Vorlesung **Mathematik für Informatiker II** 03. Mai 2019
(an der Universität Heidelberg)
Dozent: *Dr. Martin Rheinländer*
Tutoren: *Armand Rousselot, Vasil Manev, Max Bréard*

Information Scientists Do Mathematics.

# Aufgabenserie 2

## Binomialkoeffizienten

### Aufgabe 2.1: Binomische Formeln für Faktorielle (3+12=15P)

Es sei $x$ eine beliebige reelle oder komplexe Zahl und $n \in \mathbb{N}_0$. Die beiden Produkte

$$
\begin{aligned}
x^{\underline{n}} &:= x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-n+1) \\
x^{\overline{n}} &:= x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot \ldots \cdot (x+n-1)
\end{aligned}
$$

bezeichnet man als $n$'te *absteigende* respektive *aufsteigende Faktorielle* von $x$. Die Faktoriellen haben einige Ähnlichkeiten zu den *Potenzen*. Analog zur Definition $x^0 := 1$ setzt man $x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1$. Außerdem gilt $x^{\underline{1}} = x^{\overline{1}} = x^1 = x$. Abgesehen davon, daß die Faktoriellen wegen ihrer kombinatorischen Bedeutung von Interesse sind, besteht der Zweck dieser Aufgabe darin, den induktiven Beweis der allgemeinen binomischen Formel gut nachzuarbeiten.

a) Geben Sie eine Rekursionsformel für die ab- bzw. aufsteigenden Faktoriellen an.

b) Zeigen Sie, daß sich die binomische Formel auf die Faktoriellen direkt übertragen läßt, d.h. weisen Sie die beiden Gleichungen

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{\underline{n}} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{\underline{k}} \cdot b^{\underline{n-k}} \\
(a+b)^{\overline{n}} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{\overline{k}} \cdot b^{\overline{n-k}}
\end{aligned}
$$

nach. Sie können sich dabei an der Rechnung aus der Vorlesung zum Nachweis der binomischen Formel orientieren (Auseinaderziehen der Summe, Transformation des Summationsindexes etc.).

### Aufgabe 2.2: Ergänzendes zu den Binomialkoeffizienten (4+4+4=12P)

a) Zeigen Sie induktiv, daß sich die Binomialkoeffizienten mit festem oberen Index $n$ zu $2^n$ summieren. Begründen Sie dies durch eine möglichst anschauliche Argumentation (mit Bezugnahme auf das Pascalsche Dreieck) sowie durch eine formale Rechnung.

b) Rechnen Sie mit der expliziten Darstellungsformel der Binomialkoeffizienten nach, daß für alle natürliche Zahlen $k \leqq m \leqq n$ die Gleichung

$$
\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}
$$

gilt und geben Sie überdies eine kombinatorische Interpretation dieser Indentität.

c) Zeigen Sie an einem Beispiel, daß sich im Pascalschen Dreieck jede *Vertikalsumme* als *Diagonalsumme* wiederfinden läßt und umgekehrt. Begrüden Sie diesen Sachverhalt.

**Erinnerung:** $\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$ und $\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$

**Aufgabe 2.3: Summen mit Binomialkoeffizienten** **(2×5+7×5*=10P)**

Die folgenden Identitäten können größtenteils auf unterschiedliche Weise – das heißt kombinatorisch, per Induktion oder durch direktes Nachrechnen – verifiziert werden.

a) $$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

b) $$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

c) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

d) $$\sum_{k=1}^{n} k\cdot\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$$

e) $$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = 2^{n-m}\binom{n}{m}$$

f) $$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 2^{m}\binom{n}{m}$$

g) $$\sum_{k=m}^{n} k\binom{k}{m} = (m+1)\binom{n+2}{m+2} - \binom{n+1}{m+1}$$

h) $$\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k}\binom{k}{m} = \frac{1}{m}\binom{n}{m}$$

i) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

**Aufgabe 2.4: Einige Anwendungen** **(4+3+3+3=13P)**

a) Es sei $S_p(n) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} k^p$ die Summe der $p$'ten Potenzen der ersten $n$ natürlichen Zahlen. Betrachten Sie den Ausdruck $(x+1)^{p+1} - x^{p+1}$ und leiten daraus unter Verwendung des Binomischen Lehrsatzes eine Rekursionsformel her, mit der sich $S_p(n)$ aus der Kenntnis von $S_{p-1}(n), S_{p-2}(n), \dots$ rekursiv berechnen läßt.

b) Bekanntlich ist $S_1(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$ und $S_2(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Benutzen Sie die in Aufgabenteil a) herzuleitende Rekursionsformel, um eine Summenformel für $S_3(n)$ anzugeben.

c) Binomialkoeffizienten lassen sich kombinatorisch als Teilmengenauswahlkoeffizienten oder als Anordnungskoeffizienten interpretieren. Verwenden Sie die zweite Interpretationsmöglichkeit, um die Anzahl aller *geordneten $k$-Zerlegungen* einer natürlichen Zahl $n$ zu berechnen. Dabei versteht man unter einer geordneten $k$-Zerlegung von $n$ die Darstellung von $n$ als Summe von $k$ nicht notwendigerweise verschiedenen positiven ganzzahligen Summanden , wobei Darstellungen auch dann unterschieden werden, wenn sie sich nur in der Reihenfolge der Summanden unterscheiden.

**Hinweis:** Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Symbole $\bullet$ (Bullet) und $|\bullet$ anzuordnen, so daß insgesamt $n$ Bullets vorhanden sind sowie $k-1$ Trennstriche $|$ und die Zeichensequenz ferner stets mit (mindestens) einem Bullet beginnt?

d) Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Zahl 10 als Summe von drei Würfelergebnissen zu erhalten, wenn ein Würfel drei Mal hintereinander geworfen wird und dementsprechend die Augensummen auch nach der Reihenfolge der Summanden unterschieden werden sollen. Wie wahrscheinlich ist es bei dem Wurf dreier Würfel die Augensumme 10 zu erhalten?

*Bitte die Abgaben im Moodle hochladen bis zum 10.05.2018, 17:00 Uhr.*

## Weitere ergänzende Aufgaben

Die nachfolgenden drei Aufgaben entahlten interessanten Stoff, der aber aus Zeitgründen wohl erst einmal nicht besprochen werden kann. Sollten Sie die ein oder andere Aufgabe schriftlich bearbeiten, kann Ihr Tutor Ihnen insgesamt bis zu 15 Bonuspunkte gutschreiben.

**Aufgabe 2.5: Binomialkoeffizienten mit komplexwertigem oberen Eintrag**

a) Für $\alpha \in \mathbb{C}$ und insbesondere für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist der Binomialkoeffizient durch $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}$ definiert. Überprüfen Sie die folgenden Gleichungen:

$$\text{i)}\ \binom{-1}{k} = (-1)^k \qquad \text{ii)}\ \binom{-\alpha}{k} = (-1)^k\binom{\alpha+k-1}{k} \qquad \text{iii)}\ (-1)^k\binom{\alpha}{k} = \binom{k-\alpha-1}{k}$$

Beachten Sie in diesem Zusammenhang auch die *Reziprozitätsgesetze* $(-x)^{\underline{n}} = (-1)^n x^{\overline{n}}$ und $(-x)^{\overline{n}} = (-1)^n x^{\underline{n}}$ für die fallende bzw. steigende Faktorielle sowie $x^{\overline{n}} = (x+n-1)^{\underline{n}}$ und $x^{\underline{n}} = (x-n+1)^{\overline{n}}$.

**Anmerkung:** Die Beziehung $\binom{\alpha+k-1}{k} = (-1)^k\binom{-\alpha}{k}$ spielt eine zentrale Rolle, um zu zeigen, daß die *negative Binomialverteilung* tatächlich auf 1 normiert ist, wie es sich für eine "vernünftige" Wahrscheinlichkeitsverteilung gehört. Die negative Binomialverteilung mit den Paramtern $0 < p < 1$ (Trefferwahrscheinlichkeit) und $r \in \mathbb{N}$ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{N}_0$, welche die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß sich bei wiederholt durchgeführten Bernoulli-Experimenten der $r$'te Treffer bei der $r+k$-ten Wiederholung einstellt.

b) Welche der beiden Formeln für die vertikale oder diagonale Summation läßt sich auf Binomialkoeffizienten mit reell- oder komplexwertigem oberen Index verallgemeinern? Leiten Sie daraus die Formel

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i} = (-1)^k\binom{n-1}{k}$$

her, durch welche alternierende Partialzeilensummen von Binomialkoeffizienten wiederum als Binomialkoeffizient dargestellt werden können.

**Aufgabe 2.6: Zur *Vandermonde* Identität**

a) Zeigen Sie mittels der allgemeinen binomischen Formel (binomischer Lehrsatz)

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{\ell=0}^{k}\binom{m}{\ell}\binom{n}{k-\ell}.$$

b) Finden Sie dafür auch eine kombinatorische Begründung.

c) (*Hypergeometrische Verteilung* als Anwendungsbeispiel) Betrachten Sie das folgende Zufallsexperiment: aus einer Urne mit $m$ weißen und $n$ schwarzen Kugeln werden zufällig (und ohne Zurücklegen)

$k$ Kugeln entnommen. Die Zufallsvariable $X$ entspreche der Anzahl der gezogenen weißen Kugeln. Begründen Sie, daß die Wahrscheinlichkeit, genau $0 \leqq \ell \leqq k$ weiße Kugeln zu ziehen, durch

$$p_\ell = P(X = \ell) = \binom{m}{\ell}\binom{n}{k-\ell}\Big/\binom{m+n}{k} \tag{1}$$

gegeben ist. Welchen Wert hat die Summe $\sum_{\ell=0}^{k} p_\ell$? Angenommen, daß Zufallsexperiment wird sehr oft wiederholt. Haben Sie eine Vermutung, wieviele weiße Kugeln sich im Durchschnitt pro Experiment ergeben sollten? Berechnen Sie schließlich den Mittelwert (bzw. Erwartungswert) $\sum_{\ell=0}^{k} \ell p_\ell$ der hypergeometrischen Verteilung zu den Parametern $m, n$ und $k$.

d) Ersetzen Sie die natürlichen Zahlen $m$ und $n$ in der obigen Gleichung durch die reellen (komplexen) Zahlen $x$ und $y$, und überzeugen Sie sich anhand eines einfachen Beispiels, daß die Gleichheit der beiden Seiten bestehen bleibt. Wie läßt sich das mit Hilfe des *Fundamentalsatzes der Algebra* begründen?

e) Leiten Sie unter Verwendung von Teil c) die binomischen Formeln für die ab- und aufsteigende Faktoriellen her, die bereits in Aufgabe 1.4 induktiv nachzuweisen waren.

## Aufgabe 2.7: Multinomialkoeffizienten

Die Verallgemeinerung der Binomialformel auf Ausdrucke mit mehr als zwei Summanden (Multinome) wird als Multinomialformel bezeichnet; die den Binomialkoeffizienten entsprechenden Koeffizienten nennt man folglich Multinomialkoeffizienten.

a) Im Falle eines Trinoms gelte

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{0 \leqq j_1, j_2, j_3 \leqq n \\ j_1+j_2+j_3=n}} \binom{n}{j_1\ j_2\ j_3} a^{j_1} b^{j_2} c^{j_3} .$$

Wie lassen sich die Trinomialkoeffizienten $\binom{n}{j_1\ j_2\ j_3}$ auf die Binomialkoeffizienten zurückführen? Geben Sie einen expliziten Ausdruck für $\binom{n}{j_1\ j_2\ j_3}$ an ohne Verwendung von Binomialkoeffizienten.
**Hinweis:** Es ist $(a+b+c)^n = \big((a+b)+c\big)^n$.

b) Wie berechnen sich die Multinomialkoeffizienten im allgemeinen Fall eines $k$-stelligen Ausdrucks?

c) Wie lassen sich die Binomialkoeffizienten kombinatorisch interpretieren?

## Aufgabe 2.8: Das Auswahlverfahren (Diskussionsaufgabe)

Das Auswahlverfahren für die begehrten $m$ Plätze eines Master-Studiengangs einer Elite-Fakultät erläutert der Dekan auf Anfrage eines Journalisten folgendermaßen:

> Von den vielen externen Bewerbungen werden zunächst in einem Vorauswahlverfahren die $m$ besten bestimmt. In der Zwischenauswahl werden von diesen wiederum diejenigen ermittelt, die besonders geeignet erscheinen. Diese kommen dann zusammen mit den $n$ besten und qualifiziertesten Kandidaten der internen Bewerber in die Endauswahl, bei der insgesamt $m$ Zulassungen vergeben werden. Diejenigen externen Bewerber, welche über eine besondere Eignung verfügen aber nicht zum Zuge gekommen sind, erhalten noch als potentielle Nachrücker eine gewisse Chance.

Bei einer anderen Gelegenheit stellt der Prodekan das Auswahlverahren mit folgenden Worten vor:

> Zunächst vergeben wir unter den $n$ besten internen Bewerbern je nach besonderer Eignung eine nicht festgelegte Anzahl an Zulassungen. Die restlichen der insgesamt $m$ Zulassungen

verteilen wir dann unter den $m$ besten externen Bewerbern, wobei auch hier die tatsächliche Eignung ausschlaggebend ist. Diejenigen unter den $m$ besten externen Bewerbern, die trotz hoher Eignung nicht berücksichtigt werden können wegen der strikten Begrenzung auf $m$ Studienplätze, erhalten die Möglichkeit, gegebenenfalls als Nachrücker doch noch einen der begehrten Studienplätze zu ergattern.

Empfinden Sie die beiden Vorgehensweisen für das Auswahlverfahren als gleichwertig unter dem Aspekt der Fairness gegenüber den beiden Bewerbergruppen? Die Zahlen $m$ und $n$ sind fest vorgegeben und sollen nicht diskutiert werden. Es geht lediglich um den etwas unterschiedlichen Ablauf bei der Zulassungsvergabe. Wie könnte man die Vorgehensweisen aus einer rein mathematischen Perspektive beurteilen (wobei vorher zu klären ist, was darunter überhaupt verstanden werden soll). Geben zwei Berechnungsformeln[1] an für die Anzahl der theoretischen Konstellationsmöglichkeiten, welche aus den beiden Vorgehensweisen resultieren, wenn die Bewerber als unterscheidbar zu betrachten sind. Sollte Gleichheit gelten?

**Aufgabe 2.9: Kürzeste Wege in der Gitterebene**

Betrachten Sie eine diskrete Ebene, welche aus einem regelmäßigen quadratischen Gitter besteht (z.B. Liniengitter bei kariertem Papier). Wieviele kürzeste Wege existieren zwischen zwei Gitterpunkten, wenn die Bewegungsmöglichkeiten ausschließlich auf die waagerecht bzw. senkrecht verlaufenden Gitterlinien beschränkt sind? Ermitteln Sie die Anzahl der kürzesten Wege in Abhängigkeit von der relativen Lage der Punkte zueinander. Hier diese und weitere Aufgaben in präziserer Formulierung:

a) In der Gitterebene $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ seien die Punkte $O = (0,0)$ und $A = (r,s)$ mit $r,s \in \mathbb{N}$ gegeben. Es sei $w(r,s)$ die Anzahl der *monotonen* Wege von $O$ nach $A$, wobei nur die Schritte der Schrittweite $(1,0)$ oder $(0,1)$ ausgeführt werden dürfen. Geben Sie eine Rekursionsformel für $w(r,s)$ an.

   **Hinweis:** Zerlegen Sie die Menge $\mathfrak{W}(O,A)$ der Wege von $O$ nach $A$ im Hinblick auf den ersten Schritt.

b) Wie läßt sich $w(r,s)$ direkt berechnen? Verifizieren Sie Ihre explizite Darstellung für $w(r,s)$ auch durch Einsetzen in die Rekursionsformel.

c) Es sei $r = p + q$ mit $p,q \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{L}_p := \{(p,\ell) : \ \ell \in \mathbb{Z}\}$ eine vertikale Gitterline, die jeder Weg von $O$ nach $A$ queren muß. Ist es sinnvoll, die Verbindungswege (von $O$ nach $A$) nach dem jeweiligen Querungspunkt $Q \in \mathcal{L}_p$ zu klassifizieren? Gilt beispielsweise

$$\mathfrak{W}(0,A) = \biguplus_{k=0}^{s} \{\mathcal{W} \in \mathfrak{W}(0,A) : \ \mathcal{W} \cap \mathcal{L}_p = (p,k)\}$$

   oder

$$\mathfrak{W}(0,A) = \biguplus_{k=0}^{s} \{\mathcal{W} \in \mathfrak{W}(0,W) : \ (p,k) \in \mathcal{W}\} \quad ?$$

   Falls nein, überlegen Sie, wie sich $\mathfrak{W}(O,A)$ in paarweise disjunkte Mengen $(\mathfrak{U}_k)_{k=0,\dots,s}$ zerlegen läßt und gewinnen Sie aus dem Vergleich von $w(r,s) \equiv |\mathfrak{W}(O,A)|$ und der Summe $\sum_{k=0}^{s} |\mathfrak{U}_k|$, wobei zunächst die Summanden $|\mathfrak{U}_k|$ zu berechnen sind, die Identität

$$\binom{p+q+s}{s} = \sum_{k=0}^{s} \binom{p+k}{k} \binom{q+s-k-1}{s-k},$$

   die der Vandemonde-Identität ähnlich ist.

d) Neben den Schritten in positiver horizontaler oder positiver vertikaler Richtung sollen nun auch Schritte der Schrittweite $(1,1)$ in diagonaler Richtung zugelassen sein. Zeigen Sie, daß dann die Anzahl der *monotonen* Wege von $O$ nach $A$ durch

$$\tilde{w}(r,s) := \sum_{k=0}^{\min(r,s)} \binom{\min(r,s)}{k} \binom{\max(r,s)+k}{\min(r,s)}$$

[1] Es handelt sich um Summen über Produkte von Binomialkoeffizienten.

gegeben ist.

(Zusatz) Geben Sie für $\tilde{w}(r,s)$ ebenfalls eine Rekursionsgleichung an und überprüfen Sie, ob diese durch den obigen Ausdruck erfüllt wird.

**Bemerkung:** Statt eines Gitters kann man sich auch ein Informatik-affines Bildschirmraster (Pixelraster) vorstellen, in dem sich der Cursor nur von Rasterzelle zu Rasterzelle bewegen kann, wenn diese durch eine gemeinsame Seite (oder zusätzlich auch durch einen gemeinsamen Eckpunkt) benachbart sind.

## Impulsaufgabe zum Nachdenken für Interessierte

Die folgende Aufgabe lädt dazu ein, anhand recht simpler Rechnungen einmal über den mathematischen Tellerrand zu schauen. Vielleicht kommt es bei dem ein oder anderen sogar zu einer kritischen Betrachtung gewisser Vorstellungen, die maßgeblich das Weltbild vieler Menschen prägen.

**Aufgabe 2.10: Kombinatorische Explosion[2] vs. "Gesetz von Zeit & Zufall"**

Oft wird der Mathematik vorgeworfen, wenig Bezüge zu dem zu haben, was allgemein von Interesse und Bedeutung ist. Im Vergleich zu den (wissenschaftlichen) Fragen nach der Entstehung des Universums und des Lebens usw. sind mathematische Themen in der populärwissenschaftlichen medialen Darbietung vergleichsweise wenig präsent. Die folgende Aufgabe versucht mit äußerst bescheidenen Mitteln einen kleinen Brückenschlag herzustellen. Vielleicht fühlen Sie sich ja dadurch angeregt, einmal etwas kritisch zu hinterfragen, was oft als quasi selbstverständlich "verkauft" wird.

a) Ein gerader, zylindrischer Stab (völlig symmetrisch!) soll mit $n$ gleichbreiten Streifen von weißer oder schwarzer Farbe versehen werden, die jeweils durch eine feine Linie voneinander abzusetzen sind. Dabei darf auch Weiß auf Weiß oder Schwarz auf Schwarz folgen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Stab in dieser Weise zu dekorieren?

b) Ein linearer DNA-Strang bestehe aus einer Anordnung von zwei unterschiedlichen Nukleinbasenpaaren (Paartyp 1 ist aus Cytosin und Guanin zusammengesetzt, während Paartyp 2 aus den Nukleinbasen Adenin und Thymin aufgebaut ist). Die Basenpaare seien in einer gemeinsamen Ebene quer zur Längsausdehnung des DNA-Stranges ausgerichtet, so daß eine Art Doppelkette entsteht. Wieviele Anordnungsmöglichkeiten ergeben sich für $n$ Nukleinbasenpaare, wenn man frei zwischen den beiden Paartypen und ihrer jeweiligen Orientierung in der Ebene wählen darf?

c) Schätzen Sie die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten für 151 Basenpaare nach unten ab und geben Sie das Ergebnis als Zehnerpotenz mit Vorfaktor bzw. als dekadischen Logarithmus an.

d) Um sich die Größe dieser gigantischen Zahl besser vor Augen führen zu können, schätzen Sie die Masse ab, welche benötigt wird, um alle Anordnungsmöglichkeiten durch jeweils einen DNA-Strang zu realisieren. Setzen Sie für die Masse der Nukleinbasenmoleküle der Einfachheit halber 100u (atomic mass units) an[3], wobei 1u etwa $1,66 \cdot 10^{-27}$kg entspricht. Übrigens wird die Gesamtmasse des Universums gegenwärtig auf circa $10^{53}$kg veranschlagt (siehe Wikipedia).

e) Diskutieren Sie Ihr Ergebnis[4] ...

**Kleine Anmerkung:** Die DNA eines einfachen Bakteriums besteht aus ungefähr 4,6 Millionen Basenpaaren, während das menschlichen Erbgut aus mehr als 3 Milliarden angeordenten Basenpaaren aufgebaut ist.

[2] Als kombinatorische Explosion bezeichnet man die Beobachtung, daß bei vielen kombinatorischen Aufgaben bereits relativ wenige Ausgangsobjekte zu einer gigantischen Anzahl an Kombinationsmöglichkeiten (spezielle Anordnungen oder Auswahlmöglichkeiten) führen.

[3] unabhängig davon, um was für ein Nukleinbasenmolekül es sich handelt – die tatsächliche Masse liegt in allen vier Fällen noch deutlich höher.

[4] Versuchen Sie z.B. die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten in einer sinnvollen Weise zum allgemein akzeptierten Alter des Universums oder der Erde in Beziehung zu setzen.