Name: ____________________

Abiturprüfung 2023

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabenstellung:

a) Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$$f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 10,\ x \in \mathbb{R},$$

und

$$g(x) = -6 \cdot x + 10,\ x \in \mathbb{R}.$$

(1) *Berechnen Sie die Stellen, an denen die Graphen von f und g gemeinsame Punkte besitzen.*

(2) Der Punkt $P(3 \mid f(3))$ ist einer der gemeinsamen Punkte der Graphen von f und g.

Zeigen Sie: Der Graph von g ist die Tangente an den Graphen von f im Punkt P.

(3 + 2 Punkte)

b) Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung

$$f(x) = 3 \cdot x^2 - 12,\ x \in \mathbb{R}.$$

(i) *Berechnen Sie die Nullstellen von f.*

(ii) *Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird.*

(5 Punkte)

Name: ____________________

c) Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung

$$f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^x,\ x \in \mathbb{R}.$$

(1) *Zeigen Sie*: $f'(x) = x \cdot (x+2) \cdot \mathrm{e}^x$.

(2) *Bestimmen Sie (z. B. unter Verwendung des Vorzeichenwechselkriteriums) die Extremstellen und die Art der Extremstellen der Funktion f.*

(2 + 3 Punkte)

d) Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ sowie die Gerade h durch die Punkte $A(4|0|0)$ und $B(5|1|b)$ mit einer reellen Zahl b.

(1) *Begründen Sie, dass A nicht auf g liegt.*

(2) Die Geraden g und h haben einen gemeinsamen Punkt.

Ermitteln Sie den Wert von b.

(1 + 4 Punkte)

e) Gegeben sind die Punkte $A(-1|3|2)$, $B(1|2|4)$ und $C(2|4|-1)$.

(1) *Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC einen rechten Winkel bei A besitzt.*

(2) g ist die Gerade durch die Punkte A und B.

Die Punkte P und Q liegen auf g und haben den Abstand 9 LE vom Punkt A.

Ermitteln Sie die Koordinaten von P und Q.

(2 + 3 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2023

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Aufgabenart

Hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgabe

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2023 (Stand: 20.12.2022)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen
   - Skalarprodukt

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Hinweis

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - 6 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 10 = -6 \cdot x + 10$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 6 \cdot x + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 6 \cdot x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 - \sqrt{3^2 - 9} \vee x = 3 + \sqrt{3^2 - 9}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3.$$

(2) $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 3$.

$f'(3) = 27 - 36 + 3 = -6 = m_g$.

Der Graph von g ist eine Gerade. Im gemeinsamen Punkt P haben diese Gerade und der Graph von f die gleiche Steigung. Daher ist der Graph von g die Tangente an den Graphen von f im Schnittpunkt P.

Teilaufgabe b)

(i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot x^2 - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2.$$

(ii) $\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[3 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 - 12 \cdot x\right]_{-2}^{2}$

$$= 2^3 - 12 \cdot 2 - \left((-2)^3 - 12 \cdot (-2)\right)$$

$$= 8 - 24 - (-8 + 24)$$

$$= -32.$$

Der Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird, beträgt 32 FE.

Teilaufgabe c)

(1) Mit Produktregel gilt:

$f'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^x + x^2 \cdot \mathrm{e}^x = \left(2x + x^2\right) \cdot \mathrm{e}^x = x \cdot (x+2) \cdot \mathrm{e}^x$.

(2) Notwendige Bedingung für Extremstellen:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x+2) \cdot \mathrm{e}^x \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0$.

Da zusätzlich $f'(-3) = 3 \cdot \mathrm{e}^{-3} > 0$, $f'(-1) = -\mathrm{e}^{-1} < 0$ und $f'(1) = 3 \cdot \mathrm{e} > 0$ gilt, liegt an der Stelle $x = -2$ ein Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Funktionswerten von f' vor. $x = -2$ ist also eine lokale Maximalstelle von f. An der Stelle $x = 0$ liegt ein Vorzeichenwechsel von negativen zu positiven Funktionswerten von f' vor. $x = 0$ ist also eine lokale Minimalstelle von f.

Teilaufgabe d)

(1) Alle Punkte von g haben die x_2-Koordinate 3, A hat aber die x_2-Koordinate 0.

(2) Aus $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ ergibt sich das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{c} s = 2 + r \\ r = 3 \\ -7 + 5s = r \cdot b \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} s = 2 + 3 = 5 \\ r = 3 \\ -7 + 5 \cdot 5 = 3 \cdot b \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} s = 5 \\ r = 3 \\ b = 6 \end{array} \right|.$$

Teilaufgabe e)

(1) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}.$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\cdot 3-1\cdot 1+2\cdot(-3)=-1\neq 0.$

Das Dreieck besitzt keinen rechten Winkel bei A.

(2) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3.$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+3\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\8\end{pmatrix}\Rightarrow P(5\,|\,0\,|\,8).$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}-3\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\6\\-4\end{pmatrix}\Rightarrow Q(-7\,|\,6\,|\,-4).$

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Stellen, an denen die Graphen von f und g gemeinsame Punkte besitzen.	3			
2	(2) zeigt, dass der Graph von g die Tangente an den Graphen von f im Punkt P ist.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**5**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(i) berechnet die Nullstellen von f.	2			
2	(ii) berechnet den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**5**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt: $f'(x) = x \cdot (x+2) \cdot e^x$.	2			
2	(2) bestimmt die Extremstellen und die Art der Extremstellen der Funktion f.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**5**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass A nicht auf g liegt.	1			
2	(2) ermittelt den Wert von b.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**5**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) untersucht, ob das Dreieck ABC einen rechten Winkel bei A besitzt.	2			
2	(2) ermittelt die Koordinaten von P und Q.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**5**			

	Summe insgesamt	**25**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2023

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabenstellung:

a) Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$$f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 10,\ x \in \mathbb{R},$$

und

$$g(x) = -6 \cdot x + 10,\ x \in \mathbb{R}.$$

(1) *Berechnen Sie die Stellen, an denen die Graphen von f und g gemeinsame Punkte besitzen.*

(2) Der Punkt $P(3\,|\,f(3))$ ist einer der gemeinsamen Punkte der Graphen von f und g.

Zeigen Sie: Der Graph von g ist die Tangente an den Graphen von f im Punkt P.

(3 + 2 Punkte)

b) Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung

$$f(x) = 3 \cdot x^2 - 12,\ x \in \mathbb{R}.$$

(i) *Berechnen Sie die Nullstellen von f.*

(ii) *Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird.*

(5 Punkte)

c) Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung

$$f(x) = x^2 \cdot e^x,\ x \in \mathbb{R}.$$

(1) *Zeigen Sie*: $f'(x) = x \cdot (x+2) \cdot e^x$.

(2) *Bestimmen Sie (z. B. unter Verwendung des Vorzeichenwechselkriteriums) die Extremstellen und die Art der Extremstellen der Funktion f.*

(2 + 3 Punkte)

Name: ____________________

d) (1) Die Histogramme I bis III in den *Abbildungen 1-1* bis *1-3* zeigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen von drei binomialverteilten Zufallsgrößen *A*, *B* und *C*. Es gilt jeweils $n = 10$. Zu jeder Zufallsgröße gehört eine der Wahrscheinlichkeiten $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,4$ und $p_3 = 0,8$.

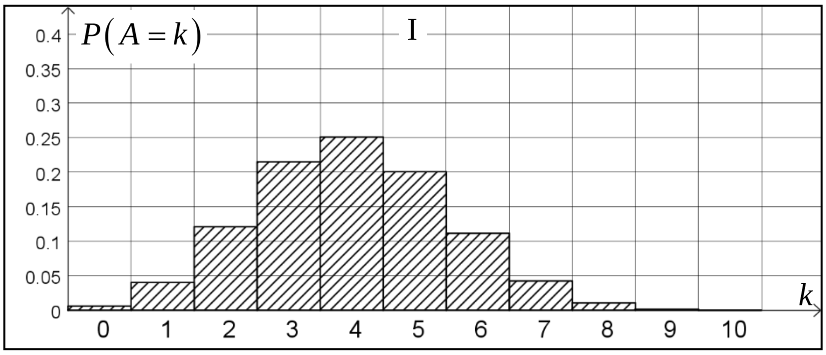


Abbildung 1-1

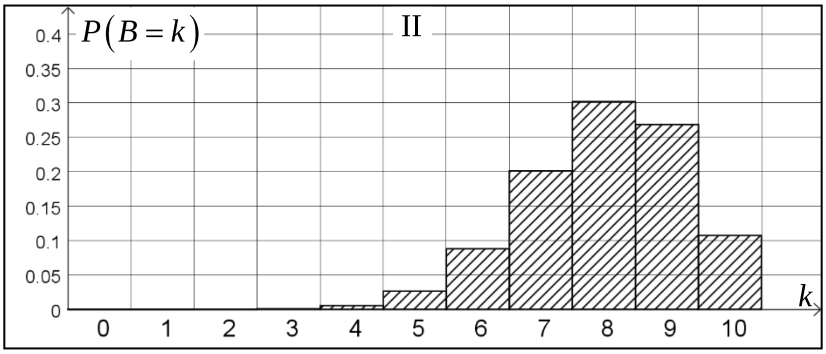


Abbildung 1-2

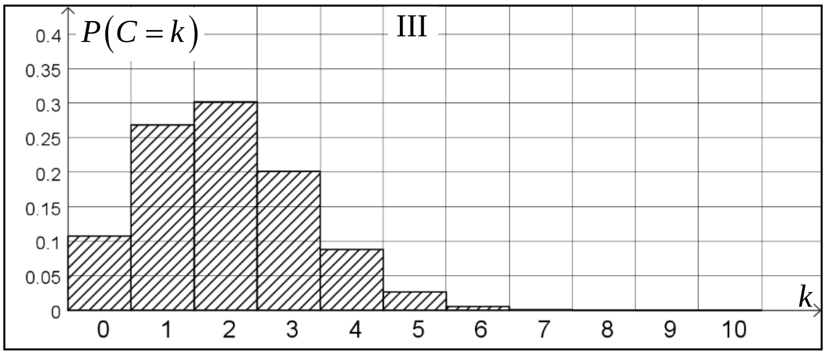


Abbildung 1-3

Ordnen Sie den Histogrammen I bis III die jeweils passende Wahrscheinlichkeit zu.

Name: ____________________

(2) Eine weitere Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 10$.

Das unvollständige Histogramm der Verteilung ist in *Abbildung 2* dargestellt.

Es gilt: $P(X \geq 4) \approx 0{,}35$.

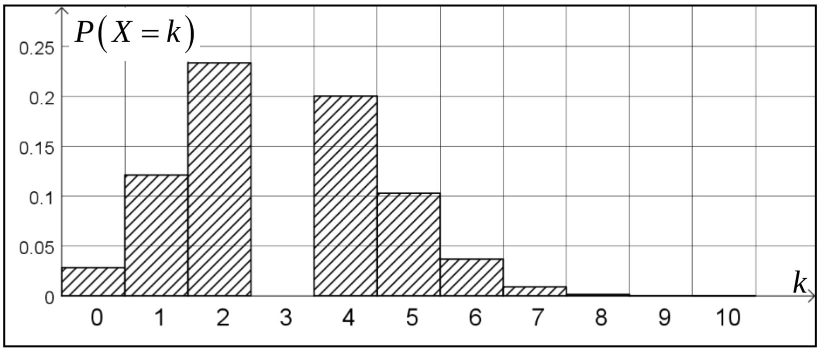


Abbildung 2

(i) *Ermitteln Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit* $P(X \leq 2)$.

(ii) *Ermitteln Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit* $P(X = 3)$.

(2 + 3 Punkte)

e) (1) Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern n und $p = 0{,}2$. Für die Standardabweichung σ von X gilt: $\sigma = 1{,}2$.

Berechnen Sie n.

(2) In einer Urne befinden sich 2 schwarze und 8 weiße Kugeln. Aus der Urne wird mit Zurücklegen neunmal eine Kugel gezogen.

(i) *Geben Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit an, dass dabei genau zweimal eine schwarze Kugel gezogen wird.*

(ii) *Beschreiben Sie ein Ereignis im Sachkontext der Aufgabe mit einer Wahrscheinlichkeit von* $0{,}2^2 \cdot \binom{7}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^4$.

(2 + 3 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2023

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Aufgabenart

Hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgabe

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2023 (Stand: 20.12.2022)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Hinweis

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

---

1 Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - 6 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 10 = -6 \cdot x + 10$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \left(x^2 - 6 \cdot x + 9\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 6 \cdot x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 - \sqrt{3^2 - 9} \vee x = 3 + \sqrt{3^2 - 9}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3.$$

(2) $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 3$.

$f'(3) = 27 - 36 + 3 = -6 = m_g$.

Der Graph von g ist eine Gerade. Im gemeinsamen Punkt P haben diese Gerade und der Graph von f die gleiche Steigung. Daher ist der Graph von g die Tangente an den Graphen von f im Schnittpunkt P.

Teilaufgabe b)

(i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot x^2 - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2.$$

(ii) $\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[3 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 - 12 \cdot x\right]_{-2}^{2}$

$$= 2^3 - 12 \cdot 2 - \left((-2)^3 - 12 \cdot (-2)\right)$$

$$= 8 - 24 - (-8 + 24)$$

$$= -32.$$

Der Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird, beträgt 32 FE.

Teilaufgabe c)

(1) Mit Produktregel gilt:

$$f'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^x + x^2 \cdot \mathrm{e}^x = \left(2x + x^2\right) \cdot \mathrm{e}^x = x \cdot (x+2) \cdot \mathrm{e}^x .$$

(2) Notwendige Bedingung für Extremstellen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x+2) \cdot \mathrm{e}^x \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0 .$$

Da zusätzlich $f'(-3) = 3 \cdot \mathrm{e}^{-3} > 0$, $f'(-1) = -\mathrm{e}^{-1} < 0$ und $f'(1) = 3 \cdot \mathrm{e} > 0$ gilt, liegt an der Stelle $x = -2$ ein Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Funktionswerten von f' vor. $x = -2$ ist also eine lokale Maximalstelle von f. An der Stelle $x = 0$ liegt ein Vorzeichenwechsel von negativen zu positiven Funktionswerten von f' vor. $x = 0$ ist also eine lokale Minimalstelle von f.

Teilaufgabe d)

(1) $\mathrm{I} \rightarrow p_2$, $\mathrm{II} \rightarrow p_3$, $\mathrm{III} \rightarrow p_1$.

(2) (i)

$$\begin{aligned} P(X \le 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &\approx 0{,}03 + 0{,}12 + 0{,}23 \\ &= 0{,}38 . \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= 1 - P(X \le 2) - P(X \ge 4) \\ &\approx 1 - 0{,}38 - 0{,}35 \\ &= 0{,}27 . \end{aligned}$$

Teilaufgabe e)

(1) $\sigma = 1{,}2 = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{n \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} \Leftrightarrow 0{,}16 \cdot n = 1{,}44 \Leftrightarrow n = 9$.

(2) (i) $\binom{9}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^7$.

(ii) Beispiel: Von den neun gezogenen Kugeln sind die ersten beiden schwarz. Von den weiteren sieben gezogenen Kugeln sind genau drei schwarz.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: __________________________________ Kursbezeichnung: ________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Stellen, an denen die Graphen von f und g gemeinsame Punkte besitzen.	3			
2	(2) zeigt, dass der Graph von g die Tangente an den Graphen von f im Punkt P ist.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**5**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(i) berechnet die Nullstellen von f.	2			
2	(ii) berechnet den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**5**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt: $f'(x) = x \cdot (x+2) \cdot e^x$.	2			
2	(2) bestimmt die Extremstellen und die Art der Extremstellen der Funktion f.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**5**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ordnet den Histogrammen I bis III die jeweils passende Wahrscheinlichkeit zu.	2			
2	(2) (i) ermittelt näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(X \le 2)$.	2			
3	(2) (ii) ermittelt näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(X = 3)$.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**5**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet n.	2			
2	(2) (i) gibt einen Term für die Wahrscheinlichkeit an, dass genau zweimal eine schwarze Kugel gezogen wird.	1			
3	(2) (ii) beschreibt ein Ereignis mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}2^2 \cdot \binom{7}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^4$.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**5**			

	Summe insgesamt	**25**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2023

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabenstellung:

a) Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$$f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 10,\ x \in \mathbb{R},$$

und

$$g(x) = -6 \cdot x + 10,\ x \in \mathbb{R}.$$

(1) *Berechnen Sie die Stellen, an denen die Graphen von f und g gemeinsame Punkte besitzen.*

(2) Der Punkt $P(3 \mid f(3))$ ist einer der gemeinsamen Punkte der Graphen von f und g.

Zeigen Sie: Der Graph von g ist die Tangente an den Graphen von f im Punkt P.

(3 + 2 Punkte)

b) Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung

$$f(x) = 3 \cdot x^2 - 12,\ x \in \mathbb{R}.$$

(i) *Berechnen Sie die Nullstellen von f.*

(ii) *Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird.*

(5 Punkte)

Name: ____________________

c) Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung

$$f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^x,\ x \in \mathbb{R}\ .$$

(1) *Zeigen Sie*: $f'(x) = x \cdot (x+2) \cdot \mathrm{e}^x$.

(2) *Bestimmen Sie (z. B. unter Verwendung des Vorzeichenwechselkriteriums) die Extremstellen und die Art der Extremstellen der Funktion f.*

(2 + 3 Punkte)

d) Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ sowie die Gerade h durch die Punkte $A(4\,|\,0\,|\,0)$ und $B(5\,|\,1\,|\,b)$ mit einer reellen Zahl b.

(1) *Begründen Sie, dass A nicht auf g liegt.*

(2) Die Geraden g und h haben einen gemeinsamen Punkt.

Ermitteln Sie den Wert von b.

(1 + 4 Punkte)

Name: ____________________

e) (1) Die Histogramme I bis III in den *Abbildungen 1-1* bis *1-3* zeigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen von drei binomialverteilten Zufallsgrößen *A*, *B* und *C*. Es gilt jeweils $n = 10$. Zu jeder Zufallsgröße gehört eine der Wahrscheinlichkeiten $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}4$ und $p_3 = 0{,}8$.

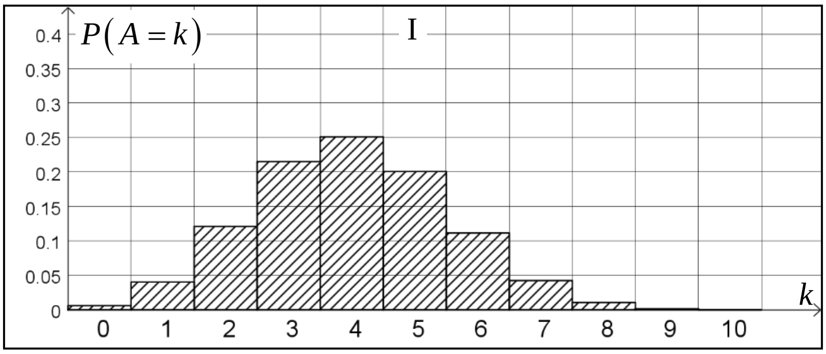


Abbildung 1-1

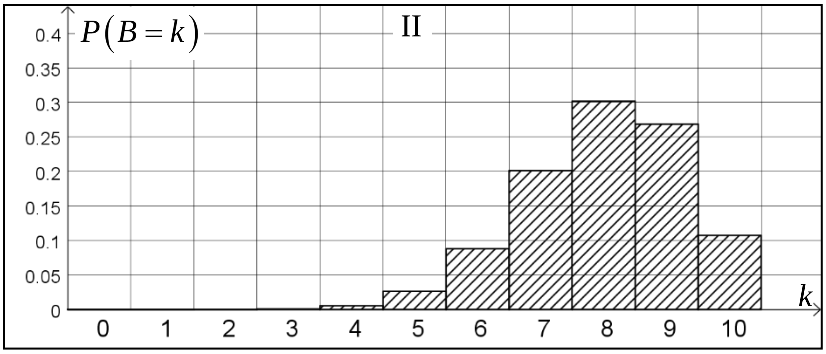


Abbildung 1-2

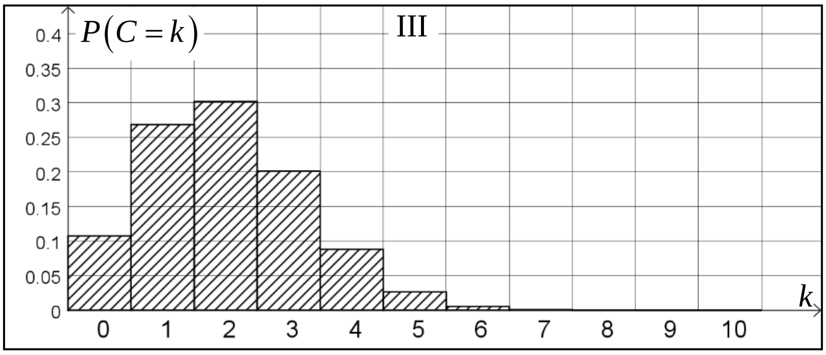


Abbildung 1-3

Ordnen Sie den Histogrammen I bis III die jeweils passende Wahrscheinlichkeit zu.

Name: ______________________

(2) Eine weitere Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 10$.

Das unvollständige Histogramm der Verteilung ist in *Abbildung 2* dargestellt.

Es gilt: $P(X \geq 4) \approx 0{,}35$.

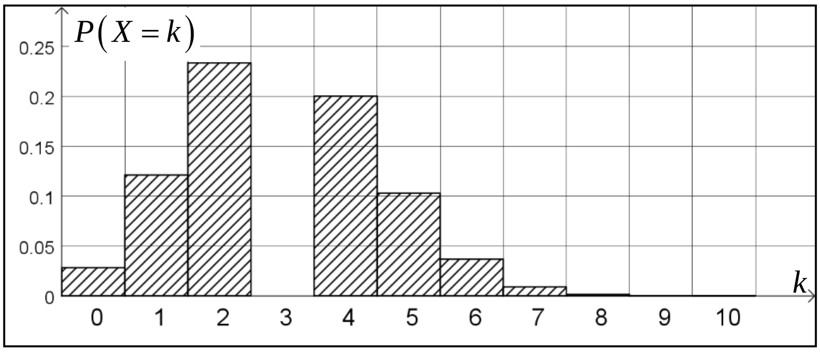


Abbildung 2

(i) *Ermitteln Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit* $P(X \leq 2)$.

(ii) *Ermitteln Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit* $P(X = 3)$.

(2 + 3 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2023

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Aufgabenart

Hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgabe

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2023 (Stand: 20.12.2022)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen
   - Skalarprodukt

   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Hinweis

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^3 - 6\cdot x^2 + 3\cdot x + 10 = -6\cdot x + 10 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 6\cdot x^2 + 9\cdot x = 0 \\ &\Leftrightarrow x\cdot\left(x^2 - 6\cdot x + 9\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 6\cdot x + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 - \sqrt{3^2 - 9} \vee x = 3 + \sqrt{3^2 - 9} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3. \end{aligned}$$

(2) $f'(x) = 3\cdot x^2 - 12\cdot x + 3$.

$f'(3) = 27 - 36 + 3 = -6 = m_g$.

Der Graph von g ist eine Gerade. Im gemeinsamen Punkt P haben diese Gerade und der Graph von f die gleiche Steigung. Daher ist der Graph von g die Tangente an den Graphen von f im Schnittpunkt P.

Teilaufgabe b)

(i) $$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 3\cdot x^2 - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2. \end{aligned}$$

(ii) $\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[3 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 - 12 \cdot x\right]_{-2}^{2}$

$$= 2^3 - 12 \cdot 2 - \left((-2)^3 - 12 \cdot (-2)\right)$$

$$= 8 - 24 - (-8 + 24)$$

$$= -32.$$

Der Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird, beträgt 32 FE.

Teilaufgabe c)

(1) Mit Produktregel gilt:

$$f'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^x + x^2 \cdot \mathrm{e}^x = \left(2x + x^2\right) \cdot \mathrm{e}^x = x \cdot (x+2) \cdot \mathrm{e}^x .$$

(2) Notwendige Bedingung für Extremstellen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x+2) \cdot \mathrm{e}^x \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0 .$$

Da zusätzlich $f'(-3) = 3 \cdot \mathrm{e}^{-3} > 0$, $f'(-1) = -\mathrm{e}^{-1} < 0$ und $f'(1) = 3 \cdot \mathrm{e} > 0$ gilt, liegt an der Stelle $x = -2$ ein Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Funktionswerten von f' vor. $x = -2$ ist also eine lokale Maximalstelle von f. An der Stelle $x = 0$ liegt ein Vorzeichenwechsel von negativen zu positiven Funktionswerten von f' vor. $x = 0$ ist also eine lokale Minimalstelle von f.

Teilaufgabe d)

(1) Alle Punkte von g haben die x_2-Koordinate 3, A hat aber die x_2-Koordinate 0.

(2) Aus $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ ergibt sich das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{c} s = 2 + r \\ r = 3 \\ -7 + 5s = r \cdot b \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} s = 2 + 3 = 5 \\ r = 3 \\ -7 + 5 \cdot 5 = 3 \cdot b \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} s = 5 \\ r = 3 \\ b = 6 \end{array} \right| .$$

Teilaufgabe e)

(1) $\mathrm{I} \rightarrow p_2$, $\mathrm{II} \rightarrow p_3$, $\mathrm{III} \rightarrow p_1$.

(2) (i)
$$\begin{aligned} P(X \le 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &\approx 0{,}03 + 0{,}12 + 0{,}23 \\ &= 0{,}38. \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} P(X = 3) &= 1 - P(X \le 2) - P(X \ge 4) \\ &\approx 1 - 0{,}38 - 0{,}35 \\ &= 0{,}27. \end{aligned}$$

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Stellen, an denen die Graphen von f und g gemeinsame Punkte besitzen.	3			
2	(2) zeigt, dass der Graph von g die Tangente an den Graphen von f im Punkt P ist.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**5**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(i) berechnet die Nullstellen von f.	2			
2	(ii) berechnet den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**5**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) zeigt: $f'(x) = x \cdot (x+2) \cdot e^x$.	2			
2	(2) bestimmt die Extremstellen und die Art der Extremstellen der Funktion f.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**5**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) begründet, dass A nicht auf g liegt.	1			
2	(2) ermittelt den Wert von b.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**5**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) ordnet den Histogrammen I bis III die jeweils passende Wahrscheinlichkeit zu.	2			
2	(2) (i) ermittelt näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 2)$.	2			
3	(2) (ii) ermittelt näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(X = 3)$.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**5**			

	Summe insgesamt	**25**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2023

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

a) Gegeben sind die in $I\!R$ definierten Funktionen $p: x \mapsto -x^2 - x + 1$ und $q: x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

Die Graphen von *p* und *q* haben genau einen gemeinsamen Punkt; dieser Punkt liegt auf der *y*-Achse. Für die erste Ableitungsfunktion von *q* gilt $q'(x) = -q(x)$.

(1) *Beschreiben Sie, wie der Graph von q' aus dem Graphen von q erzeugt werden kann.*

(2) *Zeigen Sie, dass die Graphen von p und q in ihrem gemeinsamen Punkt eine gemeinsame Tangente haben, und geben Sie eine Gleichung dieser Tangente an.*

(3) *Geben Sie den Wert des Integrals $\int_0^2 \left(q(x) - p(x)\right) \mathrm{d}x$ an und interpretieren Sie diesen Wert geometrisch.*

(2 + 3 + 3 Punkte)

b) Gegeben ist die in $I\!R$ definierte Funktion $h: x \mapsto \left(x^2 - x - 1\right) \cdot \mathrm{e}^{-x}$.

(1) *Bestimmen Sie die Größe der Fläche, die der Graph von h und die x-Achse einschließen.*

(2) *Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Extrempunkte des Graphen von h sowie den Abstand der Extrempunkte.*

Name: ____________________

(3) Die beiden Extrempunkte T und H des Graphen von h bilden zusammen mit den Punkten P und Q ein Rechteck $TPHQ$, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Dieses Rechteck wird durch den Graphen der Funktion h in zwei Teilstücke zerlegt (siehe *Abbildung 1*).

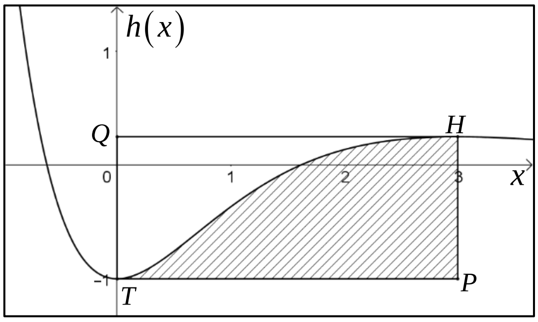


Abbildung 1

Ermitteln Sie, welchen Anteil an der Fläche des Rechtecks die Fläche des schraffierten Teilstücks einnimmt.

(3 + 4 + 6 Punkte)

c) Ein Bewässerungskanal wird durch Öffnen einer Schleuse in Betrieb genommen.

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $w: x \mapsto 4 \cdot \left(x^2 - x - 1\right) \cdot \mathrm{e}^{-x} + 4$ beschreibt für $x \geq 0$ die zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate des Wassers an einer Messstelle. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $w(x)$ die momentane Durchflussrate in Kubikmetern pro Sekunde.

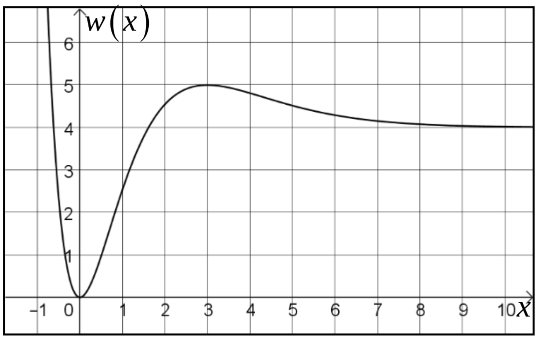


Abbildung 2

Abbildung 2 zeigt den Graphen von w.

(1) Für $x \to \infty$ gilt $w(x) \to c$.

Geben Sie den Wert c sowie die Bedeutung dieses Wertes im Sachzusammenhang an.

(2) *Bestimmen Sie diejenigen Stellen, an denen die momentane Änderungsrate der Funktion w mit der mittleren Änderungsrate der Funktion w über dem Intervall* $[0;10]$ *übereinstimmt.*

(3) *Bestimmen Sie die momentane Durchflussrate für denjenigen Zeitpunkt in den ersten zehn Sekunden nach Beobachtungsbeginn, zu dem sie am stärksten abnimmt.*

Name: ____________________

(4) (i) *Bestimmen Sie die Wassermenge, die in den ersten zwei Sekunden seit Beobachtungsbeginn an der Messstelle vorbeifließt.*

(ii) An der Messstelle fließen in einem Zeitraum von drei Sekunden dreizehn Kubikmeter Wasser vorbei.

Berechnen Sie die dafür infrage kommenden Zeiträume.

(2 + 3 + 3 + 6 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2023

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2023 (Stand: 20.12.2022)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen
     - Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei *p(x)* ein Polynom mit maximal drei Summanden ist
     - Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben
     - Interpretation und Bestimmungen von Parametern der oben genannten Funktionen
     - notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Der Graph von q' kann aus dem Graphen von q durch eine Spiegelung an der x-Achse erzeugt werden.

(2) Der gemeinsame Punkt liegt auf der y-Achse, es muss sich also um $P(0\,|\,1)$ handeln.

Wegen $p'(0) = q'(0) = -1$ liegt in P eine gemeinsame Tangente vor.

Als Gleichung der Tangente ergibt sich damit $t(x) = -x + 1$.

(3) $\int_0^2 (q(x) - p(x))\,\mathrm{d}x = \frac{11}{3} - e^{-2} \approx 3{,}53$.

Die Fläche, die die Graphen von p und q sowie die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ einschließen, hat einen Inhalt von ca. 3,53 Flächeneinheiten.

Teilaufgabe b)

(1) $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(\sqrt{5}-1)}{2} \vee x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Damit ergibt sich als Flächeninhalt $A = \left| \int_{\frac{-(\sqrt{5}-1)}{2}}^{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} h(x)\,\mathrm{d}x \right| \approx 1{,}28\,[\mathrm{FE}]$.

(2) Notwendige Bedingung für Extremstellen: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$.

Da h' nur zwei Nullstellen besitzt, muss es sich um die Extremstellen handeln.

Gesucht ist also der Abstand d der Punkte $T(0\,|\,h(0)) = T(0\,|\,-1)$ und $H(3\,|\,h(3)) = H(3\,|\,5\mathrm{e}^{-3})$.

Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich: $d = \sqrt{3^2 + (5\mathrm{e}^{-3}+1)^2} \approx 3{,}25\,[\mathrm{LE}]$.

(3) Flächeninhalt des Rechtecks *TPHQ*: $3\cdot(5e^{-3}+1)\approx 3{,}75\,[\text{FE}]$.

Schraffiert ist die Fläche zwischen dem Graphen von *h* und der Geraden mit der Gleichung $y=-1$ über dem Intervall $[0;3]$.

Ihr Inhalt beträgt $\int_0^3 \big(h(x)-(-1)\big)\,\mathrm{d}x = 3-12e^{-3}\approx 2{,}40\,[\text{FE}]$.

Damit ergibt sich ein Anteil von $\dfrac{3-12e^{-3}}{3\cdot(5e^{-3}+1)}\approx 0{,}641$, also von ca. $64{,}1\,\%$.

Teilaufgabe c)

(1) Es ist $c=4$, d. h., die momentane Durchflussrate nähert sich langfristig einem Wert von $4\,\dfrac{\text{m}^3}{\text{s}}$.

(2) Die Gleichung $w'(x)=\dfrac{w(10)-w(0)}{10}$ hat die Lösungen x_1 und x_2 mit $x_1\approx 0{,}04$ und $x_2\approx 2{,}51$.

(3) Dem Graphen der Funktion *w* kann man entnehmen, dass die stärkste Abnahme an derjenigen Wendestelle x_w vorliegt, für die $x_w>3$ gilt. Die Analyse des Graphen ergibt als zugehörigen Wendepunkt $W(4{,}3\,|\,4{,}72)$.

Damit beträgt die momentane Durchflussrate zum gesuchten Zeitpunkt ca. $4{,}72\,\dfrac{\text{m}^3}{\text{s}}$.

(4) (i) $\int_0^2 w(x)\,\mathrm{d}x\approx 4{,}75$, d. h., in den ersten zwei Sekunden ab Messbeginn fließen ca. $4{,}75\,\text{m}^3$ Wasser an der Messstelle vorbei.

(ii) Die Gleichung $\int_t^{t+3} w(x)\,\mathrm{d}x=13$ hat für $t\geq 0$ die Lösungen t_1 und t_2 mit $t_1\approx 0{,}8$ und $t_2\approx 4{,}4$.

Damit kommen die Zeiträume von etwa 0,8 s bis 3,8 s nach Beobachtungsbeginn sowie von etwa 4,4 s bis 7,4 s nach Beobachtungsbeginn infrage.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: ________________________________ Kursbezeichnung: ________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK[2]**	**ZK**	**DK**
1	(1) beschreibt, wie der Graph von q' aus dem Graphen von q erzeugt werden kann.	2			
2	(2) zeigt, dass die Graphen von p und q in ihrem gemeinsamen Punkt eine gemeinsame Tangente haben.	2			
3	(2) gibt eine Gleichung dieser Tangente an.	1			
4	(3) gibt den Wert des Integrals $\int_0^2 \left(q(x)-p(x)\right)\mathrm{d}x$ an.	1			
5	(3) interpretiert den Wert des Integrals geometrisch.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**8**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Größe der Fläche, die der Graph von h und die x-Achse einschließen.	3			
2	(2) berechnet die Koordinaten der beiden Extrempunkte des Graphen von h.	2			
3	(2) berechnet den Abstand der Extrempunkte.	2			
4	(3) berechnet den Flächeninhalt des Rechtecks.	2			
5	(3) ermittelt den Flächeninhalt des schraffierten Teilstücks.	2			
6	(3) ermittelt, welchen Anteil an der Fläche des Rechtecks die Fläche des schraffierten Teilstücks einnimmt.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**13**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt den Wert *c* sowie die Bedeutung dieses Wertes im Sachzusammenhang an.	2			
2	(2) bestimmt diejenigen Stellen, an denen die momentane Änderungsrate der Funktion *w* mit der mittleren Änderungsrate der Funktion *w* über dem Intervall $[0;10]$ übereinstimmt.	3			
3	(3) bestimmt die momentane Durchflussrate für denjenigen Zeitpunkt in den ersten zehn Sekunden nach Beobachtungsbeginn, zu dem sie am stärksten abnimmt.	3			
4	(4) bestimmt die Wassermenge, die in den ersten zwei Sekunden seit Beobachtungsbeginn an der Messstelle vorbeifließt.	2			
5	(4) berechnet die infrage kommenden Zeiträume.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**14**			

	Summe insgesamt	**35**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2023

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{27}x^3-\frac{4}{3}x$. Ihr Graph G_f hat den Wendepunkt $(0\,|\,0)$.

a) (1) *Begründen Sie, dass G_f symmetrisch bezüglich seines Wendepunktes ist.*

Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen.

(2) *Bestimmen Sie den Wert des Integrals* $\int_{-b}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$, $b\in\mathbb{R}, b>0$, *und erklären Sie das Ergebnis.*

(3) G_f hat zwei Extrempunkte.

Zeigen Sie, dass einer der beiden ein Tiefpunkt mit der x-Koordinate $\sqrt{12}$ *ist.*

(4) *Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an G_f im Punkt* $P(6\,|\,f(6))$.

[Zur Kontrolle: $t:\ y=\frac{8}{3}x-16$.]

(5) (i) *Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die G_f und t einschließen.*

(ii) Die von G_f und t eingeschlossene Fläche wird durch die y-Achse in zwei Teilflächen unterteilt.

Ermitteln Sie den Anteil der linken Teilfläche an der von G_f und t eingeschlossenen Gesamtfläche.

(3 + 3 + 3 + 3 + 6 Punkte)

Name: ____________________

Aus G_f werden in drei Schritten neue Graphen erzeugt. Die drei Schritte sind:

- Spiegeln an der x-Achse.
- Verschieben um 6 in positive x-Richtung.
- Verschieben um 14 in positive y-Richtung.

Jeder Schritt wird genau einmal ausgeführt, nur die Reihenfolge kann verändert werden. Es wird jeweils nur der neue Graph nach Ausführung aller drei Schritte betrachtet.

b) *Geben Sie an, wie viele verschiedene neue Graphen aus* G_f *auf diese Art erzeugt werden können.*

Begründen Sie Ihre Angabe.

(4 Punkte)

Wird G_f den drei Schritten in der angegebenen Reihenfolge unterzogen, so entsteht der Graph der in der Aufgabe c) betrachteten Funktion g.

c) *Abbildung 1* zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit

$$g(x) = -\frac{1}{27} x \cdot (x-6) \cdot (x-12) + 14\,.$$

In einem Modell, das aus langjährigen Messungen gewonnen wurde, beschreibt g für $0 \le x < 12$ den Verlauf der Tagesdurchschnittstemperatur an einem bestimmten Ort.

Dabei ist x die seit einem bestimmten Tag des Kalenderjahres vergangene Zeit in Monaten und $g(x)$ die Temperatur in °C.

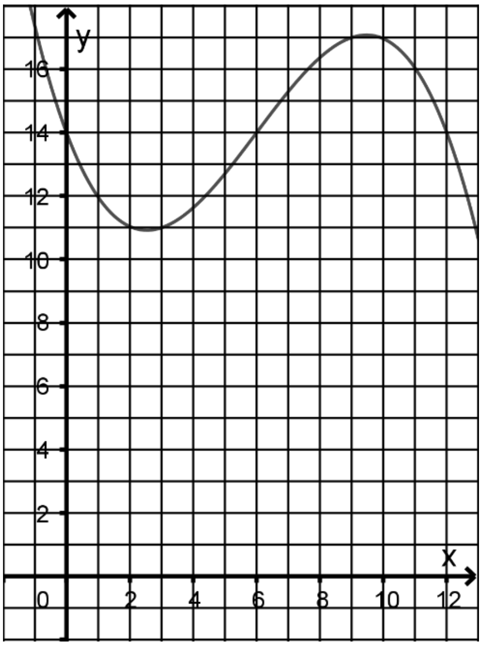


Abbildung 1

(1) *Ermitteln Sie, wie lange die Tagesdurchschnittstemperatur an dem Ort innerhalb eines Jahres über* $15\,°C$ *liegt.*

(2) *Geben Sie die Wendestelle von g an.*

Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle hinsichtlich des Verlaufs der Tagesdurchschnittstemperatur.

Name: ____________________

(3) Die folgenden Rechnungen stellen in Verbindung mit *Abbildung 1* die Lösung einer Aufgabe im Sachzusammenhang dar:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6 - \sqrt{12} \vee x = 6 + \sqrt{12}\,.$$

$$g\left(6 + \sqrt{12}\right) - g\left(6 - \sqrt{12}\right) \approx 6{,}2\,.$$

Geben Sie eine passende Aufgabenstellung an und erläutern Sie den dargestellten Lösungsweg.

(4) Für einen anderen Ort ist der Verlauf der Tagesdurchschnittstemperatur ab einem bestimmten Tag des Kalenderjahres in *Abbildung 2* modellhaft dargestellt.

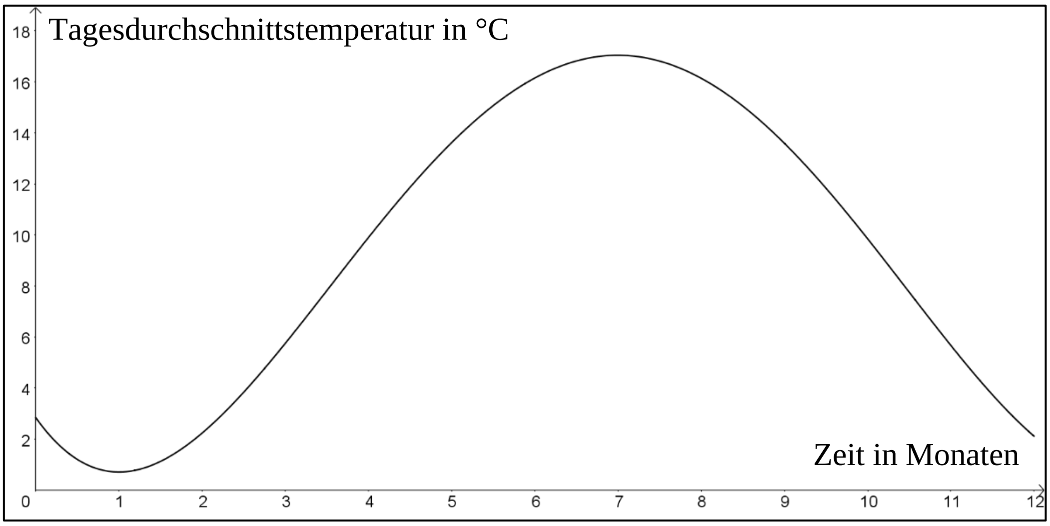


Abbildung 2

(i) *Begründen Sie, dass eine ganzrationale Funktion zur Modellierung des in Abbildung 2 dargestellten Verlaufs mindestens den Grad 4 haben sollte.*

Name: ____________________

Der Verlauf soll mithilfe einer ganzrationalen Funktion *h* mit

$$h(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e, x \in \mathbb{R}, a, b, c, d, e \in \mathbb{R},$$

modelliert werden. Dabei soll *x* die seit dem bestimmten Tag des Kalenderjahres vergangene Zeit in Monaten und $h(x)$ die Tagesdurchschnittstemperatur in °C sein.

(ii) Bei der Modellierung mit der Funktion *h* sollen folgende Bedingungen erfüllt sein:

Die geringste Tagesdurchschnittstemperatur liegt bei $x = 1$ vor, die höchste Tagesdurchschnittstemperatur von $17\,°C$ liegt bei $x = 7$ vor. Bei $x = 10{,}5$ nimmt die Tagesdurchschnittstemperatur mit einer Rate von $-4{,}2\,°C$ pro Monat am schnellsten ab.

Stellen Sie aus diesen Bedingungen ein Gleichungssystem zur Berechnung von a, b, c, d und e auf.

[Eine Berechnung der Werte muss nicht durchgeführt werden.]

(2 + 2 + 4 + 5 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2023

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2023 (Stand: 20.12.2022)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen
     - Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei $p(x)$ ein Polynom mit maximal drei Summanden ist
     - Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben
     - Interpretation und Bestimmungen von Parametern der oben genannten Funktionen
     - notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) G_f ist symmetrisch bezüglich seines Wendepunktes $(0|0)$, da der Funktionsterm von f ganzrational ist und ausschließlich Potenzen von x mit ungeradzahligen Exponenten enthält.

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-6 \lor x=0 \lor x=6$. Damit ergeben sich die Schnittpunkte $(-6|0)$, $(0|0)$ und $(6|0)$ mit den Koordinatenachsen.

(2) $\int_{-b}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Aufgrund der Punktsymmetrie von G_f zum Ursprung existiert zu jedem Flächenstück, das im Intervall $[-b;0]$ zwischen G_f und der x-Achse liegt, ein gleich großes Flächenstück, das im Intervall $[0;b]$ zwischen G_f und der x-Achse liegt und sich auf der entgegengesetzten Seite der x-Achse befindet. Diese orientierten Flächeninhalte heben sich gegeneinander auf.

(3) $f'(x)=\frac{1}{9}x^2-\frac{4}{3}$, $f''(x)=\frac{2}{9}x$.

Es ist $f'\left(\sqrt{12}\right)=0$ und $f''\left(\sqrt{12}\right)=\frac{4\cdot\sqrt{3}}{9}>0$. Folglich ist bestätigt, dass ein Tiefpunkt mit der x-Koordinate $\sqrt{12}$ existiert.

(4) Wegen $f'(6)=\frac{8}{3}$ hat die Gleichung die Form $y=\frac{8}{3}x+c$.

Mit $f(6)=0$ ergibt sich $\frac{8}{3}\cdot 6+c=0 \Leftrightarrow c=-16$, also $t: y=\frac{8}{3}x-16$.

(5) (i) Die Gleichung $f(x) = \frac{8}{3}x - 16$ hat die beiden Lösungen $x = -12$ und $x = 6$.

$$\int_{-12}^{6} \left(f(x) - \left(\frac{8}{3}x - 16 \right) \right) \mathrm{d}x = 324.$$

Der Inhalt der Fläche, die G_f und t einschließen, beträgt 324 FE.

(ii) $$\frac{\int_{-12}^{0} \left(f(x) - \left(\frac{8}{3}x - 16 \right) \right) \mathrm{d}x}{\int_{-12}^{6} \left(f(x) - \left(\frac{8}{3}x - 16 \right) \right) \mathrm{d}x} = \frac{288}{324} = \frac{8}{9}\ [\approx 0{,}889 = 88{,}9\ \%].$$

Der Anteil der linken Teilfläche an der Gesamtfläche beträgt $\frac{8}{9}$.

Teilaufgabe b)

Das Ergebnis der Veränderung ist unabhängig von der Position der Verschiebung in *x*-Richtung. Wesentlich ist nur die Reihenfolge der beiden anderen Schritte. Abhängig davon geht beispielsweise der Wendepunkt $(0|0)$ durch die drei Schritte entweder in $(6|14)$ oder $(6|-14)$ über. Folglich entstehen zwei verschiedene neue Graphen.

Teilaufgabe c)

(1) Die Gleichung $g(x) = 15$ hat drei Lösungen x_1, x_2 und x_3 mit $x_1 \approx -0{,}344$, $x_2 \approx 6{,}762$ und $x_3 \approx 11{,}582$. x_1 liegt außerhalb des Modellierungsbereichs. Unter Verwendung von *Abbildung 1* gilt damit: Zwischen x_2 und x_3 und damit über einen Zeitraum von ca. fünf Monaten liegt die Tagesdurchschnittstemperatur über 15 °C.

(2) Die Wendestelle liegt bei $x = 6$.

Die Wendestelle gibt an, wann die Tagesdurchschnittstemperatur im Modell am stärksten zunimmt.

(3) Eine mögliche Aufgabenstellung könnte lauten: Ermitteln Sie die Differenz zwischen der höchsten und der niedrigsten Tagesdurchschnittstemperatur.

Erläuterung: In der ersten Zeile werden die möglichen Extremstellen von *g* bestimmt. Anhand von *Abbildung 1* wird ersichtlich, dass diese Stellen tatsächlich absolute Extremstellen im Modellierungsbereich sind. In der zweiten Zeile wird die Differenz zwischen den zugehörigen Funktionswerten berechnet.

(4) (i) In *Abbildung 2* sind zwei Wendestellen zu erkennen, was bei einer ganzrationalen Funktion mindestens den Grad 4 erfordert.

(ii) $$\left| \begin{array}{l} h'(1)=0 \\ h(7)=17 \\ h'(7)=0 \\ h'(10{,}5)=-4{,}2 \\ h''(10{,}5)=0 \end{array} \right| .$$

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: ________________________________ Kursbezeichnung: _________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass G_f symmetrisch bezüglich seines Wendepunktes ist.	1			
2	(1) bestimmt die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen.	2			
3	(2) bestimmt den Wert des Integrals.	1			
4	(2) erklärt das Ergebnis.	2			
5	(3) zeigt, dass einer der beiden Extrempunkte ein Tiefpunkt mit der x-Koordinate $\sqrt{12}$ ist.	3			
6	(4) bestimmt eine Gleichung der Tangente t an G_f im Punkt P.	3			
7	(5) (i) bestimmt die Schnittstellen von G_f und t.	1			
8	(5) (i) ermittelt den Inhalt der Fläche, die G_f und t einschließen.	3			
9	(5) (ii) ermittelt den Anteil der linken Teilfläche an der von G_f und t eingeschlossenen Gesamtfläche.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (18) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**18**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	gibt an, wie viele verschiedene neue Graphen aus G_f auf diese Art erzeugt werden können, und begründet seine Angabe.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**4**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt, wie lange die Tagesdurchschnittstemperatur an dem Ort über 15 °C liegt.	2			
2	(2) gibt die Wendestelle an.	1			
3	(2) beschreibt die Bedeutung der Wendestelle hinsichtlich des Verlaufs der Tagesdurchschnittstemperatur.	1			
4	(3) gibt eine passende Aufgabenstellung an.	2			
5	(3) erläutert den dargestellten Lösungsweg.	2			
6	(4) (i) begründet, dass eine ganzrationale Funktion zur Modellierung des in *Abbildung 2* dargestellten Verlaufs mindestens den Grad 4 haben sollte.	2			
7	(4) (ii) stellt aus den Bedingungen ein Gleichungssystem zur Berechnung von a, b, c, d und e auf.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**13**			

	Summe insgesamt	**35**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2023

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Der in *Abbildung 1* dargestellte Körper K mit den Eckpunkten A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3 und B_4 hat folgende Eigenschaften:

$A_1A_2A_3A_4$ ist ein Rechteck in der x_1x_2-Ebene, $B_1B_2B_3B_4$ ist ein Rechteck in einer zur x_1x_2-Ebene parallelen Ebene. Die Vierecke $A_2A_3B_3B_2$ und $A_1A_4B_4B_1$ liegen in Ebenen, die parallel zur x_1x_3-Ebene verlaufen.

Sechs der Eckpunkte sind gegeben durch

$A_1(50|-5|0)$,

$A_2(50|5|0)$,

$A_3\left(\frac{\sqrt{75}}{3}|5|0\right)$,

$A_4\left(\frac{\sqrt{75}}{3}|-5|0\right)$,

$B_2(10|5|30)$,

$B_3\left(\frac{\sqrt{75}}{3}|5|30\right)$.

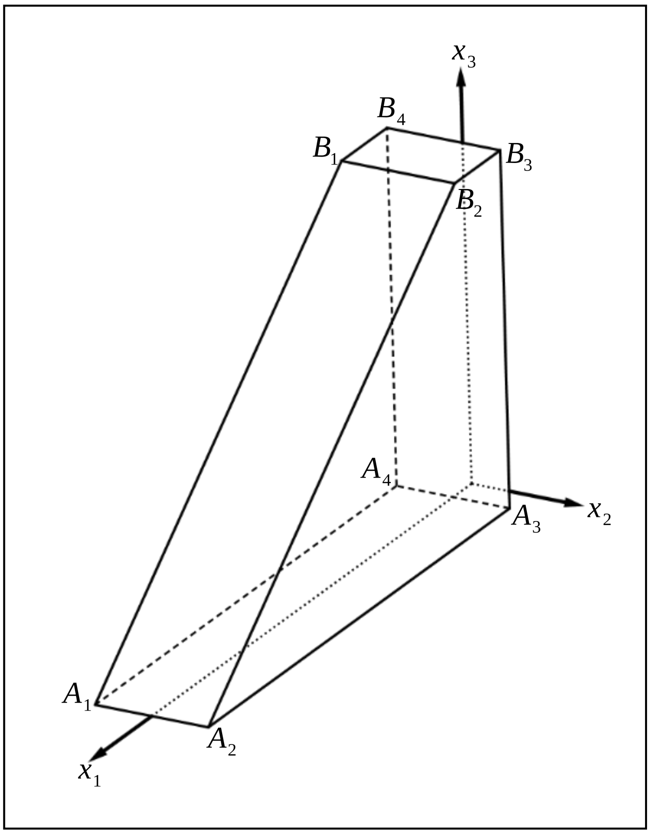


Abbildung 1

Name: ____________________

a) (1) *Geben Sie die Koordinaten des Punktes B_1 an.*

(2) *Begründen Sie, dass die Seitenfläche $A_2A_3B_3B_2$ ein Trapez ist, und berechnen Sie das Volumen des Körpers K.*

(3) *Berechnen Sie den Winkel zwischen $\overline{A_2A_3}$ und $\overline{A_2B_2}$.*

(1 + 4 + 2 Punkte)

Der Körper *K* ist Teil eines mathematischen Modells eines Architekturbüros zur Planung eines neuen Hotels, das aus drei Gebäuden bestehen soll, die jeweils die gleiche Form besitzen (siehe *Abbildung 2*). Durch den Körper *K* wird Gebäude I modelliert, die Gebäude II und III sind gegenüber Gebäude I jeweils um 120° gedreht. Alle drei Gebäude stehen so aneinander, dass sie einen dreieckigen Innenhof bilden. In der Modellierung liegt dieser Innenhof in der x_1x_2-Ebene.

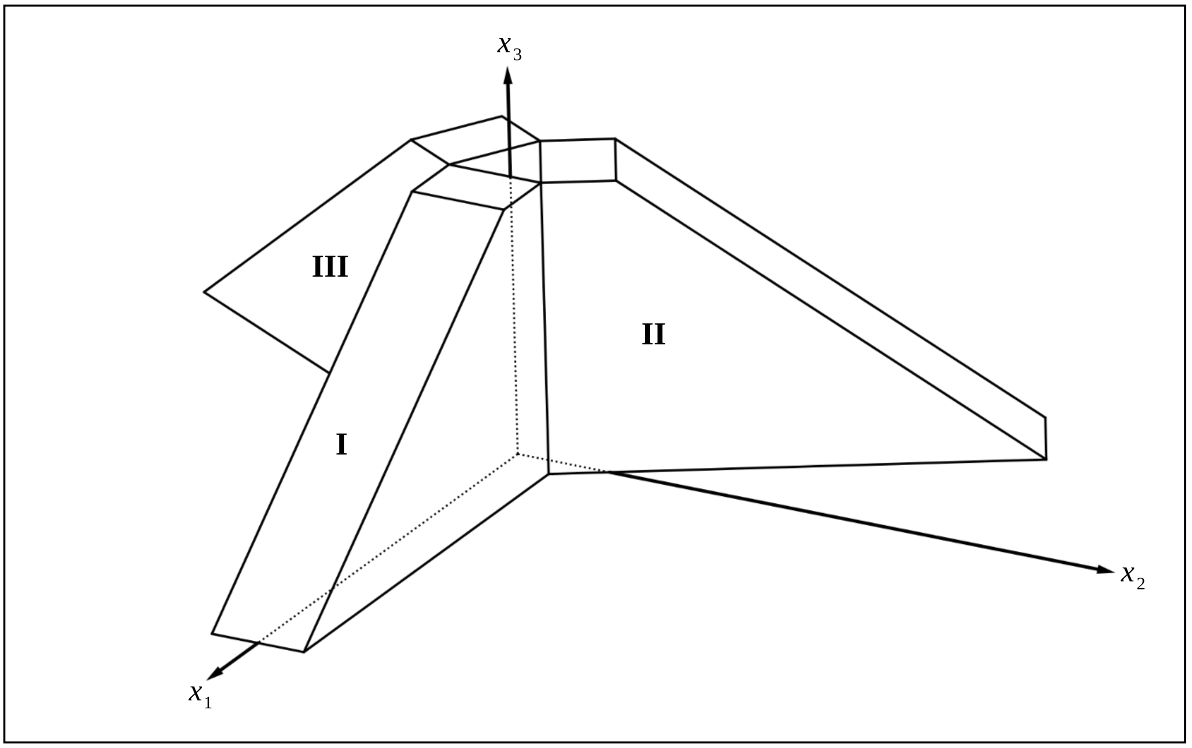


Abbildung 2

Name: ____________________

Die nebenstehende *Abbildung 3* zeigt das Modell des Hotels von oben.

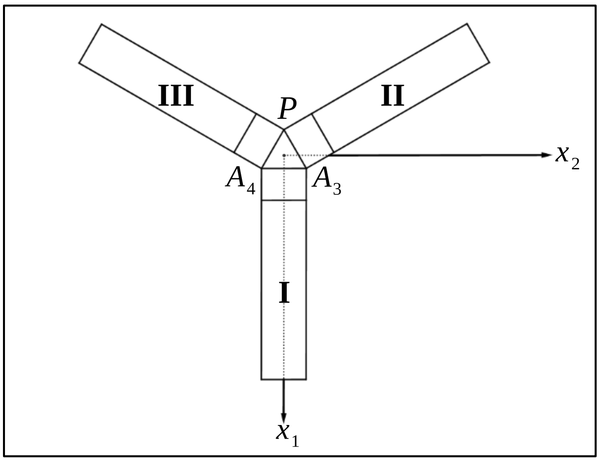


Abbildung 3

b) Der Innenhof A_4A_3P hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks.

(1) *Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes P.*

[Zur Kontrolle: $P\left(-\frac{2\cdot\sqrt{75}}{3}\,|\,0\,|\,0\right) \approx P(-5{,}77\,|\,0\,|\,0)$.]

(2) *Berechnen Sie den Abstand von A_4 zum Koordinatenursprung $O(0\,|\,0\,|\,0)$.*

(4 + 2 Punkte)

Name: ____________________

c) (1) *Begründen Sie, dass es sich bei* $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R}$, *um die Ebene handelt, in der die Fläche* $A_1A_2B_2B_1$ *liegt.*

(2) In der Mitte des Innenhofs steht ein Mast, dessen Spitze im Punkt $S(0\,|\,0\,|\,35)$ liegt. Zu einem bestimmten Zeitpunkt steht die Sonne so, dass die Sonnenstrahlen die Richtung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ besitzen.

Untersuchen Sie, ob der Schatten der Spitze des Masts zu diesem Zeitpunkt innerhalb der Fläche $A_1A_2B_2B_1$ *liegt.*

(3 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2023

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2023 (Stand: 20.12.2022)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen
   - Skalarprodukt

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

---

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $B_1(10\,|\,-5\,|\,30)$.

(2) Die Seitenfläche $A_2A_3B_3B_2$ ist ein Trapez mit $\overline{A_2A_3} \parallel \overline{B_2B_3}$, wie anhand der x_2- und x_3-Koordinaten der Punkte ablesbar ist.

Es ist $\left|\overline{A_2A_3}\right| = 50 - \frac{\sqrt{75}}{3} \approx 47{,}11$, $\left|\overline{B_2B_3}\right| = 10 - \frac{\sqrt{75}}{3} \approx 7{,}11$, $\left|\overline{A_3B_3}\right| = 30$ und $\left|\overline{A_1A_2}\right| = 10$.

$$V_{\text{Körper}} = A_{\text{Trapez}} \cdot h = \frac{\left(\left|\overline{A_2A_3}\right| + \left|\overline{B_2B_3}\right|\right) \cdot \left|\overline{A_3B_3}\right|}{2} \cdot \left|\overline{A_1A_2}\right| \approx 8134 \text{ [VE]}.$$

(3) $$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{A_2A_3} \cdot \overrightarrow{A_2B_2}}{\left|\overrightarrow{A_2A_3}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_2B_2}\right|} \approx \frac{\begin{pmatrix} -47{,}11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -47{,}11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}\right|} \approx \frac{1884{,}4}{2355{,}5} \approx 0{,}8 \Rightarrow \alpha \approx 36{,}87^\circ.$$

Teilaufgabe b)

(1) Aus Symmetriegründen muss der Punkt P auf der x_1-Achse liegen.

Die Seiten des Dreiecks A_4A_3P besitzen eine Länge von $\left|\overline{A_3A_4}\right| = 10$ [LE].

Mit dem Satz von Pythagoras ergibt sich daraus für die Höhe h_D des Dreiecks A_4A_3P:

$h_D = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5 \cdot \sqrt{3}$ [LE].

Für die x_1-Koordinate p_1 von P gilt somit: $p_1 = \frac{\sqrt{75}}{3} - \sqrt{75} = -\frac{2 \cdot \sqrt{75}}{3}$.

Damit gilt: $P\left(-\frac{2 \cdot \sqrt{75}}{3}\,|\,0\,|\,0\right) \approx P(-5{,}77\,|\,0\,|\,0)$.

(2) $\left|\overrightarrow{OA_4}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{75}}{3}\right)^2 + 5^2} = \frac{2\cdot\sqrt{75}}{3} \approx 5{,}77\,[\text{LE}]$.

Teilaufgabe c)

(1) $E: \vec{x} = \overrightarrow{OA_1} + r\cdot\overrightarrow{A_1A_2} + s\cdot\overrightarrow{A_1B_2}$, d. h., E enthält die Punkte A_1, A_2 und B_2 und damit auch B_1.

(2) Gerade h durch den Punkt S mit dem Richtungsvektor $\vec{r}$:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix} + q\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, q \in \mathbb{R}.$$

Berechnung des Schnittpunkts Q von E und h:

$$\begin{pmatrix} 50 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -40 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix} + q\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} r = -\frac{3}{5} \\ s = \frac{11}{10} \\ q = 1 \end{matrix}.$$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 33 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(6\,|\,0\,|\,33).$$

Die x_3-Koordinate von Q ist größer als 30. Der Schatten der Spitze des Masts liegt also nicht innerhalb der Fläche $A_1A_2B_2B_1$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: ________________________________ Kursbezeichnung: _________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die Koordinaten von B_1 an.	1			
2	(2) begründet, dass die Seitenfläche $A_2A_3B_3B_2$ ein Trapez ist.	2			
3	(2) berechnet das Volumen des Körpers K.	2			
4	(3) berechnet den Winkel zwischen $\overline{A_2A_3}$ und $\overline{A_2B_2}$.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**7**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt rechnerisch die Koordinaten des Punktes P.	4			
2	(2) berechnet den Abstand von A_4 zum Koordinatenursprung.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**6**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass es sich bei E um die Ebene handelt, in der die Fläche $A_1A_2B_2B_1$ liegt.	3			
2	(2) untersucht, ob der Schatten der Spitze des Masts innerhalb der Fläche $A_1A_2B_2B_1$ liegt.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**7**			

	Summe insgesamt	**20**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2023

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Ein Team eines Instituts für Tourismus führte bei 10 000 Personen aus einer Region, die im Jahr 2019 Urlaub gemacht hatten, eine repräsentative Befragung durch.

Im Folgenden beziehen sich alle Aussagen und Fragestellungen auf diese Region.

Von den Befragten wurde für jede Urlaubsreise ein Fragebogen ausgefüllt, mit dem u. a. ermittelt wurde, mit welchen Verkehrsmitteln sie zu welchen Reisezielen angereist waren.

Dabei ergab sich folgendes Bild: 26 % der Urlaubsreisen gingen ins Inland (kurz: Inlandsreisen), davon wurde in 16 % der Fälle die Bahn zur Anreise genutzt. Unter den Urlaubsreisen ins Ausland (kurz: Auslandsreisen) erfolgte die Anreise in 10 % der Fälle mit der Bahn.

Diese Prozentsätze werden im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten für die entsprechenden Ereignisse verwendet.

a) (1) *Stellen Sie die Situation in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.*

(2) Bei einer Urlaubsreise im Jahr 2019 wurde die Bahn zur Anreise genutzt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine Inlandsreise handelte.

(3 + 2 Punkte)

b) Die Befragung soll ergänzt werden. Dazu werden 20 der Fragebögen zu den Urlaubsreisen zufällig ausgewählt, um mit den Befragten Interviews zu führen.

Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Inlandsreisen unter den 20 Urlaubsreisen an.

(1) *Erläutern Sie, warum für* $0 \le k \le 20$ *zur Berechnung von* $P(X = k)$ *in guter Näherung eine Binomialverteilung verwendet werden kann.*

Name: ____________________

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von den* 20 *Urlaubsreisen mindestens sechs Inlandsreisen sind.*

(3) *Bestimmen Sie für die* 20 *Urlaubsreisen die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Inlandsreisen in der* 2σ *-Umgebung um den Erwartungswert von X liegt.*

(2 + 2 + 4 Punkte)

c) *Bestimmen Sie, wie viele Fragebögen mindestens ausgewählt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens* 99 % *auf mindestens fünf der Fragebögen angegeben wird, dass eine Auslandsreise erfolgte.*

(3 Punkte)

d) Das Team des Instituts für Tourismus hat den Eindruck, dass sich in der Region der Anteil der Inlandsreisen im Jahr 2022 im Vergleich zum Jahr 2019 erhöht hat.

Um dies zu untersuchen, erfasst das Team für 100 Reisen aus dem Jahr 2022, ob es sich um eine Inlands- oder Auslandsreise gehandelt hat.

Bei 34 oder mehr Inlandsreisen geht das Team davon aus, dass sich der Anteil der Inlandsreisen erhöht hat.

(1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Team fälschlicherweise davon ausgeht, dass sich der Anteil der Inlandsreisen erhöht hat, obwohl der Anteil unverändert geblieben ist.*

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Team von einem unveränderten Anteil von Inlandsreisen ausgeht, wenn dieser Anteil tatsächlich aber auf* 30 % *gestiegen ist.*

(2 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2023

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2023 (Stand: 20.12.2022)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

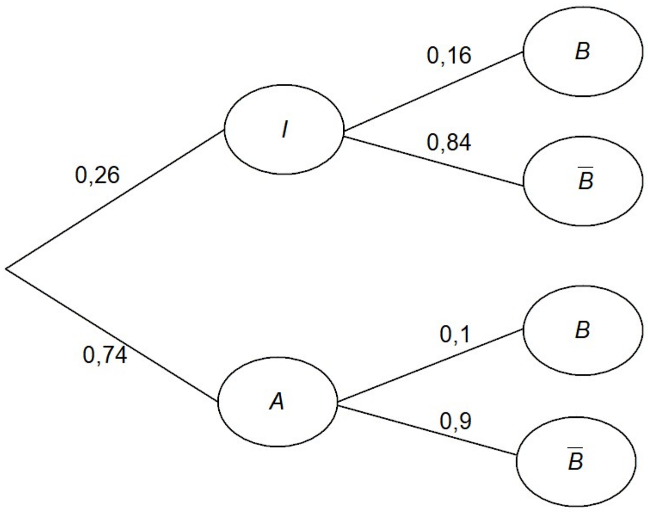
Teilaufgabe a)

(1) I: Inlandsreisen.

A: Auslandsreisen.

B: Urlaubsreisen, bei denen die Bahn zur Anreise genutzt wurde.

$\overline{B}$: Urlaubsreisen, bei denen die Bahn nicht zur Anreise genutzt wurde.



(2) $P_B(I) = \dfrac{P(B \cap I)}{P(B)} = \dfrac{0{,}26 \cdot 0{,}16}{0{,}26 \cdot 0{,}16 + 0{,}74 \cdot 0{,}1} \approx 0{,}3599$.

Teilaufgabe b)

(1) Da es nur die Unterscheidung „Inlandsreise“ und „Auslandreise“ gibt und aufgrund des im Vergleich zur Grundgesamtheit kleinen Stichprobenumfangs die Wahrscheinlichkeit für eine Inlandsreise nahezu konstant ist, kann für $0 \le k \le 20$ zur Berechnung von $P(X = k)$ in guter Näherung eine Binomialverteilung verwendet werden.

(2) $P_{20;0,26}(X \ge 6) \approx 0{,}4235$.

(3) Es ist $\mu = 20 \cdot 0{,}26 = 5{,}2$ und $\sigma = \sqrt{20 \cdot 0{,}26 \cdot 0{,}74} \approx 1{,}9616$.

$P_{20;0,26}(5{,}2 - 2 \cdot \sigma \le X \le 5{,}2 + 2 \cdot \sigma)\left[= P_{20;0,26}(2 \le X \le 9)\right] \approx 0{,}9622$.

Teilaufgabe c)

Die Anzahl der Fragebögen, auf denen angegeben wird, dass eine Auslandsreise erfolgte, wird als binomialverteilt angenommen mit unbekanntem n und $p = 0{,}74$.

Da $P(Y \ge 5) \approx 0{,}9761$ für $n = 10$ und $P(Y \ge 5) \approx 0{,}9905$ für $n = 11$, müssen mindestens elf Fragebögen ausgewählt werden.

Teilaufgabe d)

(1) Mit $n = 100$ und $p = 0{,}26$: $P(Z \ge 34) \approx 0{,}0465$.

(2) Mit $n = 100$ und $p = 0{,}3$: $P(Z \le 33) \approx 0{,}7793$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: ________________________________ Kursbezeichnung: _________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) stellt die Situation in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.	3			
2	(2) berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine Inlandsreise handelte.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**5**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) erläutert, warum für $0 \le k \le 20$ zur Berechnung von $P(X = k)$ in guter Näherung eine Binomialverteilung verwendet werden kann.	2			
2	(2) bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass von den 20 Urlaubsreisen mindestens sechs Inlandsreisen sind.	2			
3	(3) bestimmt für die 20 Urlaubsreisen die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Inlandsreisen in der 2σ-Umgebung um den Erwartungswert der Anzahl der Inlandsreisen liegt.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**8**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	bestimmt, wie viele Fragebögen mindestens ausgewählt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % auf mindestens fünf der Fragebögen angegeben wird, dass eine Auslandsreise erfolgte.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**3**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass das Team fälschlicherweise davon ausgeht, dass sich der Anteil der Inlandsreisen erhöht hat, obwohl der Anteil unverändert geblieben ist.	2			
2	(2) bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass das Team von einem unveränderten Anteil von Inlandsreisen ausgeht, wenn dieser Anteil tatsächlich aber auf 30 % gestiegen ist.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**4**			

	Summe insgesamt	**20**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**25**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**35**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**20**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: dritte Aufgabe	**20**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 40
mangelhaft plus	3	39 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2023

Mathematik, Grundkurs
weitere (kurze) Analysisaufgabe mit 20 BE

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Abbildung 1 zeigt schematisch die achsensymmetrische Seitenansicht einer Hängebrücke. Die beiden vertikalen Pfeiler haben einen Abstand von 400 m. Die Wasseroberfläche liegt 20 m unterhalb der Fahrbahn.

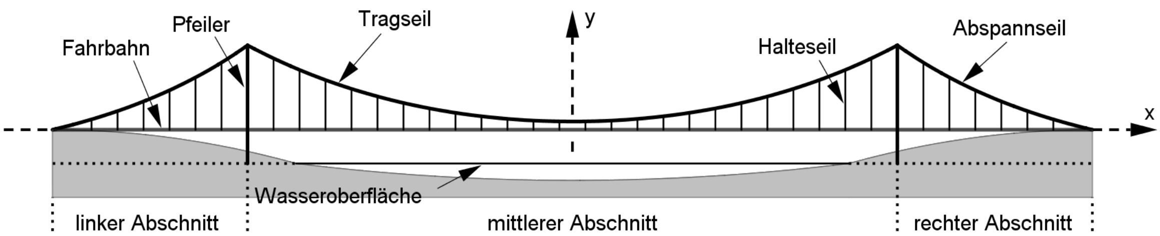


Abbildung 1

Die beiden Pfeiler gliedern die Brücke in einen linken, einen mittleren und einen rechten Abschnitt. Am oberen Ende jedes Pfeilers ist sowohl das Tragseil des mittleren Abschnitts als auch das Abspannseil des linken bzw. rechten Abschnitts befestigt. Die beiden Abspannseile sind am jeweiligen Ende der Fahrbahn verankert.

Im verwendeten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit 10 m in der Realität. In der Seitenansicht der Brücke verläuft die x-Achse entlang der horizontal verlaufenden Fahrbahn, die y-Achse entlang der Symmetrieachse.

Name: ____________________

a) Im rechten Abschnitt der Brücke wird der Verlauf des Abspannseils modellhaft durch den Funktionsterm

$$r(x)=\frac{253}{100}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{11}\cdot(32-x)}-\frac{253}{100}$$

beschrieben.

(1) *Zeigen Sie, dass die Fahrbahn der Brücke insgesamt* $640\,\mathrm{m}$ *lang ist.*

(2) Auch im linken Abschnitt der Brücke kann der Verlauf des Abspannseils im Modell durch einen Funktionsterm beschrieben werden.

Geben Sie einen passenden Term $l(x)$ *sowie das Intervall an, in dem dieser Term das Abspannseil darstellt.*

(3) *Berechnen Sie die Höhe der Pfeiler über der Wasseroberfläche.*

(4) *Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Steigung, mit der das rechte Abspannseil auf den zugehörigen Pfeiler trifft, zwischen* $-0{,}7$ *und* $0{,}7$ *liegt.*

(5) In der Seitenansicht begrenzen der rechte Pfeiler, das zugehörige Abspannseil und die Fahrbahn ein Flächenstück.

Ermitteln Sie dessen Inhalt in der Realität.

(3 + 3 + 2 + 3 + 3 Punkte)

Name: ____________________

b) Im Folgenden wird der mittlere Abschnitt der Brücke betrachtet. Der Verlauf des Tragseils wird modellhaft durch den Funktionsterm

$$s(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^6 \cdot \left(x^4 + 2560x^2\right) + \frac{125}{256}$$

beschrieben.

(1) *Begründen Sie, dass der Term von s damit in Einklang steht, dass die Seitenansicht der Brücke achsensymmetrisch ist.*

(2) Zwei der Halteseile im mittleren Brückenabschnitt haben eine Länge von jeweils $\frac{643061}{64000}\,\text{m}\ [\approx 10{,}00\,\text{m}]$.

Berechnen Sie die Stellen in der Realität, an denen sich diese Halteseile befinden.

(3) Zwei Punkte des Tragseils in der rechten Hälfte des mittleren Abschnitts haben einen horizontalen Abstand von 40 m und einen Höhenunterschied von 5 m.

Geben Sie eine Gleichung an, deren Lösung die x-Koordinate des höher liegenden Punkts im Modell ist.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2023

Mathematik, Grundkurs
weitere (kurze) Analysisaufgabe mit 20 BE

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2023 (Stand: 20.12.2022)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     – Untersuchung von ganzrationalen Funktionen
     – Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei *p(x)* ein Polynom mit maximal drei Summanden ist
     – Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben
     – Interpretation und Bestimmungen von Parametern der oben genannten Funktionen
     – notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) Es gilt $r(x)=0 \Leftrightarrow x=32$.

Mit $32\cdot 2\cdot 10=640$ [Berücksichtigung der Symmetrie der Brücke und des Modellierungsmaßstabs] folgt, dass die Länge der Brücke 640 m beträgt.

(2) $l(x)=r(-x)\left[=\frac{253}{100}\cdot e^{\frac{1}{11}(32+x)}-\frac{253}{100}\right]$ für $-32\le x\le -20$.

(3) Mit $r(20)\approx 5{,}00$ folgt, dass die Höhe der Pfeiler über der Wasseroberfläche ungefähr $5\cdot 10\text{ m}+20\text{ m}=70\text{ m}$ beträgt.

(4) Die Steigung an der Stelle 20 beträgt: $r'(20)=-\frac{23}{100}\cdot \mathrm{e}^{\frac{12}{11}}\left[\approx -0{,}68\right]$.

Der Wert liegt zwischen $-0{,}7$ und $0{,}7$.

(5) Die Fläche wird im Modell durch $x=20$ (Position des Pfeilers) und die Nullstelle bei $x=32$ (Ende des Abspannseils) begrenzt.

Es ist $\int_{20}^{32} r(x)\,\mathrm{d}x=\frac{253}{100}\cdot\left(11\cdot \mathrm{e}^{\frac{12}{11}}-23\right)\approx 24{,}66$. Der Flächeninhalt beträgt etwa 2466 m^2.

Teilaufgabe b)

(1) Die Funktion s ist eine ganzrationale Funktion, der Funktionsterm enthält nur Potenzen von x mit geraden Exponenten.

(2) Es gilt: $s(x) = \frac{643\,061}{640\,000} \Leftrightarrow x = -7{,}2 \vee x = 7{,}2$.

Die Halteseile befinden sich in der Realität jeweils 72 m links bzw. rechts der Brückenmitte.

(3) $s(x) - s(x-4) = 0{,}5$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: ________________________________ Kursbezeichnung: _________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK[2]	ZK	DK
1	(1) zeigt, dass die Fahrbahn der Brücke insgesamt 640 m lang ist.	3			
2	(2) gibt einen passenden Term $l(x)$ sowie das Intervall an, in dem dieser Term das Abspannseil darstellt.	3			
3	(3) berechnet die Höhe der Pfeiler über der Wasseroberfläche.	2			
4	(4) untersucht rechnerisch, ob die Steigung, mit der das rechte Abspannseil auf den zugehörigen Pfeiler trifft, zwischen $-0{,}7$ und 0,7 liegt.	3			
5	(5) ermittelt den Inhalt des Flächenstücks in der Realität.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**14**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) begründet, dass der Term von *s* damit in Einklang steht, dass die Seitenansicht der Brücke achsensymmetrisch ist.	2			
2	(2) berechnet die Stellen in der Realität, an denen sich diese Halteseile befinden.	2			
3	(3) gibt eine Gleichung an, deren Lösung die *x*-Koordinate des höher liegenden Punkts im Modell ist.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**6**			

	Summe insgesamt	**20**			

---
[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**25**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**35**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**20**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: dritte Aufgabe	**20**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 40
mangelhaft plus	3	39 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0