Blankenbach (et al., 1989) Benchmark

Dieser Test (*Benchmark*) eignet sich gut zur Überprüfung, ob sich ein numerischer Code zur Modellierung von Mantelkonvektion eignet. Blankenbach et al. (1989) testeten unterschiedliche Mantelkonvektionsmodelle mit eine großen Vielfalt von numerischen Methoden und erstellten so eine Liste von Werte für den stationären Zustand (z.B., Nusselt Zahl oder mittlere Geschwindigkeit). Mit zunehmender Auflösung unserer numerischen Modelle, sollten sich also die Werte den Werten des *Benchmarks* annähern.

Nebenstehende Tabelle listet die physikalischen Parameter für drei Modelle mit unterschiedlicher, konstanter Viskosität (die wichtigsten Werte für unseren Test finden sich auch in der Datei *Gerya2019.txt* im Ordner *data*). Die Konvektion wird modelliert in einer rechteckigen, 2-D Box mit einer Höhe von H und einer Länge von L ($H = L = 1000$ km). Die kinematischen Randbedingungen sind free-slip an aller Rändern und die thermischen Randbedingungen sind konstante Temperaturen an der Oberseite (T_{top}) und Unterseite (T_{bottom}) und einem konstantem Wärmefluss an den lateralen Rändern ($\partial T/\partial x = 0$). Der Temperaturunterschied zwischen T_{top} und T_{bottom} ist 1000 K für alle Modelle. Die Dichte in allen Modellen ist linear von der Temperatur abhängig und gegeben durch:

Test	1a	1b	1c
Gravitational acceleration, g (m/s^2)	10	10	10
Model height, H (km)	1000	1000	1000
Model width, L (km)	1000	1000	1000
Temperature at the top, T_{top} (K)	273	273	273
Temperature in the bottom, T_{bottom} (K)	1273	1273	1273
Thermal conductivity, k (W/(m K)	5	5	5
Heat capacity, C_P (J/kg)	1250	1250	1250
Standard density, ρ_0 (kg/m^3)	4000	4000	4000
Thermal expansion, α (1/K)	2.5×10^{-5}	2.5×10^{-5}	2.5×10^{-5}
Flow law parameters: η_0 (Pa s)	10^{23}	10^{22}	10^{21}
b	0	0	0
c	0	0	0
Nusselt number, $Nu = \frac{H}{T_{bottom} L}\int_{x=0}^{L}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{top} dx$	4.8844	10.534	21.972
Non-dimensional root mean square (rms) velocity, $v_{rms} = \frac{H\rho_0 C_P}{k}\sqrt{\frac{1}{HL}\int_{x=0}^{L}\int_{y=0}^{H}\left(v_x^2+v_y^2\right)dydx}$	42.865	193.21	833.99
Non-dimensional temperature gradients in the model corners, $q_{corner} = \frac{H}{T_{bottom}-T_{top}}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{corner}$			
q_1 (top-left corner, above upwelling)	8.0593	19.079	45.964
q_2 (top-right corner, above downwelling)	0.5888	0.7228	0.8772
q_3 (bottom-right corner, below downwelling)	8.0593	19.079	45.964
q_4 (bottom-left corner, below upwelling)	0.5888	0.7228	0.8772
Local minimum along the central vertical temperature profile: $T_c = \frac{T-T_{top}}{T_{bottom}-T_{top}}$	0.4222	0.4284	0.4322
$Z_c = \frac{H-y}{H}$	0.2249	0.1118	0.0577
Local maximum along the central vertical temperature profile: $T_c = \frac{T-T_{top}}{T_{bottom}-T_{top}}$	0.5778	0.5716	0.5678
$Z_c = \frac{H-y}{H}$	0.7751	0.8882	0.9423

Figure 1. *Physikalische Modell Gröpen und Stationäre Werte des Blankenbachben et al. (1989) Benchmarks (Gerya, 2019)*

$$\rho = \rho_0\left[1-\alpha\left(T-T_{top}\right)\right],$$

wobei ρ_0 = 4000 kg/m^3 die Refernzdichte und α = $2.5\cdot10^{-5}$ 1/K der thermische Ausdehnungkoeffizient ist.

Trotz dieser einfachen Modellkonfiguration ist es nicht immer einfach einen stationären Wert zu erhalten. Dies wird hauptsächtlich bedingt durch a) die vielen benötigten Zeitschritte bis man eine stationäre Lösung erreicht und b) einer starken Lokalisierung der Tempertur in den Auf- und Abströmungen entlang der Ränder. Dies wird vor allem dann problematische, wenn die Viskosität des Fluids sehr gering ist, oder genauer gesagt, für Konvektionen mit einer sehr hohen *Rayleigh* Zahl

$$Ra = \frac{\rho_0 \alpha \Delta T g H^3}{\eta \kappa} .$$

Abhängig von der *Rayleigh* Zahl können wir abschätzen wie hoch die Auflösung in der thermischen Grenzschicht (d) an der Oberseite (und damit unsere gesammte Auflösung, da wir ein reguläres Gitter benutzen) sein muss:

$$\left(\frac{H}{d}\right)^3 = \frac{1}{4} Ra .$$

Unter der Annahme, dass wir n Gitterpunkte in der thermischen Grenzschicht verwenden wollen, können wir die Gesamtgitteranzahl bestimmen durch:

$$nz = (n-1)\sqrt[3]{\frac{Ra}{4}} + 1 .$$

Nun wollen wir unseren erstellten numerischen Code (*FDCSGm – Finite Difference Code Staggered Grid matlab*) mit Hilfe der Lösungen des *Benchmarks* testen. Dazu sind folgenden Schritte notwending:

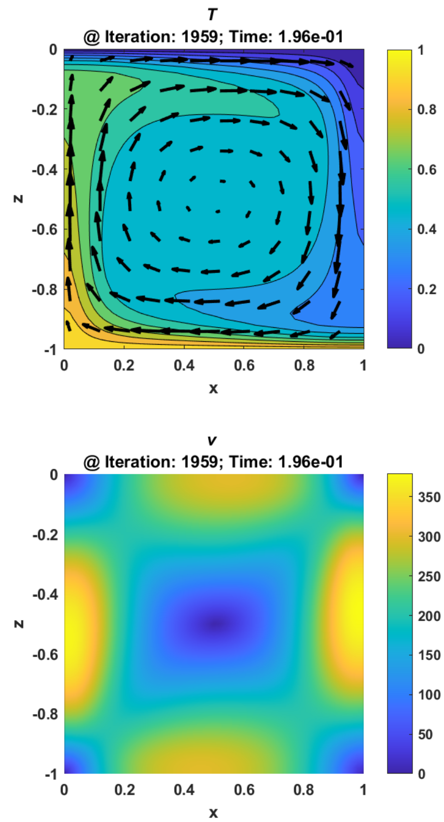

Figure 2. *Temperatur und absolute Geschwindigkeit im stationären Zustand für ein Modell mit einer Rayleigh Zahl von 10^5 (FDCSGm).*

1) **Vervollständige** das Hauptprogramm (*BlankenbachBenchmark_null.m* im Ordner *ThermalConvection_Scaled*).
2) Modelliere ***drei*** Konvektionen mit einer Referenzviskosität η_0 von 10^{23}, 10^{22}, 10^{21} Pa·s und überprüfe die Modellwerte (Nusselt Zahl, Mittlere Geschwindigkeit (V_{RMS}), und Wärmefluss an den Ecken des Modells) mit den stationären Werten des *Benchmarks*.
3) Führe für ***eins*** der Modelle (d.h. für eine Referenzviskosität) einen Auflösungstest durch (Achtung, je größer die *Rayleigh* Zahl, desto höher die Auflösung! Das kann mitunter zu Problemen für den Rechner werden!!!). **Stelle** dafür den stationären Wert der Nusselt Zahl und der mittleren Geschwindigkeit des numerischen Modells **graphisch** gegenüber der reziproken Auflösung (1/nx/nz) **dar** (idealer Weise mit logarithmischen Achsen). Die Werte sollten sich mit zunehmender Auflösung den Werten des *Benchmarks* annähern.
4) **Fasse** die Ergebnisse in einem Bericht zusammen und **diskutiere** diese.

Referenzen

Blankenbach, B., Busse, F., Christensen, U., Cserepes, L., Gunkel, D., Hansen, U., ... & Schnaubelt, T. (1989). A benchmark comparison for mantle convection codes. *Geophysical Journal International*, *98*(1), 23-38.

Gerya, T. (2019). *Introduction to numerical geodynamic modelling*. Cambridge University Press.