Name: ____________________

Abiturprüfung 2022

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabenstellung:

a) Eine Funktion g ist gegeben durch die Gleichung

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(1) *Geben Sie eine Funktionsgleichung der ersten Ableitung von g an.*

(2) *Berechnen Sie die Extremstellen von g und die Art der Extremstellen.*

(1 + 4 Punkte)

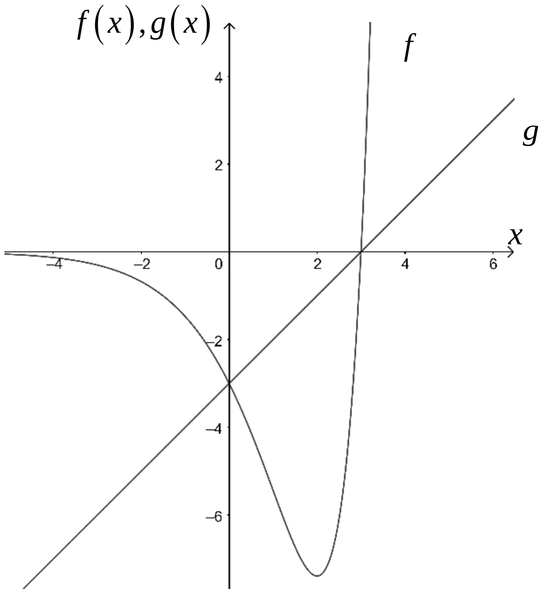
Name: ____________________

b) Gegeben sind die Funktionen f und g mit den Gleichungen

$$f(x) = (x-3)\cdot \mathrm{e}^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$g(x) = x-3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die *Abbildung* zeigt die Graphen der Funktionen f und g.



Abbildung

(1) *Geben Sie die beiden Schnittstellen der Graphen der Funktionen f und g an.*

(2) *Zeigen Sie:* $D(x) = (4-x)\cdot \mathrm{e}^x + 0{,}5\cdot x^2 - 3\cdot x$ *ist eine Stammfunktion der Funktion d mit* $d(x) = g(x) - f(x) = (x-3) - (x-3)\cdot \mathrm{e}^x$.

(3) *Ermitteln Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird.*

(1 + 2 + 2 Punkte)

c) Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x^2$.

Bestimmen Sie diejenige reelle Zahl m mit $m < 0$, *für die der Graph von f und die Gerade mit der Gleichung* $y = m\cdot x$ *eine Fläche mit dem Inhalt* 36 *einschließen.*

(5 Punkte)

Name: ______________________

d) Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$ und die Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes D der Geraden g mit der Ebene E.

(5 Punkte)

e) Gegeben sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(8|6|0)$ und $C(4|3|z)$, wobei z eine positive reelle Zahl ist.

(1) *Zeigen Sie, dass es sich beim Dreieck ABC um ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{AB}$ handelt.*

(2) Das Dreieck *ABC* hat den Flächeninhalt 35.
Bestimmen Sie den Wert von z.

(2 + 3 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2022

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Aufgabenart

Hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgabe

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2022 (Stand: April 2021)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen
   - Skalarprodukt

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Hinweis

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Es ist $g'(x) = x^2 - x - 6$.

(2) Die möglichen Extremstellen ergeben sich aus der notwendigen Bedingung:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6} \ \vee\ x = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{25}{4}} \ \vee\ x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{25}{4}}$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \ \vee\ x = 3.$$

Mit $g'(-3) = (-3)^2 - (-3) - 6 = 6 > 0$ und $g'(0) = -6 < 0$ folgt, dass bei $x = -2$ ein lokales Maximum vorliegt.

Mit $g'(0) = -6 < 0$ und $g'(4) = 4^2 - 4 - 6 = 6 > 0$ folgt, dass bei $x = 3$ ein lokales Minimum vorliegt.

Teilaufgabe b)

(1) Die Graphen schneiden sich bei $x = 0$ und bei $x = 3$.

(2) $D'(x) = -e^x + (4-x)\cdot e^x + x - 3 = (x-3) - (x-3)\cdot e^x = d(x)$.

(3) $\int_0^3 d(x)\,dx = D(3) - D(0) = \left((4-3)\cdot e^3 + 4{,}5 - 9\right) - 4\cdot e^0 = e^3 - 8{,}5$.

Der Flächeninhalt beträgt $e^3 - 8{,}5$ FE.

Teilaufgabe c)

Bestimmung der Schnittstellen des Graphen von *f* mit der Geraden:
$x^2 = mx \Leftrightarrow x = 0 \vee x = m$.
Für $m < 0$ und $m < x < 0$ verläuft die Gerade oberhalb des Graphen von *f*.

Berechnung der eingeschlossenen Fläche für $m < 0$:
$$\int_m^0 \left(mx - x^2\right) \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}mx^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_m^0 = -\tfrac{1}{2}m^3 + \tfrac{1}{3}m^3 = -\tfrac{1}{6}m^3 .$$

Bestimmung der gesuchten Zahl *m*: $-\tfrac{1}{6}m^3 = 36 \Leftrightarrow m = -6$.

Teilaufgabe d)

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{rcrcrcr} r & - & 4\cdot s & - & 2\cdot t & = & -2\\ r & - & 2\cdot s & & & = & 0\\ -2\cdot r & - & 3\cdot s & - & t & = & 5\end{array}\right| \Leftrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} r & - & 4\cdot s & - & 2\cdot t & = & -2\\ r & - & 2\cdot s & & & = & 0\\ 5\cdot r & + & 2\cdot s & & & = & -12\end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{rcrcrcr} r & - & 4\cdot s & - & 2\cdot t & = & -2\\ r & - & 2\cdot s & & & = & 0\\ 6\cdot r & & & & & = & -12\end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} r=-2\\ s=-1\\ t=2\end{array}\right| .$$

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix} \Rightarrow D\left(0\,|\,-1\,|\,3\right).$$

Teilaufgabe e)

(1) $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\3\\z\end{pmatrix}\right| = \sqrt{25+z^2}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\-3\\z\end{pmatrix}\right| = \sqrt{25+z^2}$.

(2) $M\left(4\,|\,3\,|\,0\right)$ ist der Mittelpunkt von $\overline{AB}$.

$$\tfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MC}\right| = \tfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}8\\6\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{64+36}\cdot z = 5z = 35 \Leftrightarrow z = 7 .$$

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt eine Funktionsgleichung der ersten Ableitung von g an.	1			
2	(2) berechnet die Extremstellen von g und die Art der Extremstellen.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**5**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die beiden Schnittstellen an.	1			
2	(2) zeigt, dass D eine Stammfunktion von d ist.	2			
3	(3) ermittelt den Flächeninhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**5**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt die Schnittstellen.	1			
2	berechnet den Flächeninhalt.	3			
3	bestimmt die gesuchte Zahl *m*.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**5**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Koordinaten des Schnittpunktes *D*.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**5**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass es sich beim Dreieck *ABC* um ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{AB}$ handelt.	2			
2	(2) bestimmt den Wert von *z*.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**5**			

	Summe insgesamt	**25**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2022

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabenstellung:

a) Eine Funktion g ist gegeben durch die Gleichung

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(1) *Geben Sie eine Funktionsgleichung der ersten Ableitung von g an.*

(2) *Berechnen Sie die Extremstellen von g und die Art der Extremstellen.*

(1 + 4 Punkte)

Name: ____________________

b) Gegeben sind die Funktionen f und g mit den Gleichungen

$$f(x) = (x-3)\cdot \mathrm{e}^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$g(x) = x-3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Abbildung 1 zeigt die Graphen der Funktionen f und g.

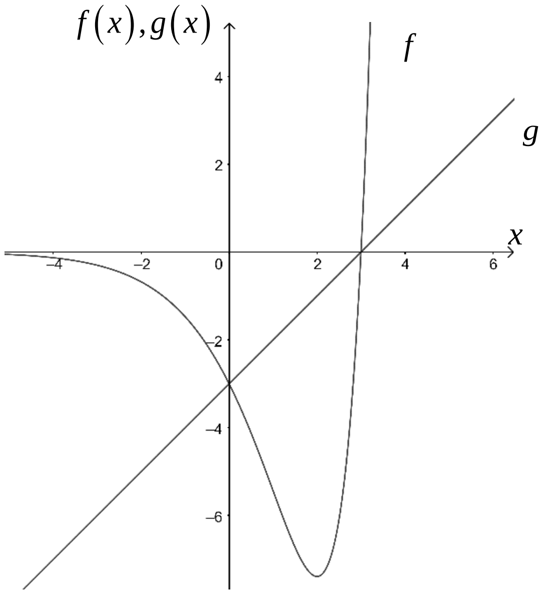


Abbildung 1

(1) *Geben Sie die beiden Schnittstellen der Graphen der Funktionen f und g an.*

(2) *Zeigen Sie:* $D(x) = (4-x)\cdot \mathrm{e}^x + 0{,}5\cdot x^2 - 3\cdot x$ *ist eine Stammfunktion der Funktion d mit* $d(x) = g(x) - f(x) = (x-3) - (x-3)\cdot \mathrm{e}^x$.

(3) *Ermitteln Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird.*

(1 + 2 + 2 Punkte)

c) Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x^2$.

Bestimmen Sie diejenige reelle Zahl m mit $m < 0$*, für die der Graph von f und die Gerade mit der Gleichung* $y = m\cdot x$ *eine Fläche mit dem Inhalt* 36 *einschließen.*

(5 Punkte)

Name: ____________________

d) Pia hat eine Dartscheibe geschenkt bekommen. Sie trifft im Mittel zu etwa 80 % die Dartscheibe. Die Zufallsgröße X: „Anzahl der Treffer beim Pfeilwurf auf die Dartscheibe" wird im Folgenden als binomialverteilt mit $p = 0,8$ angenommen.

Pia wirft genau 100-mal auf die Dartscheibe.

(1) *Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.*

(2) *Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass Pia genau* 80-*mal die Dartscheibe trifft.*

(3) *Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass sie mindestens einmal die Dartscheibe trifft, und begründen Sie anhand des Terms, dass diese Wahrscheinlichkeit nahezu* 100 % *beträgt.*

(2 + 1 + 2 Punkte)

e) *Abbildung 2* zeigt ein unvollständiges Histogramm einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit den Parametern $n = 4$ und $p = 0,5$.
Es gilt $P_{4;0,5}\left(X = 0\right) = 0,0625$.

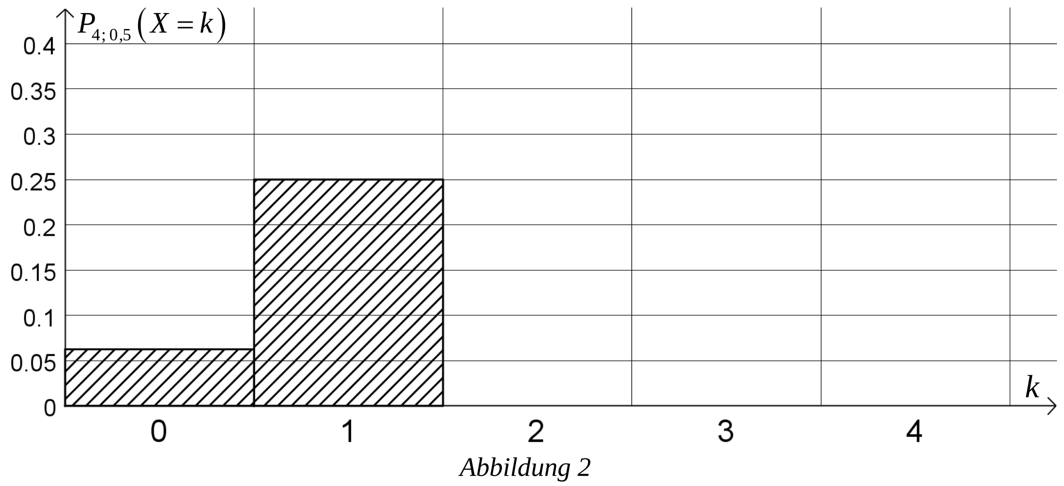


Abbildung 2

Geben Sie begründet $P_{4;0,5}\left(X = 3\right)$ *und* $P_{4;0,5}\left(X = 4\right)$ *an.*

Zeichnen Sie die fehlenden Säulen in Abbildung 2.

(5 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2022

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Aufgabenart

Hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgabe

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2022 (Stand: April 2021)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Hinweis

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Es ist $g'(x) = x^2 - x - 6$.

(2) Die möglichen Extremstellen ergeben sich aus der notwendigen Bedingung:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6} \quad \vee \quad x = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{25}{4}} \quad \vee \quad x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{25}{4}}$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \quad \vee \quad x = 3.$$

Mit $g'(-3) = (-3)^2 - (-3) - 6 = 6 > 0$ und $g'(0) = -6 < 0$ folgt, dass bei $x = -2$ ein lokales Maximum vorliegt.

Mit $g'(0) = -6 < 0$ und $g'(4) = 4^2 - 4 - 6 = 6 > 0$ folgt, dass bei $x = 3$ ein lokales Minimum vorliegt.

Teilaufgabe b)

(1) Die Graphen schneiden sich bei $x = 0$ und bei $x = 3$.

(2) $D'(x) = -\mathrm{e}^x + (4 - x) \cdot \mathrm{e}^x + x - 3 = (x - 3) - (x - 3) \cdot \mathrm{e}^x = d(x)$.

(3) $\int_0^3 d(x)\,\mathrm{d}x = D(3) - D(0) = \left((4-3) \cdot \mathrm{e}^3 + 4{,}5 - 9\right) - 4 \cdot \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^3 - 8{,}5$.

Der Flächeninhalt beträgt $\mathrm{e}^3 - 8{,}5$ FE.

Teilaufgabe c)

Bestimmung der Schnittstellen des Graphen von *f* mit der Geraden:
$x^2 = mx \Leftrightarrow x = 0 \vee x = m$.
Für $m < 0$ und $m < x < 0$ verläuft die Gerade oberhalb des Graphen von *f*.

Berechnung der eingeschlossenen Fläche für $m < 0$:
$$\int_m^0 \left(mx - x^2\right) \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}mx^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_m^0 = -\tfrac{1}{2}m^3 + \tfrac{1}{3}m^3 = -\tfrac{1}{6}m^3.$$

Bestimmung der gesuchten Zahl *m*: $-\tfrac{1}{6}m^3 = 36 \Leftrightarrow m = -6$.

Teilaufgabe d)

(1) Für den Erwartungswert gilt: $E(X) = 100 \cdot 0{,}8 = 80$.

Für die Standardabweichung gilt: $\sigma(X) = \sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = \sqrt{16} = 4$.

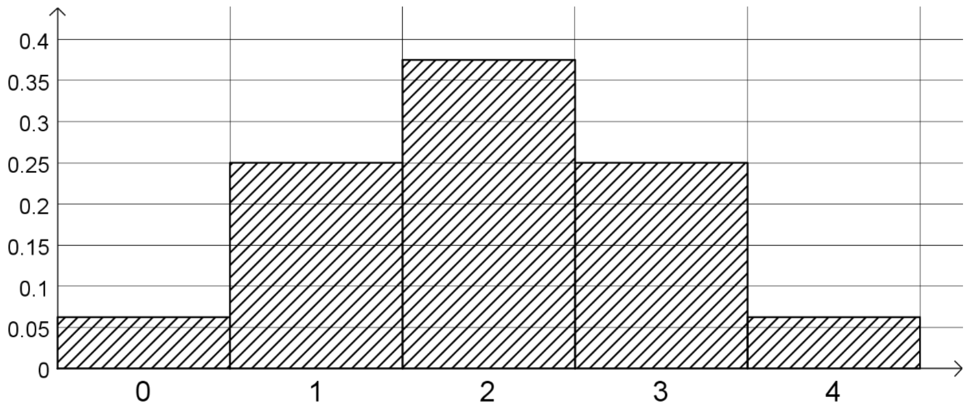
(2) $\binom{100}{80} \cdot 0{,}8^{80} \cdot 0{,}2^{20}$.

(3) Mit $1 - 0{,}2^{100}$ kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet werden.

$0{,}2^{100}$ ist eine „sehr kleine“ positive Zahl, die nahezu den Wert 0 hat.
Daher gilt: $1 - 0{,}2^{100} \approx 1 = 100\,\%$.

Teilaufgabe e)

Aufgrund des Parameters $p = 0{,}5$ und der daraus folgenden Symmetrie muss gelten:
$P_{4;0,5}(X = 3) = P_{4;0,5}(X = 1) = 0{,}25$.
$P_{4;0,5}(X = 4) = P_{4;0,5}(X = 0) = 0{,}0625$.
$\left[P_{4;0,5}(X = 2) = 1 - (0{,}0625 + 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}0625) = 0{,}375.\right]$



7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt eine Funktionsgleichung der ersten Ableitung von g an.	1			
2	(2) berechnet die Extremstellen von g und die Art der Extremstellen.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**5**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die beiden Schnittstellen an.	1			
2	(2) zeigt, dass D eine Stammfunktion von d ist.	2			
3	(3) ermittelt den Flächeninhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**5**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt die Schnittstellen.	1			
2	berechnet den Flächeninhalt.	3			
3	bestimmt die gesuchte Zahl m.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**5**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.	2			
2	(2) gibt einen Term zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit an.	1			
3	(3) gibt einen Term zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit an.	1			
4	(3) begründet anhand des Terms, dass die Wahrscheinlichkeit nahezu 100 % beträgt.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**5**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	gibt begründet $P_{4;0,5}(X=3)$ und $P_{4;0,5}(X=4)$ an.	2			
2	zeichnet die Säulen für $P_{4;0,5}(X=3)$ und $P_{4;0,5}(X=4)$ ein.	1			
3	zeichnet die Säule für $P_{4;0,5}(X=2)$ ein.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**5**			

	Summe insgesamt	**25**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2022

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabenstellung:

a) Eine Funktion g ist gegeben durch die Gleichung

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(1) *Geben Sie eine Funktionsgleichung der ersten Ableitung von g an.*

(2) *Berechnen Sie die Extremstellen von g und die Art der Extremstellen.*

(1 + 4 Punkte)

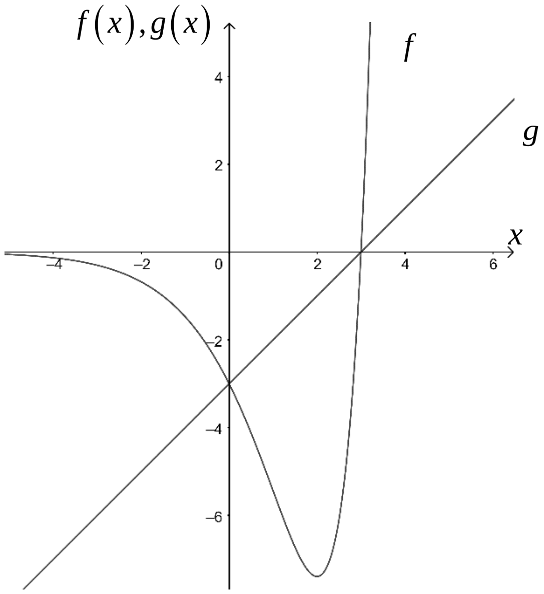
Name: ____________________

b) Gegeben sind die Funktionen f und g mit den Gleichungen

$$f(x) = (x-3)\cdot \mathrm{e}^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$g(x) = x-3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die *Abbildung* zeigt die Graphen der Funktionen f und g.



Abbildung

(1) *Geben Sie die beiden Schnittstellen der Graphen der Funktionen f und g an.*

(2) *Zeigen Sie:* $D(x) = (4-x)\cdot \mathrm{e}^x + 0{,}5\cdot x^2 - 3\cdot x$ *ist eine Stammfunktion der Funktion d mit* $d(x) = g(x) - f(x) = (x-3) - (x-3)\cdot \mathrm{e}^x$.

(3) *Ermitteln Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird.*

(1 + 2 + 2 Punkte)

c) Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x^2$.

Bestimmen Sie diejenige reelle Zahl m mit $m < 0$, *für die der Graph von f und die Gerade mit der Gleichung* $y = m\cdot x$ *eine Fläche mit dem Inhalt* 36 *einschließen.*

(5 Punkte)

Name: ____________________

d) Gegeben sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(8|6|0)$ und $C(4|3|z)$, wobei z eine positive reelle Zahl ist.

(1) *Zeigen Sie, dass es sich beim Dreieck ABC um ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{AB}$ handelt.*

(2) Das Dreieck *ABC* hat den Flächeninhalt 35.
Bestimmen Sie den Wert von z.

(2 + 3 Punkte)

e) Pia hat eine Dartscheibe geschenkt bekommen. Sie trifft im Mittel zu etwa 80 % die Dartscheibe. Die Zufallsgröße X: „Anzahl der Treffer beim Pfeilwurf auf die Dartscheibe" wird im Folgenden als binomialverteilt mit $p = 0{,}8$ angenommen.

Pia wirft genau 100-mal auf die Dartscheibe.

(1) *Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.*

(2) *Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass Pia genau* 80-*mal die Dartscheibe trifft.*

(3) *Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass sie mindestens einmal die Dartscheibe trifft, und begründen Sie anhand des Terms, dass diese Wahrscheinlichkeit nahezu* 100 % *beträgt.*

(2 + 1 + 2 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2022

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Aufgabenart

Hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgabe

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2022 (Stand: April 2021)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen
   - Skalarprodukt

   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Hinweis

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Es ist $g'(x) = x^2 - x - 6$.

(2) Die möglichen Extremstellen ergeben sich aus der notwendigen Bedingung:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6} \ \lor \ x = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{25}{4}} \ \lor \ x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{25}{4}}$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \ \lor \ x = 3.$$

Mit $g'(-3) = (-3)^2 - (-3) - 6 = 6 > 0$ und $g'(0) = -6 < 0$ folgt, dass bei $x = -2$ ein lokales Maximum vorliegt.

Mit $g'(0) = -6 < 0$ und $g'(4) = 4^2 - 4 - 6 = 6 > 0$ folgt, dass bei $x = 3$ ein lokales Minimum vorliegt.

Teilaufgabe b)

(1) Die Graphen schneiden sich bei $x = 0$ und bei $x = 3$.

(2) $D'(x) = -e^x + (4 - x) \cdot e^x + x - 3 = (x - 3) - (x - 3) \cdot e^x = d(x)$.

(3) $\int_0^3 d(x)\,dx = D(3) - D(0) = \left((4-3) \cdot e^3 + 4{,}5 - 9\right) - 4 \cdot e^0 = e^3 - 8{,}5$.

Der Flächeninhalt beträgt $e^3 - 8{,}5$ FE.

Teilaufgabe c)

Bestimmung der Schnittstellen des Graphen von *f* mit der Geraden:

$x^2 = mx \Leftrightarrow x = 0 \vee x = m$.

Für $m < 0$ und $m < x < 0$ verläuft die Gerade oberhalb des Graphen von *f*.

Berechnung der eingeschlossenen Fläche für $m < 0$:

$$\int_m^0 \left(mx - x^2\right) \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}mx^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_m^0 = -\tfrac{1}{2}m^3 + \tfrac{1}{3}m^3 = -\tfrac{1}{6}m^3.$$

Bestimmung der gesuchten Zahl *m*: $-\tfrac{1}{6}m^3 = 36 \Leftrightarrow m = -6$.

Teilaufgabe d)

(1) $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\3\\z\end{pmatrix}\right| = \sqrt{25+z^2}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\-3\\z\end{pmatrix}\right| = \sqrt{25+z^2}$.

(2) $M(4\,|\,3\,|\,0)$ ist der Mittelpunkt von $\overline{AB}$.

$$\tfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MC}\right| = \tfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}8\\6\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{64+36}\cdot z = 5z = 35 \Leftrightarrow z = 7.$$

Teilaufgabe e)

(1) Für den Erwartungswert gilt: $E(X) = 100\cdot 0{,}8 = 80$.

Für die Standardabweichung gilt: $\sigma(X) = \sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2} = \sqrt{16} = 4$.

(2) $\binom{100}{80}\cdot 0{,}8^{80}\cdot 0{,}2^{20}$.

(3) Mit $1 - 0{,}2^{100}$ kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet werden.

$0{,}2^{100}$ ist eine „sehr kleine“ positive Zahl, die nahezu den Wert 0 hat.

Daher gilt: $1 - 0{,}2^{100} \approx 1 = 100\,\%$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt eine Funktionsgleichung der ersten Ableitung von *g* an.	1			
2	(2) berechnet die Extremstellen von *g* und die Art der Extremstellen.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**5**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die beiden Schnittstellen an.	1			
2	(2) zeigt, dass *D* eine Stammfunktion von *d* ist.	2			
3	(3) ermittelt den Flächeninhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen *f* und *g* eingeschlossen wird.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**5**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt die Schnittstellen.	1			
2	berechnet den Flächeninhalt.	3			
3	bestimmt die gesuchte Zahl *m*.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**5**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass es sich beim Dreieck ABC um ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{AB}$ handelt.	2			
2	(2) bestimmt den Wert von z.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**5**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.	2			
2	(2) gibt einen Term zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit an.	1			
3	(3) gibt einen Term zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit an.	1			
4	(3) begründet anhand des Terms, dass die Wahrscheinlichkeit nahezu 100 % beträgt.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**5**			

	Summe insgesamt	**25**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2022

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 9 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-1{,}5 \cdot x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph der Funktion f ist in *Abbildung 1* dargestellt.

Für die zweite Ableitung der Funktion f gilt: $f''(x) = \left(\frac{81}{4} \cdot x - 27\right) \cdot \mathrm{e}^{-1{,}5 \cdot x}$.

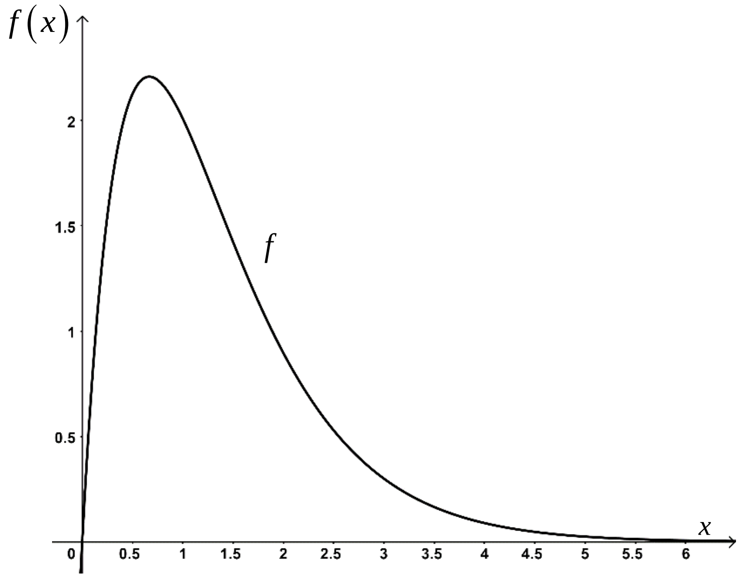


Abbildung 1

Name: ____________________

a) (1) *Begründen Sie, dass die Funktion f nur eine Nullstelle besitzt.*

(2) *Zeigen Sie, dass* $f'(x) = \left(-\frac{27}{2}x + 9\right) \cdot \mathrm{e}^{-1{,}5 \cdot x}$ *die erste Ableitung der Funktion f ist.*

(3) *Untersuchen Sie den Graphen von f rechnerisch auf lokale Extrempunkte.*

(4) Der Graph der Funktion f hat genau einen Wendepunkt.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes.

(5) *Ermitteln Sie, an welchen Stellen im Intervall $[0\,;6]$ der Graph der Funktion f die größte bzw. kleinste Steigung hat.*

(2 + 2 + 4 + 2 + 3 Punkte)

b) Der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 6$ schließen die Fläche A ein.

(1) *Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche A.*

(2) Für jedes $0 < u \leq 6$ sind $O(0|0)$, $P(6|0)$ und $Q_u(u|f(u))$ die Eckpunkte eines Dreiecks.

(i) *Zeichnen Sie das Dreieck OPQ_u mit $u = 2$ in Abbildung 1 ein.*

(ii) *Begründen Sie, dass sich der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ_u in Abhängigkeit von u mit der Gleichung $A_{OPQ_u}(u) = 3 \cdot f(u)$ berechnen lässt.*

(iii) *Begründen Sie ohne weitere Rechnung, für welchen Wert von u der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ_u maximal wird.*

(iv) *Bestimmen Sie alle Werte von u, für die das Dreieck OPQ_u einen Flächeninhalt von 4 Flächeneinheiten hat.*

(2 + 7 Punkte)

Name: ____________________

c) Für ein z mit $\frac{2}{3} < z < \frac{4}{3}$ ist der Punkt $R\left(z \middle| f(z)\right)$ gegeben. Der Graph der Funktion t ist die Tangente an den Graphen von f im Punkt R. Für $x < z$ wird der Graph von f betrachtet. Für $x \geq z$ wird der Graph von t betrachtet. *Abbildung 2* veranschaulicht diese Situation für das Beispiel $z = 0{,}9$.

Die betrachteten Graphen der Funktionen f und t schließen mit der x-Achse die in *Abbildung 2* schraffiert dargestellte Fläche ein. Der Wert von z kann mithilfe der folgenden Bedingungen so bestimmt werden, dass diese Fläche einen Flächeninhalt von 4 Flächeneinheiten hat:

I: $t(z) = f(z)$

II: $t'(z) = f'(z)$

III: $\int_0^z f(x)\,\mathrm{d}x + \int_z^c t(x)\,\mathrm{d}x = 4$, wobei c die Nullstelle von t ist.

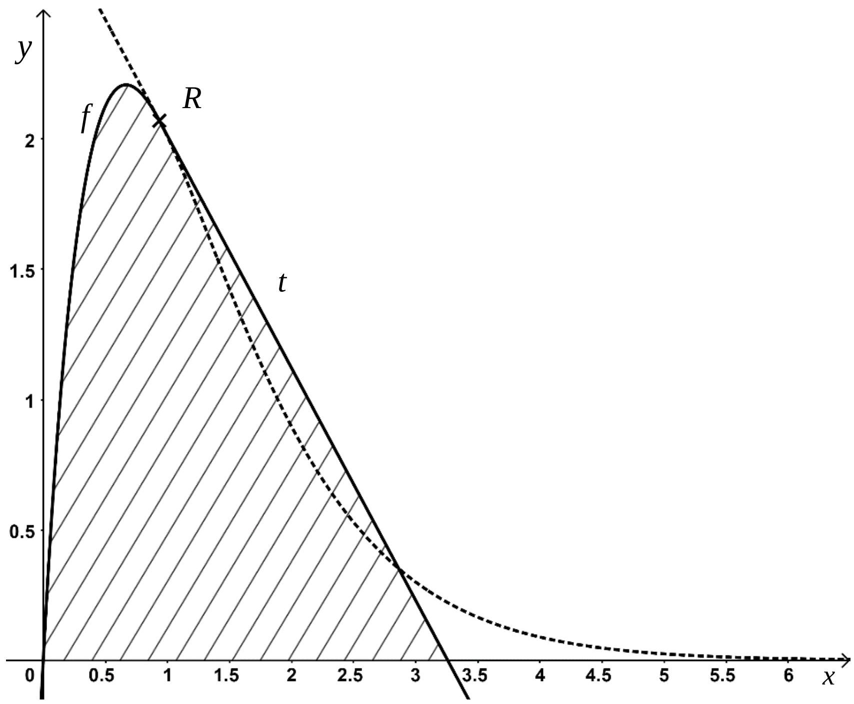


Abbildung 2

(1) (i) *Begründen Sie die Wahl der Bedingungen* I *und* II.

(ii) *Erläutern Sie die linke Seite der Gleichung in Bedingung* III.

Name: ____________________

(2) Aus den Bedingungen folgt $z \approx 0{,}9428$. [Nachweis nicht erforderlich.]

Bestimmen Sie für $z = 0{,}9428$ rechnerisch eine Gleichung der Funktion t, deren Graph die Tangente an den Graphen von f im Punkt $R\left(z \middle| f(z)\right)$ ist.

(4 + 3 Punkte)

d) Für $k > 0$ ist die Funktion j mit der Gleichung $j(x) = 4 \cdot k^2 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-k \cdot x}$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben.
Setzt man $k = 1{,}5$ in den Funktionsterm von j ein, so erhält man den Funktionsterm von f.
Setzt man $k = 2{,}6$ in den Funktionsterm von j ein, so erhält man den Funktionsterm der Funktion g mit $g(x) = 4 \cdot 2{,}6^2 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-2{,}6 \cdot x}$.

(1) Die Graphen der Funktionen f und g schneiden sich nur im Koordinatenursprung und in einem weiteren Punkt S.

(i) *Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von g und des Schnittpunkts S der Graphen von f und g.*

(ii) *Skizzieren Sie mithilfe dieser Punkte den Graphen der Funktion g in Abbildung 3 auf der nächsten Seite.*

(2) Setzt man einen bestimmten Wert von k in den Funktionsterm von j ein, so erhält man den Funktionsterm der Funktion h, deren Graph in *Abbildung 3* dargestellt ist.

Geben Sie ohne weitere Rechnung einen Schätzwert für diesen Wert von k an.

(5 + 1 Punkte)

Name: ____________________

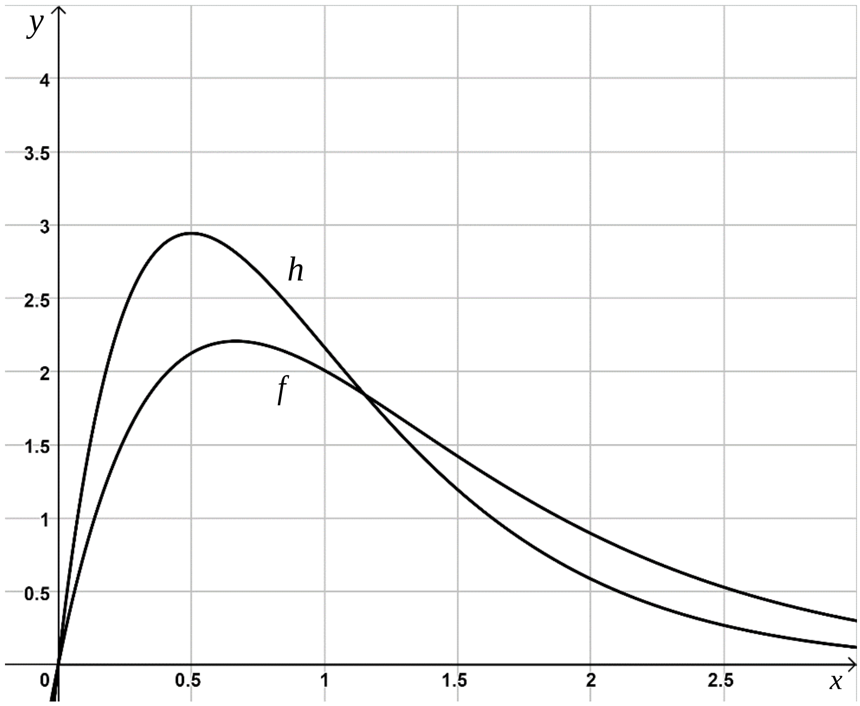


Abbildung 3

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2022

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Innermathematische Argumentationsaufgabe / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2022 (Stand: April 2021)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen
     - Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei *p(x)* ein Polynom höchstens zweiten Grades ist
     - Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben
     - Interpretation und Bestimmungen von Parametern der oben genannten Funktionen
     - notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Mit $\mathrm{e}^{-1,5\cdot x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = 9\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-1,5\cdot x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Somit gibt es nur eine Nullstelle.

(2) $f'(x) = 9\cdot \mathrm{e}^{-1,5\cdot x} - 1,5\cdot 9\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-1,5\cdot x} = \left(9 - \frac{27}{2}x\right)\cdot \mathrm{e}^{-1,5\cdot x}$.

(3) Aus der notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$ ergibt sich $x = \frac{2}{3}$ als einzige mögliche Extremstelle. Da zudem gilt $f''\left(\frac{2}{3}\right) \approx -4,97 < 0$, weist der Graph der Funktion f an der Stelle $x = \frac{2}{3}$ einen Hochpunkt auf.

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 6\cdot e^{-1}\,[\approx 2,21]$, $H\left(\frac{2}{3}\,\middle|\,\frac{6}{\mathrm{e}}\right)$.

(4) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$. Der Wendepunkt liegt etwa bei $W(1,33 \mid 1,62)$.

[Ohne Rundung: $W\left(\frac{4}{3}\,\middle|\,12\cdot e^{-2}\right)$].

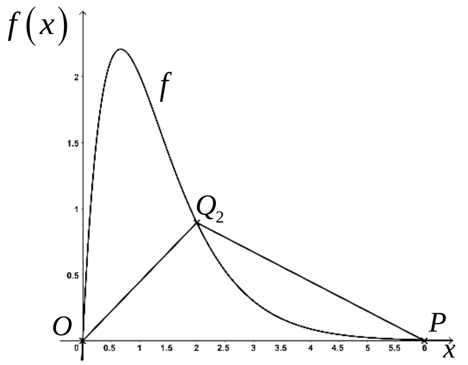
(5) Die größte bzw. kleinste Steigung liegt im Wendepunkt oder am Rand des Intervalls vor. Es gilt: $f'(0) = 9$, $f'(1,33) \approx -1,22$ und $f'(6) \approx -0,01$.

Die Steigung ist an der Stelle $x = 0$ am größten und an der Wendestelle $x \approx 1,33$ am kleinsten.

Teilaufgabe b)

(1) $\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 4[\mathrm{FE}]$.

(2) (i)



(ii) Da die Grundseite $\overline{OP}$ des Dreiecks OPQ_u eine Länge von 6 Längeneinheiten hat und die Länge der zugehörigen Höhe durch $f(u)$ gegeben ist, gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks $A_{OPQ_u}(u) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot f(u) = 3 \cdot f(u)$.

(iii) Da der Flächeninhalt immer der dreifache Wert des Funktionswertes $f(u)$ und der Funktionswert im Hochpunkt maximal ist, wird der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ_u für $u = \frac{2}{3}$ maximal.

(iv) $A_{OPQ_u}(u) = 27 \cdot u \cdot \mathrm{e}^{-1{,}5 \cdot u} = 4 \Leftrightarrow u \approx 0{,}20 \vee u \approx 1{,}58$.
Für diese beiden Werte hat das Dreieck OPQ_u einen Flächeninhalt von 4 Flächeneinheiten.

Teilaufgabe c)

(1) (i) Die Bedingungen I und II stellen sicher, dass es sich bei der Funktion t um die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt R handelt bzw. dass der Übergang „knickfrei“ erfolgt.

(ii) Mit dem ersten Integral wird der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall $[0\,;z]$ berechnet. Mit dem zweiten Integral wird der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von t und der x-Achse über dem Intervall $[z\,;c]$ berechnet, wobei c die Nullstelle der Funktion t ist. Die Addition ergibt den Flächeninhalt der in der Aufgabe beschriebenen Fläche.

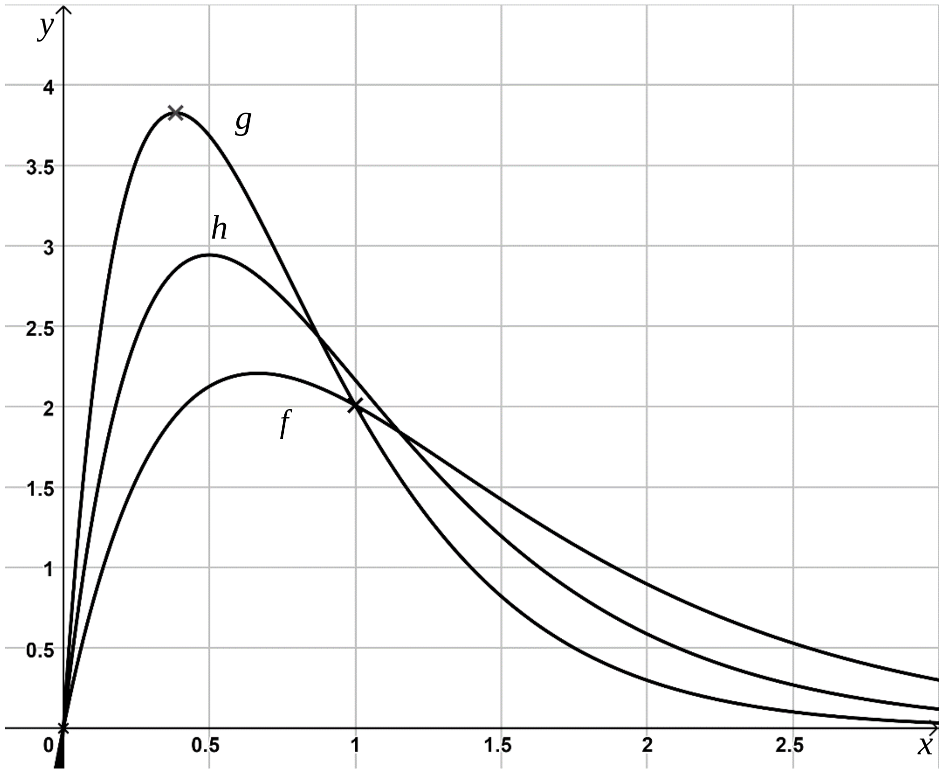
(2) $f'(0{,}9428) \approx -0{,}9063$. $f(0{,}9428) \approx 2{,}0629$.

Die Funktion t hat die Gleichung
$t(x) = -0{,}9063 \cdot (x - 0{,}9428) + 2{,}0629 \approx -0{,}9063 \cdot x + 2{,}9174$ (Werte gerundet).

Teilaufgabe d)

(1) (i) Die grafische Analyse ergibt den ungefähren Hochpunkt $\left(0{,}38 \,\middle|\, 3{,}83\right)$ des Graphen von g und den ungefähren Schnittpunkt $S\left(1 \,\middle|\, 2\right)$.

(ii)



(2) $k = 2$. [Alle Werte im Intervall $\left(1{,}5\ ;\ 2{,}6\right)$ sollten akzeptiert werden.]

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:___________________________________ Kursbezeichnung:__________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass die Funktion f nur eine Nullstelle besitzt.	2			
2	(2) zeigt, dass die angegebene Funktion die Ableitung von f ist.	2			
3	(3) untersucht den Graphen rechnerisch auf lokale Extrempunkte.	4			
4	(4) ermittelt die Koordinaten des Wendepunktes.	2			
5	(5) ermittelt, an welchen Stellen der Graph die größte bzw. kleinste Steigung hat.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**13**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt den Inhalt der Fläche A.	2			
2	(2) (i) zeichnet das Dreieck OPQ_u mit $u = 2$ ein.	1			
3	(2) (ii) begründet, dass sich der Flächeninhalt des Dreiecks wie angegeben berechnen lässt.	2			
4	(2) (iii) begründet ohne weitere Rechnung, für welchen Wert von u der Flächeninhalt maximal wird.	2			
5	(2) (iv) bestimmt alle Werte von u, für die der Flächeninhalt 4 Flächeneinheiten beträgt.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**9**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) (i) begründet die Wahl der Bedingungen I und II.	2			
2	(1) (ii) erläutert die linke Seite der Gleichung in Bedingung III.	2			
3	(2) bestimmt rechnerisch eine Gleichung der Funktion t.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**7**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) (i) bestimmt die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von g und des Schnittpunkts S.	2			
2	(1) (ii) skizziert den Graphen von g in *Abbildung 3*.	3			
3	(2) gibt ohne weitere Rechnung einen Schätzwert für den Wert von k an.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**6**			

	Summe insgesamt	**35**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2022

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

In einem Skatepark soll ein neuer Teilabschnitt gebaut werden. Der Entwurf des Architekten für den Längsschnitt des Abschnitts ist in *Abbildung 1* zu sehen.

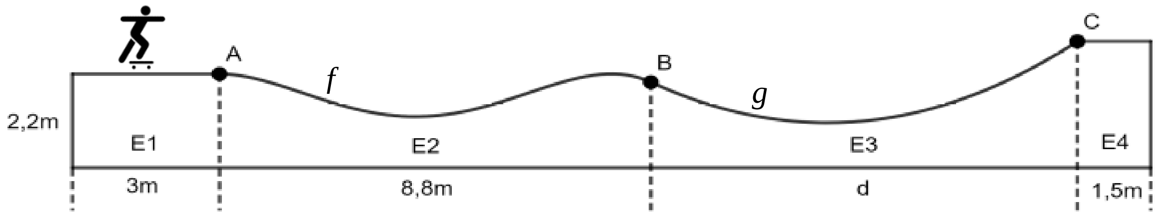


Abbildung 1[1]

Der Abschnitt soll aus vier Betonelementen mit senkrechten Seitenwänden zusammengesetzt werden. Die äußeren Elemente E1 und E4 sind quaderförmig, für die beiden mittleren Elemente E2 und E3 werden die in *Abbildung 1* dargestellten oberen Randlinien durch zwei ganzrationale Funktionen f und g modelliert (*Abbildung 2*). Die in *Abbildung 1* dargestellten unteren Randlinien aller vier Elemente werden durch die x-Achse modelliert.

Außer beim Übergang von E3 zu E4 sollen die dargestellten oberen Randlinien der Elemente „knickfrei“ ineinander übergehen, um ein störungsfreies Fahren zu gewährleisten.

[1] Symbolbild eines Skaters: A Person Sliding On A Skate Board Clip Art: http://www.clker.com/clipart-a-person-sliding-on-a-skate-board.html (Zugriff: 08.03.2021)

Name: ____________________

Zur Modellierung der oberen Randlinie von Element E2 verwendet das Architekturbüro für $-4 \le x \le 4{,}8$ die Funktion *f* mit

$$f(x) = -\frac{1}{256}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + 1{,}2 \;, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem 1 m in der Realität.

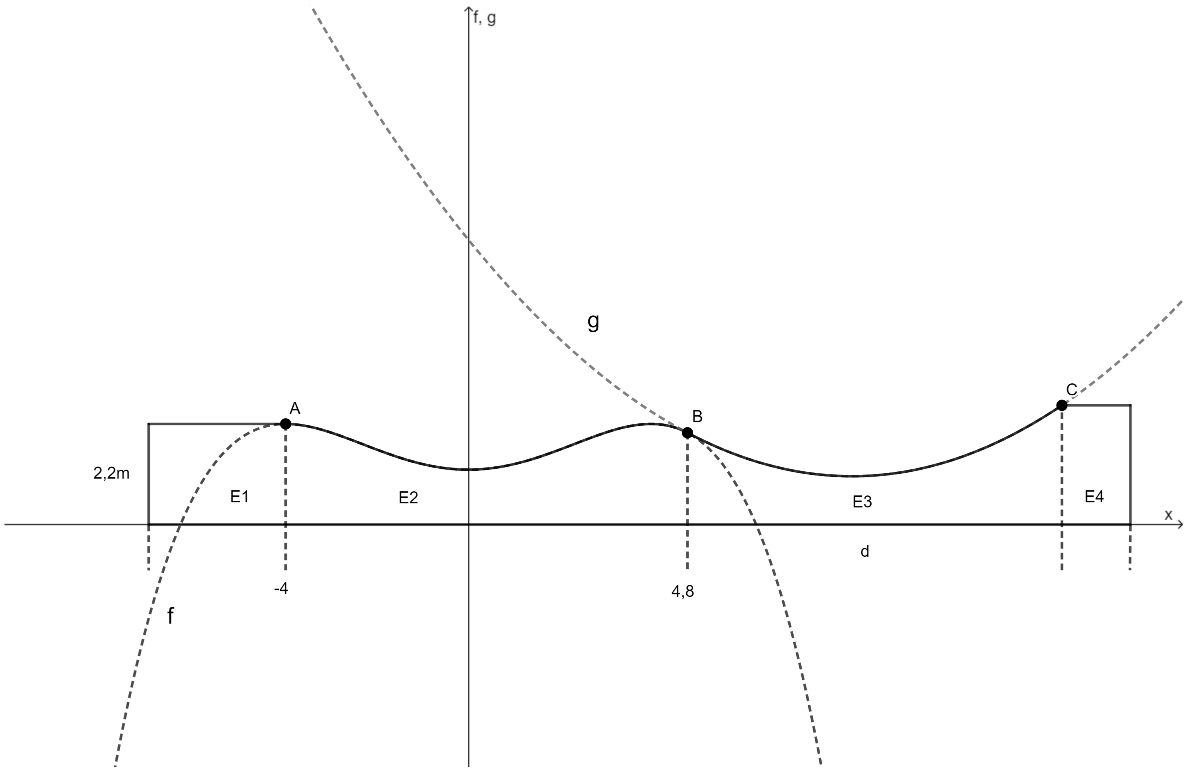


Abbildung 2

a) (1) *Begründen Sie, dass $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und interpretieren Sie dies geometrisch.*

(2) *Ermitteln Sie rechnerisch den Höhenunterschied zwischen dem höchsten und tiefsten Punkt der Skatebahn im Bereich von E2.*

(3) *Zeigen Sie, dass die obere Randlinie von Element E2 knickfrei an die obere Randlinie des quaderförmigen Elements E1 anschließt.*

(4) Aus Sicherheitsgründen soll an der steilsten Stelle der Bahn der Betrag der Steigung höchstens $0{,}85$ sein.

Zeigen Sie, dass diese Vorgabe beim Element E2 eingehalten wird.

(2 + 5 + 2 + 4 Punkte)

Name: ____________________

Die vier Betonelemente der Skatebahn werden aus einem belastbaren Spezialbeton gegossen. Die Materialkosten hierfür betragen 176 € pro m³. Die Skatebahn hat überall eine Breite von 5 m.

b) *Berechnen Sie die Materialkosten für das Element E2.*

(4 Punkte)

Die obere Randlinie von Element E3 soll durch eine ganzrationale Funktion g zweiten Grades modelliert werden, deren Graph im Punkt B sowohl im Funktionswert als auch in der Steigung mit dem Graphen von f übereinstimmt (siehe *Abbildung 2*). Dabei soll der tiefste Punkt der oberen Randlinie von E3 in 3,6 m horizontaler Entfernung vom Punkt B liegen.

c) *Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g.*

(5 Punkte)

Verwenden Sie im Folgenden für die Modellierung von E3 die Gleichung

$$g(x) = \frac{11}{150}(x-8,4)^2 + \frac{132}{125}.$$

d) (1) Für E3 werden in einem ersten Entwurf zunächst Materialkosten von 10 800 € veranschlagt.

(i) *Stellen Sie eine Gleichung auf, mit der die Länge d des Elements E3 so berechnet werden kann, dass die Materialkosten* 10 800 € *betragen.*

Als Lösung der Gleichung ergibt sich eine Länge von $d \approx 8,24\,[\mathrm{m}]$.

(ii) *Bestimmen Sie die Höhe von E4, die sich damit ergibt.*

(iii) *Bestimmen Sie die daraus resultierenden Materialkosten für E4 bei einer feststehenden Länge von* 1,5 m *für E4.*

[Kontrolllösung: Die Materialkosten für E4 betragen ungefähr 3 500 €.]

Name: ____________________

(2) Dem Architekturbüro wird mitgeteilt, dass für die beiden Elemente E3 und E4 nur Materialkosten von zusammen 12 000 € entstehen dürfen.

(i) *Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Materialkosten beim ersten Entwurf über dieser Vorgabe liegen.*

(ii) In einem neuen Entwurf wird daher die Länge von Element E3 verändert. Die Länge von Element E4 soll weiterhin 1,5 m betragen.

Stellen Sie eine Gleichung auf, mit der die neue Länge d_{neu} *von Element E3 so berechnet werden kann, dass die Materialkosten von E3 und E4 zusammen genau* 12 000 € *betragen.*

[Hinweis: Die Gleichung muss nicht gelöst werden.]

(4 + 4 Punkte)

e) In einem anderen Skatepark soll der Abschnitt E2 vergleichbar gebaut werden, allerdings soll der Streckenverlauf in diesem Abschnitt steiler sein. Zur Modellierung dient hier eine Funktion h mit

$$h(x) = u \cdot \left(-\frac{1}{256}x^4 + \frac{1}{8}x^2 \right) + 1{,}2\,,\quad x \in \mathbb{R}\text{, mit } u > 0\,.$$

(1) *Begründen Sie, dass* $h'(x) = u \cdot f'(x)$ *gilt, und erläutern Sie, wie der Graph von* h' *aus dem Graphen von* f' *hervorgeht.*

(2) *Ermitteln Sie den Wert von u, bei dem diese Bahn im Abschnitt E2 an der Stelle* $x = 4{,}8$ *die Steigung* $m = -0{,}85$ *hat.*

(3 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2022

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2022 (Stand: April 2021)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen
     - Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei *p(x)* ein Polynom höchstens zweiten Grades ist
     - Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben
     - Interpretation und Bestimmungen von Parametern der oben genannten Funktionen
     - notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

1 Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) Da *f* eine ganzrationale Funktion mit ausschließlich geraden Exponenten ist, gilt $f(x) = f(-x)$.

Geometrische Interpretation: Der Graph von *f* ist achsensymmetrisch zur *y*-Achse.

(2) Gesucht sind die globalen Extrema von *f* im Intervall $[-4;4,8]$. Als globale Extremstellen kommen nur die Nullstellen von f' und die Randstellen infrage:

$$f'(x) = -\frac{1}{64}x^3 + \frac{1}{4}x\,.$$

$$f'(x) = 0 \overset{\text{TR}}{\Leftrightarrow} x = -4 \vee x = 0 \vee x = 4\,.$$

Wegen $f(-4) = 2{,}2 = f(4)$, $f(0) = 1{,}2$ und $f(4{,}8) = 2{,}0064$ liegt das globale Maximum von *f* im Intervall $[-4;4,8]$ bei 2,2 und das globale Minimum bei 1,2.

Damit gilt: Der maximale Höhenunterschied beträgt $2{,}2\,\text{m} - 1{,}2\,\text{m} = 1\,\text{m}$.

(3) Es ist $f'(-4) = 0$ und $f(-4) = 2{,}2$, d. h., an der Stelle $x = -4$ stimmen die oberen Randlinien von E1 und E2 in der Höhe und der Steigung überein.

(4) Der Taschenrechner liefert im Intervall $[-4;4,8]$ (z. B. durch graphische Analyse) den absoluten Tiefpunkt $(4{,}8 \mid -0{,}528)$ des Graphen von f' und den absoluten Hochpunkt $(2{,}31 \mid 0{,}385)$ des Graphen von f'. Somit liegt die steilste Stelle der Bahn bei $x = 4{,}8$ vor. Mit $0{,}528 < 0{,}85$ wird die Vorgabe eingehalten.

Teilaufgabe b)

$F(x) = -\frac{1}{1280}x^5 + \frac{1}{24}x^3 + 1{,}2x$ ist die Gleichung einer Stammfunktion von *f*.

$176 \cdot 5 \cdot \int_{-4}^{4,8} f(x)\,\mathrm{d}x = 176 \cdot 5 \cdot \left[F(x)\right]_{-4}^{4,8} = 176 \cdot 5 \cdot \left(F(4{,}8) - F(-4)\right) \approx 13238{,}73$.

Die Materialkosten für E2 betragen also ungefähr 13 239 €.

Teilaufgabe c)

Es ist $g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ und $g'(x) = 2a \cdot x + b$.

$$\left| \begin{array}{c} g(4{,}8) = f(4{,}8) \\ g'(4{,}8) = f'(4{,}8) \\ g'(8{,}4) = 0 \end{array} \right| \overset{\text{TR}}{\Leftrightarrow} \left| \begin{array}{l} 23{,}04a + 4{,}8b + c = 2{,}0064 \\ 9{,}6a + b = -0{,}528 \\ 16{,}8a + b = 0 \end{array} \right| \overset{\text{TR}}{\Leftrightarrow} \left| \begin{array}{c} a = \frac{11}{150} \approx 0{,}073 \\ b = -\frac{154}{125} = -1{,}232 \\ c = \frac{3894}{625} = 6{,}2304 \end{array} \right|$$, also

$g(x) = \frac{11}{150}x^2 - \frac{154}{125}x + \frac{3894}{625}$.

Teilaufgabe d)

(1) (i) $176 \cdot 5 \cdot \int_{4,8}^{4,8+d} g(x)\,\mathrm{d}x = 10800$.

(ii) $g(4{,}8 + 8{,}24) \approx 2{,}63$, der Quader E4 ist somit ungefähr 2,63 m hoch.

(iii) Die Materialkosten für den Quader E4 betragen somit

$176\,\frac{€}{\mathrm{m}^3} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} \cdot 2{,}63\,\mathrm{m} \cdot 5\,\mathrm{m} = 3471{,}60\,€$.

[Ohne Rundung des Zwischenergebnisses von $g(13{,}04)$ ergeben sich für E4 Materialkosten von 3477,99 €].

(2) (i) Insgesamt ergeben sich für die Materialkosten von E3 und E4

$10800\ € + 3471{,}60\ € = 14271{,}60\ €$, dieser Wert liegt um $\frac{2271{,}60}{12000} = 18{,}93\ \%$ über der Vorgabe.

(ii) $176 \cdot 5 \cdot \left(\int_{4,8}^{4,8+d_{\text{neu}}} g(x)\,\mathrm{d}x + 1{,}5 \cdot g(4{,}8 + d_{\text{neu}}) \right) = 12000$.

Teilaufgabe e)

(1) Es ist $h'(x) = u \cdot \left(-\frac{1}{64}x^3 + \frac{1}{4}x \right) = u \cdot f'(x)$.

Der Graph von h' geht durch eine Streckung in y-Richtung mit einem positiven Streckfaktor $u > 0$ aus dem Graphen von f' hervor.

(2) $h'(4{,}8) = -0{,}85 \Leftrightarrow u \approx 1{,}610$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:__________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass $f(x) = f(-x)$ gilt.	1			
2	(1) interpretiert dies geometrisch.	1			
3	(2) ermittelt rechnerisch den Höhenunterschied zwischen dem höchsten und tiefsten Punkt im Bereich von E2.	5			
4	(3) zeigt, dass die obere Randlinie von E2 knickfrei an die obere Randlinie des Elements E1 anschließt.	2			
5	(4) zeigt, dass an der steilsten Stelle der Bahn der Betrag der Steigung höchstens 0,85 ist.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**13**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Materialkosten für E2.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**4**			

---
2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt eine Gleichung der Funktion g.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**5**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[3]	**ZK**	**DK**
1	(1) (i) stellt eine Gleichung auf, mit der die Länge d des Elements E3 so berechnet werden kann, dass die Materialkosten 10 800 € betragen.	2			
2	(1) (ii) bestimmt die Höhe von E4.	1			
3	(1) (iii) bestimmt die resultierenden Materialkosten für E4.	1			
4	(2) (i) berechnet, um wie viel Prozent die Materialkosten beim ersten Entwurf über der Vorgabe liegen.	2			
5	(2) (ii) stellt eine Gleichung auf, mit der die neue Länge d_{neu} so berechnet werden kann, dass die Materialkosten von E3 und E4 zusammen genau 12 000 € betragen.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**8**			

[3] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass $h'(x) = u \cdot f'(x)$ gilt.	2			
2	(1) erläutert, wie der Graph von h' aus dem Graphen von f' hervorgeht.	1			
3	(2) ermittelt den gesuchten Wert von u.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**5**			

	Summe insgesamt	**35**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

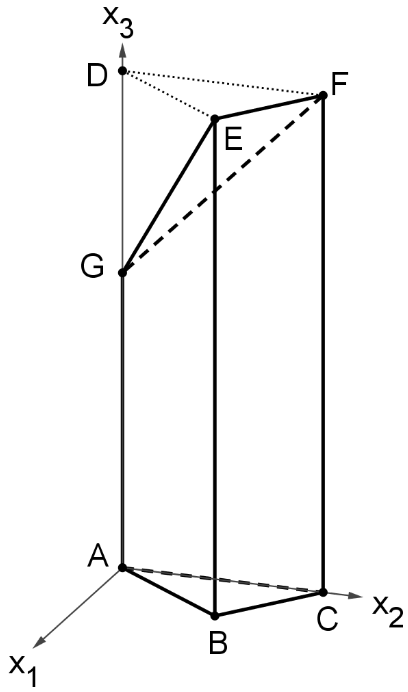
Abiturprüfung 2022

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|0|0)$, B, $C(0|100|0)$, $D(0|0|246)$, $E(48|64|246)$ und $F(0|100|246)$ sowie der Punkt $G(0|0|146)$ gegeben.



Abbildung

Name: ____________________

a) Der in der *Abbildung* dargestellte Körper *ABCDEF ist ein dreieckiges Prisma.*

(1) *Geben Sie die Koordinaten des Punktes B an.*

Für $a \geq 0$ ist der Punkt $G_a\left(0\,|\,0\,|\,a\right)$ gegeben.

(2) *Zeigen Sie, dass das Dreieck* G_aEF *für jedes* $a \geq 0$ *im Punkt E rechtwinklig ist.*

(3) Der Punkt G_a soll die Strecke $\overline{AD}$ im Verhältnis 2:1 teilen.

Geben Sie ein $a \geq 0$ *so an, dass* G_a *diese Bedingung erfüllt.*

(4) Für $a = 246$ gilt $G_a = D$.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks DEF und das Volumen des Prismas ABCDEF.

[Zur Kontrolle: $V_{\text{Prisma}} = 590\,400$ VE.]

(1 + 3 + 1 + 3 Punkte)

Ein Architekturbüro plant den Neubau eines Wolkenkratzers, der durch den Körper mit den Eckpunkten *ABCGEF* modelliert wird, wobei im gewählten Koordinatensystem eine Längeneinheit einem Meter in der Realität entspricht.

b) (1) Die Länge der Kante $\overline{AG}$ musste wegen der geltenden Bauvorschriften im Vergleich zur Länge der Kante $\overline{AD}$ um 100 m auf 146 m reduziert werden. Durch diese Reduzierung wird von dem Prisma *ABCDEF* eine Pyramide mit der Grundfläche *DEF* abgeschnitten.

Berechnen Sie, um wie viel Prozent sich das Volumen des Gebäudes ABCGEF im Vergleich zum Volumen des Prismas ABCDEF verkleinert hat.

(2) *Berechnen Sie den Winkel zwischen den Kanten* $\overline{FC}$ *und* $\overline{FG}$.

(2 + 2 Punkte)

Name: ____________________

c) (1) *Zeigen Sie, dass* $E_{\text{Dach}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 48 \\ 64 \\ 246 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -48 \\ -64 \\ -100 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -48 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R},$

eine Parametergleichung der Ebene ist, in der die Dachfläche GEF liegt.

Alle Punkte der dreieckigen Dachfläche *GEF* sind gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 48 \\ 64 \\ 246 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -48 \\ -64 \\ -100 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -48 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix}, \ s \geq 0, \ t \geq 0, \ s + t \leq 1.$$

(2) Ein Lufttaxi soll den Wolkenkratzer mit einem anderen Wolkenkratzer verbinden. Im letzten Teil des Fluges soll es auf einer Strecke fliegen, die vereinfachend als Teil der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 200 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$, modelliert werden kann.

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Gerade g einen Punkt der dreieckigen Dachfläche GEF enthält.

(3) Ein weiteres Lufttaxi erreicht im Punkt $Q(16\,|\,38\,|\,196)$ die Dachfläche, nachdem es $45\,\text{m}$ auf einer Strecke in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}$ geflogen ist.

Ermitteln Sie den Startpunkt dieser geradlinigen Flugstrecke.

(2 + 4 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2022

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2022 (Stand: April 2021)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen
   - Skalarprodukt
2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Es gilt $B(48\,|\,64\,|\,0)$.

(2) Es gilt $\overrightarrow{EG_a} = \begin{pmatrix} -48 \\ -64 \\ a-246 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -48 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aus $\overrightarrow{EG_a} \cdot \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -48 \\ -64 \\ a-246 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -48 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix} = 2304 - 2304 = 0$ folgt für jedes $a \geq 0$ die Rechtwinkligkeit des Dreiecks G_aEF im Punkt *E*.

(3) Für $a = 164$ [oder $a = 82$] teilt G_a die Strecke $\overline{AD}$ im Verhältnis 2:1.

(4) Aus (2) folgt, dass das Dreieck *DEF* im Punkt *E* rechtwinklig ist. Mit

$$\left|\overrightarrow{EF}\right| = \left|\begin{pmatrix} -48 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{48^2 + 36^2} = \sqrt{3600} = 60 \text{ und}$$

$$\left|\overrightarrow{ED}\right| = \left|\begin{pmatrix} -48 \\ -64 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{48^2 + 64^2} = \sqrt{6400} = 80$$ folgt für die Fläche des Dreiecks *DEF:*

$A_{DEF} = 0{,}5 \cdot 60 \cdot 80 = 2400$ [FE].

Damit ergibt sich $V_{\text{Prisma}} = A_{DEF} \cdot h_{\text{Prisma}} = 2400 \cdot 246 = 590\,400$ [VE].

Teilaufgabe b)

(1) Die Pyramide *DEFG* hat das Volumen

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{DEF} \cdot h_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot 2400 \cdot 100 = 80\,000 \text{ [VE]}.$$

Mit $\frac{80\,000}{590\,400} \approx 0{,}1355$ hat sich das Volumen um ca. $13{,}55\,\%$ verkleinert.

(2) Für den Winkel α zwischen den Kanten $\overline{FC}$ und $\overline{FG}$ gilt

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -246 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -100 \\ -100 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -246 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -100 \\ -100 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$ Daraus folgt $\alpha = 45^\circ$.

Teilaufgabe c)

(1) Es gilt $\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} -48 \\ -64 \\ -100 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -48 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit ist

$$E_{\text{Dach}}: \vec{x} = \overrightarrow{OE} + s \cdot \overrightarrow{EG} + t \cdot \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 48 \\ 64 \\ 246 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -48 \\ -64 \\ -100 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -48 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R},$$

eine Parametergleichung der Ebene E_{Dach}.

(2) Aus $\begin{pmatrix} 48 \\ 64 \\ 246 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -48 \\ -64 \\ -100 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -48 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 200 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ ergibt sich das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} -48s - 48t - 3k = -44 \\ -64s + 36t - 7k = -54 \\ -100s + k = -46 \end{array} \right|.$$

Der TR liefert die Lösung $s = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{6}$ und $k = 4$.

Da $\frac{1}{2} \geq 0$, $\frac{1}{6} \geq 0$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \leq 1$ gilt, enthält die Gerade *g* einen Punkt der dreieckigen Dachfläche *GEF*.

(3) Es gilt $\left|\vec{v}\right| = \left|\begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{10^2 + 11^2 + 2^2} = \sqrt{225} = 15$.

Aus $\begin{pmatrix} 16 \\ 38 \\ 196 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 5 \\ 202 \end{pmatrix}$ ergibt sich $P(-14\,|\,5\,|\,202)$ als Startpunkt der geradlinigen Flugstrecke.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die Koordinaten des Punktes *B* an.	1			
2	(2) zeigt, dass das Dreieck G_aEF für jedes $a \geq 0$ im Punkt *E* rechtwinklig ist.	3			
3	(3) gibt ein $a \geq 0$ so an, dass G_a die Bedingung erfüllt.	1			
4	(4) berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks *DEF* und das Volumen des Prismas *ABCDEF*.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**8**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet, um wie viel Prozent sich das Volumen des Gebäudes *ABCGEF* im Vergleich zum Volumen des Prismas *ABCDEF* verkleinert hat.	2			
2	(2) berechnet den Winkel zwischen den Kanten $\overline{FC}$ und $\overline{FG}$.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**4**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass $E_{\text{Dach}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 48 \\ 64 \\ 246 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -48 \\ -64 \\ -100 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -48 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, eine Parametergleichung der Ebene E_{Dach} ist, in der die Dachfläche *GEF* liegt.	2			
2	(2) zeigt rechnerisch, dass die Gerade *g* einen Punkt der dreieckigen Dachfläche *GEF* enthält.	4			
3	(3) ermittelt den Startpunkt der geradlinigen Flugstrecke.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**8**			

	Summe insgesamt	**20**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2022

Mathematik, Grundkurs

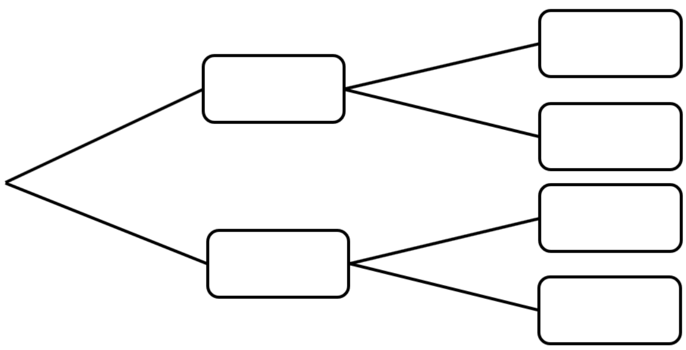
Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Die Firma „Schraubenwind“ stellt Schrauben und Muttern für den Bau von Windkraftanlagen her. Wegen der extremen Belastung werden besondere Anforderungen an diese Verbindungselemente gestellt. Eine hochwertige Schraube zeichnet sich durch die Qualität des Schraubenkörpers und die Qualität der anschließenden Beschichtung aus. Im Folgenden gilt eine Schraube als fehlerfrei, wenn sowohl der Schraubenkörper als auch die Beschichtung fehlerfrei sind.

a) Bei der Produktion entstehen immer wieder Schrauben, die nicht den Qualitätsansprüchen von „Schraubenwind“ genügen. 97 % der Schrauben weisen einen fehlerfreien Schraubenkörper auf. Von den Schrauben mit fehlerfreiem Schraubenkörper haben 1,5 % eine fehlerhafte Beschichtung. Von den Schrauben mit fehlerhaftem Schraubenkörper haben 5 % eine fehlerhafte Beschichtung.

   (1) *Stellen Sie den beschriebenen Sachzusammenhang im folgenden Baumdiagramm dar.*



Name: ____________________

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:*

E_1: Eine zufällig ausgewählte Schraube ist fehlerfrei.

E_2: Eine zufällig ausgewählte Schraube weist eine fehlerhafte Beschichtung auf.

(3) Die Beschichtung einer zufällig ausgewählten Schraube ist fehlerhaft.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Schraube einen fehlerhaften Schraubenkörper aufweist.

(2 + 3 + 2 Punkte)

Qualitätskontrollen bei der Firma „Schraubenwind" zeigen, dass im Durchschnitt 4,5 % der Schrauben fehlerhaft die Produktion verlassen. Im Folgenden wird modellhaft davon ausgegangen, dass die Anzahl an fehlerhaften Schrauben in der Produktion binomialverteilt mit $p = 0{,}045$ ist.

b) (1) In einer Untersuchung werden 500 Schrauben zufällig der Produktion entnommen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter diesen Schrauben maximal 20 *Schrauben fehlerhaft sind.*

(2) *Ermitteln Sie, wie viele Schrauben mindestens entnommen werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens* 95 % *mindestens* 200 *dieser Schrauben fehlerfrei sind.*

(2 + 3 Punkte)

c) „Wind 24", ein Hersteller von Windkraftanlagen, benötigt 5000 fehlerfreie Schrauben.
„Wind 24" gibt bei der Firma „Schraubenwind" eine Bestellung auf.

(1) *Ermitteln Sie, wie viele Schrauben mindestens produziert werden müssen, damit der Erwartungswert für fehlerfreie Schrauben in dieser Produktion mindestens* 5000 *beträgt.*

(2) Es werden 5236 Schrauben produziert.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl an fehlerfreien Schrauben in dieser Produktion für den Bedarf von „Wind 24" ausreicht.

(2 + 2 Punkte)

Name: ____________________

d) „Wind 24“ beschwert sich bei „Schraubenwind“. Die Qualität der gelieferten Schrauben habe stark nachgelassen: Ca. 8 % der gelieferten Schrauben seien fehlerhaft. Da „Wind 24“ der wichtigste Kunde von „Schraubenwind“ ist, werden 200 Schrauben zufällig der laufenden Produktion entnommen und auf ihre Qualität hin untersucht. Die Firmenleitung will die Beschwerde von „Wind 24“ zurückweisen, falls neun oder weniger Schrauben unter den 200 untersuchten Schrauben fehlerhaft sind.

(1) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Firmenleitung die Beschwerde von „Wind 24“ zurückweist, falls der Produktionsprozess eine Fehlerquote von* 8 % *aufweist.*

(2) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Firmenleitung die Beschwerde von „Wind 24“ nicht zurückweist, falls der Produktionsprozess nach wie vor nur eine Fehlerquote von* 4,5 % *aufweist.*

(2 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2022

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2022 (Stand: April 2021)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

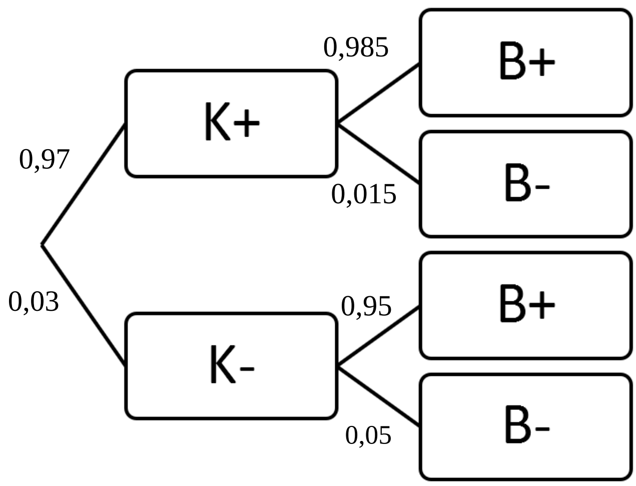
[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) K+: Schraubenkörper fehlerfrei
K-: Schraubenkörper fehlerhaft
B+: Beschichtung fehlerfrei
B-: Beschichtung fehlerhaft



(2) $P(E_1) = 0,97 \cdot 0,985 = 0,95545$.

$P(E_2) = 0,97 \cdot 0,015 + 0,03 \cdot 0,05 = 0,01455 + 0,0015 = 0,01605$.

(3) Falls eine (zufällig gewählte) Schraube eine fehlerhafte Beschichtung aufweist, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass der Schraubenkörper fehlerhaft ist

$$\frac{0,0015}{0,01455 + 0,0015} \approx 0,09346.$$

Teilaufgabe b)

(1) $P_{500;0,045}(X \leq 20) \approx 0,343 = 34,3\,\%$.

(2) Mit $p^* = 1 - 0,045 = 0,955$ gilt:
Gesucht wird der kleinste Wert für *n* mit $P_{n;0,955}(X \geq 200) \geq 0,95$.
Der TR liefert $P_{214;0,955}(X \geq 200) \approx 0,9388$ und $P_{215;0,955}(X \geq 200) \approx 0,9652$.
Es müssen also mindestens 215 Schrauben kontrolliert werden.

Teilaufgabe c)

(1) Für den Erwartungswert gilt: $\mu^* = 5000 = 0,955 \cdot n^*$.
Der TR liefert $n^* = 5000 : 0,955 \approx 5235,6$.
Es müssen also mindestens 5236 Schrauben produziert werden, damit der Erwartungswert für fehlerfreie Schrauben mindestens 5000 beträgt.

(2) Anwendung der Binomialverteilung mit $n^* = 5236$ und $p^* = 0,955$:
$P_{5236;0,955}(X \geq 5000) \approx 0,5274$.
Wenn 5236 Schrauben produziert werden, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl an fehlerfreien Schrauben in dieser Produktion für den Bedarf von „Wind 24“ ausreicht, ca. 52,74 %.

Teilaufgabe d)

(1) Der TR liefert $P_{200;0,08}(X \leq 9) \approx 0,03737$. Falls die Fehlerquote bei 8 % liegt, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass „Schraubenwind“ die Beschwerde von „Wind 24“ zurückweist, ca. 3,737 %.

(2) Der TR liefert $P_{200;0,045}(X \geq 10) \approx 0,4126$. Falls die Fehlerquote nach wie vor nur 4,5 % beträgt, liegt die Wahrscheinlichkeit, dass „Schraubenwind“ die Beschwerde von „Wind 24“ nicht zurückweist, bei ca. 41,26 %.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) stellt den Sachzusammenhang im Baumdiagramm dar.	2			
2	(2) bestimmt die Wahrscheinlichkeit für E_1.	1			
3	(2) bestimmt die Wahrscheinlichkeit für E_2.	2			
4	(3) bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass die Schraube einen fehlerhaften Schraubenkörper aufweist.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**7**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass maximal 20 Schrauben fehlerhaft sind.	2			
2	(2) ermittelt, wie viele Schrauben mindestens entnommen werden müssen.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**5**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt, wie viele Schrauben mindestens produziert werden müssen, damit der Erwartungswert für fehlerfreie Schrauben mindestens 5000 beträgt.	2			
2	(2) ermittelt die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl an fehlerfreien Schrauben für den Bedarf von „Wind 24“ ausreicht.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**4**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt die Wahrscheinlichkeit, dass die Firmenleitung die Beschwerde von „Wind 24“ zurückweist, falls der Produktionsprozess eine Fehlerquote von 8 % aufweist.	2			
2	(2) ermittelt die Wahrscheinlichkeit, dass die Firmenleitung die Beschwerde von „Wind 24“ nicht zurückweist, falls der Produktionsprozess nach wie vor nur eine Fehlerquote von 4,5 % aufweist.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**4**			

	Summe insgesamt	**20**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**25**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**35**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**20**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: dritte Aufgabe	**20**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 40
mangelhaft plus	3	39 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2022

Mathematik, Grundkurs
weitere (kurze) Analysisaufgabe mit 20 BE

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Ein Unternehmen verkauft Fitnessarmbänder. Die momentane Änderungsrate des Absatzes kann modellhaft mithilfe der in $I\!R$ definierten Funktion f mit

$$f(x) = 4000 \cdot x \cdot e^{-0{,}4 \cdot x}$$

beschrieben werden. Dabei ist x die seit der Produkteinführung vergangene Zeit in Monaten und $f(x)$ die momentane Änderungsrate des Absatzes in Stück pro Monat.

a) (1) *Zeigen Sie:* $f'(x) = 4000 \cdot (1 - 0{,}4 \cdot x) \cdot e^{-0{,}4 \cdot x}$.

(2) *Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Absatzes den größten Wert erreicht, und geben Sie diesen Wert an.*

(3) *Zeichnen Sie den Graphen von f für* $0 \le x \le 18$.

(4) Im Zeitraum, der mit der Produkteinführung beginnt und 18 Monate später endet, gibt es einen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Absatzes am stärksten zunimmt, und einen Zeitpunkt, zu dem sie am stärksten abnimmt. Zur Bestimmung dieser beiden Zeitpunkte wurden folgende Berechnungen durchgeführt:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

$$f'''(5) > 0.$$

Erläutern Sie diese Berechnungen. Geben Sie die beiden gesuchten Zeitpunkte an und begründen Sie Ihre Angabe ohne weitere Rechnung.

(2 + 3 + 2 + 6 Punkte)

Name: ____________________

Gleichzeitig mit der Einführung des Fitnessarmbands brachte das Unternehmen eine Smartwatch auf den Markt. Die momentane Änderungsrate des Absatzes der Smartwatch in Stück pro Monat lässt sich im Modell mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit

$$g(x) = 1600 \cdot x^2 \cdot e^{-0,4 \cdot x}$$

beschreiben.

b) (1) *Vergleichen Sie die momentanen Änderungsraten des Absatzes für das Fitnessarmband und die Smartwatch fünf Monate nach Produkteinführung.*

(2) *Ermitteln Sie die Anzahl der im ersten Jahr nach Produkteinführung insgesamt verkauften Smartwatches.*

(3) *Untersuchen Sie im Modell, ob es einen Zeitpunkt gibt, zu dem die Anzahl der seit der Produkteinführung verkauften Fitnessarmbänder mit der Anzahl der seit der Produkteinführung verkauften Smartwatches übereinstimmt.*

Geben Sie gegebenenfalls diesen Zeitpunkt an.

(2 + 2 + 3 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2022

Mathematik, Grundkurs
weitere (kurze) Analysisaufgabe mit 20 BE

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2022 (Stand: April 2021)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     – Untersuchung von ganzrationalen Funktionen
     – Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei *p(x)* ein Polynom höchstens zweiten Grades ist
     – Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben
     – Interpretation und Bestimmungen von Parametern der oben genannten Funktionen
     – notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Durch die Anwendung der Produkt- und der Kettenregel ergibt sich:

$$f'(x) = 4000 \cdot \left(1 \cdot \mathrm{e}^{-0,4 \cdot x} + x \cdot (-0,4) \cdot \mathrm{e}^{-0,4 \cdot x}\right) = 4000 \cdot (1 - 0,4 \cdot x) \cdot \mathrm{e}^{-0,4 \cdot x}.$$

(2) Aus der notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$ für lokale Extremstellen ergibt sich als einzige Lösung $x = 2,5$.

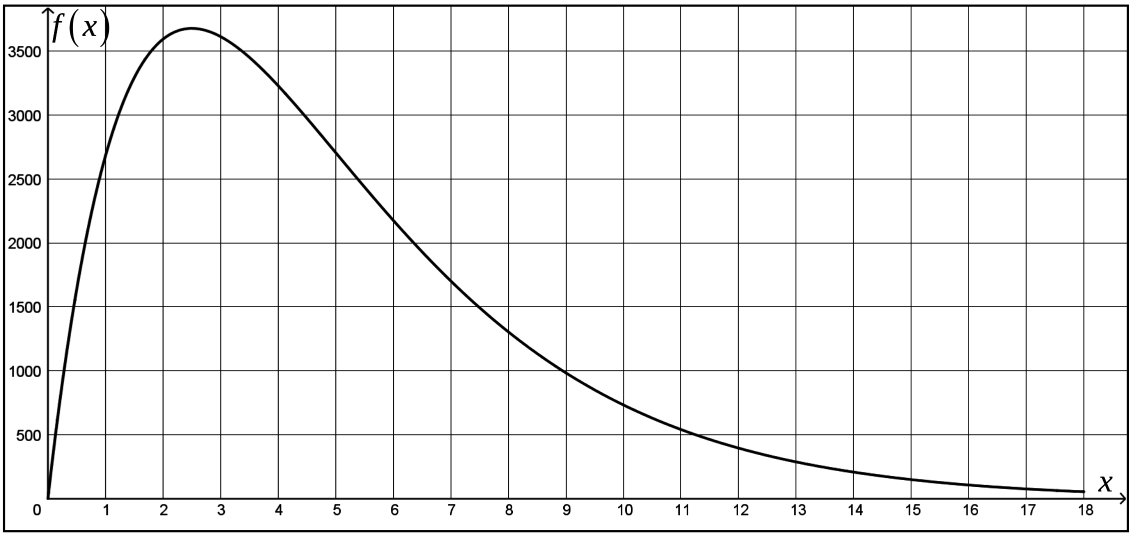
Da zusätzlich $f'(2) \approx 359,5 > 0$ und $f'(3) \approx -241,0 < 0$ gilt, liegt an der Stelle $x = 2,5$ ein Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Funktionswerten von f' vor.

$x = 2,5$ ist daher eine lokale Maximalstelle von f und als einzige lokale Extremstelle auch die globale Maximalstelle von f.

Mit $f(2,5) \approx 3678,8$ gilt dann:

Die momentane Änderungsrate des Absatzes erreicht zweieinhalb Monate nach Produkteinführung mit ungefähr 3680 Stück pro Monat den größten Wert.

(3)



(4) Die gesuchten Zeitpunkte sind durch die globalen Extremstellen der Ableitungsfunktion f' im Intervall $[0;18]$ gegeben, bei denen es sich um lokale Extremstellen oder Randstellen handeln kann.

Mit der Berechnung werden zunächst die lokalen Extremstellen von f' ermittelt: $x=5$ ist die einzige Nullstelle der Funktion f'' und damit die einzige mögliche lokale Extremstelle von f'. Da zusätzlich $f'''(5)>0$ gilt, ist $x=5$ eine lokale Minimalstelle von f'. $x=5$ ist als einzige lokale Extremstelle von f' auch die globale Minimalstelle von f'. Da außerdem der Graph von *f* an der Stelle $x=5$ fällt, gilt: 5 Monate nach der Produkteinführung nimmt die momentane Änderungsrate des Absatzes am stärksten ab.
Da der Graph von *f* an der Randstelle $x=0$ steigt und an der Randstelle $x=18$ fällt, gilt $f'(0)>0$ und $f'(18)<0$. Daher ist $x=0$ die globale Maximalstelle von f'.

Die momentane Änderungsrate des Absatzes nimmt zum Zeitpunkt der Produkteinführung am stärksten zu.

Teilaufgabe b)

(1) $f(5) \approx 2706{,}7$, $g(5) \approx 5413{,}4$.

Fünf Monate nach Produkteinführung ist die momentane Änderungsrate des Absatzes für das Fitnessarmband kleiner als für die Smartwatch.

(2) $\int_0^{12} g(x)\,\mathrm{d}x \approx 42\,873{,}0$.

Im ersten Jahr nach der Produkteinführung werden ungefähr 42 870 Smartwatches verkauft.

(3) Die Gleichung $\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x$ hat für $t > 0$ die Lösung t_1 mit $t_1 \approx 4{,}48$.

Etwa viereinhalb Monate nach Produkteinführung stimmt die Anzahl der seit der Produkteinführung verkauften Fitnessarmbänder mit der Anzahl der seit der Produkteinführung verkauften Smartwatches überein.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt: $f'(x)=4000\cdot(1-0{,}4\cdot x)\cdot e^{-0{,}4\cdot x}$.	2			
2	(2) bestimmt rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Absatzes den größten Wert erreicht, und gibt diesen Wert an.	3			
3	(3) zeichnet den Graphen von *f* für $0\le x\le 18$.	2			
4	(4) erläutert die Berechnungen.	3			
5	(4) gibt den Zeitpunkt an, zu dem die momentane Änderungsrate des Absatzes am stärksten abnimmt, und begründet seine Angabe ohne weitere Rechnung.	1			
6	(4) gibt den Zeitpunkt an, zu dem die momentane Änderungsrate des Absatzes am stärksten zunimmt, und begründet seine Angabe ohne weitere Rechnung.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**13**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) vergleicht die momentanen Änderungsraten des Absatzes für das Fitnessarmband und die Smartwatch fünf Monate nach Produkteinführung.	2			
2	(2) ermittelt die Anzahl der im ersten Jahr nach Produkteinführung insgesamt verkauften Smartwatches.	2			
3	(3) untersucht im Modell, ob es einen Zeitpunkt gibt, zu dem die Anzahl der seit der Produkteinführung verkauften Fitnessarmbänder mit der Anzahl der seit der Produkteinführung verkauften Smartwatches übereinstimmt.	2			
4	(3) gibt diesen Zeitpunkt an.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**7**			

	Summe insgesamt	**20**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**25**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**35**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**20**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: dritte Aufgabe	**20**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 40
mangelhaft plus	3	39 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0