Chapter 1

Mengensysteme

1.1 DB

Seien $S_1, \ldots, S_n$ Messungen der Lautstärke einer bestimmten Frequenz f an n verschiedenen Orten im Raum und z die Ziel-Lautstärke.

Um die Qualität der Wiedergabe zu messen, können wir Fehlerfunktionen nutzen.

Die einfachste Fehlerfunktion ist woh, das arithmetische Mittel der Abweichungen zum Zielwert

$$E_1(S) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |z - S_n + a|$$

Betrachten wir nun zwei Messungsreihen $S_1, \ldots, S_n$ und $M_1, \ldots, M_k$ so dass gilt,

$$E_1(S) = 10 < E_1(M) = 30$$

So hat eine Messung aus S eine durchschnittliche Abweichung von 10 dB und eine aus M, 30 db.

Der Fehler $E_1(M)$ ist in diesem Fall 3 mal so groß wie der von $E_1(S)$.

Aufgrund der logarithmischen dB Skala, beschreibt ein Unterschied von 10 dB eine verdopplung/halbierung der Lautstärke. Entsprechend, entspricht eine abweichung von 20 dB einem wahrnehmbaren Lautheitsunterschied vom Faktor 4.

Betrachten wir zwei dB Werte $d_1 > d_2$, so ist d_1 ungefähr um den Faktor

$$d = d_1 - d_2, 10^{\frac{d}{33,22}} \approx 2^{\frac{d}{10}}$$

lauter.

Passen wir unser Fehlerfunktion auf dieses Maß an, so wird aus den Fehler pro Messung

$$|z - S_n + a|$$

$$2^{\frac{|z-S_n+a|}{10}}$$

Und so gelangen wir zu der zweiten Fehlerfunktion

$$E_2(S) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{|z-S_n+a|}{10}}$$

Die Idee ist nun, das Signal um a dB zu verstärken, um eine gewisse Ziel-Lautstärke zu erreichen. Bisher sind wir von der folgenden Annahme ausgegangen. Wiederholen wir eine Messung S_i mit einer Verstärkung des Signals um a dB, so ergibt eine neue Messung $S_i + a$ dB.

Unser ziel ist es nun, ein a zu bestimmen, um um $E_2(S)$ zu minimieren.

In di

Um die Qualität einer Anpassung zu messen, können wir eine Fehlerfunktion wählen. Umso geringer der Fehler, desto besser die Anpassung.

Betrachten wir eine Anpassung a, so können wir den Fehler wie folgt quantifizieren.

$$\sum_{i=1}^{n} |z - S_n + a|$$