Lineární programování

Lukáš Forst

29. prosince 2018

1 Definice úlohy LP

Ze zadání máme

$$min \sum_{t=0}^{N-1} f(u(t))$$

$$f(a) = \begin{cases} |a| & |a| \leq 1 \\ 2|a| - 1 & |a| > 1 \end{cases}$$

$min \sum_{t=0}^{N-1} f(u(t))$ převedeme do LP tvar s využitím podmínek pro $f(a)$.
Následující výraz bude mít tedy stejnou minimální hodnotu jako původní ze zadání

$$\begin{aligned} \min \;\; & 1^T z, \;\; z \in \mathbb{R}^N \\ \text{za podmínek} \;\; & z_t \geq u_t \\ & z_t \geq -u_t \\ & z_t \geq 2u_t - 1 \\ & z_t \geq -2u_t - 1 \end{aligned}$$

Tento výraz můžeme pomocí slackových proměnných a rozložením u_t na rozdíl dvou kladných čísel převést na následující rovnosti

$$\begin{aligned} \min \;\; & 1^T z, \;\; z \in \mathbb{R}^N \\ \text{za podmínek} \;\; z_t - u_t^+ + u_t^- - s_{t1} &= 0 \\ z_t + u_t^+ - u_t^- - s_{t2} &= 0 \\ z_t - 2u_t^+ + 2u_t^- - s_{t3} &= -1 \\ z_t + 2u_t^+ - 2u_t^- - s_{t4} &= -1 \end{aligned}$$

Nyní převedeme do LP tvaru i výraz

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t), \;\; t = 0, \ldots, N-1$$

Výraz si nejprve rozepíšeme po prvcích

$$\begin{bmatrix} x_{t+1,1} \\ \vdots \\ x_{t+1,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t,1} \\ \vdots \\ x_{t,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t), \ \ t = 0, \dots, N-1$$

Rovnici pro libovolný prvek můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} x_{t+1,i} &= a_{i,1}x_{t,1} + \ldots + a_{i,n}x_{t,n} + b_i u_t \\ \text{kde } \ t &= 0 \ldots N-1 \\ i &= 0 \ldots n \end{aligned}$$

Kde pro $t = 0$ je x_0 vektor konstant. Pokud $t = N-1$ pak je x_{t+1} také vektor konstant. Opět rozložíme všechny proměnné na rozdíl nezáporných čísel

$$\begin{aligned} x^+_{1,i} - x^-_{1,i} - b_i u^+_0 + b_i u^-_0 &= a_{i,1}x_{0,1} + \cdots + a_{i,n}x_{0,n} \\ x^+_{t+1,i} - x^-_{t+1,i} - b_{t,i}u^+_t + b_{t,i}u^-_t - Ax_t &= 0 \qquad \text{kde} \quad t = 1 \ldots N-2 \\ -Ax_{N-1} - b_{N-1,i}u^+_t + b_{N-1,i}u^-_{N-1} &= -x_{N,i} \end{aligned}$$

Kde

$$Ax_t = a_{i,1}x^+_{t,1} - a_{i,1}x^-_{t,1} + \cdots + a_{i,n}x^+_{t,n} - a_{i,n}x^-_{t,n}$$

Nyní výše zmíněné rovnice můžeme vzít a vložit do jednoho zápisu pro LP program $min\{c^T x | Ax = b, x \geq 0\}$.
Parametry z originálního zadání jsou následující

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.95 \end{bmatrix}, \ \ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \ \ x(0) = (0,0), \ \ x_{des} = (10,0), \ \ \text{ze zadání } \boldsymbol{a)} \ \ N = 2$$

Tedy naše matice budou vypadad následovně (některé vektory jsem transponoval pro lepší čitelnost)
Výraz, který minimalizujeme $c^T x$

$$\begin{aligned} c^T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ x^T &= \begin{bmatrix} z_1 \, z_2 \, s_{1,1} \, s_{1,2} \, s_{1,3} \, s_{1,4} \, s_{2,1} \, s_{2,2} \, s_{2,3} \, s_{2,4} \, u^+_1 \, u^-_1 \, u^+_2 \, u^-_2 \, x^+_{1,1} \, x^-_{1,1} \, x^+_{1,2} \, x^-_{1,2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kde pro indexy c^T platí

$$\begin{aligned} c_1, c_2 &= z \\ c_3 \ldots c_{10} &= s \\ c_{11} \ldots c_{14} &= u \\ c_{15} \ldots c_{18} &= x \end{aligned}$$

A podmínka $Ax = b$

$$
\begin{aligned}
b^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} \\
x^T &= \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} & s_{1,4} & s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} & s_{2,4} & u_1^+ & u_1^- & u_2^+ & u_2^- & x_{1,1}^+ & x_{1,1}^- & x_{1,2}^+ & x_{1,2}^- \end{bmatrix} \\
A &= \begin{bmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0.1 & 0 & 0 & -0.95 & 0.95
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Kde pro indexy b^T platí

$$
\begin{aligned}
b_1 \dots b_8 &= \text{pravá strana } \mathbf{z} \text{ rovnic} \\
b_8 \dots b_{12} &= \text{pravá strana } \mathbf{u} \text{ rovnic}
\end{aligned}
$$

2 Grafy obsahující závislosti a optimální hodnota F

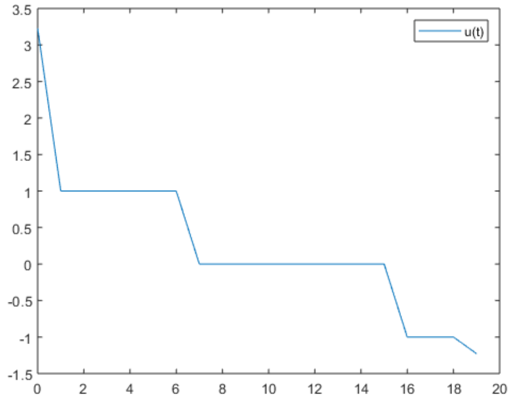
Pro hodnoty

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.95 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \ x(0) = (0, 0), \ x_{des} = (10, 0), \ N = 20$$

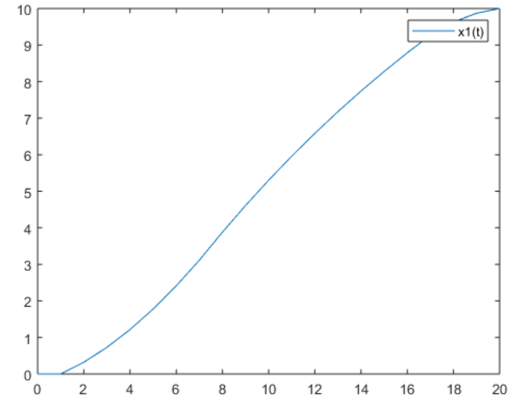
nalezla moje implementace řešení

$$F = 15.9119$$

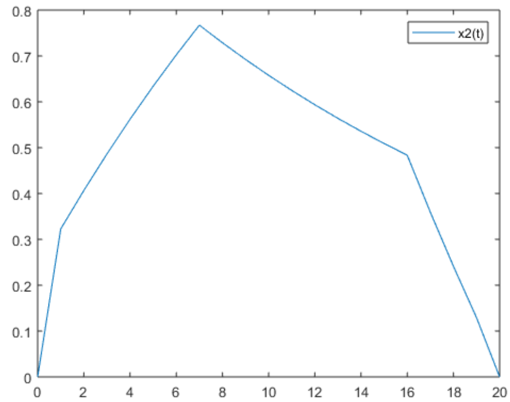
Grafy zobrazující závislosti $u(t), x_1(t), x_2(t)$ na t pak vypadají takto



(a) Závislost $u(t)$ na t



(b) Závislost $x_1(t)$ na t



(c) Závislost $x_2(t)$ na t

Obrázek 1: Grafy závislostí $u(t), x_1(t), x_2(t)$ na t