Důkaz, že jazyk $L = \{a^j b^j c a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ není bezkontextový:

- Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné, dále pevné číslo.
- Zvolíme $z = a^n b^n c a^n b^n$ z jazyka L tak, že $|z| = 4n + 1 \geq n$.
- Uvažme libovolné rozdělení slova z na 5 podslov $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$, pro která platí $z = uvwxy$, $|vwx| \leq n$ a $vx \neq \varepsilon$. Pro libovolné takové rozdělení rozlišme následující případy podle toho, ve kterém z podslov se nachází písmeno c:

  Písmeno c se nachází v podslově y (tedy $vx = a^k b^l$, přičemž $k + l \geq 1$).

  Zvolíme $i = 0$, pak $uv^iwx^iy = a^{n-k} b^{n-l} c a^n b^n$ a jelikož je pumpovaná část neprázdná, tak jsme zkrátili část slova před znakem c, a tedy $uv^iwx^iy \notin L$.

  Písmeno c se nachází v podslovech v nebo x. Zvolíme $i = 0$, pak uv^iwx^iy neobsahuje c, tedy není tvaru $a^j b^j c a^j b^j$, a tedy $uv^iwx^iy \notin L$.

  Písmeno c se nachází v podslově w (tedy $vx = b^k a^l$, přičemž $k + l \geq 1$).

  Zvolíme $i = 0$, pak $uv^iwx^iy =$

  Písmeno c se nachází v podslově u (tedy $vx = a^k b^l$, přičemž $k + l \geq 1$).

Celkově jsme pro každé přirozené číslo n našli slovo z z jazyka L délky větší než n takové, že pro libovolné jeho rozdělení na pět slov u, v, w, x, y splňujících podmínky z lemmatu o vkládání existuje nezáporné celé číslo i takové, že uv^iwx^iy není v jazyce L, a tedy z lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky vyplývá, že jazyk L není bezkontextový.

Důkaz, že jazyk $L = \{a^j b^j c a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ není bezkontextový:

- Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné, dále pevné číslo.
- Zvolíme $z = a^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} b^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} c a^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} b^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ z jazyka L, délka z je větší než n.
- Uvažme libovolné rozdělení slova z na 5 podslov $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$, pro která platí $z = uvwxy$, $|vwx| \leq n$ a $vx \neq \varepsilon$:

Celkově jsme pro každé přirozené číslo n našli slovo z z jazyka L délky větší než n takové, že pro libovolné jeho rozdělení na pět slov u, v, w, x, y splňujících podmínky z lemmatu o vkládání existuje nezáporné celé číslo i takové, že $uv^i wx^i y$ není v jazyce L, a tedy z lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky vyplývá, že jazyk L není bezkontextový.

Důkaz, že jazyk $L = \{ucv \mid u, v \in \{a,b\}^*, \#_a(u) = \#_b(v)$ a $\#_b(u) = \#_a(v)\}$ není bezkontextový:

- Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné, dále pevné číslo.
- Zvolíme slovo $z =$
- Uvažme libovolné rozdělení slova z na 5 podslov $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$, pro která platí $z = uvwxy$, $|vwx| \leq n$ a $vx \neq \varepsilon$:

Celkově jsme pro každé přirozené číslo n našli slovo z z jazyka L délky větší než n takové, že pro libovolné jeho rozdělení na pět slov u, v, w, x, y splňujících podmínky z lemmatu o vkládání existuje nezáporné celé číslo i takové, že uv^iwx^iy není v jazyce L, a tedy z lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky vyplývá, že jazyk L není bezkontextový.

Důkaz, že jazyk $L = \{a^j b^k c^l \mid j < k < l\}$ není bezkontextový: