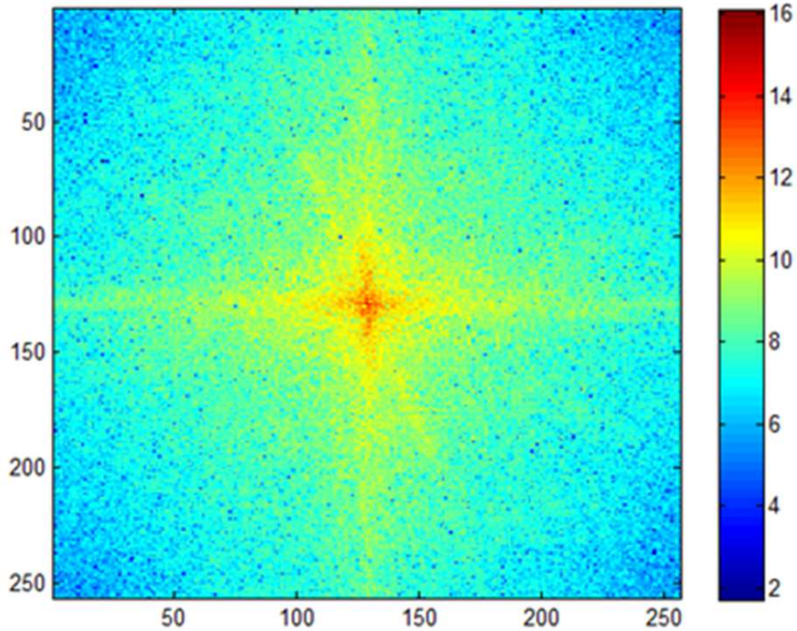
LDT, komprese signálu

doc. Ing. Josef Chaloupka, Ph.D.



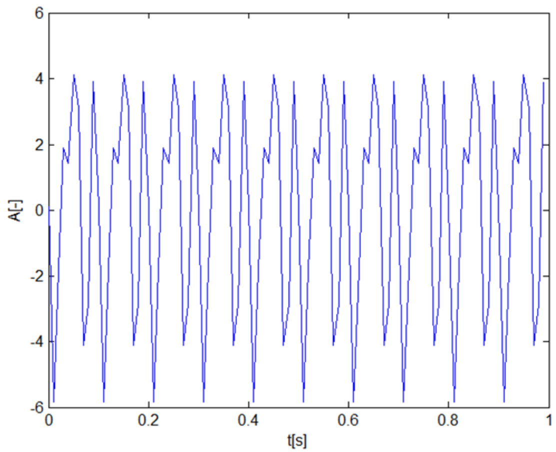
DISKRÉTNÍ LINEÁRNÍ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE

- **Fourierova transformace 1D (1)**
- Diskrétní Fourierova transformace 1D DFT, (inverzní) IDFT

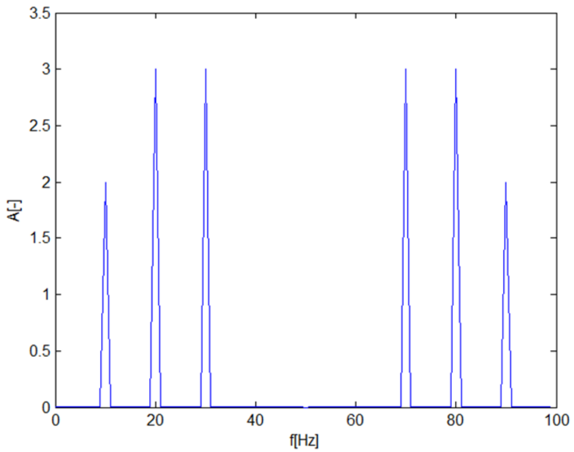
$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(\frac{-2\pi i n k}{N}\right) \qquad x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp\left(\frac{2\pi i n k}{N}\right)$$

- Fs = 100 Hz, t = 1s

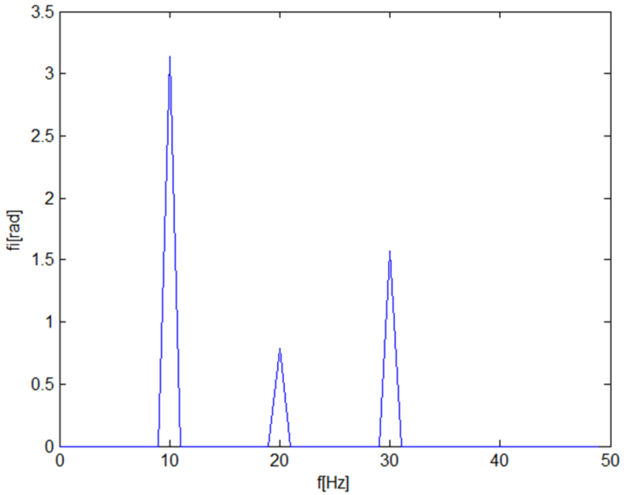
a = 2 * cos(2*π*10*t + π) + 3 * cos(2*π*20*t + π/4) + 3 * cos(2*π*30*t + π/2)



signál



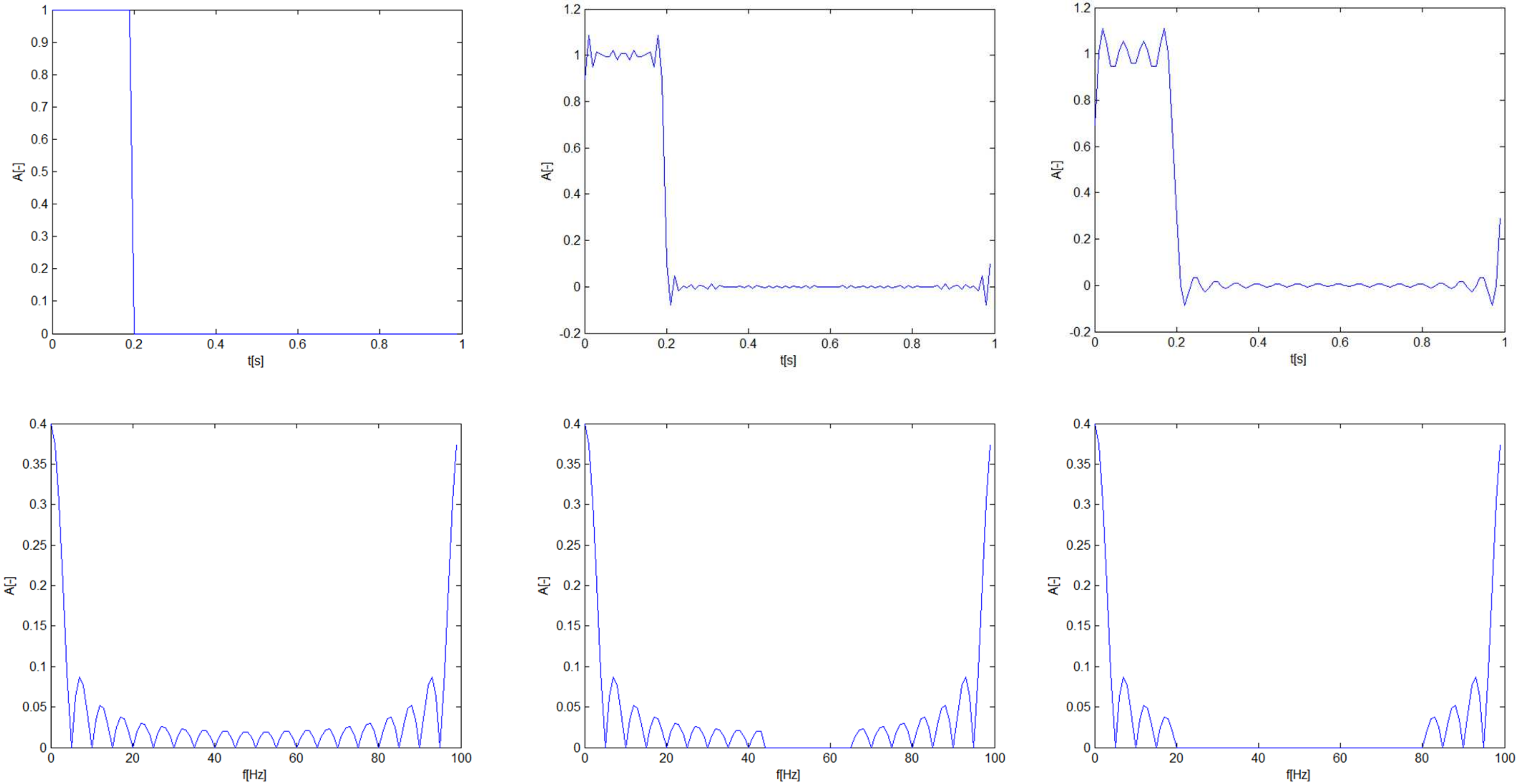
amplitudové spektrum



fázové spektrum

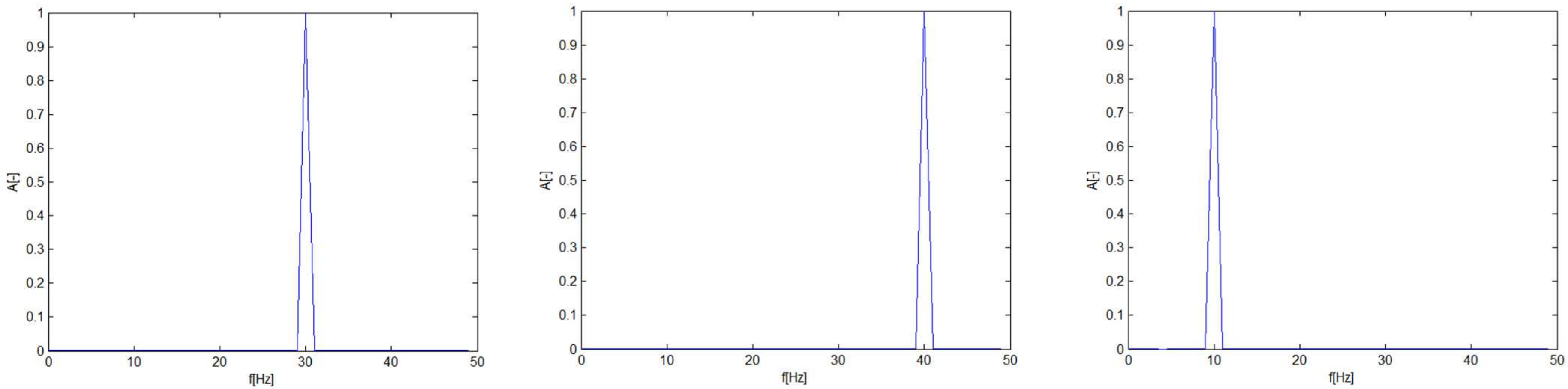
DISKRÉTNÍ LINEÁRNÍ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE

- **Fourierova transformace 1D (2)**
- rekonstrukce

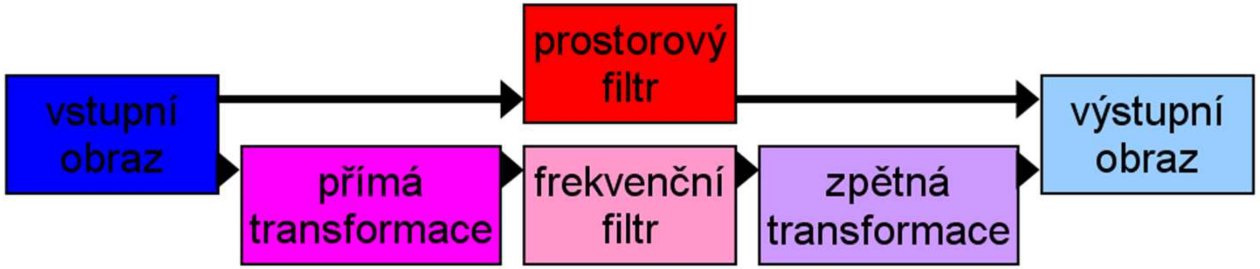


- **Fourierova transformace 1D (3)**
- Podvzorkování

- Fs = 100 Hz, t = 1s
  a = 2 * cos(2*π*f*t + π), f1 = 30Hz, f2 = 60Hz, f3 = 110Hz



DISKRÉTNÍ LINEÁRNÍ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE



- **Filtrace v prostorové oblasti** (1D v časové oblasti) >>> lineární kombinace vstupního obrazu s koeficienty filtru (často jako lokální filtry), využití konvoluce

- **Filtrace ve frekvenční oblasti** >>> převedení obrazu lineární integrální transformací do "frekvenční reprezentace" >>> filtrace >>> výsledek filtrace se inverzní lineární integrální transformací převede opět na obraz

- Obraz f, rozměry M x N

$$f = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0,N-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(M-1,0) & f(M-1,1) & \dots & f(M-1,N-1) \end{bmatrix}$$

DISKRÉTNÍ LINEÁRNÍ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE

- Výsledný obraz F, rozměry M x N, P a Q transformační matice rozměru M x M (N x N)

  $F = PfQ,\quad F(u,v) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} P(u,m) f(m,n) Q(n,v)$ u = 0, 1, …, M - 1; v = 0, 1, …, N – 1

- pokud P a Q jsou regulární (det ≠ 0) existuje P^{-1} a Q^{-1}, inverzní transformace:

  $f = P^{-1}FQ^{-1}$

- matice M, transponovaná matice M^T, komplexní matice C, C* každý prvek matice je nahrazen komplexně sdruženým prvkem (1 + 2i >>> 1 - 2i)

  1) $M = M^T$, M je symetrická matice
  2) $M^TM = E$ (jednotková matice), M je ortogonální matice
  3) $M^{-1} = M$, platí pro reálnou, symetrickou a ortogonální matici
  4) $C^{*T} = C$, C je hermitovská matice
  5) $C^{*T}C = E$, C je unitární matice
  6) $C^{-1} = C$, platí pro čtvercovou, komplexní, unitární a hermitovskou matici

- ortogonální transformace >>> P a Q jsou reálné, symetrické a ortogonální (komplexní, unitární a hermitovské) matice

  $F = PfQ \qquad f = PFQ$

DISKRÉTNÍ LINEÁRNÍ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE

- **Fourierova transformace**

$$\Phi_{JJ}(k,l) = \frac{1}{J}\exp\left(-i\frac{2\pi}{J}kl\right) \qquad k,\ l = 0,\ 1,\ \ldots,\ J-1$$

- Diskrétní Fourierova transformace 2D DFT, $P = \Phi_{MM}$, $Q = \Phi_{NN}$

$$F = \Phi_{MM} f\, \Phi_{NN}$$

$$F(u,v) = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\exp\left[-2\pi i\left(\frac{mu}{M}+\frac{nv}{N}\right)\right] \qquad u = 0,\ 1,\ \ldots,\ M-1;\ v = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

$$F(u,v) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\exp\left(\frac{-2\pi inv}{N}\right)\right]\exp\left(\frac{-2\pi imu}{M}\right)$$

- Inverzní diskrétní Fourierova transformace 2D IDFT

$$\Phi_{JJ}^{-1}(k,l) = \frac{1}{J}\exp\left(i\frac{2\pi}{J}kl\right)$$

$$f(m,n) = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\exp\left[2\pi i\left(\frac{mu}{M}+\frac{nv}{N}\right)\right]$$

DISKRÉTNÍ LINEÁRNÍ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE

- **Fourierova transformace**

- Periodická transformace F, periodický obraz f; a, b … celá čísla

$$F(u,-v) = F(u,N-v) \qquad f(-m,n) = f(M-m,n)$$

$$F(-u,v) = F(M-u,v) \qquad f(m,-n) = f(m,N-n)$$

$$F(aM+u,bN+v) = F(u,v) \qquad f(aM+m,bN+n) = f(m,n)$$

f(m, n) lineární kombinace periodických vzorků $2\pi i\left(\frac{mu}{M}+\frac{nv}{N}\right)$

F(u, v) váhová funkce

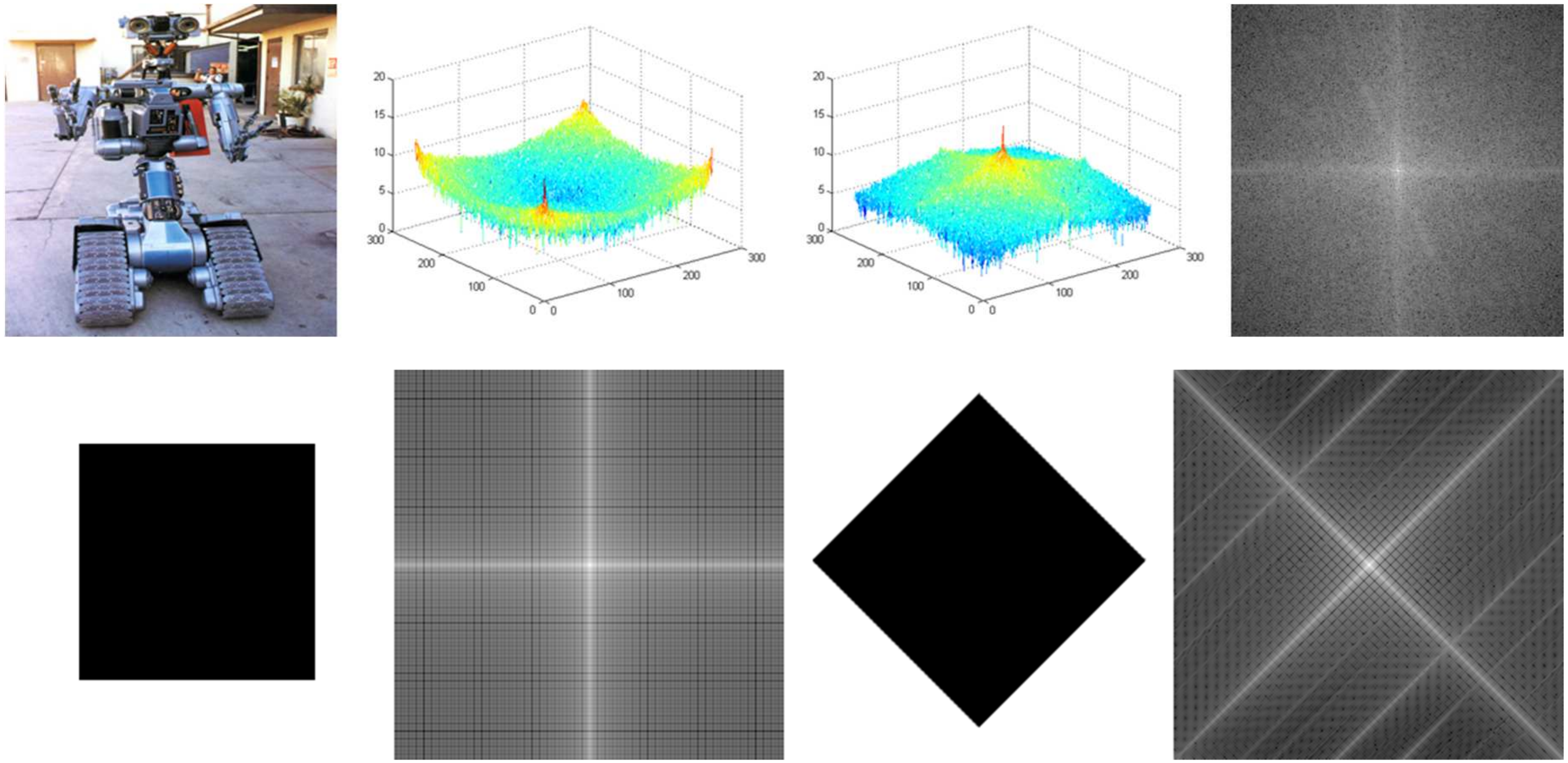
$$F(u,v) = \mathrm{Re}(u,v) + i\,\mathrm{Im}(u,v)$$

$$|F(u,v)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(u,v) + \mathrm{Im}^2(u,v)}$$ amplitudové frekvenční spektrum

$$\Phi(u,v) = \tan^{-1}\left[\frac{\mathrm{Im}(u,v)}{\mathrm{Re}(u,v)}\right]$$ fázové spektrum

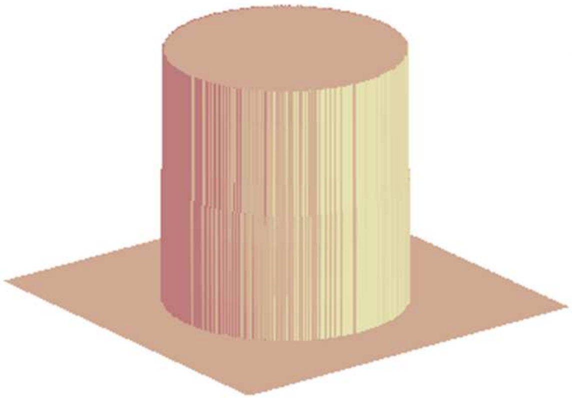
$$P(u,v) = |F(u,v)|^2 = \mathrm{Re}^2(u,v) + \mathrm{Im}^2(u,v)$$ výkonové spektrum (výkonová spektrální hustota)

DISKRÉTNÍ LINEÁRNÍ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE

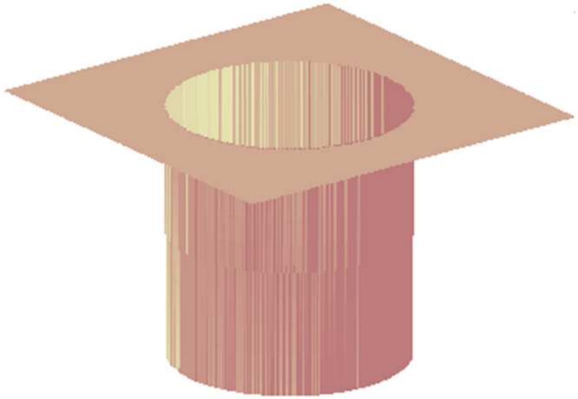


- Obraz >>> 1 perioda 2D periodické funkce, nespojitost na okraji obrazu (nenávaznost), nespojitosti – centrální kříž, druhý kříž natočen – převažující směr jasových úrovní v obrazu (gradient obrazové funkce), svislé směry kříže odpovídají vodorovným hranám a naopak
- Rozklad signálu na kombinaci bázových periodických ortogonálních harmonických signálů

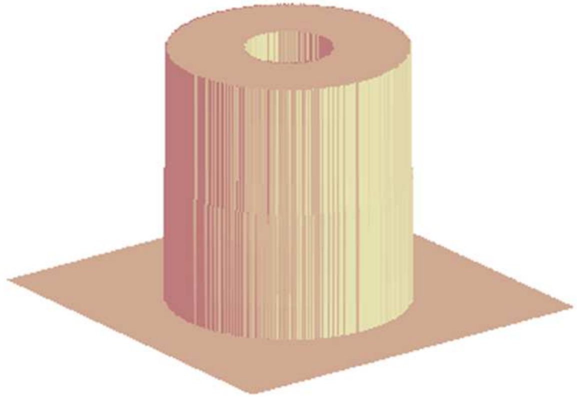
2D filtrace ve frekvenční oblasti



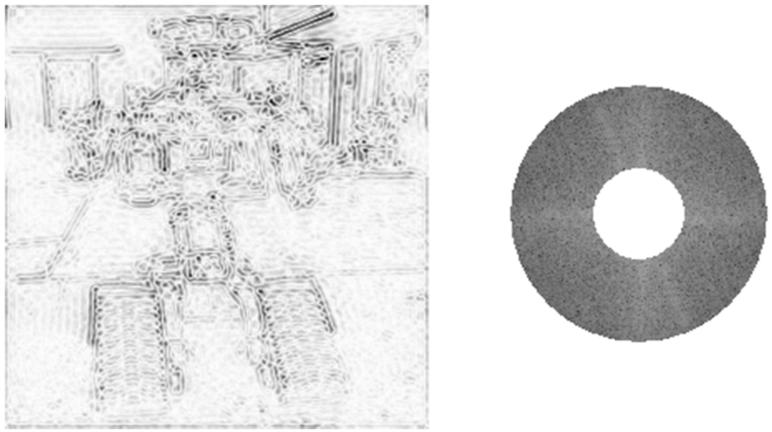
dolní propust



horní propust

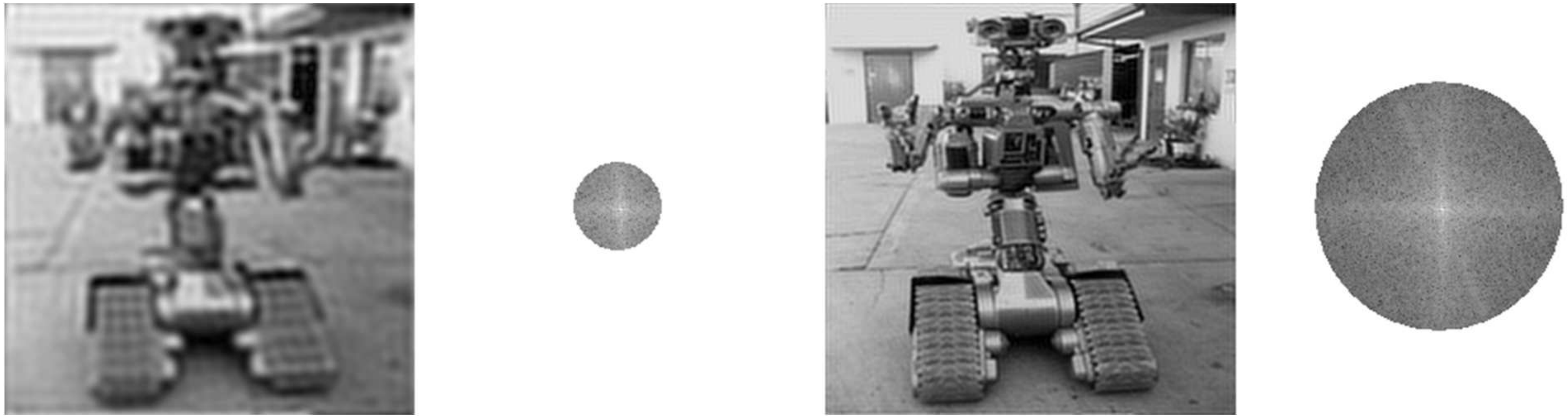


pásmová propust

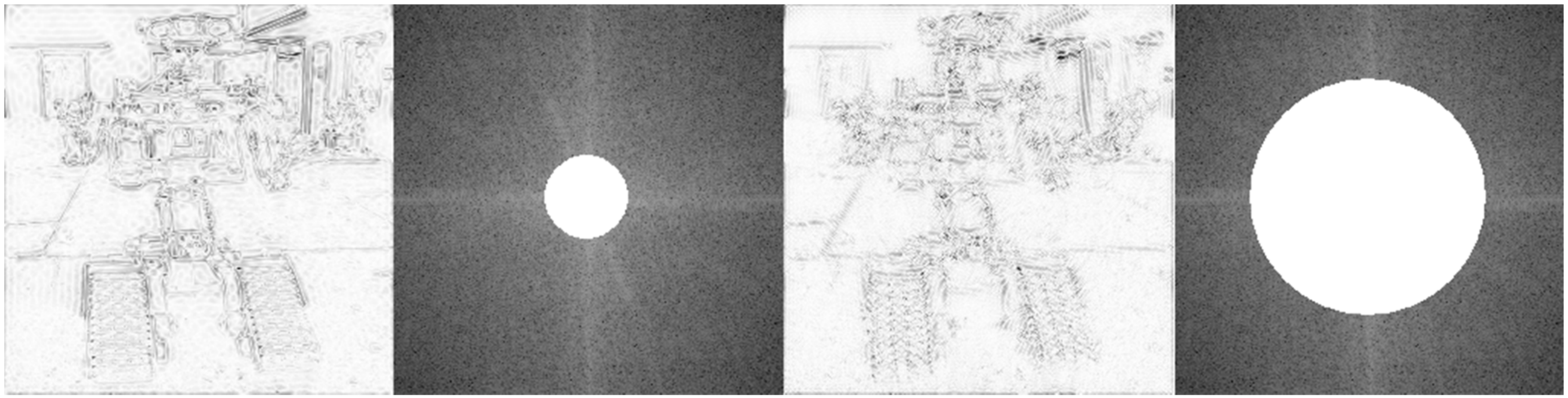


pásmová propust

2D filtrace ve frekvenční oblasti



dolní propust



horní propust

DISKRÉTNÍ LINEÁRNÍ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE

- **Konvoluce** >>> obrazu s lineárním filtrem >>> filtrace

$$x(m,n) * y(m,n) \Leftrightarrow X(u,v).Y(u,v)$$

$$g(a,b) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\, h(a-m, b-n)$$

$$G(u,v) = F(u,v)\, H(u,v)$$

$$g(a,b) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\, H(u,v) \exp\left[2\pi i \left(\frac{au}{M} + \frac{bv}{N}\right)\right]$$

- **Korelace**

$$x(m,n) ** y(m,n) \Leftrightarrow X(u,v).Y(u,v)^*$$

DISKRÉTNÍ LINEÁRNÍ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE

- **Diskrétní kosinová transformace 1D (1)**

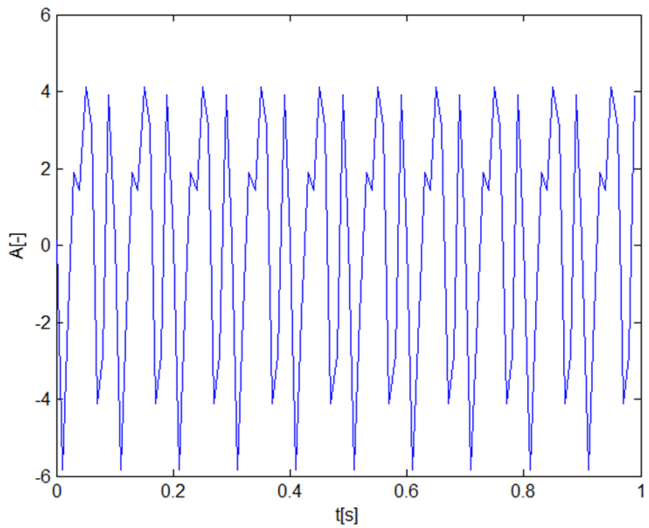
- *čtyři definice DCT-I, DCT-II, DCT-III, DCT-IV; DCT-II: bázové funkce >>> vzorkované kosinusovky*

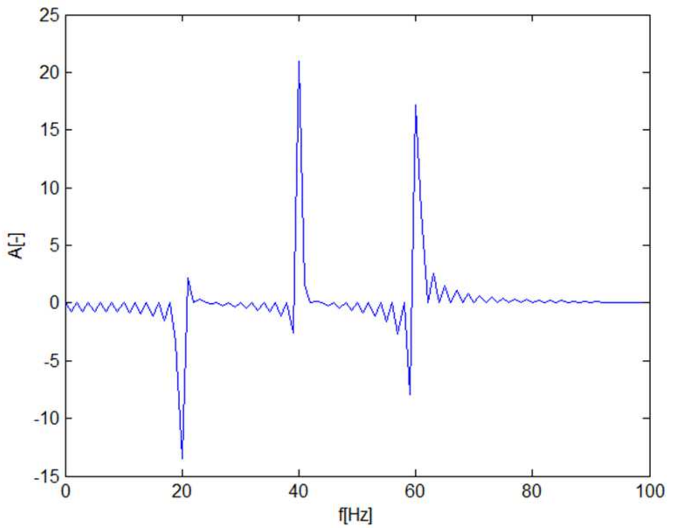
$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left[\frac{\pi}{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)k\right]$$

DCT-II

$$x_n = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \cos\left[\frac{\pi}{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)k\right]$$

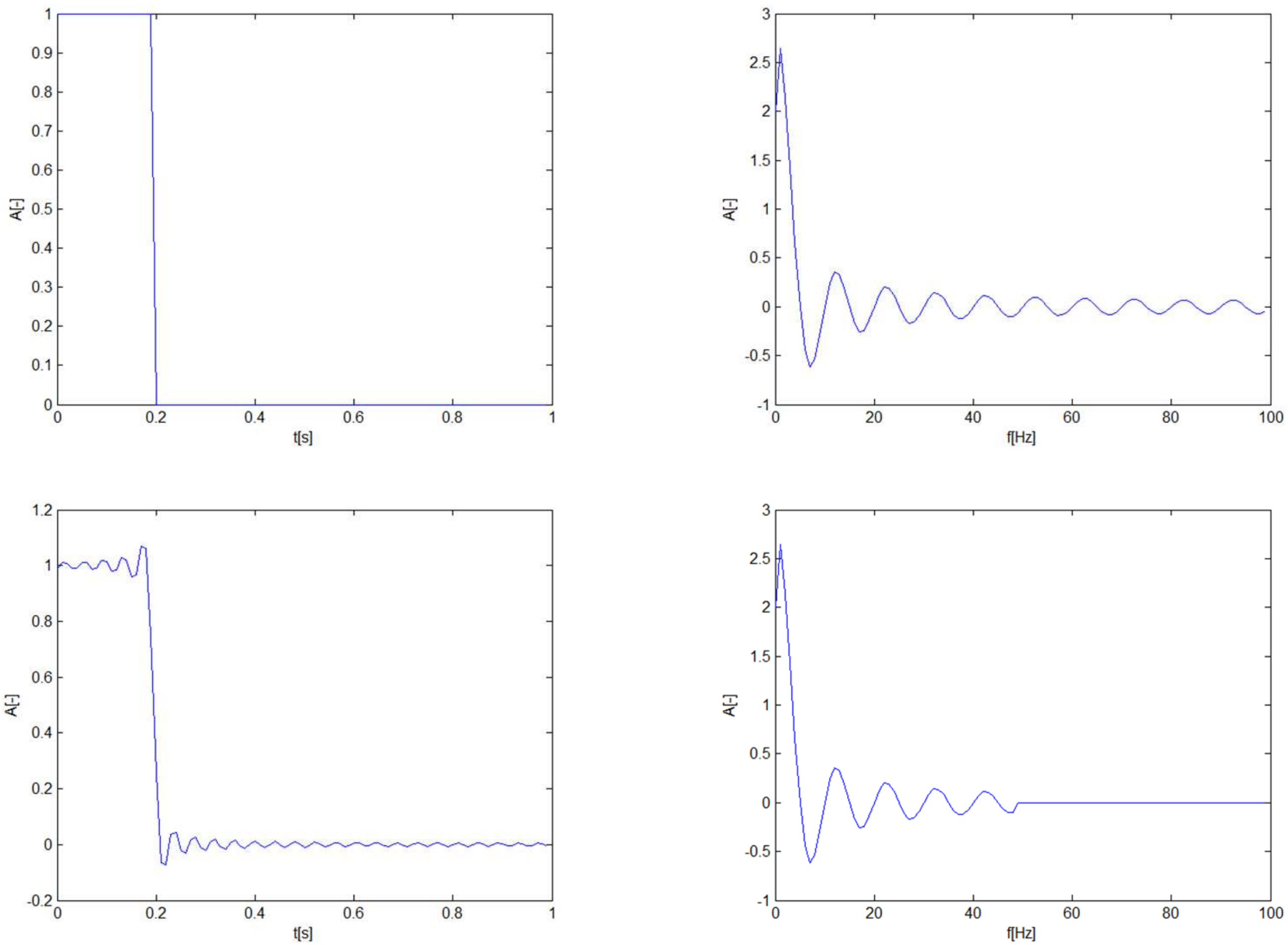
IDCT





DISKRÉTNÍ LINEÁRNÍ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE

- **Diskrétní kosinová transformace 1D (2)**
- *rekonstrukce*



- **Diskrétní kosinová transformace 2D (1)**

- *čtyři definice DCT-I, DCT-II, DCT-III, DCT-IV; DCT-II: bázové funkce >>> vzorkované kosinusovky, obraz rozměru NxN, pro JPEG kompresi, výpočet pomocí 2N - FFT*

$$C_{NN}(k,l) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & pro\ l = 0 \\ \sqrt{\dfrac{2}{N}} \cos\left(\dfrac{(2k+1)l\pi}{2N}\right) & proostatní\ k,l \end{cases}$$

$F = C_{MM} f C_{NN}^T$ $\quad$ $f = C_{NN}^T F C_{NN}$ $\quad$ *u = 0, 1, ..., N-1, v = 0, 1, ..., N-1*

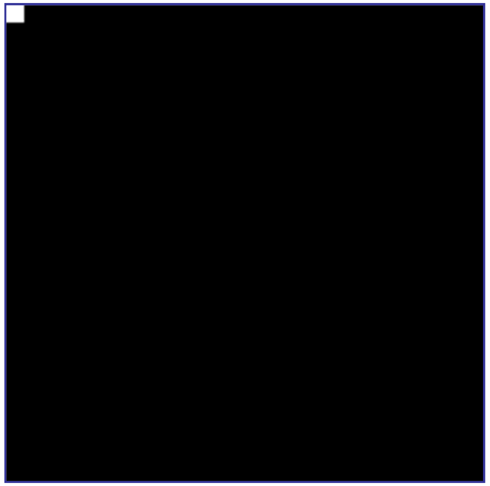
$$F(u,v) = \frac{2c(u)c(v)}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) \cos\left(\frac{2m+1}{2N} u\pi\right) \cos\left(\frac{2n+1}{2N} v\pi\right)$$

$$c(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & pro\ k = 0 \\ 1 & jinde \end{cases}$$

DISKRÉTNÍ LINEÁRNÍ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE

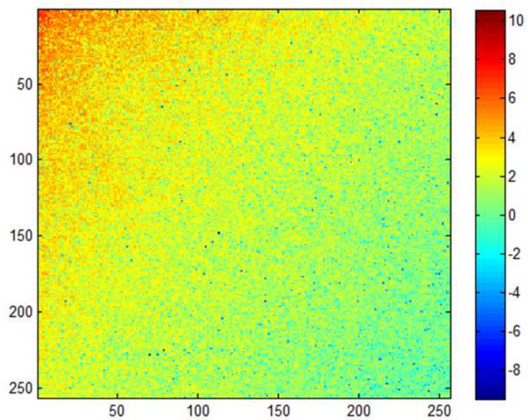
- **Diskrétní kosinová transformace 2D (2)**

obrázek



maska 10x10

maska 50x50



2D DCT

rekonstrukce

DISKRÉTNÍ LINEÁRNÍ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE

- **Hadamardova transformace**
- Rozklad signálu na kombinaci bázových periodických ortogonálních harmonických signálů
- Reálné bázové (Walshovy) funkce >>> pravoúhlé průběhy, hodnoty ± 1, rekurzivní postup při vytváření, uspořádání podle počtu průchodu nulovou úrovní (sinusovky dle frekvence)

$H_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ řád 2^k $H_{2J2J} = \begin{bmatrix} H_{JJ} & H_{JJ} \\ H_{JJ} & -H_{JJ} \end{bmatrix}$ $H_{JJ}^{-1} = \frac{1}{J} H_{JJ}$

- Hadamardova transformace:

$$F = H_{MM} f H_{NN}$$

$$f = \frac{1}{MN} H_{MM} F H_{NN}$$

- Použití obdobné jako u FT, jiná interpretace výsledků, snadné hardwarové řešení

DISKRÉTNÍ LINEÁRNÍ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE

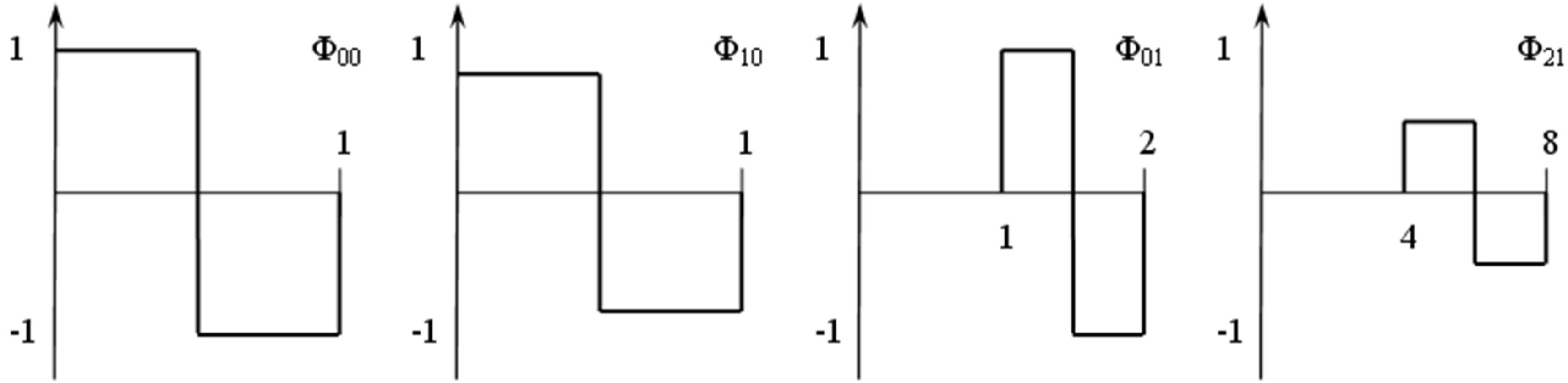
- **Vlnková transformace**
- Rozložení signálů na jednodušší kombinace pomocí bázových funkcí >>> vlnky (wavelets)
- Fourierovské spektrum >>> z hlediska frekvence, umístění v prostoru x, y?
- U 1D signálů nemožnost určení frekvence v čase >>> použití okénka
- Vlnky lze lokalizovat jak ve frekvenci, tak v čase (prostoru), lepší analýza v různých měřítkách
- Popis špiček a nespojitostí je u vlnek úspornější než u FS
- Mateční funkce:

  $$\Phi_{(s,l)}(x) = 2^{-(s/2)}\Phi\left(2^{-s}x - l\right)$$

  s ... šířka vlny (mocnina 2), l ... celočíselný index určuje pozici v prostorové oblasti
- Ortogonalita (nemusí být zajištěna): $\int \Phi_{(s1,l1)}(x)\Phi_{(s2,l2)}(x) = 0$ s1 ≠ s2 nebo l1 ≠ l2

DISKRÉTNÍ LINEÁRNÍ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE

- **Vlnková transformace**



- Další mateční funkce >>> Mayerovy, Ingrid Daubechiesové (wavelets)
- Použití >>> komprese dat, potlačování šumu (malé detaily nejsou rozmazány), popis obrysu objektů

DISKRÉTNÍ LINEÁRNÍ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE

- **Další transformace**

- Paleyova, Walshova transformace podobné jako Hadamardova transformace, hodnoty ± 1

- Haarova transformace >>> nesymetrické matice s prvky ± 1 násobené $\sqrt{2}$ a 0

- Hadamardova - Haarova transformace >>> kombinace

- Slant (šikmý) - Haarova transformace >>> bázové funkce >>> pilovité průběhy

- Rekonstrukce 2D signálu z 1D projekcí (tomografie, astronomie, holografie) >>> Radonovy t.

- Houghova transformace >>> segmentace obrazu >>> hledání parametricky popsaných objektů, zvláštní případ Radonovy transformace

- Karhunen – Loeveova transformace >>> použití vlastních vektorů jako bázových vektorů pro ortogonální rozklad kovarianční matice příslušného lineárního prostoru, A. Ř. >>> převod matice do Jordanova kanonického tvaru (metoda hlavních směrů), rozpoznávání >>> měření informativnosti příznaků

LZW

- **Lempel-Ziv-Welchův algoritmus (1978)**
- Kompresní/dekompresní metoda, využití – přenos dat, GIF, TIFF, postscript
- (+) rychlá metoda, (-) horší kompresní poměr (cca o 30% horší než nejlepší met.)
- Slovník – ukládají se opakující se znaky
- Pokud se vyskytne několik stejných posloupností znaků – nahrazení stejným číslem
- Slovník se neukládá, ale je znovu vytvořen ze zakódovaného souboru

LZW

- **Lempel-Ziv-Welchův algoritmus (1978) - komprese**

- Př. řetězec abcabcabcbcba (13 znaků), vstupní abeceda (použité znaky): a b c

přiřazení čísel a = 1, b = 2, c = 3

1. Nalezení nejdelší fráze ze slovníku shodné se vstupem, index na výstup, odebrání
2. Nová fráze = nalezená fráze + jeden další znak

Krok	text vstupu	nalezená fráze	výstup	nová fráze	Index nov. fráze
1	abcabcabcbcba	a	1	ab	4
2	bcabcabcbcba	b	2	bc	5
3	cabcabcbcba	c	3	ca	6
4	abcabcbcba	ab	4	abc	7
5	cabcbcba	ca	6	cab	8
6	bcbcba	bc	5	bcb	9
7	bcba	bcb	9		
8	a	a	1		

Výstup: řetězec 12346591 (8 čísel), kompresní poměr 61,5%

LZW

- **Lempel-Ziv-Welchův algoritmus (1978) - dekomprese**

- Př. řetězec 12346591, přiřazení čísel a = 1, b = 2, c = 3

1. K číslu přiřazená fráze
2. Nová fráze = fráze z předchozího kroku + první znak fráze výstupu

Pokud číslo na vstupu je větší než současné číslo ve vytvářeném slovníku: výstup = nová fráze = minulá fráze + její první znak

Krok	vstup	výstup	nová fráze	Index nov. fráze
1	1	a		
2	2	b	ab	4
3	3	c	bc	5
4	4	ab	ca	6
5	6	ca	abc	7
6	5	bc	cab	8
7	9	bcb	bcb	9
8	1	a		

Výstup: řetězec abcabcabcbcba