Wirtschaftsmathematik
WS 2023-24

Christian Stielow
christian.stielow@hs-mainz.de

WIRTSCHAFT
HOCHSCHULE MAINZ
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES

WIRTSCHAFT
HOCHSCHULE MAINZ
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES

Teil 2 –
Lineare Gleichungssysteme

Christian Stielow
christian.stielow(at)hs-mainz.de

Vorlesungsunterlagen der FG Quantitative Methoden
(insbesondere Prof. Dr. Griebsch und Prof. Dr. Schlütter)

Wirtschaftsmathematik

Lineare Gleichungssysteme

Lernziele

1. Lösungen eines Gleichungssystems bestimmen
2. Erkennen, wann ein Gleichungssystem eindeutig lösbar, nicht lösbar oder mehrdeutig lösbar ist.
3. Anwendungsfälle durch Modellierung von linearen Gleichungssystemen lösen können
4. Verstehen, wie Google Suchergebnisse ermittelt („ranked“)

Wirtschaftsmathematik

Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem??

Quelle: BLK-Modellversuchsprogramm „Steigerung der Effizienz des mathematish-naturwissenschaftlichen Unterrichts"

Wirtschaftsmathematik

Lineare Gleichungssysteme

Einfache Lösungsverfahren für Gleichungssysteme sind

Einsetzungsverfahren	Auflösen einer Gleichung nach einer Variablen und Einsetzen der Lösung für diese Variable in alle anderen Gleichungen
Gleichsetzungsverfahren	Auflösen aller Gleichungen nach einer Variablen und Gleichsetzen der rechten Seite einer Gleichung mit allen anderen Gleichungen
Additionsverfahren	Auswahl einer Gleichung. Multiplikation aller anderen Gleichungen, sodass die Koeffizienten einer Variablen des Koeffizienten der ausgewählten Gleichung entsprechen, aber ein anderes Vorzeichen haben. Addition aller Gleichungen mit der ausgewählten Gleichung.

Wirtschaftsmathematik

Lineare Gleichungssysteme

Beispiel

2 Gleichungen und 2 Unbekannte

Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mit einem der Verfahren:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 4 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Eine Lösung: } x_1 = -1,\ x_2 = -2}$

Lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Lösen Sie folgende Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Keine Lösung

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Unendlich viele Lösungen

Lineare Gleichungssysteme können eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen haben.

Praktische Anwendung

Ökonomische Anwendung: Innerbetriebliche Leistungsverrechnung

Kosten sind der bewertete Verzehr von Gütern und Dienstleistung (Inputs) zur Erstellung der betrieblichen Leistung.

Primäre Kosten:
Die Inputs werden von außen bezogen,
Beispiele: Löhne, Material, Dienstleistungen.

Sekundäre Kosten:
Die Inputs werden von innen bezogen,
Beispiele: Verwaltung, Personalabteilung, IT-Service, Transport

Nicht nur die primären, auch die sekundären Kosten müssen den einzelnen betrieblichen Leistungen zugerechnet werden. Ziele u.a.:

- die exakte Ermittlung der Kosten der einzelnen Kostenstellen
- die genaue Stückkostenermittlung

Mit linearen Gleichungssystemen können innerbetriebliche Verrechnungspreise ermittelt werden.

Wirtschaftsmathematik

Praktische Anwendung

Lineare Gleichungssysteme

Ökonomische Anwendung: Innerbetriebliche Leistungsverrechnung

In Unternehmen mit mehreren Abteilungen unterscheidet man pro Abteilung zwischen primären und sekundären Kosten.

Primäre Kosten: Löhne, Gehälter, Material, Abschreibungen

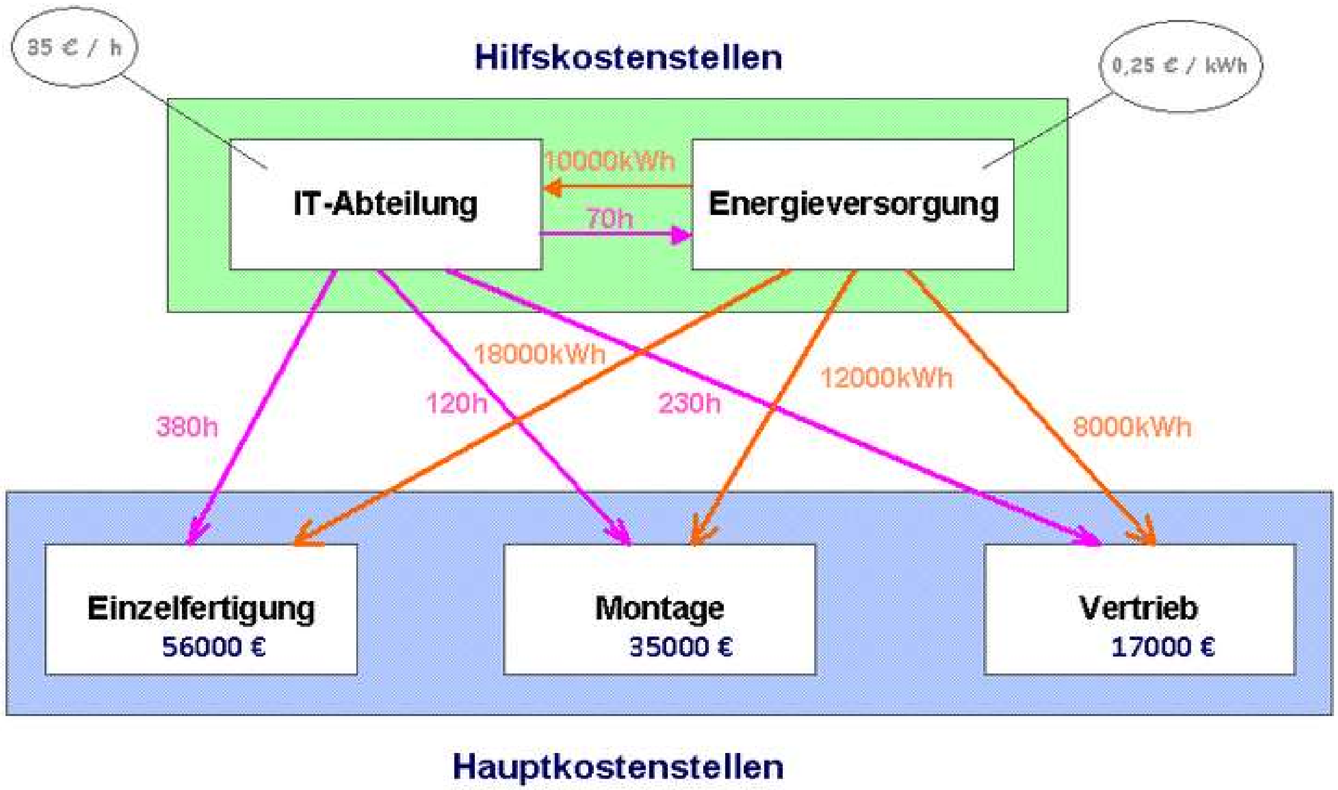
Sekundäre Kosten: Wert der innerbetrieblich empfangenen Leistungen

Da die einzelnen Abteilungen, die als „Hilfsbetriebe" (IT-Service, Fahrdienst, Personal) fungieren, weder Gewinne noch Verluste erwirtschaften sollen, muss folgende Fundamentalgleichung für jede Kostenstelle erfüllt sein:

Wert der produzierten Leistung = Primäre Kosten + Sekundäre Kosten

Praktische Anwendung

Ökonomische Anwendung: Innerbetriebliche Leistungsverrechnung



Quelle: https://www.der-wirtschaftsingenieur.de/index.php/kostenstellenrechnung/

Praktische Anwendung

Ökonomische Anwendung: Innerbetriebliche Leistungsverrechnung

Ein lokaler Stromanbieter betreibt ein Biokraftwerk zur Stromherstellung, wobei der Biokraftstoff vom Stromanbieter selbst hergestellt wird.

- Bei der Produktion von 500 Einheiten Biokraftstoff fallen 3500 € Primärkosten an. Ferner werden 100 Einheiten Strom benötigt.
- Zur Produktion von 200 Einheiten Strom fallen 600 € Primärkosten an. Ferner werden 50 Einheiten Biokraftstoff benötigt.

Die Bereiche Kraftstoffherstellung und Stromerzeugung werden als eigenständige Kostenstellen geführt. Die Verrechnungspreise k_1 für Biokraftstoff und k_2 für Strom entsprechen den jeweiligen Selbstkosten.

Quelle: Pampel: Arbeitsbuch Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Springer Spektrum (Wiesbaden)

Praktische Anwendung

Ökonomische Anwendung: Innerbetriebliche Leistungsverrechnung

Aus diesen Informationen ergeben sich folgende lineare Gleichungen:

- Die Kosten für 500 Einheiten Biokraftstoff sind $3500 + 100 \cdot k_2$ (Primärkosten plus Kosten für 100 Stromeinheiten).

$$\text{Selbstkosten pro Biokraftstoffeinheit:} \quad k_1 = \frac{3500 + 100 \cdot k_2}{500}.$$

- Die Kosten für 200 Einheiten Strom sind $600 + 50 \cdot k_1$ (Primärkosten plus Kosten für 50 Biokraftstoffeinheiten).

$$\text{Selbstkosten pro Stromeinheit:} \quad k_2 = \frac{600 + 50 \cdot k_1}{200}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich folgende Standardform:

$$\begin{array}{rrcrl} 500k_1 & -100k_2 & = & 3500 & \text{(I)} \\ -50k_1 & +200k_2 & = & 600 & \text{(II)} \end{array}$$

Und durch Lösen des LGS erhalten wir: $k_1 = 8$, $k_2 = 5$

Quelle: Pampel: Arbeitsbuch Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Springer Spektrum (Wiesbaden)

Wirtschaftsmathematik

Lineare Gleichungssysteme

Übungsaufgabe

Ein reicher Mann wollte im Mittelalter ein paar Tiere kaufen. Dazu hatte er 10.000 Goldmünzen gespart und ging mit diesen auf den Markt. Ihm schwebte vor, drei Kühe, fünf Ochsen und zehn Schafe zu kaufen. Den Rest wollte er in Hühner zum Preis von 30 Goldstücken pro Huhn investieren.

Er ging zu dem Händler, der ihm sagte:

„Guter Mann, Kühe sind teuer! Für das Geld, welches du für drei von ihnen bezahlst, kann ich dir auch vier Schafe und zwei Ochsen geben. Nimmst du jedoch vier Ochsen und elf Schafe, so bekommst du für das gleiche Geld bei sieben Kühen noch 100 Goldmünzen zurück. Anstatt von sechs Kühen und fünf Ochsen könntest du auch 21 Schafe und 40 Hühner kaufen und hättest noch immer 300 Goldmünzen im Beutel.“

Wie viele Hühner kann der Mann sich denn nun am Ende kaufen?

Wirtschaftsmathematik

Übungsaufgabe

Lineare Gleichungssysteme

3K = 4S+ 2O

4O + 11S = 7K +100

6K + 5O = 21S + 40H + 300

H = 30

	H	K	O	S	b	
	1	0	0	0	30	
	0	3	-2	-4	0	
	0	-7	4	11	100	
	-40	6	5	-21	300	
	1	0	0	0	30	
	0	3	-2	-4	0	
	0	-7	4	11	100	
	0	6	5	-21	1500	
	1	0	0	0	30	
	0	1	-0,7	-1,33	0	
	0	0	-0,7	1,67	100	
	0	0	9	-13	1500	
	1	0	0	0	30	
	0	1	-0,7	-1,33	0	
	0	0	1	-2,50	-150	
	0	0	0	9,5	2850	
	1	0	0	0	30	
	0	1	-0,7	-1,33	0	
	0	0	1	-2,5	-150	
	0	0	0	1	300	
Schafe	300		10		3000	
Ochsen	600		5		3000	
Kühe	800		3		2400	
Hühner	30		53		1590	
Gesamt					9990	10000

Wirtschaftsmathematik

Lineare Gleichungssysteme

Endlich …. Eine Definition!

Unter einer **linearen Gleichung** mit den n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ versteht man eine Gleichung der Form

$$\mathbf{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b_1}$$

Eigenschaften:

- Alle Variablen kommen ausschließlich in der ersten Potenz vor
- Alle Faktoren sind konstant
- Es existieren nur additive Verknüpfungen

Liegen für eine Problemstellung mehrere solcher linearen Gleichungen vor, spricht man von einem **linearen Gleichungssystem** (LGS):

$$\begin{gathered}
\mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1} \\
\mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2} \\
* \\
* \\
* \\
\mathbf{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m}
\end{gathered}$$

Wirtschaftsmathematik

Lineare Gleichungssysteme

Elementare Zeilenoperationen

Die Lösungsmenge eines Gleichungssystems ändert sich nicht, wenn das System durch die folgenden Operationen umgeformt wird:

- zwei Zeilen werden vertauscht
- eine Zeile wird mit einer reellen Zahl k multipliziert (bzw. dividiert)
- eine Zeile wird durch die Summe der Zeile und dem k-fachen einer anderen Zeile ersetzt.

Diese Operationen werden auch **Äquivalenzumformungen** genannt.

Wirtschaftsmathematik

Lineare Gleichungssysteme

Gauß‘scher Algorithmus

Ein systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme stellt der **Gauß-Algorithmus** dar.

<u>Vorgehensweise</u>

1. Übernahme der Koeffizienten(matrix) und der rechten Seite („b“) in ein Tableau
2. Erzeugung einer oberen Dreiecksmatrix im linken Tableauteil durch Anwendung elementarer Zeilenoperationen
3. Rekursive Ermittlung der Lösung durch Einsetzen („Substitution“)
4. Oder alternativ zu 2. und 3.: Erzeugung einer Einheitsmatrix durch Anwendung elementarer Zeilenoperationen und Ablesen des Ergebnisses

Lineare Gleichungssysteme

Beispiel

LGS:

$$0x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2$$
$$4x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 7$$
$$1x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 4$$

Tableau:

x_1	x_2	x_3	b
0	4	2	2
4	0	1	7
1	2	0	4

Müssen 1 werden

Müssen 0 werden

Wirtschaftsmathematik

Lineare Gleichungssysteme

Beispiel

x_1	x_2	x_3	b	
0	4	2	2	
4	0	1	7	
1	2	0	4	

1	2	0	4	Zeilentausch I und III
4	0	1	7	
0	4	2	2	Zeilentausch I und III

x_1	x_2	x_3	b	
0	4	2	2	
4	0	1	7	
1	2	0	4	

1	2	0	4	Zeilentausch I und III
4	0	1	7	
0	4	2	2	Zeilentausch I und III

1	2	0	4	
0	-8	1	-9	II' = II - 4*I'
0	4	2	2	

Wirtschaftsmathematik

Lineare Gleichungssysteme

Beispiel

x_1	x_2	x_3	b	
0	4	2	2	
4	0	1	7	
1	2	0	4	
1	2	0	4	Zeilentausch I und III
4	0	1	7	
0	4	2	2	Zeilentausch I und III
1	2	0	4	
0	-8	1	-9	II' = II - 4*I'
0	4	2	2	

x_1	x_2	x_3	b	
0	4	2	2	
4	0	1	7	
1	2	0	4	
1	2	0	4	Zeilentausch I und III
4	0	1	7	
0	4	2	2	Zeilentausch I und III
1	2	0	4	
0	-8	1	-9	II = II - 4*I
0	4	2	2	
1	2	0	4	
0	1	1/2	1/2	Zeilentausch II und III / :4
0	-8	1	-9	

Wirtschaftsmathematik

Lineare Gleichungssysteme

Beispiel

x_1	x_2	x_3	b
0	4	2	2
4	0	1	7
1	2	0	4

1	2	0	4	Zeilentausch I und III
4	0	1	7	
0	4	2	2	Zeilentausch I und III

1	2	0	4	
0	-8	1	-9	II = II - 4*I
0	4	2	2	

1	2	0	4	
0	1	1/2	1/2	Zeilentausch II und III / :4
0	-8	1	-9	

x_1	x_2	x_3	b
0	4	2	2
4	0	1	7
1	2	0	4

1	2	0	4	Zeilentausch I und III
4	0	1	7	
0	4	2	2	Zeilentausch I und III

1	2	0	4	
0	-8	1	-9	II = II - 4*I
0	4	2	2	

1	2	0	4	
0	1	1/2	1/2	Zeilentausch II und III / :4
0	-8	1	-9	

1	2	0	4	
0	1	1/2	1/2	
0	0	5	-5	III = 8*II + III

1	2	0	4	
0	1	1/2	1/2	
0	0	1	-1	III = III :5

Lösung:

$x_3 = -1$

$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$x_1 = 4 - 2 = 2$

Wirtschaftsmathematik

Lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Lösung durch **vollständige Elimination**:

Anstelle der Dreiecksmatrix wird die **Einheitsmatrix** erzeugt.

⇨ Vorteil: Die Lösung ist direkt ablesbar.

⇨ Nachteil: Die Methode ist aufwendiger

x_1	x_2	x_3	b
1	2	0	4
0	1	1/2	1/2
0	0	1	-1

○ Müssen auch noch 0 werden

⇨

x_1	x_2	x_3	b	
1	2	0	4	
0	1	1/2	1/2	
0	0	1	-1	
1	2	0	4	
0	1	0	1	II = II - 1/2 * III
0	0	1	-1	
1	0	0	2	I = I - 2 * II
0	1	0	1	
0	0	1	-1	

Wirtschaftsmathematik

Lineare Gleichungssysteme

Gauß-Algorithmus

Übungsaufgabe

Löse mit dem Gauß-Algorithmus:

Klausuraufgabe
WS22-23, Hr. Daus

Aufgabe 6
(Matrizen)

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$3x + 2y + z = 15$

$x + y + z = 5$

$-x - 4y + 6z = -18$

a) Lösen Sie das Gleichungssystem. (*Ein Antwortsatz ist nicht notwendig.*) (6 Punkte)

Wirtschaftsmathematik

Lineare Gleichungssysteme

Gauß-Algorithmus

Übungsaufgabe

Aufgabe 6
(Matrizen)

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:
$3x + 2y + z = 15$
$x + y + z = 5$
$-x - 4y + 6z = -18$

a) Lösen Sie das Gleichungssystem. (*Ein Antwortsatz ist nicht notwendig.*) (6 Punkte)

x	y	Z	b	
1	1	1	5	
-1	-4	6	-18	
3	2	1	15	
1	1	1	5	
0	-3	7	-13	I+II
0	1	2	0	I*3 - III
1	1	1	5	
0	1	2	0	Tausch II mit III
0	-3	7	-13	Tausch II mit III
1	1	1	5	
0	1	2	0	
0	0	13	-13	II*3 +III

z = - 1
y = 2
x = 4

Lineare Gleichungssysteme

Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

Die wenigsten Gleichungssysteme sind eindeutig lösbar, d.h. es gibt genau eine Wertebelegung der Variablen, die alle Gleichungen erfüllt. Wir haben uns bisher mit Gleichungssystemen befasst, die **n Gleichungen mit n Variablen** enthielten, also pro Variable eine Gleichung. Sollte eine eindeutige Lösung vorliegen, kann sie, wie in den Beispielen berechnet, mit dem Gauß'schen Lösungsverfahren auch bestimmt werden.

1 Falls ein Gleichungssystem **weniger Gleichungen als Variablen hat,** ist eine eindeutige Lösung ausgeschlossen. Mindestens eine der Variablen kann dann frei gewählt werden, die anderen Variablen werden daraus berechnet. Damit hat man auf jeden Fall **unendlich viele Lösungen.**

2 Hat eine Gleichungssystem **mehr Gleichungen als Variablen**, gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Das Gleichungssystem beinhaltet eine **Widerspruch.** Mindestens eine Gleichung bestätigt die Lösung, die sich aus den anderen Gleichungen berechnen lässt, nicht. Das System ist **unlösbar**.
2. Mindestens eine der Gleichungen lässt sich aus den anderen Gleichungen durch elementare ZO **kombinieren**, d.h. sie hat keinen eigenen Informationsgehalt und kann weggelassen werden. **Die Lösbarkeit des Systems ergibt sich aus den restlichen Gleichungen.**

Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

Auch bei der Betrachtung von Gleichungssystemen mit n Gleichungen und n Variablen können neben der eindeutigen Lösbarkeit die anderen Falle auftreten. Deshalb stellt die oben angesprochene Beschränkung auf diese speziellen Gleichungssystem keine gravierende Einschränkung dar.

Wir haben also **drei Möglichkeiten:**

1. Das System hat eine **eindeutige Lösung.** Die Lösung wird mit dem Gauß'schen Algorithmus berechnet.
2. Das System hat mindestens eine Gleichung, die im Widerspruch zu den anderen Gleichungen steht. Das System ist **nicht lösbar.**
3. Das System hat mindestens eine Gleichung, die durch die anderen Gleichungen kombiniert werden kann. Es ergeben sich **unendlich viele Lösungen.**

Beispiele:

a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ 6x & + & y & + & 3z & = & 2 \\ 8x & + & 3y & + & 7z & = & 3 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 6 \\ 2x & - & y & + & 4z & = & 2 \\ 4x & + & 3y & - & 2z & = & 14 \end{array}$$

Wirtschaftsmathematik

Lineare Gleichungssysteme

Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ 6x & + & y & + & 3z & = & 2 \\ 8x & + & 3y & + & 7z & = & 3 \end{array}$$

x	y	z	b	
1	1	2	1	
6	1	3	2	
8	3	7	3	
1	1	2	1	
0	5	9	4	II' = 6*I - II
0	5	9	5	III' = 8*I - III

Und an dieser Stelle haben wir zwei
Gleichungen, die "unmöglich" sind:
5y + 9z = 4 (Gleichung II)
5y + 9z = 5 (Gleichung III)
Das Gleichungssystem ist unlösbar.

Wirtschaftsmathematik

Lineare Gleichungssysteme

Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

b)

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 6 \\ 2x - y + 4z &= 2 \\ 4x + 3y - 2z &= 14 \end{aligned}$$

x	y	z	b	
1	2	-3	6	
2	-1	4	2	
4	3	-2	14	
1	2	-3	6	
0	5	-10	10	II' = 2*I - II
				III' = 4*I -
0	5	-10	10	III

Und an dieser Stelle haben wir zwei
Gleichungen, die identisch sind:
5y - 10z = 10 (Gleichung II)
5y - 10z = 10 (Gleichung III)

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen:

$5y - 10z = 10$

<=> $y = 2 + 2z$ (A)

Eine mögliche Lösung: wir wählen frei y = 1, dann ist z = -3 (aus A)

x berechnen wir dann aus Gleichung I:

$x + 2 + 9 = 6$

Also ist x = -5.

Eine andere mögliche Lösung: wir wählen frei z = 2, dann ist y = 6 (aus A)

x berechnen wir dann wieder aus Gleichung I:

$x + 12 - 6 = 6$

$x = 0$

=> man kann so viele Variablen frei wählen, wie es weniger Gleichungen als Variablen gibt (also hier: 3 Variablen - 2 Gleichungen = 1 freie Wahl)

Wirtschaftsmathematik

Praktische Anwendung

5. Lineare Gleichungssysteme

Ökonomische Anwendung: Page Rank

Numerator

Wie Google mit Milliarden Unbekannten rechnet

Ein Leben ohne Suchmaschinen? Für alle, die viel im World Wide Web unterwegs sind, eine geradezu absurde Vorstellung. Bei der Berechnung der Trefferlisten nutzt Google ein erstaunlich simples mathematisches Verfahren, das sogar Milliarden von Internetseiten in den Griff bekommt.

- Google bewertet jede Web-Seite nach einem mathematischen Algorithmus immer wieder neu und sortiert 30-50 Milliarden Web-Seiten in eine Rangliste
- Das Verfahren heißt **Page Rank**
- Schon in den 90er Jahren von den beiden Google-Gründer Sergey Brin und Larry Page entwickelt.
- Entscheidendes Kriterium: Links, die auf eine Webseite führen – und: kommt er von einer hoch gerankten Seite, dann erbt auch die verlinkte Seite einen Teil des Rankings dieser Seite

- Mathematisch gesehen, ist Googles Page Rank von 30 Milliarden Web-Seiten nichts anderes als **die Lösung eines linearen Gleichungssystems** mit 30 Milliarden Unbekannten

- **Konzept**: Ein Surfer, der sich zufällig durchs Web bewegt: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er sich zu einem bestimmten Zeitpunkt auf einer bestimmten Web-Seite befindet? Diese Wahrscheinlichkeit entspricht dem Page Rank der Seite.

Quelle: http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/numerator-wie-google-mit-milliarden-unbekannten-rechnet-a-646448.html

Praktische Anwendung

5. Lineare Gleichungssysteme

Ökonomische Anwendung: Page Rank

Das Verfahren:

Der Zufalls-Surfer startet auf einer beliebigen Web-Seite und klickt dann mit einer Wahrscheinlichkeit von d einen der Links an, die auf dieser Seite zu finden sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treffen wir den Surfer auf der Web-Seite a? Brin und Page haben zwei Fälle unterschieden:

1. Der Surfer hat das Klicken abgebrochen und landet durch direkte Eingabe der Web-Seite zufällig auf a. Wenn es im Netz genau N Web-Seiten, gibt, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall

$$\mathbf{(1-d)/N}.$$

1. Der Surfer kommt von einer anderen Web-Seite, wir nennen sie i, über einen direkten Link zu a. Wir wissen bereits, dass unser Zufallsnutzer nur mit einer Wahrscheinlichkeit von d überhaupt Links folgt. In die Berechnung fließt außerdem ein, wie viele Links c_i es überhaupt auf der Seite i gibt und wie groß die Wahrscheinlichkeit p_i ist, dass sich der Surfer überhaupt auf der Web-Seite i befindet. Die Chance, dass der Surfer über den Link von der Seite i zur Seite a kommt, ist deshalb $d*p_i/c_i$. Wenn wir zudem annehmen, dass genau k der insgesamt N Seiten auf a verlinken, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Surfer über einen dieser k Links zu a kommt gleich

$$\mathbf{d(p_1/c_1 + p_2/c_2 + \ldots +p_k/c_k)}$$

Fassen wir nun die beiden Fälle zusammen, dann ist die Google-Formel komplett:

$$\mathbf{p_a = (1-d)/N + d(p_1/c_1 + p_2/c_2 + \ldots +p_k/c_k)}$$

Quelle: http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/numerator-wie-google-mit-milliarden-unbekannten-rechnet-a-646448.html

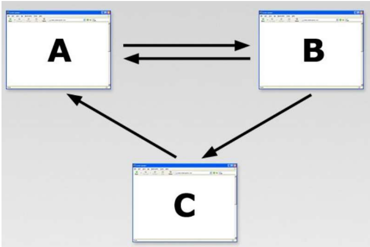
Praktische Anwendung

5. Lineare Gleichungssysteme

Ökonomische Anwendung: Page Rank

Ein simples Beispiel eines Mini-Internets aus drei Web-Seiten verdeutlicht, wie dieses Ranking-System in der Praxis funktioniert: Von der Seite A führt ein Link zu B, von B je einer zu A und C. Von C gibt es nur eine Verknüpfung zu A. Damit erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\mathbf{p_A = (1-d)/3 + d(p_B/2 + p_C)}$$
$$\mathbf{p_B = (1-d)/3 + d(p_A)}$$
$$\mathbf{p_C = (1-d)/3 + d(p_B/2)}$$



Nun lösen wir das Gleichungssystem und verwenden dabei d=0,15, ein Wert, den Google nach eigenen Angaben in der Ranking-Berechnung nutzt.

$$\mathbf{p_A = 0{,}2833 + 0{,}075\, p_B + 0{,}15\, p_C}$$
$$\mathbf{p_B = 0{,}2833 + 0{,}15\, p_A}$$
$$\mathbf{p_C = 0{,}2833 + 0{,}075\, p_B}$$

Als Lösung erhält man:

$\mathbf{p_A = 0{,}355}$ $\mathbf{p_B = 0{,}336}$ $\mathbf{p_C = 0{,}308}$

Wir haben gesehen, dass bei unserem Mini-Web aus drei Web-Seiten letztlich ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten gelöst werden muss. Bei 30 Milliarden Web-Seiten besteht das System aus 30 Milliarden Gleichungen mit 30 Milliarden Unbekannten…

Quelle: http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/numerator-wie-google-mit-milliarden-unbekannten-rechnet-a-646448.html

Praktische Anwendung

Ökonomische Anwendung: Page Rank

Page Rank heute:

An der eigentlichen Page-Rank-Berechnung hat sich seit dem Start von Google bis heute kaum etwas geändert, aber:

- Die Trefferliste bei Google ist nicht nur vom Page Rank abhängig, sondern von inzwischen 200 bis 300 Faktoren, die in die Berechnung einfließen. Hinzu kommen z.B. die Textinhalte der Web-Seite, im HTML-Code steckende Schlüsselwörter (Tags), der Titel der Seite und weitere Kriterien wie beispielsweise der Zeitpunkt der letzten Aktualisierung.
- Die exakte Berechnung ist ein extrem gut gehütetes Geheimnis, da sich inzwischen eine eigene Industrie darum gebildet hat, bei Google möglichst weit oben in der Trefferliste zu erscheinen: Suchmaschinenoptimierung („SEO“).
- Ein ständiges Katz- und Mausspiel, denn Google betreibt bei seinen Algorithmen ein permanentes Feintuning.
- Link-Farmen versuchen, die Ergebnisse zu manipulieren. Tausende verschiedene Web-Seiten werden mit dem alleinigen Zweck betrieben, durch eine Vielzahl von Links zu einigen wenigen Seiten deren Ranking nach oben zu treiben. Wird eine Linkfarm als solche identifiziert, dann bestraft Google die manipulierten Seiten mit einem Page Rank von null - sie sind somit bei Suchanfragen praktisch nicht mehr auffindbar.

Quelle: http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/numerator-wie-google-mit-milliarden-unbekannten-rechnet-a-646448.html

Praktische Anwendung

5. Lineare Gleichungssysteme

Weiterführende bzw. ausführlichere Texte zum Thema „Page Rank"

Die Mathematik hinter Google - Université de Fribourg
http://homeweb.unifr.ch/kleing/pub/resources/google-beamer_de_gym.pdf

Das Google PageRank-System
https://homepage.univie.ac.at/hans.humenberger/Aufsaetze/DasGoogle-Page-Ranke-System-1.pdf

PageRank: Der Google-Ranking-Algorithmus
http://kontext.fraunhofer.de/haenelt/kurs/folien/Haenelt_PageRank.pdf

Da Google sein System laufend verbessert, dürften die Beschreibungen oben schon wieder längst überholt sein, z.B.:

„ Panda, Pinguin, Freshness und viele weitere Updates werden regelmäßig in den Algorithmus integriert oder sind bereits fester Bestandteil. Doch schon seit Jahren arbeitet Google mit Künstlicher Intelligenz. Das Projekt RankBrain ist ein Teil dieser stetigen Verbesserung."

Aus: Die 5 wichtigsten SEO-Faktoren in 2019

(Quelle: https://business.trustedshops.de/blog/seo-faktoren/)

Wirtschaftsmathematik

Übungsaufgabe

5. Lineare Gleichungssysteme

Übungsbeispiele

Löse mit dem Gauß-Algorithmus:

a)

$4x + 4y + 4z = 8$

$3x - 4y - 11z = -1$

$2x + 4y + 4z = 4$

b)

$2x + y + 3z = 23$

$x + 3y + 2z = 19$

$2x + 4y + z = 19$

Quelle: Holland, Heinrich / Doris Holland: Mathematik im Betrieb, Gabler (Wiesbaden)

Wirtschaftsmathematik

5. Lineare Gleichungssysteme

Übungsbeispiele

a)

4x + 4y + 4z = 8

3x - 4y - 11z = -1

2x + 4y + 4z = 4

x	y	z	b
4	4	4	8
3	-4	-11	-1
2	4	4	4
1	1	1	2
0	7	14	7
0	-2	-2	0
1	1	1	2
0	1	2	1
0	0	-2	-2
1	0	0	2
0	1	0	-1
0	0	1	1

b)

x	y	z	b	
2	1	3	23	
1	3	2	19	
2	4	1	19	
1	3	2	19	Zeilentausch I gg II
2	1	3	23	
2	4	1	19	
1	3	2	19	
0	5	1	15	2*I - II
0	2	3	19	2*I - III
1	3	2	19	
0	1	0,2	3	:5
0	0	2,6	13	III - 2*II neu
1	3	2	19	
0	1	0,2	3	
0	0	1	5	:2,6

x = 3

y = 2

z = 5

Quelle: Holland, Heinrich / Holland, Doris: Mathematik im Betrieb, Gabler (Wiesbaden)

Wirtschaftsmathematik

Übungsaufgabe

Lineare Gleichungssysteme

Gauß-Algorithmus

Löse mit dem Gauß-Algorithmus:

a)

$2x - 2y - 2z = 8$

$x + 2y - z = 7$

$3x - y + z = 2$

b)

$10a + 20b + c + 10d = 120$

$2b + 2c + 10d = 118$

$20a + 10b + 10c + 20d = 520$

$2a + 4d = 0$

Wirtschaftsmathematik

Übungsaufgabe

Lineare Gleichungssysteme

Gauß-Algorithmus

a)

$2x - 2y - 2z = 8$

$x + 2y - z = 7$

$3x - y + z = 2$

x	y	z	b
2	-2	-2	8
1	2	-1	7
3	-1	1	2
1	-1	-1	4
0	-3	0	-3
0	-2	-4	10
1	-1	-1	4
0	1	0	1
0	0	4	-12
1	0	0	2
0	1	0	1
0	0	1	-3

b)

w	x	y	z	b	
10	20	1	10	120	
0	2	2	10	118	
20	10	10	20	520	
2	0	0	4	0	
2	0	0	4	0	Zeilentausch IV
0	2	2	10	118	
10	20	1	10	120	Zeilentausch I
2	1	1	2	52	Zeilentausch III und :10
1	0	0	2	0	:2
0	1	1	5	59	:2
0	20	1	-10	120	III - 10*I neu
0	1	1	-2	52	IV - I
1	0	0	2	0	
0	1	1	5	59	
0	0	19	110	1060	20*II - III
0	0	0	-7	-7	IV - II

d =	1	c =	50
b =	4	a =	-2

Wirtschaftsmathematik

Aufgabe für die nächste Lehrveranstaltung

5. Lineare Gleichungssysteme

Übungsbeispiele

Klausuraufgabe WS22-23

Aufgabe 1 (14 Punkte)

Sie führen ein exklusives Eiscafé mit nur drei aus frischen Früchten hergestellten Sorten Eis: Himbeere (x), Ananas (y) und Heidelbeere (z). Zu Beginn des Tages haben Sie insgesamt 100 Liter Eis zubereitet.

Am Mittag stellen Sie fest, dass Sie schon 20% der ursprünglichen Menge Himbeer-Eis, 60% an Ananas-Eis und 50% an Heidelbeer-Eis verkauft haben. Insgesamt beläuft sich der Eis-Bestand auf noch 50 Liter. Abends sind noch 10% der ursprünglichen Menge Himbeer-Eis, immer noch 40% Ananas-Eis und 20% Heidelbeer-Eis übrig. Damit sind insgesamt 25 Liter Eis übriggeblieben.

a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem zu diesem Problem auf. (*6 Punkte*)
b) Wie haben sich die 100 Liter Eis zu Beginn des Tages auf die drei Eissorten verteilt? Lösen Sie mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems. (*8 Punkte*)

Aufgabe für die nächste Lehrveranstaltung

Lineare Gleichungssysteme

Ökonomische Anwendung: Innerbetriebliche Leistungsverrechnung

In einer Fabrik werden das Medikament A-pret und die Chemikalien B-säure und C-tanol produziert.

- Bei der Produktion der 12 Einheiten A-pret fallen Primärkosten von 26 Geldeinheiten an, und es werden 6 Einheiten B-säure und 1 Einheit C-tanol benötigt.
- Bei der Produktion der 10 Einheiten B-säure fallen Primärkosten von 2 Geldeinheiten an, und es werden 2 Einheiten C-tanol benötigt.
- Bei der Produktion der 8 Einheiten C-tanol fallen Primärkosten von 28 Geldeinheiten an, und es werden 4 Einheiten B-säure benötigt.

Zwischen den drei Bereichen (Kostenstellen) sollen die Produkte jeweils zu Selbstkosten (Verrechnungspreise) geliefert werden.

a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf, das gelöst werden muss, um die Verrechnungspreise für A-pret, B-säure und C-tanol zu bestimmen.
b) Berechnen Sie die internen Verrechnungspreise.
c) Die 12 Einheiten A-pret können zum Preis von $p_A = 10$ verkauft werden, die überschüssigen 5 Einheiten C-tanol können zum Preis von $p_C = 5$ verkauft werden (B-säure wird vollständig verbraucht). Wie hoch ist jeweils der Gewinn aus A-pret und C-tanol, wenn die Verrechnungspreise zugrunde gelegt werden?

Quelle: Pampel: Arbeitsbuch Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Springer Spektrum (Wiesbaden)