Geometrijska porazdelitev

1. Opis

Geometrijska porazdelitev $\mathcal{G}(p)$ opisuje porazdelitev diskretne slučajne spremenljivke X, ki predstavlja število slučajnih poskusov do (vključno) prve pojavitve izida A. Vsak poskus ima le dva možna izida: uspeh in neuspeh. Poskusi so neodvisni in se izvajajo, dokler se ne zgodi prvi uspeh. Verjetnost uspeha p v vsakem poskusu je konstantna.

2. Verjetnostna funkcija

$$p(k) = P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$$

in

$$P(X \leq k) = 1 - (1 - p)^k$$

za

$$k = 1, 2, ...$$

Geometrijska poradzelitev je odvisna od le enega parametra: verjetnost uspeha p.

3. Pričakovana vrednost in disperzija

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad D(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

4. Primer Geometrijske porazdelitve $\mathcal{G}(0.5)$

Naj slučajna spremenljivka X predstavlja število poskusov, dokler se ne zgodi prvi uspeh, pri čemer je verjetnost uspeha enaka 0.5, $X \sim \mathcal{G}(0.5)$. Njena verjetnostna funkcija je enaka

$$p(k) = P(X = k) = (1 - 0.5)^{k-1}0.5 = (0.5)^{k-1}0.5, k = 1, 2, ...$$

.

Pričakovana vrednost in disperzija sta enaki $E(X) = \frac{1}{0.5} = 2$ in $D(X) = \frac{1-0.5}{0.5^2} = 2$. Opazimo, da je disperzija enaka pričakovani verjetnosti.

Poiščimo redke vrednosti izbrane Geometrijske porazdelitve. Zanima nas, za katero k je $P(X > k) \leq 0.001$. Potem je $P(X \leq k) \geq 0.999$, oziroma $F(k) \geq 0.999$, kjer je F funkcija Geometrijske porazdelitve.

Za funkcijo Geometrijske porazdelitve uporabljamo R funkcijo `pgeom(k-1,0.5)`.

Prvi način računanja redkih vrednosti (metoda poskusov)

Za različne k izračunamo `pgeom(k-1,0.5)`, dokler ni zadovoljeno `pgeom(k-1,0.5)`≥ 0.999.

```
k<-9
pgeom(k-1,0.5)
```

```
## [1] 0.9980469
```

```r
k<-10
pgeom(k-1,0.5)
```

```
## [1] 0.9990234
```

Drugi način računanja redkih vrednosti (metoda kvantilov)

Vrednost k je 0.999-kvantil Geometrijske porazdelitve, katerega dobimo z ukazom

```r
(k<-qgeom(0.999,0.5)+1)
```

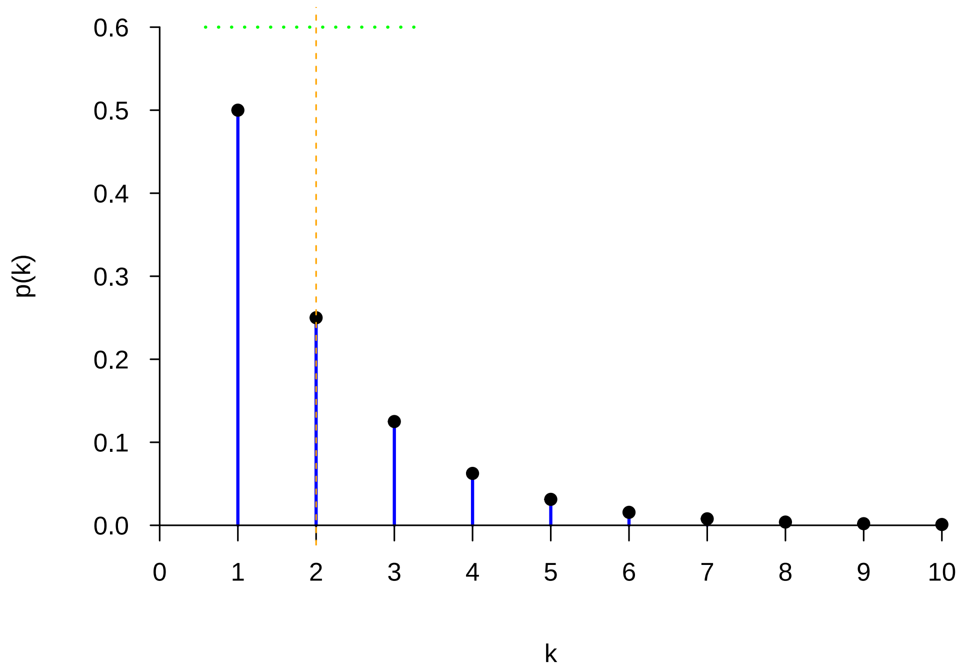
```
## [1] 10
```

Dobili smo, da se vrednosti večje od 10 pojavijo z zelo majhno verjetnostjo.

Graf verjetnostne funkcije

Narišimo graf verjetnostne funkcije Geometrijske porazdelitve. Na grafu z oranžno barvo označimo pričakovano vrednost, ki je mera središčnosti porazdelitve, in z zeleno barvo standardni odklon, ki je mera razpršenosti (pobarvan je pas od $E(X) - \sqrt{D(X)}$ do $E(X) + \sqrt{D(X)}$). Za verjetnostno funkcijo Geometrijske porazdelitve uporabljamo R funkcijo `dgeom(k-1,0.5)`.

```r
k<-1:10
par(las=1,mar=c(4,4,1,1))
plot(k,dgeom(k-1,0.5),type="h",xlab="k",xlim=c(0,10),ylim=c(0,0.6),
     ylab="p(k)",col="blue",lwd=2,axes=F)
axis(1,pos=0,at=seq(0,10,by=1),tcl=-0.5)
axis(2,pos=0,at=seq(0,0.6,by=0.1),tcl=-0.3)
points(k,dgeom(k-1,0.5),pch=19)
EX<-1/0.5
abline(v=EX,col="orange",lty=2)
sigma<-sqrt(0.5)/0.5
segments(x0=EX-sigma,y0=0.6,x1=EX+sigma,y1=0.6,col="green",lty=3,lwd=2)
```



5. Primeri uporabe

1. Žan in Lara igrata poker, dokler Lara ne zmaga prvič. Predpostavimo, da so igre pokerja neodvisne in, da je verjetnost, da Lara zmaga v vsaki igri, enaka 0.4. Število iger pokerja, dokler Lara ne zmaga prvič, ima Geometrijsko porazdelitev $G(0.4)$. Lahko se posploši na vse vrste iger, katere se končajo, ko en od tekmovalcev ali timov zmaga prvič.

2. Ginekolog želi prepričati en par, ki pričakuje svojega prvega otroka, za udeležbo v novem naravnem procesu rojstva dojenčka. Naj bo $p = 0.15$ verjetnost, da se par želi udeležiti. Število parov, ki jih ginekolog sprašuje, dokler se ne udeleži en par, ima Geometrijsko porazdelitev $G(0.15)$.

3. Nek košarkar zadane prosti met z verjetnostjo 0.65. Število poskusov, ki jih potrebuje, da prvič zadane prosti met, je porazdeljeno Geometrijsko, in sicer $G(0.65)$.

4. Telefonske linije v nekem podjetju so zasedene 35% časa. Predpostavimo, da so naši klici na to službo neodvisni. Število klicev, dokler se nam nekdo ne javi ima Geometrijsko porazdelitev $G(0.75)$.

5. Pošten kovanec mečemo, dokler prvič ne pade cifra. Število metov kovanca je porazdeljeno Geometrijsko, in sicer $G(0.5)$.

6. Proizvajalec računalnikov razpošilja računalnike pakirane posamezno, vsak v svoji škatli. V povprečju je 1% računalnikov nepravilno sestavljenih. Prejemnik v podjetju odpira eno škatlo za drugo in testira računalnik iz škatle. Število računalnikov, ki jih testira, preden najde defektnega je porazdeljeno Geometrijsko $G(0.01)$.

7. Ribič v ribniku lovi ribe. V ribniku je 20% postrvi, vse ostalo pa so krapi in ščuke. Predpostavimo, da so ulovi med seboj neodvisni. Število ulovov, dokler ribič prvič ne ujame postrvi je porazdeljeno Geometrijsko $G(0.2)$.

8. Janez je pozabil geslo za svoj e-poštni račun, zato se odloči, da ga bo poskusil uganiti. Verjetnost, da pravilno ugane geslo je 0.15. Predpostavimo, da so poskusi neodvisni. Število poskusov, dokler Janez svojega gesla ne ugane ima Geometrijsko porazdelitev $G(0.15)$.

6. Graf porazdelitvene funkcije

Narišimo še graf porazdelitvene funkcije Geometrijske porazdelitve. Za porazdelitveno funkcijo Geometrijske porazdelitve uporabljamo R funkcijo `pgeom(k-1,0.5)`.

```
k<-0:15
par(las=1,mar=c(4,4,1,1))
plot(k,pgeom(k-1,0.5),type="s",xlab="x",xlim=c(0,15),ylim=c(0,1.5),
     ylab="F(k)",col="blue",lwd=2,axes=F)
axis(1,pos=0,at=seq(0,15,by=1),tcl=-0.5)
axis(2,pos=0,at=seq(0,1.5,by=0.1),tcl=-0.3)
```