NP Zusammenfassung

Lukas Schaller

15.04.2019

Contents

Chapter 1

A1

1.1 Aktionen

Actionen Seien *Kom* eine Menge von Kommunikationsaktionen und *Int* eine davon disjunkte Menge von internen Aktionen. Dann ist

$$Act = Kom \cup Int$$

die Menge aller Aktionen. Dabei gelten folgende Konventionen:
$\alpha, \beta, \gamma, ... \in Act \qquad a, b, c, ... \in Int \qquad [a], [b], [c], ... \in Kom$

Transitionssystem (LTS) Ein beschritetes Transitionssystem TS ist ein Tripel $(S, \longrightarrow, s_0)$, wobei

- S die Zustandsmenge
- $\longrightarrow \subseteq S \times Act \times S$ die Transitionsrelation,
- $s_0 \in S$ der initiale Zustand ist

Nachfolger Sei ein LTS $TS = (S, \to, s_0)$ gegeben. Sei $s \in S$, $C \subseteq S$, $\alpha \in Act$, und $A \subseteq Act$.

$Post(s, \alpha) = \{s' \in S | s \xrightarrow{\alpha} s'\}$,

$$Post(s, A) = \bigcup_{\alpha \in A} Post(s, \alpha)$$

$Post(C, \alpha) = \bigcup_{s \in C} Post(s, \alpha)$,

$$Post(C, A) = \bigcup_{\alpha \in A} Post(C, \alpha)$$

Aktionen die in Zusand s als nächstes möglich sind:

$$Act(s) = \{\alpha \in Act \mid \exists s' : s \xrightarrow{\alpha} s'\}$$

Aktionen, die in Zustand s als nächstes beobachtet werden können:

$$Kom(s) = \{\alpha \in Kom \mid \exists s' : s \xrightarrow{\alpha} s'\}$$

Erreichbarkeit $Reach(s)$ ist die Menge aller von s erreichbaren Zustände in TS

$$Reach(s) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Post^n(s)$$

wobei $Post^0(s) = s$ und $Post^{n+1}(s) = Post(Post^n(s), Act)$

1.2 Trainingsblatt

Vorgänger

$Pre(s,\alpha) = \{s' \in S | s' \xrightarrow{\alpha} s\}$,

$$Pre(s,A) = \bigcup_{\alpha \in A} Pre(s,\alpha)$$

$Pre(C,\alpha) = \bigcup_{s \in C} Pre(s,\alpha)$,

$$Pre(C,A) = \bigcup_{\alpha \in A} Pre(C,\alpha)$$

terminaler Zustand Ein terminaler Zustand ist ein Zustand ohne Nachfolger. Ein Zustand ist genau dann terminal wenn $Act(s) = \emptyset$.

Alphabet des LTS Alphabet eines LTS $TS = \bigcup_{s \in Reach(TS)} Kom(s)$

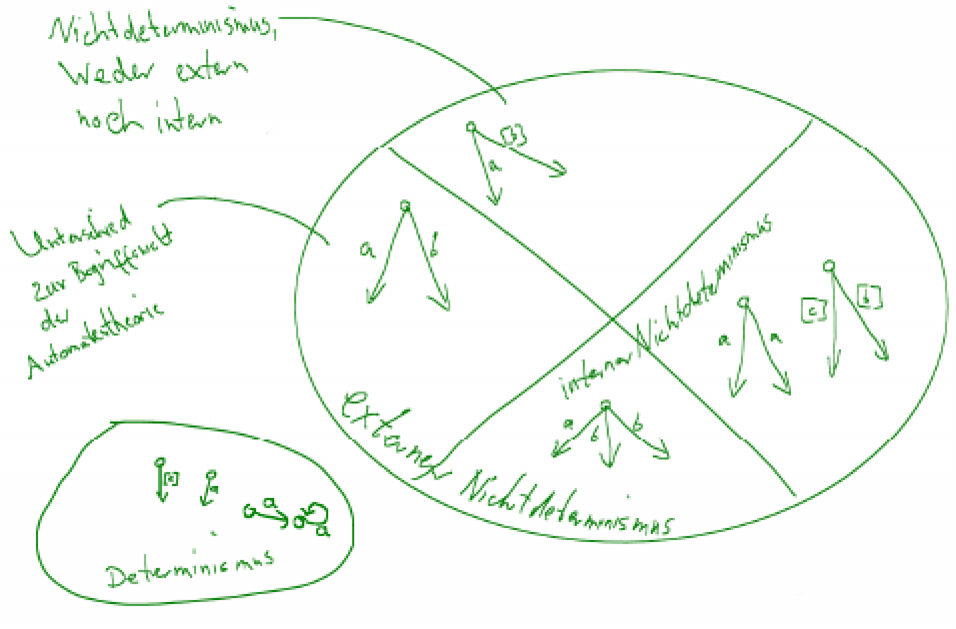
1.3 Nichtdeterminismus

Nichtdeterminismus Sei $Post(s) = Post(s, Act)$ und es sei ein LTS $TS = (S, \rightarrow, s_0)$ gegeben. TS ist deterministisch genau dann wenn für alle $s \in S$,

$$|Post(s)| \leq 1 \text{ und } |Act(s)| \leq 1$$

Andernfalls heißt das TS nichtdeterministisch!

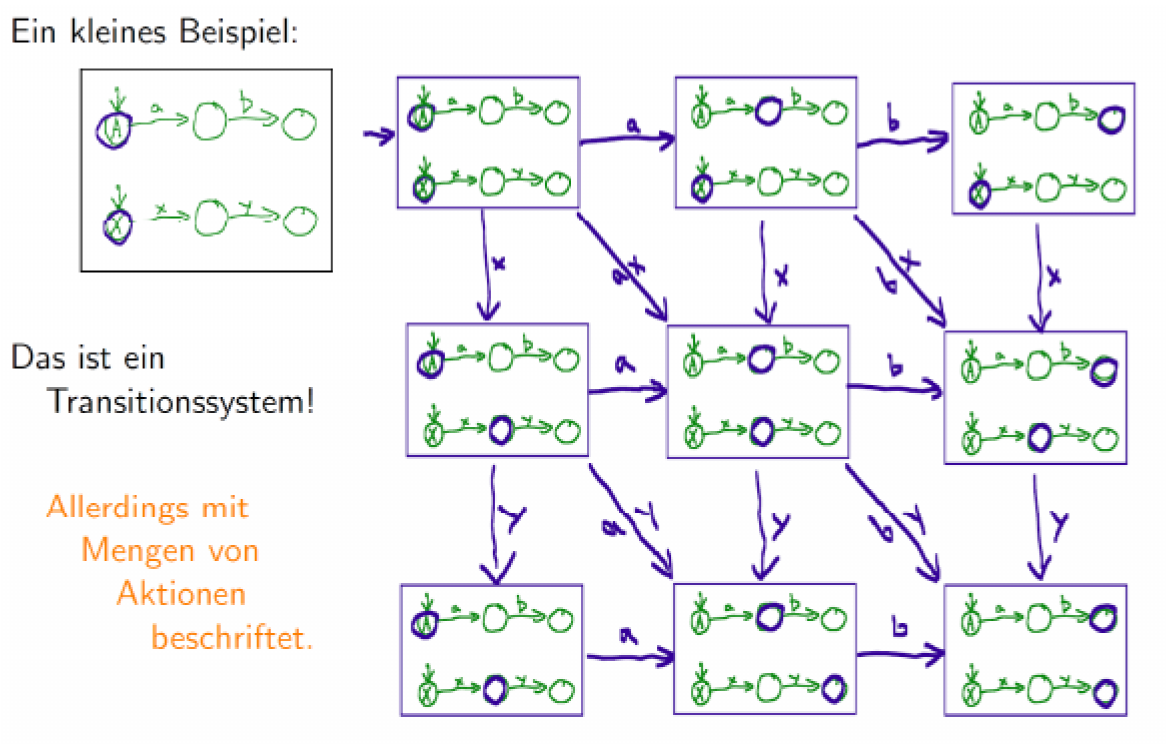
Interner und Externer Nichtdeterminismus



1.3.1 Annahmen nebenläufiger Prozesse

- Zeit wird nur bezüglich relativen Geschwindigkeit der Prozesse untereinander betrachtet, nicht absolut. Jeder Prozess kann gerade beliebig schnell oder langsam voranschreiten.
- Aktionen sind unteilbar und zeitlos.
- Nebenläufige Prozesse agieren komplett voneinander unabhängig und unbeeinflusst, es sei denn, sie kommunizieren explizit miteinander.

1.4 Labled Transitionsystem



Hinweis: Die diagonalen Kanten können wegen der Zeitlosigkeit der Aktionen auch weggelassen werden.

Chapter 2

B1 - CSS

2.1 CSS_0

2.1.1 Syntax

Gegeben sei die Menge aller Aktionen *Act*. Dann ist die Menge aller Ausdrücke in CSS_0 gegeben durch:

$$P \ ::= \ 0 \mid P \ + \ P \mid \alpha.P$$

wobei $\alpha \in Act$.

Klammersparregeln

- '+' klammert links: $P + Q + R \rightsquigarrow (P + Q) + R$
- '.' klammert rechts: $\alpha.\beta.P \rightsquigarrow \alpha.(\beta.P)$
- Punkt vor Strich: $\alpha.P + Q \rightsquigarrow (\alpha.P) + Q$

2.1.2 Semantik

Die Semantik einer Sprache beschreibt, welches mathematische Objekt mit einem Ausdruck der Sprache assoziiert werden soll. Die Semantik des Ausdrucks P aus CCS_0 ist ein LTS $[\![P]\!] = (S, \rightarrow, s_0)$.

- Zustandsmenge S ist die Menge aller CCS_0-Ausdrücke
- $s_0 = P$
- $\longrightarrow$ ist eine Teilmenge von $(CSS_0 \times Act \times CCS_0)$

Inferenzregeln

Hinweis: CCS_0 beinhaltet noch nicht die Inferenzregeln *rec*

$$\text{choice\_l} \ \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P+Q \xrightarrow{\alpha} P'} \qquad \text{prefix} \ \frac{}{a.P \xrightarrow{\alpha} P}$$

$$\text{choice\_r} \ \frac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P+Q \xrightarrow{\alpha} Q'} \qquad \text{rec} \ \frac{\Gamma(X)=P \quad P \xrightarrow{\alpha} P'}{X \xrightarrow{\alpha} P'}$$

Isomorphie

Zwei Transitionssysteme $TS = (S, \rightarrow, s_0)$ und $TS' = (S', \rightarrow', s_0')$ sind isomorph ($TS \sim_{iso} TS'$), wenn es eine Bijektion f gibt mit $f : Reach(TS) \rightarrow Reach(TS)$, so dass $f(s_0) = s_0'$ und für alle $s_1, s_2 \in Reach(TS)$ und alle $\alpha \in Act$ gilt: $s_1 \xrightarrow{\alpha} s_2$ genau dann wenn $f(s_1) \xrightarrow{\alpha}{}' f(s_2)$.

Satz Für jedes endliche azyklische LTS TS gibt es einen Ausdruck $P \in CCS_0$, so dass $TS \sim_{iso} [\![P]\!]$.

2.2 CCS_0^ω

2.2.1 Semantik

Gegeben sei die Menge aller Aktionen Act und eine Menge von Rekursionsvariablen Var. Dann ist die Menge der Ausdrücke in CCS_0^ω wie folgt:

$$P \ ::= \ o \,|\, X \,|\, P \ + \ P \,|\, \alpha.P \text{ , wobei } \alpha \in Act \text{ und } X \in Var$$

Beispiele

$X := a.b.Y$
$Y := b.Z + a.Y$
$Z := a.Y$

Eine Menge solcher Gleichungen definiert offensichtlich eine partielle Funktion: $\Gamma \in Var \rightharpoonup CCS_0^\omega$. In diesem Beispiel ergibt sich demnach: $\Gamma = \{(X, a.b.Y), (Y, b.Z + a.Y), (Z, a.Y)\}$

Es soll gelten:

- $(\alpha.P, \alpha, P) \in \rightarrow;$
- $(P + Q, \alpha, P') \in \rightarrow$, wann immer $(P, \alpha, P') \in \rightarrow$;
- $(P + Q, \alpha, Q') \in \rightarrow$, wann immer $\Gamma(x) = P$ und $(P, \alpha, P') \in \rightarrow$;
- nichts sonst ist Element von $\rightarrow_\Gamma$

2.2.2 Geschützte Ausdrücke

Eine Variable X ist geschützt in einem Ausdruck P, wenn jedes Auftreten von X in P in einem Teilausdruck von P der Form $\alpha.Q$ enthalten ist. Andernfalls heißt X ungeschützt.
Ein Ausdruck P heißt geschützt, wenn alle darin vorgekommenden Variablen in P geschützt sind. Andernfalls heißt P ungeschützt.

Beispiele

ungeschützte Ausdrücke: X, $\tau.X + Y$, $(a.X) + X$

geschützte Ausdrücke: $\alpha.X$, $\tau.(X + Y)$, $\alpha.(X + b.X)$

2.3 Sequentielles CSS_0^ω

Für eine Bindung $\Gamma : Var \rightharpoonup CCS_0^\omega$ sei $\rightarrow_\Gamma \subseteq CCS_0^\Gamma \times Act \times CCS_0^\Gamma$ die kleinste Relation $\longrightarrow$, die den Inferenzregeln genügen.

2.3.1 Semantik

Sei $LTS_0^\omega = \{(CCS_0^\omega, T, s) | T \subseteq CCS_0^\omega \times Act \times CCS_0^\omega, s \in CCS_0^\omega\}$. Die Semantik von CCS_0^ω ist eine (kaskadierte) Funktion:

$$\begin{aligned} [\![\_]\!] \ &: \ (Var \rightharpoonup CCS_0^\omega) \ \rightarrow \ CCS_0^\omega \ \rightarrow \ LTS_0^\omega \\ [\![\_]\!] \ \Gamma \ P \ &= \ (CCS_0^\omega, \rightarrow_\Gamma, P) \end{aligned}$$

Wir schreiben $[\![P]\!]_\Gamma$ für $[\![\_]\!] \ \Gamma \ P$, oder auch nur $[\![P]\!]$, sofern Γ aus dem Kontext heraus klar ist.

Satz Für jedes endliche LTS TS gibt es einen Ausdruck $P \in CCS_0^\omega$ und eine endliche Bindung Γ, sodass $TS \sim_{iso} [\![P]\!]_\Gamma$

Zusätzliche Interferenzregeln

TODO: Hier Bild von par_l und par_r einfügen

2.3.2 Synchronisation

Synchronisation bietet die Grundlage um unterschiedliche Prozesse auf Aktionen reagieren zu lassen. So kann zum Beispiel die 'light'-Aktion des Feuerzeug-Prozesses in einem Prozess eines Chinaböllers die passive Aktion 'light' hervorrufen. In CSS machen wir dazu die Kommunikationsaktionen entweder 'aktiv' oder 'passiv'. Statt einer beliebigen Menge Kom von Markierungen verwenden wir eine Menge, die mehr Struktur aufweist:
$Kom = A^! \bigcup A^?$. Aktionen mit '!' als Output-Aktionen (aktiv) und Aktionen mit '?' als Input-Aktionen interpretiert werden.

Komplementarität Input- und Output-Aktionen treten als Paare auf. Das Komplement von $a \in A^! \bigcup A^?$ ist $\bar{a}$. Auch für interne Aktionen τ gilt $\tau = \bar{\tau}$. Das doppelte Komplement hebt die Wirkung auf: $\alpha \in Act : \bar{\bar{a}} = \alpha$

Hinweis Interne Aktionen können NICHT synchronisieren.

Zusätliche Interferenzregel

$$\text{sync} \quad \frac{P \xrightarrow{a} P' \qquad Q \xrightarrow{\bar{a}} Q'}{P|Q \xrightarrow{\tau} P'|Q'}$$

2.3.3 Restriktions-Operator

Der Restriktions-Operator 'únterbindet bestimmte (Paare von) Aktionen eines Prozesses. Intuitiv gesprochen erzwingt er eine Synchronisation.
P\H ist ein zweistelliger Operator, mit **P** als CCS-Ausdruck und **H** als menge von Kommunikationsaktionen, die unterbunden werden sollen.

Interferenzregel

$$\text{res} \quad \frac{P \xrightarrow{\alpha} P' \qquad \alpha \notin H}{P\backslash H \xrightarrow{\alpha} P'\backslash H}$$

Annahmen über zulässige Menge H:

- Die interne Aktion kann nicht unterbunden werden: $\tau \notin H$
- Aktionen treten in H paarweise auf: $a \in H \iff \bar{a} \in H$

2.4 Volle CCS-Power

2.4.1 Syntax

Gegeben sei die Menge aller Kommunikationsaktionen $Kom = A^! \bigcup A^?$, $Act = Kom \bigcup \{\tau\}$ und eine Menge von Rekursionsvariablen Var. Dann ist die Menge aller Ausdrücke in CCS wie folgt gegeben:

$$P \ ::= \ 0 \mid X \mid P \ + \ P \mid \alpha.P \mid P|P \mid P\backslash H$$

wobei $\alpha \in Act, X \in Var$ und $H \subseteq Kom$.

2.4.2 Semantik

Die Semantik der Ausdrücke con CCS ist gegeben durch:

$$[\![\_]\!] \ : \ (Var \rightharpoonup CCS) \ \rightarrow \ CCS \ \rightarrow \ LTS^{CCS}$$
$$[\![\_]\!] \ \Gamma \ P \ = \ (CCS, \rightarrow_\Gamma, P)$$

wobei $LTS^{CCS} = \{(CCS, T, s) | T \subseteq CCS \times Act \times CCS, s \in CCS\}$ uns $\rightarrow_\tau$ die kleinste Relation $\rightarrow$ ist, die den folgenden Regeln genügt.

Inferenzregeln

$$\text{prefix}\ \frac{}{\alpha.P \xrightarrow{\alpha} P} \qquad \text{choice\_l}\ \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P+Q \xrightarrow{\alpha} P'} \qquad \text{choice\_r}\ \frac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P+Q \xrightarrow{\alpha} Q'} \qquad \text{rec}\ \frac{\Gamma(X)=P \quad P \xrightarrow{\alpha} P'}{X \xrightarrow{\alpha} P'}$$

$$\text{par\_l}\ \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P|Q \xrightarrow{\alpha} P'|Q} \qquad \text{sync}\ \frac{P \xrightarrow{a} P' \quad Q \xrightarrow{\overline{a}} Q'}{P|Q \xrightarrow{\tau} P'|Q'} \qquad \text{par\_r}\ \frac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P|Q \xrightarrow{\alpha} P|Q'} \qquad \text{res}\ \frac{P \xrightarrow{\alpha} P' \quad \alpha \notin H}{P\backslash H \xrightarrow{\alpha} P'\backslash H}$$

2.4.3 Regulärer Ausdruck

Ein CCS-Asdruck wird regulär genannt, wenn er durch folgende Grammatik gebildet werden kann:

$$\begin{aligned} P &::= 0 \mid X \mid P + P \mid \alpha.P \mid R \\ R &::= 0 \mid R + R \mid \alpha.R \mid R|R \mid R\backslash H \end{aligned}$$

Satz Sofern Γ eine endliche Bindung ist bei der alle rechten Seiten regulär sind, ist $Reach([\![P[\![_\Gamma)$ für jedes $P \subset CCS$ endlich.