Mathematik
WS 2023-24

Christian Stielow
christian.stielow@hs-mainz.de

WIRTSCHAFT
HOCHSCHULE MAINZ
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES

Teil 1 –
Organisatorisches und Grundlagen

Christian Stielow
christian.stielow(at)hs-mainz.de

Vorlesungsunterlagen der FG Quantitative Methoden
(insbesondere Prof. Dr. Griebsch und Prof. Dr. Schlütter)

Wirtschaftsmathematik

Überblick

Quelle: https://www.der-kerzentunker.de/Servietten-Herzlich-Willkommen-schwarz-und-rot-auf-weiss

Wirtschaftsmathematik

Überblick

1. Organisation und Inhalte
2. Wiederholung: Brüche
3. Wiederholung: Exponenten, Wurzeln, Logarithmen
4. Wiederholung: Gleichungen und Ungleichungen

Wirtschaftsmathematik

1. Organisation und Inhalte

Zum Kennenlernen:

https://pingo.coactum.de/

Code 520729

Wirtschaftsmathematik

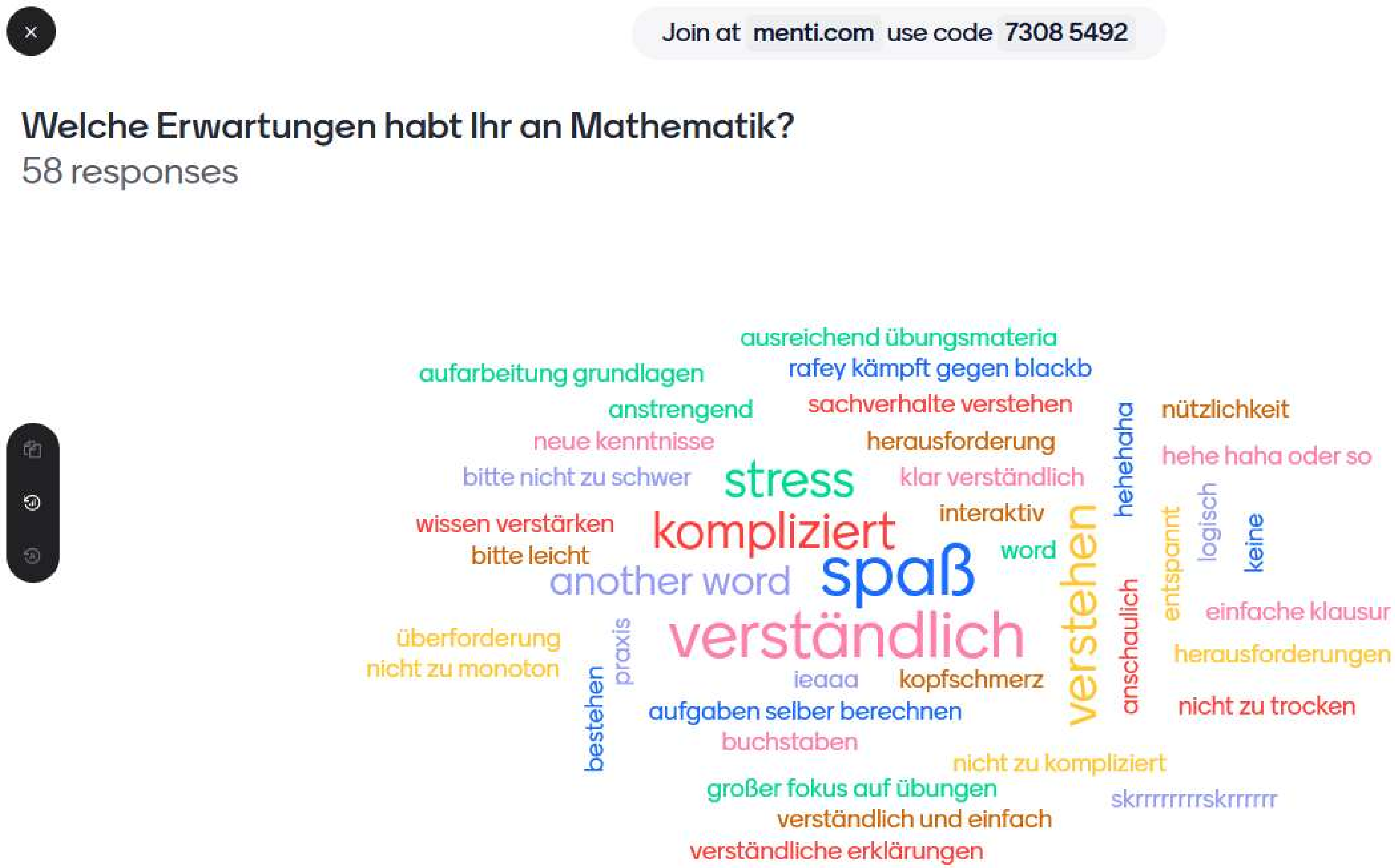
1. Organisation und Inhalte

- Diplom in Informatik (TU Berlin)
- Master of Business Administration (The University of Texas at Austin)

- 1993 bis 2018 verschiedene Positionen bei Finanzdienstleistern im Finanzbereich
  – Albingia Versicherungen (Berlin): Controller und Leiter Vertriebsorganisation
  – General Electric (Wien): Leiter Vertriebscontrolling, Leiter Konzerncontrolling
  – General Electric (Hannover): Finance Integration Manager
  – Genworth Financial (Paris): Regional Finance Director Central Europe
  – Lindorff AB (Heppenheim): Regional Finance Director Continental Europe, GF für dt. Gesellschaften
- Seit 2018: selbständiger Berater und Dozent (öffentliche und private Hochschulen, Bachelor- und Master-Programme)

Wirtschaftsmathematik

1. Organisation und Inhalte



Wirtschaftsmathematik

1. Organisation und Inhalte

„Mathe kann jeder schaffen …“

“There is a superhero in all of us, we just need the courage to put on the cape.”

Wirtschaftsmathematik

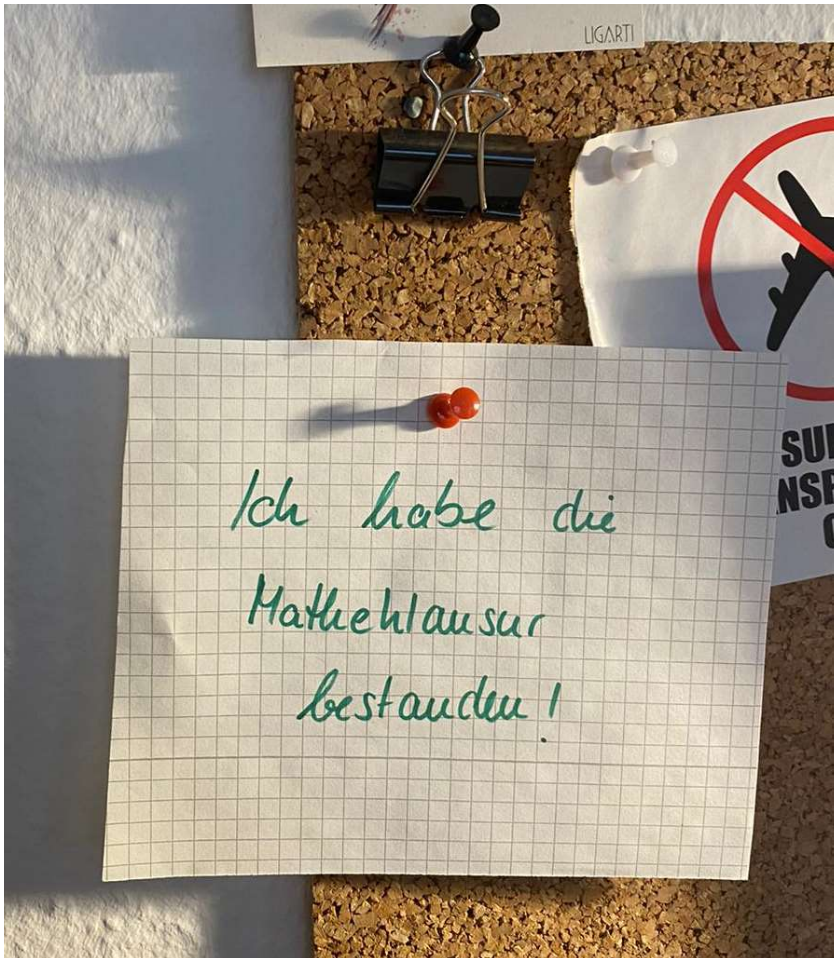
1. Organisation und Inhalte

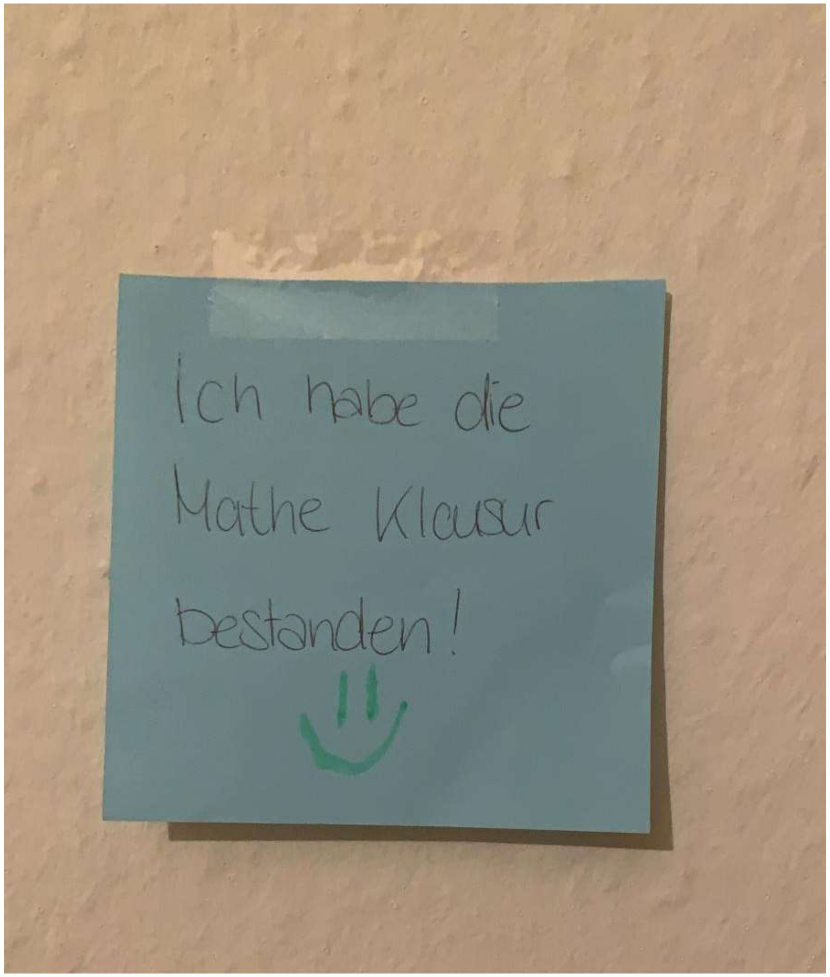
„Word of Wisdom“

- It is your attitude that will determine whether you pass this course, not how you did in math courses in school or whereever.
- If you want to pass it, you can. If you do not care, you won‘t. It is your decision.
- It is your teacher‘s job to instruct, provide material, answer questions, give advice.
- It is your job to come to class, bring material, practice, organize your work and learn.
- Learning mathematics is like learning a language or a musical instrument. It requires an enormous amount of practice, very likely more than you expect at the moment.
- Math is not a spectator sport, you do not learn it by watching others. You have to do it, again and again: do self study, many hours a week!
- It helps to explain it to others, so form a study group. Meet regularly!

Wirtschaftsmathematik

1. Organisation und Inhalte

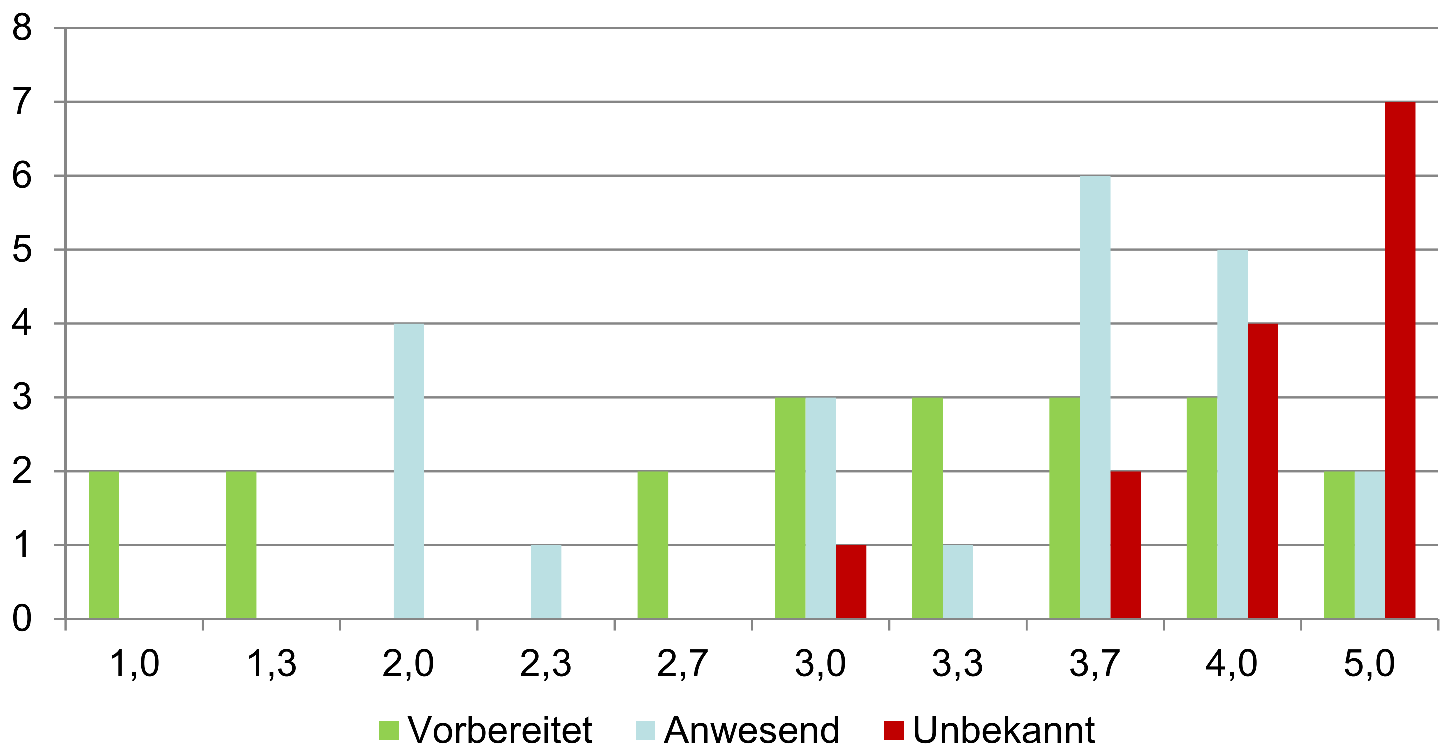




Wirtschaftsmathematik

1. Organisation und Inhalte

Klausurergebnisse klassifiziert (SS2019)



Notendurchschnitt: 3,1 3,4 4,4

Wirtschaftsmathematik

1. Organisation und Inhalte

Lernerfolg und Lerntypen

Informationsaufnahme	Wahrscheinlichkeit des Behaltens
hören	20%
sehen	30%
hören + Sehen	50%
nacherzählen / erklären	70%
selbst machen	90%

Lerntyp	Definition
visueller Typ	**Gesehenes** wird gut behalten, da die optische Information vom Gehirn besonders gut umgesetzt wird.
auditiver Typ	**Gehörtes** wird gut behalten, da die akustische Information vom Gehirn besonders gut umgesetzt wird.
haptischer Typ	Es werden besonders gut diejenigen Informationen behalten, die durch eine **Interaktion** aufgenommen werden, also z.B. dadurch, dass man eine Aufgabe selber löst, jemandem etwas erklärt usw.

Wirtschaftsmathematik

1. Organisation und Inhalte

Arbeitsmethoden:

- Vorlesung
- Praktische Beispiele/Anwendung
- Übungen zur Themenerarbeitung
- Übungen zur Themennachbereitung

Die Lehrveranstaltung ist eine Vorlesung mit integrierter Übung. Der Stoff wird theoretisch und anhand von Beispielen vorgetragen und anschließend mit Aufgaben oder kleinen Fallstudien gemeinsam vertieft. Zur wöchentlichen Vorbereitung und Nachbereitung der Lehrveranstaltung steht neben der angegebenen Literatur eine Aufgabensammlung zur Verfügung. Die Aufgaben müssen im Eigenstudium gelöst werden. Lösungswege können bei Bedarf in der Lehrveranstaltung besprochen werden.

Wirtschaftsmathematik

1. Organisation und Inhalte

Literatur

Modulhandbuch:

- Holland, Heinrich / Doris Holland: Mathematik im Betrieb, Gabler (Wiesbaden)
- Schwarze, Jochen: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, nwb (Herne, Berlin)
- Sydsaeter, Knut / Peter Hammond: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Pearson (München)
- Tietze, Jürgen: Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik, Springer Spektrum (Wiesbaden)

Weitere Literaturempfehlungen:

- Matthäus H., Matthäus W.-G.: Mathematik für BWL-Bachelor. Springer Gabler (Wiesbaden)
- Matthäus H., Matthäus W.-G.: Mathematik für BWL-Bachelor: Übungsbuch, Springer Gabler (Wiesbaden)
- Christiaans, T., Ross, M.: Wirtschaftsmathematik für das Bachelor-Studium: Lehr- und Arbeitsbuch Springer Gabler (Wiesbaden)
- Tietze, Jürgen: Einführung in die Finanzmathematik, Springer Spektrum (Wiesbaden)
- Kallischnigg/Kockelkorn/Dinge: Mathematik für Volks- und Betriebswirte: Arbeitsbuch für Studienanfänger, Oldenbourg (München)
- Pampel: Arbeitsbuch Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Springer Spektrum (Wiesbaden)
- Holey/Wiedemann: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Springer Gabler (Berlin/Heidelberg)
- Haack/Tippe/Stobernack/Wendler: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Springer Gabler (Berlin/Heidelberg)

Wirtschaftsmathematik

1. Organisation und Inhalte

Inhaltsübersicht

Die Verteilung des Stoffs auf die einzelnen Unterrichtseinheiten kann abweichen.

Wirtschaftsmathematik

2. Wiederholung

Wirtschaftsmathematik

2. Wiederholung

1. Ein Schläger und ein Ball kosten zusammen 1 Dollar und 10 Cent. Der Schläger kostet 1 Dollar mehr als der Ball. Wie viel kostet der Ball?

2. Wenn fünf Maschinen fünf Minuten brauchen, um fünf Dinge herzustellen, wie lange würden 100 Maschinen brauchen, um 100 Dinge herzustellen?

3. In einem See gibt es eine Stelle mit Seerosenblättern. Jeden Tag verdoppelt sich die Größe der Stelle. Wenn es 48 Tage dauert, bis die Seerosenblätter den gesamten See bedecken, wie lange würde es dauern, bis die Blätter die Hälfte des Sees bedecken?

Wirtschaftsmathematik

2. Wiederholung

England liegt am Nordpol. Das Büro ist heute geschlossen.
Der Nordpol hat immer geöffnet.

Stimmen die Aussagen:

- ☐☐ Das Büro ist nicht offen.
- ✓☐☐ Der Nordpol ist heute geöffnet.
- ☐☐ Heute hat England geöffnet.
- ✓☐☐ Am Nordpol liegt England.

Alle Hunde, die rot sind, sind Katzen, die grün sind.
Alle Katzen sind Hunde.

Stimmt es dann zu sagen:

- ☐☐ Alle Hunde sind Katzen.
- ✓☐☐ Alle Katzen, die nicht grün sind, sind Hunde, die nicht rot sind.
- ☐☐ Einige Hunde sind Katzen.
- ☐☐ Nur bestimmte Katzen sind Hunde.

Alle Rosen sind Hosen. Die meisten Hosen sind Dosen.
Dosen kann man anziehen und Hosen kann man essen.
Rosen können alles, was Hosen und Dosen können wollen.

Stimmt es dann zu sagen:

- ✓☐☐ Manche Dosen kann man essen und anziehen.
- ☐☐ Rosen sind besser aufgestellt als Hosen oder Dosen.
- ✓☐☐ Eine Rose kann möglicherweise keine Dose sein.
- ✓☐☐ Was keine Hose ist, kann auch keine Rose sein.

Wirtschaftsmathematik

Wirtschaftsmathematik

2. Wiederholung: Brüche

Multiplikation von Brüchen

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a*c}{b*d}$$

$$\frac{a}{b} * c = \frac{a*c}{b} = a * \frac{c}{b}$$

Division von Brüchen

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{2} : \frac{4}{5} = \frac{3}{2} * \frac{5}{4}$$

Ein Bruch wird durch einen zweiten Bruch dividiert, indem man den Zählerbruch mit dem Kehrwert des Nennerbruchs multipliziert.

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$$

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}$$

Wirtschaftsmathematik

2. Wiederholung: Brüche

Kürzungsregel, Erweiterungsregel

$$\frac{a \cdot \boxed{c}}{b \cdot \boxed{c}} = \frac{a}{b} = \frac{a \cdot \boxed{x}}{b \cdot \boxed{x}} \qquad \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 7}$$

„kürzen" durch $c \neq 0$ „erweitern" mit $x \neq 0$

Zwei Brüche sind genau dann gleich wenn sie durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgegangen sind.

Addition gleichnamiger Brüche

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

Brüche mit gleichem Nenner werden addiert, indem man die Zähler addiert. Der Nenner bleibt unverändert.

Wichtig bei Brüchen: Ein Bruchstrich wirkt auf Zähler und Nenner wie eine Klammer.

Wirtschaftsmathematik

2. Wiederholung: Brüche

= Suche des kleinsten gemeinsamen Vielfachen

Das **kleinste gemeinsame Vielfache** zweier ganzer Zahlen m und n ist die kleinste natürliche Zahl, die sowohl Vielfaches von m als auch von n ist.

Addition beliebiger Brüche

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a}{b} * \frac{d}{d} \pm \frac{c}{d} * \frac{b}{b} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

$$\frac{3}{2} \pm \frac{4}{5} = \frac{3}{2} * \frac{5}{5} \pm \frac{4}{5} * \frac{2}{2} = \frac{15 \pm 8}{10}$$

Vorgehensweise

1. Primfaktorzerlegung
2. Primfaktoren der größeren Zahl markieren
3. Noch fehlende Primfaktoren der kleineren Zahl markieren
4. Markierte Primfaktoren miteinander multiplizieren

Beispiel:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

$$2 * 2 \qquad 2 * 3$$

Ungleichnamige Brüche werden zunächst durch geeignete Erweiterung $\boxed{\text{gleichnamig gemacht}}$ und dann addiert.

Quelle: https://www.mathebibel.de/kleinstes-gemeinsames-vielfaches

Wirtschaftsmathematik

2. Wiederholung: Brüche

Übungsaufgaben: Vereinfache ...

$$\frac{5x(x-1)}{3(x+1)(x-1)} = \frac{5x}{3(x+1)}$$

$$\frac{24(x-3)(2x-1)}{8(2x-1)(x+3)} = \frac{3(x-3)}{x+3}$$

$$\frac{4x+10y}{5y+2x} = 2$$

$$\frac{x-y}{3y-3x} = -\frac{1}{3}$$

Wirtschaftsmathematik

3. Wiederholung: Exponenten, Wurzeln, Logarithmen

Natürliche (ganzzahlige) Exponenten

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ und } a^0 = 1 \qquad (a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; n, m \in \mathbb{Z})$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; n, m \in \mathbb{Z})$$

$$(a^m)^n = a^{m*n} = (a^n)^m$$

$$(a * b)^n = a^n * b^n$$

$$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (b \neq 0)$$

Rationale (gebrochene) Exponenten

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a \qquad (a \in \mathbb{R}_0^+; n \in \mathbb{N})$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad (a \geq 0; n \in \mathbb{N})$$

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^m \qquad (a \in \mathbb{R}^+; n \in \mathbb{N}; m \in \mathbb{Z})$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Wirtschaftsmathematik

3. Wiederholung: Exponenten, Wurzeln, Logarithmen

Übungsaufgaben:
Ausmultiplizieren und zusammenfassen:

$3m(4m-2n-3mn)$ $= 12m^2 - 6mn - 9m^2n$

$8x-3(2x-y)+2(y-2x)$ $= -2x+5y$

$(2x-y)(2y+3x)+(4x-y)(x+2y)$ $= 10x^2+8xy-4y^2$

$(2x+y)(2x-2y)-4(x-y)(x+y)$ $= 2y^2-2xy$

Ausklammern:

$-a^8b^7c^6 - a^7b^6c^7 + a^6b^6c^6$ $= a^6b^6c^6(-a^2b - ac + 1)$

$-6a^2(2b+3) - 9a(2b+3)$ $= 3a(2b+3)(-2a-3)$

Quellen: https://123mathe.de/terme-ausmultiplizieren-aufgaben
https://freie-referate.de/mathematik/terme-ausklammern

Wirtschaftsmathematik

3. Wiederholung: Exponenten, Wurzeln, Logarithmen

Wurzelgesetze $\quad (a, b > 0; n, m \in \mathbb{N}; r, s \in \mathbb{Q})$

$$\sqrt[n]{a^r} * \sqrt[m]{a^s} = a^{\frac{r}{n}} * a^{\frac{s}{m}} = a^{\frac{r}{n}+\frac{s}{m}} = a^{\frac{rm+sn}{mn}} = \sqrt[nm]{a^{rm+sn}}$$

$$\sqrt[n]{a^r} : \sqrt[m]{a^s} = \sqrt[nm]{a^{rm-sn}}$$

$$\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a^r})^s} = (a^{\frac{r}{n}})^{\frac{s}{m}} = a^{\frac{rs}{nm}} = \sqrt[nm]{a^{rs}}$$

$$\sqrt[n]{a^r} * \sqrt[n]{b^r} = a^{\frac{r}{n}} * b^{\frac{r}{n}} = (ab)^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^r}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a^r}}{\sqrt[n]{b^r}} = \frac{a^{\frac{r}{n}}}{b^{\frac{r}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^r}$$

Wirtschaftsmathematik

3. Wiederholung: Exponenten, Wurzeln, Logarithmen

Übungsaufgaben: Wurzelrechnung

$$\sqrt[3]{z\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{z}}} \qquad = \sqrt[4]{z}$$

$$y^{1\frac{1}{2}}\cdot y^{-0{,}75}\cdot\left(\sqrt[4]{y}\right)^5 \qquad = y^2$$

$\sqrt{\mathrm{xy}^2}\cdot\sqrt{\frac{8}{y^2}}-\sqrt{2x}$ (x und y sind jeweils positiv) $\qquad = \sqrt{2x}$

$$\sqrt{(x^2-1)(x-1)}\ :\ \sqrt{x+1} \qquad = \sqrt{(x-1)^2}$$

$$= |x-1|$$

Rechnen mit Logarithmen

Beispiel: $\log_2 8 = 3$ Logarithmus zur Basis 2

Für uns allein wichtig: $\log_e x = \ln x$

- Logarithmus zur Basis e
- e = 2,718281…
- $\log_e x$ wird mit ln x oder log x abgekürzt
- e erhält man auf dem Taschenrechner durch 1 [Inv] ln

- Die Rechenregeln für Logarithmen braucht man hauptsächlich um Gleichungen umzuformen.

Wirtschaftsmathematik

3. Wiederholung: Exponenten, Wurzeln, Logarithmen

Rechenregeln für Logarithmen

Bei Exponentialfunktionen enthält der Exponent die Lösungsvariable.

Dieser eindeutig bestimmte Exponent u heißt Logarithmus von x zur Basis a.

Es gilt:

$$a^u = x \Leftrightarrow u = \log_a x \qquad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}; x \in \mathbb{R}^+; u \in \mathbb{R}$$

$$3^4 = 81 \Leftrightarrow 4 = log_3 81$$

Der Logarithmus von x zur Basis a ist derjenige Exponent u, mit dem man a potenzieren muss, um x zu erhalten.

Wirtschaftsmathematik

3. Wiederholung: Exponenten, Wurzeln, Logarithmen

Rechenregeln für Logarithmen

1) $\log_a(u * v) = \log_a u + \log_a v$

2) $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$

3) $\log_a(u^v) = v * \log_a u$

4) $\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} * \log_a u$

5) $\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b}$

Wirtschaftsmathematik

3. Wiederholung: Exponenten, Wurzeln, Logarithmen

Beispiele

$$2\log(u) + \frac{1}{2}[\log(u+v) + \log(u-v)]$$

$2\log\ u + \frac{1}{2}[\log(u+v) + \log(u-v)]$	Wende die Potenzregel des Logarithmus an.
$= \log\ u^2 + \frac{1}{2}[\log(u+v) + \log(u-v)]$	Wende die Produktregel des Logarithmus an.
$= \log\ u^2 + \frac{1}{2}[\log((u+v)\cdot(u-v))]$	Wende die 3. Binomische Formel an.
$= \log\ u^2 + \frac{1}{2}\log\left(u^2 - v^2\right)$	Wende die Potenzregel des Logarithmus an.
$= \log\ u^2 + \log(u^2 - v^2)^{\frac{1}{2}}$	Wende $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ an.
$= \log\ u^2 + \log(\sqrt{u^2 - v^2})$	Wende die Produktregel für Logarithmus an und fasse somit beide Logarithmen zu einem Logarithmus zusammen.
$= \log\left(u^2\sqrt{u^2 - v^2}\right)$	

Wirtschaftsmathematik

3. Wiederholung: Exponenten, Wurzeln, Logarithmen

Beispiele

$$\log(\mathrm{ab}) + \log\left(\frac{a}{b}\right) - \log\,(\mathrm{ab})^2$$

$\log(\mathrm{ab}) + \log\left(\frac{a}{b}\right) - \log\,(\mathrm{ab})^2$	Wende die Produktregel des Logarithmus an.
$= \log\left(\frac{a \cdot b \cdot a}{b}\right) - \log\,(\mathrm{ab})^2$	Kürze den Logarithmus und ziehe das Quadrat in die Klammer.
$= \log\ a^2 - \log\left(a^2 b^2\right)$	Wende die Quotientregel des Logarithmus an.
$= \log \frac{a^2}{a^2 b^2}$	Kürze de Logarithmus .
$= \log \frac{1}{b^2}$	

Quelle: serlo.org, Lizenz: cc-by-sa-4.0

Wirtschaftsmathematik

3. Wiederholung: Exponenten, Wurzeln, Logarithmen

Übungsaufgaben - **Exponenten**, Wurzeln, Logarithmen

Fasse zusammen:

a) $a^{-n}b^{-2} \cdot a^{2n}b^{n}$ $\qquad a^{n} \cdot b^{n-2}$

b) $\frac{a^{n-1}b^{-n}}{a^{1-2n}b^{n}}$ $\qquad a^{(n-1)-(1-2n)} \cdot b^{-n-n} = a^{3n-2} \cdot b^{-2n}$

c) $\frac{x^{4n+5}}{x^{6-5n}}$ $\qquad x^{9n-1}$

d) $\frac{a^{2}b^{-5}}{c^{-3}d} \cdot \frac{c^{-3}d^{2}}{a^{-2}b^{-8}}$ $\qquad a^{4}b^{3}d$

e) $\frac{(9-4a^{2})^{n}}{(3-2a)^{n}}$ $\qquad (3+2a)^{n}$

Wirtschaftsmathematik

3. Wiederholung: Exponenten, Wurzeln, Logarithmen

Übungsaufgaben - **Exponenten**, Wurzeln, Logarithmen

Schreibe als Produkt:

a) $a^{x+4} - a^{x+2}$ $\qquad a^{x+2}(a^2-1) = a^{x+2}(a+1)(a-1)$

b) $x^{2m+1} - 18x^{2m-3} + 81x^{2m-7}$ $\qquad x^{2m-7}(x^8 - 18x^4 + 81) = x^{2m-7}(x^4-9)^2$

c) $2x^{6m} - 72$ $\qquad 2(x^{6m} - 36) = 2(x^{3m}+6)(x^{3m}-6)$

Wirtschaftsmathematik

3. Wiederholung: Exponenten, Wurzeln, Logarithmen

Übungsaufgaben - **Exponenten**, **Wurzeln**, Logarithmen

Vereinfache:

a) $\frac{1}{3a^n} - \frac{1}{a^{n+1}} + \frac{1}{a^n}$ $\qquad \frac{a-3+3a}{3a^{n+1}} = \frac{4a-3}{3a^{n+1}}$

b) $\frac{a^{m-1}-2a^m+a^{m+1}}{a^{m+1}-a^m}$ $\qquad a^{-1}(a-1)$

c) $\frac{a^4-a^5}{a^5-a^4}$ $\qquad -1$

d) $8 \cdot \sqrt[8]{a^4} - 5 \cdot \sqrt[6]{a^3} - 2 \cdot \sqrt[4]{a^2}$ $\qquad \sqrt{a}$

Wirtschaftsmathematik

3. Wiederholung: Exponenten, Wurzeln, Logarithmen

Übungsaufgaben - Exponenten, Wurzeln, **Logarithmen**

Berechne:

a) $\log_a a$	1
b) $\log_a a^n$	n
c) $\log_a \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$	$-\frac{2}{3}$
d) $\log_{\frac{1}{a}} a^2$	-2

Wirtschaftsmathematik

3. Wiederholung: Exponenten, Wurzeln, Logarithmen

Übungsaufgaben - Exponenten, Wurzeln, **Logarithmen**

Bestimme x:

a) $\log_2 x = 128$	$x = 2^{128}$
b) $\log_x \sqrt{3} = 0{,}25$	$x = 9$
c) $\log_{27} x = \frac{2}{3}$	$x = 9$
d) $\log(\log x) = 1$	$x = 10^{10}$
e) $\log_4(2x) = 4$	$x = 128$
f) $\log_x 4 = -0{,}5$	$x = \frac{1}{16}$

Wirtschaftsmathematik

3. Wiederholung: Exponenten, Wurzeln, Logarithmen

Übungsaufgaben - Exponenten, Wurzeln, **Logarithmen**

Fasse zu einem Logarithmus zusammen:

a) $\log_3 5 - \log_3 15 + \log_3 \frac{1}{9}$ $\quad = \log_3 \frac{1}{27} = -3$

b) $2 * \log_a b - \log_a c$ $\quad = \log_a \frac{b^2}{c}$

c) $2 * \log_b(ab) - \log_b \sqrt{b^3} + \log_b \frac{1}{a^2}$ $\quad = \log_b \frac{(ab)^2 * a^{-2}}{b^{1,5}} = \log_b b^{0,5} = 0,5$

d) $\log_3(x+5) - \log_3(5x+25) + 2 * \log_3(\sqrt{5x})$ $\quad = \log_3 \frac{(x+5)(5x)}{5(x+5)} = \log_3 x$

Begriffe

Ein **Term** ist ein Ausdruck, der Zahlen, Rechenzeichen und Buchstaben (als Stell-vertreter für Zahlen) enthält und der beim Einsetzen von Zahlen einen Zahlenwert ergibt.

Die Menge der Zahlen, die man in einen Term einsetzen darf, heißt **Definitionsbereich**.

Beispiele:

$$x^2$$

$$\sqrt{x-3}$$

$$\ln(7-x)$$

$$\frac{3}{4x}$$

Verbindet man zwei Terme T_1 und T_2 mit einem Gleichheitszeichen, so entsteht eine **Gleichung**: $T_1 = T_2$.

Verbindet man zwei Terme mit einem Ungleichheitszeichen, so entsteht eine **Ungleichung**:
$T_1 > T_2$, $T_1 < T_2$, $T_1 \geq T_2$, $T_1 \leq T_2$, $T_1 \neq T_2$ (die Terme sind nicht gleich).

Umformung von Gleichungen

- Gleichungen werden umgeformt, indem auf beiden Seiten dieselbe elementare Rechen-Operation durchgeführt wird.

  Wichtig:
  - Multiplikation mit Null ist keine Äquivalenzumformung
  - auch Potenzieren/Radizieren mit geraden (Wurzel-) Exponenten ist keine Äquivalenzumformung
  - Bei einer Äquivalenzumformung müssen die folgenden Regeln eingehalten werden

    Nicht definiert sind
    - **Division durch 0**
    - **Wurzeln von negativen Zahlen**
    - **Logarithmen von negativen Zahlen oder 0**
    - 0^0

- Zwischen den Umformungsschritten schreibt man das Äquivalenzzeichen <=>
- Ziel der Umformung ist i. d. R. das Auflösen nach einer unbekannten Größe (im Weiteren: x).
- Die Werte, die man für x einsetzen kann, damit die Gleichung erfüllt ist, heißen Lösungsmenge.

4. Wiederholung: Gleichungen und Ungleichungen

Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen enthalten x nur mit der Potenz 0 und 1:

Beispiel: $3x + 12.5 - 7x = 3^2 + x$

- Umformungen sind mit den Grundrechenarten möglich.
- Die Lösungsmenge besteht aus der leeren Menge, genau einem Wert oder unendlich vielen Werten.

Wirtschaftsmathematik

4. Wiederholung: Gleichungen und Ungleichungen

Übungsaufgaben – lineare Gleichungen

$35x + (27 - 15x) - (18x - 30) = 14x - (20 + 5x)$	$L = \{11\}$
$11 - (10 - 6x) - (16x - 9) = 0$	$L = \{1\}$
$5x = 49 - (6x + 16)$	$L = \{3\}$
$29 - (17 - 2x) = 8x + (12 - 3x)$	$L = \{0\}$
$15x - (23 - 6x) - (x + 12) = 25$	$L = \{3\}$
$(24x + 3) + 46 = 86 - (24 - 23x)$	$L = \{13\}$
$26 - (26 - 6x) = 4x + (2 + x)$	$L = \{2\}$
$6 + 10x + 2 = 6x + (8 + 4x)$	$L = Q$
$\frac{1}{4}x - 24 = (16 - \frac{3}{4}x) - 15$	$L = \{25\}$
$2x + (4x + 4) = 12x - (6x - 7)$	$L = \{\ \}$

Quelle: http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/s1al/lg/lg_ak_kt.pdf

Wirtschaftsmathematik

4. Wiederholung: Gleichungen und Ungleichungen

Ökonomisches Anwendungsbeispiel von linearen Gleichungen

Aufgabe:
Die Milchnachfrage ist durch 1100−500p beschrieben (sofern positiv, sonst 0) und das Milchangebot durch 4000p−1600 (sofern positiv, sonst 0). Bestimmen Sie den Gleichgewichtspreis und die Gleichgewichtsmenge.

Lösung:
Die Gleichgewichtsbedingung 1100−500p = 4000p−1600 ergibt 2700 = 4500p.
Somit erhält man als Preis p = 2700/4500 = 3/5 = **0,6**.
Die nachgefragte Menge 1100−500 · 0,6 = 800 stimmt genau überein mit der angebotenen Menge 4000 · 0,6−1600 = **800**.

Quelle: Pampel: *Arbeitsbuch* Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Springer Spektrum (Wiesbaden)

4. Wiederholung: Gleichungen und Ungleichungen

Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen enthalten x mit der Potenz von 0, 1 und 2.

Beispiel: $3x + 12 - 6x^2 = 6 + x$

Lösungsstrategie:
- Umformung zur Standardform
- p/q-Formel anwenden, falls möglich

Schritt 1: Umformung zur Standardform:

$ax^2 + bx + c = 0$, im Beispiel: $x^2 - 1/3x - 1 = 0$
bzw. $x^2 + px + q = 0$ falls $a \neq 0$

Schritt 2: Anwenden der pq-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

- Die Lösungsmenge besteht aus der leeren Menge, genau einem Wert oder genau zwei Werten oder unendlich vielen Werten.

Wirtschaftsmathematik

4. Wiederholung: Gleichungen und Ungleichungen

Quadratische Gleichungen

Lösung mit der „Mitternachtsformel“ (abc-Formel)

$$Gleichung: ax^2 + bx + c = 0$$

$$Ergebnis: x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Quelle: https://www.frustfrei-lernen.de/mathematik/mitternachtsformel.html

Übungsaufgaben – quadratische Gleichungen

Lösung mit der „Mitternachtsformel“ (abc-Formel) oder der pq-Formel:

a) $3x^2 - 18x - 48 = 0$ *c)* $-2x^2 - 10x - 12 = 0$

b) $-0{,}5x^2 + 5x - 12 = 0$ *d)* $4x^2 - 16x + 24 = 0$

a) $x_1 = 8$ $x_2 = -2$

b) $x_1 = 6$ $x_2 = 4$

c) $x_1 = -2$ $x_2 = -3$

d) Keine Lösung (Wert unter der Wurzel ist negativ).

Quelle: Pampel*: Arbeitsbuch* Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Springer Spektrum (Wiesbaden)

Wirtschaftsmathematik

4. Wiederholung: Gleichungen und Ungleichungen

Übungsaufgaben – quadratische Gleichungen

a) $2x^2 - 3x + 1 = 0$	$0{,}5; 1$
b) $x^2 - 2x - 1{,}25 = 0$	$2{,}5; -0{,}5$
c) $2x^2 - 4x - 30 = 0$	$5; -3$
d) $3x^2 - 48 = 0$	$-4; 4$
e) $5(x - 11)(x - 5) = 0$	$11; 5$
f) $\frac{2}{3}x^2 + 2\left(\frac{5}{3} + 2x\right) = 0$	$-5; -1$
g) $-11x^2 + 104x + 4(-0{,}5x^2 + 107{,}25) = 0$	$-3; 11$

Wirtschaftsmathematik

4. Wiederholung: Gleichungen und Ungleichungen

Übungsaufgaben – quadratische Gleichungen

Löse durch Faktorisieren (Ausklammern):

a) $2x^2 - 6x = 0$	$0; 3$
b) $5x^2 + x = 4x^2 + 6x$	$0; 5$
c) $3x - 2x^2 = 2x$	$0; 0{,}5$
d) $(4x - 2)(x + 4) = -8$	$0; -3{,}5$
e) $x^3 - 4x = 0$	$0; -2; 2$

Wirtschaftsmathematik

4. Wiederholung: Gleichungen und Ungleichungen

Übungsaufgaben

- quadratische Gleichungen

a) $(2x-17)*(x-5)-(3x+1)*(x-7)=84$	$-8; 1$
b) $(1+3x)(1-3x)-x(x+1)=2x^2$	$\frac{1}{4}; -\frac{1}{3}$
c) $-76x=19x^2$	$0; -4$
d) $-0{,}5x^2-16x=-67{,}5-x^2$	$5; 27$
e) $x^2\left(-\frac{1}{4}-\frac{4}{x}-\frac{13\frac{3}{4}}{x^2}\right)=0$	$-5; -11$
f) $\frac{7}{9}x^2-4\frac{2}{3}x+6\frac{2}{9}=0$	$2; 4$
g) $2x(6x+7-3x-5)=0$	$0; -\frac{2}{3}$
h) $\frac{5}{6}x^2-\frac{5}{6}=0$	$-1; 1$
i) $-30x-150=-12x^2$	$-2{,}5; 5$
j) $19x^2-33\frac{1}{6}x+14\frac{1}{2}=0$	*keine Lösung*

Andere nichtlineare Gleichungen

Polynome n-ten Grades haben, sofern die Lösungsmenge endlich ist, maximal n Lösungen.
Polynome mit n > 2 werden in der Regel nicht analytisch gelöst
Polynom n-ten Gerades: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0, n \in N$

Bei der Umformung von **nichtlinearen und nichtquadratischen Gleichungen** sind folgende Transformationen hilfreich:

$$\left.\begin{array}{ll} a^x = b & \\ \Leftrightarrow x\ln a = \ln b & \text{Logarithmieren beider Seiten} \\ & \\ \ln(ax+b) = c & \\ \Leftrightarrow ax + b = e^c & \text{Auf beide Seiten die e-Funktion anwenden} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\textbf{Probe nötig,} \\ \text{ob Lösung im} \\ \text{Definitionsbereich der} \\ \text{Ausgangsgleichung}\end{array}$$

Wirtschaftsmathematik

4. Wiederholung: Gleichungen und Ungleichungen

Übungsaufgaben

Löse durch Logarithmieren:

a) $9^{x+3} = 2187$	0,5
b) $4^{-x} = 256$	-4
c) $2^{x+1} = 4^{x-1}$	3

Löse durch Ausklammern:

a) $2^{x+3} + 2^{x-1} = 272$	5
b) $9^{2x+3} = 6562 - 9^{2x-1}$	0,5

Wirtschaftsmathematik

4. Wiederholung: Gleichungen und Ungleichungen

Übungsaufgaben

Löse durch Gleichsetzen der Exponenten:

a) $3^{x-1} = 3^{4x-5}$ $\frac{4}{3}$

b) $3^{\frac{4}{x}} = 3^{x}$ ± 2

Löse durch Substitution:

a) $4^{x} - 12 * 4^{-x} = 1$ 1

b) $2^{4x} + 8 = 6 * 2^{2x}$ $1;\ 0{,}5$

4. Wiederholung: Gleichungen und Ungleichungen

Sonderfall: Wurzelgleichungen

Um Wurzelgleichungen zu lösen, muss man - nach dem Isolieren des Wurzelterms – beide Seiten der Gleichung quadrieren. **Dies ist keine Äquivalenzumformung → Probe nötig**

Beispiel: $\sqrt{2x-1}+1=1-x$

$x = 1$?

Wirtschaftsmathematik

4. Wiederholung: Gleichungen und Ungleichungen

Wurzelgleichungen

Übungsaufgaben:

a) $\sqrt{4-x} = 2$	0
b) $5\sqrt{4x-5} = 20$	$\frac{21}{4}$
c) $\sqrt{2x+1} - 1 = -6$	$keine\ Lösung$

Wirtschaftsmathematik

4. Wiederholung: Gleichungen und Ungleichungen

Wurzelgleichungen

Übungsaufgaben:

a) $\sqrt{2x+\sqrt{4x-3}}=3$	3
b) $\sqrt{5x+\sqrt{10x+6}}=3$	1
c) $\sqrt{x-\sqrt{4x-7}}=1$	$2;\ 4$
d) $\sqrt[2]{3x+1}=\sqrt[4]{60x+1}$	$0;\ 6$
e) $\sqrt[3]{x+3}=\sqrt[6]{6x+10}$	$-1;\ 1$

Wirtschaftsmathematik

4. Wiederholung: Gleichungen und Ungleichungen

Ungleichungen

Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen

Seinen $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

Aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $ac < bc$

Aus $a < b$ und $c < 0$ folgt $ac > bc$

Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$

$ab > 0$ gilt genau dann, wenn ($a > 0$ und $b > 0$) oder ($a < 0$ und $b < 0$)

$ab < 0$ gilt genau dann, wenn ($a > 0$ und $b < 0$) oder ($a < 0$ und $b > 0$)

$ab = 0$ gilt genau dann, wenn ($a = 0$ oder $b = 0$)

Entsprechende Aussagen gelten auch für $\leq$ und $\geq$.

Wirtschaftsmathematik

4. Wiederholung: Gleichungen und Ungleichungen

Ungleichungen

Äquivalenzumformungen von Ungleichungen

- Das Addieren und das Subtrahieren derselben rationalen Zahl auf beiden Seiten der Ungleichung ✓
- Das Addieren und das Subtrahieren desselben Terms auf beiden Seiten der Ungleichung ✓
- Das Multiplizieren und das Dividieren mit einer positiven rationalen Zahl auf beiden Seiten der Ungleichung ✓
- Das Multiplizieren und das Dividieren mit einer negativen rationalen Zahl auf beiden Seiten der Ungleichung mit gleichzeitigem Umdrehen des Relationszeichens (Aus $<$ wird $>$, aus $\leq$ wird $\geq$ und umgekehrt.) !

4. Wiederholung: Gleichungen und Ungleichungen

Übungsaufgaben

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen und geben Sie die Lösungsmenge
$\mathbb{L} := \{x \in \mathbb{R} |$ Ungleichung bzw. Gleichung ist für x definiert und x erfüllt sie$\}$ an:
$x - 2 > 2x - 1 \triangleright$
$2(x-1) < 6(x + \frac{5}{3}) \triangleright$

1. $x < -1$
2. $x > -3$

Wirtschaftsmathematik

5. Summenzeichen

Das Zeichen Σ (großes griechisches Sigma) wird Summenzeichen genannt. Die weiteren Bestandteile der Notation können folgender Darstellung entnommen werden:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \widehat{=} \quad \sum_{\substack{\text{Summationsindex} \\ = \\ \text{untere Summationsgrenze}}}^{\text{obere Summationsgrenze}} i\text{-ter Summand.}$$

Der Summationsindex heißt auch Laufindex.*

Beispiel▸

(i) $1+2+3+4+5+6=\sum_{i=1}^{6} i$

(ii) $4+16+64=4^1+4^2+4^3=\sum_{i=1}^{3} 4^i$

Wirtschaftsmathematik

5. Summenzeichen

Sonderfälle

Zur Vereinheitlichung der Notation werden noch einige Sonderfälle betrachtet. Seien $a_m, \ldots, a_n$ wiederum reelle Zahlen und n, m ganze Zahlen.

1. Ist die untere Summationsgrenze gleich der oberen, bedeutet dies, dass die Summe nur aus einer Zahl (etwa a_j) besteht

$$\sum_{i=j}^{j} a_i = a_j.$$

2. Ist die untere Summationsgrenze größer als die obere Summationsgrenze, wird das Ergebnis der Summe als Null definiert. Daher gilt z.B.

$$\sum_{i=3}^{1} a_i = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{i=n}^{n-1} a_i = 0.$$

Wirtschaftsmathematik

5. Summenzeichen

Rechenregeln

Rechenregeln für das Summenzeichen

Seien $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$, c, d reelle Zahlen und n eine natürliche Zahl. Für das Summenzeichen gelten folgende Rechenregeln:

1. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$ mit $k \in \{1, \ldots, n\}$

2. $\sum_{i=1}^{n} (c \cdot a_i) = c \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)$

3. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

4. $\sum_{i=1}^{n} (c \cdot a_i + d \cdot b_i) = c \sum_{i=1}^{n} a_i + d \sum_{i=1}^{n} b_i$

Wirtschaftsmathematik

5. Summenzeichen

Doppelsummen

Genau wie Klammern werden auch Doppelsummen „von innen nach außen“ aufgelöst. Ein Vertauschen der Summationsreihenfolge, d. h. der Summenzeichen, ist jedoch problemlos möglich.

Es gilt: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$

Wirtschaftsmathematik

5. Summenzeichen

Doppelsummen

Beispiel

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}(2i+5j) = \sum_{i=1}^{3}\left[\sum_{j=1}^{2}(2i+5j)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{3}[(2i+5)+(2i+10)]$$

$$= \sum_{i=1}^{3}[4i+15]$$

$$= (4\cdot 1+15)+(4\cdot 2+15)+(4\cdot 3+15)$$

$$= 19+23+27$$

$$= 69$$

Wirtschaftsmathematik

5. Summenzeichen

Aufgaben

(a) $\sum_{i=1}^{5} i$; (b) $\sum_{i=1}^{5} 100i$; (c) $\sum_{i=1}^{5} (100i - 300)$;

(a) $1+2+3+4+5=15$; (b) $100\sum_{i=1}^{5} i = 100 \cdot 15 = 1500$; (c) $100\sum_{i=1}^{5} i - 5 \cdot 300 = 0$;

(i) $\sum_{i=2}^{5} i^2$; (j) $\left(\sum_{i=2}^{5} i\right)^2$; (k) $\sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{4} 4ij$;

(i) 54; (j) 196; (k) 240;

Wirtschaftsmathematik

4. Wiederholung: Gleichungen und Ungleichungen

Aufgabe für die nächste Lehrveranstaltung

Übungsaufgaben

$$\frac{a^2}{2\cdot(a-b)} - \frac{ab^2-b^3}{2a^2-4ab+2b^2} =$$