

Agenda - Grafos

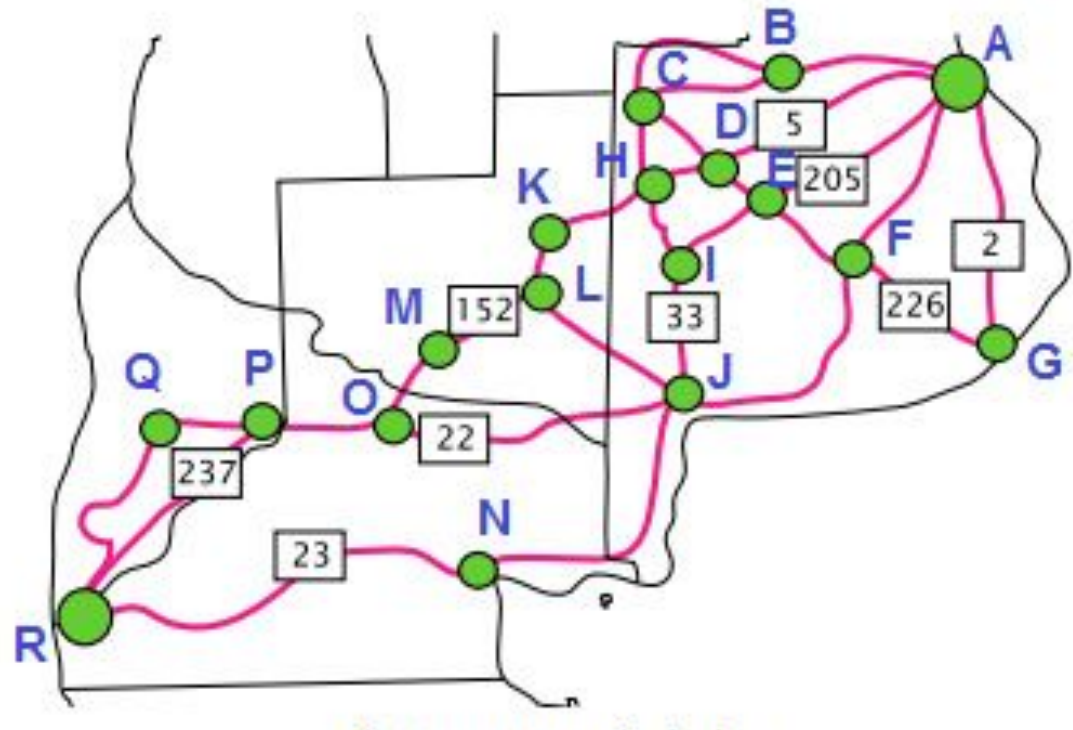
1. Ejemplos y terminología
2. Conectividad
3. Representaciones

Agenda - Grafos

1. Ejemplos y terminología
2. Conectividad
3. Representaciones

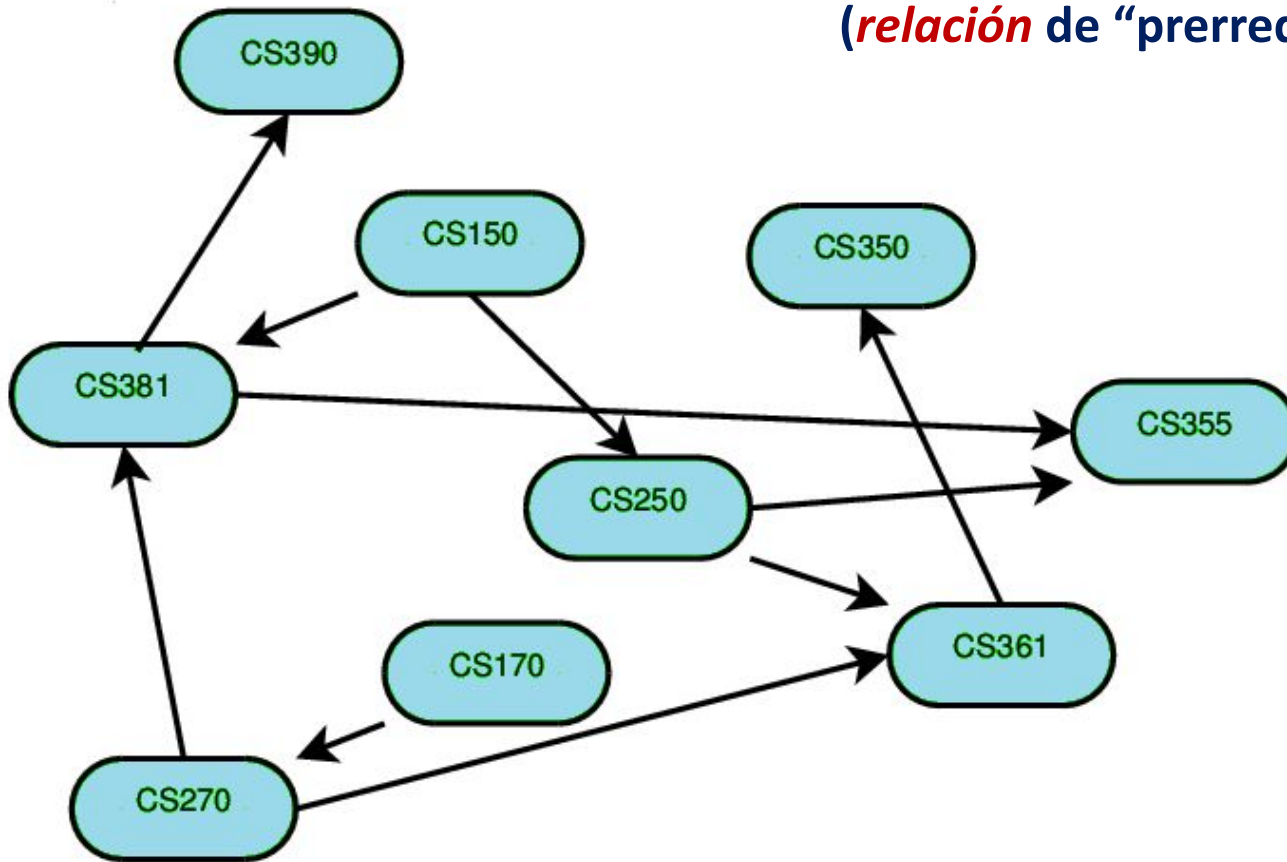
Ejemplo 1: Mapa de ciudades

Ciudades conectadas por
Rutas



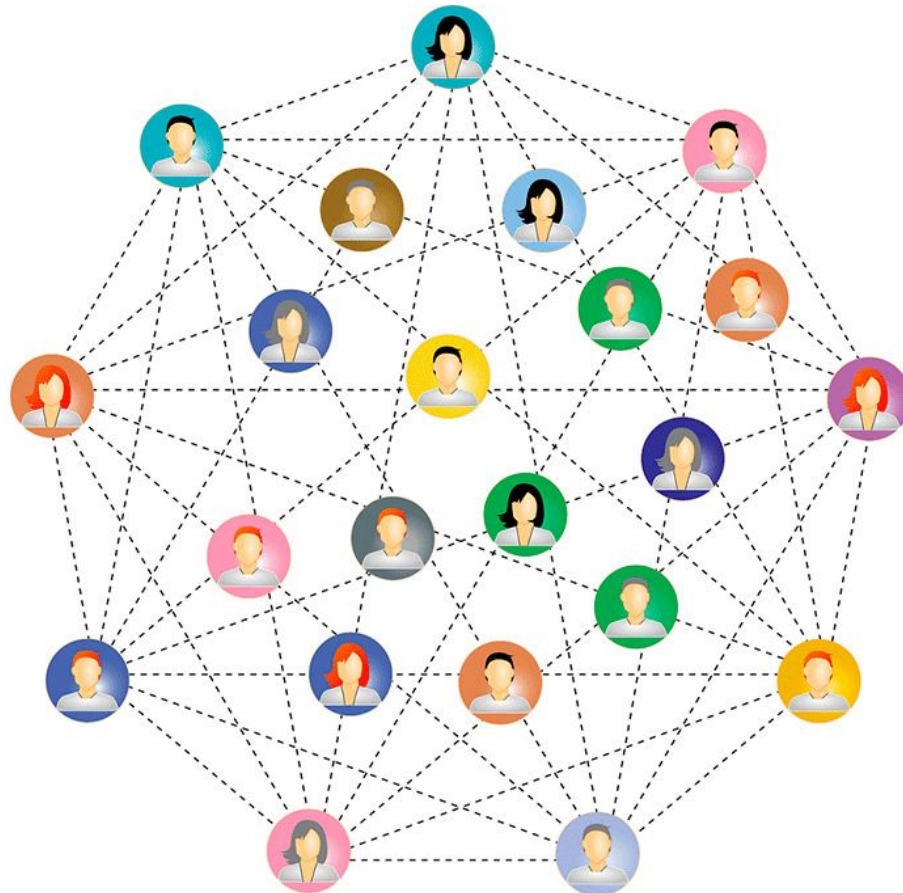
Ejemplo 2: Prerrequisitos de un curso

Cursos conectados por sus correlativas
(**relación** de “prerrequisito”)

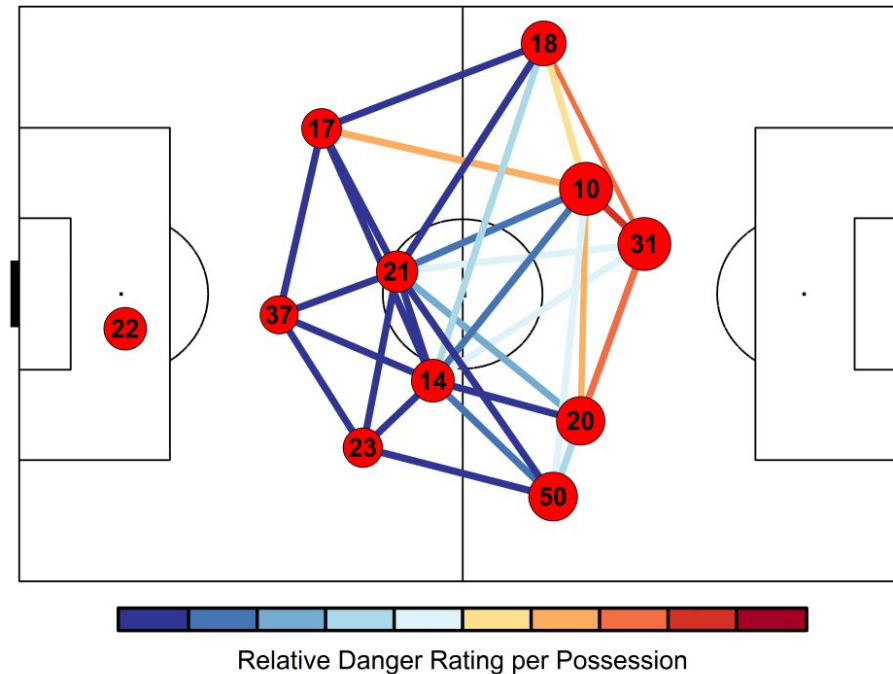


Ejemplo 3: Redes sociales

Personas conectadas
en una red social



Ejemplo 4: Red de pases de un partido de fútbol



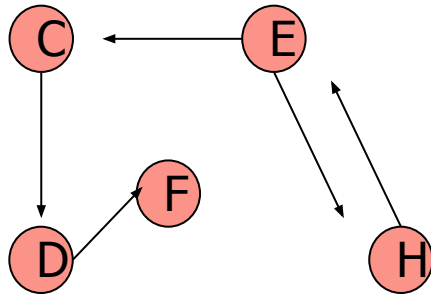
Red de pases para el Barcelona y el AC Milan de un partido de Liga de Campeones.
Las flechas más oscuras y gruesas indican más pases entre cada jugador.

Terminología

- *Grafo* → modelo para representar relaciones entre elementos de un conjunto.
- **Grafo**: (V, E) , V es un conjunto de vértices o nodos, con una relación entre ellos; E es un conjunto de pares (u, v) , $u, v \in V$, llamados aristas o arcos.
- **Grafo dirigido**: la relación sobre V no es simétrica. Arista \equiv par ordenado (u, v) . (Ejemplo 3)
- **Grafo no dirigido**: la relación sobre V es simétrica. Arista \equiv par no ordenado $\{u, v\}$, $u, v \in V$ y $u \neq v$. (Ejemplos 1 y 2)

Terminología (cont. 1)

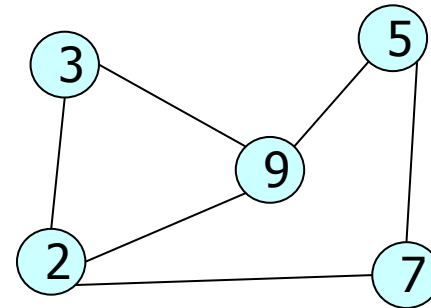
Ejemplos



Grafo dirigido $G(V,E)$.

$$V = \{C, D, E, F, H\}$$

$$E = \{(C, D), (D, F), (E, C), (E, H), (H, E)\}$$



Grafo no dirigido $G(V,E)$.

$$V = \{2, 3, 5, 7, 9\}$$

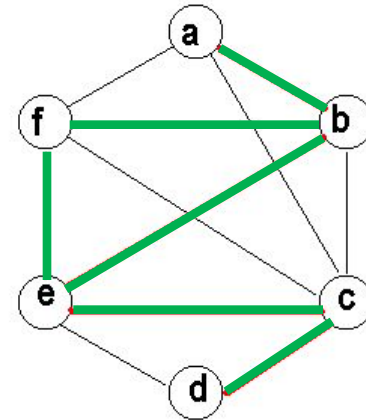
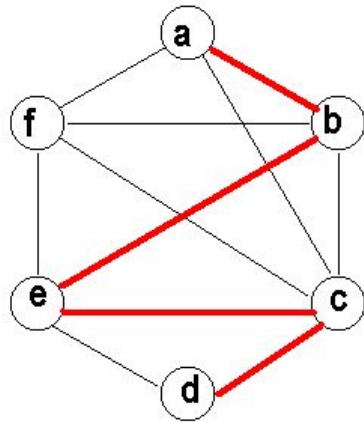
$$E = \{\{2, 3\}, \{2, 7\}, \{2, 9\}, \{3, 9\}, \{5, 7\}, \{5, 9\}\}$$

Terminología (cont. 2)

- v es **adyacente** a u si existe una arista $(u,v) \in E$.
 - en un grafo no dirigido, $(u,v) \in E$ **incide** en los nodos u, v .
 - en un grafo dirigido, $(u,v) \in E$ **incide** en v , y **parte** de u .
- En grafos no dirigidos:
 - El **grado** de un nodo: número de arcos que inciden en él.
- En grafos dirigidos:
 - existen el grado de salida (**grado_out**) y el grado de entrada (**grado_in**).
 - el **grado_out** es el número de arcos que parten de él y
 - el **grado_in** es el número de arcos que inciden en él.
 - El **grado** del vértice será la suma de los grados de entrada y de salida.
- **Grado de un grafo**: máximo grado de sus vértices.

Terminología (cont. 3)

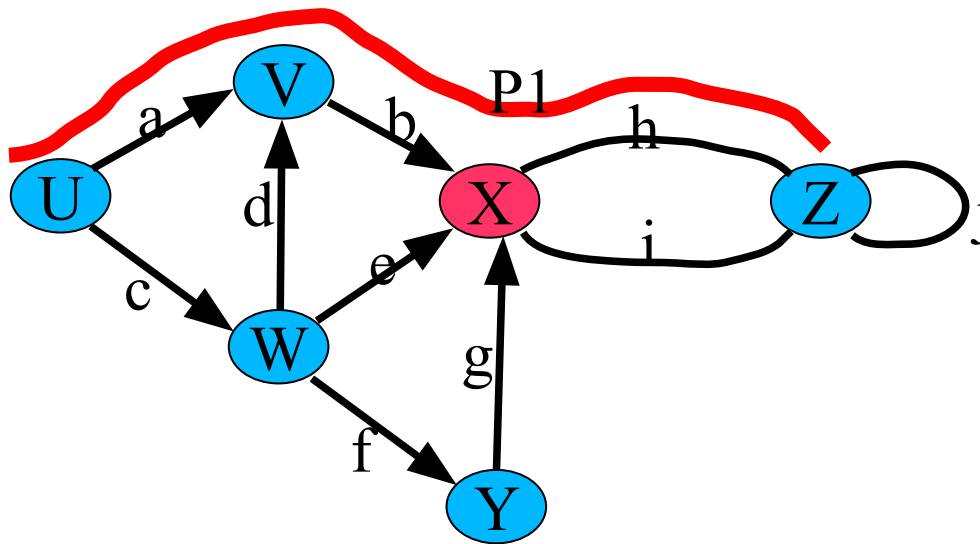
- ▣ **Camino** desde $u \in V$ a $v \in V$: secuencia v_1, v_2, \dots, v_k tal que $u=v_1$, $v=v_k$ y $(v_{i-1}, v_i) \in E$, para $i = 2, \dots, k$.
Ej: camino desde **a** a **d** $\rightarrow \langle a, b, e, c, d \rangle$.



- ▣ **Longitud de un camino**: número de arcos del camino.
Ejs: long. del camino desde **a** a **d** $\rightarrow \langle a, b, e, c, d \rangle$ es 4. (a)
long. del camino desde **a** a **d** $\rightarrow \langle a, b, e, f, b, e, c, d \rangle$ es 7. (b)

Terminología (cont. 4)

- **Camino simple:** camino en el que todos sus vértices, excepto, tal vez, el primero y el último, son distintos. *P1* es un camino simple desde *U* a *Z*.

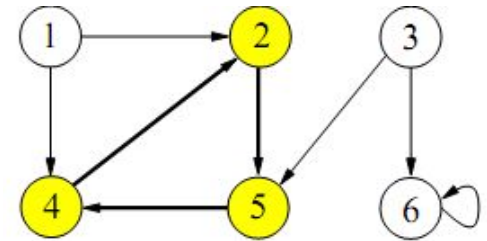


Ejemplos anteriores: (a) es camino simple , (b) no lo es.

Terminología (cont. 5)

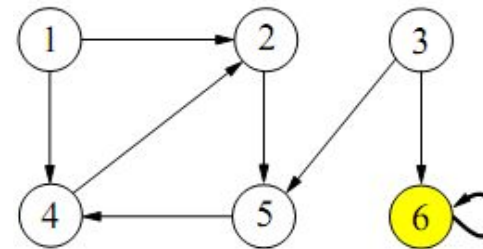
□ **Ciclo:** camino desde v_1, v_2, \dots, v_k tal que $v_1 = v_k$

Ej: $\langle 2, 5, 4, 2 \rangle$ es un ciclo de longitud 3.

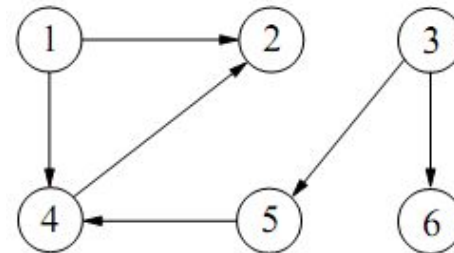


El ciclo es simple si el camino es simple.

□ **Bucle:** ciclo de longitud 1.

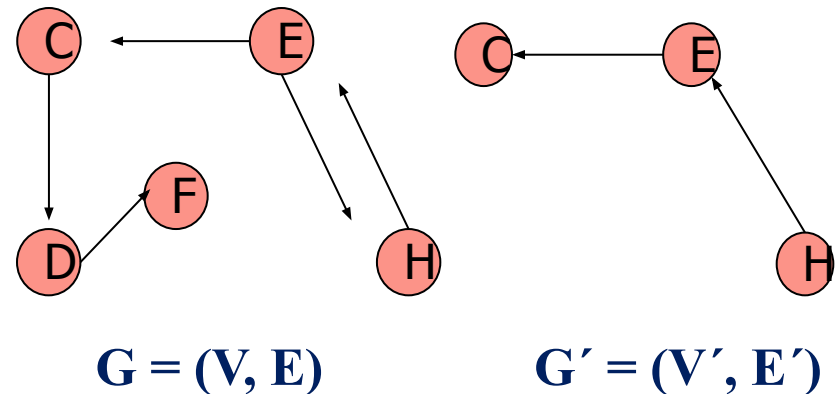
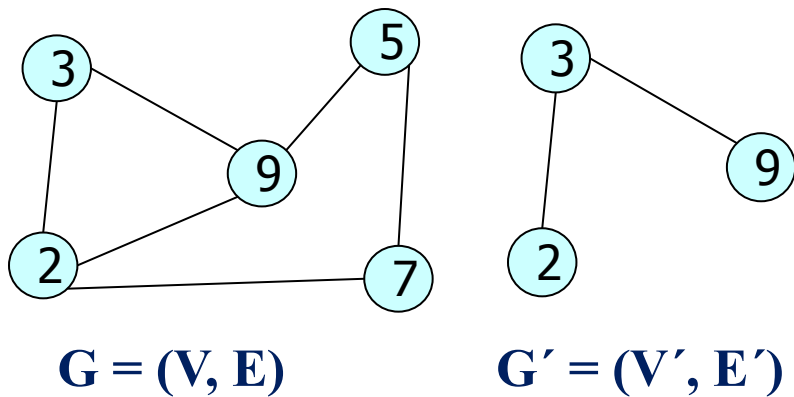


□ **Grafo acíclico:** grafo sin ciclos.



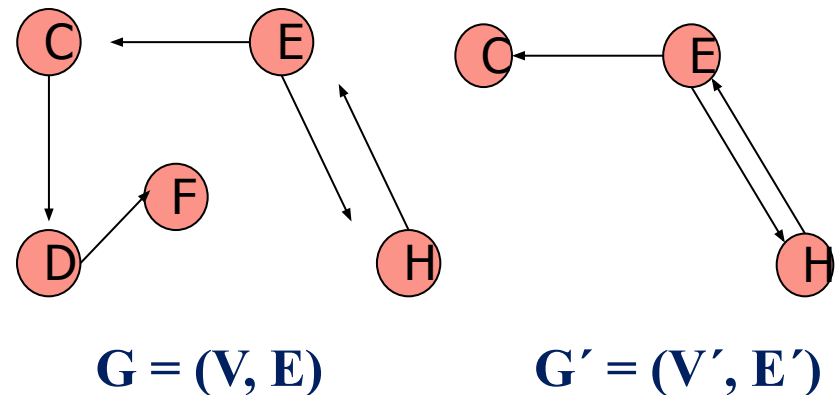
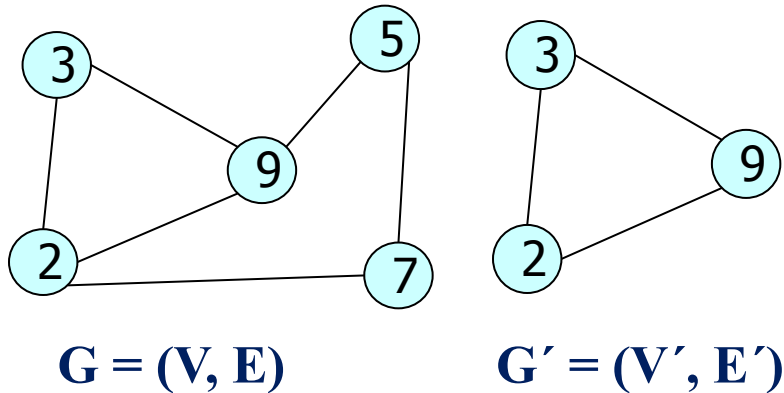
Terminología (cont. 6)

□ Dado un grafo $G=(V, E)$, se dice que $G'=(V', E')$ es un **subgrafo** de G , si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.



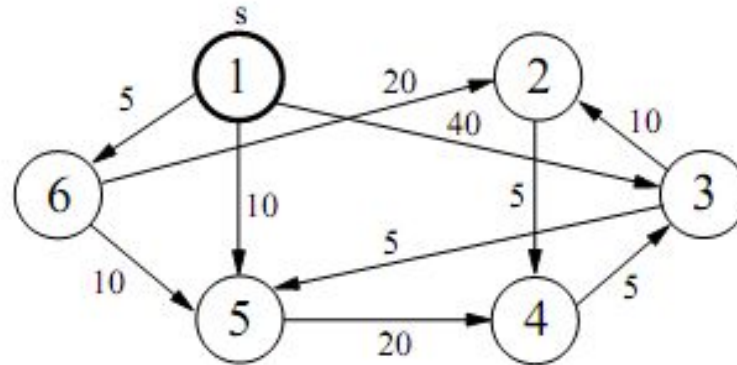
Terminología (cont. 7)

□ *Un subgrafo inducido por $V' \subseteq V$: $G' = (V', E')$ tal que $E' = \{(u, v) \in E \mid u, v \in V'\}$.*



Terminología (cont. 8)

□ *Un grafo ponderado, pesado o con costos: cada arco o arista tiene asociado un valor o etiqueta. (Ejemplos 2 y 4)*

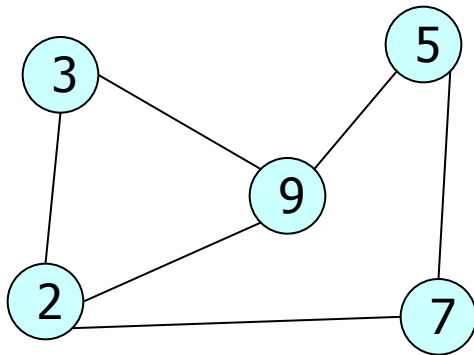


Agenda - Grafos

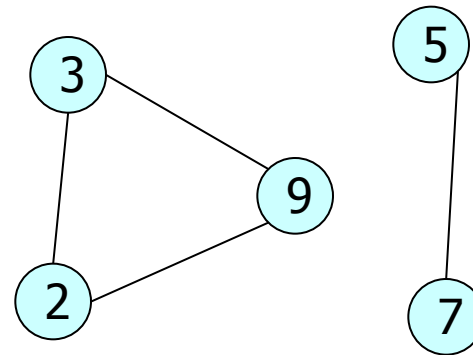
1. Ejemplos y terminología
2. Conectividad
3. Representaciones

Conectividad en grafos no dirigidos

□ Un grafo no dirigido es **conexo** si hay un camino entre cada par de vértices.



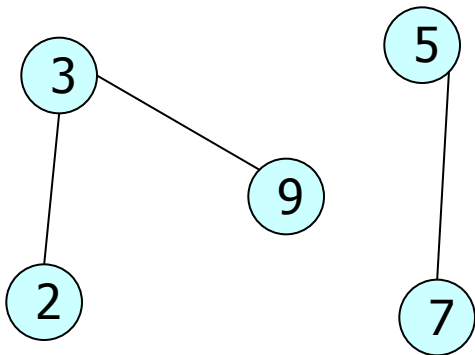
Conexo



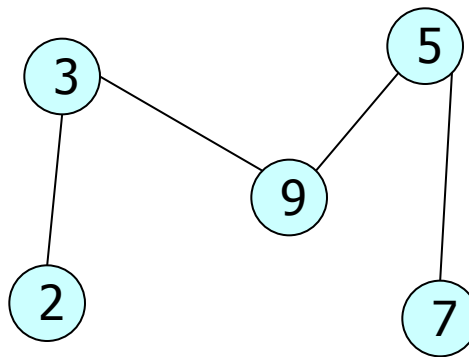
No Conexa

Conectividad: bosque y árbol

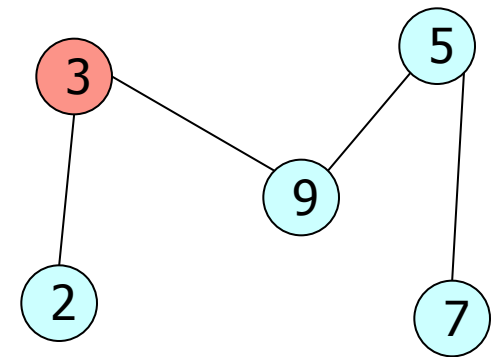
- Un **bosque** es un grafo sin ciclos.
- Un **árbol libre** es un bosque conexo.
- Un **árbol** es un árbol libre en el que un nodo se ha designado como raíz.



Bosque



Árbol libre



Árbol

Propiedades

□ Sea G un grafo no dirigido con n vértices y m arcos, entonces

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2 * m$$

✓ Siempre: $m \leq (n * (n-1)) / 2$

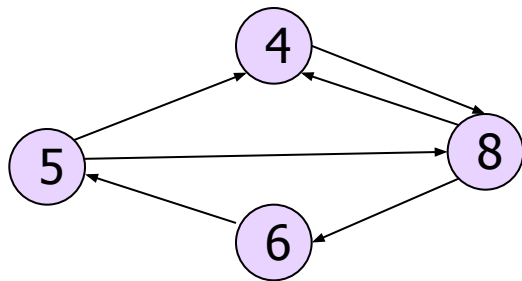
✓ Si G conexo: $m \geq n-1$

✓ Si G árbol: $m = n-1$

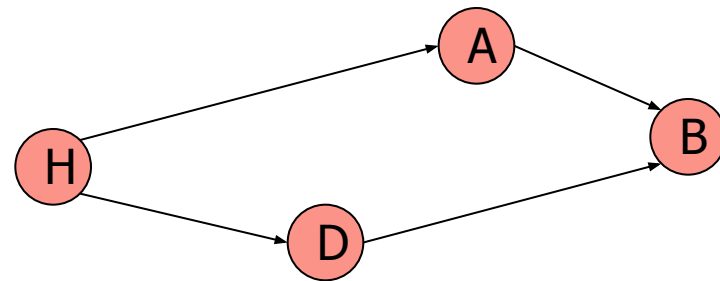
✓ Si G bosque: $m \leq n-1$

Conectividad en grafos dirigidos

- v es **alcanzable desde** u , si existe un camino de u a v .
- Un grafo dirigido se denomina **fuertemente conexo** si existe un camino desde cualquier vértice a cualquier otro vértice



Fuertemente Conexo



No Fuertemente Conexo
Débilmente Conexo

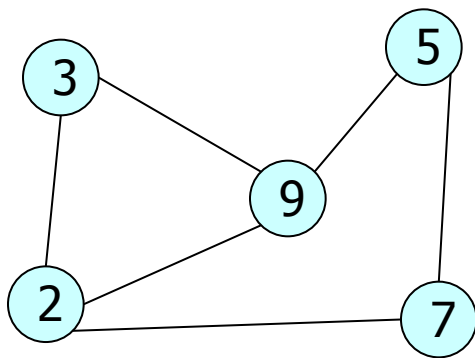
- Si un grafo dirigido no es fuertemente conexo, pero el grafo subyacente (sin sentido en los arcos) es conexo, el grafo es **débilmente conexo**.

Componentes conexos

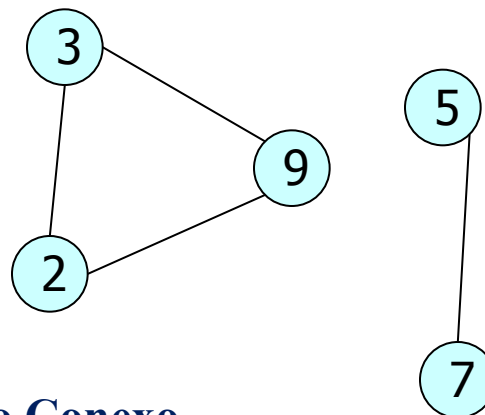
*En un grafo no dirigido, una **componente conexa** es un subgrafo conexo tal que no existe otra componente conexa que lo contenga.*

*Es un **subgrafo conexo maximal**.*

*Un grafo no dirigido es **no conexo** si está formado por varias componentes conexas.*



Conexo



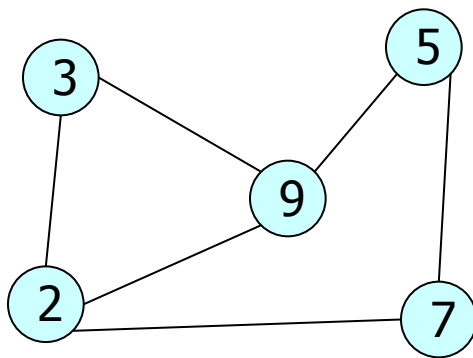
No Conexo

Componentes conexos

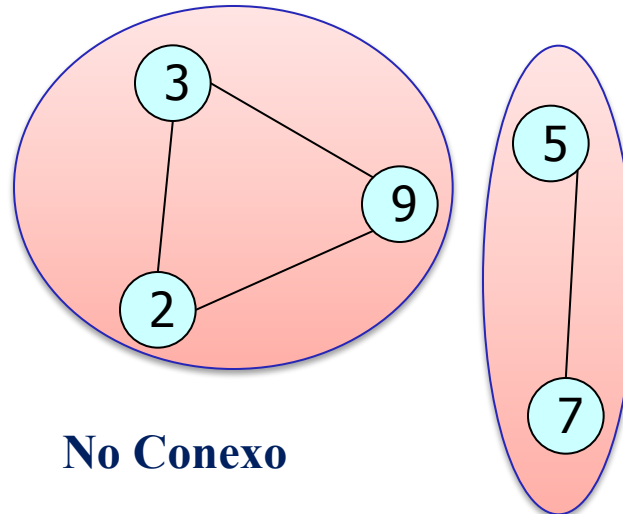
*En un grafo no dirigido, una **componente conexa** es un subgrafo conexo tal que no existe otra componente conexa que lo contenga.*

*Es un **subgrafo conexo maximal**.*

*Un grafo no dirigido es **no conexo** si está formado por varias componentes conexas.*



Conexo



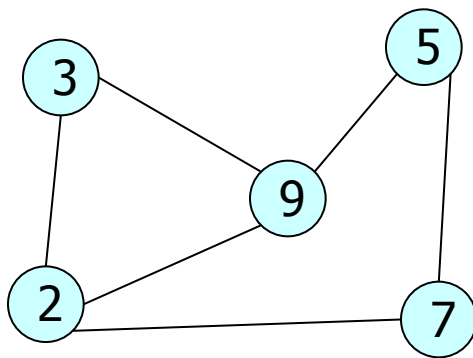
No Conexo

Componentes conexas

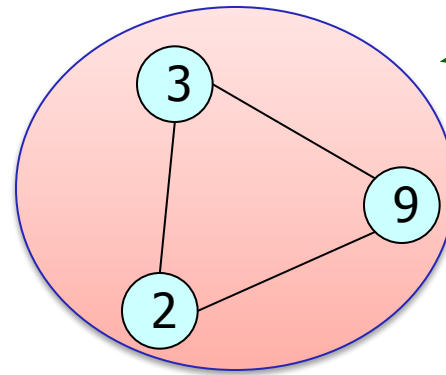
*En un grafo no dirigido, una **componente conexa** es un subgrafo conexo tal que no existe otra componente conexa que lo contenga.*

*Es un **subgrafo conexo maximal**.*

*Un grafo no dirigido es **no conexo** si está formado por varias componentes conexas.*



Conexo



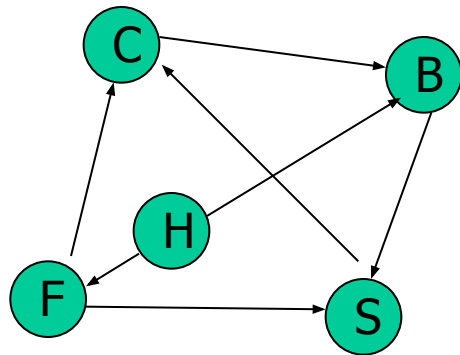
No Conexa

Componentes conexas:
entre ellas son conexas

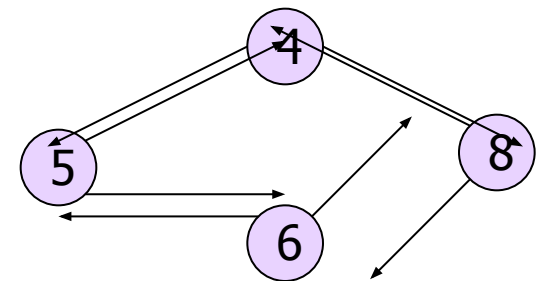
Componentes fuertemente conexas

*En un grafo dirigido, una **componente fuertemente conexa**, es el máximo subgrafo fuertemente conexo.*

*Un grafo dirigido es **no fuertemente conexo** si está formado por varias componentes fuertemente conexas.*



No Fuertemente Conexa

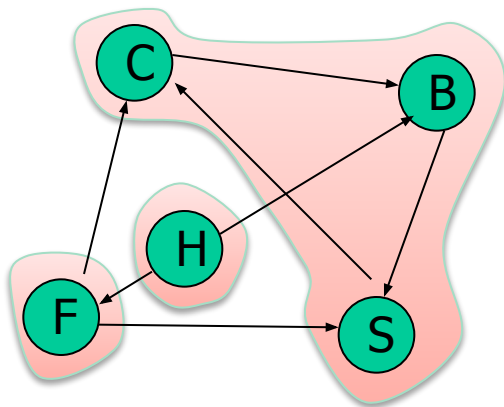


Fuertemente Conexa

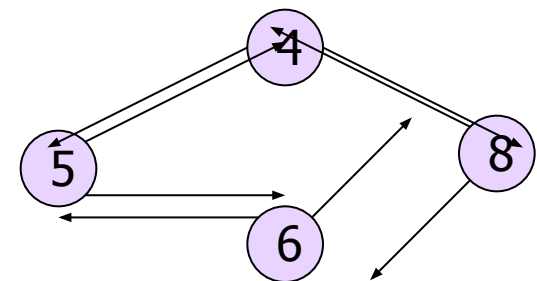
Componentes fuertemente conexas

*En un grafo dirigido, una **componente fuertemente conexa**, es el máximo subgrafo fuertemente conexo.*

*Un grafo dirigido es **no fuertemente conexo** si está formado por varias componentes fuertemente conexas.*



No Fuertemente Conexa

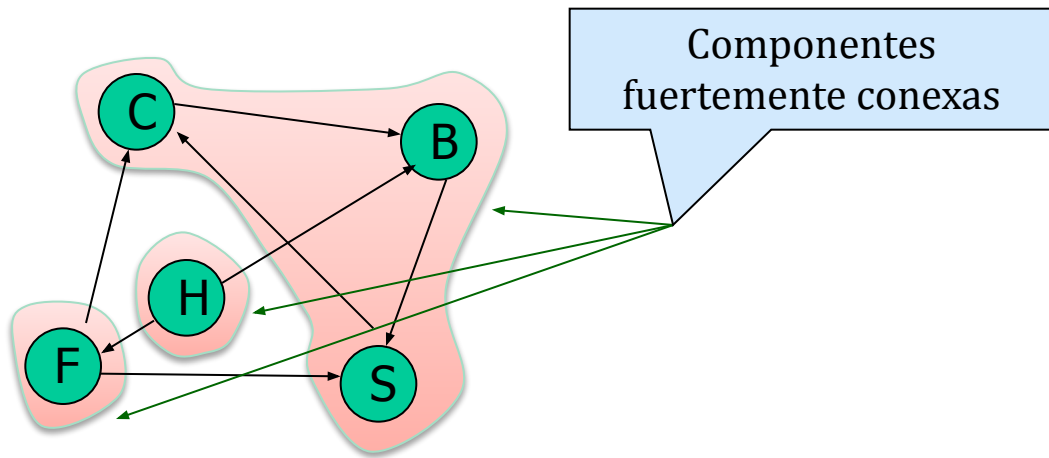


Fuertemente Conexa

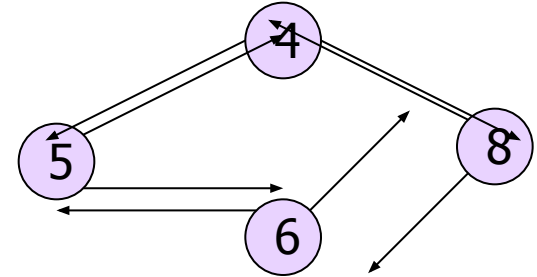
Componentes fuertemente conexas

*En un grafo dirigido, una **componente fuertemente conexa**, es el máximo subgrafo fuertemente conexo.*

*Un grafo dirigido es **no fuertemente conexo** si está formado por varias componentes fuertemente conexas.*



No Fuertemente Conexa



Fuertemente Conexa

Agenda - Grafos

1. Ejemplos y terminología
2. Conectividad
3. Representaciones

Agenda - Grafos

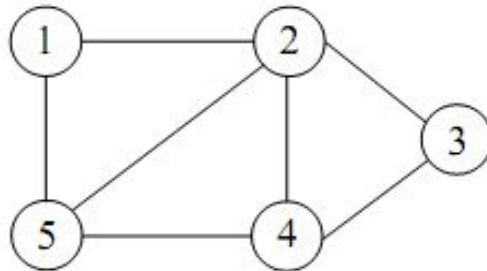
- Representaciones
 - Matriz de Adyacencias
 - Lista de Adyacencias

Representaciones: Matriz de Adyacencias

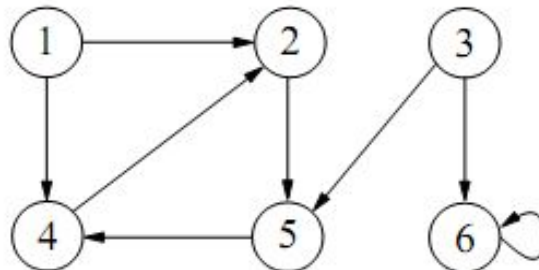
□ $G=(V,E)$: matriz A de dimensión $|V| \times |V|$.

□ Valor a_{ij} de la matriz:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in E \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

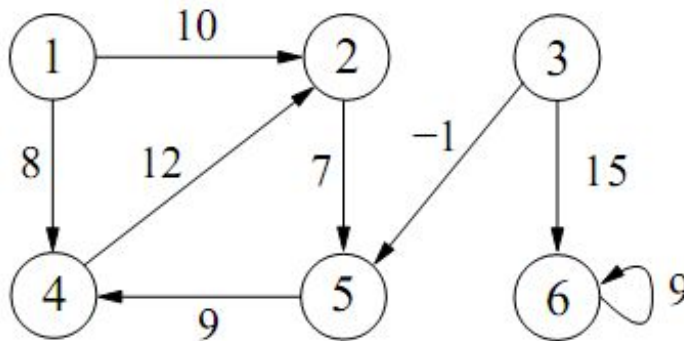
Representaciones: Matriz de Adyacencias

- ▣ *Costo espacial: $O(|V|^2)$*
- ▣ *Representación es útil para grafos con número de vértices pequeño, o grafos densos ($|E| \approx |V| \times |V|$)*
- ▣ *Comprobar si una arista (u,v) pertenece a $E \rightarrow$ consultar posición $A(u,v)$*
- ▣ *Costo de tiempo $T(|V|, |E|) = O(1)$*

Representaciones: Matriz de Adyacencias

- Representación aplicada a Grafos pesados
- El peso de (i,j) se almacena en $A(i,j)$

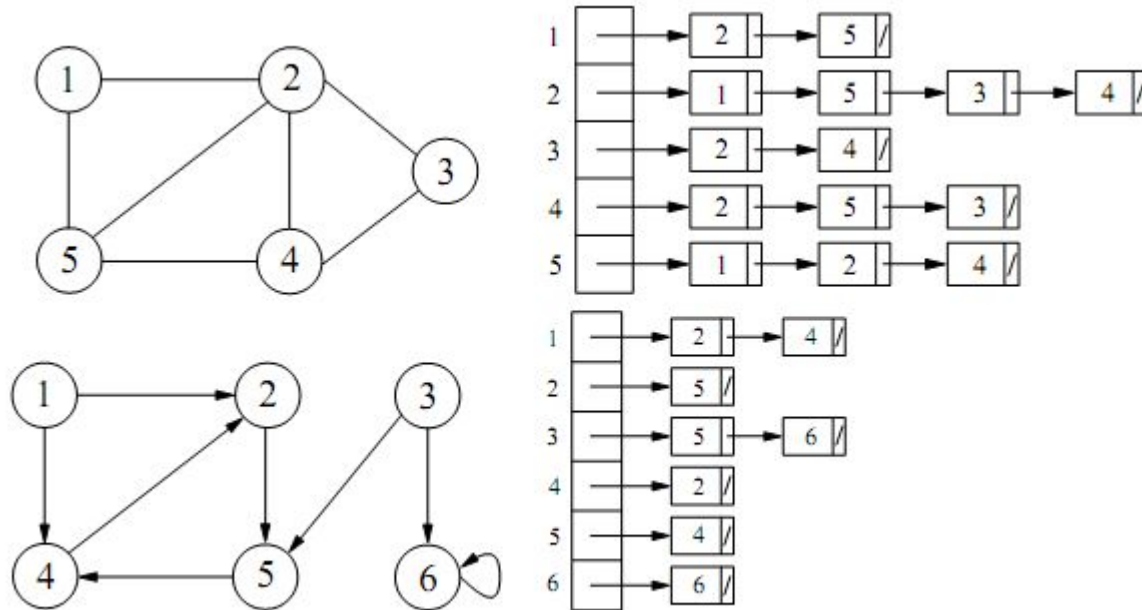
$$a_{ij} = \begin{cases} w(i,j) & \text{si } (i,j) \in E \\ 0 \text{ o } \infty & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$



	1	2	3	4	5	6
1	0	10	0	8	0	0
2	0	0	0	0	7	0
3	0	0	0	0	-1	15
4	0	12	0	0	0	0
5	0	0	0	9	0	0
6	0	0	0	0	0	9

Representaciones: Lista de Adyacencias

- ▣ $G=(V,E)$: vector de tamaño $|V|$.
- ▣ Posición $i \rightarrow$ puntero a una lista enlazada de elementos (lista de adyacencia).
- Los elementos de la lista son los vértices adyacentes a i



Representaciones: Lista de Adyacencias

- ▢ Si G es dirigido, la suma de las longitudes de las listas de adyacencia será $|E|$.
- ▢ Si G es no dirigido, la suma de las longitudes de las listas de adyacencia será $2|E|$.
- ▢ Costo espacial, sea dirigido o no: $O(|V| + |E|)$.
- ▢ Representación apropiada para grafos con $|E|$ menor que $|V|^2$.
- ▢ **Desventaja:** si se quiere comprobar si una arista (u, v) pertenece a $E \Rightarrow$ buscar v en la lista de adyacencia de u .
 - ▢ Costo temporal $T(|V|, |E|)$ será $O(\text{Grado } G) \subseteq O(|V|)$.

Representaciones: Lista de Adyacencias

- Representación aplicada a Grafos pesados
- El **peso de (u,v)** se almacena en el nodo de v de la lista de adyacencia de u .

