Løs $\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial t} + u, hvor\ u(x,0) = 6e^{-3x}$

Der prøves her at at løse denne med seperation af variable hvilket betyder vores resultat bliver af formen

$$U = XT$$

Dette betyder også at

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dX}{dx} \cdot T$$

$$\frac{dU}{dt} = X \cdot \frac{dT}{dt}$$

Dette indsættes så ind i vores ligning:

$$\frac{dX}{dx} \cdot T = 2 \cdot X \cdot \frac{dT}{dt} + XT$$

Her er u også subsitureret ud med u=XT

$$\frac{dX}{dx} \cdot \frac{1}{X} = 2 \cdot \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} + 1$$

Her er variablerne nu sepereret og det kan nu sættes lig med 1 konstant

$$X' \cdot \frac{1}{X} = k$$

$$T' \cdot 2 \cdot \frac{1}{T} + 1 = k$$

$$X' = kX$$
$$T' = T \cdot \left(\frac{k-1}{2}\right)$$

Vi har her 2 differentialligninger som kan løses individuelt

Den første:

$$X' = kX$$

Her kan man at løsningen er:

$$X(x) = C_1 e^{kx}$$

Den næste

$$T' = T \cdot \left(\frac{k-1}{2}\right)$$

Her kan en løsning ses ligesom før

$$T(t) = C_2 e^{\frac{k-1}{2} \cdot t}$$

Vi har nu fra tidligere at løsningen ville være produktet af disse 2 funktioner

$$U = X(x) \cdot T(t)$$
$$U(x,t) = C_1 e^{kx} \cdot C_2 e^{\frac{k-1}{2} t}$$
$$U(x,t) = e^{kx + \frac{k-1}{2} \cdot t} \cdot C_1 \cdot C_2$$

Vi kalder nu $C_1 \cdot C_2$ for C

$$U(x,t) = e^{kx + \frac{k-1}{2} \cdot t} \cdot C$$

Vi kan nu undersøge det nærmere ved at kigge på startbetingelsen

$$v(x,0) = 6e^{-3x}$$

$$c \cdot e^{kx + \frac{k-1}{2} \cdot 0} = 6e^{-3x}$$

$$c \cdot e^{kx} = 6 \cdot e^{-3x}$$

Vi ser her at

$$c = 6$$
$$k = -3$$

Vi kan nu skrive løsningen op

$$v(x,t) = 6 \cdot e^{-3x + \frac{-3-1}{2} \cdot t}$$

$$\underline{\underline{v(x,t) = 6e^{-3x-2t}}}$$

2–13 VERIFICATION OF SOLUTIONS

Verifiy (by substitution) that the given function is a solution of the PDE. Sketch or graph the solution as a surface in space.

2–5 Wave Equation (1) with suitable c

2. $u = x^2 + t^2$

Vi har her Wave equation (1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Her finder vi først den dobbelt afledte i forhold til x og t

$$u = x^2 + t^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2$$

Dette kan så indsættes

$$2 = 2c$$

$$\underline{\underline{c = 1}}$$

Det er derfor en løsning når c=1

5–13 DEFLECTION OF THE STRING

Find $u(x, t)$ for the string of length $L = 1$ and $c^2 = 1$ when the initial velocity is zero and the initial deflection with small k (say, 0.01) is as follows. Sketch or graph $u(x, t)$ as in Fig. 291 in the text.

5. $k \sin 3\pi x$

Vi har fra bogen at en streng som er spændt ud med længden L og som ikke har nogen start hastighed, men har en start afvgielse kan findes som:

$$u(x,t) = \frac{f^*(x-ct) + f^*(x+ct)}{2}$$

Hvor f*(x) er

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Hvor vi igen har at:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(\alpha) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) d\alpha$$

Hvor L er længden

Vi skal derfor først finde B_n

$$f(x) = k \sin(3\pi x)$$

$$B_n = 2 \int_0^1 k \cdot \sin(3\pi \alpha) \cdot \sin(n\pi x) \, dx$$

$$B_n = 2k \cdot \int_0^1 \sin(3\pi x) \cdot \sin(n\pi x)\, dx$$

Vi har her at:

$$\sin(3\pi x) \cdot \sin(n\pi x) = \frac{\cos(3\pi x - n\pi x) - \cos(3\pi x + n\pi x)}{2}$$

$$\sin(3\pi x) \cdot \sin(n\pi x) = \frac{\cos(\pi x \cdot (3-n)) - \cos(\pi x \cdot (3+n))}{2}$$

$$B_n = 2k \cdot \int_0^1 \frac{\cos(\pi x \cdot (3-n)) - \cos(\pi x \cdot (3+n))}{2}\, dx$$

$$B_n = k \cdot \int_0^1 \cos(\pi x \cdot (3-n)) - \cos(\pi x \cdot (3+n))\, dx$$

$$B_n = \frac{k}{\pi} \cdot \left(\left(\frac{\sin(\pi x \cdot (3-n))}{3-n} - \frac{\sin(\pi x \cdot (3+n))}{3+n} \right) \Bigg|_0^1 \right)$$

$$B_n = \frac{k}{\pi} \cdot \left(\frac{\sin(\pi \cdot (3-n))}{3-n} - \frac{\sin(\pi \cdot (3+n))}{3+n} - \frac{\sin(0)}{3-n} - \frac{\sin(0)}{3+n} \right)$$

$$B_n = \frac{k}{\pi} \cdot \left(\frac{\sin(\pi \cdot (3-n))}{3-n} - \frac{\sin(\pi \cdot (3+n))}{3+n} \right)$$

Her eftersom at sinus til pi ganget med et helt tal altid giver 0 og n er et helt tal giver dette altid 0

$$B_n = 0$$

Men eftersom at der står 3-n gælder det ikke for n=3 og det skal derfor undersøges

$$B_3 = 2\int_0^1 k \cdot \sin(3\pi x) \cdot \sin(3\pi x)\,dx$$

$$B_3 = 2k \cdot \int_0^1 \sin^2(3\pi x)\,dx$$

$$B_3 = 2k \cdot \int_0^1 \frac{1-\cos(6\pi x)}{2}\,dx$$

$$B_2 = 2k \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{\cos(6\pi x)}{12\pi} \Big|_0^1 \right)$$

$$B_3 = 2k \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(6\pi)}{12\pi} + \frac{\cos(0)}{12\pi} \right)$$

$$B_3 = 2k \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12\pi} + \frac{1}{12\pi} \right)$$

$$B_3 = k$$

Vi har nu at alle B_n er 0, bortset fra B_ n hvilket også betyder:

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = k \cdot \sin(3\pi x)$$

Ud fra dette har vi så også vores funktion som kommer til at hede:

$$u(x,t) = \frac{f^*(x-ct) + f^*(x+ct)}{2}$$

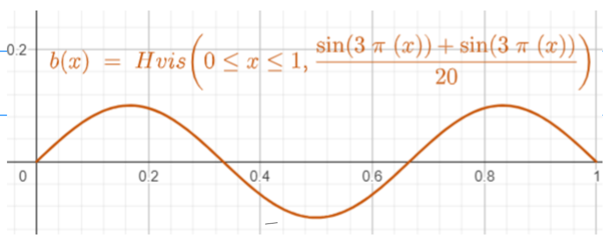
$$u(x,t) = \frac{k\left(\sin(3\pi(x-ct)) + \sin(3\pi(x+ct))\right)}{2}$$

Vi kan så her indsætte k til at være 0,01 og c=1

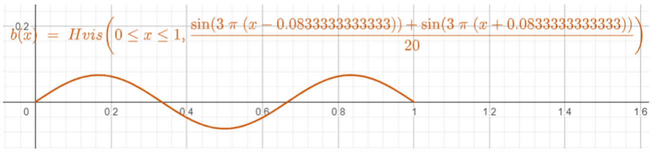
$$u(x,t) = \frac{\sin(3\pi(x-t)) + \sin(3\pi\cdot(x+t))}{200}$$

Den kan her ses tegnet med forskellige værdier for t

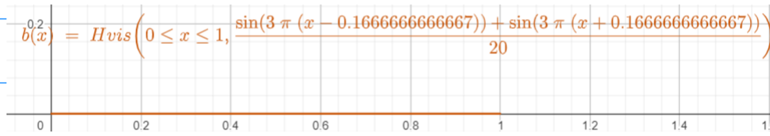
$t = 0$:



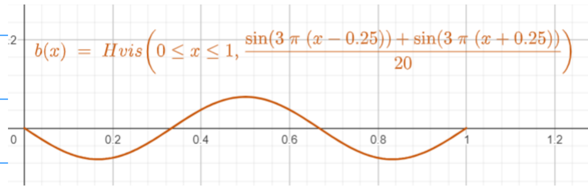
$t = \frac{1}{12}$



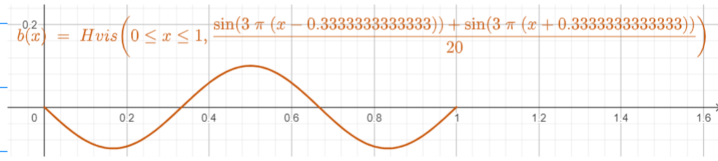
$t = \frac{1}{6}$



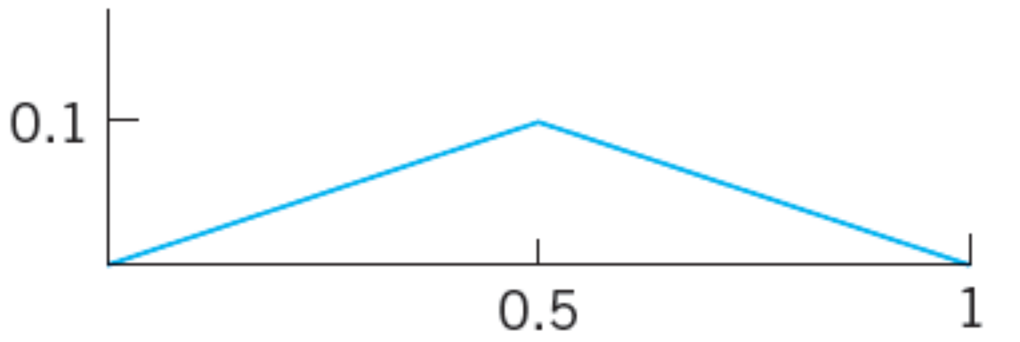
$t = \frac{3}{12}$



$t = \frac{1}{3}$



9.



Vi har nu denne som vi kan beskrive som:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}2x, & 0 \leq x < \\ 0{,}2 - 0{,}2x, & 0{,}5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Ligesom før skal vi først finde B_n

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$B_n = 2\left(\int_0^{0{,}5} 0{,}2x \cdot \sin(n\pi x)\, dx + \int_{0{,}5}^{1} (0{,}2 - 0{,}2x) \cdot \sin(n\pi x)\, dx\right)$$

$$B_n = 2 \cdot \left(0{,}2 \cdot \int_0^{0{,}5} x \cdot \sin(n\pi x)\, dx + 0{,}2 \cdot \int_{0{,}5}^{1} (1 - x) \cdot \sin(n\pi x)\, dx\right)$$

$$B_n = 0{,}4 \cdot \left(\int_0^{0{,}5} x \cdot \sin(n\pi x)\, dx + \int_{0{,}5}^{1} \sin(n\pi x)\, dx - \int_{0{,}5}^{1} x \cdot \sin(n\pi x)\, dx\right)$$

Vi kigger her nærmere på det ene integral

$$\int x \cdot \sin(kx)\, dx$$

Det integral er løst utallige gange i tidligere opgave så svaret skrives bare op her

$$\int x \cdot \sin(kx)\, dx = \frac{\sin(kx) - kx \cdot \cos(kx)}{k^2} + C$$

$$B_n = 0{,}9 \cdot \left(\left. \frac{\sin(n\pi x) - n\pi x \cdot \cos(n\pi x)}{n^2\pi^2} \right|_0^{0{,}5} - \left. \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \right|_{0{,}5}^{1} - \left. \frac{\sin(n\pi x) - n\pi x \cdot \cos(n\pi x)}{n^2\pi^2} \right|_{0{,}5}^{1} \right)$$

$$B_n = 0{,}9 \cdot \left(\frac{\sin(0{,}5 \cdot n\pi) - 0{,}5\, n\pi\, \cos(0{,}5 n\pi)}{n^2\pi^2} - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{\cos(0{,}5 n\pi)}{n\pi} + \frac{n\pi \cdot \cos(n\pi)}{n^2\pi^2} + \frac{\sin(0{,}5\pi n) - 0{,}5\, n\pi \cdot \cos(0{,}5 n\pi)}{n^2\pi^2} \right)$$

$$B_n = 0{,}4 \cdot \left(\frac{\sin(0{,}5 \cdot n\pi)}{n^2 \pi^2} - \frac{0{,}5 \cos(0{,}5 n\pi)}{n\pi} - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{\cos(0{,}5 n\pi)}{n\pi} + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{\sin(0{,}5\pi n)}{n^2\pi^2} - \frac{0{,}5 \cdot \cos(0{,}5 n\pi)}{n \cdot \pi} \right)$$

$$B_n = 0{,}4 \cdot \left(\frac{2 \cdot \sin(0{,}5\pi n)}{n^2 \pi^2} \right)$$

$$B_n = \frac{0{,}8}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin(0{,}5\pi n)$$

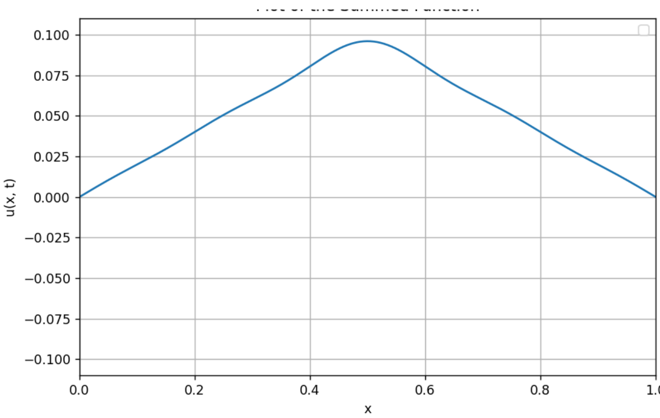
Vi kan nu opskrive løsningen:

$$U(x,t) = \frac{0{,}8}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(0{,}5 n\pi)}{n^2} \cdot \cos(n \cdot \pi \cdot t) \cdot \sin(n\pi x)$$

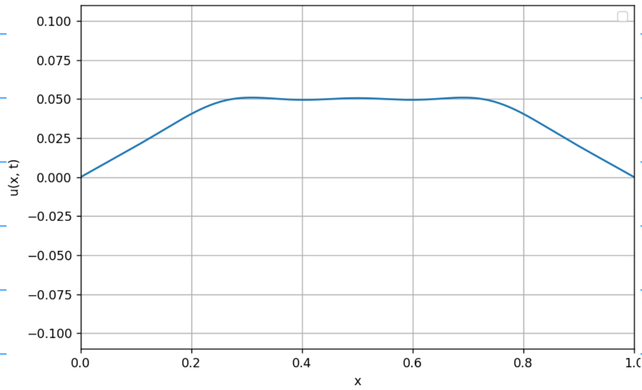
$$= \frac{0{,}8}{\pi^2} \cdot \left(\cos(\pi t) \cdot \sin(\pi x) - \frac{1}{9} \cos(3\pi t) \cdot \sin(3\pi x) \dots \right.$$

Vi kan nu tegne dette:

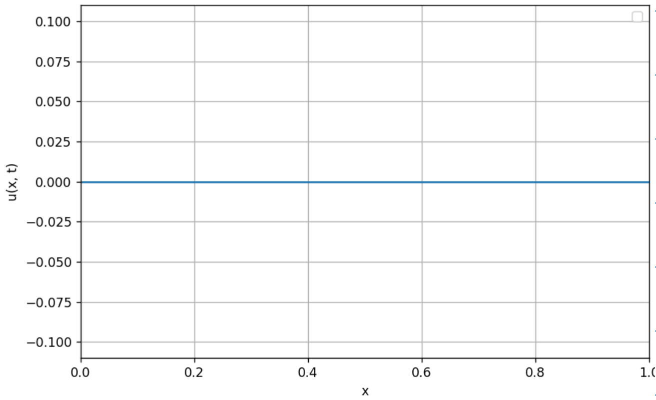
$t = 0$;



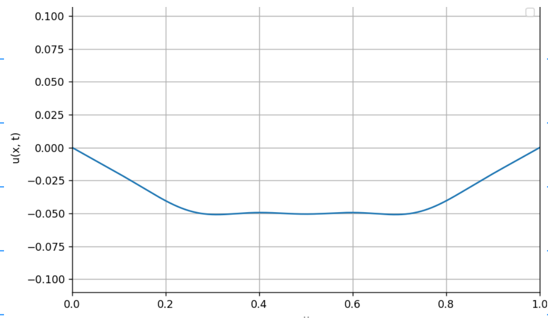
$t = \frac{1}{4}$;



$t = \frac{1}{2}$;



$t = \frac{3}{4}$;



$t = 1$