Kapitola 1. Funkční posloupnosti a řady

Definice 1.1. (funkční posloupnosti)

Funkční posloupnost (= **posloupnost funkcí**) je zobrazení, které každému přirozenému číslu $n \in \mathbb{N}$ přiřazuje právě jednu funkci f_n definovanou na množině $D \subset \mathbb{R}$:

$$n \mapsto f_n(x), \quad x \in D.$$

Funkce f_n se nazývá **n-tý člen funkční posloupnosti** (f_n).

$$\left(\textit{píšeme:} \quad (f_n(x)), \quad (f_n(x))_{n=1}^{+\infty}, \quad (f_n(x);\ n \in \mathbb{N}), \quad (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots), \quad x \in D \right)$$

Definice 1.2. (bodová konvergence)

Řekneme, že funkční posloupnost (f_n)

1. **konverguje v bodě** $a \in D$ **k číslu** $b \in \mathbb{R}$, pokud $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(a) = b$,
2. **diverguje v bodě** $a \in D$, pokud $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(a) = \pm\infty$ nebo $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(a)$ neexistuje,
3. **konverguje na množině** $M \subset D$ **k limitní funkci** f, pokud $\forall\, x \in M: \ f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$,

$$\left(\textit{píšeme:} \quad f_n(x) \to f(x), \ x \in M; \quad f_n \overset{M}{\to} f \right)$$

4. **diverguje na množině** $M \subset D$, pokud diverguje v každém bodě $x \in M$.

Obor konvergence (f_n) je množina K všech $x \in D$, ve kterých (f_n) konverguje k **limitní funkci (limitě)** f.

$$\left(\textit{píšeme:} \quad f_n \to f \right)$$

Definice 1.3. (stejnoměrná konvergence)

Řekneme, že **funkční posloupnost** (f_n) **konverguje stejnoměrně k funkci** f **na množině** $M \subset D$, pokud platí

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in M: \ n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Říkáme také, že funkce f je **stejnoměrná limitní funkce (limita) funkční posloupnosti** (f_n) **na množině** M.

$$\left(\textit{píšeme:} \quad f_n(x) \rightrightarrows f(x), \ x \in M; \quad f_n \overset{M}{\rightrightarrows} f \right)$$

Věta 1.4. **(o vztahu mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí)**

Jestliže funkční posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně na množině M k limitní funkci f, potom konverguje bodově na M k téže limitní funkci f.

Věta 1.5. **(postačující podmínka stejnoměrné konvergence)**

Nechť funkční posloupnost (f_n) konverguje na množině M k limitní funkci f.
Jestliže existuje reálná posloupnost (a_n) taková, že

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$,
2. pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro všechna $x \in M$ platí $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$,

potom funkční posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně na množině M k limitní funkci f.

Věta 1.6. **(nutná a postačující podmínka stejnoměrné konvergence)**

Funkční posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně na množině M k limitní funkci f právě tehdy, když platí

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Věta 1.7. **(Bolzano-Cauchyovo kritérium stejnoměrné konvergence)**

Funkční posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně na množině M k limitní funkci f právě tehdy, když

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in M :\ m > n_0\ \wedge\ n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Věta 1.8. **(o záměně limit)**

Nechť funkční posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně na množině M k limitní funkci f, nechť x_0 je hromadný bod množiny M a předpokládejme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ existuje $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$. Potom

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{x\to x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x\to x_0} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \right) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Věta 1.9. **(o spojitosti limitní funkce)**

Nechť (f_n) je posloupnost funkcí spojitých na intervalu I, která na I konverguje stejnoměrně k limitní funkci f. Potom funkce f je také spojitá na I.

Věta 1.10. **(o integrování limitní funkce)**

Nechť (f_n) je posloupnost funkcí integrovatelných na omezeném intervalu $I := \langle a, b \rangle$, která na něm konverguje stejnoměrně k limitní funkci f. Potom tato funkce f je také integrovatelná na intervalu I a pro každé $x \in I$ platí

$$\int\limits_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = \int\limits_a^x \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^x f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

Věta 1.11. (o derivování limitní funkce)

Nechť (f_n) je posloupnost funkcí diferencovatelných na intervalu I, která je konvergentní alespoň v jednom bodě $x_0 \in I$ a nechť posloupnost derivací (f'_n) konverguje stejnoměrně na intervalu I. Potom limitní funkce

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

je také diferencovatelná na I a pro každé $x \in I$ platí

$$f'(x) = \left[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right]' = \lim_{n\to+\infty} f'_n(x).$$

Definice 1.12. (funkční řada)

Nechť (f_n) je posloupnost funkcí f_n definovaných na množině $D \subset \mathbb{R}$.
Symbol

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

se nazývá **funkční řada (řada funkcí)**, funkci f_n se říká **n-tý člen funkční řady**.
Funkci s_n určenou předpisem

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \quad x \in D,$$

nazýváme **n-tým částečným součtem fukční řady**.
Posloupnost (s_n) nazýváme **posloupností částečných součtů funkční řady**.

Definice 1.13. (bodová konvergence funkční řady)

Řekneme, že funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

1. **konverguje v bodě** $a \in D$, pokud konverguje číselná řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(a)$,
2. **diverguje v bodě** $a \in D$, pokud diverguje číselná řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(a)$,
3. **konverguje na množině** $M \subset D$, pokud konverguje v každém bodě $x \in M$,
4. **diverguje na množině** $M \subset D$, pokud diverguje v každém bodě $x \in M$.

Obor konvergence funkční řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ je množina K všech $x \in D$, ve kterých funkční řada bodově konverguje k **součtové funkci (součtu)** $s(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n(x)$, $x \in K$.

$$\left(\textit{píšeme:} \quad s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \quad s = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \quad \right)$$

Věta 1.14. **(absolutní konvergence funkční řady)**

Řekneme, že funkční řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ je

1. **absolutně konvergentní v bodě** $a \in D$, pokud je konvergentní číselná řada
$$\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(a)|,$$
2. **absolutně konvergentní na množině** $M \subset D$, pokud je absolutně konvergentní v každém bodě $x \in M$.

Oborem absolutní konvergence funkční řady $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ nazýváme množinu K_a všech čísel $x \in D$, ve kterých funkční řada konverguje absolutně.

Věta 1.15. **(postačující podmínka konvergence funkční řady)**

Jestliže funkční řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|$ konverguje na množině M, potom funkční řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ konverguje na M.

Věta 1.16. **(majorantní kritérium absolutní konvergence)**

Nechť je dána funkční řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, $x \in D$, a nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ je číselná řada taková, že pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí
$$\forall\, x \in M \subset D: \; |f_n(x)| \le b_n.$$

Je-li tato číselná řada $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergentní, potom funkční řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ je absolutně konvergentní na M.

Věta 1.17. **(stejnoměrná konvergence funkční řady)**

Nechť funkční řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, $x \in D$, konverguje na svém oboru konvergence $K \subset D$ k součtové funkci s, tj.
$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \quad x \in K.$$

Řekneme, že daná **funkční řada konverguje stejnoměrně na množině** $M \subset K$ **k součtové funkci** s, pokud na této množině M konverguje stejnoměrně posloupnost $(s_n(x))$ částečných součtů funkční řady k součtové funkci s, tj.
$$s_n(x) \rightrightarrows s(x), \quad x \in M.$$

Věta 1.18. **(nutná podmínka stejnoměrné konvergence funkční řady)**

Nechť funkční řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na množině M.
Potom funkční posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně na množině M k nulové limitní funkci $f(x) = 0$, tj.
$$f_n(x) \rightrightarrows 0, \quad x \in M.$$

Věta 1.19. (Cauchyovo kritérium stejnoměrné konvergence funkční řady)

Funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na množině M právě tehdy, když

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in M:\ n > n_0 \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Věta 1.20. (Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence funkční řady)

Nechť je dána funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, $x \in D$, a nechť $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ je číselná řada taková, že pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\forall\, x \in M \subset D:\ |f_n(x)| \le b_n.$$

Je-li tato číselná řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergentní, potom funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ je stejnoměrně konvergentní na M.

Věta 1.21. (o spojitosti součtové funkce)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ je funkční řada, která konverguje stejnoměrně na intervalu I k součtové funkci s. Jestliže všechny členy funkční řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ jsou funkce spojité na I, potom také součtová funkce s je spojitá na I.

Věta 1.22. (o integrování funkční řady)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ je funkční řada, která konverguje stejnoměrně na omezeném intervalu I k součtové funkci s. Jestliže všechny členy funkční řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ jsou funkce integrovatelné na I, potom pro každé $x_0, x \in I$ konverguje také funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\ \mathrm{d}t$ a její součet je $\int\limits_{x_0}^{x} s(t)\ \mathrm{d}t$, tj.

$$\int_{x_0}^{x} s(t)\ \mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \right)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

Věta 1.23. (o derivování funkční řady)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ je funkční řada, jejíž všechny členy f_n mají derivace f_n' na intervalu I.
Jestliže funkční řada derivací $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n'$ je stejnoměrně konvergentní na I a je-li funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ konvergentní alespoň v jednom bodě $x_0 \in I$, potom je konvergentní na celém intervalu I, a to stejnoměrně.
Navíc, pro součtovou funkci s funkční řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ platí

$$\forall\, x \in I:\ s'(x) = \left[\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right]' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x).$$