

NP Zusammenfassung

Lukas Schaller

April 25, 2019

Contents

1	A1	2
1.1	Aktionen	2
1.2	Trainingsblatt	3
1.3	Nichtdeterminismus	3
1.3.1	Annahmen nebenläufiger Prozesse	3
1.4	Labled Transitionsystem	4
2	B1 - CSS	5
2.1	CSS_0	5
2.1.1	Syntax	5
2.1.2	Semantik	5
2.2	CCS_0^ω	6
2.2.1	Semantik	6
2.2.2	Geschützte Ausdrücke	6
2.3	Sequentielles CSS_0^ω	6
2.3.1	Semantik	6
2.3.2	Synchronisation	7
2.3.3	Restriktions-Operator	7
2.4	Volle CCS-Power	7
2.4.1	Syntax	7
2.4.2	Semantik	8
2.4.3	Regulärer Ausdruck	8

Chapter 1

A1

1.1 Aktionen

Aktionen Seien Kom eine Menge von Kommunikationsaktionen und Int eine davon disjunkte Menge von internen Aktionen. Dann ist

$$Act = Kom \cup Int$$

die Menge aller Aktionen. Dabei gelten folgende Konventionen:

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots \in Act \quad a, b, c, \dots \in Int \quad [a], [b], [c], \dots \in Kom$$

Transitionssystem (LTS) Ein beschrites Transitionssystem TS ist ein Tripel $(S, \longrightarrow, s_0)$, wobei

- S die Zustandsmenge
- $\longrightarrow \subseteq S \times Act \times S$ die Transitionsrelation,
- $s_0 \in S$ der initiale Zustand ist

Nachfolger Sei ein LTS $TS = (S, \rightarrow, s_0)$ gegeben. Sei $s \in S$, $C \subseteq S$, $\alpha \in Act$, und $A \subseteq Act$.

$$Post(s, \alpha) = \{s' \in S \mid s \xrightarrow{\alpha} s'\},$$

$$Post(s, A) = \bigcup_{\alpha \in A} Post(s, \alpha)$$

$$Post(C, \alpha) = \bigcup_{s \in C} Post(s, \alpha),$$

$$Post(C, A) = \bigcup_{\alpha \in A} Post(C, \alpha)$$

Aktionen die in Zustand s als nächstes möglich sind:

$$Act(s) = \{\alpha \in Act \mid \exists s' : s \xrightarrow{\alpha} s'\}$$

Aktionen, die in Zustand s als nächstes beobachtet werden können:

$$Kom(s) = \{\alpha \in Kom \mid \exists s' : s \xrightarrow{\alpha} s'\}$$

Erreichbarkeit $Reach(s)$ ist die Menge aller von s erreichbaren Zustände in TS

$$Reach(s) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Post^n(s)$$

wobei $Post^0(s) = s$ und $Post^{n+1}(s) = Post(Post^n(s), Act)$

1.2 Trainingsblatt

Vorgänger

$$Pre(s, \alpha) = \{s' \in S \mid s' \xrightarrow{\alpha} s\},$$

$$Pre(s, A) = \bigcup_{\alpha \in A} Pre(s, \alpha)$$

$$Pre(C, \alpha) = \bigcup_{s \in C} Pre(s, \alpha),$$

$$Pre(C, A) = \bigcup_{\alpha \in A} Pre(C, \alpha)$$

terminaler Zustand Ein terminaler Zustand ist ein Zustand ohne Nachfolger. Ein Zustand ist genau dann terminal wenn $Act(s) = \emptyset$.

Alphabet des LTS Alphabet eines LTS $TS = \bigcup_{s \in Reach(TS)} Kom(s)$

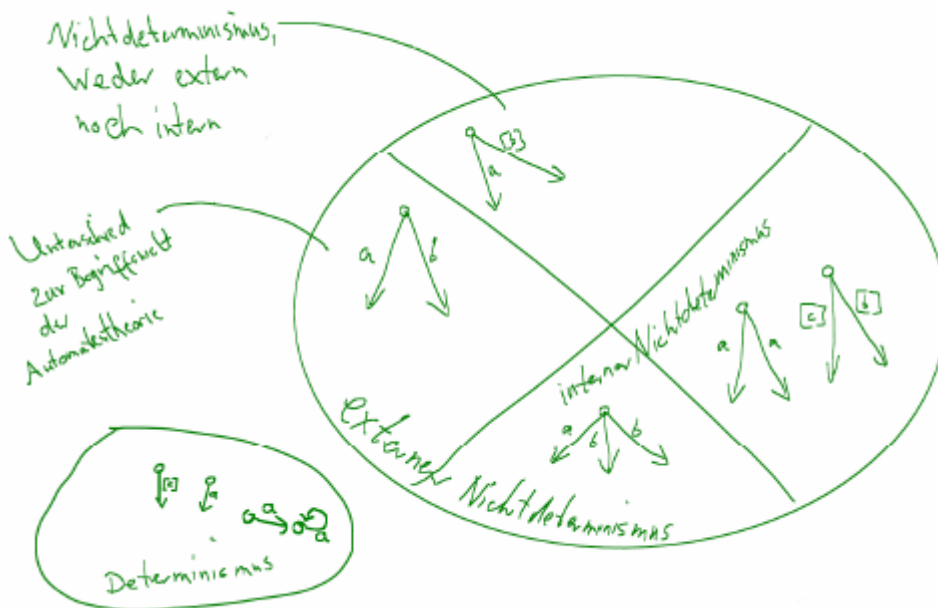
1.3 Nichtdeterminismus

Nichtdeterminismus Sei $Post(s) = Post(s, Act)$ und es sei ein LTS $TS = (S, \rightarrow, s_0)$ gegeben. TS ist deterministisch genau dann wenn für alle $s \in S$,

$$|Post(s)| \leq 1 \text{ und } |Act(s)| \leq 1$$

Andernfalls heißt das TS nichtdeterministisch!

Interner und Externer Nichtdeterminismus

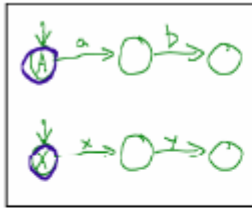


1.3.1 Annahmen nebenläufiger Prozesse

- Zeit wird nur bezüglich relativen Geschwindigkeit der Prozesse untereinander betrachtet, nicht absolut. Jeder Prozess kann gerade beliebig schnell oder langsam voranschreiten.
- Aktionen sind unteilbar und zeitlos.
- Nebenläufige Prozesse agieren komplett voneinander unabhängig und unbeeinflusst, es sei denn, sie kommunizieren explizit miteinander.

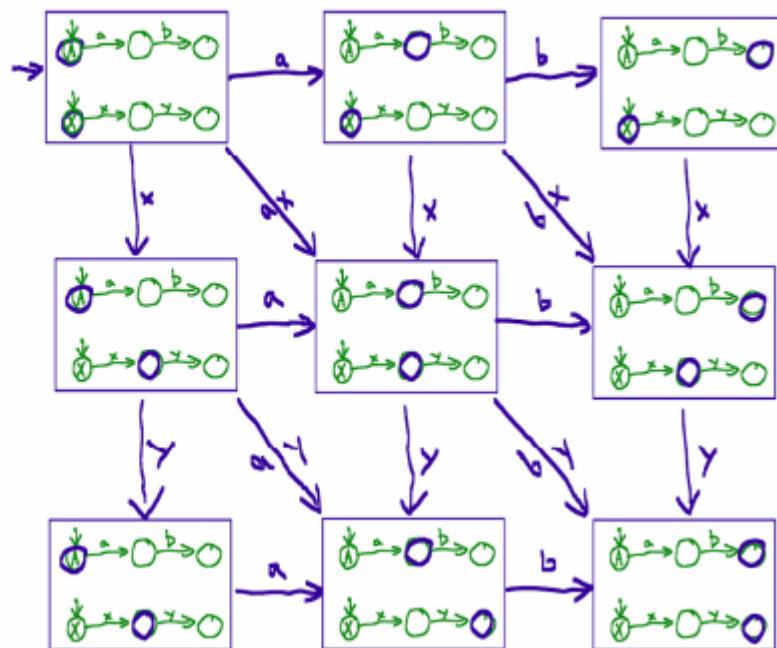
1.4 Labeled Transitionsystem

Ein kleines Beispiel:



Das ist ein
Transitionssystem!

Allerdings mit
Mengen von
Aktionen
beschriftet.



Hinweis: Die diagonalen Kanten können wegen der Zeitlosigkeit der Aktionen auch weggelassen werden.

Chapter 2

B1 - CSS

2.1 CSS_0

2.1.1 Syntax

Gegeben sei die Menge aller Aktionen Act . Dann ist die Menge aller Ausdrücke in CSS_0 gegeben durch:

$$P ::= 0 \mid P + P \mid \alpha.P$$

wobei $\alpha \in Act$.

Klammersparregeln

- '+' klammert links: $P + Q + R \rightsquigarrow (P + Q) + R$
- '.' klammert rechts: $\alpha.\beta.P \rightsquigarrow \alpha.(\beta.P)$
- Punkt vor Strich: $\alpha.P + Q \rightsquigarrow (\alpha.P) + Q$

2.1.2 Semantik

Die Semantik einer Sprache beschreibt, welches mathematische Objekt mit einem Ausdruck der Sprache assoziiert werden soll. Die Semantik des Ausdrucks P aus CSS_0 ist ein LTS $\llbracket P \rrbracket = (S, \rightarrow, s_0)$.

- Zustandsmenge S ist die Menge aller CSS_0 -Ausdrücke
- $s_0 = P$
- \rightarrow ist eine Teilmenge von $(CSS_0 \times Act \times CSS_0)$

Inferenzregeln

Hinweis: CSS_0 beinhaltet noch nicht die Inferenzregeln rec

choice_l $\frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P + Q \xrightarrow{\alpha} P'}$	prefix $\frac{}{a.P \xrightarrow{\alpha} P}$
choice_r $\frac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P + Q \xrightarrow{\alpha} Q'}$	rec $\frac{\Gamma(X)=P \quad P \xrightarrow{\alpha} P'}{X \xrightarrow{\alpha} P'}$

Isomorphie

Zwei Transitionssysteme $TS = (S, \rightarrow, s_0)$ und $TS' = (S', \rightarrow', s'_0)$ sind isomorph ($TS \sim_{iso} TS'$), wenn es eine Bijektion f gibt mit $f : Reach(TS) \rightarrow Reach(TS')$, so dass $f(s_0) = s'_0$ und für alle $s_1, s_2 \in Reach(TS)$ und alle $\alpha \in Act$ gilt: $s_1 \xrightarrow{\alpha} s_2$ genau dann wenn $f(s_1) \xrightarrow{\alpha'} f(s_2)$.

Intuition: Zwei LTS sind isomorph solange sie sich ausschließlich im Namen der Zustände unterscheiden. Die Transitionen müssen gleich bleiben!

Satz Für jedes endliche azyklische LTS TS gibt es einen Ausdruck $P \in CCS_0$, so dass $TS \sim_{iso} \llbracket P \rrbracket$.

2.2 CCS_0^ω

2.2.1 Semantik

Gegeben sei die Menge aller Aktionen Act und eine Menge von Rekursionsvariablen Var . Dann ist die Menge der Ausdrücke in CCS_0^ω wie folgt:

$$P ::= o \mid X \mid P + P \mid \alpha.P, \text{ wobei } \alpha \in Act \text{ und } X \in Var$$

Beispiele

$$X := a.b.Y$$

$$Y := b.Z + a.Y$$

$$Z := a.Y$$

Eine Menge solcher Gleichungen definiert offensichtlich eine partielle Funktion: $\Gamma \in Var \rightarrow CCS_0^\omega$. In diesem Beispiel ergibt sich demnach: $\Gamma = \{(X, a.b.Y), (Y, b.Z + a.Y), (Z, a.Y)\}$

Es soll gelten:

- $(\alpha.P, \alpha, P) \in \rightarrow$;
- $(P + Q, \alpha, P') \in \rightarrow$, wenn immer $(P, \alpha, P') \in \rightarrow$;
- $(P + Q, \alpha, Q') \in \rightarrow$, wenn immer $(Q, \alpha, Q') \in \rightarrow$;
- $(X, \alpha, P') \in \rightarrow$, wenn immer $\Gamma(x) = P$ und $(P, \alpha, P') \in \rightarrow$;
- nichts sonst ist Element von \rightarrow_Γ

2.2.2 Geschützte Ausdrücke

Eine Variable X ist geschützt in einem Ausdruck P , wenn jedes Auftreten von X in P in einem Teilausdruck von P der Form $\alpha.Q$ enthalten ist. Andernfalls heißt X ungeschützt.

Ein Ausdruck P heißt geschützt, wenn alle darin vorgekommenen Variablen in P geschützt sind. Andernfalls heißt P ungeschützt.

Beispiele

ungeschützte Ausdrücke: $X, \tau.X + Y, (a.X) + X$

geschützte Ausdrücke: $\alpha.X, \tau.(X + Y), \alpha.(X + b.X)$

2.3 Sequentielles CCS_0^ω

Für eine Bindung $\Gamma : Var \rightarrow CCS_0^\omega$ sei $\rightarrow_\Gamma \subseteq CCS_0^\Gamma \times Act \times CCS_0^\Gamma$ die kleinste Relation \rightarrow , die den Inferenzregeln genügen.

2.3.1 Semantik

Sei $LTS_0^\omega = \{(CCS_0^\omega, T, s) \mid T \subseteq CCS_0^\omega \times Act \times CCS_0^\omega, s \in CCS_0^\omega\}$. Die Semantik von CCS_0^ω ist eine (kaskadierte) Funktion:

$$\begin{aligned} \llbracket _ \rrbracket &: (Var \rightarrow CCS_0^\omega) \rightarrow CCS_0^\omega \rightarrow LTS_0^\omega \\ \llbracket _ \rrbracket \Gamma P &= (CCS_0^\omega, \rightarrow_\Gamma, P) \end{aligned}$$

Wir schreiben $\llbracket P \rrbracket_\Gamma$ für $\llbracket _ \rrbracket \Gamma P$, oder auch nur $\llbracket P \rrbracket$, sofern Γ aus dem Kontext heraus klar ist.

Satz Für jedes endliche LTS TS gibt es einen Ausdruck $P \in CCS_0^\omega$ und eine endliche Bindung Γ , sodass $TS \sim_{iso} \llbracket P \rrbracket_\Gamma$

Zusätzliche Inferenzregeln

TODO: Hier Bild von `par.l` und `par.r` einfügen

2.3.2 Synchronisation

Synchronisation bietet die Grundlage um unterschiedliche Prozesse auf Aktionen reagieren zu lassen. So kann zum Beispiel die 'light'-Aktion des Feuerzeug-Prozesses in einem Prozess eines Chinaböllers die passive Aktion 'light' hervorrufen. In CSS machen wir dazu die Kommunikationsaktionen entweder 'aktiv' oder 'passiv'. Statt einer beliebigen Menge Kom von Markierungen verwenden wir eine Menge, die mehr Struktur aufweist: $Kom = A^! \cup A^?$. Aktionen mit '!' als Output-Aktionen (aktiv) und Aktionen mit '?' als Input-Aktionen interpretiert werden.

Komplementarität Input- und Output-Aktionen treten als Paare auf. Das Komplement von $a \in A^! \cup A^?$ ist \bar{a} . Auch für interne Aktionen τ gilt $\tau = \bar{\tau}$. Das doppelte Komplement hebt die Wirkung auf: $\alpha \in Act : \bar{\bar{\alpha}} = \alpha$

Hinweis Interne Aktionen können NICHT synchronisieren.

Zusätzliche Inferenzregel

$$\text{sync} \quad \frac{P \xrightarrow{a} P' \quad Q \xrightarrow{\bar{a}} Q'}{P|Q \xrightarrow{\tau} P'|Q'}$$

2.3.3 Restriktions-Operator

Der Restriktions-Operator 'verbindet bestimmte (Paare von) Aktionen eines Prozesses. Intuitiv gesprochen erzwingt er eine Synchronisation.

$P \setminus H$ ist ein zweistelliger Operator, mit P als CCS-Ausdruck und H als Menge von Kommunikationsaktionen, die unterbunden werden sollen.

Inferenzregel

$$\text{res} \quad \frac{P \xrightarrow{\alpha} P' \quad \alpha \notin H}{P \setminus H \xrightarrow{\alpha} P' \setminus H}$$

Annahmen über zulässige Menge H :

- Die interne Aktion kann nicht unterbunden werden: $\tau \notin H$
- Aktionen treten in H paarweise auf: $a \in H \iff \bar{a} \in H$

2.4 Volle CCS-Power

2.4.1 Syntax

Gegeben sei die Menge aller Kommunikationsaktionen $Kom = A^! \cup A^?$, $Act = Kom \cup \{\tau\}$ und eine Menge von Rekursionsvariablen Var . Dann ist die Menge aller Ausdrücke in CCS wie folgt gegeben:

$$P ::= 0 \mid X \mid P + P \mid \alpha.P \mid P|P \mid P \setminus H$$

wobei $\alpha \in Act$, $X \in Var$ und $H \subseteq Kom$.

2.4.2 Semantik

Die Semantik der Ausdrücke von CCS ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \llbracket _ \rrbracket &: (Var \rightarrow CCS) \rightarrow CCS \rightarrow LTS^{CCS} \\ \llbracket _ \rrbracket \Gamma P &= (CCS, \rightarrow_\Gamma, P) \end{aligned}$$

wobei $LTS^{CCS} = \{(CCS, T, s) | T \subseteq CCS \times Act \times CCS, s \in CCS\}$ und \rightarrow_τ die kleinste Relation \rightarrow ist, die den folgenden Regeln genügt.

Inferenzregeln

$$\begin{array}{c} \text{prefix} \frac{}{a.P \xrightarrow{\alpha} P} \quad \text{choice_l} \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P+Q \xrightarrow{\alpha} P'} \quad \text{choice_r} \frac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P+Q \xrightarrow{\alpha} Q'} \quad \text{rec} \frac{\Gamma(X)=P \quad P \xrightarrow{\alpha} P'}{X \xrightarrow{\alpha} P'} \\ \text{par_l} \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P|Q \xrightarrow{\alpha} P'|Q} \quad \text{sync} \frac{P \xrightarrow{a} P' \quad Q \xrightarrow{\bar{a}} Q'}{P|Q \xrightarrow{\tau} P'|Q'} \quad \text{par_r} \frac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P|Q \xrightarrow{\alpha} P|Q'} \quad \text{res} \frac{P \xrightarrow{\alpha} P' \quad \alpha \notin H}{P \setminus H \xrightarrow{\alpha} P' \setminus H} \end{array}$$

2.4.3 Regulärer Ausdruck

Ein CCS-Asdruck wird regulär genannt, wenn er durch folgende Grammatik gebildet werden kann:

$$\begin{aligned} P &::= 0 \mid X \mid P + P \mid \alpha.P \mid R \\ R &::= 0 \mid R + R \mid \alpha.R \mid R|R \mid R \setminus H \end{aligned}$$

Satz Sofern Γ eine endliche Bindung ist bei der alle rechten Seiten regulär sind, ist $Reach(\llbracket P \rrbracket_\Gamma)$ für jedes $P \in CCS$ endlich.

Chapter 3

C1

Dieses Kapitel befasst sich mit der beobachtbarem Verhalten von Prozessen. Die Kommunikationsaktionen und die Spuren (mögliche Aktionsfolgen) lassen sich beobachten. Die internen Aktionen und die durchlaufenden Zustände lassen sich offensichtlich nicht beobachten!

Definition: Spuren

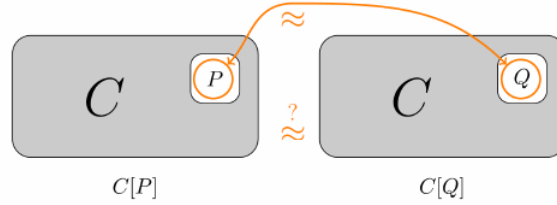
Sei $TS = (S, \rightarrow, s_0)$ ein LTS. Dann definieren wir die Funktion $LTS \rightarrow 2^{Act^*}$ als

$$Traces(TS) := \{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n \in Act^* \mid n \geq 0 \exists s_1, \dots, s_n : \forall 0 < i \leq n : s_{i-1} \xrightarrow{\alpha_i} s_i\}$$

als die Menge der endlichen Spuren von TS . Wir schreiben $s_0 \rightsquigarrow^e s'$

Definition: Kongruenzrelation

Eine Äquivalenzrelation \approx auf CCS ist eine Kongruenzrelation, wenn für alle CCS -Ausdrücke P, Q und alle Kontexte $C[\cdot]$, $P \approx Q$ impliziert, dass $C[P] \approx C[Q]$ gilt.



Beispiel: $\approx = \{x, y \in \mathbb{Z}^2 \mid |x| = |y|\}$

Algebraische Gesetze:

$$\begin{array}{ll} P + Q \sim_{tr} Q + P & \text{Kommutativität von } + \\ (P + Q) + R \sim_{tr} P + (Q + R) & \text{Assoziativität von } + \\ P + 0 \sim_{tr} P & 0 \text{ als neutrales Element von } + \end{array}$$

Spuräquivalenz

Sei $\Gamma : Var \rightarrow CCS, P, Q, R \in CCS$ und $H \subseteq Kom$ sowie $\alpha \in Act$. Wenn $P \sim_{tr} Q$, dann auch:

$$\begin{array}{lll} P + R \sim_{tr} Q + R & R + P \sim_{tr} R + Q & P|Q \sim_{tr} Q|R \\ R|P \sim_{tr} R|Q & \alpha.P \sim_{tr} \alpha.Q & P \setminus H \sim_{tr} Q \setminus H \end{array}$$