A ∨ E	/ I3 i I4 /
[I8] D ∨ E ∨ C	/ I3 i I6 /
[I9] C ∨ E	/ I6 i I7 /

Ponavljanje: ispravnost i potpunost

- Formalno:

Pravilo zaključivanja *r* je **ispravno** (zdravo) akko:

Ako **F1, F2, ..., Fn** $\vdash_r$ **G** **onda** **F1, F2, ..., Fn** $\models$ **G**

Skup pravila zaključivanja *R* je **potpun** akko:

Ako **F1, F2, ..., Fn** $\models$ **G** **onda** **F1, F2, ..., Fn** $\vdash_R$ **G**

- Pojmovi "ispravnost" i "potpunost" **povezuju semantiku i teoriju dokaza**, tj. povezuju relacije "|–" i "|="

Rezolucija opovrgavanjem

- Rezolucjsko pravilo je ispravno (dokazali tablicama istinitosti)

- Pretpostavimo da je skup klauzula U nekonzistentan
- Dokazano je da će se tada rezolucijskim zaključivanjem doći do nekonzistentne klauzule. Na primjer, B i ~B koji se svode na *NIL*

- Kako je *NIL* deduktivno izvedeno iz U rezolucijskim pravilom, tj.

$$U \vdash_r NIL$$

i rezolucijsko pravilo je zdravo, onda vrijedi:

$$U \models NIL$$

tj. svaka interpretacija koja zadovoljava U mora zadovoljavati *NIL*. Kako ni jedna interpretacija ne zadovoljava *NIL*, tada ni jedna ne zadovoljava U, što znači da je U proturječje

73

Rezolucija opovrgavanjem

- Izvođenje *NIL* iz U znači da je U proturječno, U je $(F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn \wedge \sim G)$

- G je logička posljedica premisa F1, F2, …, Fn **akko** je $(F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn \wedge \sim G)$ proturječje

- Također smo pokazali da se svaka formula može pretvoriti u klauzalni oblik

74

Potpunost rezolucije opovrgavanjem

Rezolucijsko zaključivanje opovrgavanjem je potpuno znači:

> **Ako** je formula G logička posljedica premisa F1, F2, … , Fn, **onda** se rezolucijskim zaključivanjem može izvesti *NIL* klauzula iz **ulaznog skupa** klauzula F1, F2, … , Fn, ~G.
>
> $$F1,\ F2, \ldots, Fn, \sim G \vdash_R NIL$$

- Ako je G logička posljedica onda će se rezolucijom opovrgavanjem to i dokazati.

- To ne vrijedi za izravnu metodu rezolucije

> Rezolucija opovrgavanjem je potpuna.

75

Potpunost rezolucije opovrgavanjem

- *Primjer*

	[I1] A	*premise*
	[I2] ~A ∨ C	
Želimo dokazati:	[I3] **A ∨ C**	*ciljna formula*

- *Samo rezolucijom opovrgavanjem (bez drugih pravila) možemo dokazati ciljnu klauzulu!*
- Za rezoluciju opovrgavanjem potrebno je $A \wedge (\sim A \vee C) \wedge \sim(A \vee C)$ pretvoriti u ekvivalentni skup klauzula:
- $A \wedge (\sim A \vee C) \wedge \sim(A \vee C) \equiv$ /De Morganovi zakoni [23]/
  $A \wedge (\sim A \vee C) \wedge \sim A \wedge \sim C$

76

Potpunost rezolucije opovrgavanjem

izravno rezolucijsko zaključivanje	rezolucija opovrgavanjem
[I1] A [I2] ~A ∨ C **rezolventa [I3] C** NE MOŽEMO DOKAZATI CILJNU FORMULU SAMO UPORABOM REZOLUCIJE!	[I1] A [I2] ~A ∨ C [I4] ~A [I5] ~C } Negacija cilja **rezolventa [I6] *NIL* /I1 i I4 /** DOKAZALI SMO CILJNU FORMULU!

Potpunost rezolucije opovrgavanjem

Napomena:

- **Rezolucija opovrgavanjem je potpuna <u>uz uvjet</u> da su klauzule faktorizirane.**
- Faktorizacija je ekvivalencija ([13]) **G ∨ G ≡ G** kojom se višekratno pojavljivanje istog literala zamjenjuje sa jednim literalom

Potpunost rezolucije opovrgavanjem

Primjer koji pokazuje važnost faktorizacije kod rezolucije

- Neka je dan skup klauzula
- [I1] B ∨ B
- [I2]~B ∨ ~B
- Taj je skup proturječan, ali primjenjujući pravilo rezolucije na njega izvodimo

  [I3] B ∨ ~B, a to je tautologija!

Potpunost rezolucije opovrgavanjem

Pretpostavljat ćemo da su sve klauzule u ulaznom skupu faktorizirane. Također, svaka se izvedena rezolventa zamijenjuje faktoriziranom klauzulom.

- Rezolucijom opovrgavanjem dokazati ćemo svaku formulu koja je logička posljedica danih premisa

Primjer (isti primjer kao i za prirodno zaključivanje)

- Neka je dan skup premisa:

  [1] A

  [2] B

  [3] A ∧ C → D

  [4] B → C
- Treba dokazati da je D logička posljedica danih premisa
- D je ciljna formula

Potpunost rezolucije opovrgavanjem

- Premise i negacija ciljne formule pretvaraju se u klauzalni oblik te to zajedno čini ulazni skup

[I1]	A	premise	ulazni skup
[I2]	B	premise	ulazni skup
[I3]	$\sim A \vee \sim C \vee D$	premise	ulazni skup
[I4]	$\sim B \vee C$	premise	ulazni skup
[I5]	**$\sim D$**	**negacija cilja**	ulazni skup

[I6]	$\sim A \vee \sim C$	/ razrješavanjem [I3] i [I5] /
[I7]	$\sim C$	/ razrješavanjem [I1] i [I6] /
[I8]	$\sim B$	/ razrješavanjem [I4] i [I7] /
[I9]	***NIL***	/ razrješavanjem [I2] i [I8] /

Cilj je dokazan jer je izvedena prazna klauzula *NIL*

Podrobniji prikaz rezolucijskog postupka opovrgavanjem

Napomena: klauzule su faktorizirane