Mathematik
WS 2023-24

Christian Stielow
christian.stielow@hs-mainz.de

WIRTSCHAFT
HOCHSCHULE MAINZ
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES

WIRTSCHAFT
HOCHSCHULE MAINZ
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES

Teil 3 –
Matrizen und Determinanten

Christian Stielow
christian.stielow(at)hs-mainz.de

Vorlesungsunterlagen der FG Quantitative Methoden
(insbesondere Prof. Dr. Griebsch und Prof. Dr. Schlütter)

Wirtschaftsmathematik

Matrizen

Problemstellung – Marketing und Vertrieb

Ein Institut untersucht den Wechsel von Käufern zwischen den Zeitschriften A, B und C in einem vorher festgelegten Zeitraum (z.B. jeden Monat). Zu Beginn habe A 1000 , B 4000 und C 2000 Käufer.
Die folgende Übergangstabelle sei gegeben:

nach \ von	A	B	C
A	80%	20%	10%
B	10%	70%	50%
C	10%	10%	40%

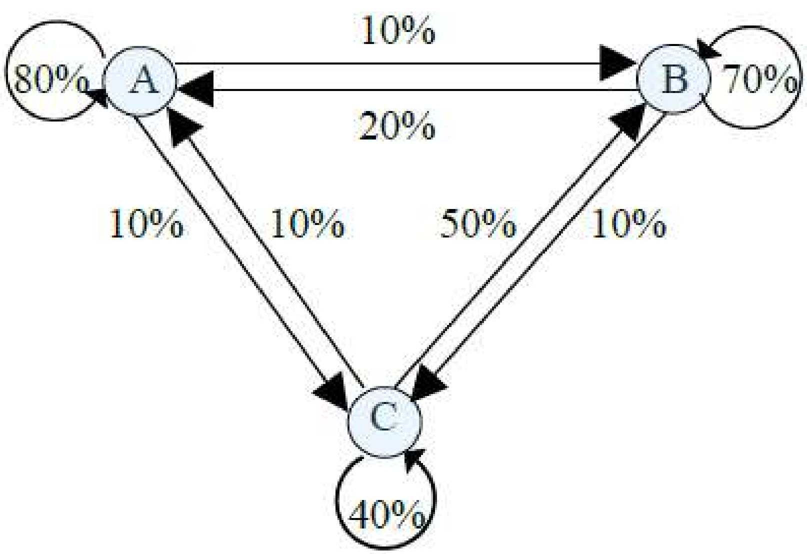
Dies bedeutet z.B. , dass 80% der Käufer von A wieder die Zeitschrift A kaufen usw.

Aufgabe: Wie könnte dieser Zusammenhang möglichst sinnvoll graphisch dargestellt werden?

Wirtschaftsmathematik

Matrizen

Ökonomische Problemstellung – Marketing und Vertrieb



Gozintograph

Wirtschaftsmathematik

Matrizen

Ökonomische Problemstellung – Einkauf bzw. Produktionsplanung

Sie sind Einkaufsmanager und dafür verantwortlich sicherzustellen, dass Ihr Unternehmen für seine 3 Produkte über genügend Rohstoffe verfügt.

Rohstoffe werden zunächst zu 4 Bauteilen verarbeitet. Folgende Tabelle enthält den Bedarf an Rohstoffen für die 3 Bauteile:

	Bauteil 1	Bauteil 2	Bauteil 3	Bauteil 4
Rohstoff 1	2	1	2	2
Rohstoff 2	3	2	0	1
Rohstoff 3	4	0	2	0

Zudem enthält folgende Tabelle den Bedarf an Bauteilen für die 3 Endprodukte:

	Produkt 1	Produkt 2	Produkt 3
Bauteil 1	4	2	0
Bauteil 2	0	4	4
Bauteil 3	3	2	4
Bauteil 4	4	0	4

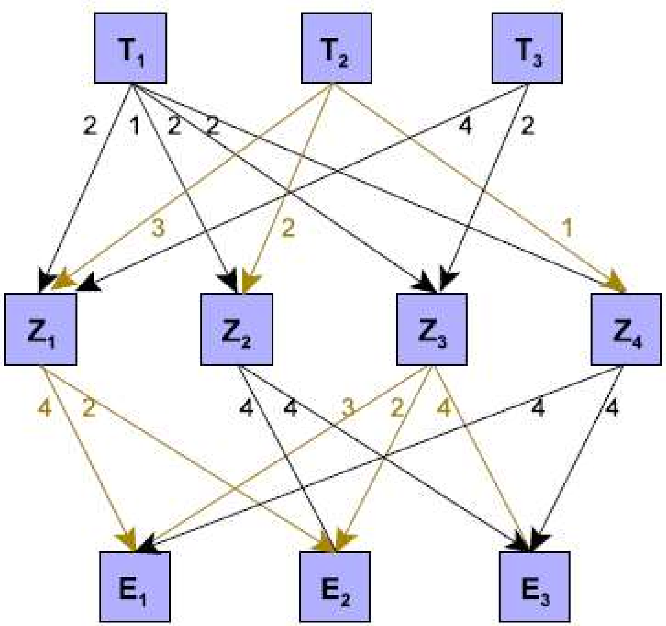
Aufgabe: Wie könnte dieser Zusammenhang möglichst sinnvoll graphisch dargestellt werden?

Matrizen

Ökonomische Problemstellung – Einkauf bzw. Produktionsplanung

	Bauteil 1	Bauteil 2	Bauteil 3	Bauteil 4
Rohstoff 1	2	1	2	2
Rohstoff 2	3	2	0	1
Rohstoff 3	4	0	2	0

	Produkt 1	Produkt 2	Produkt 3
Bauteil 1	4	2	0
Bauteil 2	0	4	4
Bauteil 3	3	2	4
Bauteil 4	4	0	4



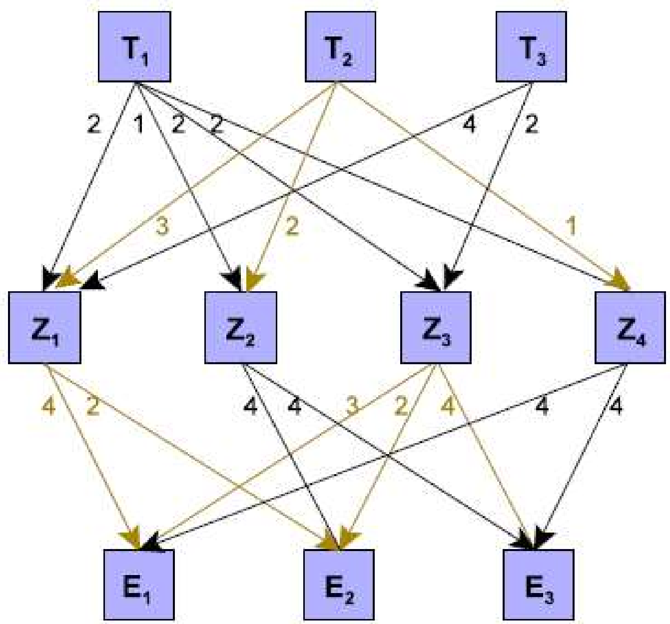
Der **Gozintograph** („Verflechtungsdiagramm“) ist ein gerichteter Graph, der beschreibt, aus welchen Teilen sich ein oder mehrere Produkte zusammensetzen. Der Produktionsprozess kann dabei mehrstufig sein, wobei der Input aus Rohstoffen, Halb- und Fertigteilen besteht.

Nach A. Vazsonyi, der in humorvoller Absicht diese Betrachtungen auf den ’italienischen Mathematiker’ ***Zepartzat Gozinto*** zurückführte.

Wirtschaftsmathematik

Matrizen

Ökonomische Problemstellung – Einkauf bzw. Produktionsplanung



Mögliche Fragestellungen:

Die Anzahl der Endprodukte ist bekannt und die Anzahl der Ausgangsstoffe ist gesucht.
Fragestellung „Einkauf“: Wie viele Ausgangsstoffe werden zur Herstellung einer festgelegten Anzahl Endprodukte benötigt?

Die Anzahl der Ausgangsstoffe ist bekannt und die Anzahl der Endprodukte ist gesucht.
Fragestellung „Produktionsplanung“: Wie viele Endprodukte können bei einer festgelegten Anzahl von Ausgangsstoffen hergestellt werden?

Wirtschaftsmathematik

Matrizen

Begriffe

Eine **Matrix** ist eine schematische Darstellung von m Zeilen und n Spalten

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ein Matrixelement a_{ij} ist definiert durch den Zeilenindex i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ und den Spaltenindex j mit $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

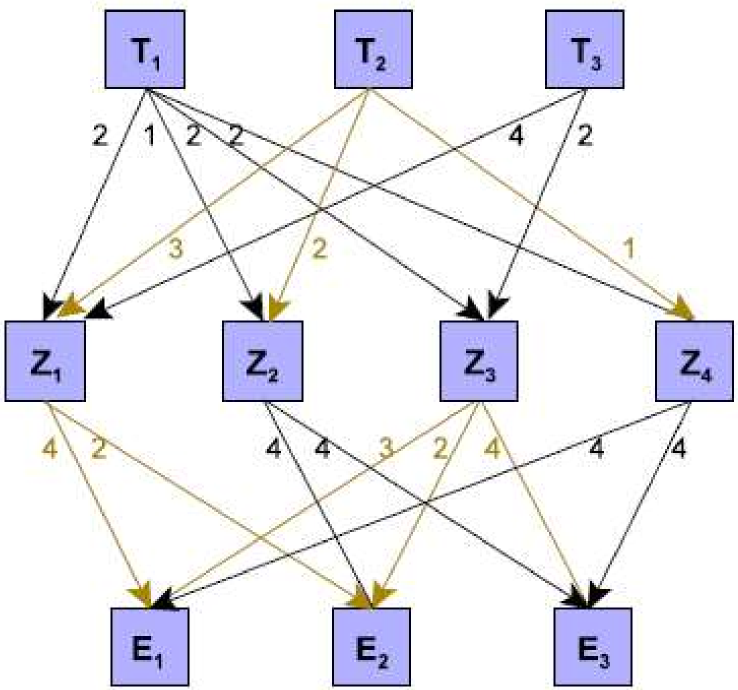
! $a_{\text{ZeileSpalte}}$

Quelle: Holey/Wiedemann: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Springer Gabler (Berlin/Heidelberg)

Wirtschaftsmathematik

Matrizen

Begriffe



Bedarfsmatrix
Prozessmatrix

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \\
\hline
T_1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\
T_2 & 3 & 2 & 0 & 1 \\
T_3 & 4 & 0 & 2 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & E_1 & E_2 & E_3 \\
\hline
Z_1 & 4 & 2 & 0 \\
Z_2 & 0 & 4 & 4 \\
Z_3 & 3 & 2 & 4 \\
Z_4 & 4 & 0 & 4
\end{array}
$$

Wirtschaftsmathematik

Matrizen

Begriffe

1 **Die transponierte Matrix**
Das Vertauschen von Zeilen und Spalten einer Matrix wird **Transposition** genannt. Gegeben sei eine Matrix:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \text{ mit } i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

dann ist die transponierte Matrix durch

$$\mathbf{A}^\top = (a_{ji}) \text{ mit } i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$$

gegeben. Es gilt: $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}.$

Beispiel:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Quelle: Holey/Wiedemann: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Springer Gabler (Berlin/Heidelberg)

Wirtschaftsmathematik

Matrizen

Begriffe

2 **Vektoren**

Vektoren sind spezielle Matrizen. Ein Vektor der Form:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

ist eine Matrix mit n Zeilen und einer Spalte, also eine $n \times 1$–Matrix. Ein Zeilenvektor

$$\mathbf{a}^\top = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

ist dann eine Matrix mit einer Zeile und n Spalten, also eine $1 \times n$–Matrix.

Quelle: Holey/Wiedemann: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Springer Gabler (Berlin/Heidelberg)

Wirtschaftsmathematik

Matrizen

Begriffe

3 **Die quadratische Matrix**
Ist $m = n$ spricht man von einer *quadratischen Matrix*. Die Elemente

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$$

nennt man dann *Diagonalelemente*.

4 **Symmetrische Matrizen**
Für quadratische Matrizen kann der Fall eintreten, dass

$$\mathbf{A}^\top = \mathbf{A},$$

in diesem Fall heißt **A symmetrische Matrix.**

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 12 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Quelle: Holey/Wiedemann: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Springer Gabler (Berlin/Heidelberg)

Matrizen

Begriffe

5

Die Nullmatrix

Die *Nullmatrix* ist definiert als die $m \times n$–Matrix mit $a_{ij} = 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n$. Für die Nullmatrix schreiben wir: $0_{m \times m}$.

6

Die Einheitsmatrix

Die *Einheitsmatrix* ist eine symmetrische $n \times n$–Matrix mit

$$\mathbb{1}_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}.$$

Quelle: Holey/Wiedemann: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Springer Gabler (Berlin/Heidelberg)

Wirtschaftsmathematik

Matrizen

Begriffe

7

Die **Dreiecksmatrix**

Unter einer **Dreiecksmatrix** versteht man eine quadratische Matrix, die sich dadurch auszeichnet, dass alle Einträge unterhalb (obere **Dreiecksmatrix**) bzw. oberhalb (untere **Dreiecksmatrix**) der Hauptdiagonale null sind.

obere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 10 & -5 \\ 0 & 4 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

untere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & a_{32} & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 10 & -3 & 1 & 0 \\ -5 & 9 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Quelle: Haack/Tippe/Stobernack/Wendler: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Springer Gabler (Berlin/Heidelberg)

Wirtschaftsmathematik

Matrizen

Begriffe - Beispiele

a)

$$\begin{array}{c} \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3x4 Matrix
Sonst nichts …

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quadratisch
Obere Dreiecksmatrix
Wenn oben rechts 0
Dann auch untere
Dreiecksmatrix und
symmetrisch
Wenn statt 2 eine 1
dann Einheitsmatrix

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Quadratisch
Wenn statt 4 eine 2
dann symmetrisch

d)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Quadratisch
Transponiert zu b)

Wirtschaftsmathematik

Matrizen

Rechenregeln – Addition und Subtraktion

Zwei Matrizen addiert man, indem man die an der gleichen Stelle stehenden Elemente addiert bzw. subtrahiert.

Voraussetzung: Die Matrizen müssen vom gleichen Typ (m, n) sein.

Beispiele: Berechnen Sie, wenn möglich:

a) **A‘** b) **C‘** c) **F‘** d) **A + E** e) **A – E** f) **C + B** g) **C + B‘** h) **D‘– F**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0{,}8 & -4{,}3 \\ 8 & 9 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -3 & 1{,}2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Wirtschaftsmathematik

Matrizen

Rechenregeln – Skalarmultiplikation

Wenn man eine Matrix mit einem Skalar multipliziert, wird jedes Element der Matrix mit dieser Zahl multipliziert.

Schreibweise:

$s \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot s$

Beispiele:
Berechnen Sie: $3 \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{C}/2$, $\mathbf{F} \cdot 0{,}5$

Matrizen

Rechenregeln – Matrixmultiplikation

Man kann zwei Matrizen **A** und **B** miteinander multiplizieren, wenn die Spaltenzahl von **A** der Zeilenzahl von **B** entspricht. Man erhält eine Matrix **C** mit den Elementen:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

i ist der Laufindex der Zeilen von Matrix **A** und k ist der Laufindex der Spalten von Matrix **B**.

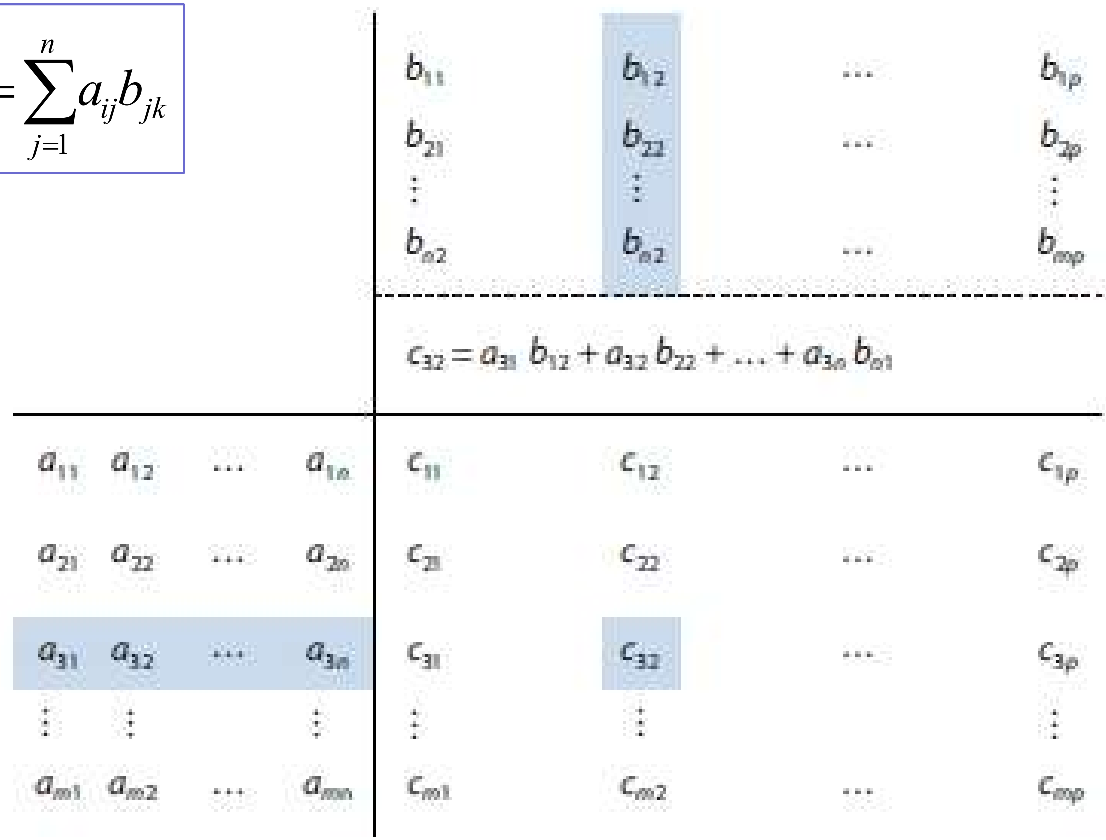
Man schreibt: **A**·**B**.

Wirtschaftsmathematik

Matrizen

Rechenregeln – Matrixmultiplikation mit dem Falk‘schen Schema

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$



Quelle: Haack/Tippe/Stobernack/Wendler: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Springer Gabler (Berlin/Heidelberg)

Wirtschaftsmathematik

Matrizen

Rechenregeln – Matrixmultiplikation mit dem Falk‘schen Schema

Beispiel

$A \cdot B = C$					0	4	6
					-1	2	-2
					3	4	1
					-4	7	0
					1	-2	6
1	-0,5	0	1,5	-2	-7,5	$c_{1,2}$	-5
6	4	-2	1	0	-14	31	26
0,5	3	-1	-3	10	$c_{3,1}$	-37	56
2	2	-6	1	4	-20	-13	$c_{3,3}$

Quelle: Haack/Tippe/Stobernack/Wendler: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Springer Gabler (Berlin/Heidelberg)

Wirtschaftsmathematik

Matrizen

Rechenregeln – Matrixmultiplikation Beispiele

1) Berechne **A·B** und **B·A** von $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ A*B: 2 x 3 * 3 x 3 = 2 x 3

2) Berechne **A·B** und **B·A** von $A=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix}$ A*B: 3 x 1 * 1 x 3 = 3 x 3

Beachte:

- Das Ergebnis ist eine Matrix mit der Anzahl der Zeilen der ersten Matrix und Anzahl der Spalten der zweiten Matrix. Z.B.: 4 x 5 * 5 x 3 = 4 x 3
- Im allgemeinen gilt: **A·B ≠ B·A**

Multiplikation von Skalar mit Matrix ist eine Sonderform der Matrixmultiplikation.

Wirtschaftsmathematik

Matrizen

Übungsaufgabe

Ökonomische Problemstellungen – Aufgabe 2

Problemstellung – Marketing und Vertrieb

Ein Institut untersucht den Wechsel von Käufern zwischen den Zeitschriften A, B und C in einem vorher festgelegten Zeitraum (z.B. jeden Monat). Zu Beginn habe A 1000 , B 4000 und C 2000 Käufer.
Die folgende Übergangstabelle sei gegeben:

nach \ **von**	A	B	C
A	80%	20%	10%
B	10%	70%	50%
C	10%	10%	40%

Dies bedeutet z.B. , dass 80% der Käufer von A wieder die Zeitschrift A kaufen usw.

Frage: Wie viele Leser haben A, B und C in der folgenden Periode?

Wirtschaftsmathematik

Matrizen

Übungsaufgabe

Ökonomische Problemstellungen – Lösung Aufgabe 2

Problemstellung – Marketing und Vertrieb

Ein Institut untersucht den Wechsel von Käufern zwischen den Zeitschriften A, B und C in einem vorher festgelegten Zeitraum (z.B. jeden Monat). Zu Beginn habe A 1000 , B 4000 und C 2000 Käufer.
Die folgende Übergangstabelle sei gegeben:

von / nach	A	B	C
A	80%	20%	10%
B	10%	70%	50%
C	10%	10%	40%

Dies bedeutet z.B. , dass 80% der Käufer von A wieder die Zeitschrift A kaufen usw.

Frage: Wie viele Leser haben A, B und C in der folgenden Periode?

$$\begin{pmatrix} 80\% & 20\% & 10\% \\ 10\% & 70\% & 50\% \\ 10\% & 10\% & 40\% \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 4000 \\ 2000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1800 \\ 3900 \\ 1300 \end{pmatrix}$$

Wirtschaftsmathematik

Übungsaufgabe

Determinanten

Übungsaufgabe

Lösung über LGS

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{x} \\ \boxed{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \end{pmatrix}$$

① LGS

$$\begin{array}{cc|c} & & x \\ & & y \\ \hline 2 & 1 & \\ 3 & 2 & \end{array}$$

LGS

$$\boxed{\begin{aligned} 10 &= 2x + 1y \\ 17 &= 3x + 2y \end{aligned}}$$

Wirtschaftsmathematik

Determinanten

Aufgabe für die nächste Lehrveranstaltung

Übungsaufgabe

1. 9 Klausur Wintersemester 2009/10 Aufgabe 4

Ein Textilhersteller produziert 3 verschiedene T-Shirts in 4 verschiedenen Größen. Dazu werden 3 Rohstoffe benötigt. Folgende Matrizen sind gegeben:

Matrix der Liefermenge an die Boutique „Anton“: $A = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 30 & 10 \\ 10 & 4 & 5 & 2 \\ 15 & 20 & 20 & 0 \end{pmatrix}$

Preise der T-Shirts: $p = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}$

Rohstoffmengen, zur Produktion eines T-Shirts: $R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Zeilen: T-Shirt-Arten, Spalten: Rohstoffe

Kosten der Rohstoffe: $k = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vorratsmengen der Rohstoffe $b = \begin{pmatrix} 65 \\ 60 \\ 45 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie *p'A* und geben Sie an, was das Ergebnis aussagt.

b) Berechnen Sie *A'R* und geben Sie an, was das Ergebnis aussagt.

c) Berechnen Sie *Rk* und geben Sie an, was das Ergebnis aussagt.

d) Berechnen Sie *b'k* und geben Sie an, was das Ergebnis aussagt.

e) Berechnen Sie *(p'A)'-A'Rk* und geben Sie an, was das Ergebnis aussagt.

f) Berechnen Sie x aus *R'x* = *b* und geben Sie an, was das Ergebnis aussagt.