Hochschule Karlsruhe – Technik und Wirtschaft

Björn Hein
Christian Wurll

Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Bjoern.Hein@hs-karlsruhe.de

2. Koordinatentransformationen

Version: 0.1

Vortragende: Prof. Dr.-Ing. Björn Hein, Prof. Dr.-Ing. Christian Wurll

Credits: Prof. Dr.-Ing. Michael Haag für die Bereitstellung der Folien, auf denen diese Vorlesung aufbaut

Koordinatentransformationen

Warum sind Koordinatentransformationen
in der Robotik so wichtig?

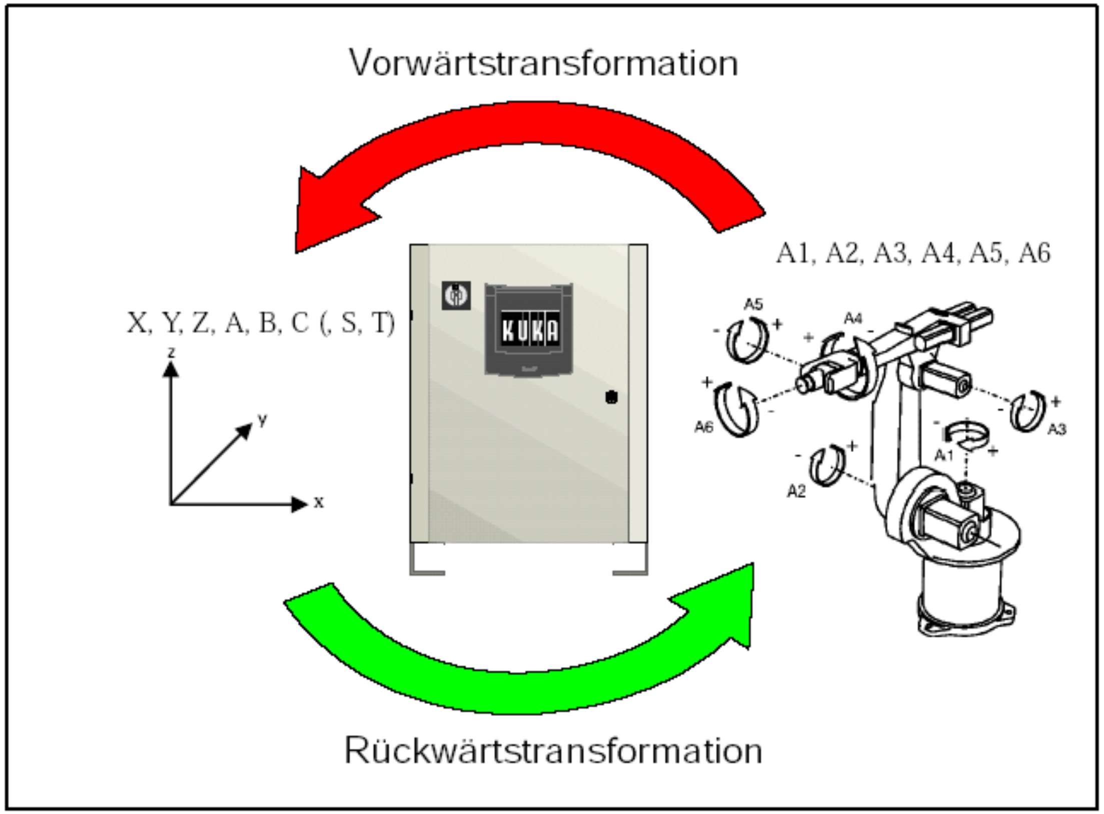
Warum sind Koordinatentransformationen in der Robotik so wichtig?

1. Roboter bestehen aus Armteilen, die über Gelenke miteinander verbunden sind (kinematische Kette). In jedem Gelenk liegt ein Koordinatensystem

   → Beschreibung der Koordinatentransformation vom Roboterfuß bis zum Greifer, in Abhängigkeit der aktuellen Gelenkwinkel.

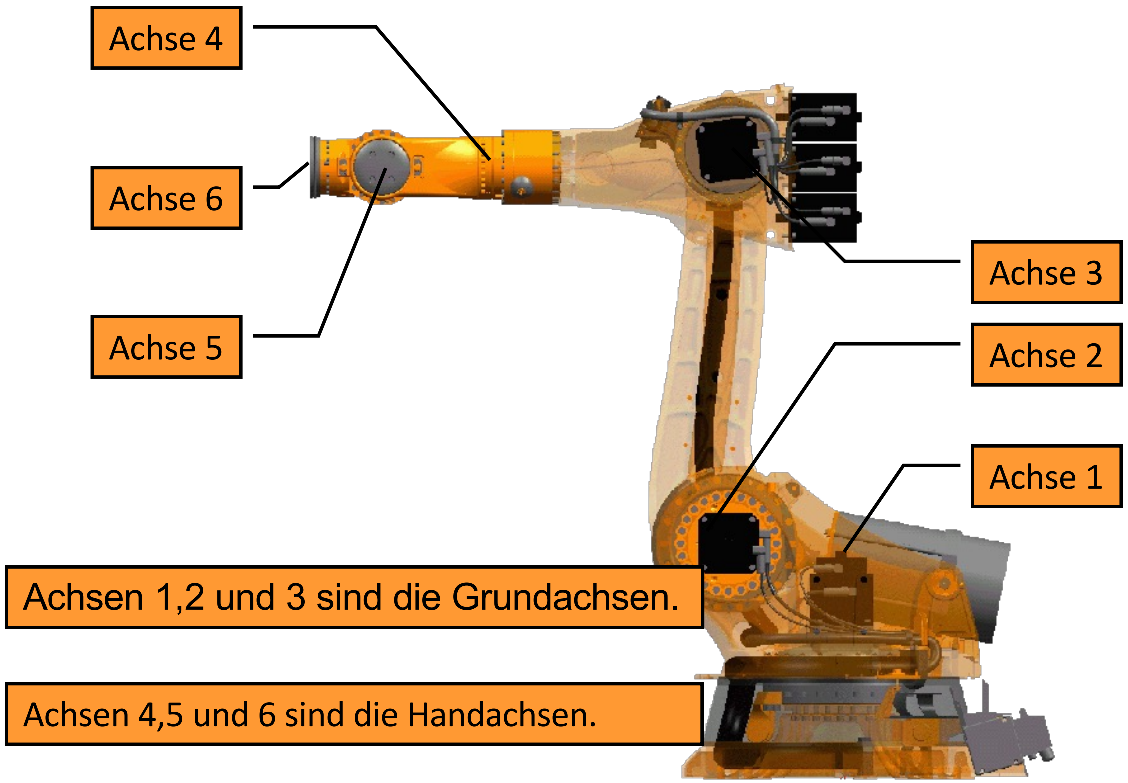
   → Modellierung des Roboters
   → wichtig für die Steuerung

Einordnung



Vorwärtstransformation
A1, A2, A3, A4, A5, A6
X, Y, Z, A, B, C (, S, T)
z
y
x
KUKA
A5
A4
A6
A3
A1
A2
Rückwärtstransformation

Achsbezeichnungen eines Knickarmroboters



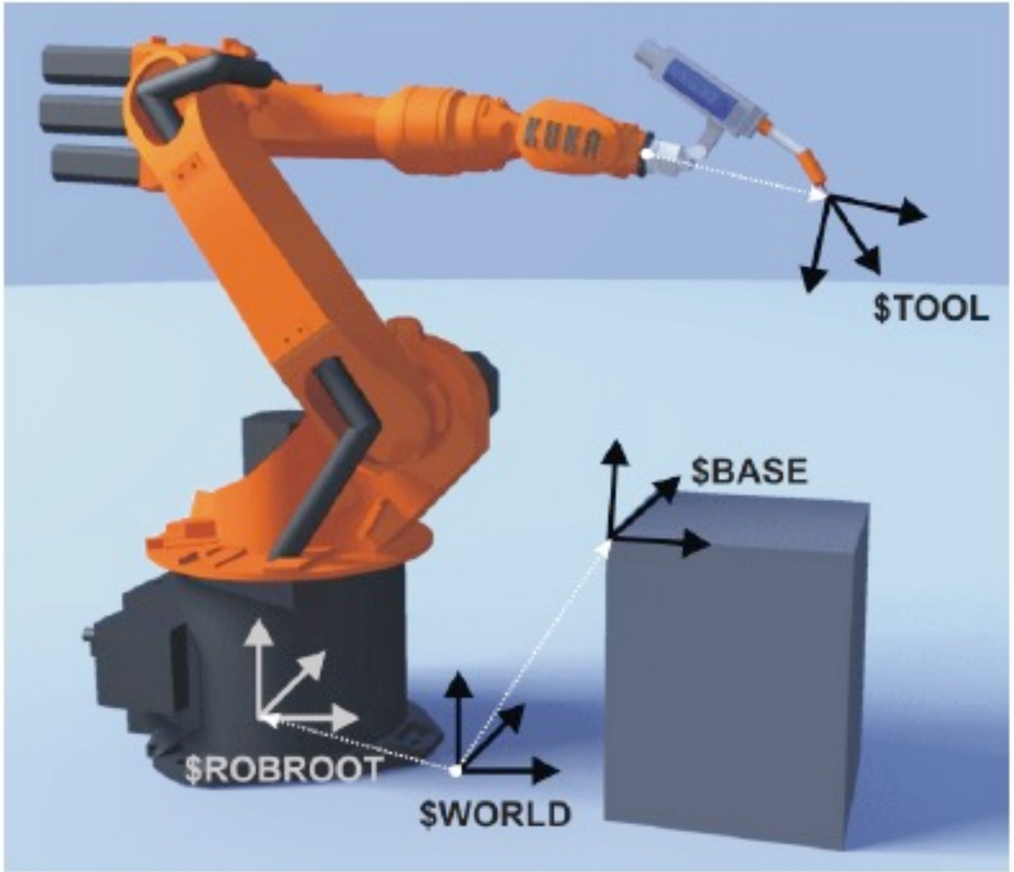
Warum sind Koordinatentransformationen

in der Robotik so wichtig?

2. Objekte und Werkzeuge werden durch den Roboter bewegt; ihre gewünschte Position und Orientierung muss beschrieben werden

→ wichtig für den Benutzer

Koordinatensysteme



Koordinatensysteme

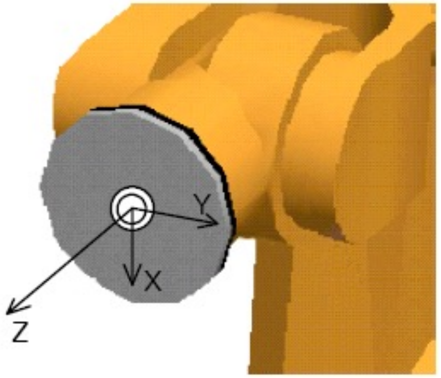
- **Weltkoordinatensystem:** ortsfestes Koordinatensystem, das als Ursprungskoordinatensystem für ein Robotersystem (Roboter, Bauteilauflage bzw. Werkzeug) dient; Bezugssystem sowohl für das Robotersystem als auch für die Zellenperipherie.

- **Roboterkoordinatensystem:** im Roboterfuß; Bezugskoordinaten-system für Roboteraufbau. Es bezieht sich selbst wieder auf das Weltkoordinatensystem und ist bei Auslieferung mit ihm identisch.

- **Werkzeugkoordinatensystem:** Ursprung in der Werkzeugspitze. Die Orientierung kann dabei so gewählt werden, dass seine X-Achse mit der Werkzeug-Stoßrichtung identisch ist und aus dem Werkzeug heraus zeigt. Bei einer Bewegung der Werkzeugspitze wird das Werkzeugkoordinatensystem mitbewegt.

- **Basiskoordinatensystem:** Bezugssystem für die Beschreibung der Lage des Werkstücks; Programmierung des Roboters erfolgt im Basiskoordinatensystem; Bezugskoordinatensystem ist das Weltkoordinatensystem. Bei Auslieferung sind beide identisch.

Tool-Center-Point (TCP)



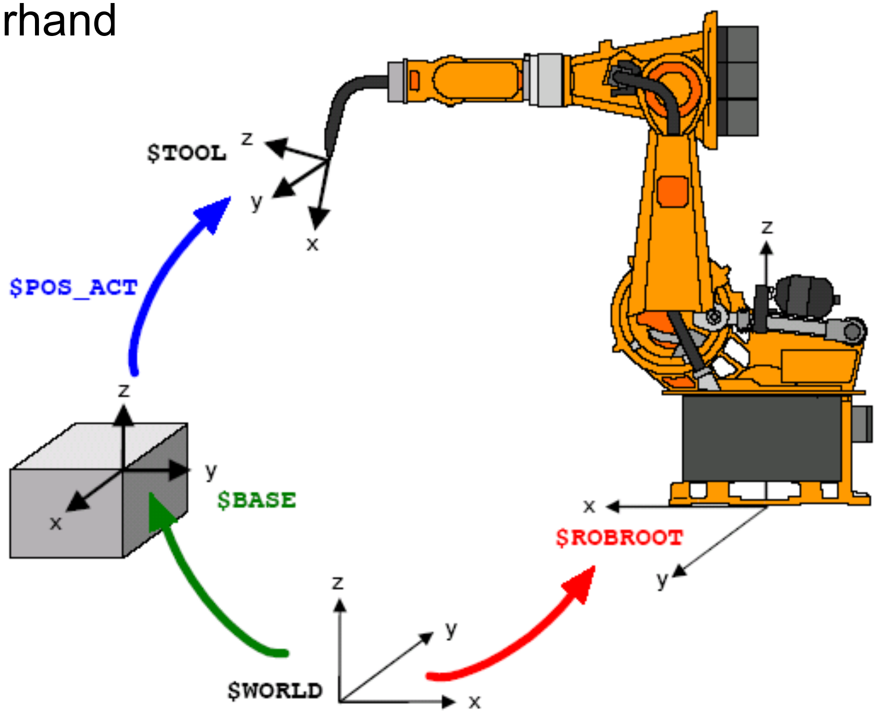
Flanschkoordinatensystem
Am Flansch wird das Werkzeug befestigt

Tool-**C**enter-**P**oint (**TCP**): Referenzpunkt eines Werkzeugs; von hier aus werden die Koordinaten des Werkzeugkoordinatensystems angegeben.
Beispiele für den TCP sind:

- Mittelpunkt des Greifers,
- Spitze der Schweißflamme,
- Spitze der Düse beim Beschichten.

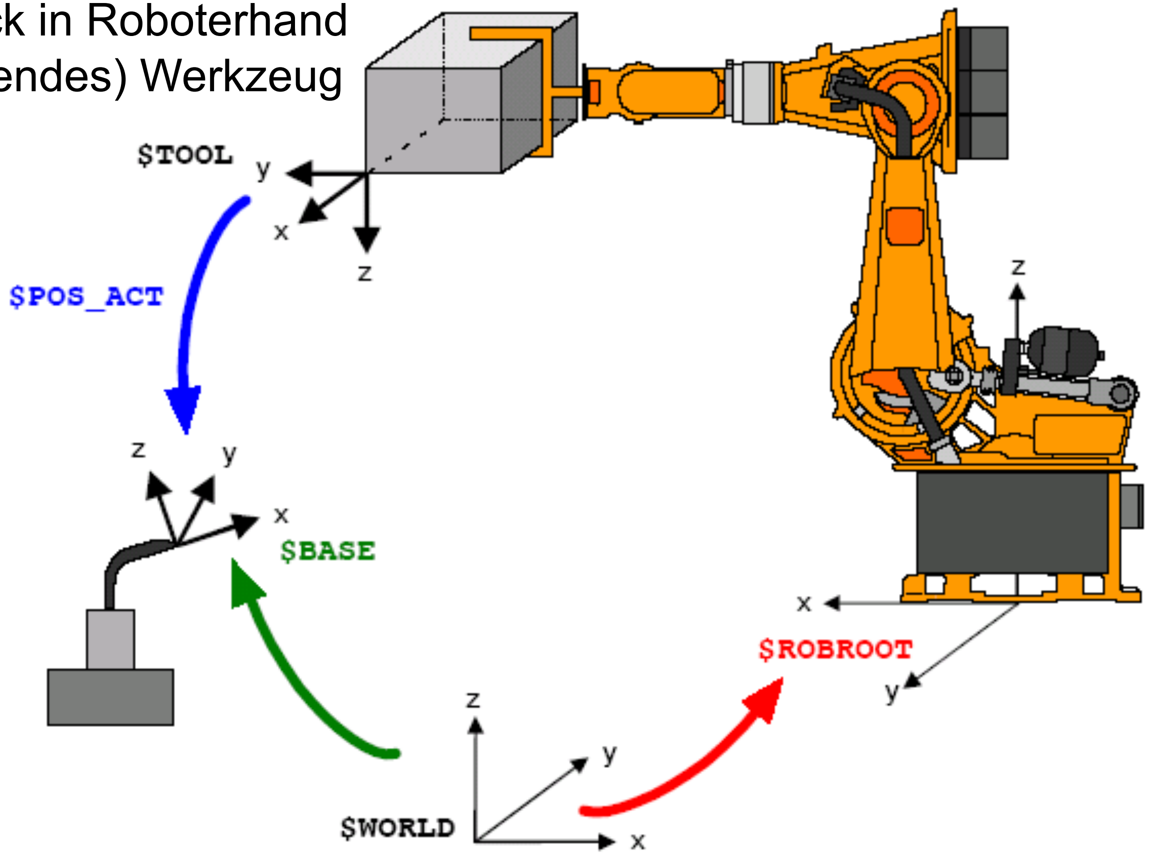
Basisbezug

Werkzeug in Roboterhand
Werkstück als Basis

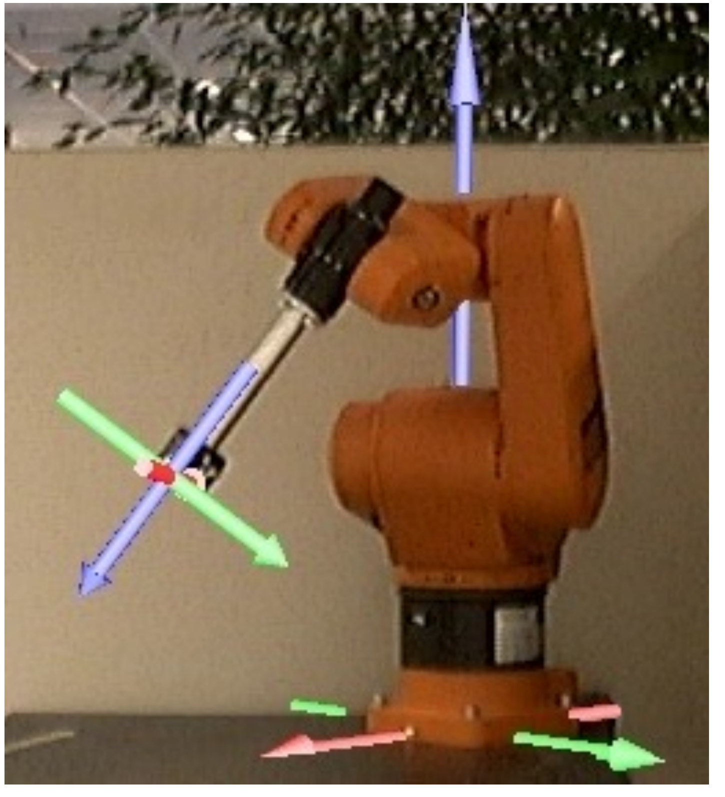


Greiferbezug

Werkstück in Roboterhand
(feststehendes) Werkzeug
als Basis



Koordinatensysteme

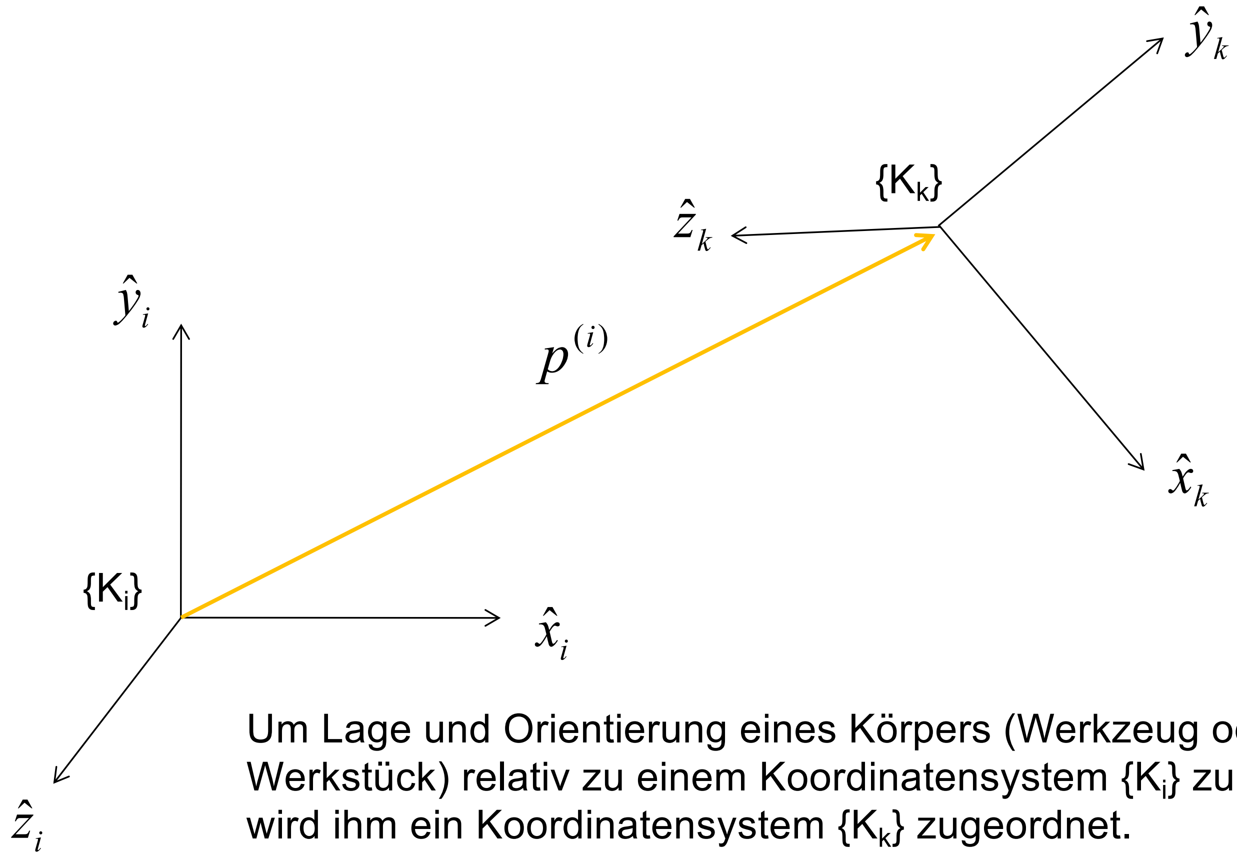


KUKA Roboter KR3 Schulungszelle mit
Augmented Reality Option zur Visualisierung der KO-Systeme

Koordinatensysteme

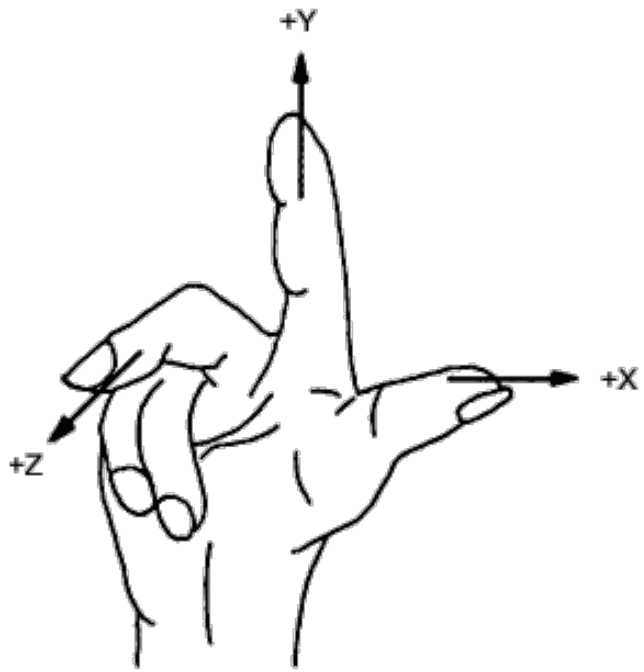
- Die Lage von Gegenständen, also ihre Position und Orientierung im euklidischen Raum, lässt sich beschreiben durch Angabe eines kartesischen (also rechtwinkligen) Koordinatensystems (KS).

Koordinatensysteme

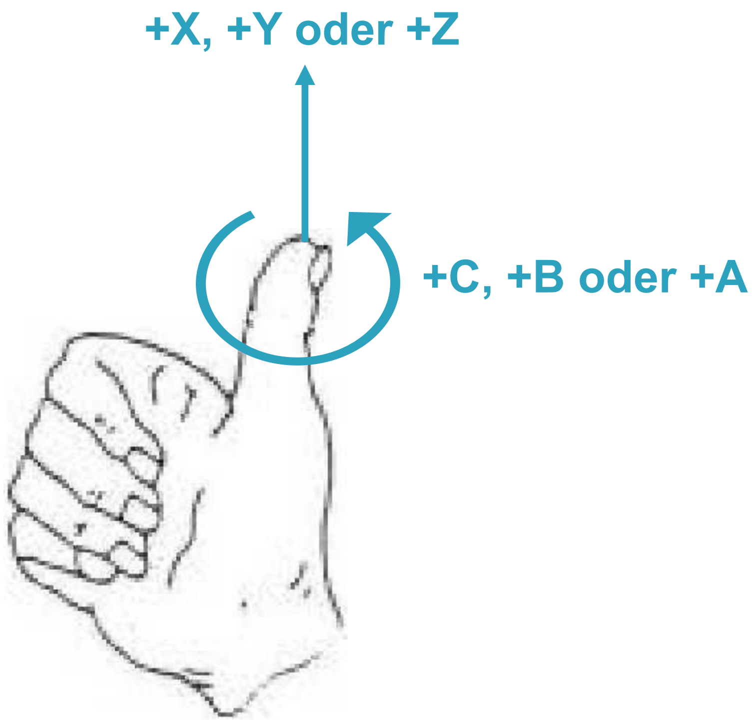


Um Lage und Orientierung eines Körpers (Werkzeug oder Werkstück) relativ zu einem Koordinatensystem $\{K_i\}$ zu beschreiben, wird ihm ein Koordinatensystem $\{K_k\}$ zugeordnet.

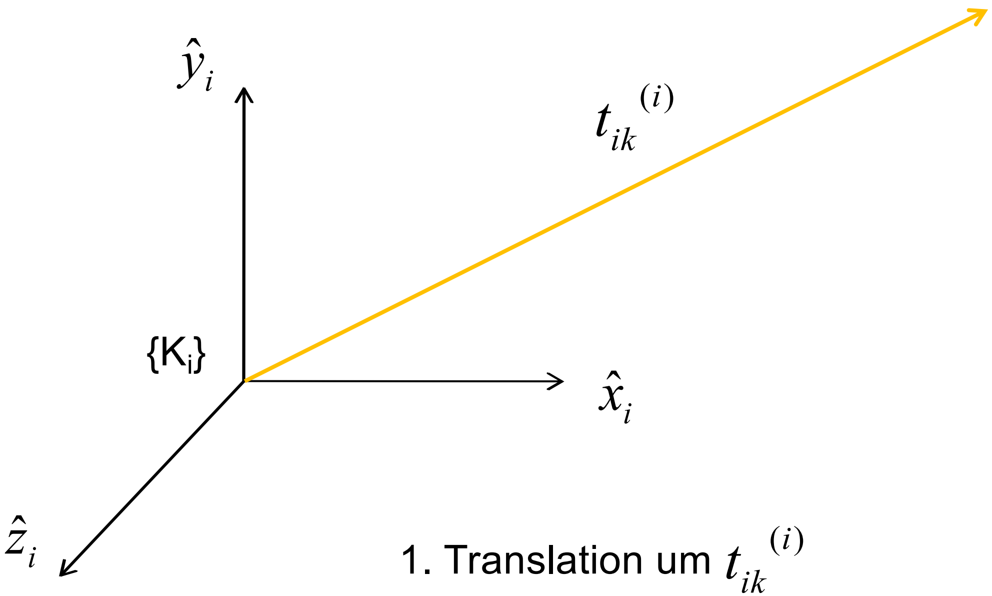
Rechte-Hand-Regel (Koordinatenrichtungen)



Rechte-Hand-Regel (Drehrichtung)

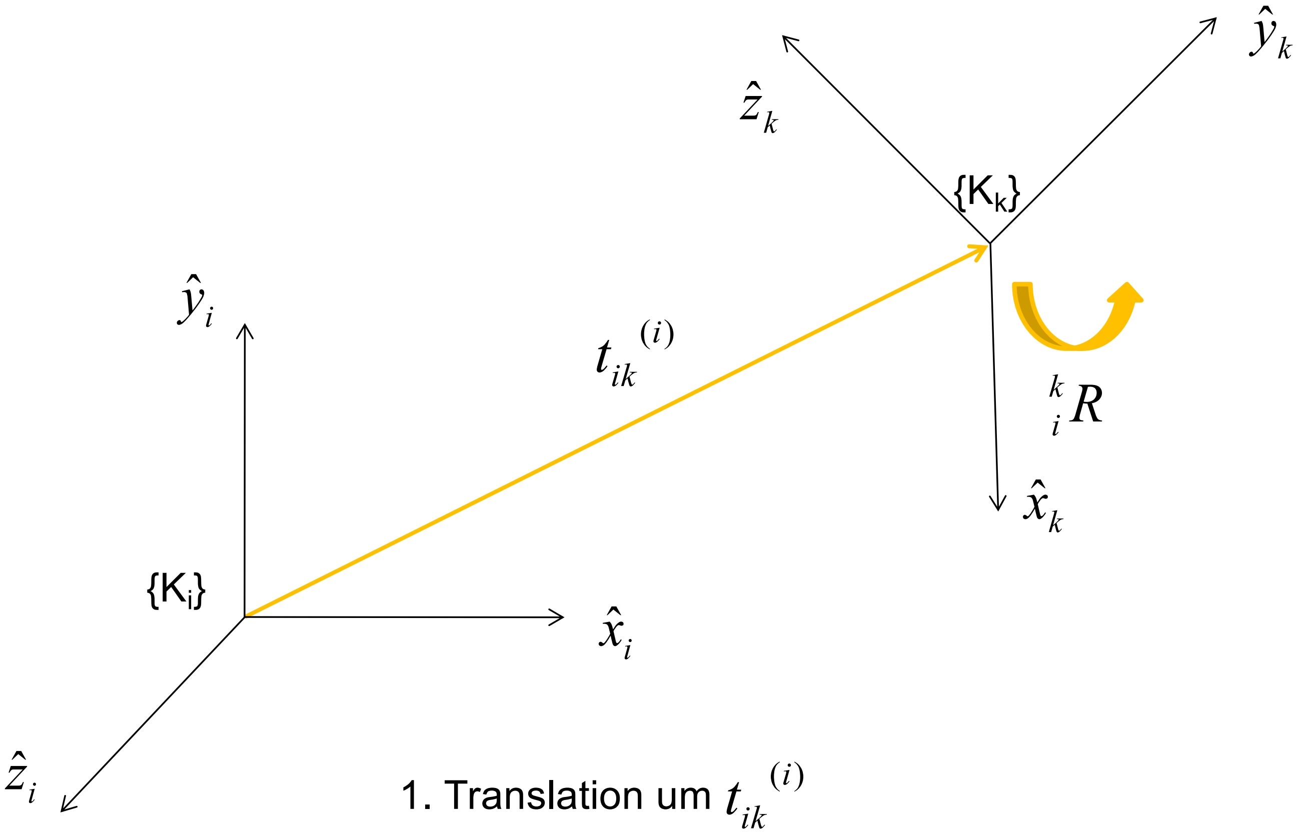


Koordinatentransformation



1. Translation um $t_{ik}^{(i)}$

Koordinatentransformation

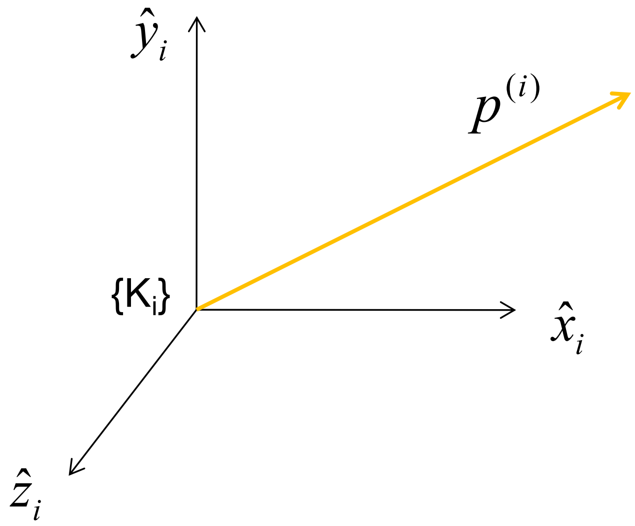


1. Translation um $t_{ik}^{(i)}$

2. Rotation um ${}^k_iR$

Komponenten eines Vektors P in Bezug auf ein Koordinatensystem $\{K_i\}$:

$$p^{(i)} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = p_x \cdot \hat{x}_i + p_y \cdot \hat{y}_i + p_z \cdot \hat{z}_i$$



- Betrag eines Vektors:

$$|p| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

- Einheitsvektor:

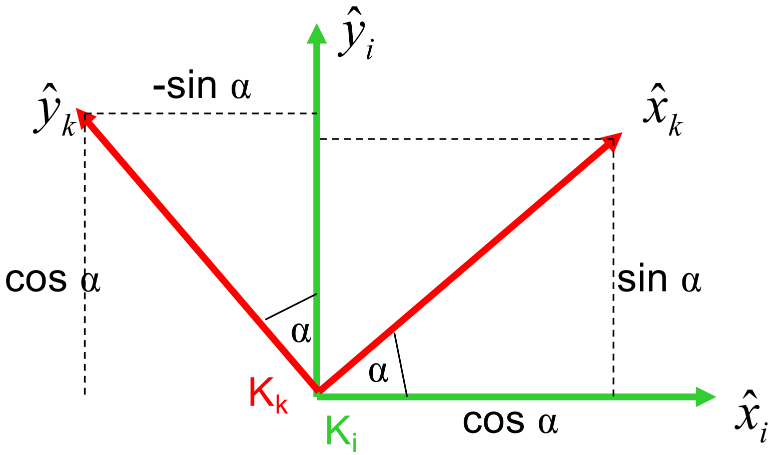
$$|e_p| = 1 \qquad e_p = \frac{p}{|p|}$$

- Skalarprodukt:

$$p_1 \cdot p_2 = |p_1| \cdot |p_2| \cdot \cos\theta$$

Orientierungen

Beispiel: Drehung eines Koordinatensystems K_i um seine z-Achse um den Winkel α



Darstellung der Basisvektoren von K_k im Koordinatensystem K_i:

$$\hat{x}_k^{(i)} = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)^T$$

$$\hat{y}_k^{(i)} = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)^T$$

$$\hat{z}_k^{(i)} = (0,0,1)^T$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \hat{x}_k^{(i)} & \hat{y}_k^{(i)} & \hat{z}_k^{(i)} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ {}_i^k R = R_Z(\alpha) = & \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Rotationsmatrizen

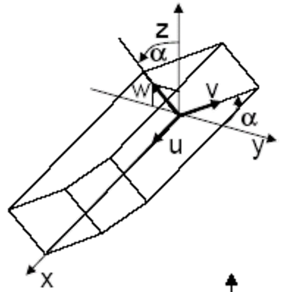
- Eigenschaften:
  - Spaltenvektoren der Rotationsmatrix sind Basisvektoren
  - Damit stehen die Spaltenvektoren paarweise senkrecht aufeinander und haben die Länge 1
  - Rotationsmatrizen sind also orthonormal
  - det R = +1
  - Damit gilt:

$$R^T \cdot R = I$$

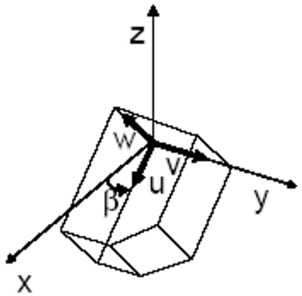
$$\Rightarrow R^{-1} = R^T$$

Rotationsmatrizen

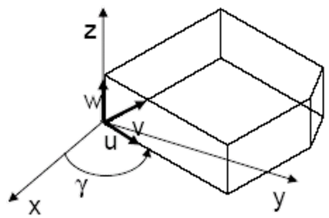
$$R_x(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$$



$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

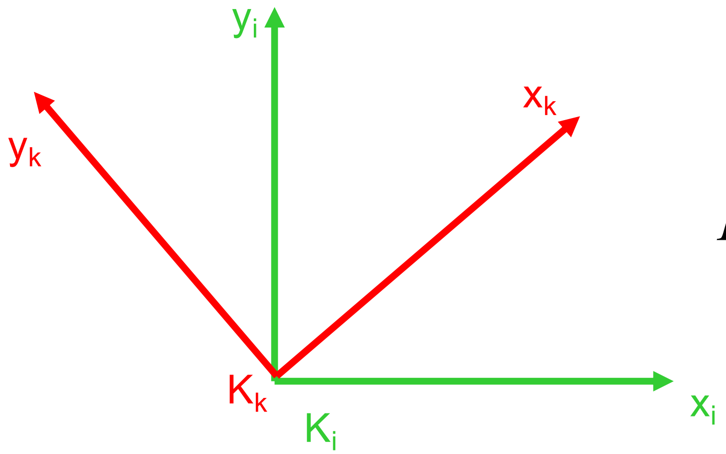


$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Bezeichnungen

K_k	Koordinatensystem k
$p^{(k)}$	Vektor **p** im Koordinatensystem K_k
${}_{i}^{k}R$	Rotationsmatrix R (Darstellung der Basisvektoren von K_k in K_i)



$$p^{(i)} = {}_{i}^{k}R \cdot p^{(k)}$$

Bezeichnungen

K_k	Koordinatensystem k
$p^{(k)}$	Vektor **p** im Koordinatensystem K_k
${}^{k}_{i}R$	Rotationsmatrix R (Darstellung der Basisvektoren von K_k in K_i)

Es gilt:

$$p^{(i)} = {}^{k}_{i}R \cdot p^{(k)}$$

$$p^{(k)} = \left[{}^{k}_{i}R\right]^{-1} \cdot p^{(i)} = \left[{}^{k}_{i}R\right]^{T} \cdot p^{(i)} = {}^{i}_{k}R \cdot p^{(i)}$$

Darstellung beliebiger Rotationen

- Auch beliebige Orientierungen eines Koordinatensystems K_k bezüglich eines Koordinatensystems K_i lassen sich mit Rotationsmatrizen ausdrücken, deren Spaltenvektoren die Basisvektoren von K_k bezüglich K_i darstellen:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \hat{x}_k^{(i)} & \hat{y}_k^{(i)} & \hat{z}_k^{(i)} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
{}_i^k R = & \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Darstellung beliebiger Rotationen

- Rotationsmatrizen sind 3x3 Matrizen, enthalten also neun Parameter.
- Die drei Spaltenvektoren sind Basisvektoren und haben damit jeweils die Länge 1, außerdem stehen sie paarweise senkrecht aufeinander (Skalarprodukt=0).
- Aufgrund dieser sechs Zwangsbedingungen ist eine Rotationsmatrix, also die Orientierung eines KO-Systems bezüglich eines anderen KO-Systems, stets mit drei Parametern beschreibbar.
- Diese drei Parameter sind die Drehung um die x-, y- und z-Achse. Die einzelnen elementaren Rotationen werden also verkettet.

Verkettung von Rotationen

- Matrix-Multiplikation ist nicht kommutativ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Bei verketteten Rotationen ist also die Reihenfolge der Rotationen nicht egal!

Verkettung von Rotationen

Festlegung von Konventionen für die Verkettung von Rotationen:

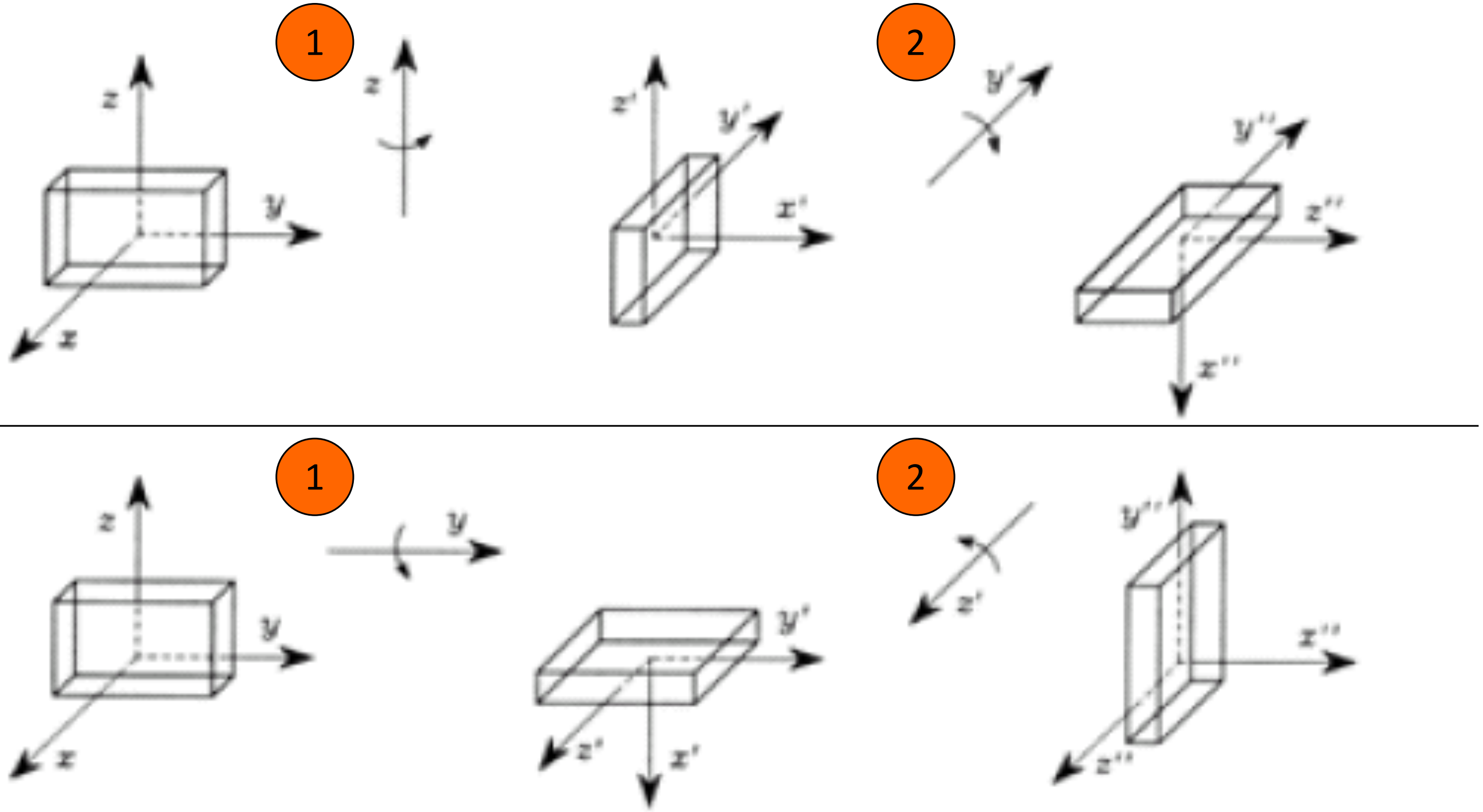
1. Um welche Achsen wird gedreht (festes KO-System oder jeweiliges Hilfs-KO-System)?
2. In welcher Reihenfolge wird gedreht?

Verkettung von Rotationen

Möglichkeiten für verkettete Rotationen:

1. Rotationen um das jeweilige neue Hilfs-Koordinatensystem

Verkettung von Rotationen



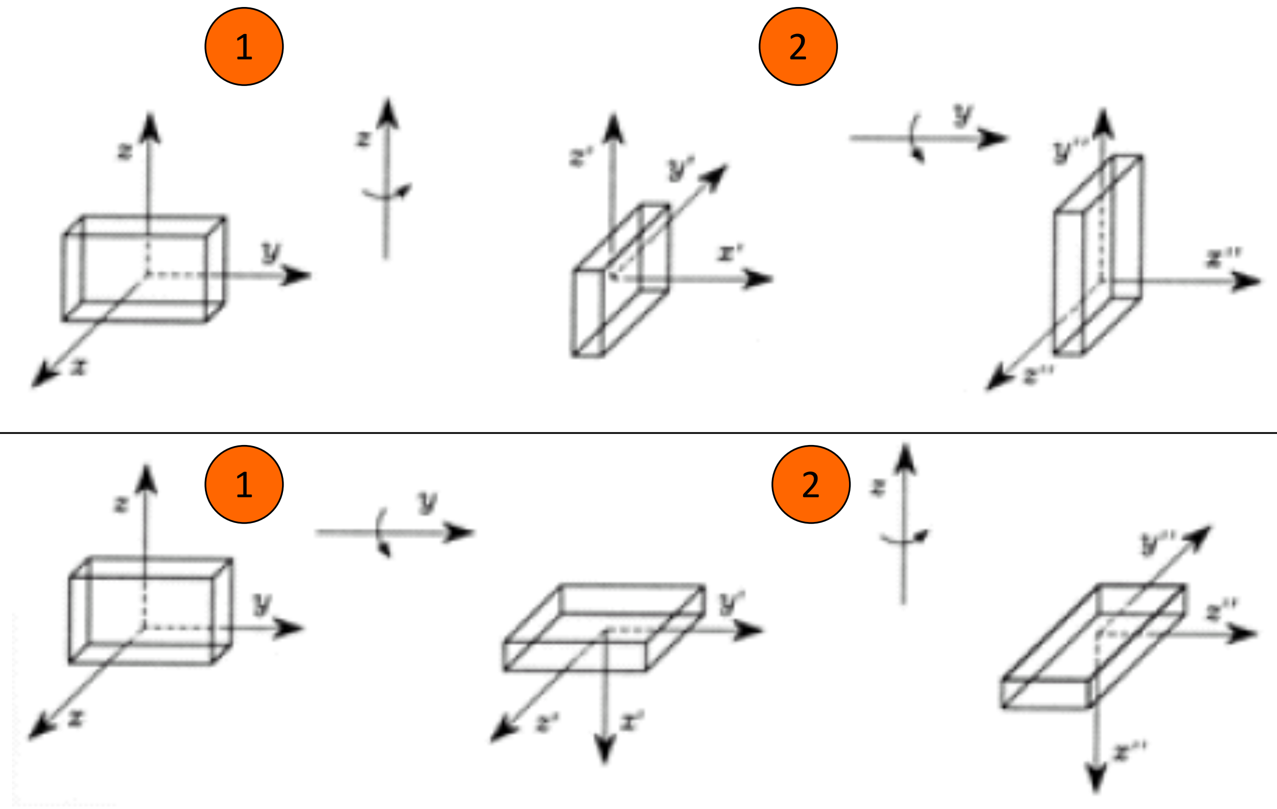
Rotation um das jeweilige Hilfskoordinatensystem

Verkettung von Rotationen

Möglichkeiten für verkettete Rotationen:

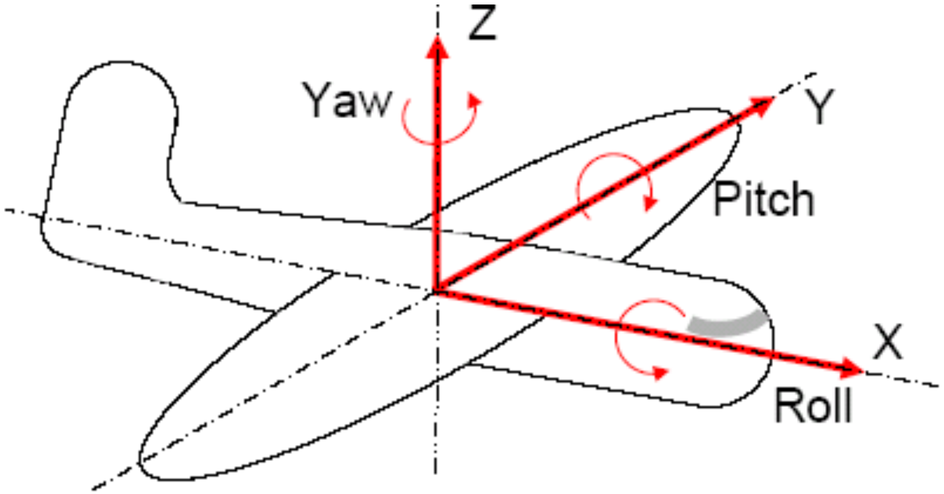
1. Rotationen um das jeweilige neue Hilfs-Koordinatensystem (Euler-Winkel)
2. Rotationen um das feste Ausgangs-Koordinatensystem (Roll-Pitch-Yaw Winkel)

Verkettung von Rotationen



Rotation um festes Ausgangs-Koordinaten-System

Roll-Pitch-Yaw Winkel



Rotation um x-Achse: Rollwinkel (Roll)
Rotation um y-Achse: Nickwinkel (Pitch)
Rotation um z-Achse: Gierwinkel (Yaw)
alle Rotationen erfolgen um ein **festes** KO-System

Roll-Pitch-Yaw Winkel

Beschreibung von K_k bezügl. K_i:

1. Rotation um die $x^{(i)}$ -Achse um den Winkel γ („roll“): $R_x(\gamma)$
2. Rotation um die $y^{(i)}$ -Achse um den Winkel β („pitch“): $R_y(\beta)$
3. Rotation um die $z^{(i)}$ –Achse um den Winkel α („yaw“): $R_z(\alpha)$

$$p^{(i)} = {}^k_iT \cdot p^{(k)} = R_z(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot R_x(\gamma) \cdot p^{(k)}$$

Euler-Winkel

- Drehung eines Koordinatensystems in ein zweites durch Angabe von 3 Parametern
- Drei Drehungen, die nacheinander ausgeführt werden.
- Bsp: Drehung des KO-Systems K_i in das KO-System K_k:
  - Drehung um eine feste Achse von K_i ergibt Hilfs-KO-System K ‘
  - Drehung um feste Achse von K ‘ ergibt K ‘ ‘
  - Drehung um feste Achse von K ‘ ‘ ergibt K ‘ ‘ ‘=K_k

- Drehung des KO-Systems K_i in das KO-System K_k:
  - Drehung von K_i um seine **z-Achse**, bis die x ‘-Achse des entstehenden Hilfs-KO-Systems K ‘ senkrecht auf der z-Achse von K_k steht und so weit wie möglich die Richtung der x-Achse von K_k einnimmt
  - Drehung von K ‘ um die **y ‘-Achse** in negativer Richtung, bis die x ‘ ‘-Achse von K ‘ ‘ identisch mit der x-Achse von K_k ist
  - Drehung von K ‘ ‘ um die **x ‘ ‘-Achse**, bis das entstehende KO-System identisch mit K_k ist

Vergleich RPY vs. ZYX

RPY:

$$R_{RPY} = \underbrace{\left(R_z(\alpha)\right)}_{\text{3. Yaw}} \cdot \left(\underbrace{R_y(\beta)}_{\text{2. Pitch}} \cdot \left(\underbrace{R_x(\gamma)}_{\text{1. Roll}}\right)\right)$$

Interpretation: Drehung um Achsen des **festen** Ausgangskoordinatensystems
(Matrixmultiplikation von rechts nach links bzw. Linksmultiplikation)

ZYX-Euler:

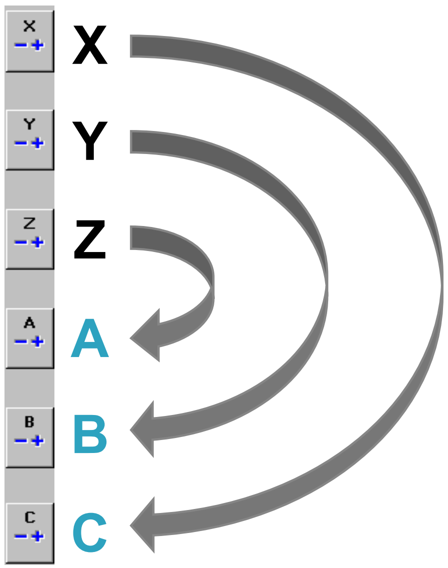
$$R_{ZYX} = \left(\left(\underbrace{\left(R_z(\alpha)\right)}_{\text{1. Z}} \cdot \underbrace{R_y(\beta)}_{\text{2. Y}}\right) \cdot \underbrace{R_x(\gamma)}_{\text{3. X}}\right)$$

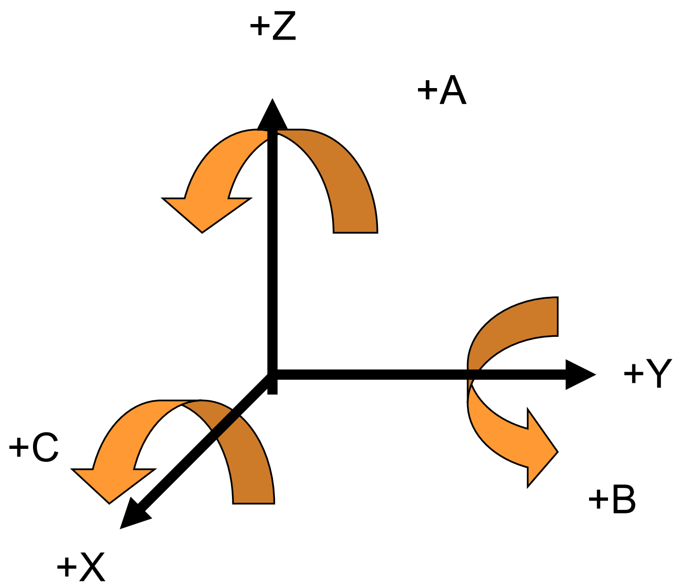
Interpretation: Drehung um Achsen des **aktuellen** Hilfskoordinatensystems
(Matrixmultiplikation von links nach rechts bzw. Rechtsmultiplikation)

Z-Y-X Euler-Winkel

Winkelzuordnung:

Winkel **A** ➡ Drehung um die **Z**-Achse
Winkel **B** ➡ Drehung um die **Y**-Achse
Winkel **C** ➡ Drehung um die **X**-Achse





Homogene Matrizen (Frames)

$$D = \left(\begin{array}{c|c} R & T \\ \hline P & S \end{array} \right)$$

R – 3 x 3 Rotation

T – 3 x 1 Translation

P – 1 x 3 Perspektivtransformation

S – 1 x 1 Skalierungsfaktor

Hier:
Keine Skalierung: $S = 1$
Keine Perspektivtransformation: $P = (0,0,0)$

Vorteil: Rotation und Translation in <u>einer</u> Matrix beschrieben

Homogene Matrizen (Frames)

$$Trans(x,y,z)=\begin{pmatrix}1&0&0&x\\0&1&0&y\\0&0&1&z\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad R_x(\gamma)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\gamma&-\sin\gamma&0\\0&\sin\gamma&\cos\gamma&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$R_y(\beta)=\begin{pmatrix}\cos\beta&0&\sin\beta&0\\0&1&0&0\\-\sin\beta&0&\cos\beta&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad R_z(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&0&0\\\sin\alpha&\cos\alpha&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$Trans(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Homogene Matrizen (Frames)

$$ {}^{k}_{i}T = \begin{pmatrix} & {}^{k}_{i}R & & t_{ik}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

damit:

$$ p^{(i)} = {}^{k}_{i}T \cdot p^{(k)} \cong {}^{k}_{i}R \cdot p^{(k)} + t_{ik}^{(i)} $$

mit

$$ p^{(k)} = \begin{pmatrix} p_x^{(k)} & p_y^{(k)} & p_z^{(k)} & 1 \end{pmatrix}^T $$

Homogene Matrizen (Frames)

$$p^{(i)} = {}^k_i T \cdot p^{(k)} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x^{(k)} \\ p_y^{(k)} \\ p_z^{(k)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11} \cdot p_x^{(k)} + r_{12} \cdot p_y^{(k)} + r_{13} \cdot p_z^{(k)} + t_x \\ r_{21} \cdot p_x^{(k)} + r_{22} \cdot p_y^{(k)} + r_{23} \cdot p_z^{(k)} + t_y \\ r_{31} \cdot p_x^{(k)} + r_{32} \cdot p_y^{(k)} + r_{33} \cdot p_z^{(k)} + t_z \\ 1 \end{pmatrix} \cong {}^k_i R \cdot p^{(k)} + t_{ik}^{(i)}$$

Bestimmung von

$$ {}^{i}_{k}T = \left({}^{k}_{i}T \right)^{-1} $$

$$ p^{(i)} = {}^{k}_{i}T \cdot p^{(k)} = {}^{k}_{i}R \cdot p^{(k)} + t_{ik}^{(i)} $$

Sei $\mathbf{p}^{(i)}$ der Ursprung von K_i, dann ergibt sich:

$$ 0 = {}^{k}_{i}R \cdot p^{(k)} + t_{ik}^{(i)} $$

$$ \Rightarrow p^{(k)} = -\left({}^{k}_{i}R \right)^{-1} \cdot t_{ik}^{(i)} $$

(Darstellung des Ursprungsvektors von K_i in K_k)

Homogene Matrizen (Frames)

Damit:

$$p^{(k)} = {}^{i}_{k}T \cdot p^{(i)} = \left[{}^{k}_{i}T\right]^{-1} \cdot p^{(i)}$$

Darstellung des Ursprungsvektors von K_i in K_k

$${}^{i}_{k}T = \left[{}^{k}_{i}T\right]^{-1} = \begin{pmatrix} & {}^{k}_{i}R^{T} & & \boxed{-{}^{k}_{i}R^{T} t^{(i)}_{ik}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

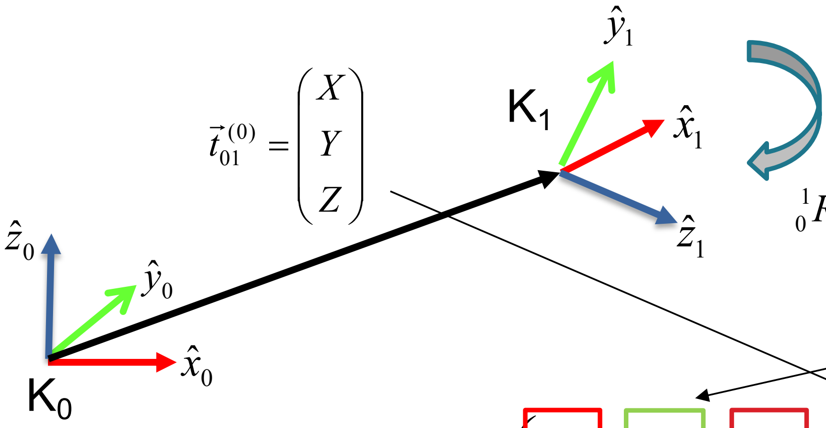
$${}^{k}_{i}T = {}^{i+1}_{i}T \cdot {}^{i+2}_{i+1}T \cdot \ldots \cdot {}^{k-1}_{k-2}T \cdot {}^{k}_{k-1}T$$

$${}^{i}_{k}T = \left[{}^{k}_{i}T\right]^{-1} = {}^{k}_{k-1}T^{-1} \cdot {}^{k-1}_{k-2}T^{-1} \cdot \ldots \cdot {}^{i+2}_{i+1}T^{-1} \cdot {}^{i+1}_{i}T^{-1}$$

$$= {}^{k-1}_{k}T \cdot {}^{k-2}_{k-1}T \cdot \ldots \cdot {}^{i+1}_{i+2}T \cdot {}^{i}_{i+1}T$$

Zusammenfassung

Beschreibung von K_1 bezüglich K_0 durch sechs Parameter: {X, Y, Z, A, B, C}



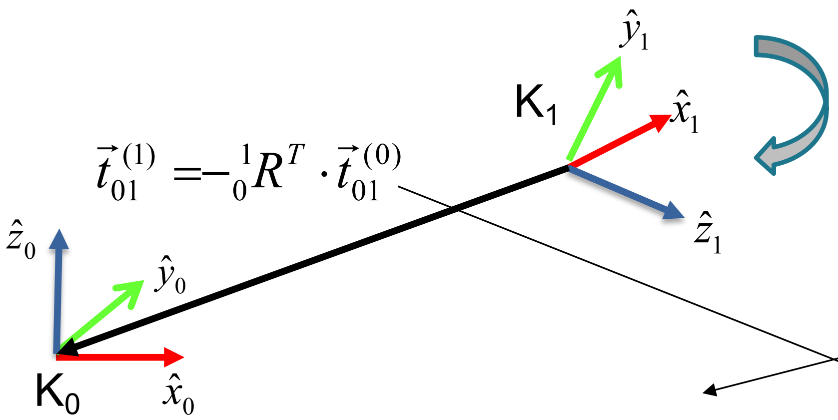
$$\vec{t}_{01}^{\,(0)} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \hat{x}_1^{(0)} & \hat{y}_1^{(0)} & \hat{z}_1^{(0)} \end{array} \\ {}^1_0R(A,B,C) = & \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix} = R_z(A)\cdot R_y(B)\cdot R_x(C) \end{array}$$

$${}^1_0T = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & X \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & Y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung

Umkehrung: Beschreibung von K_0 bezüglich K_1:



$$\vec{t}_{01}^{\,(1)} = -{}_0^1R^T \cdot \vec{t}_{01}^{\,(0)}$$

$$ {}_1^0R = \left({}_0^1R\right)^{-1} = {}_0^1R^T$$

$$ {}_1^0T = \left({}_0^1T\right)^{-1} = \begin{pmatrix} & {}_0^1R^T & & -{}_0^1R^T\vec{t}_{01}^{\,(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$