

Wirtschaftsmathematik

5. Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1 (14 Punkte)

Sie führen ein exklusives Eiscafé mit nur drei aus frischen Früchten hergestellten Eissorten: Himbeer-Eis (x), Ananas (y) und Heidelbeere (z). Zu Beginn des Tages haben Sie insgesamt 100 Liter Eis.

Am Mittag stellen Sie fest, dass Sie schon 20% der ursprünglichen Menge Himbeer-Eis und 50% an Heidelbeer-Eis verkauft haben. Insgesamt beläuft sich der Eis-Bestand auf noch 50 Liter. Abends sind noch 10% der ursprünglichen Menge Himbeer-Eis, immer noch 40% Ananas-Eis und 20% Heidelbeer-Eis übrig. Damit sind insgesamt 25 Liter Eis übriggeblieben.

- Stellen Sie das lineare Gleichungssystem zu diesem Problem auf. (6 Punkte)
- Wie haben sich die 100 Liter Eis zu Beginn des Tages auf die drei Eissorten verteilt? Lösen Sie mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems. (8 Punkte)

Lösung

x: Himbeere

y: Ananas

z: Heidelbeere

x	y	z	L
1	1	1	100
0,8	0,4	0,5	50
0,1	0,4	0,2	25
1	1	1	100
0	0,4	0,3	30
0	-0,3	-0,1	-15
1	1	1	100
0	1	0,75	75
0	0	-0,13	-7,5
1	0	0	10
0	1	0	30
0	0	1	60

Liter Himbeere

Liter Ananas

Liter Heidelbeere



Lineare Gleichungssysteme

Ökonomische Anwendung: Innerbetriebliche Leistungsverrechnung

- a) Die Verrechnungspreise sind k_1 für A-pret, k_2 für B-säure und k_3 für C-tanol. Das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Verrechnungspreise (Selbstkosten) für A-pret, B-säure und C-tanol lautet:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{26 + 6 \cdot k_2 + 1 \cdot k_3}{12} & 12 \cdot k_1 &= 26 + 6 \cdot k_2 + 1 \cdot k_3 \\ k_2 &= \frac{2 + 2 \cdot k_3}{10} & \iff 10 \cdot k_2 &= 2 + 2 \cdot k_3 \\ k_3 &= \frac{28 + 4 \cdot k_2}{8} & 8 \cdot k_3 &= 28 + 4 \cdot k_2 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich folgende Standardform

$$\begin{aligned} 12k_1 - 6k_2 - k_3 &= 26 \quad (I) \\ 10k_2 - 2k_3 &= 2 \quad (II) \\ -4k_2 + 8k_3 &= 28 \quad (III) \end{aligned}$$

Wirtschaftsmathematik

Lösung

Lineare Gleichungssysteme

Ökonomische Anwendung: Innerbetriebliche Leistungsverrechnung

b) Aus den Gleichungen II und III können die Verrechnungspreise $k_2 = 1$ und $k_3 = 4$ bestimmt werden ($4 \cdot II + III$ ergibt $36k_2 = 36$ und $k_2 = 1$. Dies eingesetzt in III ergibt $-4 \cdot 1 + 8k_3 = 28 \iff 8k_3 = 32$ und $k_3 = 4$). Gleichung I mit $k_2 = 1$ und $k_3 = 4$ ergibt $12k_1 - 6 \cdot 1 - 4 = 26$ und $k_1 = \frac{36}{12} = 3$. Die Verrechnungspreise sind damit $k_1 = 3$, $k_2 = 1$ und $k_3 = 4$.

Quelle: Pampel: Arbeitsbuch Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Springer Spektrum (Wiesbaden)



Ökonomische Anwendung: Innerbetriebliche Leistungsverrechnung

c) Die 12 Einheiten A-pret können zum Preis von $p_A = 10$ verkauft werden, die Stückkosten sind die berechneten Selbstkosten $k_1 = 3$, sodass der Gewinn für 12 Einheiten A-pret $12 \cdot (10 - 3) = 84$ ist.

Die überschüssigen 5 Einheiten C-tanol können zum Preis von $p_C = 5$ verkauft werden, die Stückkosten sind die berechneten Selbstkosten $k_3 = 4$, sodass der Gewinn für 5 Einheiten C-tanol $5 \cdot (5 - 4) = 5$ ist. B-Säure wurde vollständig bei den anderen Produktionen verbraucht.

Der Gesamtgewinn beträgt $84 + 5 = 89$ Geldeinheiten. Dieser entspricht der Differenz $145 - 56 = 89$ aus dem Gesamterlös $120 + 25 = 145$ (Verkauf der nicht intern verbrauchten Güter) und den Gesamtkosten $26 + 2 + 28 = 56$ (Summe der Primärkosten, alles andere wird verrechnet).