Name: ____________________

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist die in $I\!R$ definierte Funktion *f* mit $f(x) = x^3 - x$.

(1) Einer der folgenden Graphen I, II und III stellt *f* dar.

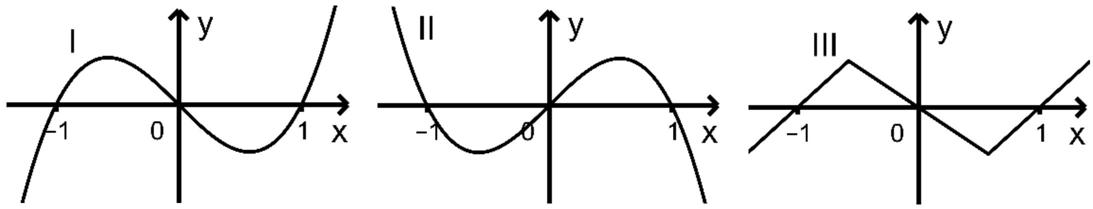


Abbildung 1

Geben Sie die Graphen an, die dafür nicht infrage kommen, und begründen Sie Ihre Angabe.

(2) *Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f und die x-Achse einschließen.*

Hinweis: Die Nullstellen dürfen dabei der obigen *Abbildung 1* entnommen werden.

(2 + 3 Punkte)

Name: ____________________

b) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x+2) \cdot e^{-x+4}$, $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph von f ist in *Abbildung 2* dargestellt.

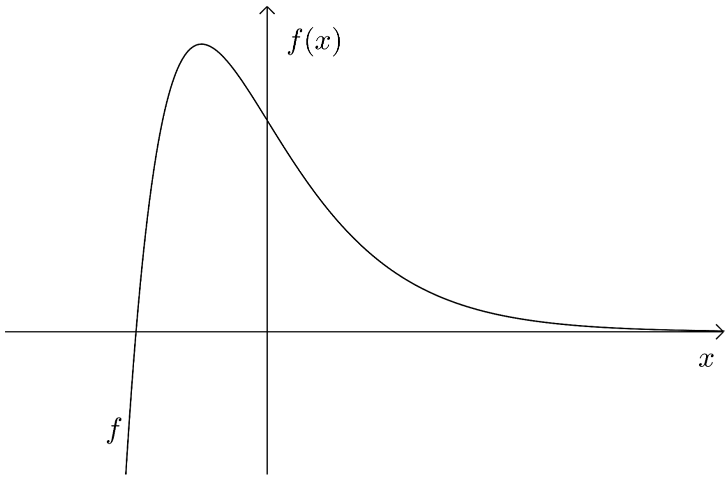


Abbildung 2

(1) Die Funktion f besitzt genau eine Extremstelle.

Ermitteln Sie die Extremstelle von f.

Hinweis: Ein Nachweis der hinreichenden Bedingung ist nicht erforderlich.

(2) *Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen der Ableitungsfunktion von f.*

Hinweis: Die Größe der y-Werte kann dabei unberücksichtigt bleiben.

(3 + 2 Punkte)

Name: ____________________

c) Für jedes $a \in I\!R$ ist durch die Gleichung

$$f_a(x) = (x+2)(2x+a)e^x, \; x \in I\!R,$$

eine Funktion f_a gegeben.

(1) *Geben Sie die Nullstellen der Funktion* f_1 *mit* $f_1(x) = (x+2)(2x+1)e^x$ *an.*

(2) In *Abbildung 3* ist der Graph der Funktion f_a für ein konkretes a abgebildet.
Begründen Sie, dass für den Graphen in Abbildung 3 gilt: $a = 0$.

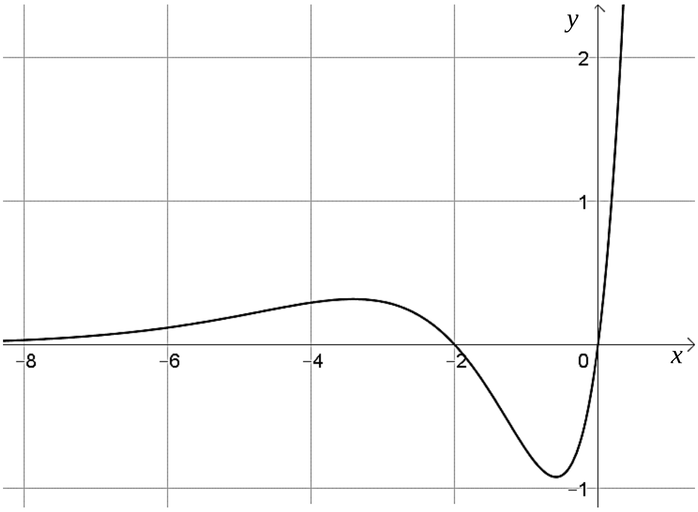


Abbildung 3

(3) *Ermitteln Sie, für welchen Wert von a der Punkt* $P\left(3 \mid 40e^3\right)$ *auf dem Graphen der Funktion* f_a *liegt.*

(1 + 2 + 2 Punkte)

Name: ____________________

d) Gegeben sind die Punkte A und B mit den Koordinaten $A(3|4|2)$ und $B(8|-11|12)$ sowie die Gerade g mit der Gleichung

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ -6{,}5 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 21 \\ -14 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

(1) *Geben Sie eine Gleichung der Geraden h an, die durch die Punkte A und B verläuft.*

(2) *Weisen Sie nach, dass der Punkt A auf der Geraden g liegt.*
Untersuchen Sie die Lage der Geraden g und h zueinander.

(3) *Geben Sie eine Gleichung einer Geraden an, die die Gerade g im Punkt A schneidet.*

(1 + 3 + 1 Punkte)

e) Gegeben sind die Punkte $A(5\,|\,0\,|\,z)$ und $B(2\,|\,4\,|\,5)$.

Der Koordinatenursprung wird mit O bezeichnet.

(1) *Bestimmen Sie denjenigen Wert von z, für den A und B den Abstand* 5 *haben.*

(2) *Ermitteln Sie denjenigen Wert von z, für den das Dreieck OAB im Punkt B rechtwinklig ist.*

(3 + 2 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Aufgabenart

Hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgabe

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2021 (Stand: August 2020)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen
   - Skalarprodukt

   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Hinweis

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) Der Graph II kommt nicht infrage, da $f(0{,}5) < 0$ gilt.

Der Graph III kommt nicht infrage, da die Steigung des Graphen von f für $-0{,}5 \leq x \leq 0{,}5$ nicht konstant ist.

(2) Der Graph von f verläuft punktsymmetrisch zum Ursprung.

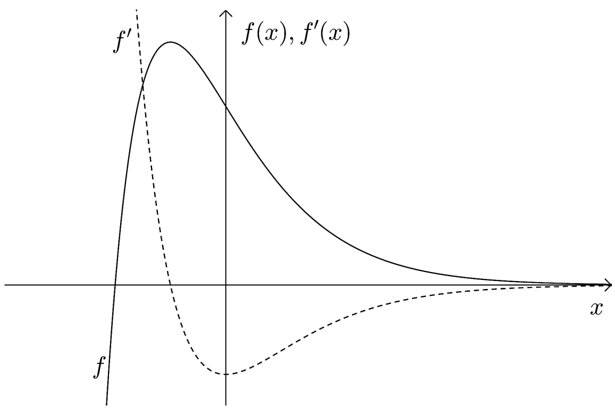
$$2 \cdot \int_{-1}^{0} \left(x^3 - x\right) \mathrm{d}x = 2 \cdot \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - 2 \cdot \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}.$$

Teilaufgabe b)

(1) $f'(x) = 1 \cdot e^{-x+4} + (x+2) \cdot e^{-x+4} \cdot (-1) = -(x+1) \cdot e^{-x+4}$.

Da $e^{-x+4} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist $x = -1$ die Extremstelle.

(2)



Teilaufgabe c)

(1) $x = -2 \vee x = -\frac{1}{2}$.

(2) Die Funktion f_a hat die Nullstellen $x = -2$ und $x = -\frac{a}{2}$.

Am Graphen kann man die Nullstellen $x = -2$ und $x = 0$ ablesen. Daraus folgt $a = 0$.

(3) $f_a(3) = 40e^3 \Leftrightarrow 5 \cdot (6 + a) \cdot e^3 = 40e^3 \Leftrightarrow 30 + 5a = 40$. Damit gilt: $a = 2$.

Teilaufgabe d)

(1) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$.

(2) Punktprobe:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ -6{,}5 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 21 \\ -14 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = 0{,}5.$$

Damit ist nachgewiesen, dass der Punkt A auf der Geraden g liegt.

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 21 \\ -14 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow s = -\frac{7}{5}.$$

Die Richtungsvektoren sind kollinear und der Punkt A ist ein gemeinsamer Punkt. Daher sind die Geraden g und h identisch.

(3) $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$ ist ein Beispiel für eine geeignete Geradengleichung.

Teilaufgabe e)

(1) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5-z \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+16+(5-z)^2} = \sqrt{25+(5-z)^2} = 5 \Leftrightarrow z = 5$.

(2) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5-z \end{pmatrix} = -6+16+25-5z = 35-5z = 0 \Leftrightarrow z = 7$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die Graphen an, die nicht infrage kommen, und begründet seine Angabe.	2			
2	(2) berechnet den Inhalt der Fläche, die der Graph von f und die x-Achse einschließen.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**5**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt die Extremstelle.	3			
2	(2) skizziert den Graphen der Ableitungsfunktion.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**5**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die Nullstellen der Funktion f_1 an.	1			
2	(2) begründet, dass $a = 0$ gilt.	2			
3	(3) ermittelt den gesuchten Wert von a.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**5**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt eine Gleichung der Geraden h an.	1			
2	(2) weist nach, dass der Punkt A auf der Geraden g liegt, und untersucht die Lage der Geraden zueinander.	3			
3	(3) gibt eine geeignete Geradengleichung an.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**5**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt denjenigen Wert von *z*, für den *A* und *B* den Abstand 5 haben.	3			
2	(2) ermittelt denjenigen Wert von *z*, für den das Dreieck *OAB* im Punkt *B* rechtwinklig ist.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**5**			

	Summe insgesamt	**25**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x^3 - x$.

(1) Einer der folgenden Graphen I, II und III stellt f dar.

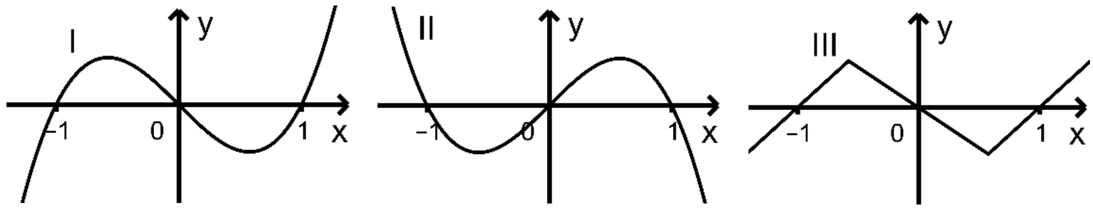


Abbildung 1

Geben Sie die Graphen an, die dafür nicht infrage kommen, und begründen Sie Ihre Angabe.

(2) *Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f und die x-Achse einschließen.*

Hinweis: Die Nullstellen dürfen dabei der obigen *Abbildung 1* entnommen werden.

(2 + 3 Punkte)

Name: ____________________

b) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x+2) \cdot e^{-x+4}$, $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph von f ist in *Abbildung 2* dargestellt.

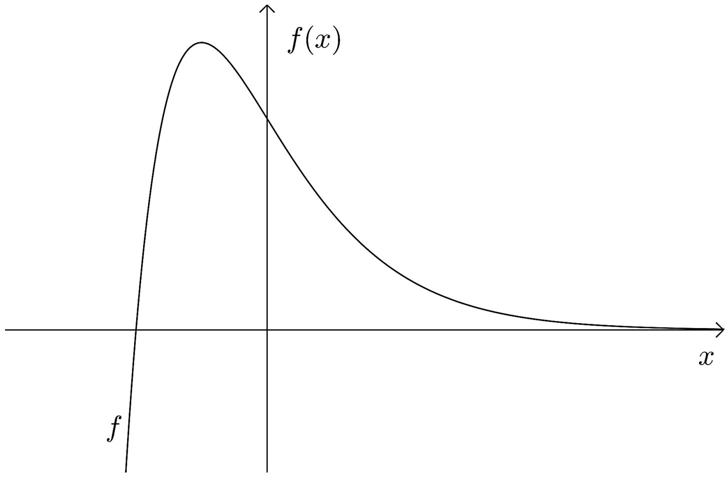


Abbildung 2

(1) Die Funktion f besitzt genau eine Extremstelle.

Ermitteln Sie die Extremstelle von f.

Hinweis: Ein Nachweis der hinreichenden Bedingung ist nicht erforderlich.

(2) *Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen der Ableitungsfunktion von f.*

Hinweis: Die Größe der y-Werte kann dabei unberücksichtigt bleiben.

(3 + 2 Punkte)

Name: ____________________

c) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist durch die Gleichung

$$f_a(x) = (x+2)(2x+a)e^x,\ x \in \mathbb{R},$$

eine Funktion f_a gegeben.

(1) *Geben Sie die Nullstellen der Funktion f_1 mit $f_1(x) = (x+2)(2x+1)e^x$ an.*

(2) In *Abbildung 3* ist der Graph der Funktion f_a für ein konkretes a abgebildet.
Begründen Sie, dass für den Graphen in Abbildung 3 gilt: $a = 0$.

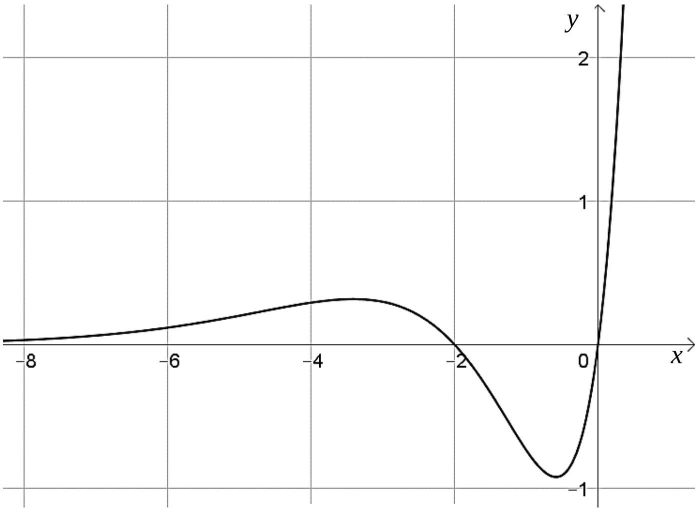


Abbildung 3

(3) *Ermitteln Sie, für welchen Wert von a der Punkt $P\left(3 \mid 40e^3\right)$ auf dem Graphen der Funktion f_a liegt.*

(1 + 2 + 2 Punkte)

Name: ____________________

d) Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0{,}5$.
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist symmetrisch zum Erwartungswert.

(1) *Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.*

(2) Die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 61)$ beträgt etwa 2 %.

Bestimmen Sie unter Verwendung dieses Wertes den zugehörigen Wert für die Wahrscheinlichkeit $P(40 \leq X \leq 60)$.

(3 + 2 Punkte)

e) Im Folgenden werden zwei Würfel stets gemeinsam geworfen. Bei jedem der beiden Würfel sind die Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert.

(1) Die beiden Würfel werden einmal geworfen.

Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei keine „6" auftritt, $\frac{25}{36}$ *beträgt.*

(2) Die beiden Würfel werden 36-mal geworfen. Die binomialverteilte Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Würfe an, bei denen keine „6" auftritt.

Begründen Sie für jede der folgenden Abbildungen 4, 5 und 6, dass sie nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X zeigt.

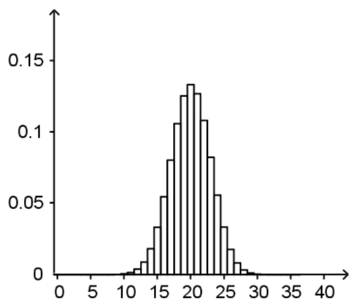


Abbildung 4

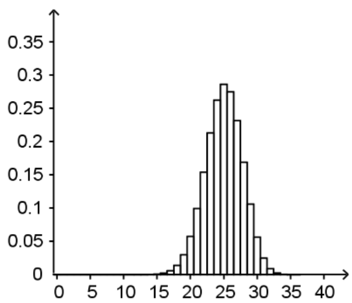


Abbildung 5

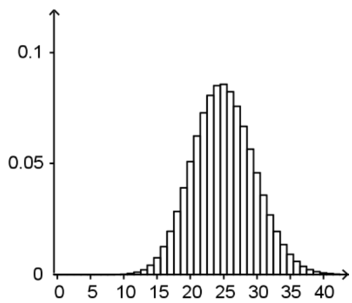


Abbildung 6

(2 + 3 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Aufgabenart

Hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgabe

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2021 (Stand: August 2020)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen
   - Skalarprodukt

   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Hinweis

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Der Graph II kommt nicht infrage, da $f(0{,}5) < 0$ gilt.

Der Graph III kommt nicht infrage, da die Steigung des Graphen von f für $-0{,}5 \le x \le 0{,}5$ nicht konstant ist.

(2) Der Graph von f verläuft punktsymmetrisch zum Ursprung.

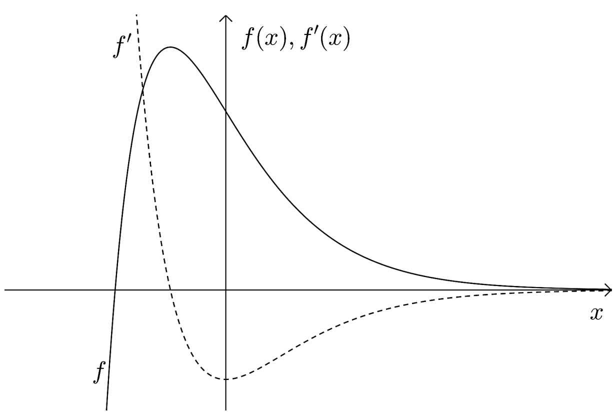
$$2 \cdot \int_{-1}^{0} \left(x^3 - x\right) \mathrm{d}x = 2 \cdot \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - 2 \cdot \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}.$$

Teilaufgabe b)

(1) $f'(x) = 1 \cdot e^{-x+4} + (x+2) \cdot e^{-x+4} \cdot (-1) = -(x+1) \cdot e^{-x+4}$.

Da $e^{-x+4} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist $x = -1$ die Extremstelle.

(2)



Teilaufgabe c)

(1) $x = -2 \vee x = -\frac{1}{2}.$

(2) Die Funktion f_a hat die Nullstellen $x = -2$ und $x = -\frac{a}{2}$.

Am Graphen kann man die Nullstellen $x = -2$ und $x = 0$ ablesen. Daraus folgt $a = 0$.

(3) $f_a(3) = 40e^3 \Leftrightarrow 5 \cdot (6 + a) \cdot e^3 = 40e^3 \Leftrightarrow 30 + 5a = 40$. Damit gilt: $a = 2$.

Teilaufgabe d)

(1) Für den Erwartungswert gilt: $E(X) = 100 \cdot 0{,}5 = 50$.

Für die Standardabweichung gilt: $\sigma(X) = \sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 5$.

(2) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist symmetrisch zum Erwartungswert.

Es folgt: $P(X \geq 61) = P(X \leq 39)$ und damit $P(40 \leq X \leq 60) \approx 1 - 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}96$.

Teilaufgabe e)

(1) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Würfel keine „6“ zeigt, ist für jeden der beiden Würfel unabhängig voneinander $\frac{5}{6}$.

Damit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Würfel keine „6“ zeigen, $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

(2) *Abbildung 4*: Der Erwartungswert von X ist $36 \cdot \frac{25}{36} = 25$.

Die höchste Säule befindet sich in *Abbildung 4* bei 20, nicht bei 25.

Abbildung 5: Die Summe der Höhen der Säulen ist größer als 1.

Abbildung 6: Die Höhe der Säule bei 37 ist größer als null.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK[2]**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die Graphen an, die nicht infrage kommen, und begründet seine Angabe.	2			
2	(2) berechnet den Inhalt der Fläche, die der Graph von f und die x-Achse einschließen.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**5**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt die Extremstelle.	3			
2	(2) skizziert den Graphen der Ableitungsfunktion.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**5**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) gibt die Nullstellen der Funktion f_1 an.	1			
2	(2) begründet, dass $a = 0$ gilt.	2			
3	(3) ermittelt den gesuchten Wert von a.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**5**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) berechnet den Erwartungswert von X.	1			
2	(1) berechnet die Standardabweichung von X.	2			
3	(2) bestimmt den zugehörigen Wert für die Wahrscheinlichkeit $P(40 \leq X \leq 60)$.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**5**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei keine „6“ auftritt, $\frac{25}{36}$ beträgt.	2			
2	(2) begründet für jede der *Abbildungen 4*, *5* und *6*, dass sie nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X zeigt.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**5**			

	Summe insgesamt	**25**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist die in $I\!R$ definierte Funktion f mit $f(x) = x^3 - x$.

(1) Einer der folgenden Graphen I, II und III stellt f dar.

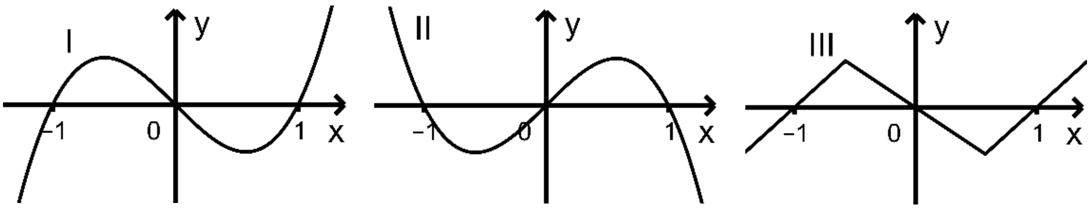


Abbildung 1

Geben Sie die Graphen an, die dafür nicht infrage kommen, und begründen Sie Ihre Angabe.

(2) *Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f und die x-Achse einschließen.*

Hinweis: Die Nullstellen dürfen dabei der obigen *Abbildung 1* entnommen werden.

(2 + 3 Punkte)

Name: ____________________

b) Gegeben ist die Funktion f mit $f\left(x\right)=\left(x+2\right)\cdot e^{-x+4}$, $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph von f ist in *Abbildung 2* dargestellt.

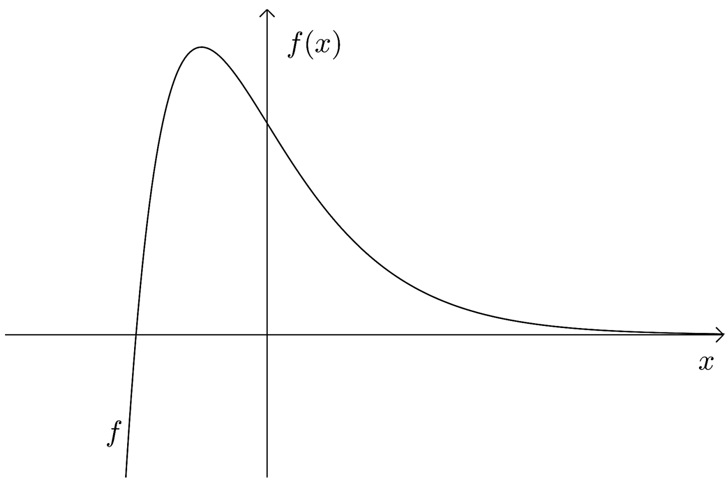


Abbildung 2

(1) Die Funktion f besitzt genau eine Extremstelle.

Ermitteln Sie die Extremstelle von f.

Hinweis: Ein Nachweis der hinreichenden Bedingung ist nicht erforderlich.

(2) *Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen der Ableitungsfunktion von f.*

Hinweis: Die Größe der y-Werte kann dabei unberücksichtigt bleiben.

(3 + 2 Punkte)

Name: ____________________

c) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist durch die Gleichung

$$f_a(x) = (x+2)(2x+a)e^x,\ x \in \mathbb{R},$$

eine Funktion f_a gegeben.

(1) *Geben Sie die Nullstellen der Funktion* f_1 *mit* $f_1(x) = (x+2)(2x+1)e^x$ *an.*

(2) In *Abbildung 3* ist der Graph der Funktion f_a für ein konkretes a abgebildet.
Begründen Sie, dass für den Graphen in Abbildung 3 gilt: $a = 0$.

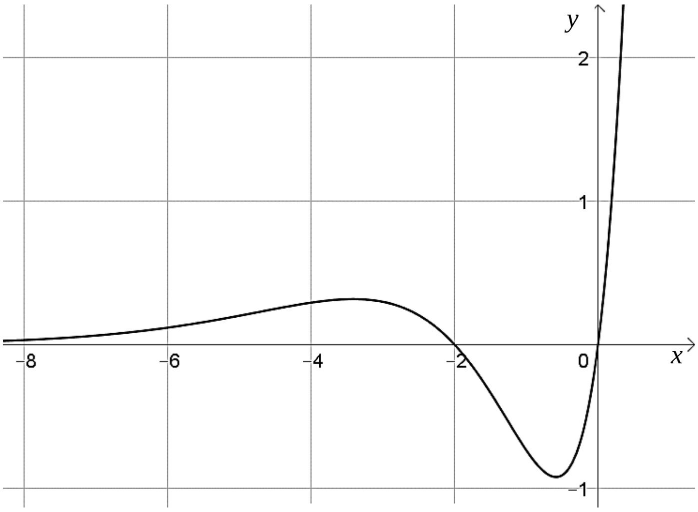


Abbildung 3

(3) *Ermitteln Sie, für welchen Wert von a der Punkt* $P\left(3 \mid 40e^3\right)$ *auf dem Graphen der Funktion* f_a *liegt.*

(1 + 2 + 2 Punkte)

Name: ____________________

d) Gegeben sind die Punkte A und B mit den Koordinaten $A(3|4|2)$ und $B(8|-11|12)$ sowie die Gerade g mit der Gleichung

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ -6{,}5 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 21 \\ -14 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

(1) *Geben Sie eine Gleichung der Geraden h an, die durch die Punkte A und B verläuft.*

(2) *Weisen Sie nach, dass der Punkt A auf der Geraden g liegt.*
Untersuchen Sie die Lage der Geraden g und h zueinander.

(3) *Geben Sie eine Gleichung einer Geraden an, die die Gerade g im Punkt A schneidet.*

(1 + 3 + 1 Punkte)

e) Im Folgenden werden zwei Würfel stets gemeinsam geworfen. Bei jedem der beiden Würfel sind die Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert.

(1) Die beiden Würfel werden einmal geworfen.

Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei keine „6“ auftritt, $\frac{25}{36}$ beträgt.

(2) Die beiden Würfel werden 36-mal geworfen. Die binomialverteilte Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Würfe an, bei denen keine „6“ auftritt.

Begründen Sie für jede der folgenden Abbildungen 4, 5 und 6, dass sie nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X zeigt.

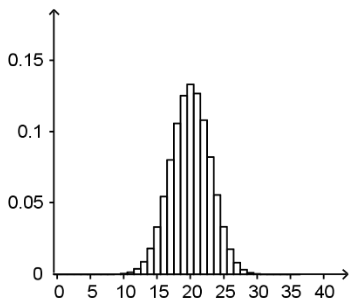


Abbildung 4

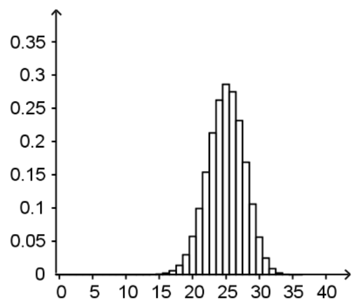


Abbildung 5

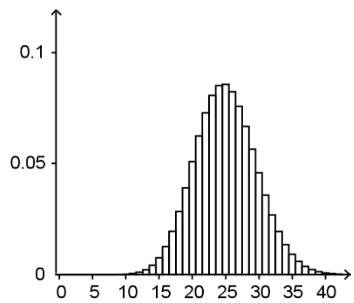


Abbildung 6

(2 + 3 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Aufgabenart

Hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgabe

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2021 (Stand: August 2020)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen
   - Skalarprodukt

   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Hinweis

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Der Graph II kommt nicht infrage, da $f(0{,}5) < 0$ gilt.

Der Graph III kommt nicht infrage, da die Steigung des Graphen von f für $-0{,}5 \le x \le 0{,}5$ nicht konstant ist.

(2) Der Graph von f verläuft punktsymmetrisch zum Ursprung.

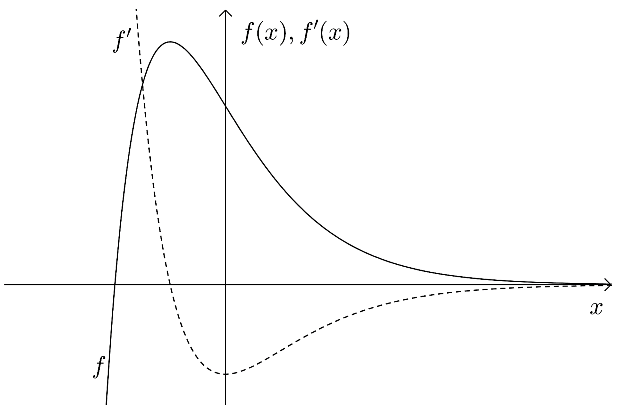
$$2 \cdot \int_{-1}^{0} \left(x^3 - x\right) \mathrm{d}x = 2 \cdot \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - 2 \cdot \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}.$$

Teilaufgabe b)

(1) $f'(x) = 1 \cdot e^{-x+4} + (x+2) \cdot e^{-x+4} \cdot (-1) = -(x+1) \cdot e^{-x+4}$.

Da $e^{-x+4} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist $x = -1$ die Extremstelle.

(2)



Teilaufgabe c)

(1) $x = -2 \vee x = -\frac{1}{2}$.

(2) Die Funktion f_a hat die Nullstellen $x = -2$ und $x = -\frac{a}{2}$.

Am Graphen kann man die Nullstellen $x = -2$ und $x = 0$ ablesen. Daraus folgt $a = 0$.

(3) $f_a(3) = 40e^3 \Leftrightarrow 5 \cdot (6 + a) \cdot e^3 = 40e^3 \Leftrightarrow 30 + 5a = 40$. Damit gilt: $a = 2$.

Teilaufgabe d)

(1) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$.

(2) Punktprobe:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,5 \\ -6,5 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 21 \\ -14 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = 0,5.$$

Damit ist nachgewiesen, dass der Punkt A auf der Geraden g liegt.

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 21 \\ -14 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow s = -\frac{7}{5}.$$

Die Richtungsvektoren sind kollinear und der Punkt A ist ein gemeinsamer Punkt. Daher sind die Geraden g und h identisch.

(3) $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$ ist ein Beispiel für eine geeignete Geradengleichung.

Teilaufgabe e)

(1) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Würfel keine „6“ zeigt, ist für jeden der beiden Würfel unabhängig voneinander $\frac{5}{6}$.

Damit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Würfel keine „6“ zeigen, $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

(2) *Abbildung 4*: Der Erwartungswert von X ist $36 \cdot \frac{25}{36} = 25$.

Die höchste Säule befindet sich in *Abbildung 4* bei 20, nicht bei 25.

Abbildung 5: Die Summe der Höhen der Säulen ist größer als 1.

Abbildung 6: Die Höhe der Säule bei 37 ist größer als null.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die Graphen an, die nicht infrage kommen, und begründet seine Angabe.	2			
2	(2) berechnet den Inhalt der Fläche, die der Graph von f und die x-Achse einschließen.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**5**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt die Extremstelle.	3			
2	(2) skizziert den Graphen der Ableitungsfunktion.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**5**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die Nullstellen der Funktion f_1 an.	1			
2	(2) begründet, dass $a = 0$ gilt.	2			
3	(3) ermittelt den gesuchten Wert von a.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**5**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt eine Gleichung der Geraden h an.	1			
2	(2) weist nach, dass der Punkt A auf der Geraden g liegt, und untersucht die Lage der Geraden zueinander.	3			
3	(3) gibt eine geeignete Geradengleichung an.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**5**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei keine „6“ auftritt, $\frac{25}{36}$ beträgt.	2			
2	(2) begründet für jede der *Abbildungen 4, 5* und *6*, dass sie nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X zeigt.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**5**			

	Summe insgesamt	**25**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung

$$f(x) = 10 \cdot (x-1) \cdot e^{-x},\ x \in \mathbb{R}.$$

Der Graph von f ist in *Abbildung 1* dargestellt.

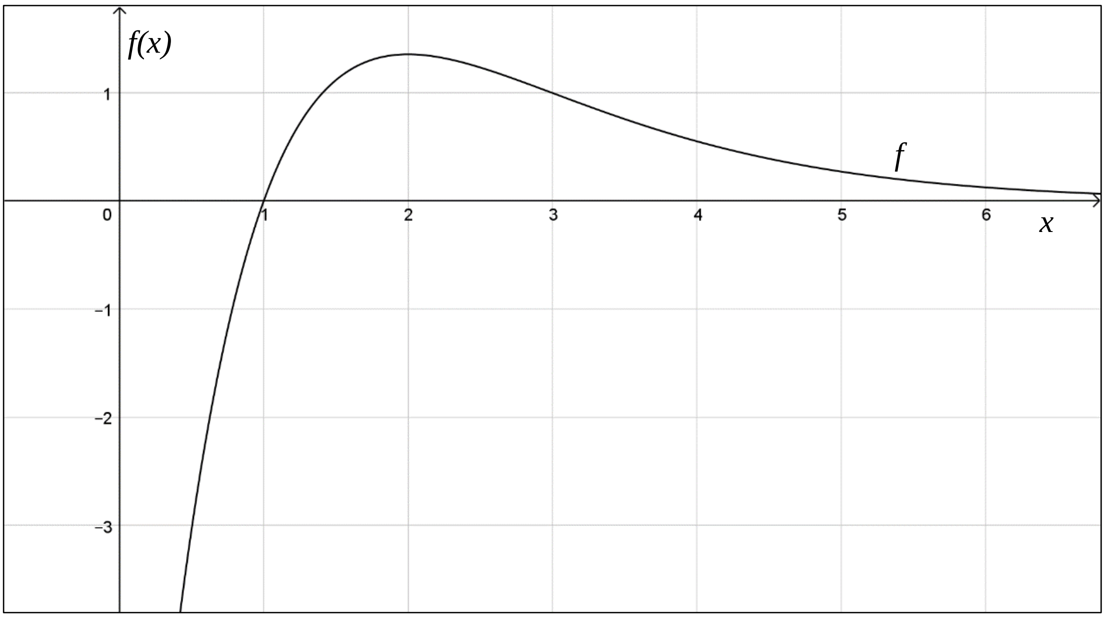


Abbildung 1

Name: ____________________

a) (1) *Begründen Sie, dass* $x = 1$ *die einzige Nullstelle von* f *ist.*

(2) *Zeigen Sie:* $f'(x) = 10 \cdot (2 - x) \cdot e^{-x}$.

(3) *Untersuchen Sie f rechnerisch auf lokale Extremstellen.*

[Kontrolllösung: An der Stelle $x = 2$ liegt eine lokale Maximalstelle vor.]

(4) *Ermitteln Sie, für welche* $x \in \mathbb{R}$ *gilt:* $f(x) < 0{,}1$.

(1 + 2 + 3 + 3 Punkte)

b) $P_u\left(u \mid f(u)\right)$ ist ein beliebiger Punkt auf dem Graphen von f.

P_u legt zusammen mit $N(1 \mid 0)$ und $F_u\left(u \mid 0\right)$ das Dreieck NF_uP_u fest.

(1) *Zeichnen Sie in Abbildung 1 das Dreieck* NF_uP_u *ein, das sich ergibt, wenn* P_u *mit dem Hochpunkt des Graphen von f übereinstimmt.*

(2) *Bestimmen Sie den Flächeninhalt des in* b) (1) *gezeichneten Dreiecks.*

(3) *Untersuchen Sie, ob* P_u *so auf dem Graphen von* f *gewählt werden kann, dass das zugehörige Dreieck* NF_uP_u *den Flächeninhalt* 2 FE *hat.*

(1 + 2 + 4 Punkte)

Name: ____________________

c) (1) Gegeben ist die Funktion t mit $t(x) = -10 \cdot e^{-3} \cdot x + 50 \cdot e^{-3}$, $x \in \mathbb{R}$, und der Wendepunkt $W(3 \mid f(3))$ des Graphen von f.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von t die Tangente an den Graphen von f im Punkt W ist.

(2) Die Schnittpunkte der in c) (1) gegebenen Tangente mit den beiden Koordinatenachsen legen zusammen mit dem Koordinatenursprung $O(0 \mid 0)$ ein Dreieck fest.

Berechnen Sie den Umfang dieses Dreiecks.

(3) Im Intervall $[1;5]$ begrenzen der Graph von f und die in c) (1) gegebene Tangente zusammen mit der x-Achse eine Fläche F (siehe *Abbildung 2*).

Bestimmen Sie den Flächeninhalt von F.

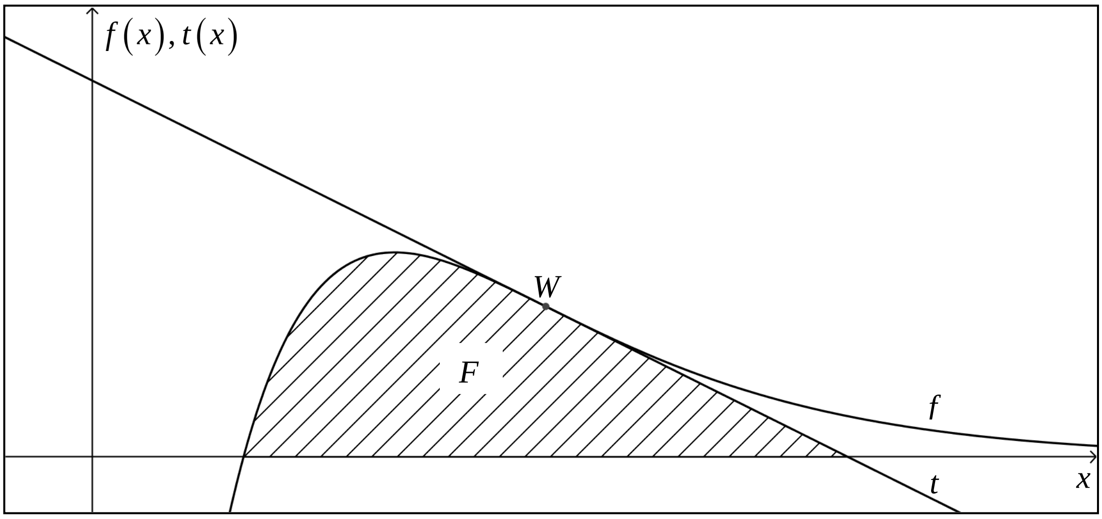


Abbildung 2

(4 + 4 + 3 Punkte)

Name: ____________________

d) Die Gerade mit der Gleichung $y = x$ wird als „1. Winkelhalbierende“ bezeichnet. Es gibt genau einen Punkt R auf dem Graphen von f, in dem die Tangente t_R an den Graphen von f parallel zur 1. Winkelhalbierenden ist.

(1) *Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung für die Tangente* t_R.

[Mögliche Lösung: Falls man auf vier Stellen nach dem Komma rundet, ergibt sich für die Tangente t_R als Gleichung $y = x - 0{,}3823$.]

(2) Die Gerade mit der Gleichung $y = -x$ wird als „2. Winkelhalbierende“ bezeichnet.

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Tangente t_R *mit der* 2. *Winkelhalbierenden.*

(3) *Ermitteln Sie rechnerisch den Abstand, den die Tangente* t_R *von der* 1. *Winkelhalbierenden hat.*

(4 + 2 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Innermathematische Argumentationsaufgabe / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2021 (Stand: August 2020)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen
     - Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei *p(x)* ein Polynom höchstens zweiten Grades ist
     - Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben
     - Interpretation und Bestimmungen von Parametern der oben genannten Funktionen
     - notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) Da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $e^{-x} \neq 0$, ist die Nullstelle $x = 1$ des linearen Faktors die einzige Nullstelle von f.

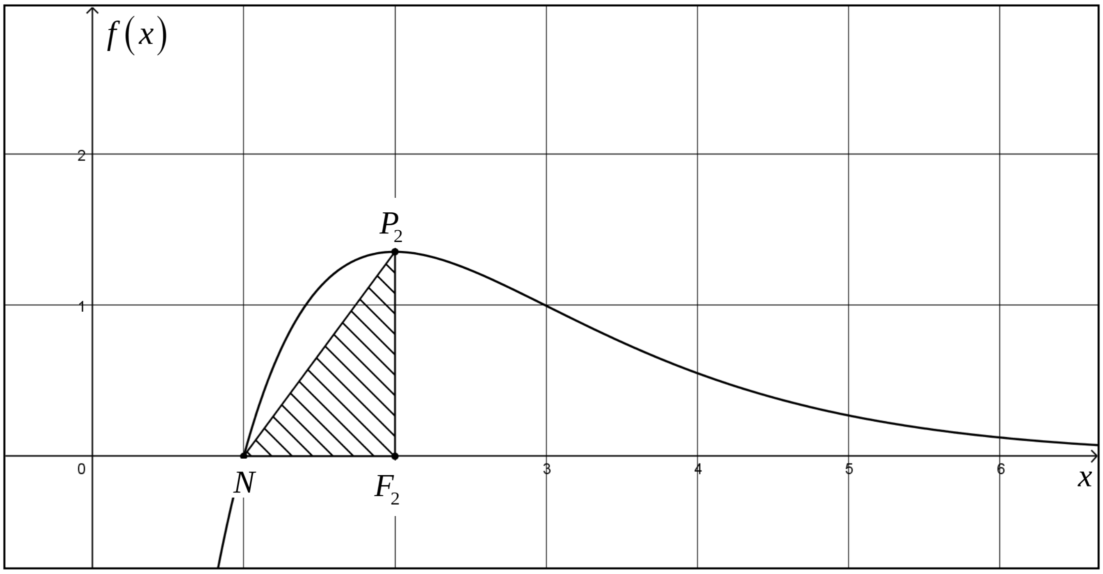
(2) $f'(x) = 10 \cdot \left(1 \cdot e^{-x} + (x-1) \cdot e^{-x} \cdot (-1)\right) = 10 \cdot (1 - x + 1) \cdot e^{-x} = 10 \cdot (2 - x) \cdot e^{-x}$.

(3) Aus der notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$ für lokale Extremstellen ergibt sich als einzige Lösung $x = 2$.
Da zusätzlich $f'(1) = 10 \cdot 1 \cdot e^{-1} > 0$ und $f'(3) = 10 \cdot (-1) \cdot e^{-3} < 0$ gilt, liegt an der Stelle $x = 2$ ein Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Funktionswerten von f' vor, $x = 2$ ist daher eine lokale Maximalstelle und die einzige lokale Extremstelle von f.

(4) Der TR liefert für die Gleichung $f(x) = 0{,}1$ die Lösungen $x_1 \approx 1{,}0280$ und $x_2 \approx 6{,}2665$. Aus dem Verlauf des Graphen von f ergibt sich, dass für $x < x_1 \approx 1{,}0280$ und für $x > x_2 \approx 6{,}2665$ die Bedingung $f(x) < 0{,}1$ erfüllt ist.

Teilaufgabe b)

(1)



(2) $A_{NF_2P_2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot f(2) \approx \frac{1}{2} \cdot 1{,}3534 = 0{,}6767$ [FE].

(3) Für den Flächeninhalt $A(u)$ eines Dreiecks NF_uP_u gilt: $A(u) = \frac{1}{2} \cdot (u-1) \cdot f(u)$.

Der TR liefert für die Gleichung $A(u) = 2$ als Lösung $u \approx 0{,}2745$. Daher erhält man für $P_{0,2745}$ ein Dreieck mit dem Flächeninhalt 2 FE.

Teilaufgabe c)

(1) Beim Graphen von *t* handelt es sich um eine Gerade.

Es ist $f'(3) = -10 \cdot e^{-3} = t'(3)$, die Steigungen der Graphen von f und *t* an der Stelle $x = 3$ sind also gleich.

Zusätzlich gilt $f(3) = 20 \cdot e^{-3} = t(3)$, $W(3 \mid f(3))$ ist daher ein gemeinsamer Punkt der Graphen von f und *t*.

Zusammen gilt: Der Graph von *t* ist die Tangente an den Graphen von f im Punkt $W(3 \mid f(3))$.

(2) Es ist $t(0) = 50 \cdot e^{-3}$.

$t(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Wegen des Satzes des Pythagoras gilt dann für den Umfang U des Dreiecks:

$U = 50 \cdot e^{-3} + 5 + \sqrt{\left(50 \cdot e^{-3}\right)^2 + 5^2} \approx 13{,}075$ [LE].

(3) Mit den bereits bekannten Integrationsgrenzen gilt für den Inhalt der Fläche F:

$A_F = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^5 t(x)\,\mathrm{d}x \approx 2{,}1852 + 0{,}9957 = 3{,}1809$ [FE].

Teilaufgabe d)

(1) Der TR liefert für $f'(x) = 1$ die Lösung $x \approx 1{,}5356$. Die zur 1. Winkelhalbierenden parallele Tangente t_R an den Graphen von f berührt den Graphen daher im Punkt $R(1{,}5356 \mid f(1{,}5356))$. Es ist $f(1{,}5356) \approx 1{,}1533$.

Eine Gleichung für t_R ist $y = 1 \cdot (x - 1{,}5356) + 1{,}1533 = x - 0{,}3823$.

(2) Die Gleichung $x - 0{,}3823 = -x$ hat die Lösung $x \approx 0{,}1912$.

t_R schneidet die 2. Winkelhalbierende daher im Punkt $S(0{,}1912 \mid -0{,}1912)$.

(3) Da die beiden Winkelhalbierenden senkrecht aufeinander stehen, gilt für den Abstand $\left|\overline{SO}\right| = \sqrt{2 \cdot 0{,}1912^2} \approx 0{,}2704$ [LE]. [Ohne Rundung der Zwischenergebnisse ergibt sich ein Abstand von ungefähr 0,2703 LE.]

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK[2]	ZK	DK
1	(1) begründet, dass $x = 1$ die einzige Nullstelle von f ist.	1			
2	(2) zeigt, dass der Term korrekt ist.	2			
3	(3) untersucht f rechnerisch auf lokale Extremstellen.	3			
4	(4) ermittelt, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Bedingung $f(x) < 0{,}1$ erfüllt ist.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**9**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) zeichnet in *Abbildung 1* das Dreieck ein.	1			
2	(2) bestimmt den Flächeninhalt des Dreiecks.	2			
3	(3) untersucht, ob P_u so gewählt werden kann, dass das zugehörige Dreieck den Flächeninhalt 2 FE hat.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**7**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) weist rechnerisch nach, dass der Graph der Funktion t die Tangente an den Graphen von f im Punkt W ist.	4			
2	(2) berechnet den Umfang des Dreiecks.	4			
3	(3) bestimmt den Flächeninhalt von F.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**11**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt rechnerisch eine Gleichung für die Tangente.	4			
2	(2) bestimmt den Schnittpunkt der Tangente mit der 2. Winkelhalbierenden.	2			
3	(3) ermittelt rechnerisch den Abstand, den die Tangente von der 1. Winkelhalbierenden hat.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**8**			

	Summe insgesamt	**35**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2021

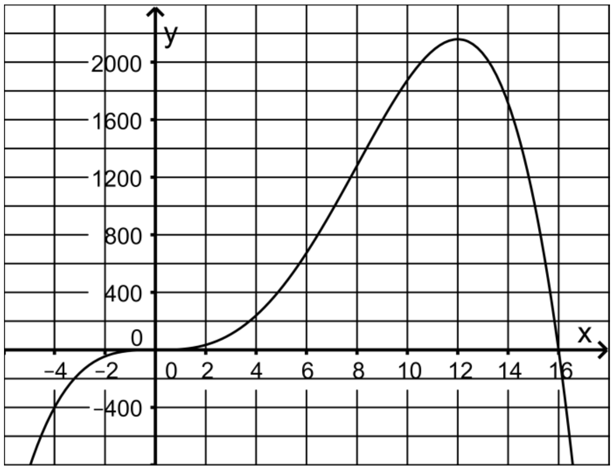
Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Die *Abbildung* zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit

$$f(x) = -\frac{5}{16}x^4 + 5x^3.$$



Abbildung

a) (1) *Zeigen Sie rechnerisch, dass der Punkt $(12\,|\,2160)$ ein Hochpunkt des Graphen von f ist und dass die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(0\,|\,0)$ parallel zur x-Achse verläuft.*

(2) *Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g, die durch die beiden Wendepunkte des Graphen von f verläuft.*
Zeichnen Sie in die Abbildung eine Gerade ein, die parallel zu g ist und für $0 \le x \le 8$ mit dem Graphen von f genau einen Punkt gemeinsam hat.

Name: ____________________

(3) Die folgende *Abbildung* ist eine unveränderte Kopie der *Abbildung* auf Seite 1.

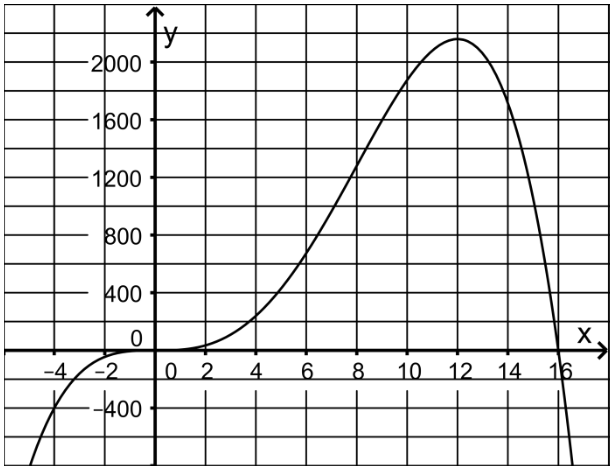


Abbildung (unveränderte Kopie)

Die Punkte $O(0|0)$, $B(b|0)$ und $C(b|f(b))$ bilden für jede reelle Zahl b mit $0 < b < 16$ ein Dreieck OBC.

Ermitteln Sie denjenigen Wert von b, für den der Flächeninhalt des Dreiecks OBC maximal wird, und geben Sie diesen Flächeninhalt an.

[Hinweis: Eine Betrachtung der Randwerte ist nicht erforderlich.]

(5 + 6 + 4 Punkte)

b) Für jede reelle Zahl *a* ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h_a mit $h_a(x) = 5ax^2$ gegeben.

(1) *Beschreiben Sie, wie der Graph von h_4 aus dem Graphen von h_3 erzeugt werden kann.*

(2) *Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den der Punkt $(4|f(4))$ auf dem Graphen von h_a liegt.*

(3) Die Gleichung $f(x) = h_{3,75}(x)$ hat genau die drei Lösungen $x_1 = 0$, $x_2 = 6$ und $x_3 = 10$ und es gilt $\int_0^{10} \left(f(x) - h_{3,75}(x)\right) \mathrm{d}x = 0$.

Erläutern Sie die geometrische Bedeutung dieser Aussage in Bezug auf die Graphen von f und $h_{3,75}$.

(4) *Ermitteln Sie, an welchen Stellen im Intervall $[0;16]$ die Graphen der Funktionen f und h_3 einen vertikalen Abstand von 250 Längeneinheiten haben.*

(2 + 2 + 3 + 4 Punkte)

Name: ____________________

c) Ein Unternehmen lagert Glyzerin in einem Tank. Die momentane Änderungsrate des Tankinhalts kann für $0 \le x \le 20$ mithilfe der Funktion f (aus a)) beschrieben werden. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$ die momentane Änderungsrate in Kilogramm pro Stunde. Zu Beobachtungsbeginn befinden sich im Tank 1200 kg Glyzerin.

(1) Der Punkt $(4 \mid 240)$ liegt auf dem Graphen von f.

Interpretieren Sie die Koordinaten dieses Punktes im Sachzusammenhang.

(2) *Beurteilen Sie die folgende Aussage: „Zwölf Stunden nach Beobachtungsbeginn ist die größte Menge Glyzerin im Tank enthalten.“*

(3) *Bestimmen Sie die Zunahme des Tankinhalts zwischen den Zeitpunkten acht Stunden und zehn Stunden nach Beobachtungsbeginn.*

(4) *Berechnen Sie, wie viel Glyzerin* 20 *Stunden nach Beobachtungsbeginn im Tank enthalten ist.*

(2 + 2 + 2 + 3 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2021 (Stand: August 2020)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen
     - Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei *p(x)* ein Polynom höchstens zweiten Grades ist
     - Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben
     - Interpretation und Bestimmungen von Parametern der oben genannten Funktionen
     - notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

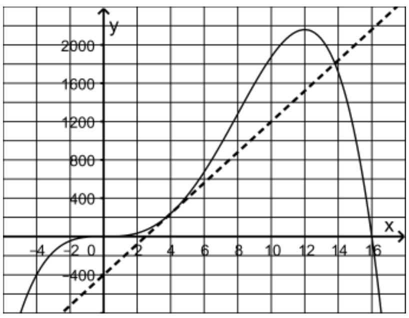
(1) $f'(x) = -\frac{5}{4}x^3 + 15x^2$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 12$.

Da zusätzlich $f'(10) = 250 > 0$ und $f'(14) = -490 < 0$ gilt, liegt an der Stelle $x = 12$ ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte von f' von positiven zu negativen Werten vor. Mit $f(12) = 2160$ ergibt sich der angegebene Hochpunkt.

Zudem wurde durch $f'(0) = 0$ nachgewiesen, dass die Tangente an den Graphen im Punkt $(0|0)$ parallel zur x-Achse verläuft.

(2) Die grafische Analyse des Graphen der Funktion f' ergibt an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 8$ je ein lokales Extremum der Ableitung, also zwei Wendepunkte des Graphen von f. Diese haben die Koordinaten $(0|0)$ und $(8|1280)$.

Die Gerade durch die beiden Wendepunkte hat die Gleichung $y = \frac{1280}{8}x = 160x$.



(3) Ansatz zur Berechnung des Flächeninhalts eines rechtwinkligen Dreiecks mithilfe der Katheten: $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot d$.

Die eine Kathete hat die Länge b, die andere die Länge $f(b)$. Daraus ergibt sich die Zielfunktion $A(b) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \left(\left(-\frac{5}{16}b^4 + 5b^3\right)\right) = -\frac{5}{32}b^5 + \frac{5}{2}b^4$.

Die grafische Analyse der Zielfunktion ergibt im Untersuchungsbereich das absolute Maximum mit den ungefähren Koordinaten $(12{,}8 \mid 13\,422)$.

Für $b = 12{,}8$ erreicht das Dreieck seinen maximalen Flächeninhalt von ungefähr 13422 FE.

Teilaufgabe b)

(1) Der Graph von h_4 kann durch Streckung des Graphen von h_3 in y-Richtung um den Faktor $\frac{4}{3}$ erzeugt werden.

(2) $f(4) = 240$. Durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes $(4 \mid 240)$ in die Gleichung von h_a erhält man: $240 = 80a \Leftrightarrow a = 3$. Der gesuchte Wert ist $a = 3$.

(3) Die Graphen von f und $h_{3,75}$ haben genau drei gemeinsame Punkte. Sie schließen zwei Flächenstücke ein. Da das Integral den Wert 0 hat, haben die beiden Flächenstücke den gleichen Flächeninhalt. Ein Flächenstück liegt unter dem Graphen von f und über dem Graphen von $h_{3,75}$, das andere liegt über dem Graphen von f und unter dem Graphen von $h_{3,75}$.

(4) $h_3(x) = 15x^2$.

Der vertikale Abstand der beiden Funktionsgraphen wird durch die Differenzfunktion d mit der Gleichung $d(x) = f(x) - h_3(x) = -\frac{5}{16}x^4 + 5x^3 - 15x^2$ beschrieben. Da dieser Abstand 250 Längeneinheiten betragen soll, muss $d(x) = 250$ oder $d(x) = -250$ gelten.

Für die erste Gleichung ergeben sich mit dem TR $x_4 \approx 7{,}2$ und $x_5 \approx 11{,}1$ als Lösungen im Intervall $[0;16]$. Die zweite Gleichung hat im betrachteten Intervall $[0;16]$ die Lösung $x_6 \approx 12{,}6$.

[Eine weitere Lösung der zweiten Gleichung liegt bei $x_7 \approx -2{,}8$ und somit außerhalb des betrachteten Intervalls.]

Für $x_4 \approx 7{,}2$, $x_5 \approx 11{,}1$ und $x_6 \approx 12{,}6$ haben die Funktionsgraphen einen vertikalen Abstand von 250 Längeneinheiten.

Teilaufgabe c)

(1) Vier Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt die Änderungsrate des Tankinhalts 240 kg pro Stunde.

(2) Die Aussage ist falsch. Die momentane Änderungsrate erreicht zwölf Stunden nach Beobachtungsbeginn ihr Maximum, ist aber danach noch vier Stunden positiv, weshalb die Menge Glyzerin im Tank weiter zunimmt.

(3) $\int_8^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 3178$.

Die Zunahme des Tankinhalts zwischen den Zeitpunkten acht Stunden und zehn Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt 3178 kg.

(4) Die Gesamtänderung des Tankinhalts in den 20 Stunden des Beobachtungszeitraums beträgt $\int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{16}x^5 + \frac{5}{4}x^4\right]_0^{20} = 0$. Somit ist am Ende des Beobachtungszeitraums genauso viel Glyzerin im Tank wie zu Beginn, nämlich 1200 kg.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt rechnerisch, dass der angegebene Punkt ein Hochpunkt des Graphen ist.	4			
2	(1) zeigt rechnerisch, dass die Tangente in $(0\|0)$ parallel zur x-Achse verläuft.	1			
3	(2) bestimmt eine Gleichung der Geraden *g*.	4			
4	(2) zeichnet eine passende Gerade ein.	2			
5	(3) ermittelt den gesuchten Wert für *b* und gibt den maximalen Flächeninhalt an.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (15) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**15**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) beschreibt, wie der Graph von h_4 aus dem Graphen von h_3 erzeugt werden kann.	2			
2	(2) bestimmt den Wert von *a*.	2			
3	(3) erläutert die geometrische Bedeutung der Aussage.	3			
4	(4) ermittelt, an welchen Stellen im Intervall [0;16] die Graphen der Funktionen einen vertikalen Abstand von 250 LE haben.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**11**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) interpretiert die Koordinaten im Sachzusammenhang.	2			
2	(2) beurteilt die angegebene Aussage.	2			
3	(3) bestimmt die gesuchte Zunahme.	2			
4	(4) berechnet den gesuchten Tankinhalt.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**9**			

	Summe insgesamt	**35**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Bei einem Secret-Sharing-Verfahren wird ein Geheimnis in Teilgeheimnisse auf verschiedene Personen aufgeteilt, um die Verantwortung in mehrere Hände zu legen. Es kann sinnvoll sein, dass ein geheimer Code, z. B. zum Öffnen eines Tresors, nicht einer Person allein bekannt ist, sondern lediglich von mehreren Personen gemeinsam ermittelt werden kann.

Unternehmen können ein solches Verfahren beispielsweise auf geometrischer Basis realisieren. Hierbei kann eine Auswahl von Mitarbeitenden mit Kenntnissen über notwendige Teilgeheimnisse den geheimen Code ermitteln, indem sie ihre Teilgeheimnisse in ein Computersystem eingeben, welches mit den Eingaben geometrische Fragestellungen löst.

Vereinfachend wird im Folgenden angenommen, dass der zu ermittelnde geheime Code immer aus drei Ziffern besteht.

a) Das Computersystem kennt die Gerade g mit $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$.

Die Punkte $A(0\,|\,-3\,|\,-1)$, $B(4\,|\,2\,|\,1)$ und $C(1\,|\,-1\,|\,-1)$ liegen in einer Ebene H. Drei eingeweihte Mitarbeitende kennen als Teilgeheimnisse die Koordinaten von jeweils einem dieser Punkte. Der geheime Code wird durch die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g mit der Ebene H ermittelt.

(1) Die Koordinaten der Punkte A, B und C werden ins System eingegeben.

Berechnen Sie den geheimen Code.

Name: ____________________

(2) Der Punkt S liegt nicht auf der Geraden durch A und B. Ein vierter Mitarbeitender erhält den Punkt $D(12\,|\,12\,|\,5)$ als Teilgeheimnis. Der Punkt D liegt in der Ebene H.

Begründen Sie, warum bei der Eingabe der Koordinaten der Punkte A, B und D das System den geheimen Code trotzdem nicht ermitteln kann.

(3) *Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten eines von C und S verschiedenen Punktes E so, dass durch die Eingabe der Koordinaten der Punkte A, B und E der geheime Code ermittelbar ist.*

(5 + 2 + 3 Punkte)

b) Für ein $a \in \mathbb{R}$ ist die Gerade $h_a:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3a \\ -7 \\ a \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$, gegeben. Die Koordinaten des Schnittpunktes $S(5\,|\,1\,|\,3)$ der Geraden g aus a) mit der Geraden h_a sind der geheime Code.

(1) *Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass sich g und h_a im Punkt S schneiden.*

(2) Eingeweihte Mitarbeitende sollen als Teilgeheimnisse jeweils die Koordinaten eines von S verschiedenen Punktes erhalten, der auf der Geraden h_4 liegt.
Geben Sie die Koordinaten eines von $(-7\,|\,8\,|\,-1)$ und S verschiedenen Punktes P an, der als Teilgeheimnis geeignet ist.

(2 + 1 Punkte)

Name: ____________________

c) Ein anderes Unternehmen verwendet als geheimen Code die ersten drei Nachkommastellen der ungerundeten Länge der Höhe $h_{\overline{IJ}}$ eines gleichschenkligen Dreiecks *IJK* mit der Basis $\overline{IJ}$.

Drei eingeweihte Mitarbeitende kennen als Teilgeheimnisse mit $I(4\,|\,3\,|\,2)$, $J(8\,|\,6\,|\,-1)$ und $K(6\,|\,5\,|\,1)$ jeweils die Koordinaten eines Eckpunktes des gleichschenkligen Dreiecks *IJK*.

(1) *Zeigen Sie, dass I, J und K die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis* $\overline{IJ}$ *sind.*

(2) *Berechnen Sie den geheimen Code.*

(3) Ein weiterer Mitarbeitender soll die Koordinaten eines von *K* verschiedenen Punktes *L* erhalten, der wie *K* zusammen mit den Punkten *I* und *J* ein gleichschenkliges Dreieck *IJL* mit der Basis $\overline{IJ}$ bildet. Auch aus den Koordinaten von *I, J* und *L* soll sich in gleicher Weise wie oben beschrieben der in c) (2) berechnete geheime Code ergeben.

Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten eines geeigneten Punktes L.

(2 + 3 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2021 (Stand: August 2020)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen
   - Skalarprodukt

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $H: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{AB} + l \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k, l \in \mathbb{R}$ ist eine Gleichung der Ebene H in Parameterform.

Aus $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ergibt sich das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} 4k + l - 4t = 1 \\ 5k + 2l + 2t = 6 \\ 2k + t = 5 \end{array} \right| .$$

Der TR liefert die Lösung $k = 2$, $l = -3$ und $t = 1$.

Einsetzen von $t = 1$ in die Parametergleichung von g liefert $S(5 \mid 1 \mid 3)$ als Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene H und damit 513 als geheimen Code.

(2) $h: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + i \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $i \in \mathbb{R}$, ist die Gerade durch *A* und *B*.

Aus $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ folgt, dass der Punkt *D* auf *h* liegt und damit *A*, *B* und *D* auf einer Geraden liegen. Also wird die Ebene *H* durch *A*, *B* und *D* nicht festgelegt. Der Schnittpunkt *S* kann somit nicht ermittelt werden.

(3) Es gilt $\begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}$. $E(5\mid 4\mid 1)$ ist damit ein Punkt von H, der offensichtlich von A, B, C und dem Punkt $(5\mid 1\mid 3)$ verschieden ist.

Da die Gleichung $\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix}+i\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}$ nicht lösbar ist, liegt $E(5\mid 4\mid 1)$ nicht auf der Geraden h durch A und B und ist somit ein geeigneter Punkt.

Teilaufgabe b)

(1) Die Gleichung $\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\8\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3a\\-7\\a\end{pmatrix}$ wird von $a=4$ und $s=1$ gelöst.

Also schneiden sich für $a=4$ die Geraden g und h_a im Punkt S.

(2) Der Punkt $(-1\mid 4{,}5\mid 1)$ liegt auf $h_4:\vec{x}=\begin{pmatrix}-7\\8\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}12\\-7\\4\end{pmatrix},\ s\in\mathbb{R}$.

Teilaufgabe c)

(1) Aus $\left|\overrightarrow{IK}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{9}=3$ und $\left|\overrightarrow{JK}\right|=\left|\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{9}=3$ folgt, dass IJK ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{IJ}$ ist.

(2) Der Punkt $M(6\mid 4{,}5\mid 0{,}5)$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{IJ}$.

$\left|\overrightarrow{MK}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}\right|=\sqrt{0{,}5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ist die Länge der Höhe $h_{\overline{IJ}}$ und damit ist 707 der geheime Code.

(3) Aus $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{MK}=\begin{pmatrix}6\\4{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-0{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\\0\end{pmatrix}$ folgt, dass $(6\mid 4\mid 0)$ als Spiegelpunkt von K an der Strecke $\overline{IJ}$ ein geeigneter Punkt L ist.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet den geheimen Code.	5			
2	(2) begründet, warum bei der Eingabe der Koordinaten der Punkte A, B und D das System den geheimen Code nicht ermitteln kann.	2			
3	(3) bestimmt rechnerisch die Koordinaten eines von C und S verschiedenen Punktes E so, dass durch die Eingabe der Punkte A, B und E der geheime Code ermittelbar ist.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**10**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt $a \in \mathbb{R}$ so, dass sich g und h_a im Punkt S schneiden.	2			
2	(2) gibt die Koordinaten eines geeigneten Punktes P an.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**3**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass *I*, *J* und *K* die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis $\overline{IJ}$ sind.	2			
2	(2) berechnet den geheimen Code.	3			
3	(3) ermittelt rechnerisch die Koordinaten eines geeigneten Punktes *L*.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**7**			

	Summe insgesamt	**20**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Im Jahr 2018 wurden in Nordrhein-Westfalen etwa 390 000 praktische Führerscheinprüfungen abgelegt. Der relative Anteil von bestandenen Prüfungen lag in dem Jahr bei etwa 70 %.

a) Bei einer Fahrschulkette geht man am Standort Düsseldorf für das Jahr 2021 von insgesamt 250 praktischen Führerscheinprüfungen aus. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl unter diesen 250 praktischen Prüfungen, die bestanden werden. Es wird modellhaft angenommen, dass X binomialverteilt mit $p = 0,7$ ist.

(1) *Ermitteln Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:*

E1: „Es werden höchstens 160 *praktische Prüfungen bestanden.“*

E2: „Es werden mindestens 80 % *der praktischen Prüfungen bestanden.“*

E3: „Die Anzahl der bestandenen praktischen Prüfungen weicht um mindestens eine Standardabweichung vom Erwartungswert ab.“

(2) Im Folgenden ist k eine ganze Zahl mit $0 \leq k \leq 250$.

(i) *Bestimmen Sie für* $k = 165$ *die Wahrscheinlichkeit* $P(X \geq k)$, *dass mindestens k praktische Prüfungen bestanden werden.*

(ii) *Beschreiben Sie, wie sich die in* (i) *bestimmte Wahrscheinlichkeit ändert, wenn der Wert von k verändert wird.*

(iii) Die Wahrscheinlichkeit, für mindestens k bestandene praktische Prüfungen soll kleiner oder gleich 60 % sein.
Ermitteln Sie, wie groß k in diesem Fall mindestens gewählt werden muss.

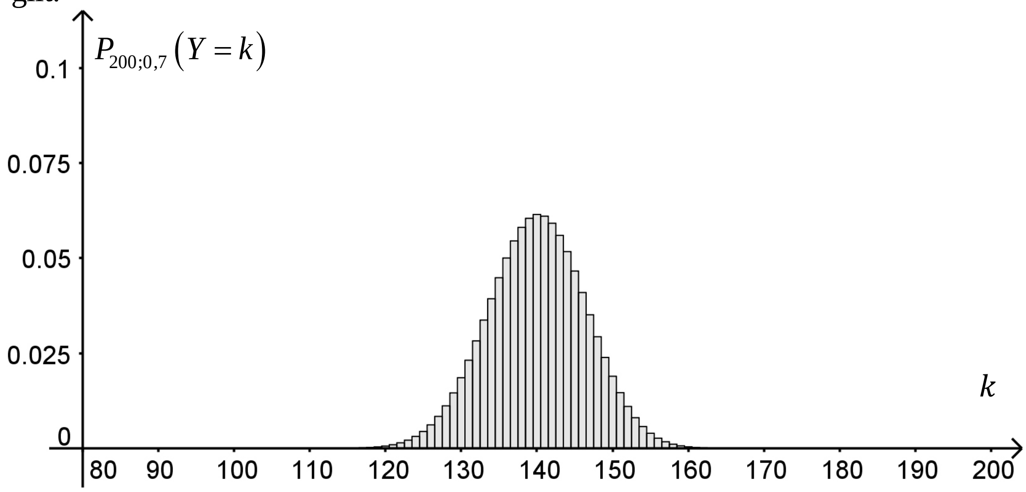
(8 + 6 Punkte)

Name: ____________________

b) Die Fahrschulkette plant für das Jahr 2022 die Eröffnung einer Filiale in Soest. Die Zentrale stellt als Anspruch an die Ausbildungsqualität, dass von den praktischen Prüfungen im Schnitt mindestens 70 % bestanden werden. Man prognostiziert für Soest, dass 200 praktische Prüfungen im Jahr 2022 abgelegt werden. Wenn davon mindestens 140 Prüfungen bestanden werden, will die Zentrale davon ausgehen, dass auch in Soest aufgrund der Ausbildungsqualität jede Prüfung mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 70 % bestanden wird. Es wird modellhaft angenommen, dass die Anzahl Y der bestandenen Prüfungen unter den 200 prognostizierten Prüfungen binomialverteilt ist.

(1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zentrale zu der Einschätzung kommt, dass in Soest jede Prüfung mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens* 70 % *bestanden wird, obwohl die Prüfungen tatsächlich nur mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils* 65 % *bestanden werden.*

(2) Die *Abbildung* zeigt das Histogramm zu $P_{200;0,7}(Y=k)$, also für den Fall, dass $p=0,7$ gilt.



Abbildung

Falls von den 200 prognostizierten praktischen Prüfungen in Soest z. B. nur 130 bestanden werden, kommt die Zentrale zu der Einschätzung, dass in Soest jede Prüfung mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 70 % bestanden wird.

Erklären Sie mithilfe des Histogramms, warum die Zentrale bei dieser Einschätzung einen Irrtum begangen haben könnte.

(3 + 3 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2021 (Stand: August 2020)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung
2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) zu *E1*: $P_{250;0,7}\left(X \leq 160\right) \approx 0,0240$.

zu *E2*: $P_{250;0,7}\left(X \geq 200\right) \approx 0,0002$.

zu *E3*: $\mu = 0,7 \cdot 250 = 175$, $\sigma = \sqrt{250 \cdot 0,7 \cdot 0,3} \approx 7,2457$,

$P_{250;0,7}\left(X \leq 175-8\right) + P_{250;0,7}\left(X \geq 175+8\right) \approx 0,1504 + 0,1501 = 0,3005.$

(2) (i) $P_{250;0,7}\left(X \geq 165\right) \approx 0,9251$.

(ii) Wenn der Wert von *k* vergrößert wird, wird das Intervall $\left(X \geq k\right)$ kleiner und die Wahrscheinlichkeit $P\left(X \geq k\right)$ verringert sich. Entsprechend vergrößert sich die Wahrscheinlichkeit, wenn der Wert von *k* verkleinert wird.

(iii) Da $P_{250;0,7}\left(X \geq 173\right) \approx 0,6380$ und $P_{250;0,7}\left(X \geq 174\right) \approx 0,5854$, folgt $k \geq 174$.

Der Wert von *k* muss mindestens 174 betragen.

Teilaufgabe b)

(1) $P_{200;0,65}\left(Y \geq 140\right) \approx 0,0783$.

(2) Auch unter der Voraussetzung, dass $p = 0,7$ der Fall ist, kann es zufallsbedingt dazu kommen, dass nur 130 praktische Prüfungen bestanden werden. Im Histogramm ist ersichtlich, dass dieser Fall eine deutlich von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit hat. In diesem Fall würde die Zentrale einen Irrtum begehen, wenn sie von einer geringeren Wahrscheinlichkeit für das Bestehen einer Prüfung ausginge.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt die Wahrscheinlichkeit für Ereignis *E1*.	2			
2	(1) ermittelt die Wahrscheinlichkeit für Ereignis *E2*.	2			
3	(1) bestimmt den Erwartungswert und die Standardabweichung.	2			
4	(1) ermittelt die Wahrscheinlichkeit für Ereignis *E3*.	2			
5	(2) (i) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	1			
6	(2) (ii) beschreibt, wie sich die Wahrscheinlichkeit ändert.	2			
7	(2) (iii) ermittelt, wie groß k mindestens gewählt werden muss, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens k bestandene Prüfungen kleiner oder gleich 60 % ist.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**14**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
2	(2) erklärt mithilfe des Histogramms, warum die Zentrale einen Irrtum begangen haben könnte.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**6**			

	Summe insgesamt	**20**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**25**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**35**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**20**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: dritte Aufgabe	**20**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 40
mangelhaft plus	3	39 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

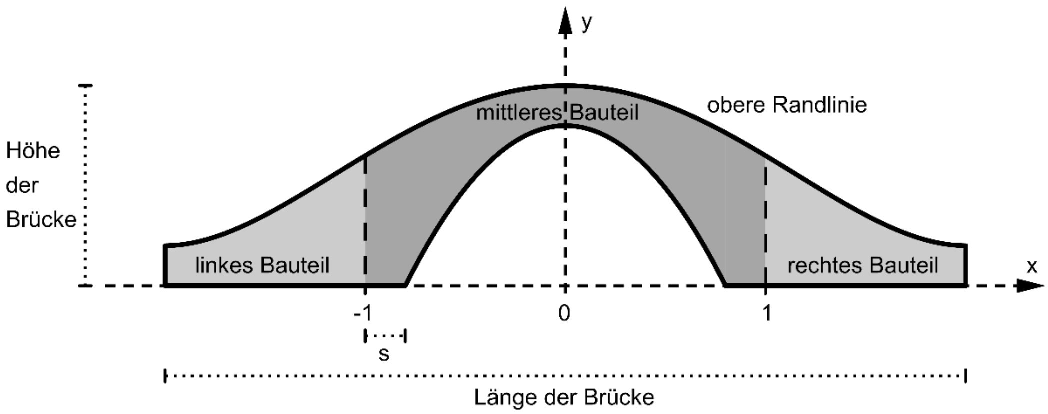
Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs
weitere (kurze) Analysisaufgabe mit 20 BE

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Die *Abbildung* zeigt modellhaft den Längsschnitt einer dreiteiligen Brücke aus Holz für eine Spielzeugeisenbahn. Die Züge können sowohl über die Brücke fahren als auch darunter hindurch.



Abbildung

Die obere Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{20}x^4-\frac{2}{5}x^2+1$ beschrieben werden.

Dabei werden die Endpunkte dieser Randlinie durch die beiden Tiefpunkte des Graphen von f dargestellt. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x-Achse die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter in der Realität.

Name: ____________________

a) *Begründen Sie, dass die obere Randlinie achsensymmetrisch zur y-Achse ist.*
(1 Punkt)

b) *Bestimmen Sie rechnerisch die Höhe und die Länge der Brücke (vgl. Abbildung).*

[Kontrolllösung: Ein Tiefpunkt des Graphen von *f* hat die *x*-Koordinate 2.]
(5 Punkte)

c) *Geben Sie die Bedeutung des Terms* $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$ *im Sachzusammenhang an und bestimmen Sie seinen Wert.*
(2 Punkte)

d) *Bestimmen Sie die größte Steigung der Brücke, die beim Überfahren zu überwinden ist.*
(2 Punkte)

Der parabelförmige Teil der unteren Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion q_a mit $q_a(x) = 0,8 - a \cdot x^2$ mit $a \in \mathbb{R}, a > 0$ beschrieben werden.

e) In der *Abbildung* ist die Länge einer der beiden Bodenflächen des mittleren Bauteils mit *s* bezeichnet.
Bestimmen Sie den Wert von a, für den s = 0,1 dm *gilt.*
(3 Punkte)

f) *Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass für die Beschreibung der unteren Randlinie beliebig große Werte von a nicht infrage kommen.*
(2 Punkte)

g) Für die Brücke gilt $a = 1,25$. Die drei Bauteile der Brücke werden aus massivem Holz hergestellt; 1 dm³ des Holzes hat eine Masse von 800 Gramm. Die Brücke ist 0,4 dm breit.
Bestimmen Sie die Nullstellen von $q_{1,25}$ *und ermitteln Sie die Masse des mittleren Bauteils.*
(5 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs
weitere (kurze) Analysisaufgabe mit 20 BE

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2021 (Stand: August 2020)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen
     - Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei *p(x)* ein Polynom höchstens zweiten Grades ist
     - Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben
     - Interpretation und Bestimmungen von Parametern der oben genannten Funktionen
     - notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

Es handelt sich bei der Funktion *f* um eine ganzrationale Funktion mit ausschließlich geraden Exponenten. Daher ist der Graph von *f* und somit die obere Randlinie achsensymmetrisch zur *y*-Achse.

Teilaufgabe b)

Es ist $f'(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{4}{5}x$.

Der Ansatz $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x^3 - \frac{4}{5}x = 0$ liefert $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$ als mögliche Extremstellen. Mit $f'(-3) = -3 < 0$, $f'(-1) = 0{,}6 > 0$, $f'(1) = -0{,}6 < 0$ und $f'(3) = 3 > 0$ folgt, dass bei $x_2 = 0$ ein Hochpunkt des Graphen und bei $x_1 = -2$ und $x_3 = 2$ Tiefpunkte des Graphen von *f* vorliegen. Die Brücke ist also 4 dm lang.

Mit $f(0) = 1$ ergibt sich, dass die Brücke eine Höhe von 1 dm besitzt.

Teilaufgabe c)

Der Term beschreibt für das rechte Bauteil die mittlere Steigung der oberen Randlinie.

Es ist $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = -\frac{9}{20}$.

Teilaufgabe d)

Die größte Steigung entspricht dem Maximum von f' auf dem Intervall $[-2;2]$. Der TR liefert als absoluten Hochpunkt des Graphen von f' auf dem Intervall $[-2;2]$ näherungsweise den Punkt $(-1{,}155 \mid 0{,}616)$ [exakt $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \middle| \frac{16}{45}\sqrt{3}\right)$]. Der y-Wert dieses Punktes des Graphen von f' entspricht der größten Steigung auf dem betrachteten Intervall.

Beim Überfahren ist eine maximale Steigung von ca. 0,616 zu überwinden.

[Die Fahrtrichtung des Zuges ist aufgrund der Achsensymmetrie des Graphen von f irrelevant für den Wert der größten Steigung.]

Teilaufgabe e)

Damit die Länge 0,1 dm beträgt, muss q_a eine Nullstelle bei $-0{,}9$ [bzw. bei 0,9] besitzen.

Der Ansatz $q_a(-0{,}9) = 0$ liefert $a \approx 0{,}988$ [exakt $a = \frac{80}{81}$].

Also gilt s = 0,1 dm für $a \approx 0{,}988$.

Teilaufgabe f)

Je größer der Wert von a ist, desto schmaler ist der Graph von q_a und damit die Durchfahrt der Brücke. Wird der Wert von a zu groß, kann kein Zug mehr hindurchfahren.

Teilaufgabe g)

$q_{1,25}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}8 - 1{,}25x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -0{,}8 \vee x = 0{,}8$.

Für die Längsschnittfläche $A_{\text{mittleres Bauteil}}$ des mittleren Bauteils gilt:

$$A_{\text{mittleres Bauteil}} = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-0{,}8}^{0{,}8} q_{1,25}(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}9 \ [\mathrm{dm}^2].$$

Für die Masse folgt: $0{,}9\ \mathrm{dm}^2 \cdot 0{,}4\ \mathrm{dm} \cdot 800\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{dm}^3} = 288\ \mathrm{g}$.

Die Masse des mittleren Bauteils beträgt 288 g.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	begründet die Achsensymmetrie.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (1) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**1**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt rechnerisch die Höhe und Länge der Brücke.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**5**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	gibt die Bedeutung des Terms im Sachzusammenhang an.	1			
2	bestimmt den Wert des Terms.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (2) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**2**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt die größte Steigung.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (2) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**2**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt den Wert von a, für den $s = 0{,}1$ dm gilt.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**3**			

Teilaufgabe f)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	begründet die Aussage im Sachzusammenhang.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (2) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe f)	**2**			

Teilaufgabe g)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	bestimmt die Nullstellen.	1			
2	ermittelt die Masse des mittleren Bauteils.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe g)	**5**			

	Summe insgesamt	**20**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**25**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**35**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**20**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: dritte Aufgabe	**20**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 40
mangelhaft plus	3	39 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0