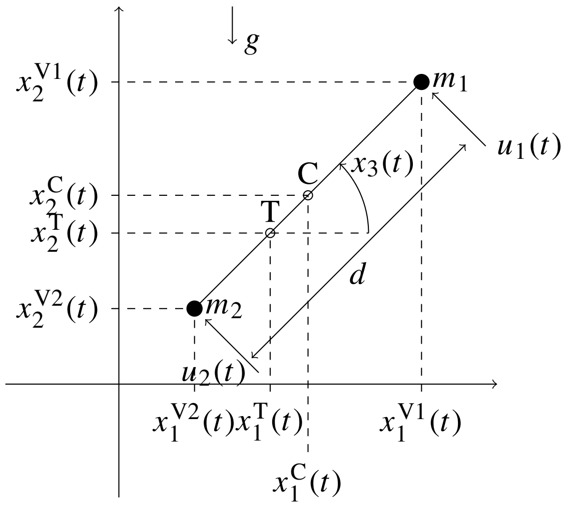
Dynamická optimalizace – úloha s volným časem a pevným koncem

Zadání semestrální práce

Uvažujte pohyb duokoptéry ve svislé rovině pod vlivem homogenního gravitačního pole jak je



Obrázek 1: Zjednodušený model duokoptéry

ilustrováno na obrázku 1. Samotná duokoptéra je modelována jako dva hmotné body, které reprezentují motor s vrtulí 1 a motor s vrtulí 2. Předpokládá se, že hmotné body jsou spojené nehmotným nosníkem pevné délky. Každá z vrtulí vytvoří tah síly, který je kolmý na nehmotný nosník. Poloha duokoptéry je reprezentována polohou jejího těžiště T a orientace je dána úhlem, který svírá nehmotný nosník s osou x. Geometrický střed duokoptéry je označen jako C. Zjednodušený dynamický model duokoptéry je

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \\ \dot{x}_5(t) \\ \dot{x}_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \\ -\frac{\sin(x_3)(u_1(t)+u_2(t))}{m_1+m_2} \\ -g + \frac{\cos(x_3)(u_1(t)+u_2(t))}{m_1+m_2} \\ \frac{u_1(t)}{m_1 d} - \frac{u_2(t)}{m_2 d} \end{bmatrix}, \quad t \in [t_0, t_\mathrm{f}], \tag{1}$$

kde $x_1(t) \in \mathbb{R}$ je souřadnice těžiště $x_1^\mathrm{T}(t) \in \mathbb{R}$, $x_2(t) \in \mathbb{R}$ je souřadnice těžiště $x_2^\mathrm{T}(t) \in \mathbb{R}$, $x_3(t) \in \mathbb{R}$ je úhel v radiánech reprezentující orientaci duokoptéry, $x_4(t) \in \mathbb{R}$ je rychlost těžiště $\dot{x}_1^\mathrm{T}(t) \in \mathbb{R}$, $x_5(t) \in \mathbb{R}$ je rychlost těžiště $\dot{x}_2^\mathrm{T}(t) \in \mathbb{R}$, $x_6(t) \in \mathbb{R}$ je úhlová rychlost změny orientace duokoptéry v radiánech za sekundu, $u_1(t) \in \mathbb{R}$ je síla generovaná vrtulí 1 a $u_2(t) \in \mathbb{R}$ je síla generovaná vrtulí 2. Hmotnost motoru a vrtule 1 je $m_1 \in \mathbb{R}^{++}$, hmotnost motoru a vrtule 2 je $m_2 \in \mathbb{R}^{++}$. Pevná vzdálenost mezi vrtulí 1 a vrtulí 2 je $d \in \mathbb{R}^{++}$. Velikost zrychlení způsobeného homogenním gravitačním polem je $g \in \mathbb{R}^{++}$.

Počáteční čas t_0, počáteční stav $\mathbf{x}(t_0)$ a koncový čas t_f jsou dány. Cílem je nalézt řízení $\mathbf{u} : [t_0, t_\mathrm{f}] \mapsto \mathbb{R}^2$, které minimalizuje funkcionál

$$J = \int_0^{t_\mathrm{f}} \frac{1}{2} \mathbf{u}(t)^\mathrm{T} \mathbf{u}(t) \,\mathrm{d}t \tag{2}$$

a zajistí dosažení požadovaného koncového stavu $\mathbf{x}(t_\mathrm{f})$, který je specifikován slovně v bodu 3 zadání.

Body vypracování

1. Stanovení transformačních funkcí

   - Odvoďte transformační funkce a jejich inverze pro výpočet polohy hmotných bodů $\mathbf{x}^{\mathrm{V1}}(t)$, $\mathbf{x}^{\mathrm{V2}}(t)$ a geometrického středu duokoptéry $\mathbf{x}^{\mathrm{C}}(t)$ na základě znalosti polohy těžiště $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(t)$ a úhlu $x_3(t)$.
   - Odvoďte transformační funkce a jejich inverze pro výpočet rychlostí hmotných bodů $\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{V1}}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{V2}}(t)$ a geometrického středu duokoptéry $\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{C}}(t)$ na základě rychlosti těžiště $\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}(t)$, úhlu $x_3(t)$ a rychlosti změny úhlu $x_6(t)$.

2. Simulační ověření modelu

   - S využitím funkce Matlabu `ode45` simulujte model duokoptéry na časovém intervalu $[t_0, t_\mathrm{f}]$ a posuďte zda chování modelu odpovídá fyzikálnímu náhledu. Použijte následující dva testovací vstupní signály.
     – Nulový testovací signál $\mathbf{u}_{\mathrm{test},1} : [t_0, t_\mathrm{f}] \mapsto \mathbb{R}^2$ daný jako
     $$\mathbf{u}_{\mathrm{test},1}(t) = \mathbf{0}_{2\times 1}, \quad t \in [t_0, t_\mathrm{f}]. \tag{3}$$
     – Testovací signál $\mathbf{u}_{\mathrm{test},2} : [t_0, t_\mathrm{f}] \mapsto \mathbb{R}^2$, který je napočítán tak, aby počáteční rychlost těžiště a rychlost změny orientace byly v čase konstantní. Pokud takový vstupní signál pro dané zadání neexistuje, použijte nějaký nenulový konstantní signál.
   - Vykreslete časový průběh testovacího vstupu a stavu modelu. Dále vykreslete trajektorii polohy duokoptéry. Volitelně můžete realizovat i vizualizaci pohybu duokoptéry.

3. Na základě následujícího slovního popisu stanovte požadovaný koncový stav $\mathbf{x}_\mathrm{f}$, kdy je nutné zohlednit, že ve stavu je poloha těžiště a rychlost těžiště, ale požadavek na koncový stav je vyjádřen pro geometrický střed. Pro každou skupinu platí jedno slovní zadání.

   1 Geometrický střed má zastavit na pozici $[2, 1]^{\mathrm{T}}$ a duokoptéra má být stabilizována v horizontální rovině.

   2 Geometrický střed má proletět pozicí $[-1, 2]^{\mathrm{T}}$ rychlostí $0.14\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ pod úhlem $135°$ a orientace doukoptéry má být taková, aby oba motory zabíraly směrem průletu.

   3 Geometrický střed má proletět pozicí $[2, 0]$ směrem seshora dolů rychlostí $0.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ a duokoptéra má být stabilizována v horizontální rovině.

   4 Geometrický střed má proletět pozicí $[2, 1.5]$ směrem doprava rychlostí $0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ a duokoptéra má být stabilizována v horizontální rovině.

   5 Geometrický střed má proletět pozicí $[0, 2]$ střemhlav dolu rychlostí $0.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ a duokoptéra má být orientována ve směru průletu.

4. Stanovení řízení s vyžitím alternativních návrhových postupů

   - S využitím alternativních způsobů návrhu regulátorů navrhněte řízení $\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{alternative}} : \mathbb{R}^6 \times [t_0, t_\mathrm{f}] \mapsto \mathbb{R}^2$ tak, aby stav $\mathbf{x}(t_\mathrm{f})$ nabyl požadované hodnoty $\mathbf{x}_\mathrm{f}$.
   - Vykreslete časový průběh vstupu a stavu modelu. Dále vykreslete trajektorii polohy duokoptéry. Diskutujte úspěšnost intuitivního řešení včetně hodnoty funkcionálu.

5. Stanovení optimálního řízení

   - Formulujte zadaný problém jako úlohu optimálního řízení spojitého dynamického systému s pevným časem a pevným koncem (tj. stanovte funkci vyjadřující dynamiku systému, ztrátovou funkci a omezující podmínky na koncový stav).
   - Specifikujte Hamiltonovu funkci.
   - Stanovte nutné podmínky optimálního řízení (tj. kanonické rovnice a okrajové podmínky) a vypočtěte všechny potřebné parciální derivace.
   - Stanovte funkci $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R}^{13} \mapsto \mathbb{R}^2$, která poskytuje optimální řízení $\mathbf{u}(t)$ pro optimální stav $\mathbf{x}(t)$, optimální Langrangeovy multiplikátory $\boldsymbol{\lambda}(t)$ a čas t

     $$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t). \tag{4}$$

     Poznamenejme, že funkce $\boldsymbol{\gamma}$ nemusí nutně záviset na všech výše uvedených argumentech.
   - Sumarizujte nutné podmínky extrému ve formě dvoubodového okrajového problému.
   - Použijte funkci Matlabu `bvp4c` pro stanovení numerického řešení dvoubodového okrajového problému.
     - Vypočtěte Jacobiho matici pravé strany diferenciální rovnice a Jacobiho matici okrajových podmínek. Tyto Jacobiho matice můžete poskytnout funkci `bvp4c`.
     - Experimentujte s volbou hustoty časové mřížky, počátečního řešení, a dalších parametrů funkce `bvp4c` pro získání optimálního řešení.
   - Vykreslete časovou závislost optimálního řízení, stavů, Lagrangeových multiplikátorů a Hamiltonovy funkce. Na základě průběhu Hamiltonovy funkce posuďte zda nalezené řešení odpovídá extrému. Dále vykreslete trajektorii polohy duokoptéry. Volitelně můžete odvodit vztah pro sílu působící na nehmotný nosník a vykreslit průběh její velikosti v čase.

Pozn.: Parametry úlohy získáte pomocí makra `ops_zadani_2_2025_data.m`, kde jako vstupní parametr použijete přidělené číslo zadání.