
Hochschule Karlsruhe – Technik und Wirtschaft

Robotics

Björn Hein
Christian Wurll



Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES



Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Robotics - Theory and Practice
Prof. Dr.-Ing. Björn Hein, Prof. Dr.-Ing. Christian Wurll

4. Bahnplanung/Interpolation

Version: 0.2

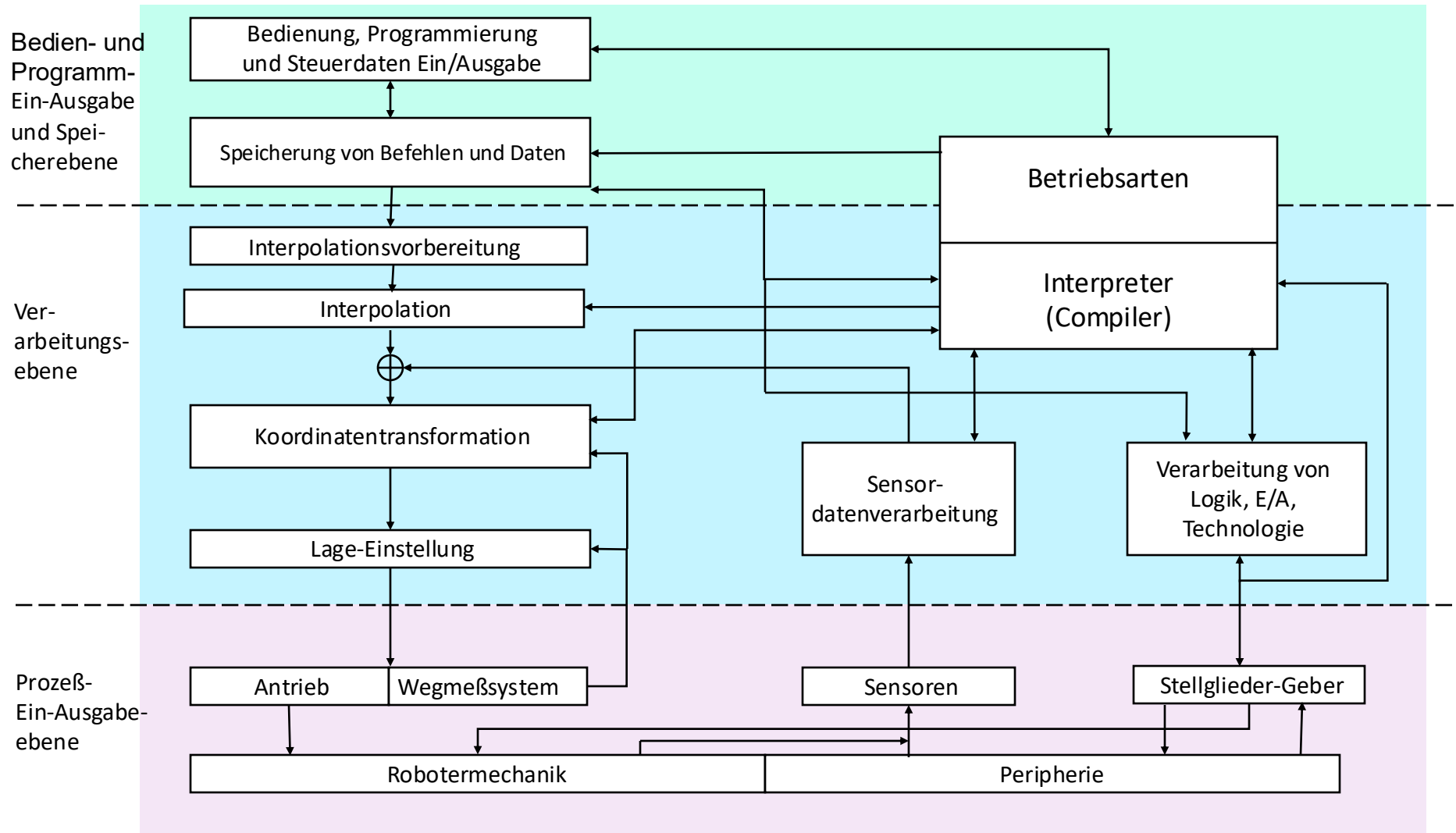
Vortragender: Prof. Dr.-Ing. Björn Hein

Credits: Prof. Dr.-Ing. Michael Haag für die Bereitstellung der Folien, auf denen diese Vorlesung aufbaut

Bewegungsarten

- Punkt zu Punkt
- Auf Geraden oder Kreisbögen
- Mit festgelegter Start- und Zielorientierung
- Auf Raumkurven mit konstanter Geschwindigkeit
- Bewegungen auf Freiformflächen
- Folgebewegung auf Transportbändern
- Sensorgeführte Bewegung
- Montagebewegungen (z.B. Einführen von Stiften)
- Ausweichbewegung zur Vermeidung von Kollisionen

Informationsfluss in Robotersteuerungen



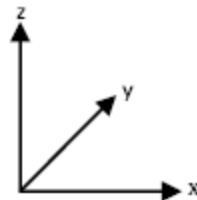
Trajektorie

Definition der Trajektorie
im kartesischen Raum

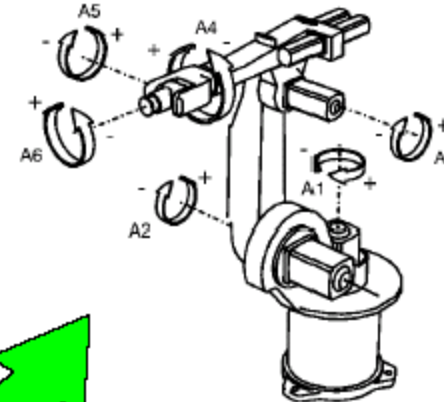
Vorwärtstransformation

Definition der Trajektorie
im Gelenkraum

$X, Y, Z, A, B, C (S, T)$



$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$

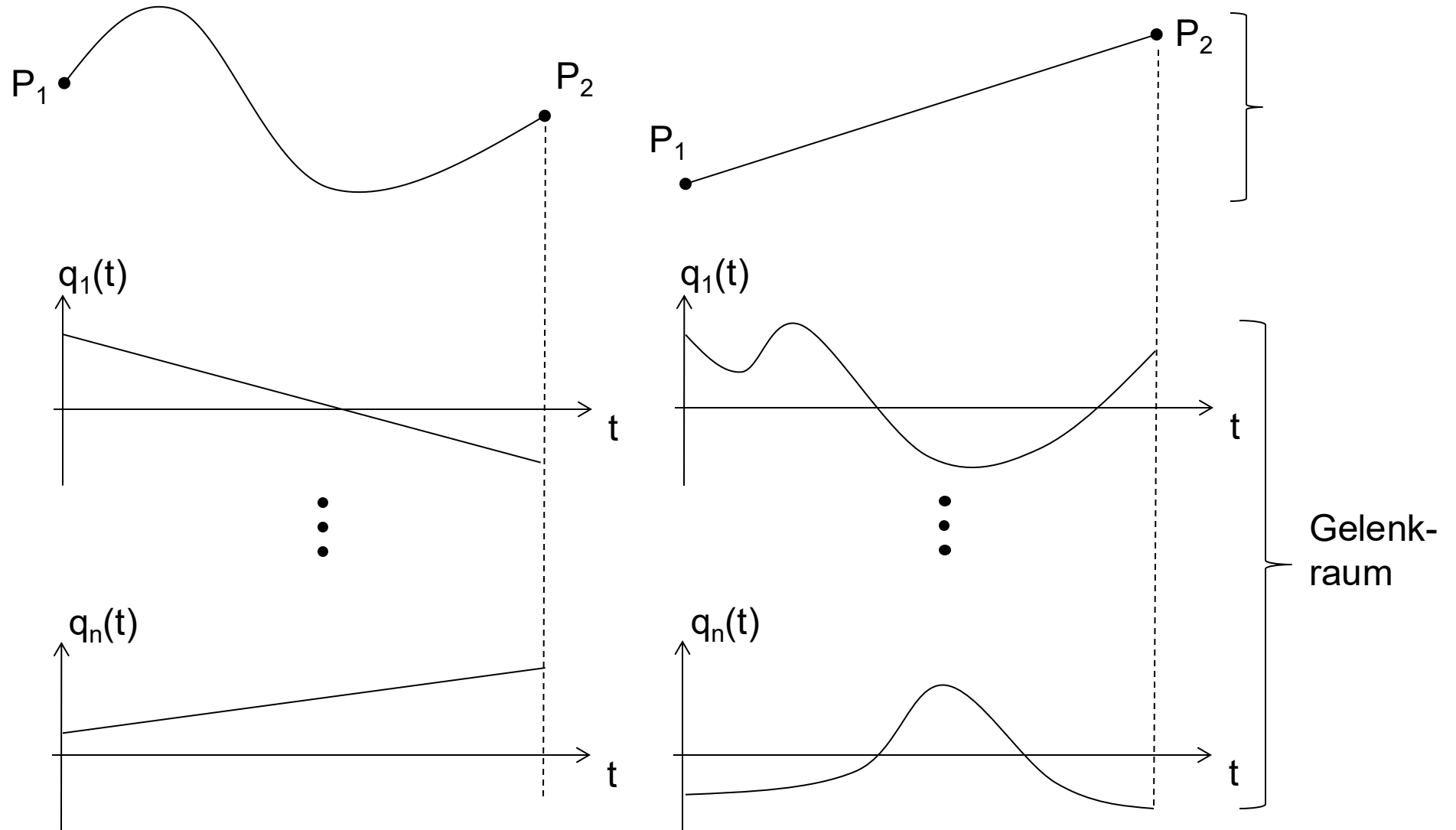


Rückwärtstransformation

Definition einer Trajektorie des Endeffektors:

- Entweder **im Gelenkraum** durch Angabe des zeitlichen Verlaufs des **Gelenkkoordinaten-Vektors $\mathbf{q}(t)$** und seinen zeitlichen Ableitungen (Geschwindigkeit und Beschleunigung)
- Oder im **kartesischen Raum** durch Angabe des zeitlichen Verlaufs des **Frames** (Position und Orientierung des TCPs) und seinen zeitlichen Ableitungen (Geschwindigkeit und Beschleunigung)

Trajektorie



Bahnplanung/Interpolation

- **Bahnplanung:** Berechnung einer kontinuierlichen, physikalisch realisierbaren Trajektorie, die die vorgegebenen Anfangs-, Zustands- und Endwerte erfüllt.
- **Interpolation:** Abtastung der Trajektorie in festgelegten zeitlichen Abständen (Interpolationstakt).

Bahnplanungsverfahren

- Planung von Punkt zu Punkt (PTP)
- Interpolierte geradlinige Bahnsegmente zwischen den Raumpunkten (LIN)
- Interpolierte geradlinige Bahnsegmente mit fließenden Übergängen zwischen den Segmenten (LIN-Überschleifen)
- Interpolierte Kreissegmente mit und ohne Überschleifen (CIRC und CIRC-Überschleifen)
- Algebraische Funktionen (Polynome)
- Bahnsegmente zwischen bewegten Raumpunkten (Tracking)
- Bahnen auf (Freiform-)Flächen

Steuerungsarten

- Punktsteuerung (Point-to-Point, PTP)
- Bahnsteuerung (Continuous Path, CP)
 - Linearbahn (LIN)
 - Zirkularbahn (CIRC)

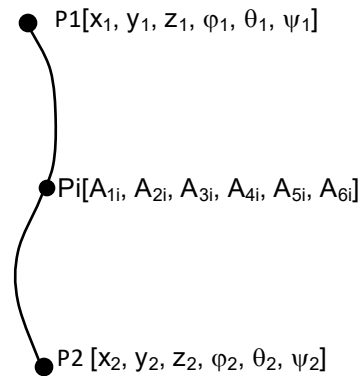
Bewegungssteuerungsarten

Punkt-zu-Punkt-Steuerung PTP

(Point To Point)

Anwendung:

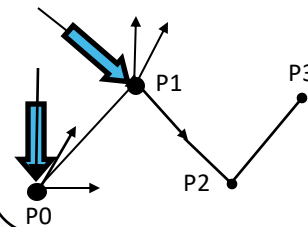
Palettieren,
Punktschweißen,
Beschicken von
Werkzeugmaschinen,
Be- und Entladung von
Fördereinrichtungen.



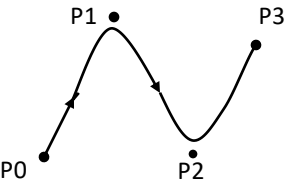
Bahn-Steuerung CP (Continuous Path)

Anwendung: Lichtbogen-
schweißen
Bearbeiten
(Entgraten)
Montieren

Lineare Interpolation



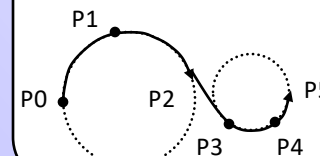
Lineare Interpolation mit Überschleifen



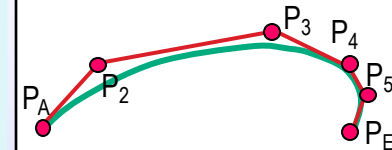
Werkzeugvektor

$P_i: [x_i, y_i, z_i, \phi_i, \theta_i, \psi_i]$

Zirkuläre Interpolation mit Überschleifen

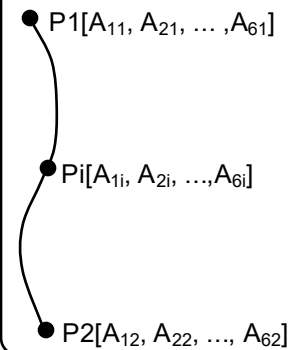


Spline Interpolation



Vielpunkt-Steuerung MP (Multi Point)

Anwendung: Spritzlackieren,
Beschichten,
Ausschäumen.

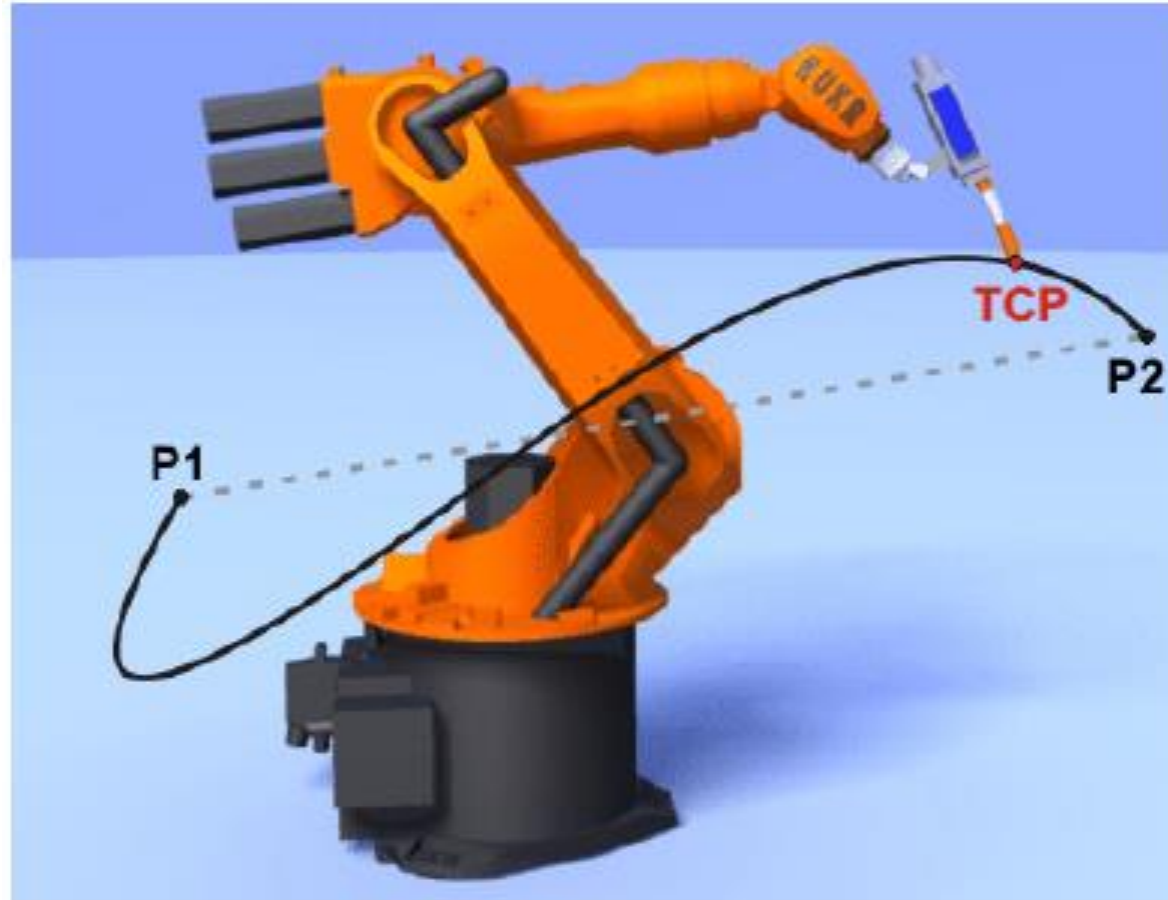


Steuerungsarten

- **Punktsteuerung (Point-to-Point, PTP)**
- Bahnsteuerung (Continuous Path, CP)
 - Linearbahn (LIN)
 - Zirkularbahn (CIRC)



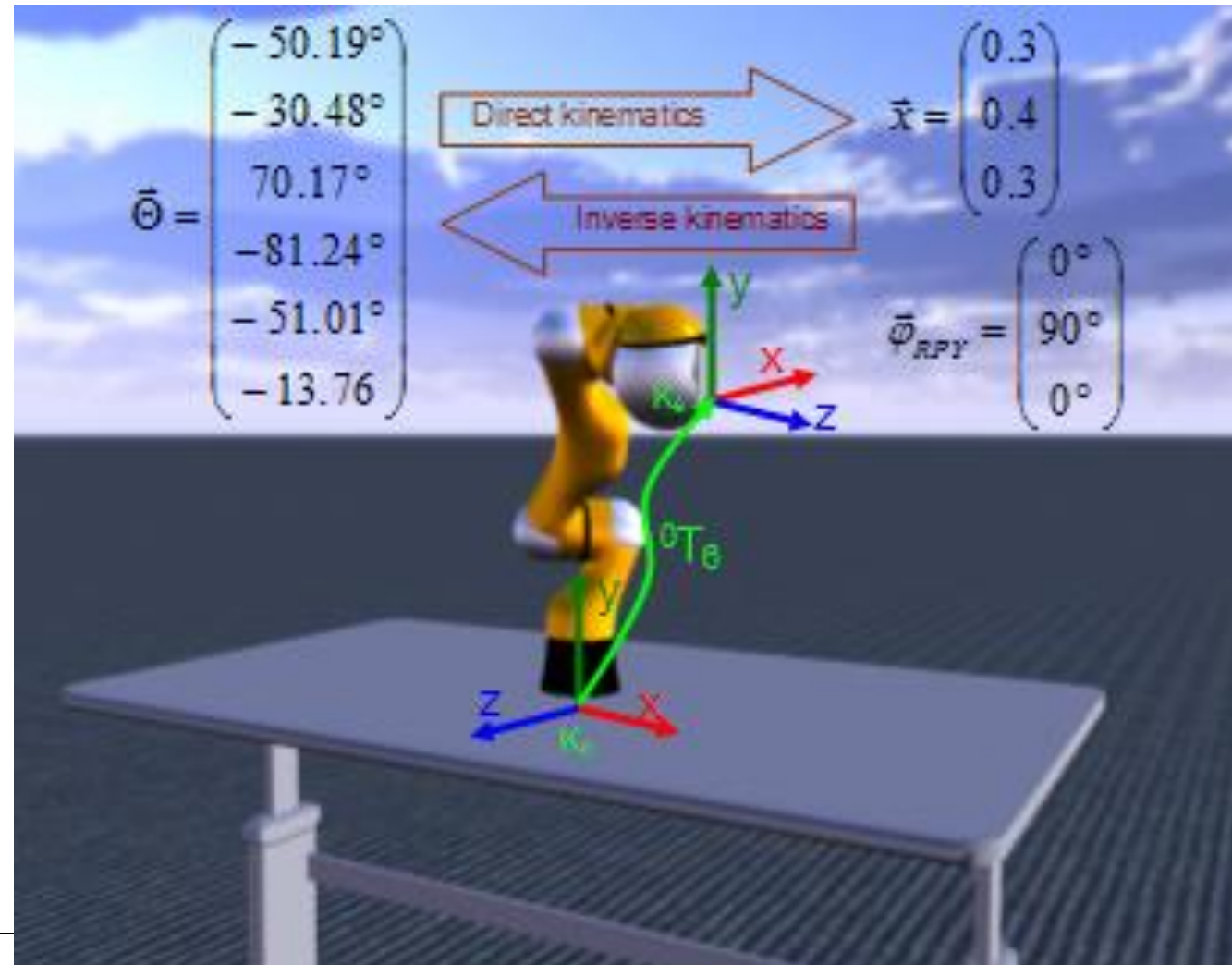
Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP)



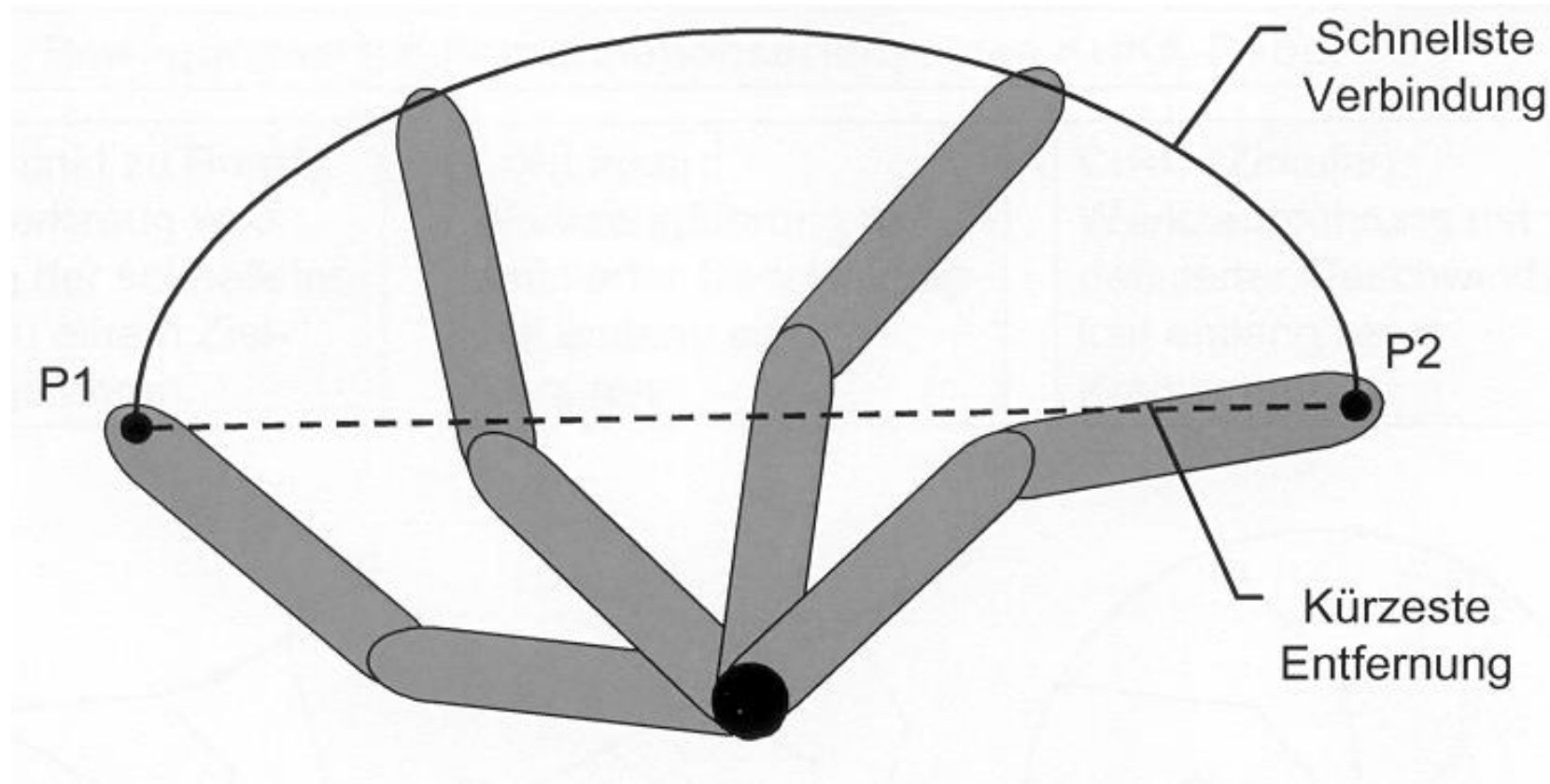
Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP)

- Die Positionierung des Robotersystems erfolgt hier auf dem schnellsten (nicht kürzesten!) Weg zwischen zwei Punkten.
- Die Zwischenwerte werden in **Achskoordinaten** berechnet. Die **kartesische Bahn** des Roboters ist deshalb für den Anwender nicht exakt vorhersehbar.

Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP)

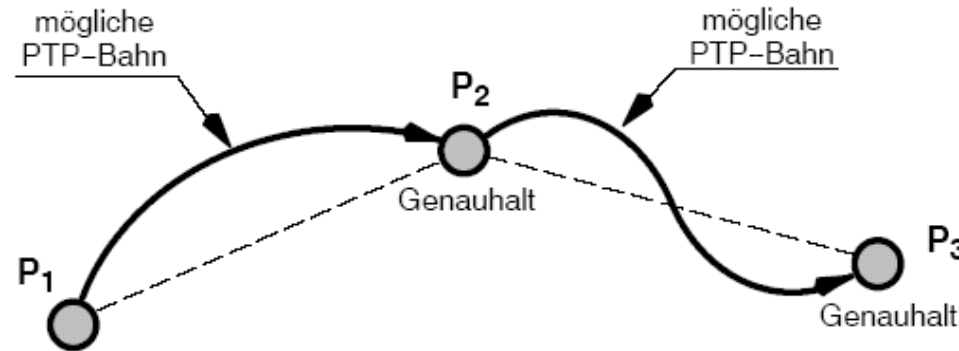


Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP)



Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP)

- PTP-Bewegung mit Genauhalt
- Bei PTP-Bewegungen mit Genauhalt wird jeder Zielpunkt exakt angefahren.

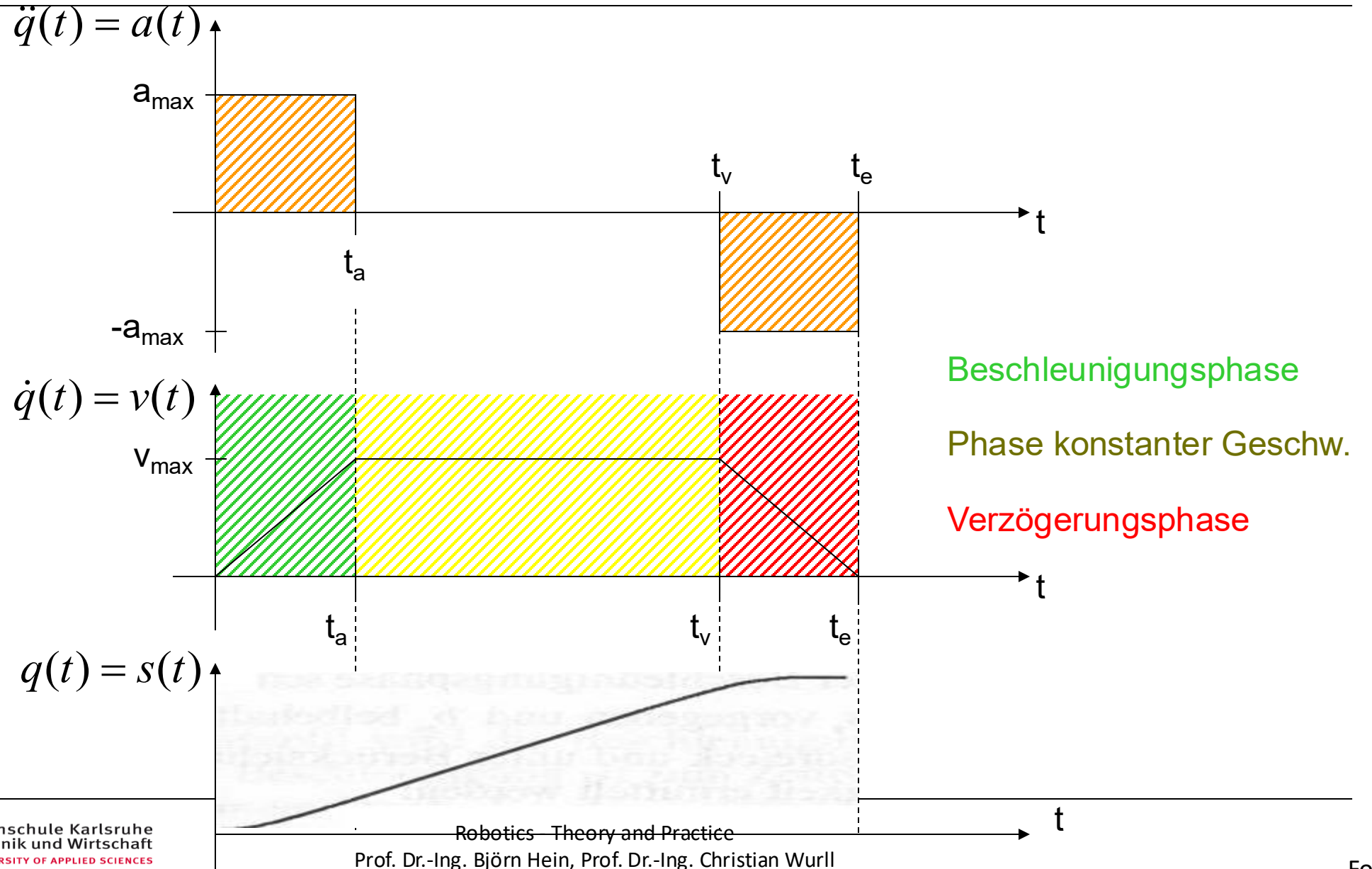


Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP)

Rampenprofil für jede Achse:

1. Phase: definierte Gelenkbeschleunigung, bis die vom Anwender festgelegte Geschwindigkeit erreicht ist
2. Phase: Gleichbleibende Geschwindigkeit
3. Phase: Verzögerungsphase, so dass die Achse in Zielstellung zur Ruhe kommt

Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP)





Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP)

Geschwindigkeiten v und Beschleunigungen a
werden i.d.R. nicht absolut, sondern als
Prozentwert des für das jeweilige Gelenk
maximal zulässigen Wertes angegeben:

\$ACC_AXIS [X]=70 ; Achsbeschleunigung 70%

\$VEL_AXIS [X]=70 ; Achsgeschwindigkeit 70%

X=1..n bei n Achsen

Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP)

Gegeben:

$$q(0), q(t_e), v_{\max}, a_{\max}$$

$$\dot{q}(0) = v(0) = 0$$

$$\dot{q}(t_e) = v(t_e) = 0$$

t_e : Bahndauer

Gesucht:

Gelenksollwerte

$$q_{soll}(t), \dot{q}_{soll}(t), \ddot{q}_{soll}(t)$$

berechnet zu diskreten
Zeitpunkten (im
Interpolationstakt)

Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP)

Dauer der Beschleunigungsphase:

$$t_a = \frac{v_{\max}}{a_{\max}}$$



Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP)

Bestimmung der Bahndauer t_e :

$$|q(t_e) - q(0)| = \int_0^{t_e} v(t) dt = 2 \int_0^{t_a} (a_{\max} t) dt + \int_{t_a}^{t_v} v_{\max} dt$$

$$= \left[a_{\max} \cdot t^2 \right]_{t=0}^{t=t_a} + \left[v_{\max} \cdot t \right]_{t=t_a}^{t=t_v}$$

$$= a_{\max} \cdot t_a^2 + v_{\max} \cdot t_v - v_{\max} \cdot t_a$$

$$= v_{\max} \cdot t_a + v_{\max} \cdot t_v - v_{\max} \cdot t_a$$

$$= v_{\max} \cdot t_v$$

$$\Rightarrow t_v = \frac{|q(t_e) - q(0)|}{v_{\max}} \quad (\text{entspricht der Fläche unter der } v(t)\text{-Rampe})$$

$$\Rightarrow t_e = t_v + t_a = \frac{|q(t_e) - q(0)|}{v_{\max}} + \frac{v_{\max}}{a_{\max}}$$

Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP)

Beschleunigungsphase:

$$t_0 \leq t < t_a \quad \ddot{q}(t) = a_{\max}$$

$$\dot{q}(t) = a_{\max} \cdot t$$

$$q(t) = \frac{1}{2} a_{\max} \cdot t^2$$

Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP)

Phase konstanter Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} t_a \leq t < t_v \quad \ddot{q}(t) &= 0 & q(t) &= q(t_a) + \int_{t_a}^t v_{\max} dt \\ & \dot{q}(t) = v_{\max} & &= \frac{1}{2} a_{\max} \cdot t_a^2 + [v_{\max} \cdot t]_{t=t_a}^t \\ & & &= \frac{1}{2} v_{\max} \cdot t_a + v_{\max} \cdot t - v_{\max} \cdot t_a \\ & & &= v_{\max} \cdot t - \frac{1}{2} v_{\max} \cdot t_a \\ & & &= v_{\max} \cdot t - \frac{1}{2} \frac{v_{\max}^2}{a_{\max}} \end{aligned}$$

Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP)

Verzögerungsphase:

$$t_v \leq t \leq t_e \quad \ddot{q}(t) = -a_{\max}$$

$$\dot{q}(t) = v_{\max} - a_{\max} (t - t_v)$$

$$q(t) = q(t_v) + \int_{t_v}^t (-a_{\max} \cdot t) dt$$

t_v ist
bekannt:
 $t_v = t_e - t_a$

$$= v_{\max} \cdot t_v - \frac{1}{2} \frac{v_{\max}^2}{a_{\max}} + \left[-\frac{1}{2} a_{\max} \cdot t^2 \right]_{t_v}^t$$

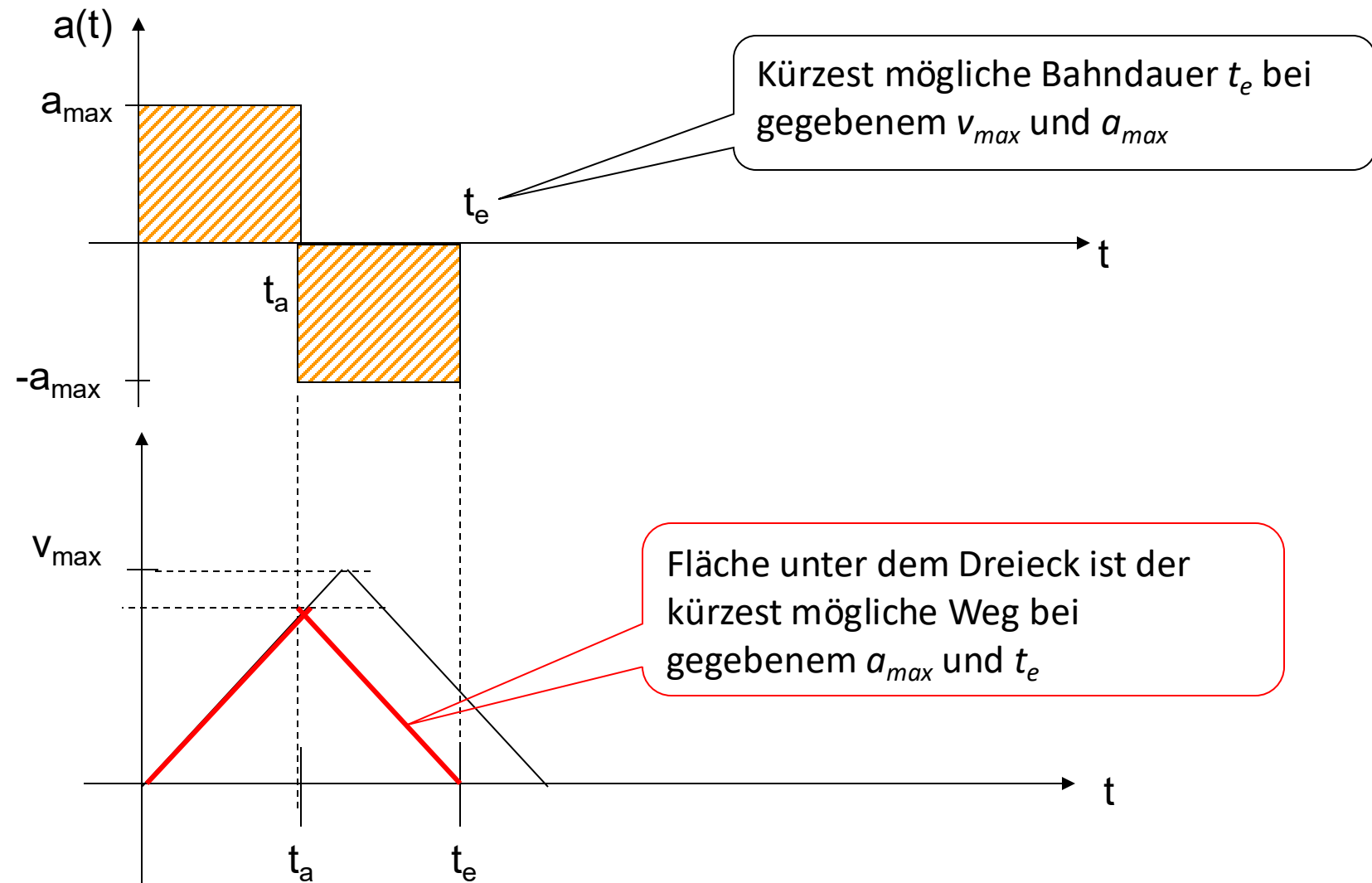
$$= v_{\max} \cdot t_v - \frac{1}{2} \frac{v_{\max}^2}{a_{\max}} - \frac{1}{2} a_{\max} \cdot t^2 + \frac{1}{2} a_{\max} \cdot t_v^2$$

Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP)

- Sonderfall: der Benutzer gibt eine Geschwindigkeit v_{\max} vor, die bei gegebener Bahnlänge und Beschleunigung gar nicht erreicht werden kann



Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP)



Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP)

- In diesem Fall muss die vom Benutzer gewählte *Geschwindigkeit* v_{\max} von der Steuerung reduziert werden
- Für die maximal erreichbare Geschwindigkeit bei gegebenem Weg und gegebener Beschleunigung gilt:

$$\begin{aligned} |q(t_e) - q(0)| &= v_{\max} \cdot t_a = v_{\max} \cdot \frac{v_{\max}}{a_{\max}} = \frac{v_{\max}^2}{a_{\max}} \\ \Rightarrow v_{\max} &= \sqrt{a_{\max} \cdot |q(t_e) - q(0)|} \end{aligned}$$

Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP)

Falls also gilt:

$$v_{\max} > \sqrt{a_{\max} \cdot |q(t_e) - q(0)|}$$

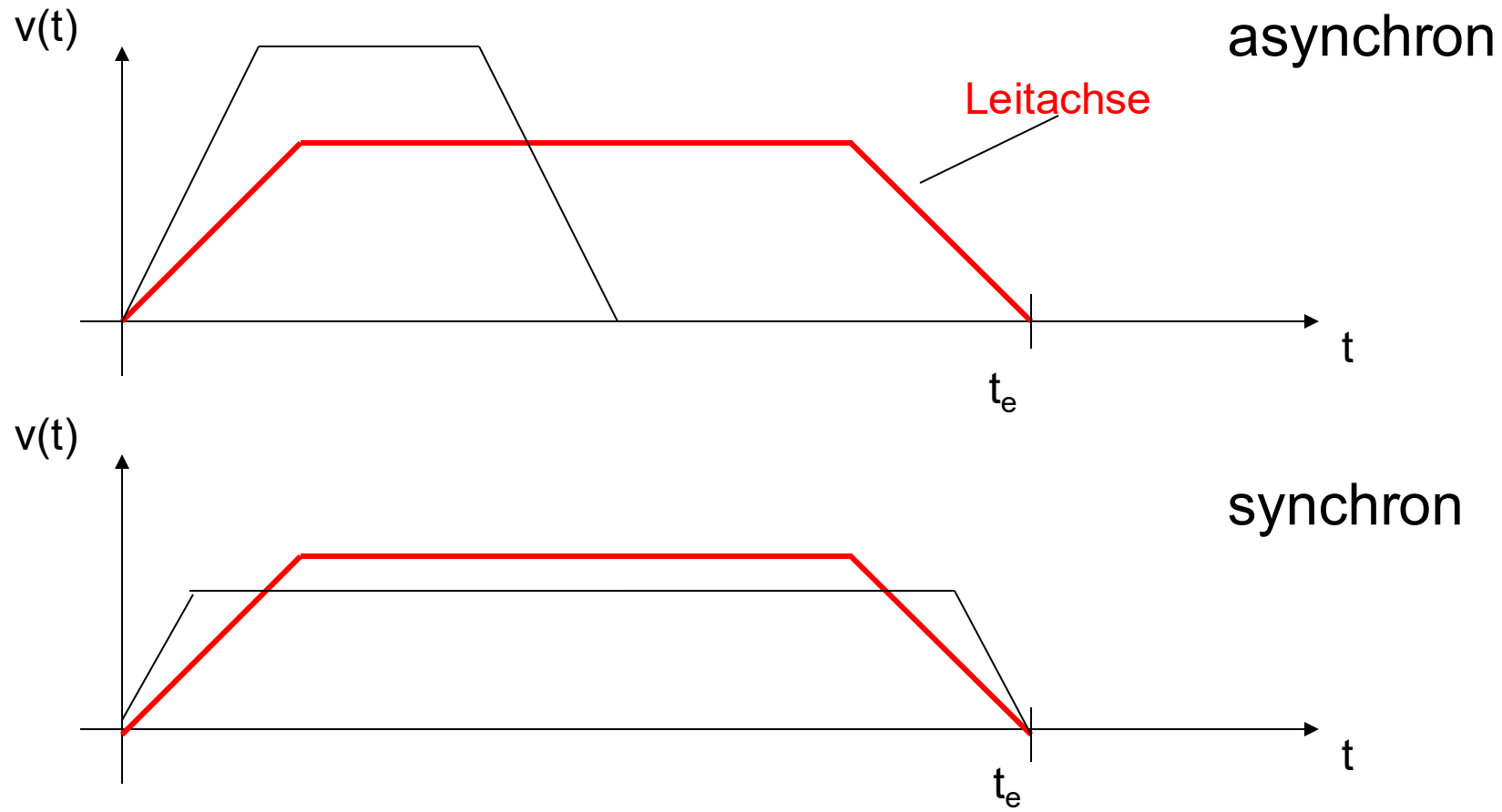
so wird v_{\max} ersetzt durch:

$$v_{\max} = \sqrt{a_{\max} \cdot |q(t_e) - q(0)|}$$

Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP)

- **Asynchrones PTP:** jede Achse fährt unabhängig von den anderen Achsen zu ihrer Zielstellung -> die Achsen kommen i.d.R. **nicht gleichzeitig** zum Stillstand
- **Synchrones PTP:** die Geschwindigkeiten aller Achsen orientieren sich so an der **Leitachse** (Achse mit der längsten Bahndauer), dass alle Achsen in der Zielstellung **gleichzeitig** zum Stillstand kommen; die Bahndauer wird dadurch im Vergleich zur asynchronen PTP nicht erhöht, aber die mechanische Beanspruchung vermindert

Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP) synchron



Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP) synchron

- Bei der **synchronen** PTP-Bewegung wird dasjenige Leitgelenk ermittelt, das die längste Verfahrdauer t_e aufweist.
- Für alle anderen Gelenke i wird die Fahrdauer auf t_e erhöht und dazu ihre Geschwindigkeit $v_{\max,i}$ entsprechend reduziert:

$$t_e = \frac{|q_i(t_e) - q_i(0)|}{v_{\max,i}} + \frac{v_{\max,i}}{a_{\max,i}} \quad (\text{vgl. Folie 25})$$

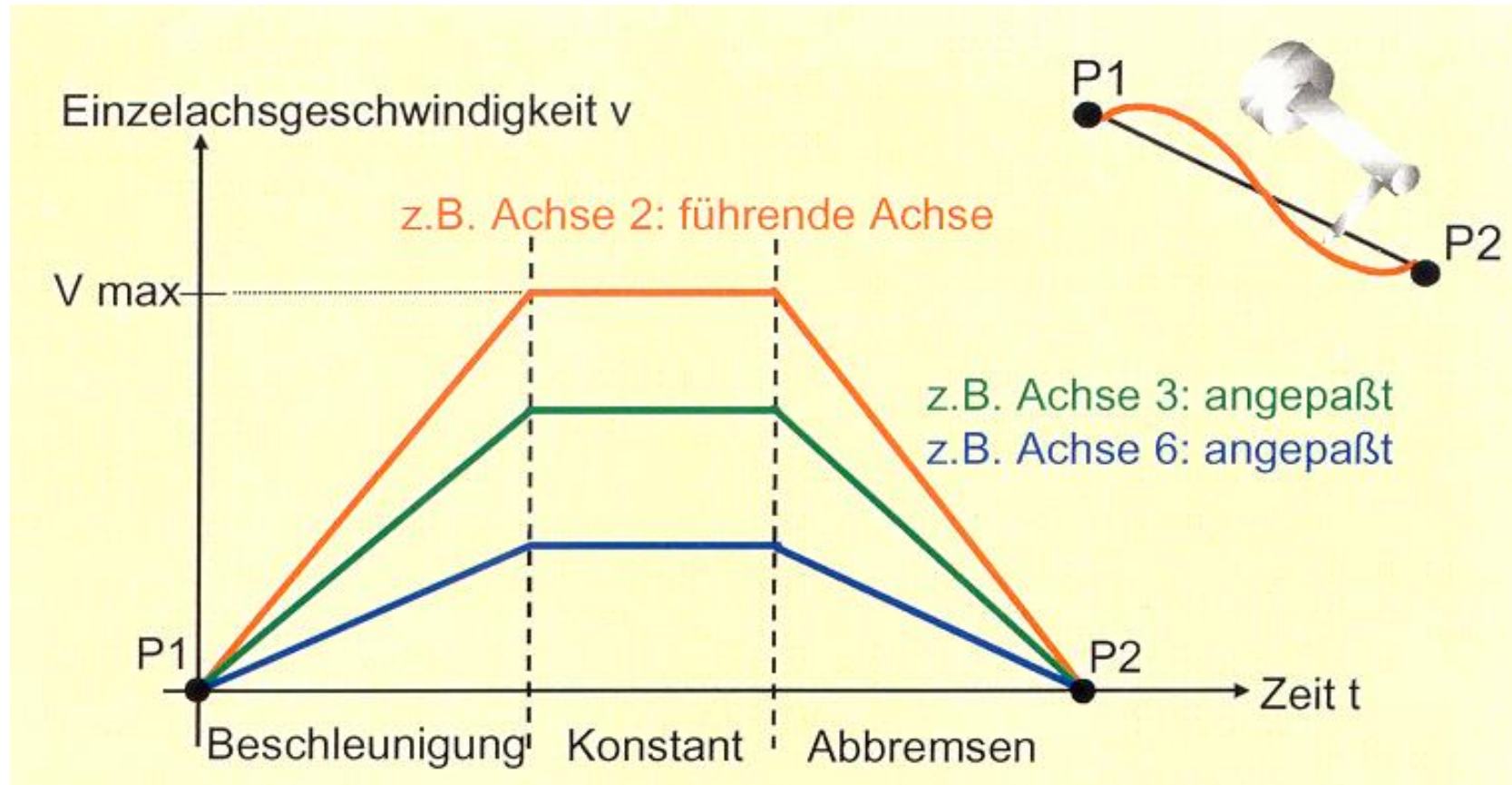
$$\Rightarrow v_{\max,i}^2 - t_e \cdot a_{\max,i} \cdot v_{\max,i} + (|q_i(t_e) - q_i(0)|) \cdot a_{\max,i} = 0$$

Quadratische Gleichung für $v_{\max,i}$

Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP) vollsynchron

- Bei der **vollsynchronen** PTP sind nicht nur die Verfahrdauern t_e für alle Gelenke gleich, sondern auch die Beschleunigungs-dauer t_a und die Bremsdauer
- t_a , t_v und t_e sind für alle Gelenke i gleich
- Entsprechend müssen die Geschwindigkeiten v_i und die Beschleunigungen a_i aller Achsen an die Leitachse angepasst werden

Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP) vollsynchron



Punkt-zu-Punkt-Bewegungen (PTP) vollsynchron

- Es gilt:

$$|q_i(t_e) - q_i(0)| = 2 \cdot \int_0^{t_a} a_i t dt + \int_{t_a}^{t_v} v_i dt = 2 \cdot \frac{1}{2} a_i t_a^2 + v_i t_v - v_i t_a$$

$$= v_i t_a + v_i t_v - v_i t_a = v_i t_v$$

$$\Rightarrow v_i = \frac{|q_i(t_e) - q_i(0)|}{t_v} \quad \text{vgl. auch Folie 25}$$

$$\Rightarrow a_i = \frac{v_i}{t_a}$$

Beachte: Benutzer kann achsspezifische Geschwindigkeiten und Beschleunigungen nicht mehr selbst wählen

Steuerungsarten

- Punktsteuerung (Point-to-Point, PTP)
- Bahnsteuerung (Continuous Path, CP)
 - Linearbahn (LIN)
 - Zirkularbahn (CIRC)

Bahnsteuerung

- Definierte Bewegung im kartesischen Raum
- Im Gegensatz zur Punktsteuerung sind große Änderungen der Gelenkkoordinaten möglich -> stärkere Beanspruchung der Mechanik
- Auch bei gültigen Start- und Zielstellungen können die Zwischenwerte außerhalb des Arbeitsbereichs des Roboters liegen

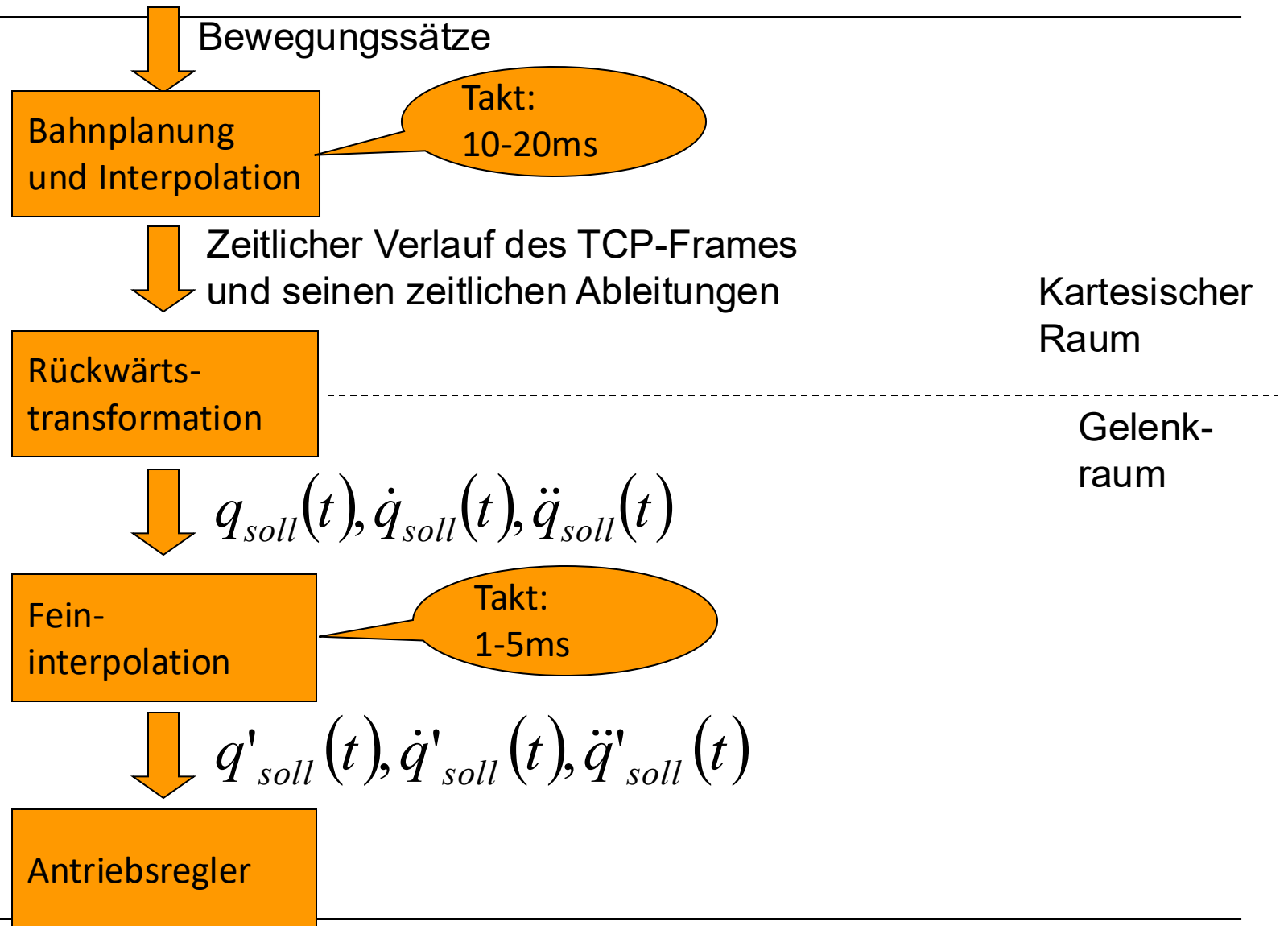
Bahnsteuerung

- Falls möglich, sollten PTP-Bewegungen eingesetzt werden
- Für Bahnapplikationen, wie Schweißen, Laserschneiden, Kleben und Lackieren sind jedoch Bahnbewegungen erforderlich

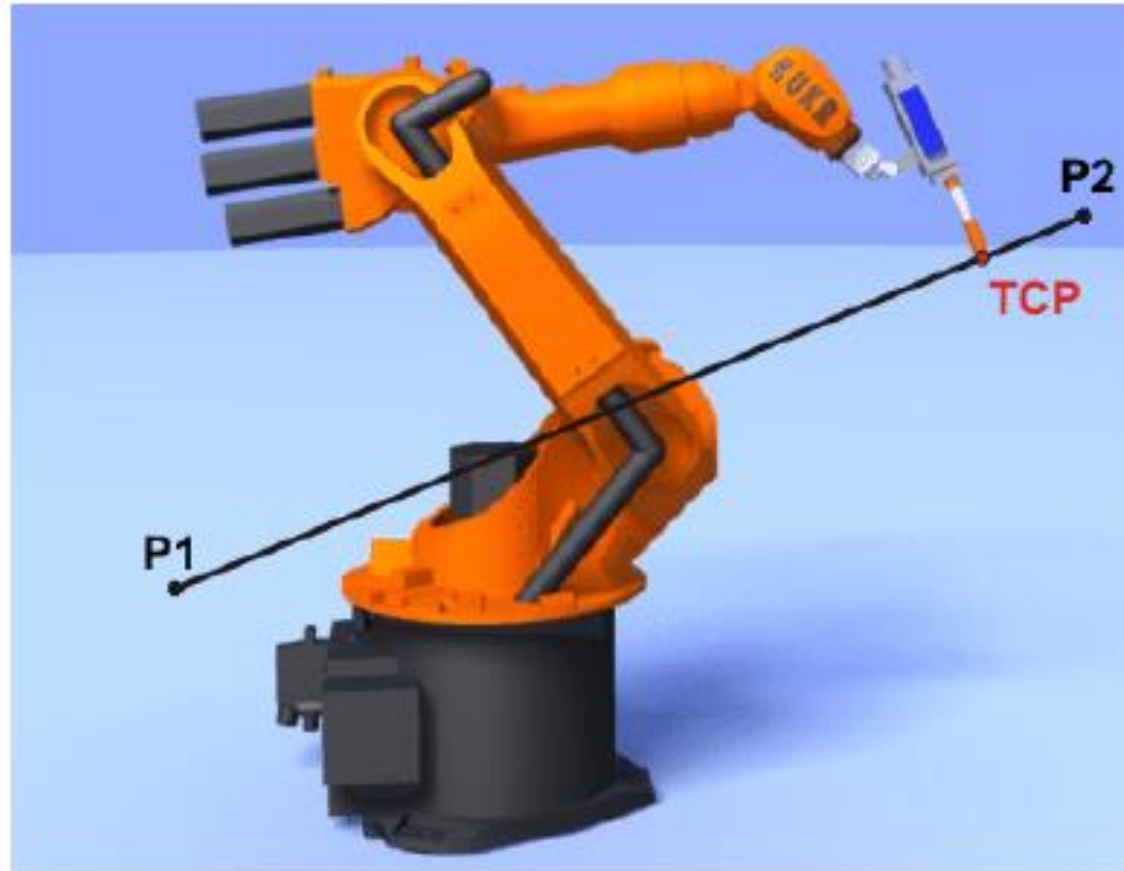
Vergleich Interpolation im Gelenkraum (PTP) vs. Bahninterpolation im kartesischen Raum

	kartesisch	Gelenk
Näher an der Aufgabe	+	-
Einfachheit gerade Bahn	+	-
Näher an der Steuerung	-	+
Keine Mehrdeutigkeit	-	+
Keine inverse Kinematik	-	+
Einfachere Interpolation	+	-
Berücksichtig. v. Grenzen	-	+

Ablauf in der Steuerung



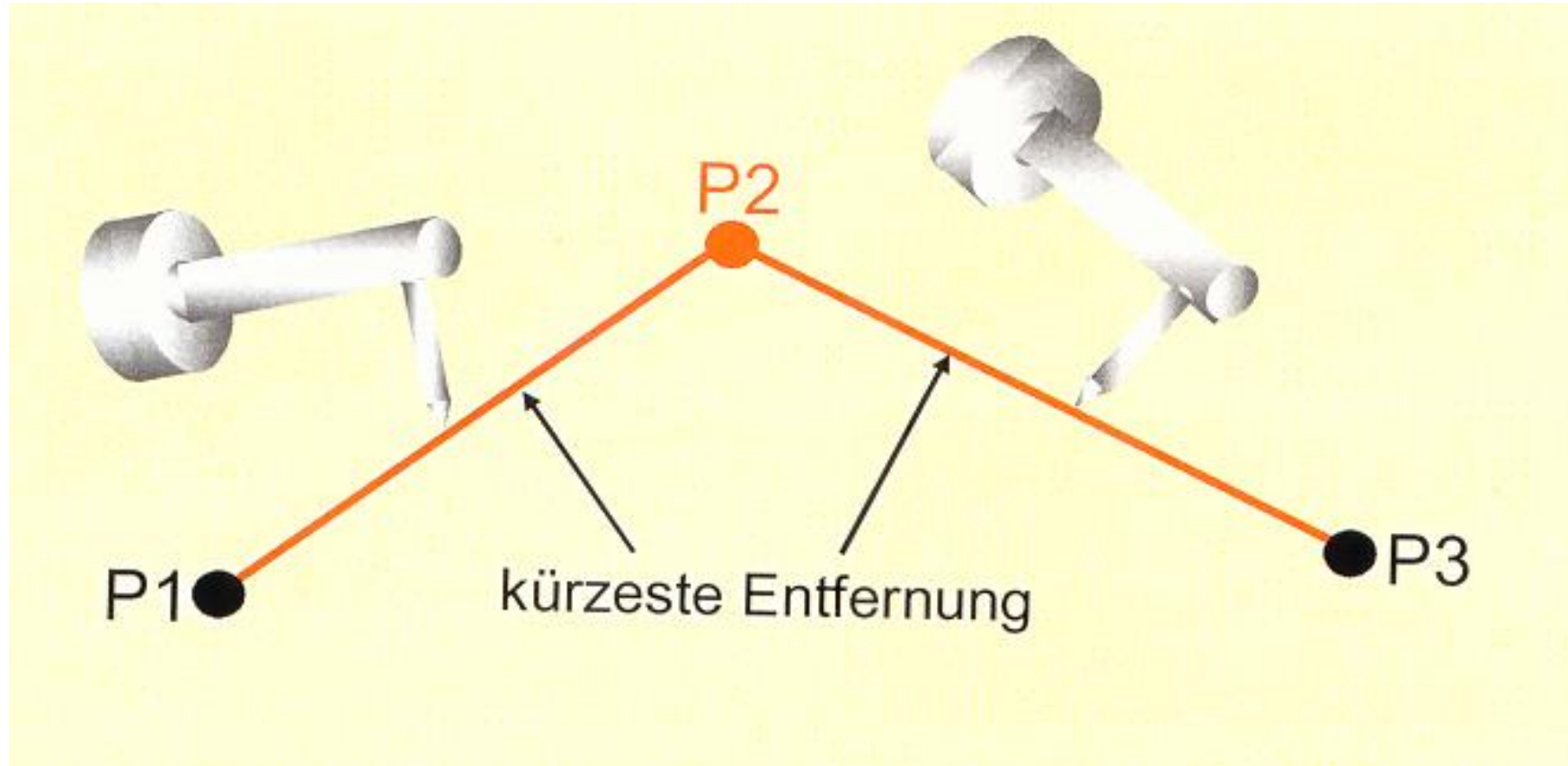
Lineare Bewegungen (LIN)



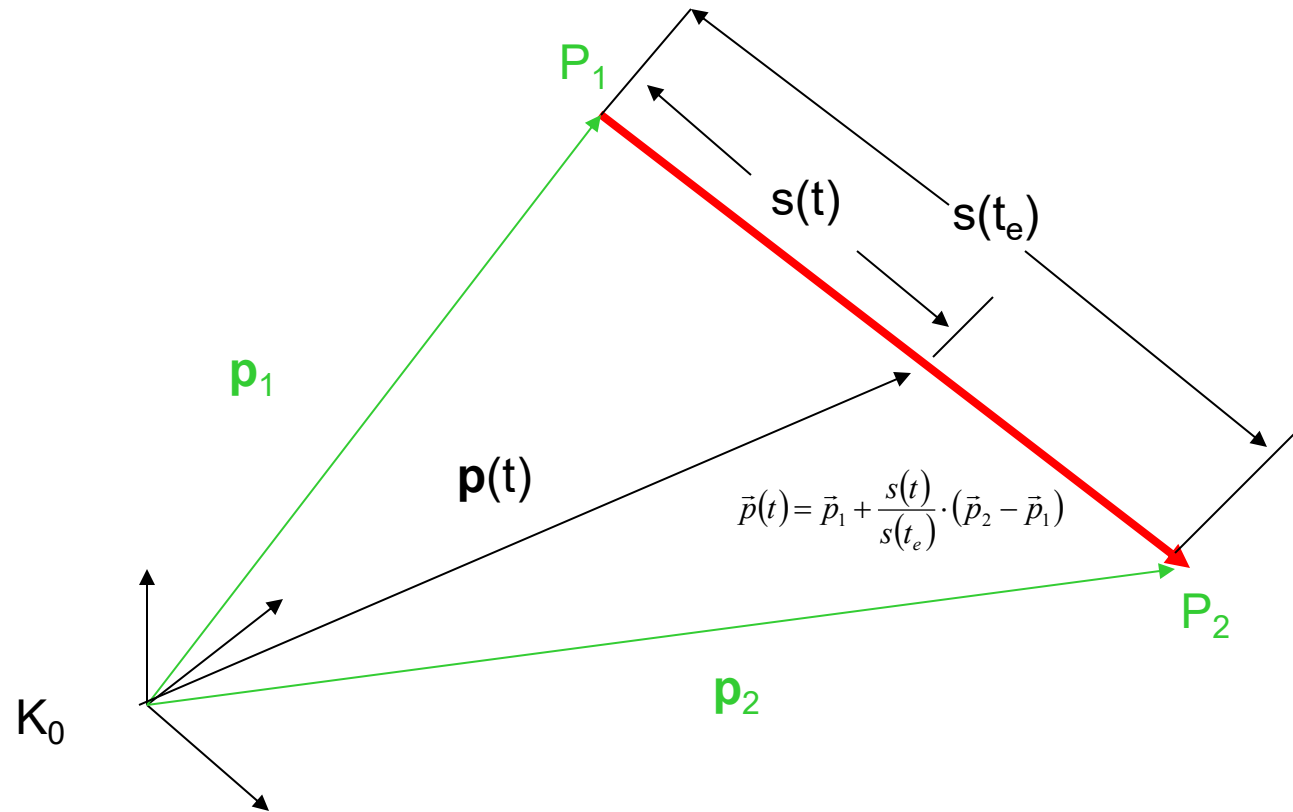
Lineare Bewegungen (LIN)

- Bei einer linearen Bewegung werden die Roboterachsen so aufeinander abgestimmt, dass der Werkzeug- bzw. Werkstück-Bezugspunkt entlang einer Geraden zum Zielpunkt bewegt wird.
- Lineare Bewegungen werden verwendet, wenn eine genaue Bahnführung mit vorgegebener Geschwindigkeit zum Anfahren eines Punktes erforderlich ist.

Lineare Bewegungen (LIN)



Lineare Bewegungen (LIN)



Lineare Bewegungen (LIN)

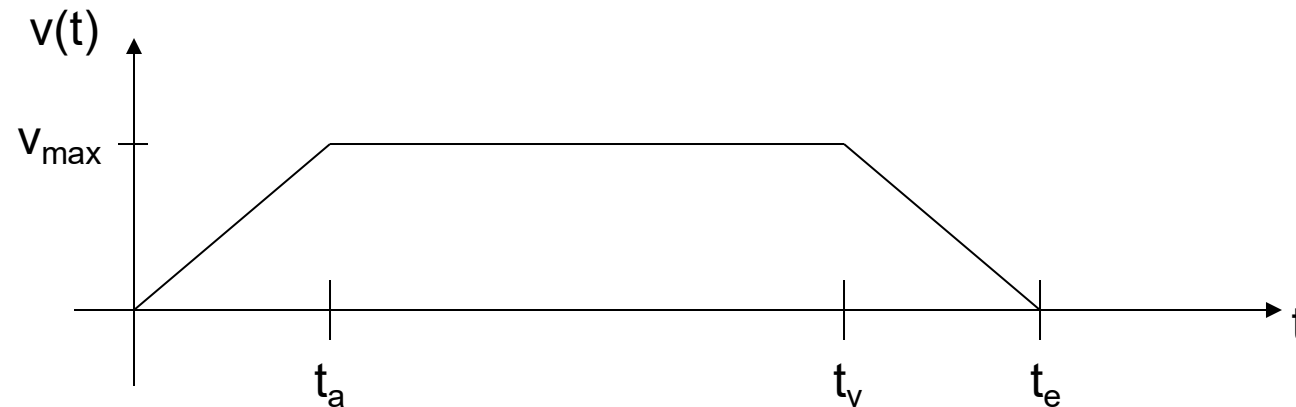
- Anfangs- und Endgeschwindigkeit ist 0:

$$s(0) = 0 \qquad s(t_e) = |\vec{p}_2 - \vec{p}_1|$$

$$\dot{s}(0) = v(0) = 0$$

$$\dot{s}(t_e) = v(t_e) = 0$$

- $s(t)$ ergibt sich aus dem Rampenprofil von $v(t)$:



- Analoge Vorgehensweise für die Orientierung des TCP:

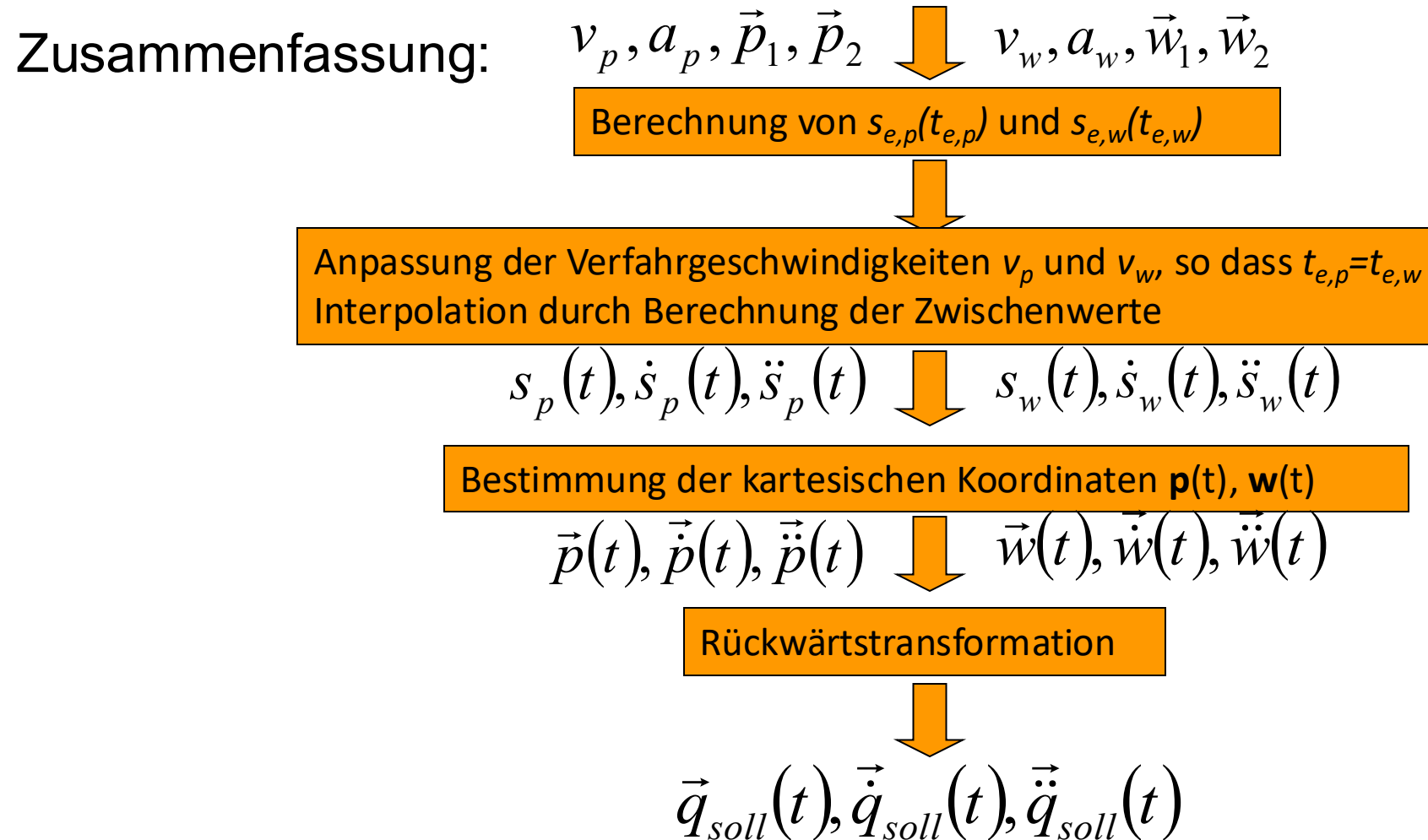
$$\vec{w}(t) = \begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \\ C(t) \end{pmatrix} = \vec{w}_1 + \frac{s(t)}{s(t_e)} (\vec{w}_2 - \vec{w}_1)$$

A(t), B(t), C(t): zeitlicher Verlauf der Euler-Winkel

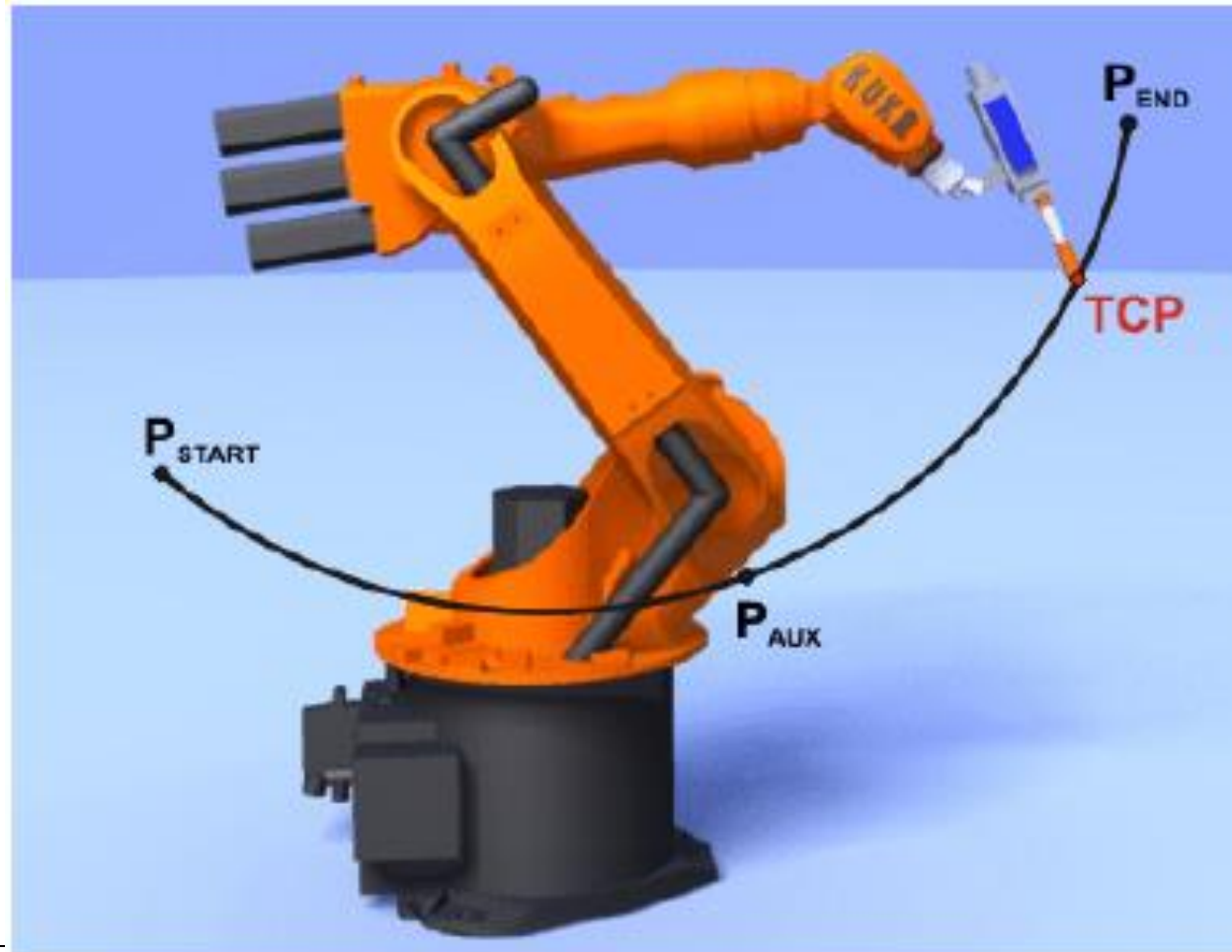
Lineare Bewegungen (LIN)

- Die Verfahrszeiten für Position $t_{e,p}$ und Winkel $t_{e,w}$ sind im allgemeinen nicht identisch
- Korrektur: Bestimme das Maximum der Verfahrszeiten $t_{e,p}$ und $t_{e,w}$
- Passe entsprechend die Geschwindigkeit der Positionsänderung oder der Orientierungsänderung an

Lineare Bewegungen (LIN)



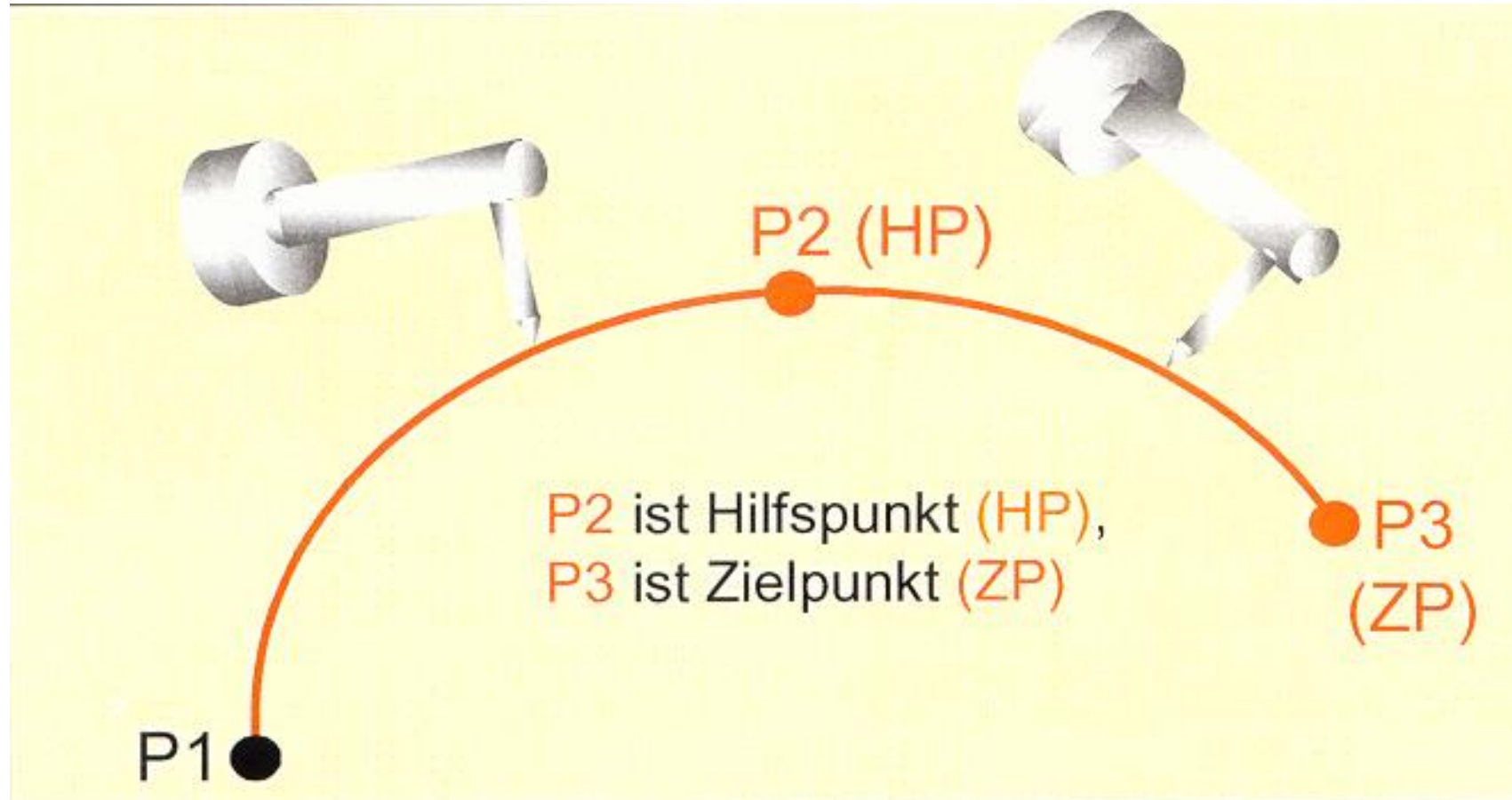
Zirkulare Bewegungen (CIRC)



Zirkulare Bewegungen (CIRC)

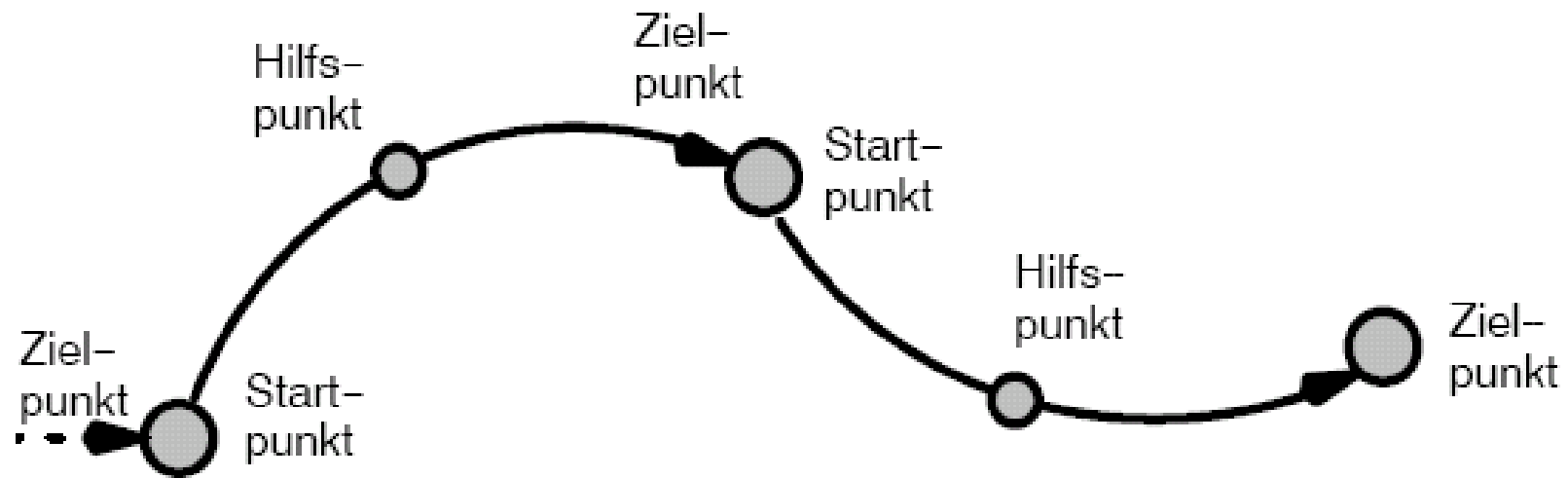
- Hier bewegt sich der Bezugspunkt des Werkzeuges, bzw. Werkstückes auf einem Kreisbogen zum Zielpunkt. Die Bahn wird durch Start-, Hilfs- und Endpunkt beschrieben. Als Startpunkt gilt dabei der Zielpunkt des vorangegangenen Bewegungsbefehles. Die Orientierung ändert sich gleichmäßig über den gesamten Weg.
- CIRC Bewegungen werden verwendet, wenn Bearbeitungsvorgänge mit vorgegebener Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn erfolgen sollen.
- Start-, Hilfs- und Endpunkt liegen auf einer Ebene im Raum. Damit die Steuerung diese Ebene möglichst genau bestimmen kann, sollten diese drei Punkte möglichst weit auseinander liegen. Nur der Bezugspunkt folgt der programmierten Bahn. Das Werkzeug selbst kann seine Orientierung während der Bewegung ändern.

Zirkulare Bewegungen (CIRC)



Zirkulare Bewegungen (CIRC)

- CIRC-Bewegung mit Genauhalt
- Bei CIRC-Bewegungen mit Genauhalt wird der Zielpunkt exakt angefahren.



Funktioneller Ablauf der Bewegungssteuerung (1)

Interpreter: Erkennen eines Bewegungsbefehles mit Interpolationsart und Raumpunkten
PTP P_A , LIN P_E , CIRC P_E, P_A

Interpolationsvorbereitung:

- Koordinatentransformation
- Bahnlängenberechnung (Lin. Ipo)
- Radiusberechnung (Kreis Ipo)
- Gesamtkreiswinkel
- Look Ahead

Interpolation:

- Berechnung im Takt T
- Bahnbeschleunigung a_n
- Bahngeschwindigkeit v_n
- Bahnlänge s_n , Bahnvorschub Δs_n
- Abbildung von s_n auf:
 - Gerade
 - Kreis
 - Spline

$x_i, y_i, z_i, \psi_i, \varphi_i, \vartheta_i$

$$P_A = [x_A, y_A, z_A, \psi_A, \varphi_A, \vartheta_A]^T$$

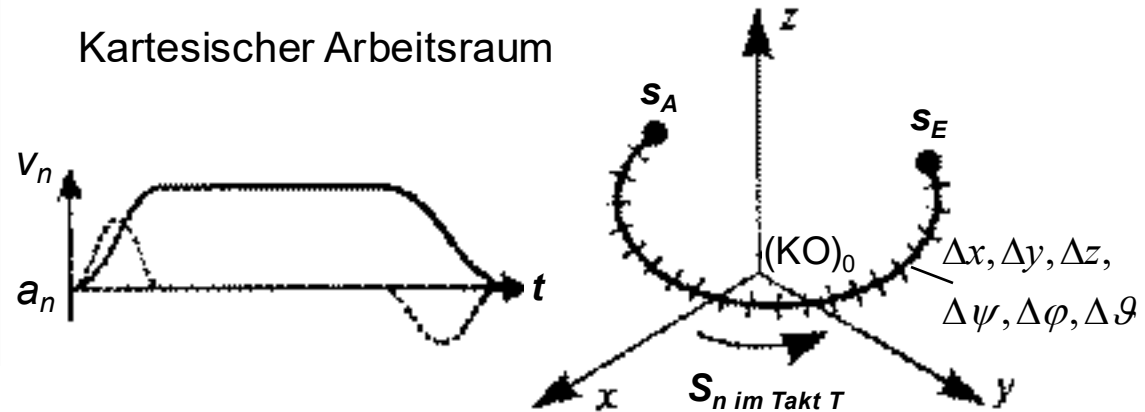
$$P_E = [x_E, y_E, z_E, \psi_E, \varphi_E, \vartheta_E]^T$$

$$s = \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2 + (z_E - z_A)^2}$$

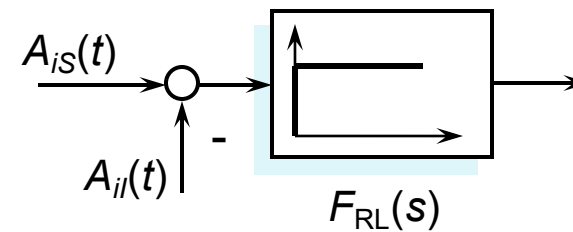
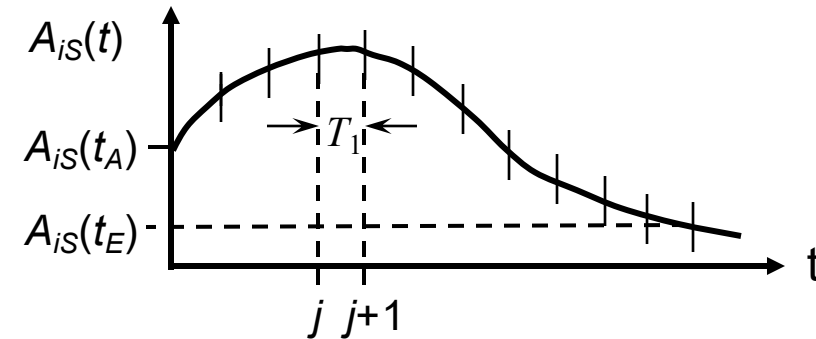
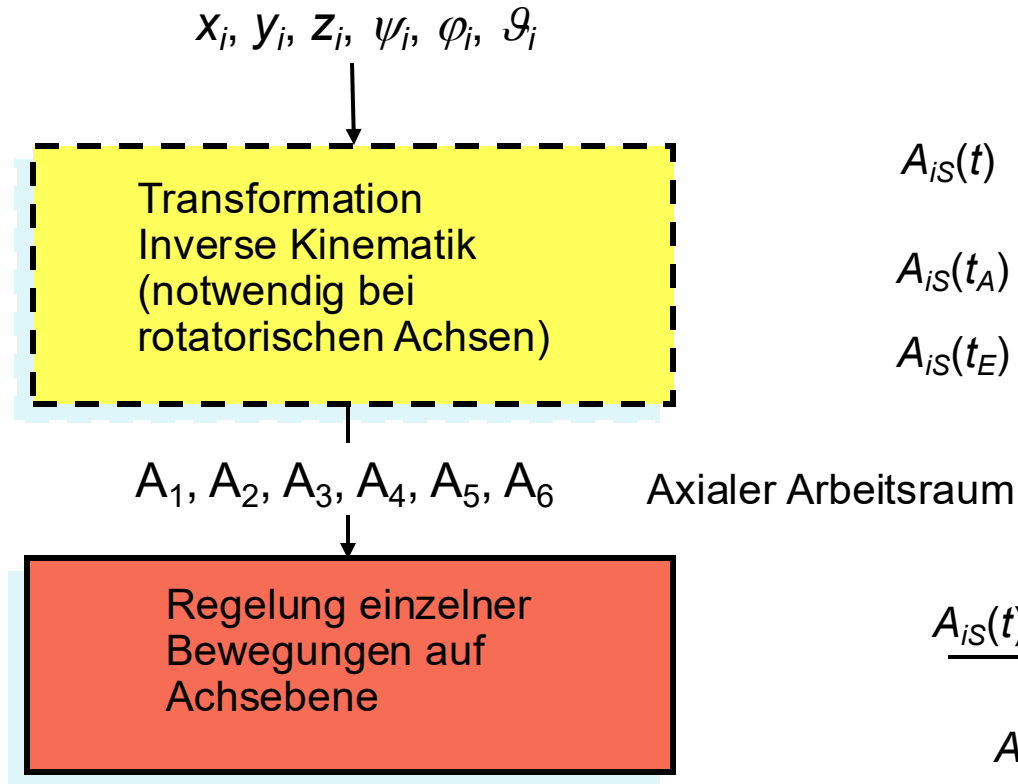
$$r = \sqrt{x_{HA}^2 + y_{HA}^2}, \quad S = 2\pi r$$

$$\vartheta_A = \arctan \frac{x_{HA}}{y_{HA}}, \quad \vartheta_E = \arctan \frac{x_{HE}}{y_{HE}}$$

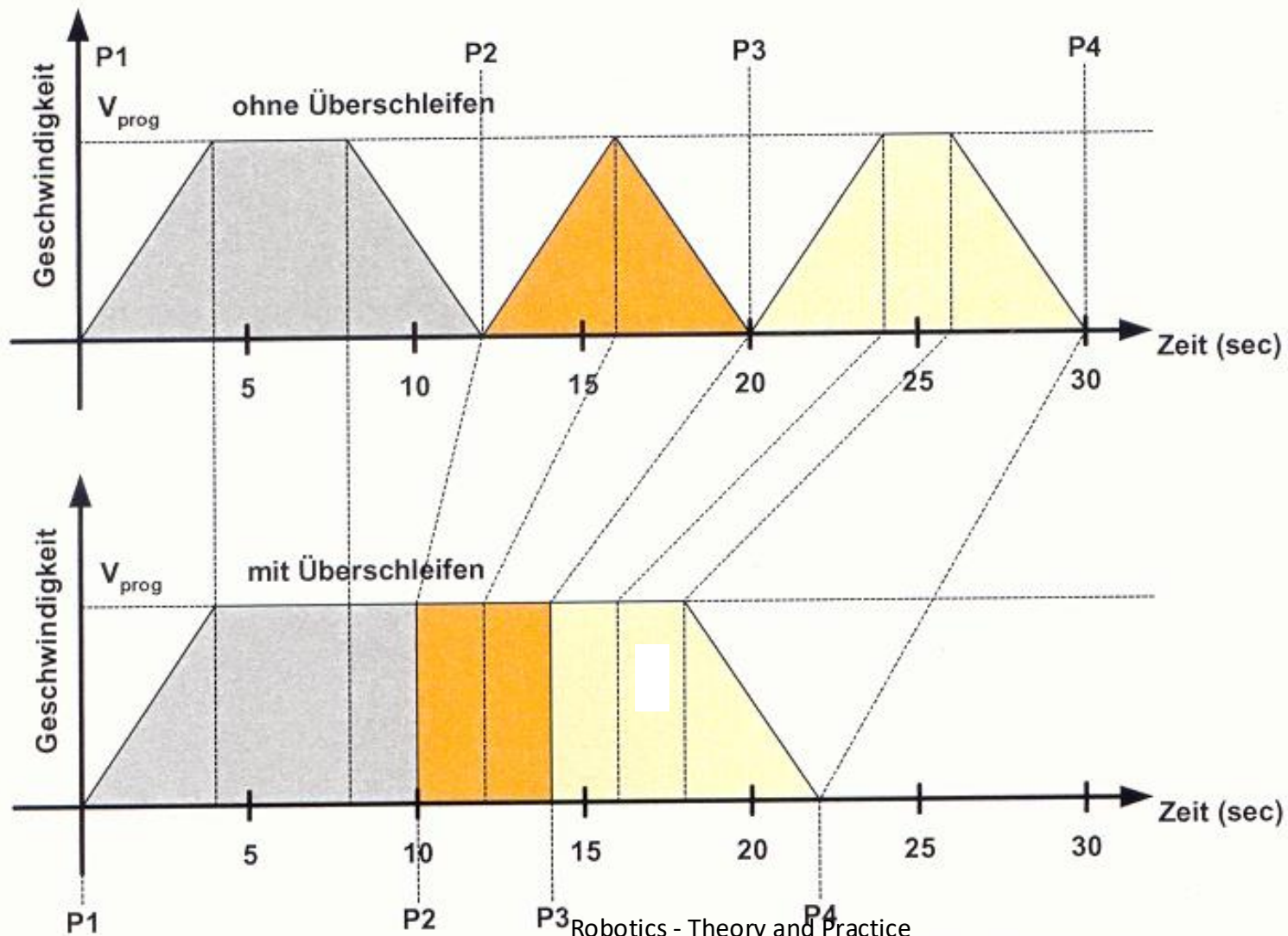
Kartesischer Arbeitsraum



Funktioneller Ablauf der Bewegungssteuerung (2)



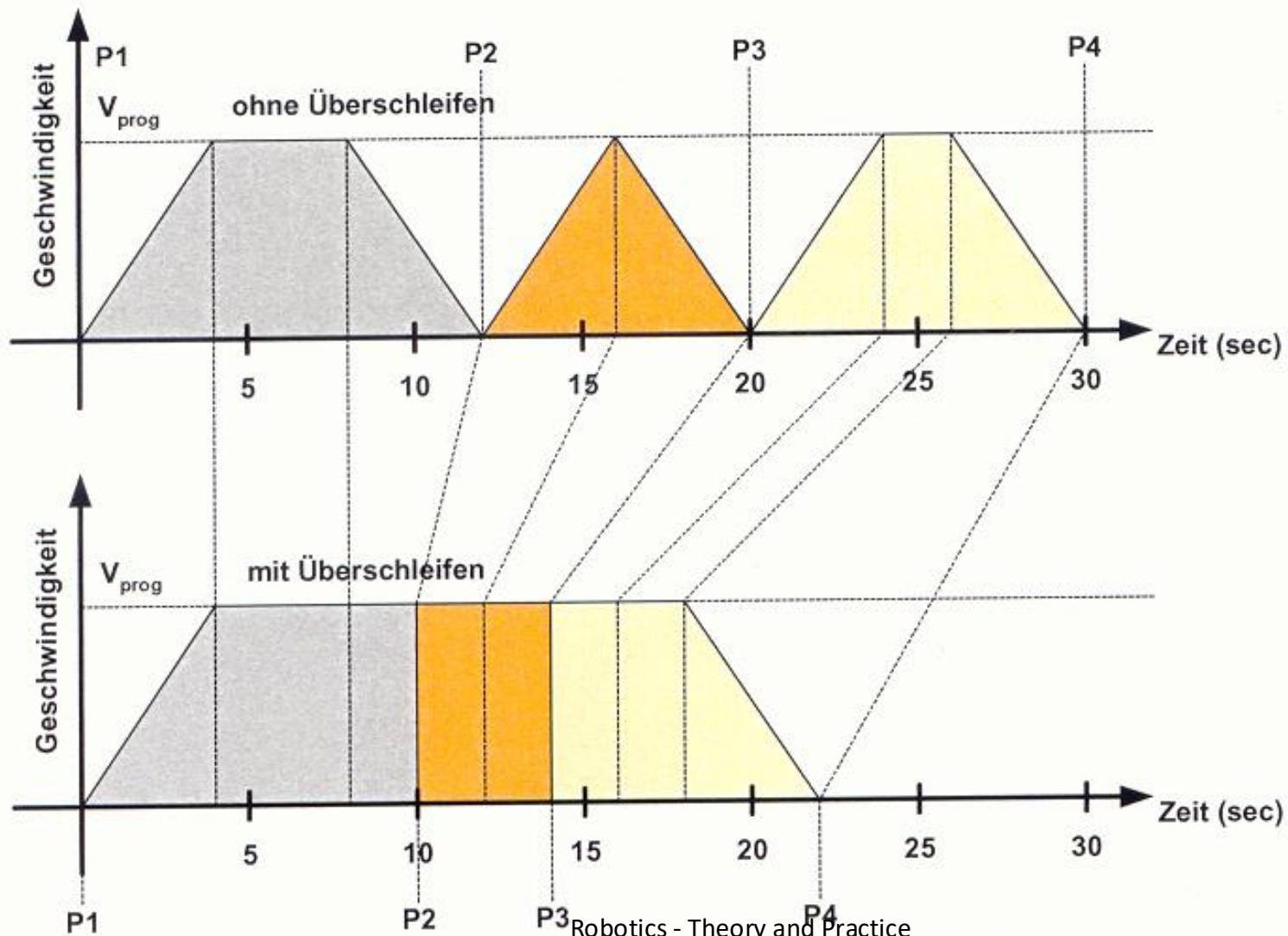
Überschleifen



Überschleifen

- Vermeiden von ruckartigen Bewegungen
- Zeitersparnis
- Überschleifen: nächstes Bahnsegment wird begonnen, sobald eine Mindestgeschwindigkeit (Geschwindigkeitsüberschleifen) oder eine Mindestentfernung (Positionsüberschleifen) unterschritten wird
- Zwischenstellungen werden nicht exakt angefahren

Überschleifen



Überschleifen

- Überschleifkriterien
 - Legen fest, wann mit dem Überschleifen begonnen wird
 - Distanzkriterium: Überschleifen beginnt, sobald eine vorgegebene Distanz zum Ziel unterschritten wird
 - Geschwindigkeitskriterium: Überschleifen beginnt, sobald in der Verzögerungsphase eine vorgegebene Mindestgeschwindigkeit unterschritten wird

Überschleifen

Distanzkriterium

Geschwindigkeitskriterium

LIN/CIRC-Überschleifen
(im kartesischen Raum)

$$\left| s(t_{\ddot{u}}) - s(t_e) \right| < \partial$$

$$\left| v(t_{\ddot{u}}) \right| < \partial$$

PTP-Überschleifen
(im Achsraum)

$$\left| q_L(t_{\ddot{u}}) - q_L(t_e) \right| < \partial$$

$$\left| \dot{q}_L(t_{\ddot{u}}) \right| < \partial$$

$t_{\ddot{u}}$: Überschleifzeitpunkt
L: Leitachse

Überschleifen

Distanzkriterium

Geschwindigkeitskriterium

LIN/CIRC-Überschleifen
(im kartesischen Raum)

$$\left| s(t_{\ddot{u}}) - s(t_e) \right| < \partial$$

$$\left| v(t_{\ddot{u}}) \right| < \partial$$

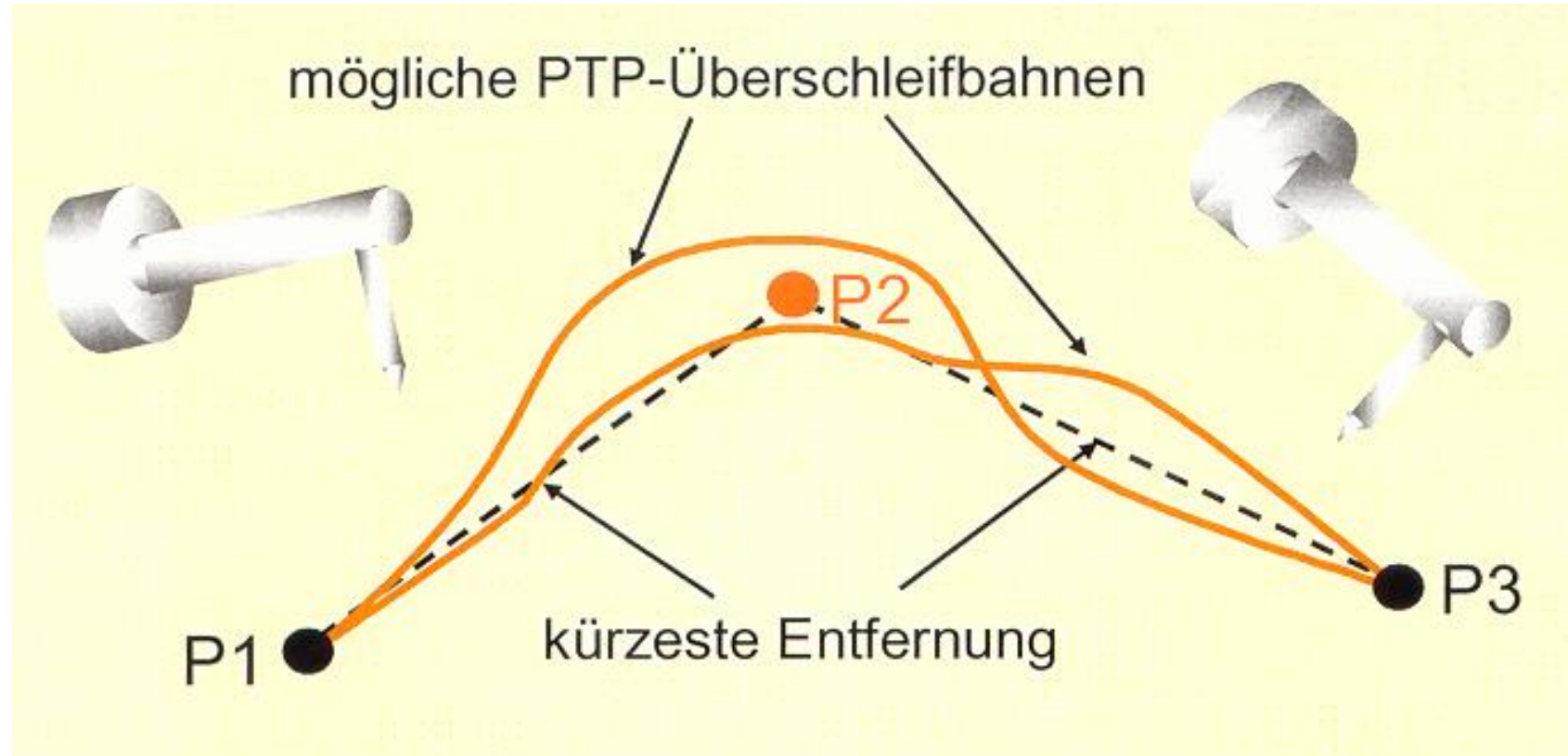
PTP-Überschleifen
(im Achsraum)

$$\left| q_L(t_{\ddot{u}}) - q_L(t_e) \right| < \partial$$

$$\left| \dot{q}_L(t_{\ddot{u}}) \right| < \partial$$

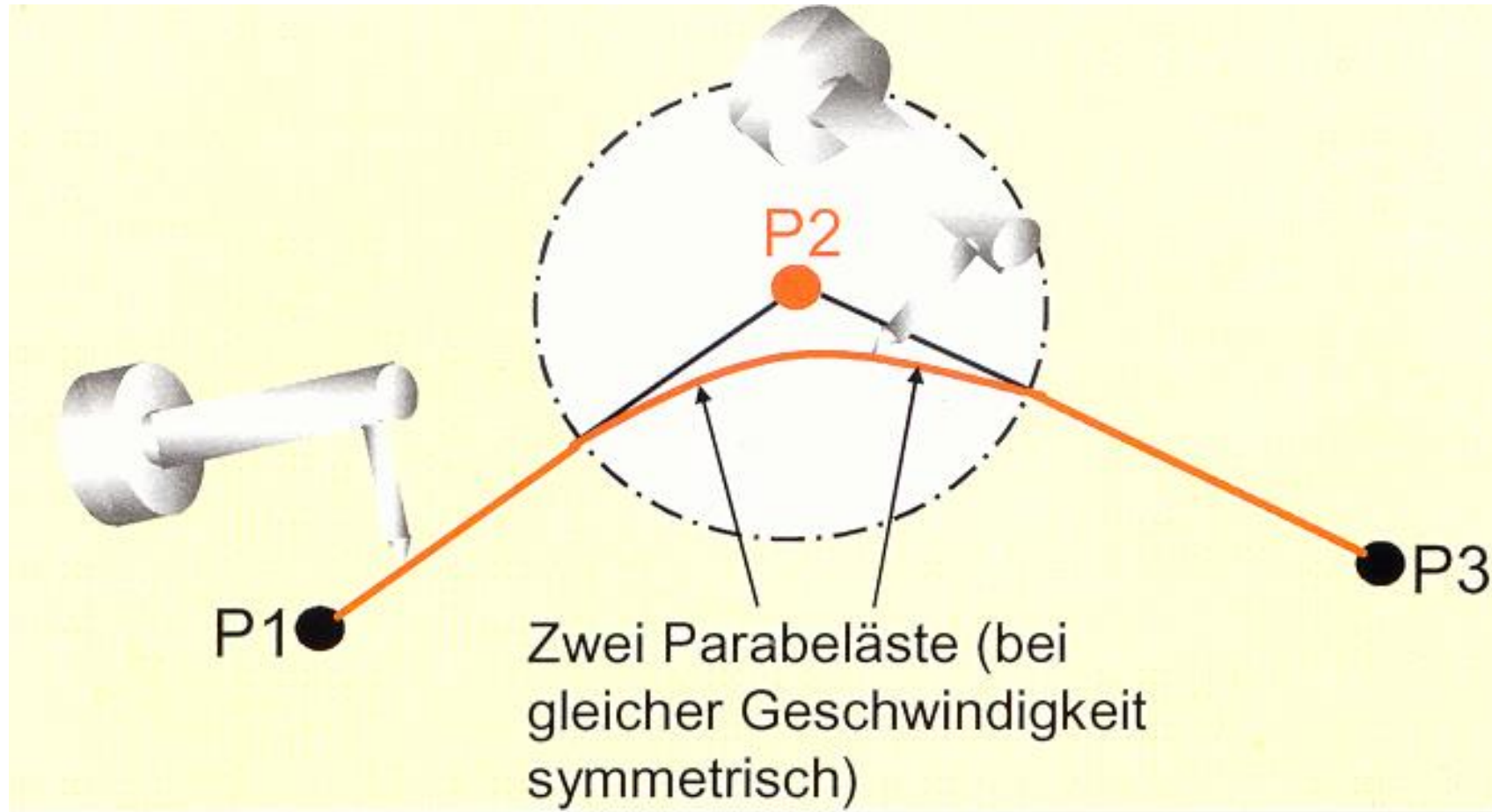
$t_{\ddot{u}}$: Überschleifzeitpunkt
L: Leitachse

PTP-Überschleifen



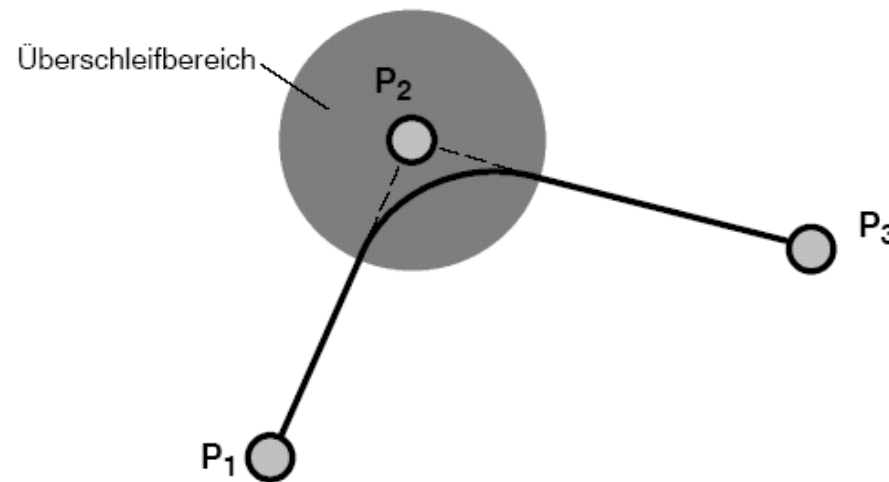
- Überschleifen bezieht sich auf die Leitachse L
- Geschwindigkeitsüberschleifen beginnt, sobald die Geschwindigkeit der Leitachse $|\dot{q}_L|$ einen vordefinierten Wert unterschreitet
- Positionsüberschleifen setzt ein, sobald der Abstand der Leitachse zu einer Zwischenposition einen vordefinierten Wert unterschreitet

LIN-Überschleifen

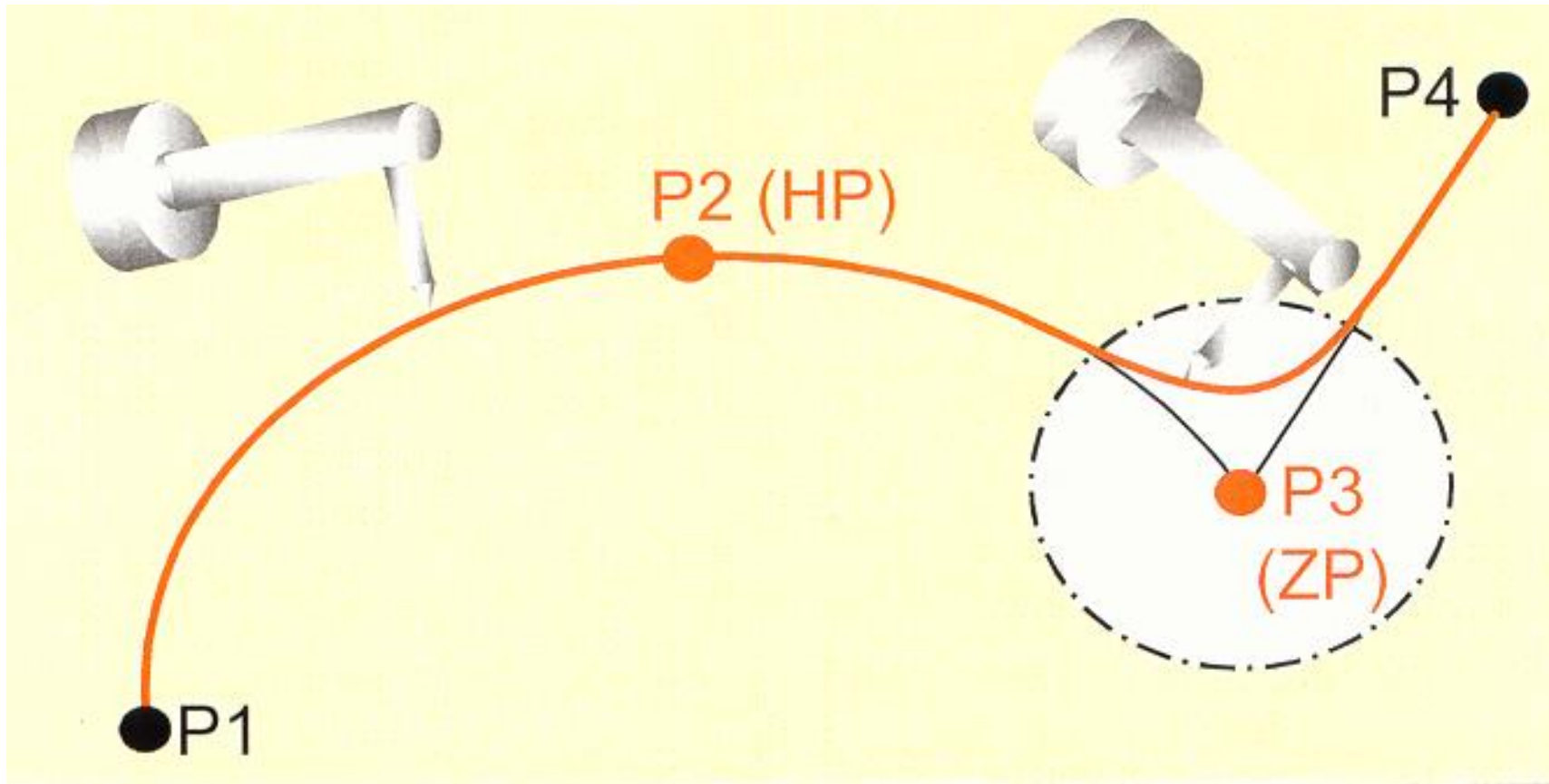


LIN-Überschleifen

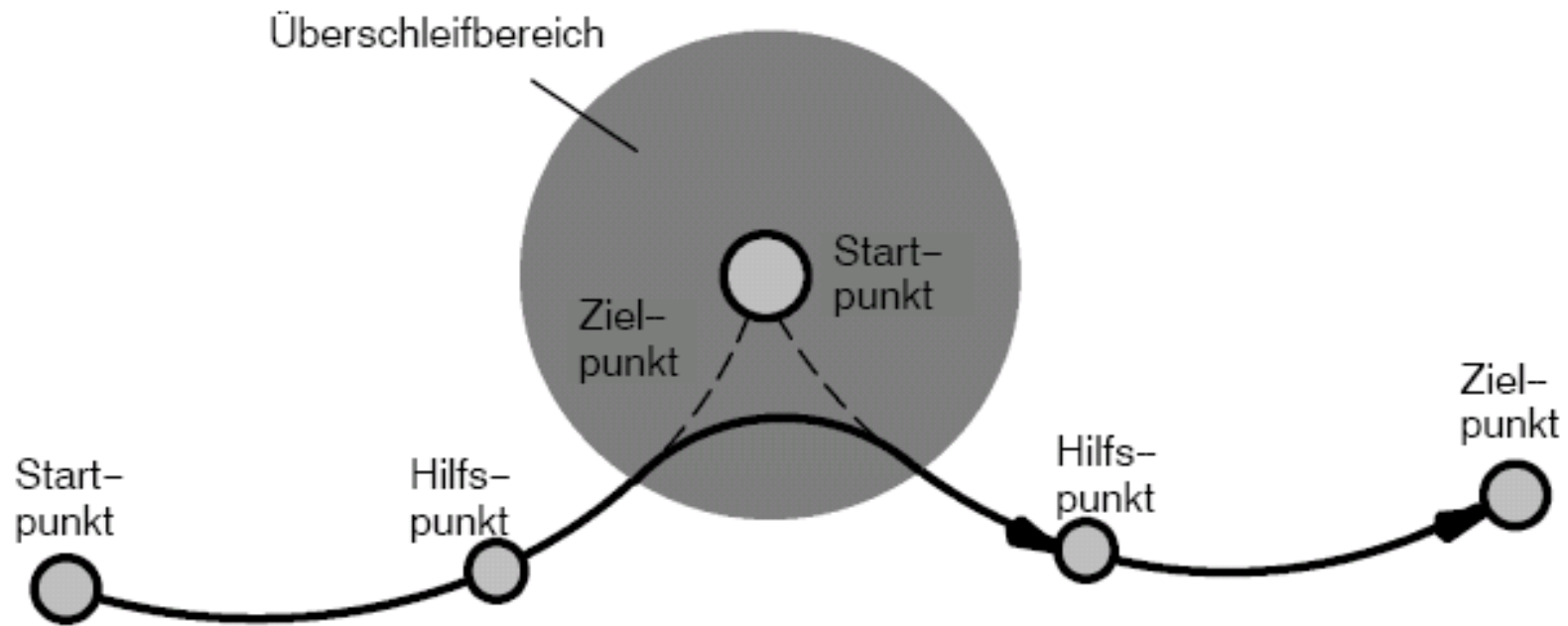
- Geschwindigkeitsüberschleifen setzt ein, sobald die Bahn-geschwindigkeit $v(t)$ unter einen vordefinierten Wert sinkt
- Positionsüberschleifen beginnt, sobald der Abstand des TCP zu einer Zwischenstellung einen vordefinierten Mindestabstand unterschreitet



CIRC-Überschleifen



- Analog LIN-Überschleifen



- Vorteile wie beim Überschleifen
- Im Gegensatz zum Überschleifen werden jedoch die Zwischenpunkte exakt und mit definierter Geschwindigkeit durchfahren
- Im einfachsten Fall werden kubische Splines angesetzt (Polynome dritter Ordnung)