Die Rolle des operativen Prinzips

im Arithmetikunterricht der 3. Klasse

Dr. Lukas Baumanns

Zahlenketten

(Scherer & Selter, 1996; Selter & Scherer, 1996)

Fibonacci-Folge: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Was passiert mit der Zielzahl,
wenn die 1. Startzahl 1 mehr wird?

Warum ist das immer so?

Was ist passiert?

- Sie haben an einer Stelle der Zahlenkette „gerüttelt“.
- Sie haben beobachtet, welche Auswirkung dieses „Rütteln“ an einer anderen Stelle der Zahlenkette hatte.

→ **Das ist der Kern des operativen Prinzip**

Zahlenketten

(Scherer & Selter, 1996; Selter & Scherer, 1996)

Objekt: 1. Startzahl in der Zahlenkette

Operation: 1. Startzahl wird 1 mehr

Wirkung: Zielzahl wird 2 mehr

Wenn die **1. Startzahl 1 mehr** wird, wird die **Zielzahl 2 mehr**.

Das operative Prinzip

(Wittmann, 1985, S. 9)

„**Objekte** erfassen bedeutet, zu erforschen, wie sie konstruiert sind und **wie sie sich verhalten**, wenn auf sie **Operationen** (Transformationen, Handlungen, ...) ausgeübt werden. Daher muss man im Lern- und Erkenntnisprozess in systematischer Weise:

1. untersuchen, welche **Operationen** ausführbar und wie sie miteinander verknüpft sind,
2. herausfinden, welche Eigenschaften und Beziehungen den **Objekte** durch Konstruktion aufgeprägt werden,
3. beobachten, welche **Wirkungen** Operationen auf Eigenschaften und Beziehungen der Objekte haben (was geschieht mit ..., wenn ...?)."

Der Urprung des Denkens liegt im Handeln. (Dewey, 1910)

Zahlenketten

(Scherer & Selter, 1996; Selter & Scherer, 1996)

Objekt: 2. Startzahl in der Zahlenkette

Operation: 2. Startzahl wird 1 mehr

Wirkung: Zielzahl wird 3 mehr

Wenn die **2. Startzahl 1 mehr** wird,
wird die **Zielzahl 3 mehr**.

Das operative Prinzip (Wittmann, 1985, S. 9)

„**Objekte** erfassen bedeutet, zu erforschen, wie sie konstruiert sind und **wie sie sich verhalten**, wenn auf sie **Operationen** (Transformationen, Handlungen, ...) ausgeübt werden. Daher muss man im Lern- und Erkenntnisprozess in systematischer Weise:

1. untersuchen, welche **Operationen** ausführbar und wie sie miteinander verknüpft sind,
2. herausfinden, welche Eigenschaften und Beziehungen den **Objekte** durch Konstruktion aufgeprägt werden,
3. beobachten, welche **Wirkungen** Operationen auf Eigenschaften und Beziehungen der Objekte haben (was geschieht mit ..., wenn ...?).“

Vermuten Sie zunächst und überprüfen Sie anschließend: Was passiert mit der Zielzahl, wenn die 2. Startzahl 1 mehr wird?

Zahlenketten

(Scherer & Selter, 1996; Selter & Scherer, 1996)

- Studien zeigen, dass Kinder häufig nur **vertikale ↓** Veränderungen beschreiben können (Akinwunmi & Steinweg, 2022; Link, 2012)

Die 2. Startzahl wird 1 mehr und die Zielzahl 3 mehr.

- **Ziel:** Übertragen der Entdeckungen auf eine allgemeingültige Darstellung und treffen von verallgemeinerten Aussagen („Warum ist das immer so?“)

🤔 Wie können Grundschüler*innen ihre Entdeckungen verallgemeinern?

Verallgemeinern der Entdeckungen

1. Startzahl 2. Startzahl Zielzahl

7 — 2 — 9 — 11 — 20

Wie können Grundschüler*innen ihre Entdeckungen verallgemeinern?

Allgemeine Struktur mit beliebigen Startzahlen

a — b — a + b — a + 2b — 2a + 3b

Beliebige Anzahlen

1 mehr
(operative Veränderung)

(Sawyer, 1964; Steinweg, 2013)

Die 1. Startzahl steckt zwei Mal und die 2. Startzahl drei Mal in der Zielzahl!

primakom.dzlm.de/node/382

Dass die Zielzahl 2 mehr wird, wenn die 1. Startzahl 1 mehr wird, ist also unabhängig von der Zahl, die sich hinter der 1. Startzahl verbirgt!

Die Rolle des operativen Prinzips

Kernbotschaft 1

Auf Grundlage des operativen Prinzips können Schüler*innen allgemeine arithmetische Muster und Strukturen erkennen, beschreiben und begründen.

Fokus: Arithmetik

Leitfragen für Sie als Lehrkräfte

1. Was sind die **Objekte**, die die Kinder erforschen?
2. Was sind die **Operationen**, die sie mit den Objekten durchführen?
3. Was sind die **Wirkungen**, die sie damit erzielen?

Weitere „Was passiert mit … , wenn …“-Fragen:

- Was passiert mit der Zielzahl, wenn man die 1./2. Startzahl um 2, 3, … erhöht?
- Was passiert mit der Zielzahl, wenn man die beiden Startzahlen vertauscht?
- Was passiert mit der Zielzahl, wenn beide Startzahlen gleich sind?
- Wann sind Zielzahlen gerade/ungerade?
- Wie kann man eine Veränderung der Zielzahl um 8 erhalten?
- Wie kann die die Startzahlen verändern, sodass die Zielzahl gleich bleibt?

(Krauthausen & Scherer, 2014; Scherer & Weihand, 2017; Wittmann, 1985)

Zahlenketten mit der Zielzahl 50

Finden Sie Zahlenketten mit der Zielzahl 50!

Zahlenketten mit der Zielzahl 50

1. Startzahl		2. Startzahl		Zielzahl
1	−3	16	+2	50
4	−3	14	+2	50
7	−3	12	+2	50
10	+3	**10**	−2	**50**
13	+3	8	−2	50
16	+3	6	−2	50
19	+3	4	−2	50
22	+3	2	−2	50
25		0		50

Das operative Prinzip hilft beim Lösen mathematischer Probleme!

Wie können Grundschüler*innen strategisch Möglichkeiten finden?

Zahlenketten mit der Zielzahl 50

pikas.dzlm.de/node/1074

Wie können Grundschüler*innen strategisch Möglichkeiten finden?

1. Startzahl		2. Startzahl		Zielzahl
1	−3	16	+2	50
4	−3	14	+2	50
7	−3	12	+2	50
10	+3	10	−2	50
13	+3	8	−2	50
16	+3	6	−2	50
19	+3	4	−2	50
22	+3	2	−2	50
25		0		50

Zahlenketten mit der Zielzahl 50

Was ist gleich? Was ist verschieden?

1. Startzahl	2. Startzahl			Zielzahl
10	10	20	30	50
13	8	21	29	50

Lösungen sinnvoll sortieren

Wie können Grundschüler*innen strategisch Möglichkeiten finden?

1. Startzahl		2. Startzahl		Zielzahl
1	−3	16	+2	50
4	−3	14	+2	50
7	−3	12	+2	50
10	+3	10	−2	50
13	+3	8	−2	50
16	+3	6	−2	50
19	+3	4	−2	50
22	+3	2	−2	50
25		0		50

Prozessbezogene Kompetenzen (hier: Problemlösen) kann ich als Lehrkraft unterstützen.

Die Rolle des operativen Prinzips

Kernbotschaft 1

Auf Grundlage des operativen Prinzips können Schüler*innen allgemeine arithmetische Muster und Strukturen erkennen, beschreiben und begründen.

Fokus: Arithmetik

Kernbotschaft 2

Das operative Prinzip ist eine heuristische Strategie bei der Bearbeitung substanzieller Aufgabenformate.

Fokus: Problemlösen

Gute Aufgaben reichen nicht

Zahlenketten zum Forschen 🤩

Wie verändert sich die Zielzahl,
wenn wir die 1. Startahl um 1 erhöhen?

Graue Zahlenketten 🥱

Berechne die fehlenden Zahlen.

Wo bleibt hier die kognitive Aktivierung?

Gute Aufgaben reichen nicht

Es kommt auf Ihren Umgang mit den Aufgaben und Ihre Fähigkeiten an!

- „[Es] zeigt sich auch, wie **sinnvoll und notwendig** die Erkundung durch die Lehrerin selbst ist“ (Scherer, 1997, S. 38)
- Vor allem (oder nur) dann
  - fördern Sie bei Ihren Schüler*innen ein aktives Verhätnis zum **lebendigen Fach** (Wittmann, 2015),
  - nutzen Sie die im Fach **„eingefrorenen didaktischen Momente“** (Heintel, 1978) und
  - leistet Ihr Mathematikunterricht einen **Beitrag zur allgemeinen Denkerziehung des Kindes** (Steiner, 1973)

Die Rolle des operativen Prinzips

Kernbotschaft 1

Auf Grundlage des operativen Prinzips können Schüler*innen allgemeine arithmetische Muster und Strukturen erkennen, beschreiben und begründen.

Fokus: Arithmetik

Kernbotschaft 2

Das operative Prinzip ist eine heuristische Strategie bei der Bearbeitung substanzieller Aufgabenformate.

Fokus: Problemlösen

Kernbotschaft 3

Erst durch die fachliche Auseinandersetzung können Lehrkräfte die Entdeckungen der Schüler*innen gezielt aufgreifen und stärkenorientiert fördern.

Fokus: Die Rolle der Lehrkraft

Hypothetischer Arbeitsauftrag

... wenn dieser Inhalt Teil einer Veranstaltung bei mir wäre

1. Finden Sie alle Mal-Plus-Häuser mit der Zielzahl 27 (Mittelzahl 3).

   Hinweis: Nutzen Sie das operative Prinzip! Überlegen Sie: Was passiert mit der Zielzahl, wenn Sie die linke oder rechte Grundzahl um 1 erhöhen?

2. Überlegen Sie aufeinander aufbauende Arbeitsaufträge einer Unterrichtssequenz zum Mal-Plus-Haus für Schüler*innen der dritten Klasse. Berücksichtigen Sie operative Veränderungen und überlegen Sie, welche allgemeine Struktur durch die operativen Veränderungen sichtbar wird?

3. Reflektieren und kommentieren Sie Ihre Überlegungen auf der Grundlage folgender Leitfragen:

   a. Wie können die Schüler*innen schrittweise an die Struktur des Mal-Plus-Hauses herangeführt werden? Inwieweit berücksichtigen Ihre Arbeitsaufträge das operative Prinzip?

   b. Welche Darstellungmittel machen das operative Prinzip für Ihre Schüler*innen anschaulich?

   c. * Wie sieht eine sprachliche Begleitung aus, die sowohl die Kommunikation zwischen und mit den Kindern als auch das Denken der mathematischen Strukturen ermöglicht.

Mal-Plus-Haus

Das operative Prinzip

kann noch viel mehr!

Produktives Üben

Was passiert mit der Zielzahl, wenn die 1./2. Startzahl 1 mehr wird?

Operatives Beweisen

Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch drei teilbar.

2 + 3 + 4 = 9
8 + 9 + 10 = 27
123 + 124 + 125 = 372

Nicht nur Arithmetik

Was passiert mit dem Flächeninhalt des Quadrats, wenn ich es umspanne?

Das operative Prinzip

kann noch viel mehr!

Produktives Üben

Was passiert mit der Zielzahl, wenn die 1./2. Startzahl 1 mehr wird?

Operatives Beweisen

Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch drei teilbar.

2 + 3 + 4 = 9
8 + 9 + 10 = 27
123 + 124 + 125 = 372

Nicht nur Arithmetik

Was passiert mit dem Flächeninhalt des Quadrats, wenn ich es umspanne?

Das operative Prinzip

"

Wenn wir so vorgehen, bestehen gute Aussichten, das wir dem Schüler ein Denken vermitteln, das sein konkretes Tun gedanklich durchdringt, ihn in die Lage versetzt, seine Handlungspläne klar und wirkungsvoll aufzubauen und — darüber hinaus — ihn die tiefe Struktur der Wirklichkeit und ihre inneren Zusammenhänge klar sehen lässt, Einsichten, die über ihre Nützlichkeit hinaus eine wichtige Rolle im Prozess seiner Reifung und der Findung seiner geistigen Identität spielen.

"

(Aebli, 1985)

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

Friesgruppe

Krauthausen, 2018, in Anlehnung an Wittmann 1998, S. 150

Friesgruppe

- Wenn wir so vorgehen, bestehen gute Aussichten, das wir dem Schüler ein Denken vermitteln, das sein konkretes Tun gedanklich durchdringt, ihn in die Lage versetzt, seine Handlungspläne klar und wirkungsvoll aufzubauen und — darüber hinaus — ihn die tiefe Struktur der Wirklichkeit und ihre inneren Zusammenhänge klar sehen lässt, Einsichten, die über ihre Nützlichkeit hinaus eine wichtige Rolle im Prozess seiner Reifung und der Findung seiner geistigen Identität spielen.

Aebli, 1985

1. Startzahl
2. Startzahl
Zielzahl
7
2
9
11
20
+1
+2
8
2
10
12
22
+1
+2
9
2
11
13
24
Beliebige Anzahlen
1 mehr
(operative Veränderung)