Information Scientists Do Mathematics.

Vorlesung **Mathematik für Informatiker II** 23. April 2019
(an der Universität Heidelberg)
Dozent: *Dr. Martin Rheinländer*
Tutoren: *Armand Rousselot, Vasil Manev, Max Bréard*

Aufgabenserie 1
Abzählprobleme

Allgemeiner Hinweis zu den Übungen

Ein Sternchen “ * ” bei der Punktangabe zeigt eine Bonusaufgabe an.
Bonusaufgaben werden ggf. nur sehr eingeschränkt korrigiert.

Aufgabe 1.1: Rechnen mit unendlichen Summen und Produkten (5+5+5*+5+4×5*=15P)

a) (Ergänzung zur Vorlesung) Begründen Sie direkt (ohne Gebrauch von Potenzreihen), daß jede natürliche Zahl in eindeutiger Weise als Summe von Zweierpotenzen (d.h. als Summe der Zahlen $1 = 2^0, 2 = 2^1, 4 = 2^2, 8 = 2^3, \ldots$) geschrieben werden kann, wobei jede Zweierpotenz höchstens einmal vorkommen darf.

b) Zeigen Sie, daß sich jede natürliche Zahl auch in eindeutiger Weise als Summe der Potenzen der Zahl 3 schreiben läßt, wenn jede Potenz höchstens zweimal vorkommen darf. Betrachten Sie dazu das unendliche Produkt

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + x^{3^k} + (x^{3^k})^2\right) = (1 + x + x^2) \cdot (1 + x^3 + x^6) \cdot (1 + x^9 + x^{18}) \cdot (1 + x^{27} + x^{54}) \cdot \ldots$$

und gehen Sie analog zur Vorlesung vor.

c) (Diskussionsaufgabe) Begründen Sie, daß sich (zumindest theoretisch) jedes in Gramm ganzzahlige Gewicht mit einer klassischen zweischaligen Balken- oder Tafelwaage abwiegen läßt, wenn Gewichtssteine von 1g, 3g, 9g, 27g, 81g, 243g, ... in jeweils doppelter Ausführung zur Verfgüng stehen. Beschreiben Sie eine Vorgehensweise (also einen Algorithmus), wie sich ein unbekanntes ganzahliges Gewicht ermitteln läßt.

Anmerkung: Es mag an dieser Stelle auch sinnvoll sein, sich zu überlegen, wie man beim Abwiegen verfährt, wenn stattdessen Gewichtssteine benutzt werden, die dem Binär- bzw. dem Dezimalsystem angepaßt sind.

d) Zeigen Sie, daß sich das in c) beschriebene Wägungsproblem auch lösen läßt, wenn die Gewichtssteine nur einfach vorhanden sind.

Hinweis: Was ergibt sich, wenn man Produkte der Form $(x^{-1} + 1 + x) \cdot (x^{-3} + 1 + x^3) \cdot (x^{-9} + 1 + x^9)$ ausmultipliziert?

e) (Diskussionsaufgabe) Wie läßt sich ein bekanntes ganzahliges Gewicht abwiegen (überprüfen), wenn nur die Gewichtssteine von 1g, 3g, 9g, 27g, 81g, 243g, ... jeweils einmal zur Verfügung stehen. Entwickeln Sie eine systematische Vorgehensweise (d.h. einen Algorithmus), um auch unbekannte ganzzahlige Gewichte zu bestimmen.

f) (Zusatzaufgabe) Begründen Sie auf eine algebraisch-analytische Weise die Gleichung

$$(1 + x) \cdot (1 + x^2) \cdot (1 + x^3) \cdot (1 + x^4) \cdot \ldots = \frac{1}{(1 - x) \cdot (1 - x^3) \cdot (1 - x^5) \cdot (1 - x^7) \cdot \ldots}$$

zwischen den beiden unendlichen Produkten auf der linken bzw. rechten Seite.

Hinweis: Es ist $1+x^k = \frac{1-x^{2k}}{1-x^k}$. Alternativ läßt sich auch das Produkt $P(x) := \prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)(1-x^{2k-1})$ betrachten. Warum gilt $P(x) = P(x^2)$? Was läßt sich daraus schlußfolgern falls $|x| < 1$ ist?

g) (Zusatzaufgabe) Begründen Sie mit Hilfe der obigen Gleichung die folgende kombinatorische Aussage über die additiven Zerlegungsmöglichkeiten natürlicher Zahlen: Ist n eine natürliche Zahl, so gibt es ebenso viele Möglichkeiten, n als Summe *paarweise verschiedener* natürlicher Zahlen zu schreiben, wie Möglichkeiten bestehen, n in eine Summe aus lauter *ungeraden* Zahlen zu zerlegen, welche jedoch durchaus mehrfach vorkommen dürfen.

Hinweis: Es ist $\frac{1}{1-x^\ell} = 1 + x^\ell + x^{2\ell} + x^{3\ell} + x^{4\ell} + \ldots$.

h) (Zusatzaufgabe)Wieviele Möglichkeiten hat ein Geldwechsler, einen Euro (also 100 Cent) zu wechseln, wenn er Münzen zu 50, 20, 10 5,2 oder einem Cent herausgeben darf? Mit anderen Worten, wieviele Möglichkeiten bestehen, die Zahl 100 als Summe (ohne Berücksichtigung der Summandenreihenfolge) zu schreiben, welche nur die Zahlen 50,20,10,5,2 oder 1 als mögliche Summanden enthält? Jede der genannten Zahlen darf dabei mehrfach, einfach oder auch gar nicht als Summand auftreten. Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten durch direktes Abzählen.

Anmerkung: Auf eine alternative Berechnungsmöglichkeit (mittels Potenzreihen) werden wir ggf. im Verlauf der Vorlesung zurückkommen.

Aufgabe 1.2: Zum Teilflächenproblem (5+10+5*+5*=15P)

In der Vorlesung wurde das folgende *Teilfächenproblem* diskutiert: Auf einer Kreislinie werden n Eckpunkte plaziert. In wieviele Teilflächen wird der Kreis zerlegt, wenn durch je zwei der n Punkte (d.h. durch alle möglichen Punktepaare) eine Gerade gelegt wird? Dabei sollen die Schnittpunkte im Inneren des Kreises jeweils zu genau zwei Geraden gehören.

a) Sämtliche Flächenstücke, auf deren Rand einer der $n > 3$ Eckpunkte liegt, heißen *äußere Flächenstücke*. Begründen Sie kurz, warum es insgesamt $n(n-2)$ äußere Flächenstücke gibt, d.h. jedem der n Eckpunkte sind (im Schnitt bzw. bei gleicher Verteilung) $n-2$ äußere Flächenstücke zuzuordnen.
Achtung: $n = 3$ ist ein Sonderfall, für den die Formel nicht greift. Der Fall $n = 4$ zeichnet sich dadurch aus, daß ebenfalls keine "inneren" Flächenstücke vorhanden sind, obgleich die Formel zutrifft. Beachte: $n(n-2) = 2n + n(n-4)$.

b) Für das *verallgemeinerte Teilflächenproblem* in einem *konvexen*[1] Gebiet oder der Ebene ergab sich der Zusammenhang

$$\#\text{Geraden} + \#\text{Schnittpunkte} + 1 = \#\text{Teilflächen}$$

zwischen der Anzahl der Geraden, der Anzahl ihrer Schnittpunkte und der Anazhl der daraus resultierenden Flächenstücke (Teilfächen). Wie paßt das mit der *Eulerschen Polyederformel* für *zusammenhängende, ebene Graphen*[2] zusammen, wonach

$$\#\text{Knoten} - \#\text{Kanten} + \#\text{Teilgebiete} = 2$$

gilt?

c) Bei der Behandlung des verallgemeinerten Teilflächenproblems wurde explizit vorausgestzt, daß sich in jedem Schnittpunkt nur zwei Geraden schneiden dürfen. Diskutieren Sie kurz den Entartungsfall, wenn sich in einem Schnittpunkt mehr als zwei Geraden schneiden. Wieviele einfache Schnittpunkte und Teilflächen gehen "verloren", wenn sich drei, vier oder mehr Geraden in einem Punkt schneiden? Versuchen Sie eine Formel für die Anzahl der Teilflächen zu finden, wenn von jedem Schnittpunkt im Inneren die Anzahl der sich dort schneidenden Geraden bekannt ist.

[1] Insbesondere heißt dies, daß jede Gerade den Rand des Gebietes maximal in zwei Punkten schneidet.

[2] Ein Graph ist eine Menge von Punkten (auch Knoten genannt), die durch *Kanten* miteinander verbunden sind, wobei keineswegs jeder Knoten mit allen anderen verbunden sein muß. Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn zu je zwei Punkten ein verbindender Kantenzug existiert. Ein Graph heißt *eben* oder *planar*, wenn sich keine zwei Kanten kreuzen.

d) Bei der Beschäftigung mit dem Teilflächenproblem kann man zunächst durch Ausprobieren zu der Vermutung gelangen, daß die Anzahl der Teilflächen bei n Eckpunkten auf der Kreislinie durch 2^{n-1} gegeben ist. Dies ist kein Zufall! Können Sie erklären, welcher Umstand dafür verantwortlich ist, auf diese falsche Fährte zu geraten?

Aufgabe 1.3: Eine *graphentheoretische* Anwendung des *doppelten Abzählens* (10P)

Ein Graph besteht aus einer Menge von Knoten (auch Ecken genannt) und Kanten. Die Menge der Kanten bildet dabei eine Teilmenge aller möglichen Knotenpärchen. Knoten, die durch eine Kante miteinander verbunden sind, heißen benachbart oder *adjazent*. Betrachten Sie nun einen hypothetischen Graphen mit folgenden Eigenschaften:

- Jeder Knoten hat genau k Nachbarn.
- Je zwei Knoten haben stets genau einen gemeinsamen Nachbarn.

Bestimmen Sie die Anzahl der Knoten eines solchen Graphen.
Hinweis: Es sei V die Menge aller Knoten und $\binom{V}{2}$ die Menge aller Knotenpärchen. Betrachten Sie auf $V \times \binom{V}{2}$ die Relation R definiert durch

$$\forall v \in V, \forall (w_1, w_2) \in \binom{V}{2} : \quad \big(v, (w_1, w_2)\big) \in R \;:\Leftrightarrow\; v \text{ ist zu } w_1 \text{ und } w_2 \text{ benachbart.}$$

Anmerkung: Die Anzahl der Knoten läßt sich auch alternativ bestimmen, indem man zu einem fixierten Knoten die Nachbarn der Nachbarn zählt. Warum wird dabei nur der fixierte Knoten mehrfach berücksichtigt?

Aufgabe 1.4: Kombinatorischer Zugang zu den Potenzsummenformeln (10+15*=10P)

Ausgangspunkt der Integralrechnung ist die Berechnung des Flächeninhalts krummlinig berandeter Flächenstücke. Ein typisches Beispiel dafür ist die Fläche zischen einer Parabel, ihrer Tangente im Scheitelpunkt und einer zu der Tangenten senkrecht stehenden Geraden. Fragt man nach dem Flächeninhalt des Gebietes im kartesischen Koordinatensystem, welches über dem Intervall $[0,1]$ durch die x-Achse und dem Graphen der Funktion $x \mapsto x^p$ (mit $p \in \mathbb{N}$) begrenzt wird, so läßt sich dieses durch eine Schar von Rechtecken jeweils gleicher Breite aber variabler Höhe überdecken. Ein Nährungswert für den gesuchten Flächeninhalt ergibt sich durch Aufsummieren der Rechtecksflächen. Dabei ist die Nährung umso genauer, je mehr Rechtecke man wählt, die dann umso schmaler werden und dadurch umso besser dem Graphen in ihrer Höhe angepaßt werden können. Diese Vorgehensweise führt auf *Potenzsummen* der Form

$$S_p(n) := \sum_{k=1}^{n} k^p \, .$$

Bereits in Aufgabe 1.1 zur Vorlesung IMI 1 haben Sie die Summenformeln für die Fälle $p=2$ und $p=3$ kennengelernt und mit Hilfe der vollständigen Induktion verifiziert. Allerdings hilft das Beweisprinzip der vollständigen Induktion nicht (zumindest nicht direkt[3]) weiter, wenn es darum geht, eine derartige Summenformel zu finden. Verwenden Sie die kombinatorische Vorgehensweise aus der Vorlesung, um

a) die Summenformel für $p=3$ aus Aufgabe 1.1 (IMI 1) zu bestätigen $\left[\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2\ \right]$

b) und die Summenformel für $p=4$ zu bestimmen $\left[\ \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\ \right]$.

Aufgabe 1.5: Einige weitere Abzählprobleme in verschiedenen Kontexten (5*+5*+5*+6*+4*)

a) (aus der Zahlentheorie) Es sei n eine natürliche Zahl. Wie berechnet sich die Anzahl der Teiler $\tau(n)$ von n? **Hinweis:** Denken Sie an die Primzahlzerlegung von n.

[3] Aus dem Induktionsprinzip läßt sich allerdings eine Bestimmungsgleichung herleiten, die ebenfalls dazu genutzt werden kann, die Koeffizienten eines Polynoms zu ermitteln, mit welchem sich die p'ten Potenzen summieren lassen.

b) (nochmals aus der Zahlentheorie): Wie berechnet sich anhand der Primzahlzerlegung von n die Summe $\sigma(n) = \sum_{k|n} k$ der Teiler von n? **Hinweis:** Verwenden Sie die Summenformel der geometrischen Reihe (siehe IMI 1, Aufgabe 1.1b).

c) (Zusatzfrage) Vergleichen Sie die auf der Primzahlzerlegung basierenden Darstellungen der Funktionen τ und σ mit der Eulerschen ϕ-Funktion. Verhalten sich σ und τ ebenfalls *multiplikativ*, so daß zumindest für teilerfremde natürliche Zahlen m und n die Gleichungen $\tau(m \cdot n) = \tau(m) \cdot \tau(n)$ und $\sigma(m \cdot n) = \sigma(m) \cdot \sigma(n)$ bestehen?

d) (aus der Politik) In einem Land mit einem Dreiparteiensystem gibt es 201 Parlamentssitze. Wie viele Sitzverteilungen sind möglich, bei denen keine Partei über die absolute Mehrheit verfügt, und jede Partei mindestens einen Abgeordneten entsenden kann.

e) (aus der Soziologie) Zwei Studenten der Sozialpädagogik unterhalten sich über das Geschlechterverhältnis in ihren jeweiligen Psychologie-Kursen. Franz sagt: „In meinem Kurs sind wir 28 Jungs, von denen jeder (im Schnitt) mit neun der weiblichen Hörer befreundet ist. Von den Mädels ist aber jede (im Schnitt) nur mit sechs der männlichen Teilnehmer bekannt.“ Darauf entgegnet Frank: „Bei uns ist es noch krasser, jeder von uns Jungs, auch wir sind 28, hat (im Schnitt) 11 weibliche Bekanntschaften im Kurs, während die Mädels (im Schnitt) mit fünf von uns Jungs befreundet sind.“ Welcher von den beiden hat definitiv gelogen?

Bitte die Abgaben im Moodle hochladen bis zum 03.05.2019, 17:00 Uhr.