Vzdálenost bodu od kvadriky

Lukáš Forst, forstluk

15. prosince 2018

Úloha 1: Navrhněte řešení úlohy

Minimalizujeme funkci $f(x) = \|x - a\|$ na množině $x^T Q x = 1$. Sestrojíme Lagrangovu funkci.

$$L(x) = (x - a)^T (x - a) + \lambda(x^T Q x - 1)$$

Tedy odpovídající parciální derivace jsou následující:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x - a)^T + 2\lambda x^T Q$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^T Q x - 1$$

Kdybychom postavily předchozí rovnice rovno 0 a vyřešili je, tak dostaneme výsledné x. Bohužel jsou tyto rovnice poměrné složité vyřešit, takže provedeme spektrální rozklad a následně změnu souřadnic rovnice.
Spektrální rozklad aplikujeme na kvadriku.

$$x^T Q x - 1 = x^T V \Lambda V^T x - 1$$

Následně změníme souřadnice systému.

$$y = V^T x$$
$$b = V^T a$$

A tím dostaneme novou Lagrangovu funkci.

$$L(x) = (y - b)^T (y - b) + \lambda(y^T Q y - 1)$$

A její parciální derivace.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(y - b)^T + 2\lambda y^T Q$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = y^T \Lambda y - 1$$

Derivaci $\frac{\partial L}{\partial x}$ postavíme rovno 0 a upravíme.

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} = 2(y-b)^T + 2\lambda y^T Q = 0 \\ y^T(\lambda\Lambda + I) = b^T \\ y = (\lambda\Lambda + I)^{-1} \cdot b^T\end{aligned}$$

Výslednou rovnici rozepíšeme po složkách.

$$\begin{aligned}y &= (\lambda\Lambda + I)^{-1} \cdot b^T \\ y_i &= \frac{b_i}{\lambda\Lambda_{i,i} + 1}\end{aligned}$$

Derivaci $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$ můžeme rozepsat po složkách, protože Λ je diagonální.

$$\begin{aligned}y^T\Lambda y - 1 = 0 \\ (\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,i} \cdot y_i^2) - 1 = 0\end{aligned}$$

Nyní dosadíme y z předchozí rovnice.

$$(\sum_{i=1}^{\boldsymbol{n}} \frac{\Lambda_{i,i} b_i^2}{(\lambda \cdot \Lambda_{i,i} + 1)^2}) - 1 = 0$$

K řešení této rovnice můžeme přistoupit různě. Musíme brát zřetel na to, že pravděpodobně nebude mít přesné řešení a tedy je budeme aproximovat. Já jsem zvolil iterační metodu, konkrétněji Newtonovu, protože budeme hledat číslo a ne matici/vektor a tedy použití Gauss-Newtonovi metody nepřinese zlepšení. Jedna iterace zvolené metody pak vypadá takto.

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - (g'(\lambda_k))^{-1} g(\lambda_k)$$

Kde

$$\begin{aligned}g(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\Lambda_{i,i} b_i^2}{(\lambda \cdot \Lambda_{i,i} + 1)^2} - 1 \\ g'(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{-2 \cdot \Lambda_{i,i}^2 b_i^2}{(\lambda \cdot \Lambda_{i,i} + 1)^3}\end{aligned}$$

Po skončení všech iterací (já jsem zvolil konstantu 100) Newtonovy metody získáme bod y a následně námi hledaný bod $x = Vy$.
Rozhodl jsem se nevolit pouze jeden počáteční bod, ale několik, abych zajistil, že algoritmus najde nejlepší řešení. Zvolil jsem množinu $\{-1, 0, 1\}$ a to převážně kvůli tomu, abych se blížil k řešení jak zprava, tak zleva.
Po skončení všech cyklů Newtona jsem zvolil nejlepší λ tak, abych minimalizoval vzdálenost $\|x - a\|$.

Úloha 2: Popište jak jste funkci testovali

Funkce byla testována na všech datech z poskytnutého setu Qs, as a xs. Pro všechny iterace se sečetla celková vzdálenost $\|x_i - a_i\|$. Zároveň po každé probíhalo ověření, jestli nalezený bod x splňuje počáteční podmínku $x^T Q x = 1$. Tímto způsobem jsem benchmarkoval spolehlivost algoritmu.