

Hochschule Karlsruhe – Technik und Wirtschaft
„Robotics“

Björn Hein
Christian Wurll

Bjoern.Hein@hs-karlsruhe.de



1



Robotics
Prof. Dr.-Ing. Björn Hein, Prof. Dr.-Ing. Christian Wurll

Zusammenfassung

- Koordinatensysteme (Welt-, Roboter-, Werkzeug-, Basis-Koordinatensystem)
- Achsen eines Knickarmroboters
- Tool-Center-Point (TCP)
- Basis-/Greiferbezug
- Freiheitsgrade / Bewegungsfreiheitsgrade
- Vektoren
- Rotationsmatrizen
- Homogene Transformationsmatrizen (Frames)
- Konventionen für Verkettung von Rotationen:
 - Euler-Winkel (ZYX)
 - Roll-Pitch-Yaw (RPY)



3. Kinematik (1)

Version: 0.1

Vortragender: Prof. Dr.-Ing. Björn Hein

Credits: Prof. Dr.-Ing. Michael Haag für die Bereitstellung der Folien, auf denen diese Vorlesung aufbaut



Kinematik

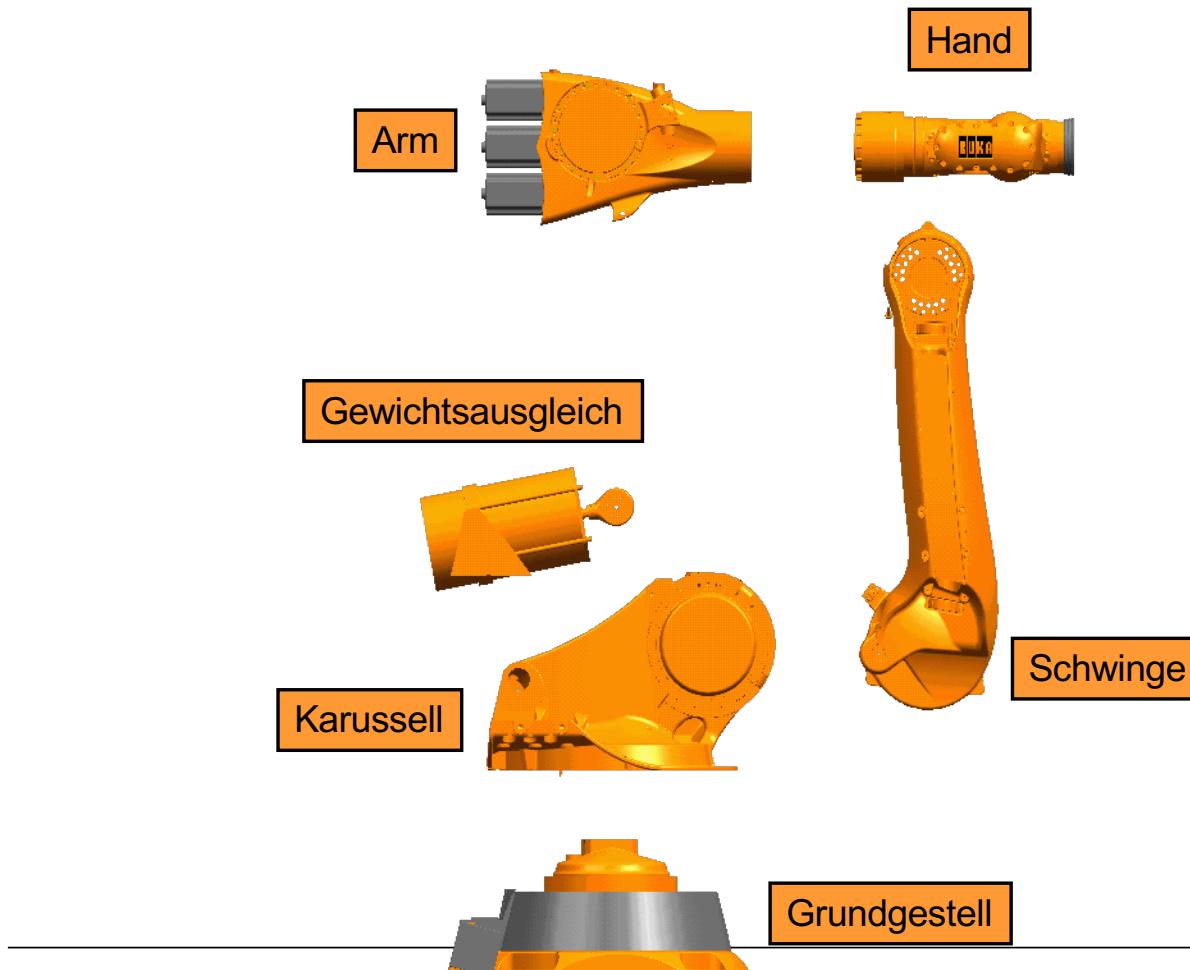
- Die **Kinematik** (kinema, griech., Bewegung) ist die Lehre von der mathematischen Beschreibung der Bewegung von Punkten und Körpern, ohne Berücksichtigung der Ursachen einer Bewegung.
- Eine **Kinematische Kette** ist ein System aus starren Körpern, die durch Gelenke verbunden sind, die Freiheitsgrade haben.



Roboteraufbau



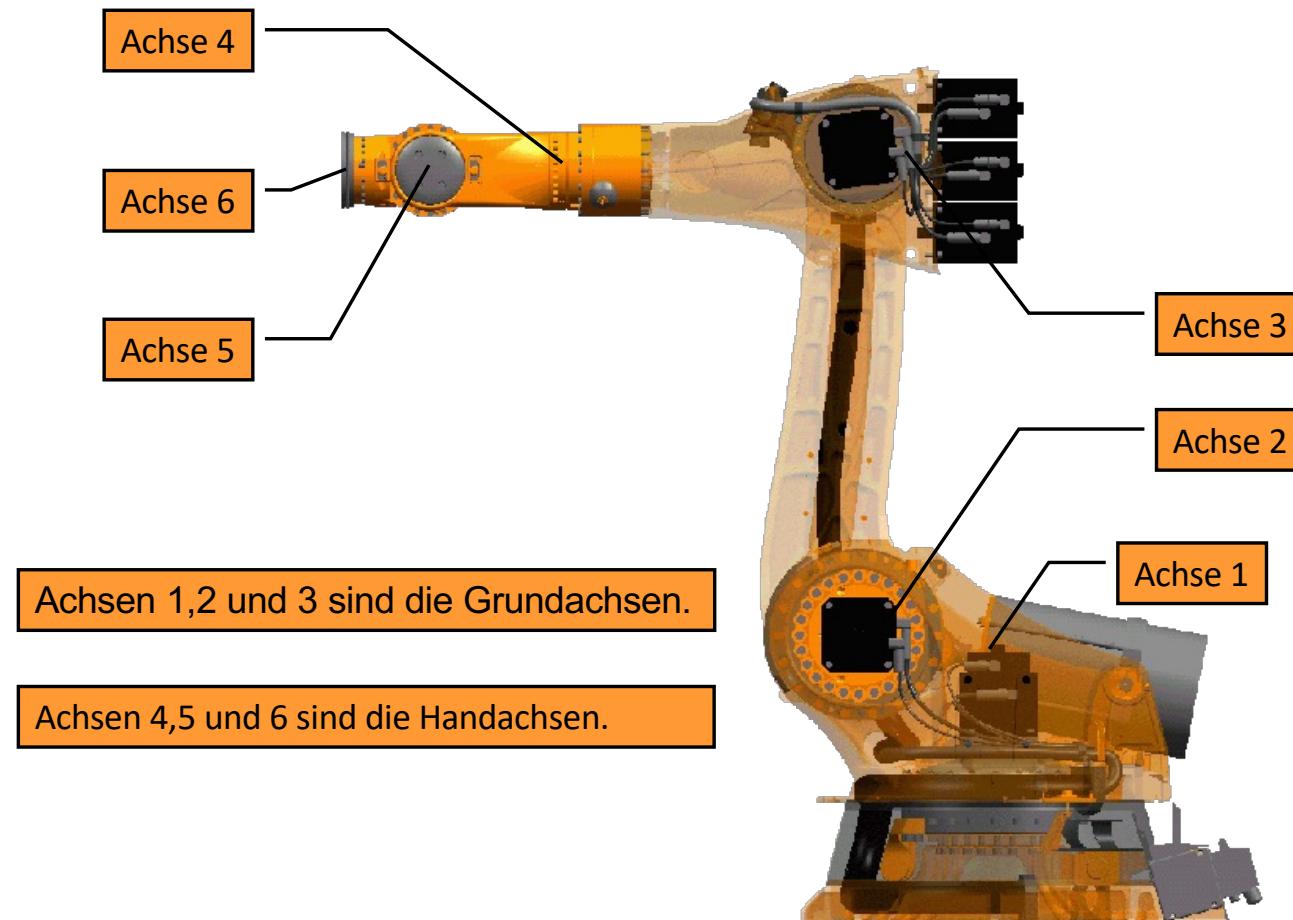
Roboterbaugruppen



Durch die modulare Bauweise kann die Zahl der Roboterbaugruppen und damit die Teilevielfalt begrenzt werden.



Achsbezeichnungen eines Knickarmroboters



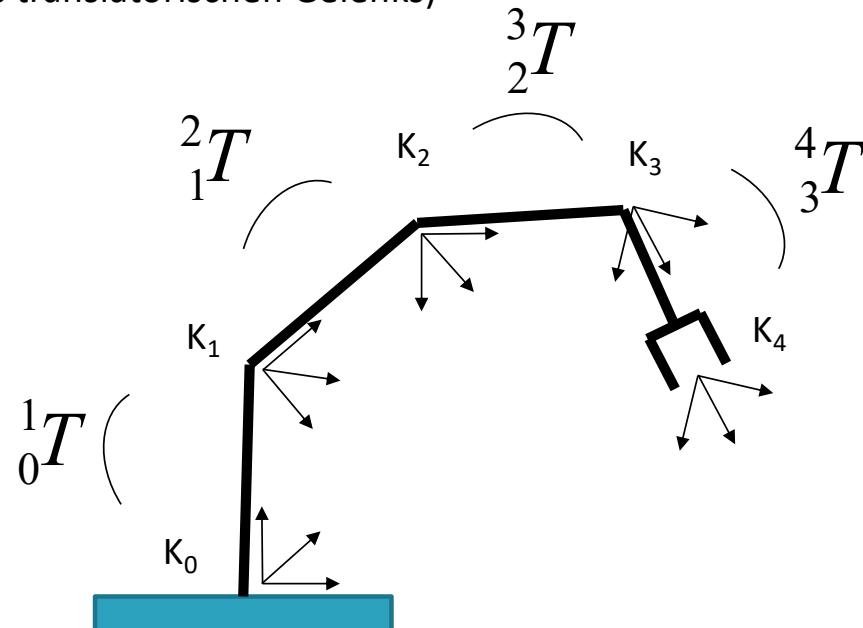
Denavit-Hartenberg-Konvention

- Beschreibung einer kinematischen Kette mit Hilfe einer Sequenz von Koordinatensystemen
- Ziel: Überführung des i-ten KO-Systems in das (i+1)-te KO-System mit Hilfe von vier Parametern
- J. Denavit, R.S. Hartenberg: *A kinematic notation for lower pair mechanisms based on Matrices*. Journal of Applied Mechanics, vol. 77, pp. 215–221, June 1955.



Denavit-Hartenberg-Konvention

- Allgemein: pro Transformation sechs Parameter erforderlich: {X, Y, Z, A, B, C}
- Denavit-Hartenberg: pro Transformation nur vier Parameter erforderlich: { Θ , d, a, α }
- von diesen vier Parameter sind drei fest (Geometrie des Roboters) und nur eine variabel (=Gelenkkoordinate)
- Die Gelenkkoordinate ist entweder Θ (im Falle eines rotatorischen Gelenks) oder d (im Falle eines translatorischen Gelenks)

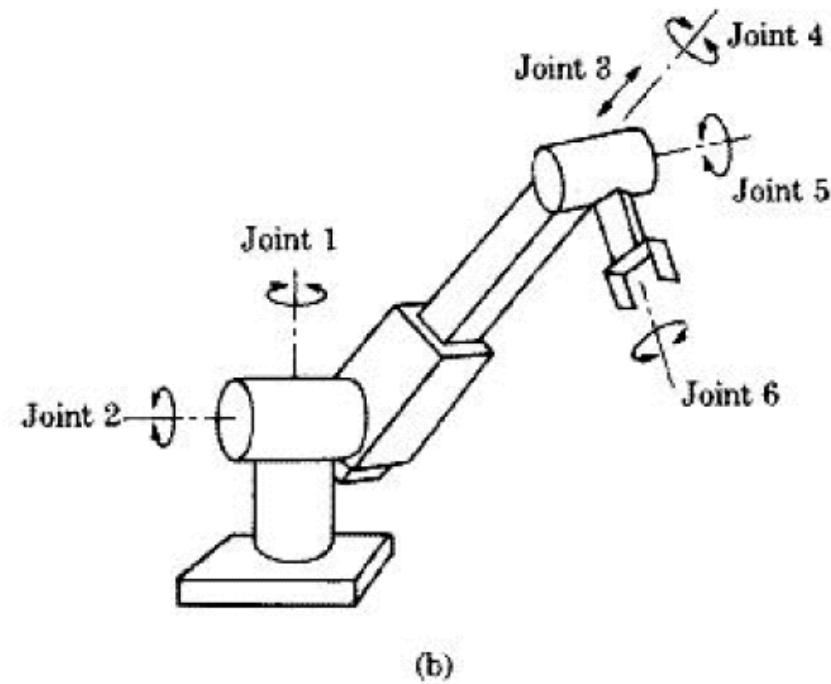
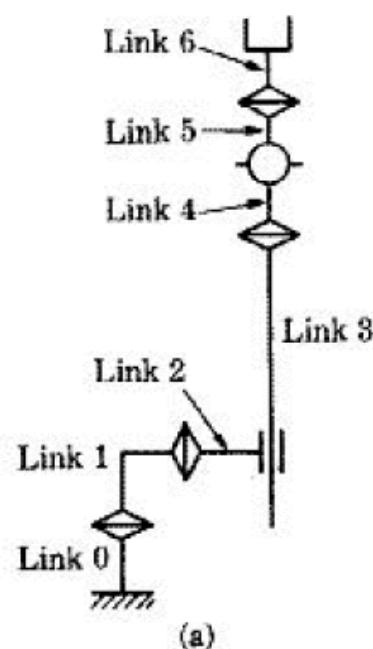


Denavit-Hartenberg-Konvention

- Abstraktion der kinematischen Kette durch ein „Drahtmodell“, das aus einzelnen miteinander durch Gelenke verbundenen Armteilen besteht.
- Jedes Segment (Gelenk+Armteil) besitzt dabei den Freiheitsgrad eins und wird durch einen Frame beschrieben.
- Falls ein Gelenk mehrere Gelenkkachsen besitzt (z.B. Kugelgelenk), werden fiktive Armteile der Masse und Ausdehnung 0 eingeführt.

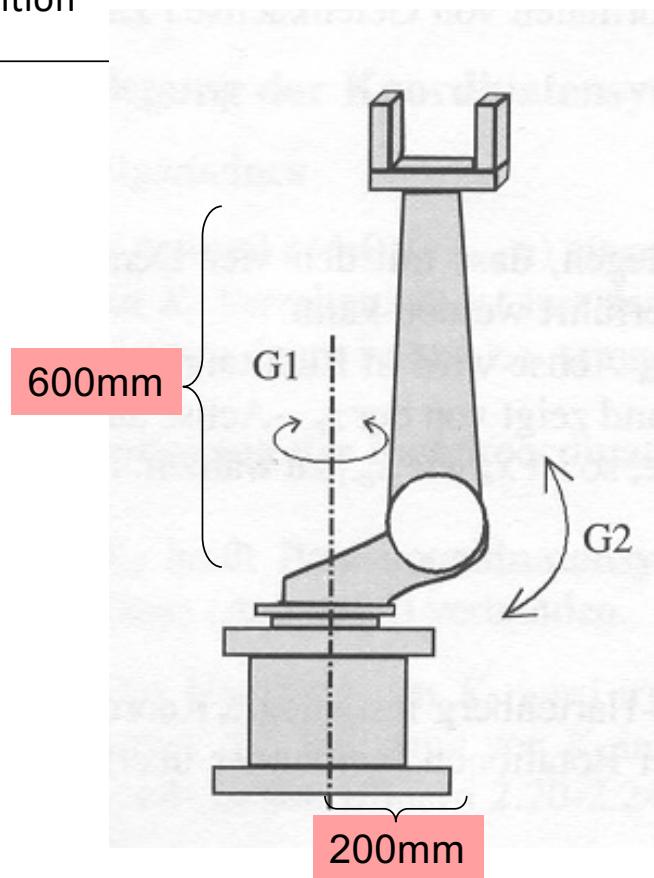


Offene kinematische Kette



Stanford-Manipulator mit 5 rotatorischen und 1 translatorischem Gelenk

Denavit-Hartenberg-Konvention



Beispiel-Roboter mit zwei rotatorischen Gelenken
(aus [Weber 2002])

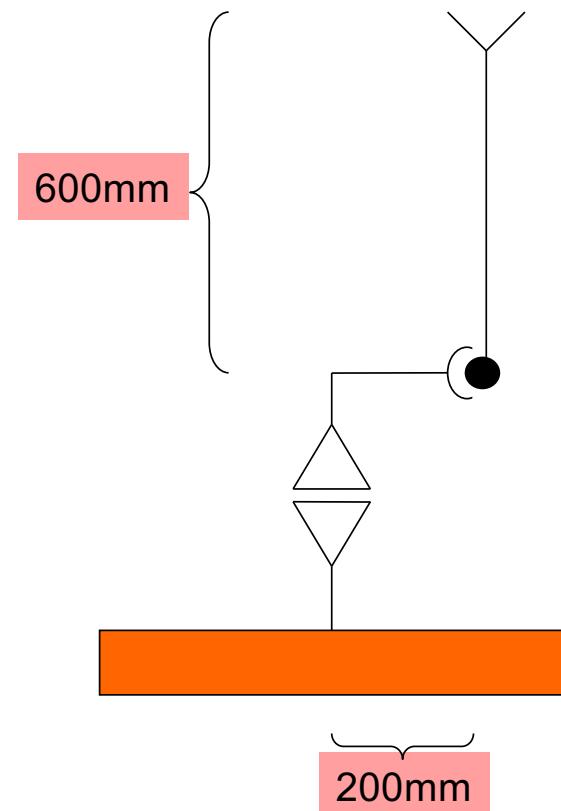


Festlegung der KO-Systeme

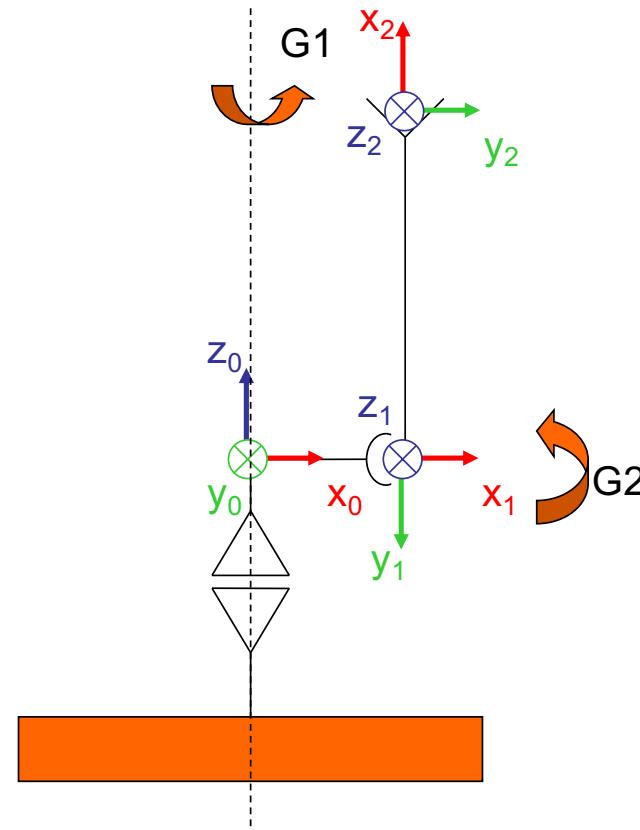
- Jedes Armteil i ($i=0,1,\dots,n$) eines Roboters mit n Gelenken wird mit einem KO-System K_i versehen.
- K_i ist mit dem Armteil i fest verbunden



Denavit-Hartenberg-Konvention



Denavit-Hartenberg-Konvention



Generell gilt:

- K_0 ist fest mit der Roboter-Basis verbunden
- K_n ist fest mit dem Roboter-Flansch bzw. dem Werkzeug verbunden
- Der Ursprung von K_n ist der TCP (Tool-Center-Point) des Roboters
- Der Ursprung von K_i ($i < n$) liegt immer auf der Gelenkkachse $i+1$
- Die z_i -Achse von K_i ($i < n$) zeigt immer in Richtung der Gelenkkachse $i+1$



Denavit-Hartenberg-Konvention

Wird für jedes Segment ein Koordinatensystem gemäß der Denavit-Hartenberg Konvention festgelegt, so lässt sich die Transformation zweier aufeinander-folgender Koordinatensystemen mit vier Parametern beschreiben!



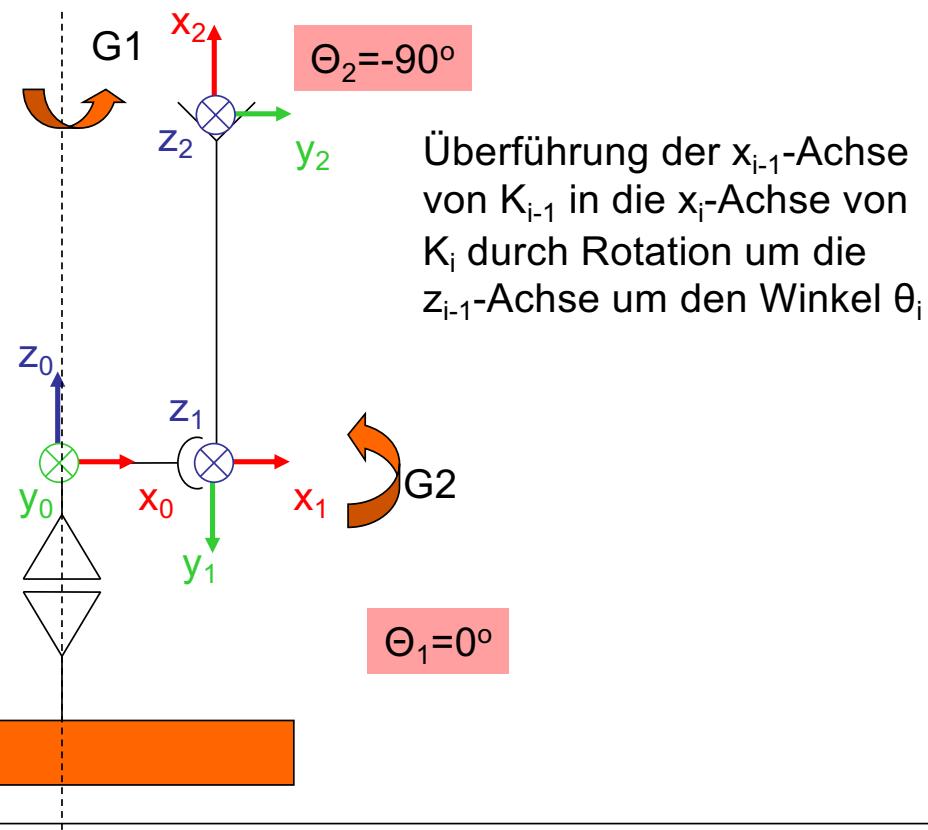
Überführung eines KO-Systems K_{i-1} in das KO

System K_i in vier Schritten:

1. Überführung der x_{i-1} -Achse von K_{i-1} in die x_i -Achse von K_i durch
Rotation um die z_{i-1} -Achse um den Winkel θ_i



Denavit-Hartenberg-Konvention



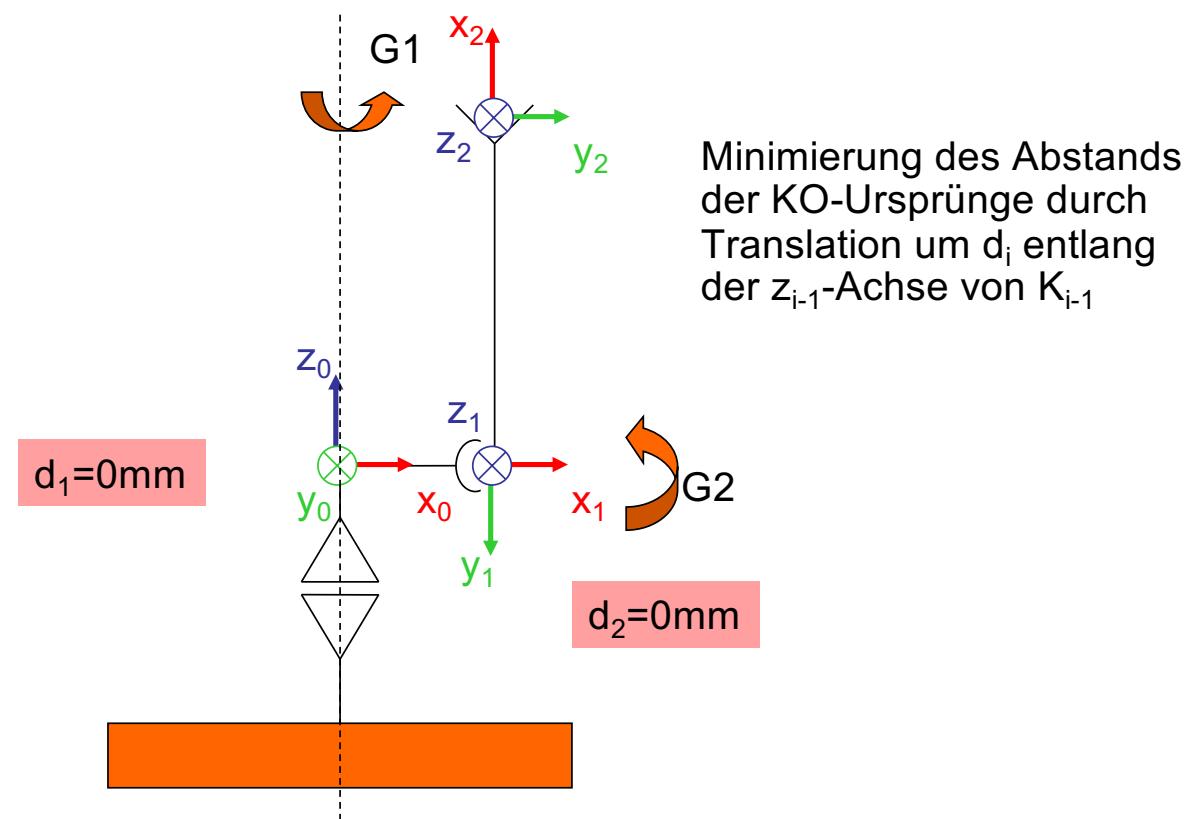
Überführung eines KO-Systems K_{i-1} in das KO

System K_i in vier Schritten:

1. Überführung der x_{i-1} -Achse von K_{i-1} in die x_i -Achse von K_i durch Rotation um die z_{i-1} -Achse um den Winkel θ_i
2. Minimierung des Abstands der KO-Ursprünge durch **Translation** um d_i entlang der z_{i-1} -Achse



Denavit-Hartenberg-Konvention



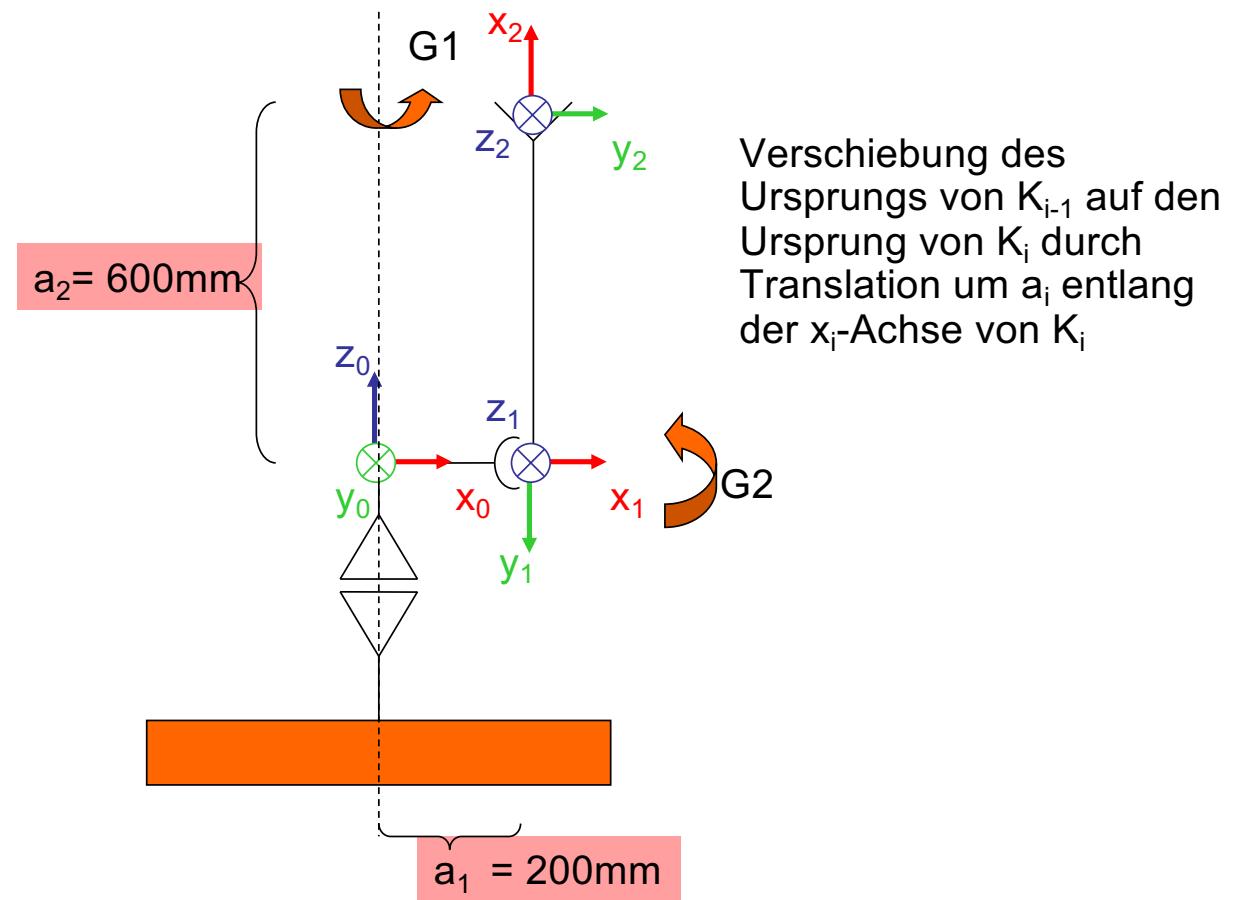
Überführung eines KO-Systems K_{i-1} in das KO

System K_i in vier Schritten:

1. Überführung der x_{i-1} -Achse von K_{i-1} in die x_i -Achse von K_i durch Rotation um die z_{i-1} -Achse um den Winkel θ_i
2. Minimierung des Abstands der KO-Ursprünge durch Translation um d_i entlang der z_{i-1} -Achse
3. Verschiebung des Ursprungs von K_{i-1} auf den Ursprung von K_i durch **Translation** um a_i entlang der x_i -Achse von K_i



Denavit-Hartenberg-Konvention



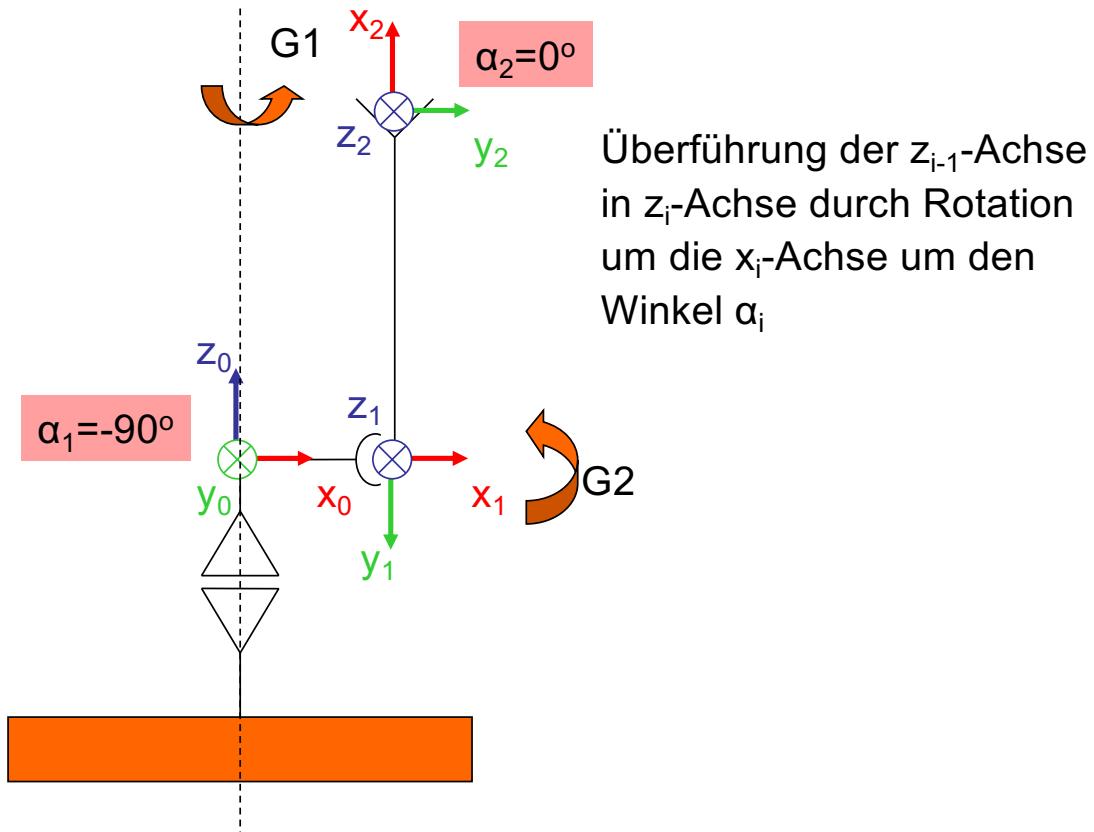
Überführung eines KO-Systems K_{i-1} in das KO

System K_i in vier Schritten:

1. Überführung der x_{i-1} -Achse von K_{i-1} in die x_i -Achse von K_i durch Rotation um die z_{i-1} -Achse um den Winkel θ_i
2. Minimierung des Abstands der KO-Ursprünge durch Translation um d_i entlang der z_{i-1} -Achse
3. Verschiebung des Ursprungs von K_{i-1} auf den Ursprung von K_i durch Translation um a_i entlang der x_i -Achse von K_i
4. Überführung der z_{i-1} -Achse in z_i -Achse durch **Rotation um die x_i -Achse** um den Winkel α_i



Denavit-Hartenberg-Konvention



Denavit-Hartenberg-Konvention

Denavit-Hartenberg Parameter für den oben gezeigten Manipulator:

i		Θ_i	d_i	a_i	α_i
i=1	$K_0 \rightarrow K_1$	(0°)	0mm	200mm	-90°
i=2	$K_1 \rightarrow K_2$	(-90°)	0mm	600mm	0°



Denavit-Hartenberg-Konvention

Transformationsmatrizen zur Beschreibung des KO-Systems K_i bezügl. des KO-Systems K_{i-1} :

1. Überführung der x_{i-1} -Achse von K_{i-1} in die x_i -Achse von K_i durch **Rotation um die z_{i-1} -Achse um den Winkel θ_i** :

$$R_{z_{i-1}}(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Denavit-Hartenberg-Konvention

Transformationsmatrizen zur Beschreibung des KO-Systems K_i bezügl. des KO-Systems K_{i-1} :

2. Minimierung des Abstands der KO-Ursprünge durch **Translation um d_i entlang der z_{i-1} -Achse**

$$Trans(0,0,d_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Denavit-Hartenberg-Konvention

Transformationsmatrizen zur Beschreibung des
KO-Systems K_i bezügl. des KO-Systems K_{i-1} :

3. Verschiebung des Ursprungs von K_{i-1} auf den Ursprung von K_i durch
Translation um a_i entlang der x_i -Achse von K_i

$$Trans(a_i, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Denavit-Hartenberg-Konvention

Transformationsmatrizen zur Beschreibung des KO-Systems K_i bezügl. des KO-Systems K_{i-1} :

4. Überführung der z_{i-1} -Achse in z_i -Achse durch **Rotation um die x_i -Achse um den Winkel α_i** :

$$R_{x_i}(\alpha_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Denavit-Hartenberg-Matrizen

Transformationsmatrizen zur Beschreibung des KO-Systems K_i bezügl. des KO-Systems K_{i-1} :

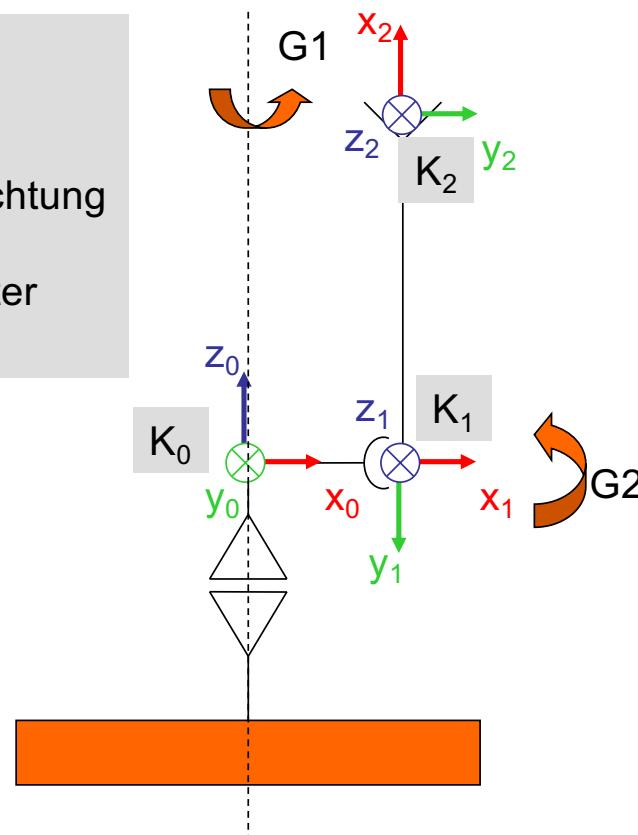
$$\begin{aligned} {}^i_{i-1}T &= R_{z_{i-1}}(\theta_i) \cdot Trans(0,0,d_i) \cdot Trans(a_i,0,0) \cdot R_{x_i}(\alpha_i) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beachte: Die Transformationen finden immer bezügl. des aktuellen Hilfskoordinatensystems statt, deshalb: Matrizenmultiplikation von links nach rechts bzw. Rechtsmultiplikation



Denavit-Hartenberg-Konvention

Wichtig:
Ursprung von K_i liegt
auf der Gelenkachse $i+1$,
 z -Achse von K_i zeigt in Richtung
der Gelenkachse $i+1$,
d.h. die variablen Parameter
sind Θ_i oder d_i



Denavit-Hartenberg-Matrizen

- θ_i, d_i, a_i und α_i heißen **Denavit-Hartenberg-Parameter**
- Gelenk i rotatorisch:
 θ_i veränderlich, d_i, a_i und α_i fest,
also $q_i = \theta_i$

$${}_{i-1}^i T(q_i) = \begin{pmatrix} \cos q_i & -\sin q_i \cos \alpha_i & \sin q_i \sin \alpha_i & a_i \cos q_i \\ \sin q_i & \cos q_i \cos \alpha_i & -\cos q_i \sin \alpha_i & a_i \sin q_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Denavit-Hartenberg-Matrizen

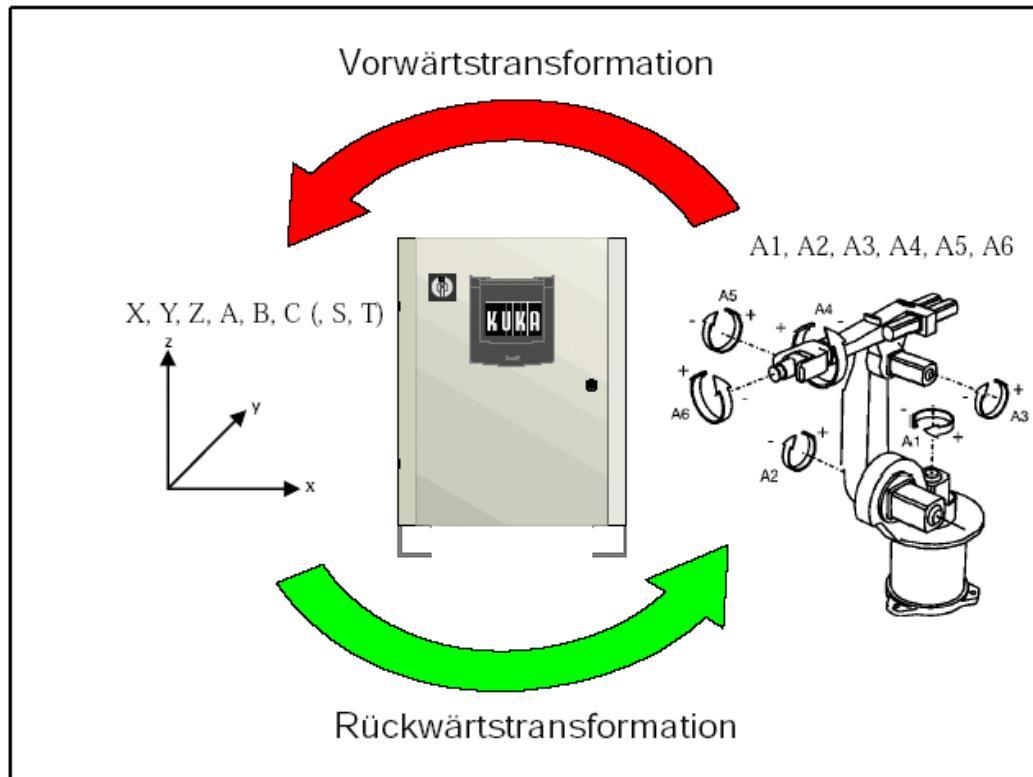
- Gelenk i translatorisch:

d_i veränderlich, θ_i , a_i und α_i fest,
also $q_i = d_i$

$${}_{i-1}^i T(q_i) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & q_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Kinematisches Problem



Vorwärtstransformation

- Vorwärtstransformation / direktes kinematisches Problem
- Gegeben: Gelenkkoordinaten $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$
- Gesucht: Lage des TCP
(Position \mathbf{p} + Orientierung $R(A, B, C)$)
- Lösung:

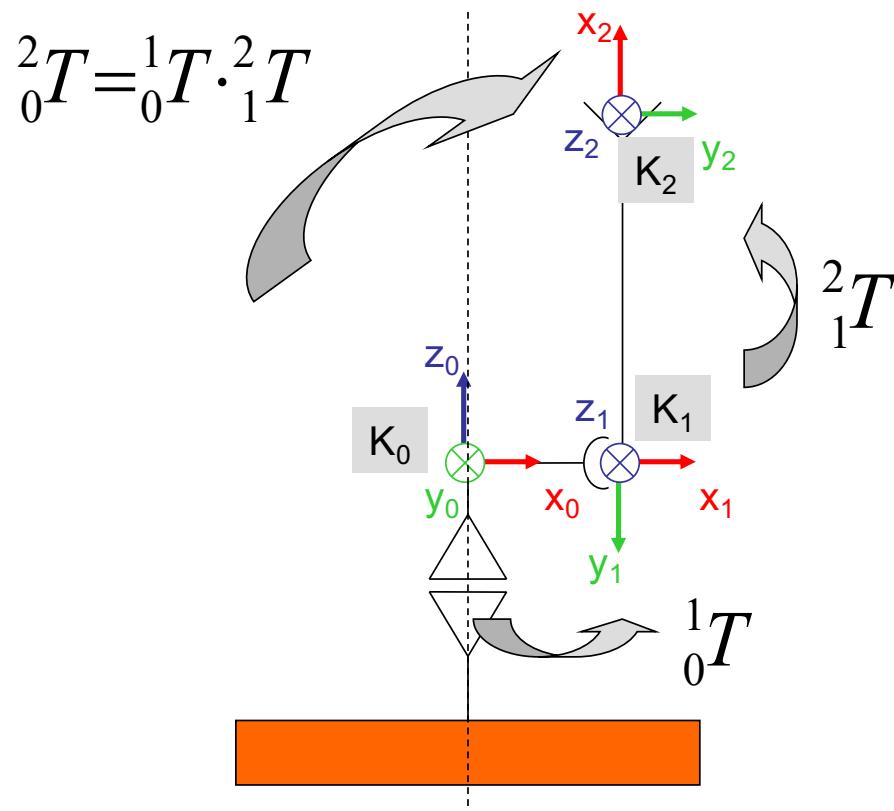
$${}^n T(q_1, \dots, q_n) = {}^1 T(q_1) \cdots {}^{n-1} T(q_n) = \begin{pmatrix} R(A, B, C) & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Frage: Warum Matrixmultiplikation von links nach rechts?

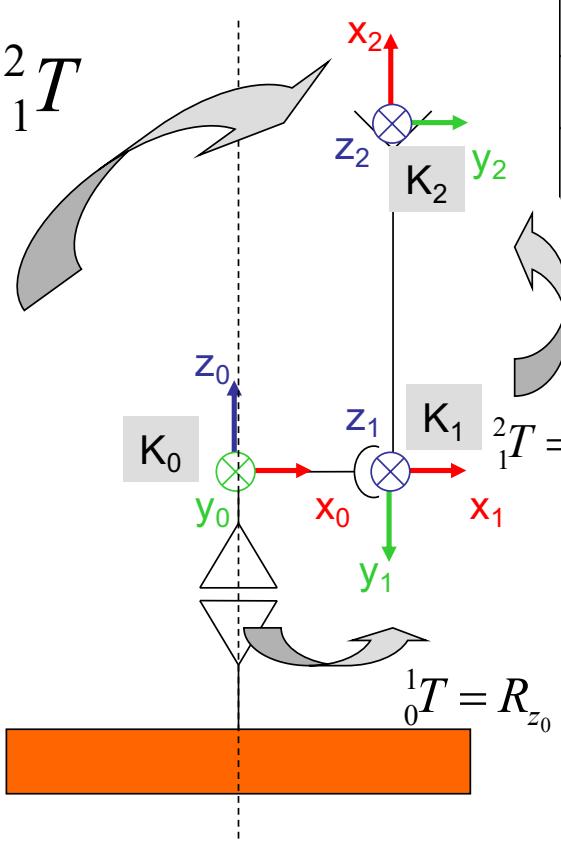


Vorwärtstransformation



Vorwärtstransformation

$${}^2_0T = {}^1_0T \cdot {}^2_1T$$



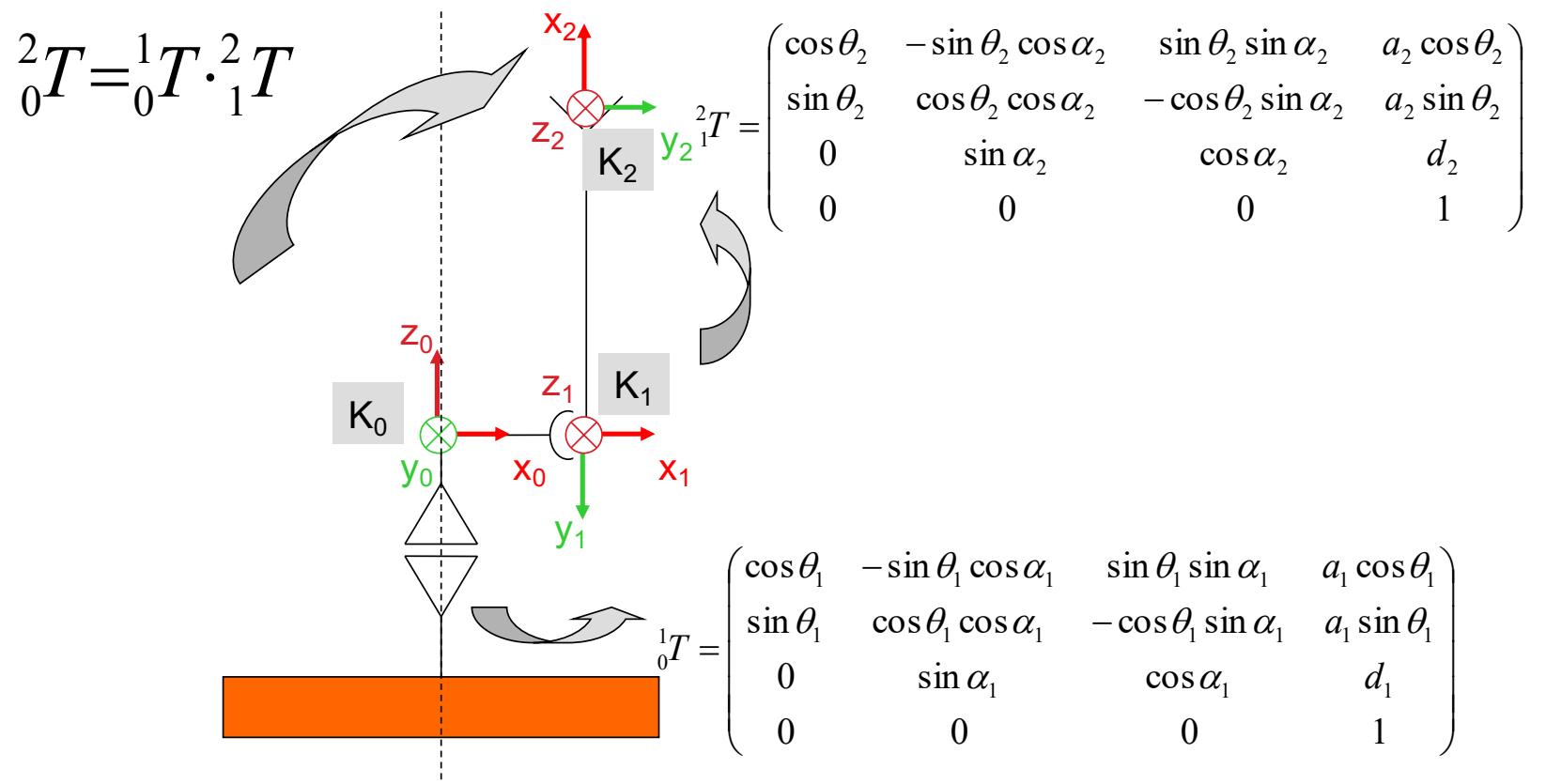
Gelenk	θ	d	a	α
1	(0°)	0mm	a_1	-90°
2	(-90°)	0mm	a_2	0°

$${}^2_1T = R_{z_1}(\theta_2) \cdot Trans(0,0,d_2) \cdot Trans(a_2,0,0) \cdot R_{x_2}(\alpha_2)$$

$${}^1_0T = R_{z_0}(\theta_1) \cdot Trans(0,0,d_1) \cdot Trans(a_1,0,0) \cdot R_{x_1}(\alpha_1)$$



Vorwärtstransformation

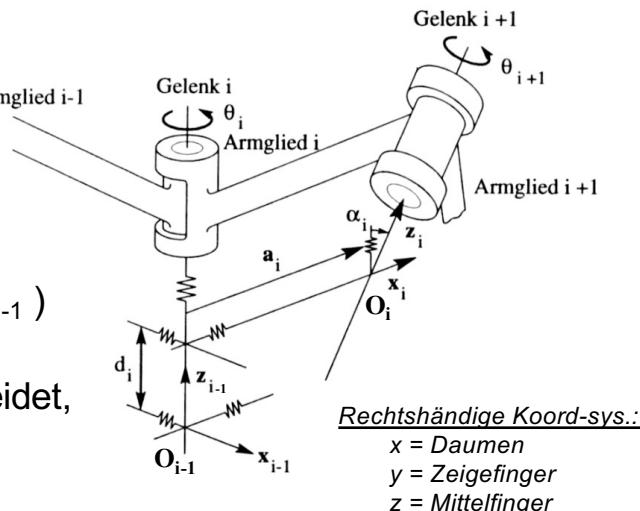


Vereinfachte Matrix zur Berechnung des direkten kinematisches Modells (Vorwärtstransformation):
Denavit-Hartenberg-Matrix mit 4 Parametern: 2. Version

Koordinatentransformation zwischen Robotergelenken i und $i+1$ mit einer DH-Transformation D^{i-1}_i , d.h. Transformation des Koord.-sys. O_{i-1} nach O_i

Für die Erstellung einer DH-Transformation werden vier Parameter benötigt.

- d_i : Entfernung von O_{i-1} bis Schnitt z_{i-1} mit x_i -Achse (d.h. Translation von d_i entlang z_{i-1})
- θ_i : Gelenkwinkel um z_{i-1} -Achse von x_{i-1} -Achse (d.h. Rotation mit θ_i um z_{i-1} bis x_{i-1} z_i schneidet, dann geht x_{i-1} über in x_i)
- a_i : Distanz zwischen z_{i-1} -Achse und z_i -Achse (d.h. Translation von a_i entlang x_i)
- α_i : Drehwinkel um die x_i -Achse, bis z_{i-1} -Achse parallel zur z_i -Achse wird (d.h. Rotation mit α_i um x_i bis z_{i-1} parallel z_i)



Rechtshändige Koord.-sys.:
 x = Daumen
 y = Zeigefinger
 z = Mittelfinger

O_{i-1} sitzt am Ende des Armgliedes $i-1$ im Gelenk i
 O_i sitzt am Ende des Armgliedes i im Gelenk $i+1$



Vereinfachte Vorwärtstransformation: Denavit-Hartenberg-Matrix mit 4 Parametern: 2. Version

Erstellen der DH-Transformation aus zwei Translationen \mathbf{T} und zwei Rotationen \mathbf{R} unter Verwendung homogener Transformationsmatrizen (Frames).

$$D_{i-1}^i = \mathbf{T}_1(z_{i-1}, d_i) \cdot \mathbf{R}_1(\theta_i) \cdot \mathbf{T}_2(x_i, a_i) \cdot \mathbf{R}_2(\alpha_i);$$

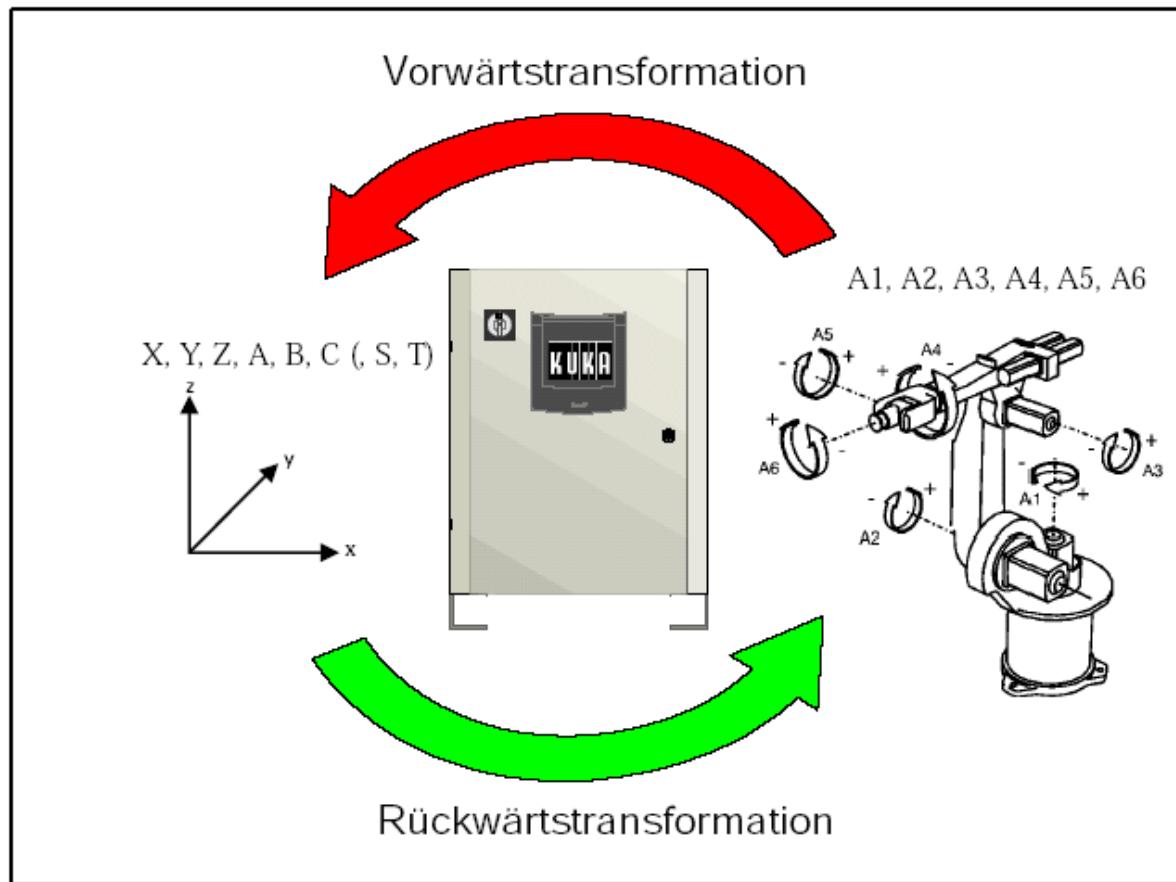
$$D_i^{i-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_i^{i-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

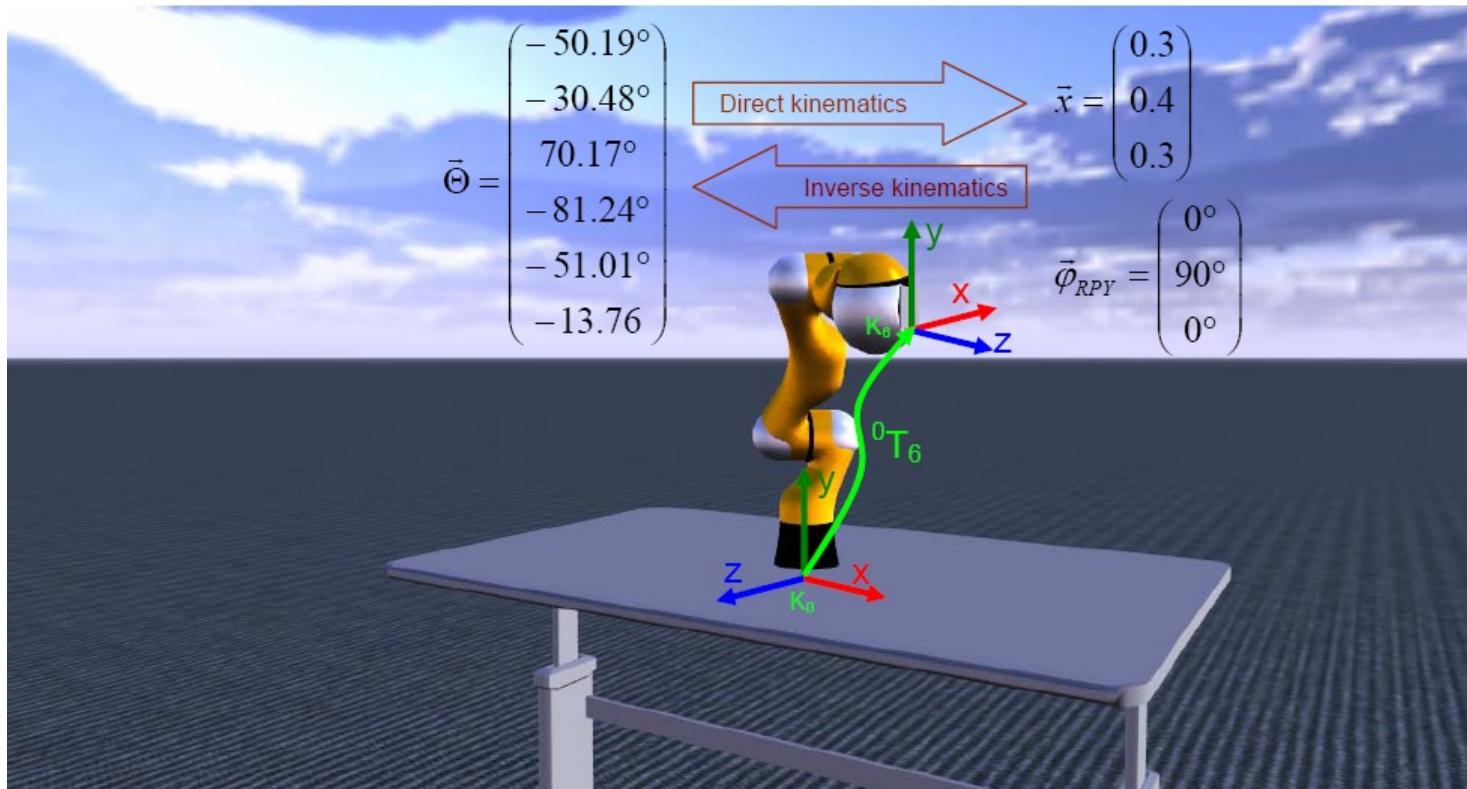
$$D_i^{i-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\sin(\alpha_i) & \cos(\theta_i)a_i \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) & \sin(\theta_i)a_i \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Kinematisches Problem



Kinematisches Problem



Rückwärtstransformation

- Auch „inverses kinematisches Problem“
- Gegeben: Position & Orientierung des Endeffektor-Koordinatensystems
- Gesucht: zugehörige Gelenkkoordinaten q_i



Rückwärtstransformation

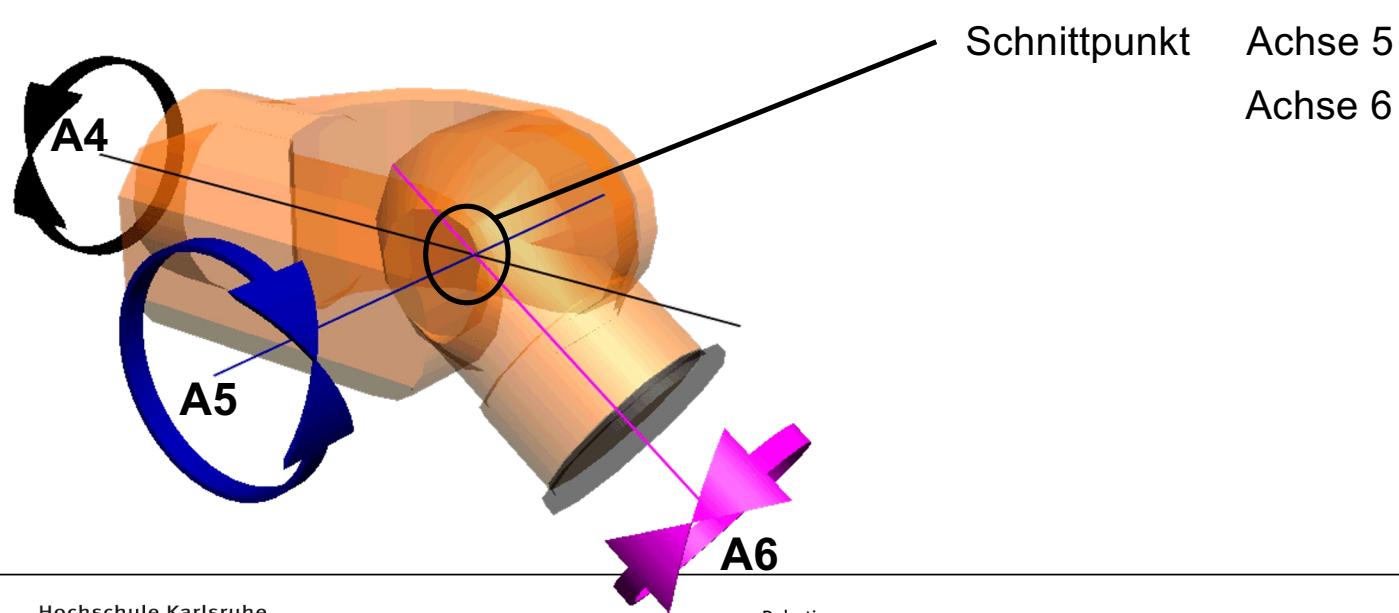
Fragestellungen:

- Existenz der Lösung? -> Arbeitsbereich
- Eindeutigkeit der Lösung?
- Lösungsmethoden?



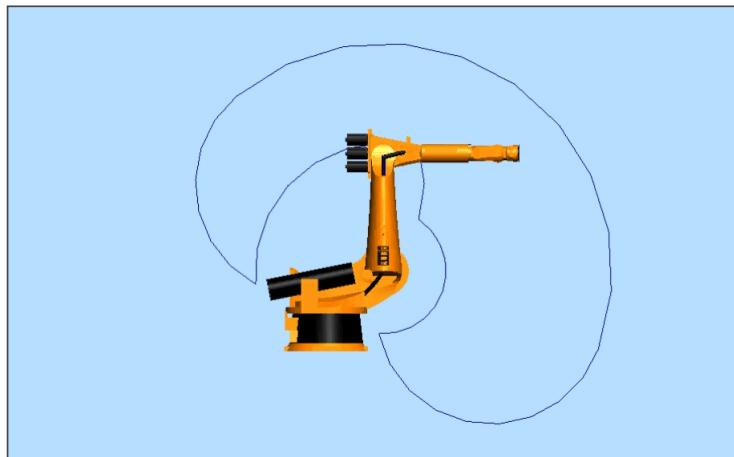
Arbeitsbereich

Der Arbeitsbereich des Roboters ist der Raum, innerhalb dem der **Handachsenschnittpunkt/Handwurzelpunkt** positioniert werden kann.



Arbeitsbereich

Der Arbeitsbereich des Roboters entsteht aus der Überlagerung der Bewegungen der Hauptachsen.

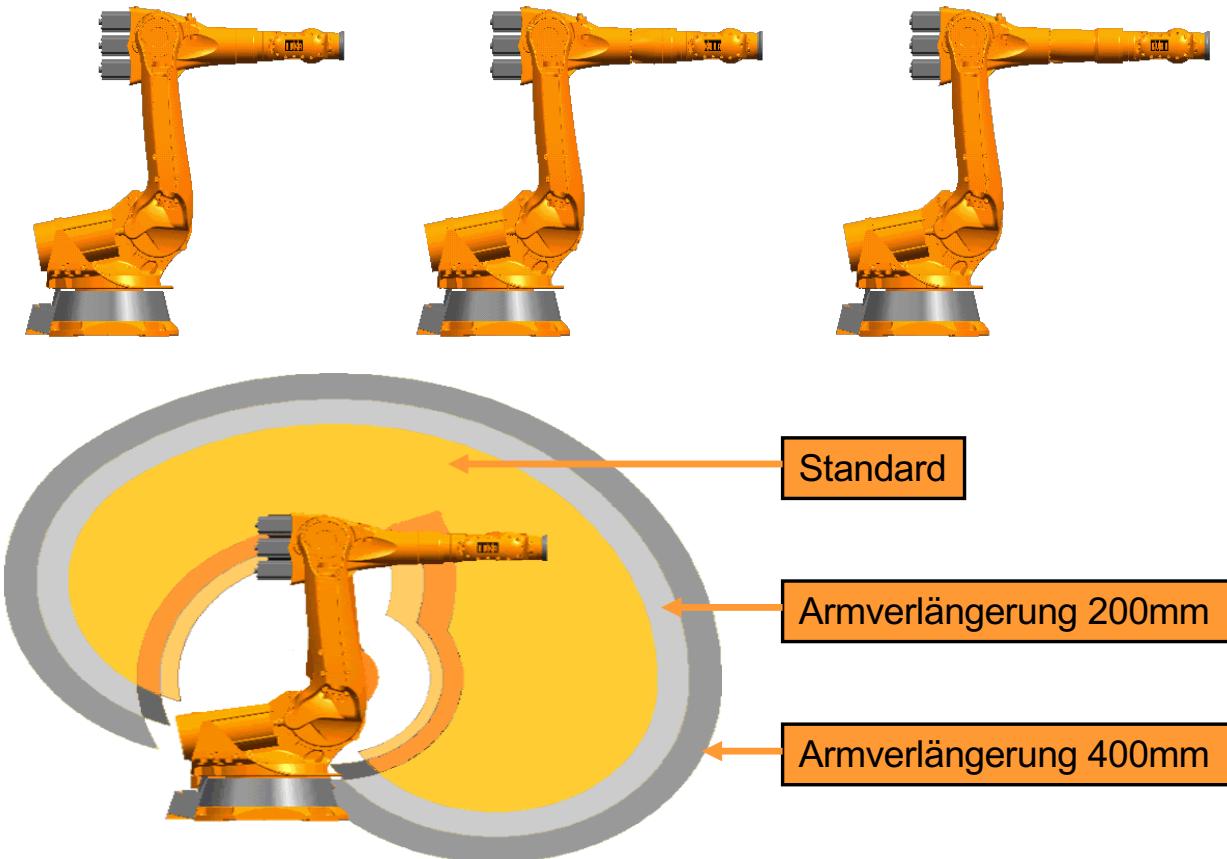


Durch Bewegung der Achsen 2 und 3 wird ein Arbeitsbereich in einer vertikalen Ebene generiert. Bestimmt wird dieser durch die möglichen Achswinkel und der Länge zwischen A2 / A3 und A3 / Handwurzelpunkt.

Durch Drehen der Achse 1 wird der vertikale Arbeitsbereich um eine senkrechte Achse gedreht, so daß ein »kugelförmiger« Arbeitsraum erzeugt wird.

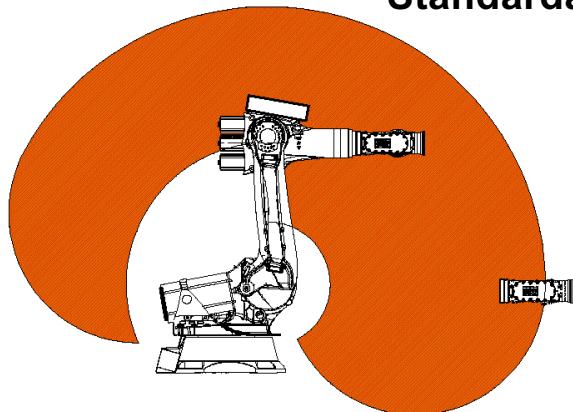


Arbeitsbereichserweiterung

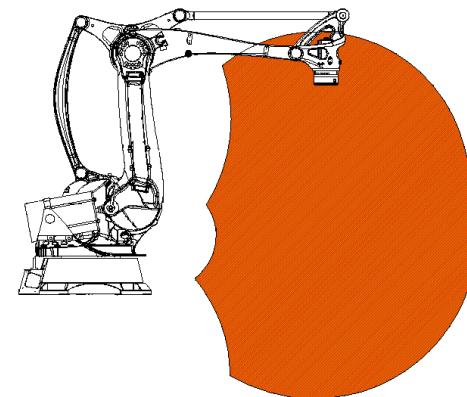


Arbeitsbereich

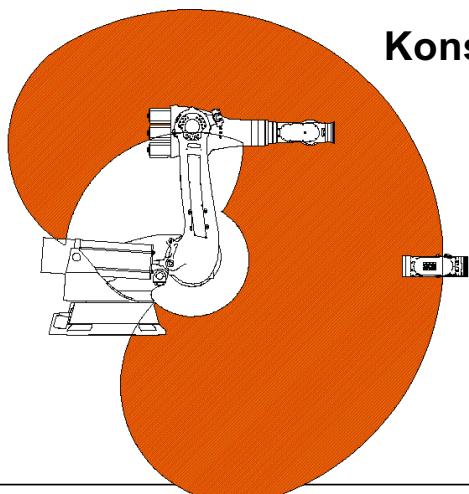
Standardausführung



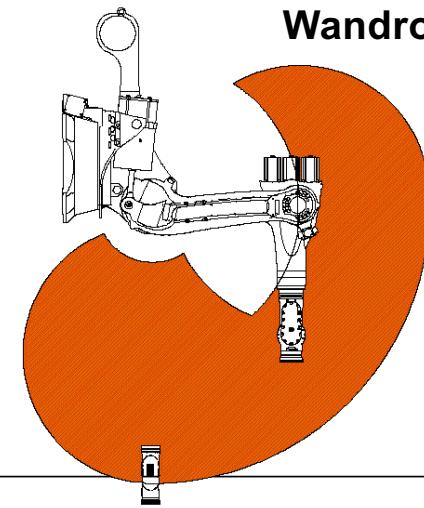
Palettierroboter



Konsolroboter

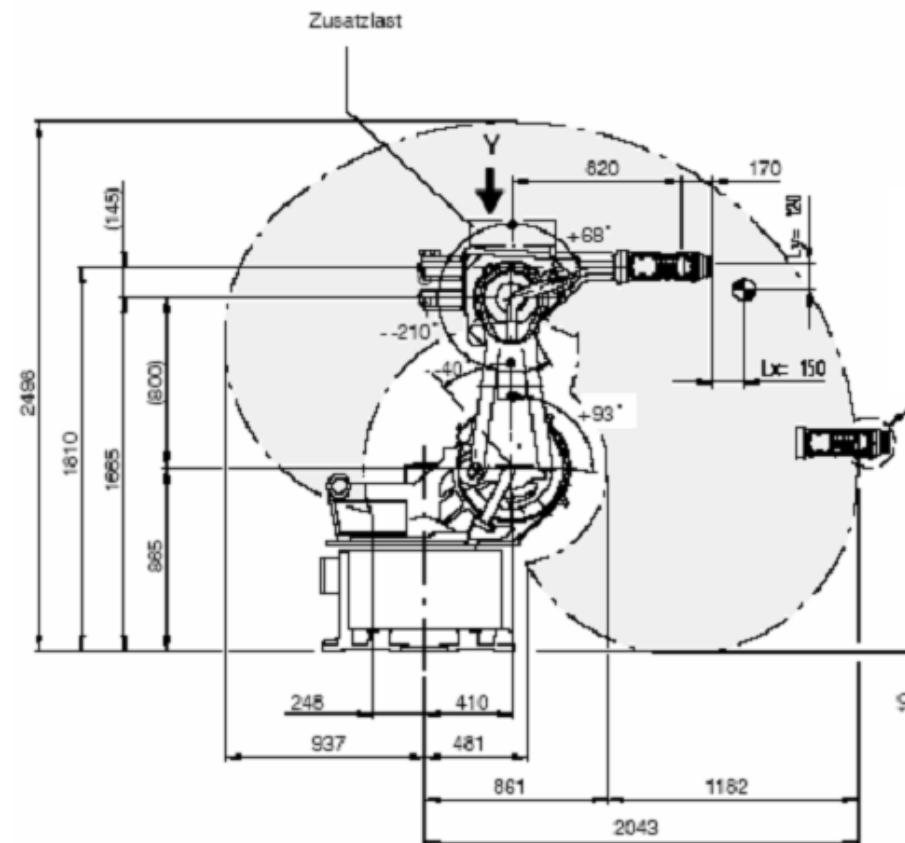


Wandroboter

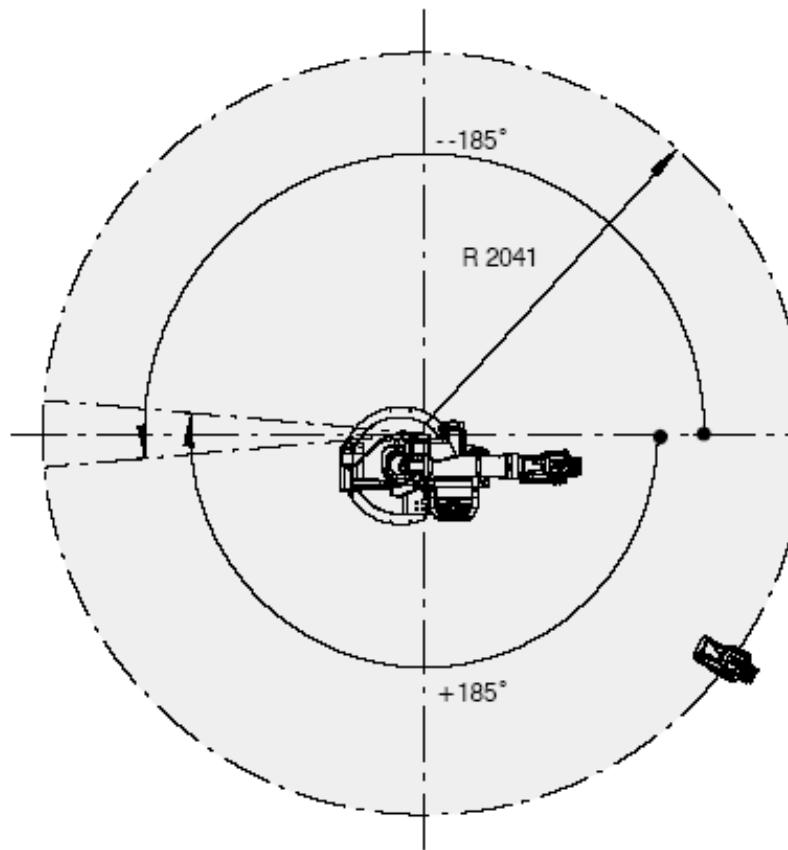


Arbeitsbereich

Arbeitsraum KR30



Arbeitsbereich



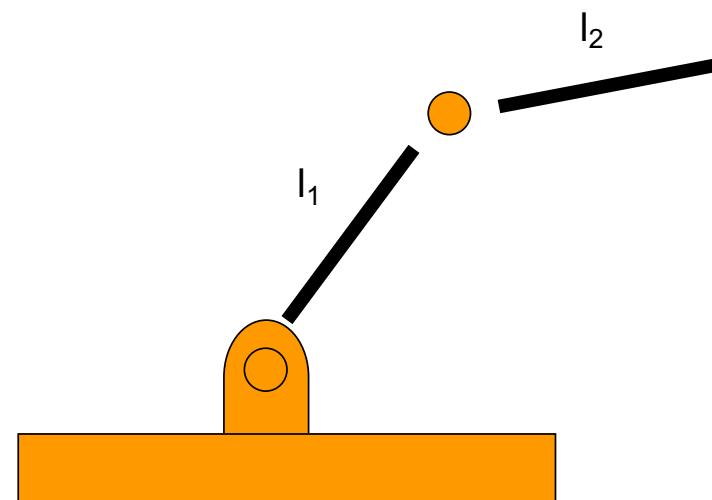
Arbeitsraum

- **Dextrous Workspace / geschickter Arbeitsraum:** Arbeitsraum, den der Endeffektor mit allen Orientierungen erreichen kann
- **Reachable Workspace / erreichbarer Arbeitsraum:** Arbeitsraum, den der Endeffektor mit mindestens einer Orientierung erreichen kann
- Der „Dextrous Workspace“ ist eine Teilmenge des „Reachable Workspace“



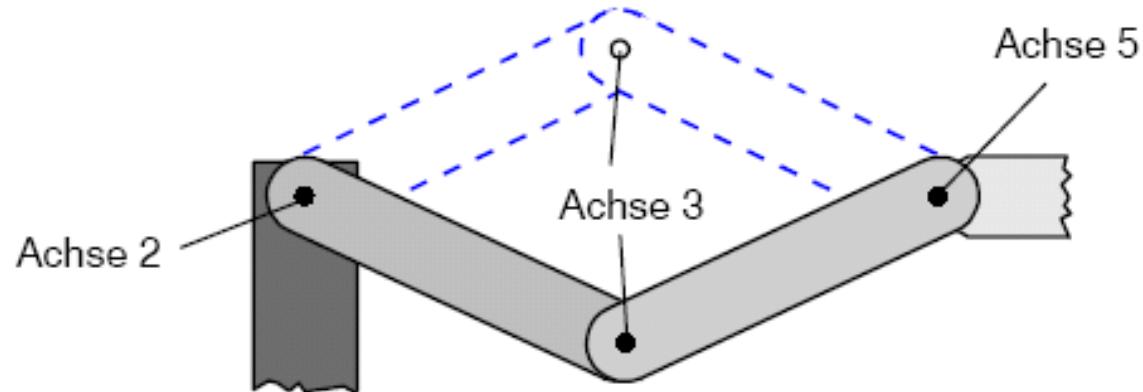
Arbeitsraum

- Beispiel: Kinematik mit zwei Gelenken
- Fall 1: $|l_1| = |l_2|$:
 - Reachable Workspace: Scheibe mit Radius $2 \cdot |l_1|$
 - Dextrous Workspace: nur der Ursprung
- Fall 2: $|l_1| \neq |l_2|$:
 - kein Dextrous Workspace
 - Reachable Workspace: Ring mit äußerem Radius $|l_1| + |l_2|$ und innerem Radius $||l_1| - |l_2||$

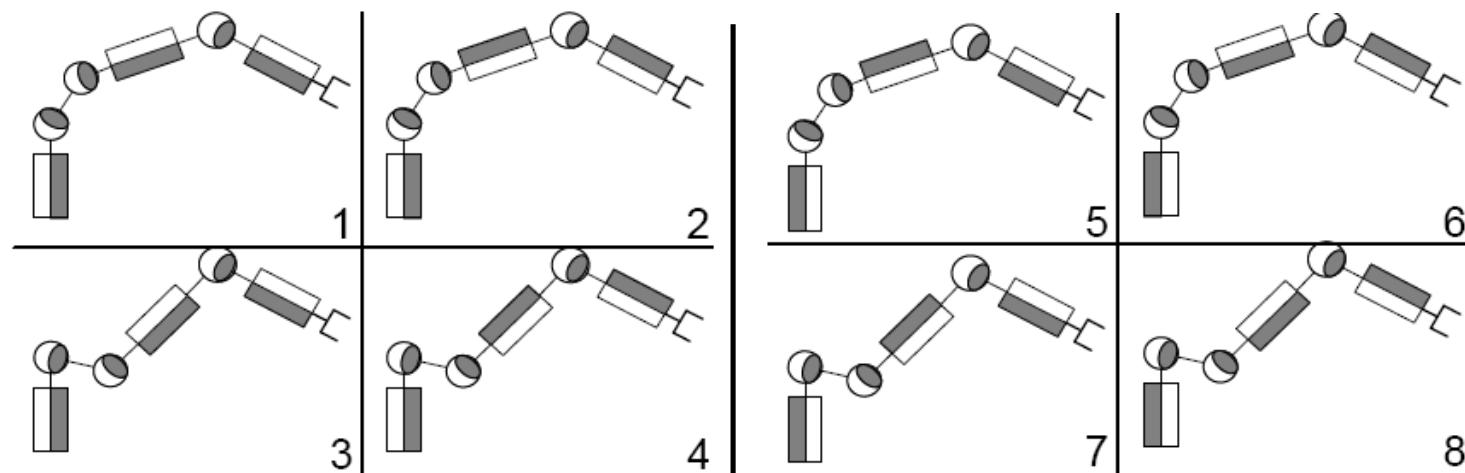


Mehrdeutigkeiten

Mehrere Gelenkkoordinaten führen zu denselben Weltkoordinaten



Mehrdeutigkeiten

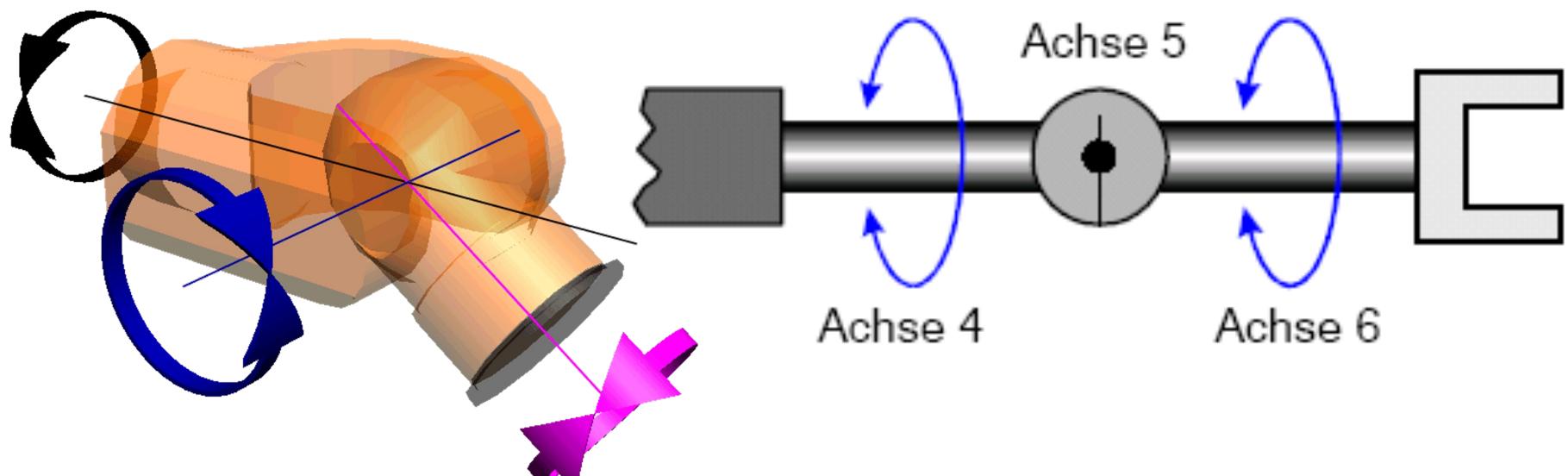


Quelle: Arm Tutorial 2 zum KUKA EducationalFramework



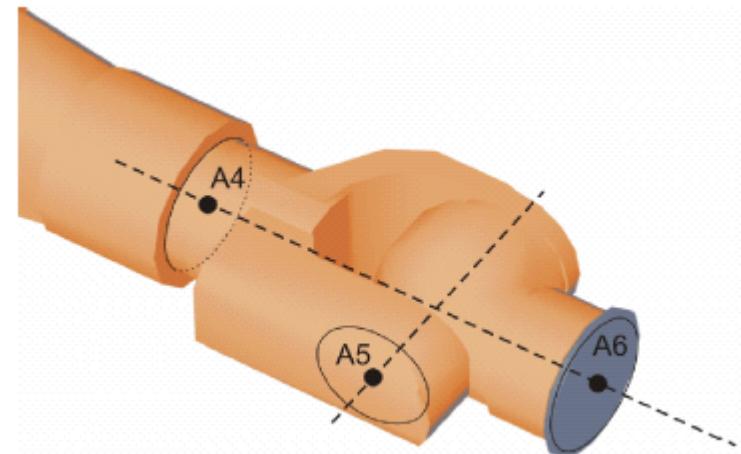
Beispiel:

Unendlich viele Kombinationen von q_4 und q_6 führen
bei dieser Stellung von q_5 zu derselben Endeffektorstellung



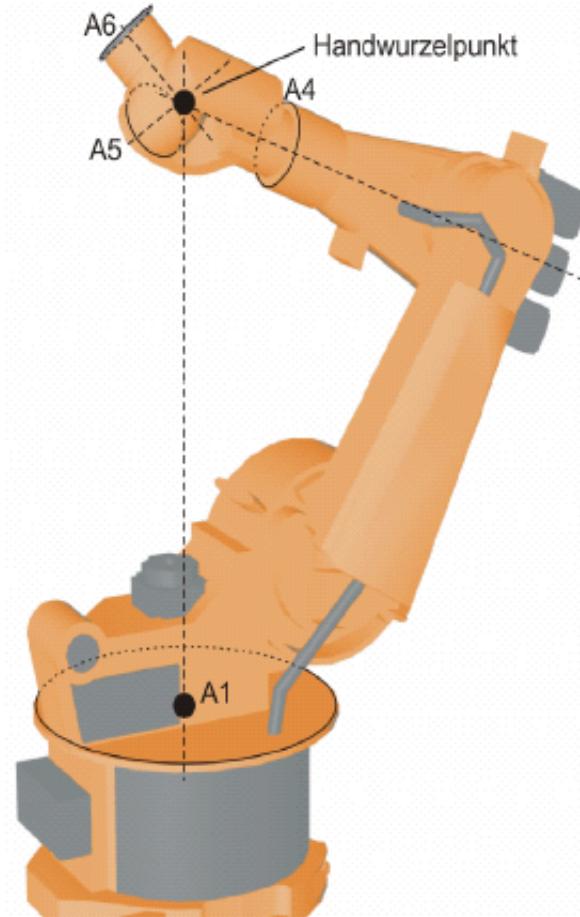
Singularitäten bei 6-Achs-Kinematiken

- Handachsen-Singularität (Alpha-5-Stellung)
- Achsen 4 und 6 liegen parallel zueinander.
- Die Stellung beider Achsen ist durch eine Rückwärts-transformation nicht eindeutig bestimmbar, da es beliebig viele Achsstellungen für A4 und A6 gibt, deren Achswinkelsummen identisch sind.



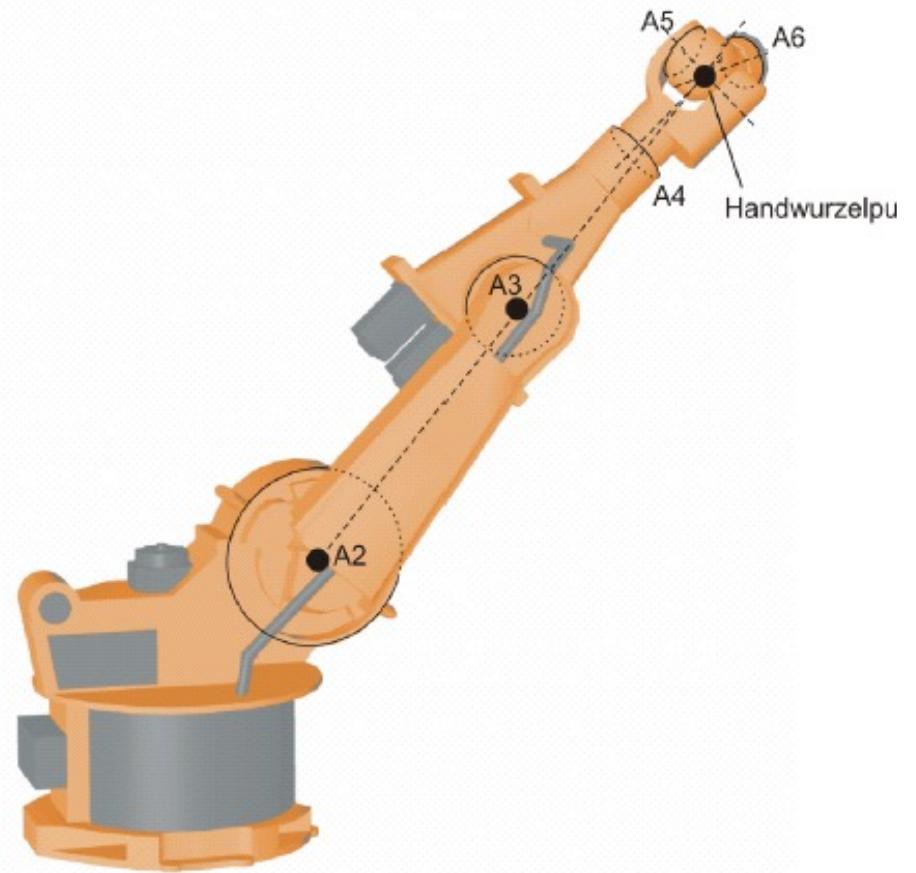
Singularitäten bei 6-Achs-Kinematiken

- Überkopf-Singularität (Alpha-1 Stellung)
- Handwurzelpunkt liegt auf Achse 1
- Position von Achse 1 ist durch Rückwärts-transformation nicht eindeutig bestimmbar und kann daher beliebige Werte annehmen.



Singularitäten bei 6-Achs-Kinematiken

- Strecklage (Alpha-2-Stellung)
- Verlängerung der Strecke A2-A3 schneidet den Handwurzelpunkt.
- Roboter befindet sich am Rand seines Arbeitsbereichs.
- Rückwärtstransformation liefert zwar eindeutige Achswinkel, aber kleine kartesische Geschwindigkeiten haben große Achsgeschwindigkeiten der Achsen 2 und 3 zur Folge.



Lösungsmethoden zum inversen kinematischen Problem

- Ein Manipulator heißt „lösbar“, wenn es einen Algorithmus gibt, der zu einer gegebenen Position und Orientierung des Endeffektors alle möglichen Lösungen für die Gelenkkoordinaten findet
- Iterative Näherungsverfahren finden i.d.R. nicht alle Lösungen



Lösungsmethoden zum inversen kinematischen Problem

- Geschlossene Lösungen:

- Lösungen sind analytisch ausdrückbar
- Nicht iterativ
 - algebraisch
 - geometrisch

- Numerische Lösungen:

- iterativ
- für die Praxis meist zu langsam bzw. keine deterministische Bearbeitungszeit

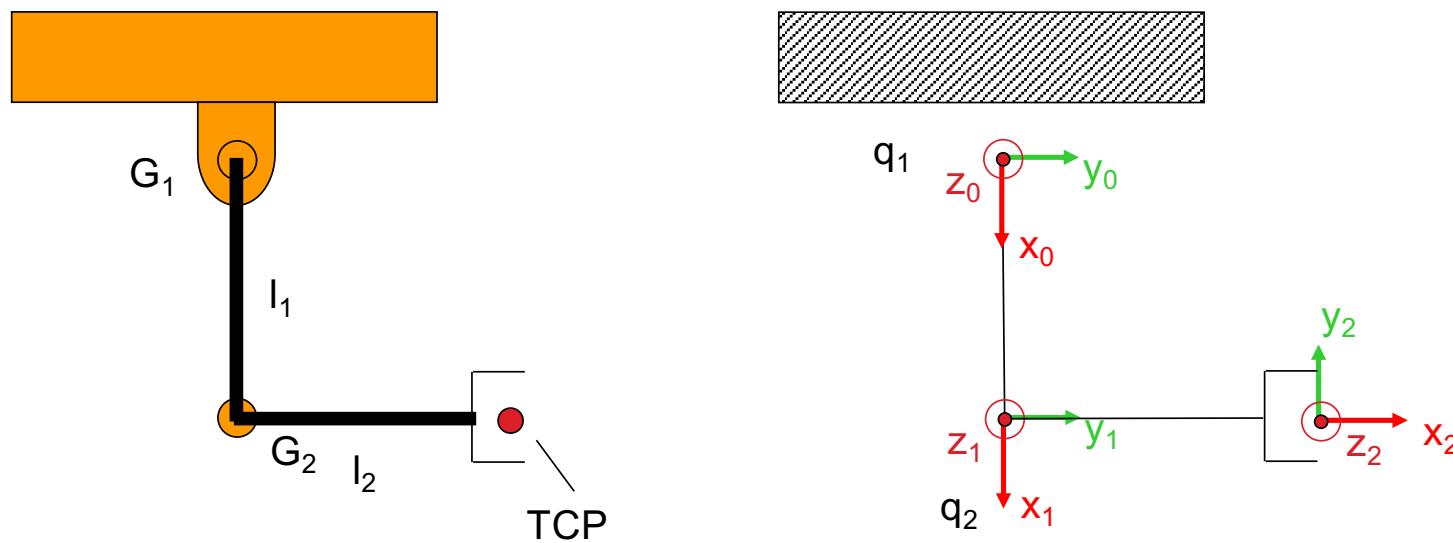


Lösungsmethoden zum inversen kinematischen Problem

- Alle Systeme mit rotatorischen und translatorischen Gelenken und sechs Freiheitsgraden in einer seriellen Kette sind lösbar
- Praktisch alle Industrie-Roboter sind so gebaut, dass eine analytische Lösung existiert



Rückwärtstransformation eines Zweigelenkroboters

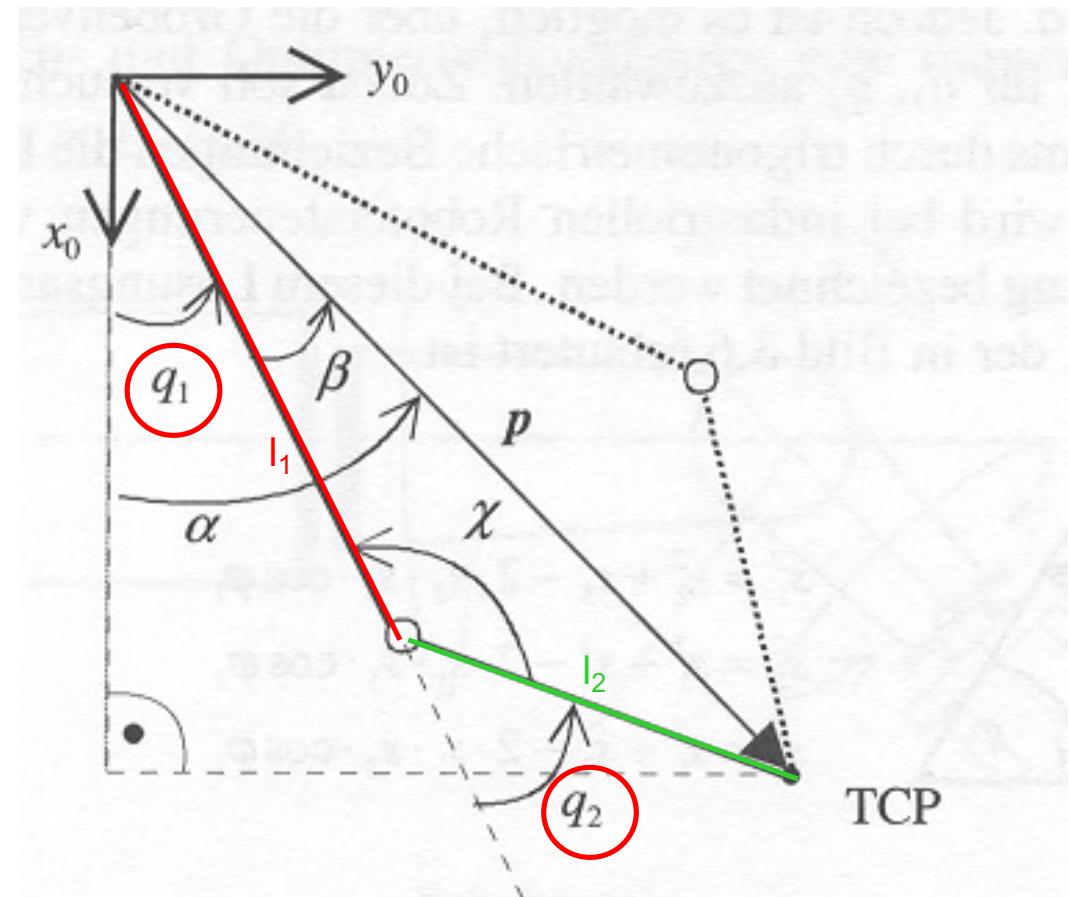


Rückwärtstransformation eines Zweigelenkroboters

1) Geometrische Lösung

Gegeben: $p = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$

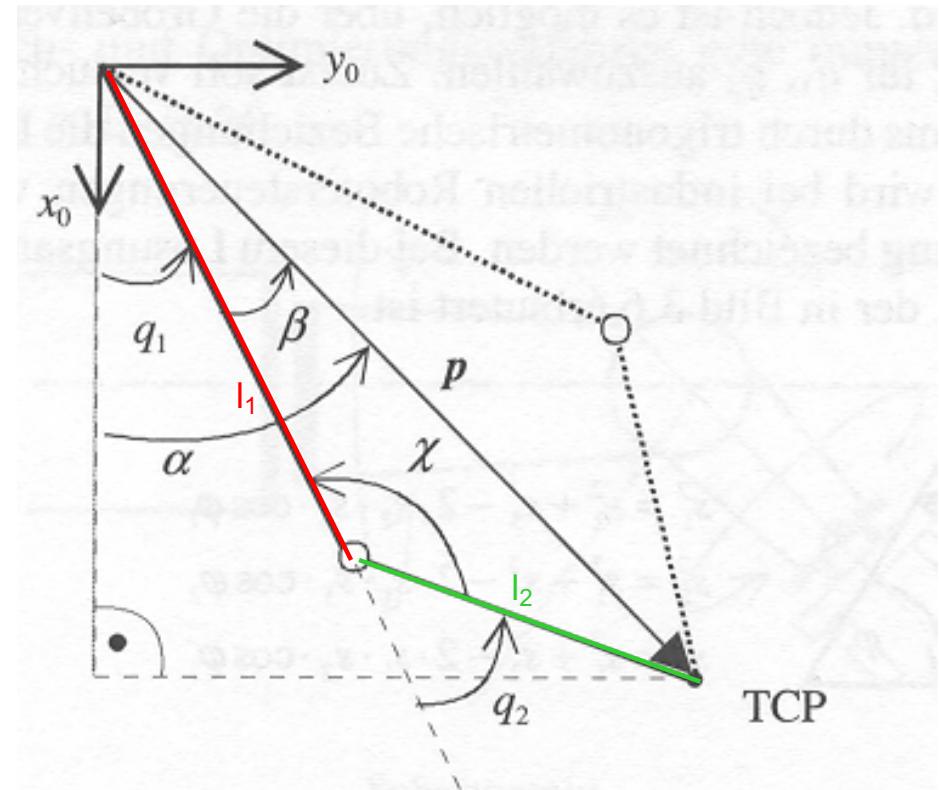
Gesucht: q_1, q_2



Rückwärtstransformation eines Zweigelenkroboters

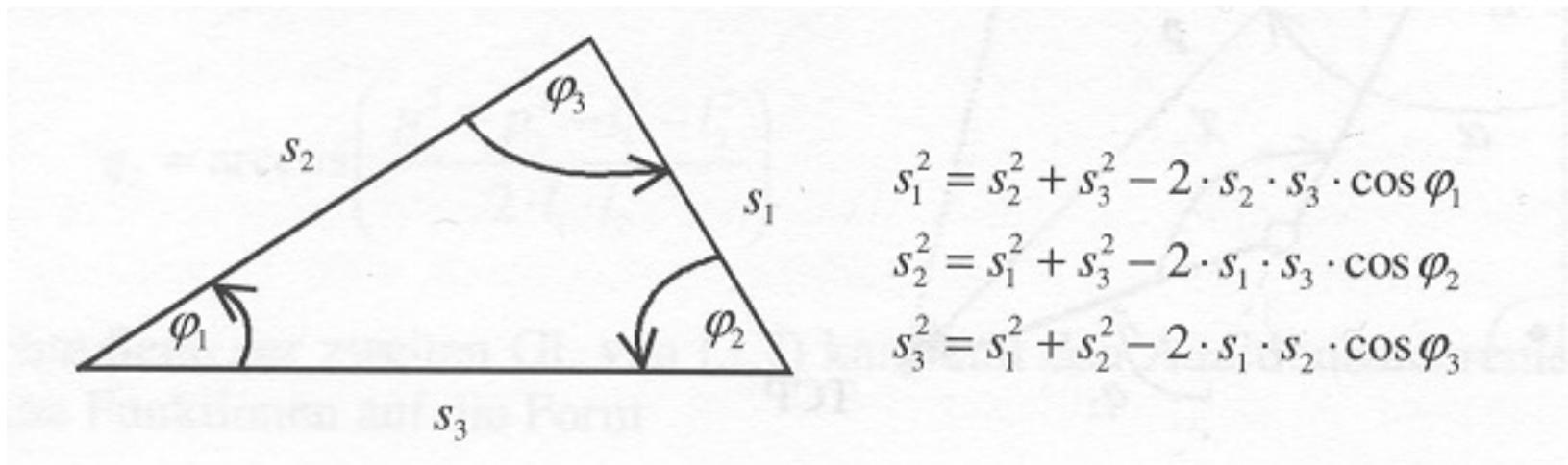
- Berechnung des Hilfswinkels α

$$\alpha = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$



Rückwärtstransformation eines Zweigelenkroboters

■ Kosinussatz

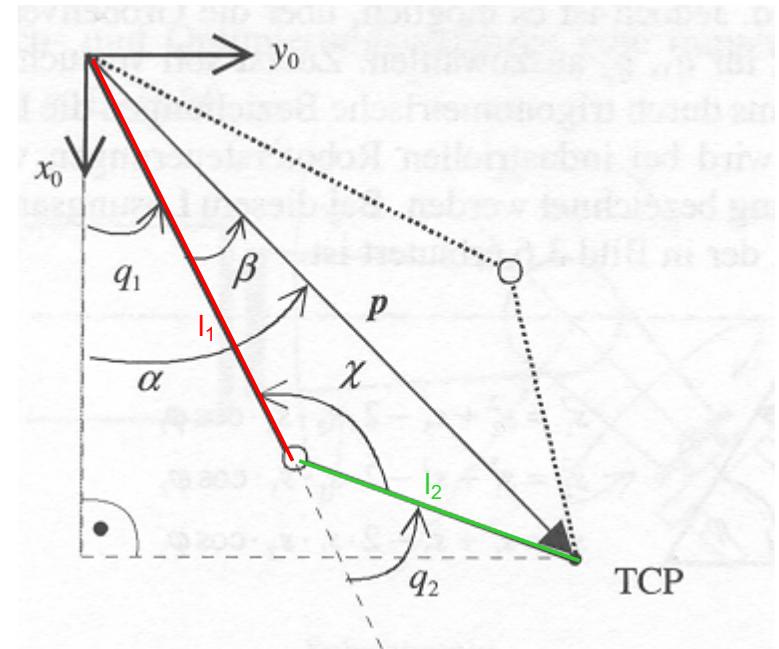


Rückwärtstransformation eines Zweigelenkroboters

- Mit dem Kosinussatz:

$$l_2^2 = l_1^2 + |\vec{p}|^2 - 2l_1|\vec{p}|\cos\beta \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{l_1^2 + |\vec{p}|^2 - l_2^2}{2l_1|\vec{p}|}\right)$$

$$|\vec{p}|^2 = l_2^2 + l_1^2 - 2l_1l_2 \cos\chi \Rightarrow \chi = \arccos\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - |\vec{p}|^2}{2l_1l_2}\right)$$



Rückwärtstransformation eines Zweigelenkroboters

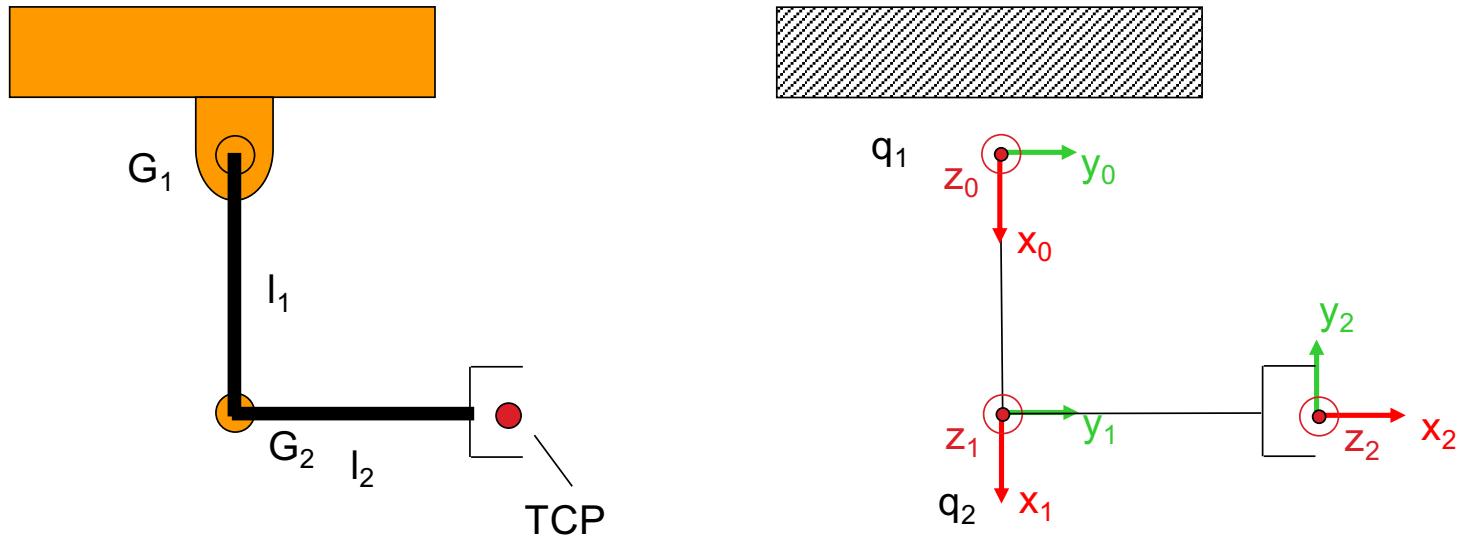
- Geometrische Lösung für q_1, q_2 gemäß Abbildung :

$$q_1 = \alpha - \beta = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right) - \arccos\left(\frac{l_1^2 + |\vec{p}|^2 - l_2^2}{2l_1|\vec{p}|\right)$$

$$q_2 = \pi - \chi = \pi - \arccos\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - |\vec{p}|^2}{2l_1l_2}\right)$$



Rückwärtstransformation eines Zweigelenkroboters



Rückwärtstransformation eines Zweigelenkroboters

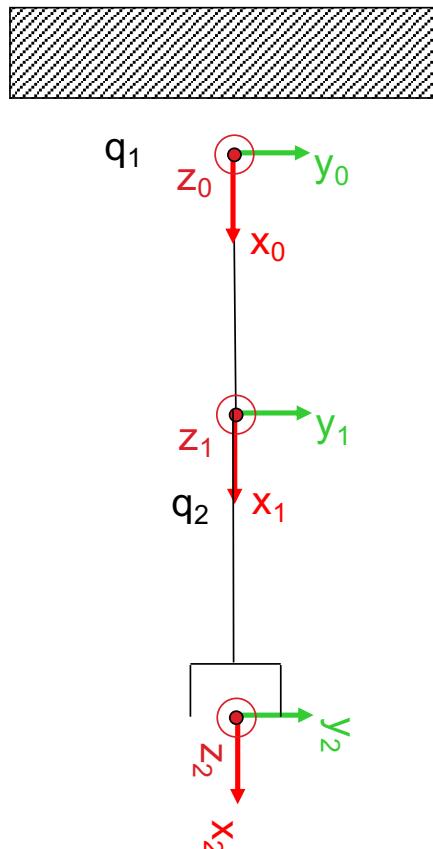
2) Algebraische Lösung

Aufstellung der Denavit-Hartenberg-Matrizen:

Gelenk i:
$$\begin{aligned} {}_{i-1}^i T(\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i) \\ = R_{z_{i-1}}(\theta_i) \cdot Trans(0,0, d_i) \cdot Trans(a_i, 0, 0) \cdot R_{x_i}(\alpha_i) \\ = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Rückwärtstransformation eines Zweigelenkroboters



$\theta, d, a, \alpha?$

1. Überführung der x_{i-1} -Achse von K_{i-1} in die x_i -Achse von K_i durch Rotation um die z_{i-1} -Achse um den Winkel θ_i
2. Minimierung des Abstands der KO-Ursprünge durch Translation um d_i entlang der z_{i-1} -Achse
3. Verschiebung des Ursprungs von K_{i-1} auf den Ursprung von K_i durch Translation um a_i entlang der x_i -Achse von K_i
4. Überführung der z_{i-1} -Achse in z_i -Achse durch Rotation um die x_i -Achse um den Winkel α_i



Rückwärtstransformation eines Zweigelenkroboters

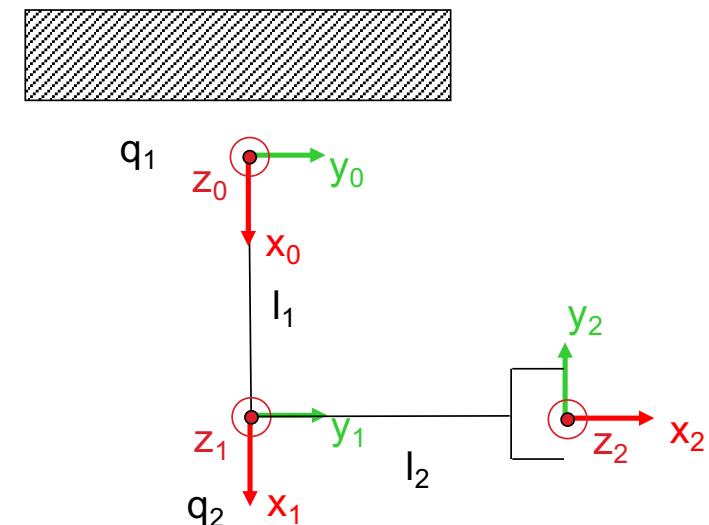
- Aufstellung der Denavit-Hartenberg-Matrizen des Manipulators:

$\theta = q_1, d = 0, a = l_1, \alpha = 0$:

$${}^0_1T(q_1) = \begin{pmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & l_1 \cos q_1 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & l_1 \sin q_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\theta = q_2, d = 0, a = l_2, \alpha = 0$:

$${}^1_2T(q_2) = \begin{pmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & l_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & l_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Rückwärtstransformation eines Zweigelenkroboters

Vorwärtstransformation:

$${}^2T_0(q_1, q_2) = {}^1T_0(q_1) {}^2T_1(q_2)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos q_1 \cos q_2 - \sin q_1 \sin q_2 & -(\cos q_1 \sin q_2 + \sin q_1 \cos q_2) & 0 & l_2(\cos q_1 \cos q_2 - \sin q_1 \sin q_2) + l_1 \cos q_1 \\ \cos q_1 \sin q_2 + \sin q_1 \cos q_2 & \cos q_1 \cos q_2 - \sin q_1 \sin q_2 & 0 & l_2(\cos q_1 \sin q_2 + \sin q_1 \cos q_2) + l_1 \sin q_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$= \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Rückwärtstransformation eines Zweigelenkroboters

Nicht-lineares Gleichungssystem für q_1, q_2 :

$$p_x = l_2(\cos q_1 \cos q_2 - \sin q_1 \sin q_2) + l_1 \cos q_1$$

$$p_y = l_2(\cos q_1 \sin q_2 + \sin q_1 \cos q_2) + l_1 \sin q_1$$



Rückwärtstransformation eines Zweigelenkroboters

- Additionstheoreme:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$



Rückwärtstransformation eines Zweigelenkroboters

Nicht-lineares Gleichungssystem für q_1, q_2 :

$$\begin{aligned} p_x &= l_2(\cos q_1 \cos q_2 - \sin q_1 \sin q_2) + l_1 \cos q_1 \\ &= l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_1 \cos q_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_y &= l_2(\cos q_1 \sin q_2 + \sin q_1 \cos q_2) + l_1 \sin q_1 \\ &= l_2 \sin(q_1 + q_2) + l_1 \sin q_1 \end{aligned}$$



Rückwärtstransformation eines Zweigelenkroboters

Lösungsansatz zur Bestimmung von q_2 :

$$\begin{aligned} p_x^2 + p_y^2 &= l_2^2 + 2l_1l_2(\sin(q_1 + q_2)\sin q_1 + \cos(q_1 + q_2)\cos q_1) + l_1^2 \\ \Rightarrow \sin(q_1 + q_2)\sin q_1 + \cos(q_1 + q_2)\cos q_1 &= \frac{p_x^2 + p_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \\ &= \cos q_2 \quad (\text{Additionstheorem des cos!}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow q_2 = \arccos\left(\frac{p_x^2 + p_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}\right)$$



Rückwärtstransformation eines Zweigelenkroboters

Lösungsansatz zur Bestimmung von q_1 :

$$p_x = (l_1 + l_2 \cos q_2) \cos q_1 - l_2 \sin q_2 \sin q_1$$

$$p_y = (l_1 + l_2 \cos q_2) \sin q_1 + l_2 \sin q_2 \cos q_1$$

Substitution: $k_1 := l_1 + l_2 \cos q_2$

$$k_2 := l_2 \sin q_2$$

damit:

$$p_x = k_1 \cos q_1 - k_2 \sin q_1$$

$$p_y = k_1 \sin q_1 + k_2 \cos q_1$$



Rückwärtstransformation eines Zweigelenkroboters

$$\Rightarrow \cos q_1 = \frac{1}{k_1} (p_x + k_2 \sin q_1)$$

$$p_y = k_1 \sin q_1 + \frac{k_2}{k_1} (p_x + k_2 \sin q_1)$$

Erste Variante: Auflösen
nach $\cos q_1$ und
Einsetzen in Gleichung
für p_y .

$$= \left(k_1 + \frac{k_2^2}{k_1} \right) \sin q_1 + \frac{k_2}{k_1} p_x$$

$$\Rightarrow \sin q_1 = \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \left(p_y - \frac{k_2}{k_1} p_x \right)$$



Rückwärtstransformation eines Zweigelenkroboters

$$\Rightarrow q_1 = \arcsin\left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \left(p_y - \frac{k_2}{k_1} p_x \right)\right)$$



Rückwärtstransformation eines Zweigelenkroboters

Polarkoordinaten für k_1, k_2 :

$$k_1 = r \cdot \cos \gamma$$

$$k_2 = r \cdot \sin \gamma$$

$$\tan \gamma = \frac{k_2}{k_1}$$

damit:

$$p_x = r \cdot (\cos \gamma \cos q_1 - \sin \gamma \sin q_1)$$

$$p_y = r \cdot (\cos \gamma \sin q_1 + \sin \gamma \cos q_1)$$

Zweite Variante:
Polarkoordinaten



Rückwärtstransformation eines Zweigelenkroboters

$$p_x = r \cos(\gamma + q_1)$$

$$p_y = r \sin(\gamma + q_1)$$

$$\Rightarrow \tan(\gamma + q_1) = \frac{\sin(\gamma + q_1)}{\cos(\gamma + q_1)} = \frac{p_y}{p_x}$$

$$\Rightarrow q_1 = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right) - \gamma = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right) - \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$$



Rückwärtstransformation eines Zweigelenkroboters

- Algebraische Lösung für q_1, q_2 :

$$q_1 = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right) - \arctan\left(\frac{l_2 \sin q_2}{l_1 + l_2 \cos q_2}\right)$$

$$q_2 = \arccos\left(\frac{p_x^2 + p_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right)$$



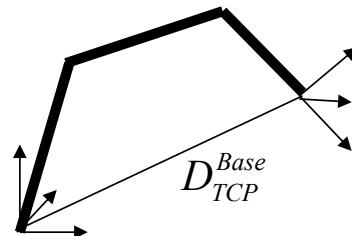
Lösung des inversen kinematischen Problems für 6-Achs-Kinematiken

- In speziellen Fällen können Manipulatoren mit sechs Freiheitsgraden analytisch gelöst werden
- Für 6-Achs-Roboter mit einer Zentralhand existiert eine analytische Lösung
- Zentralhand: die letzten drei Achsen eines 6-Achs-Roboters schneiden sich in einem Punkt



Rückwärtstransformation: Analytisches Verfahren (1)

Berechnung der Rückwärtstransformation
(Inverses Kinematisches Modell) mit Hilfe der Vorwärtstransformation



$$\mathbf{D}_{TCP}^{Base} = \prod_{i=1}^{TCP} \mathbf{D}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{ex} & \mathbf{y}_{ex} & \mathbf{z}_{ex} & \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_{ey} & \mathbf{y}_{ey} & \mathbf{z}_{ey} & \mathbf{y}_s \\ \mathbf{x}_{ez} & \mathbf{y}_{ez} & \mathbf{z}_{ez} & \mathbf{z}_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{y}_s \\ \mathbf{z}_s \\ \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix}$$

Ausgangspunkt: Frame-Darstellung des TCPs
Umrechnung der Raumwinkel in Matrixdarstellung:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix} \rightarrow R(z, \boldsymbol{\phi}) \cdot R(y, \boldsymbol{\theta}) \cdot R(x, \boldsymbol{\psi}); \quad z, y, x \text{ sind die Koordinatenachsen des Basiskoordinatensystems}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{ex} & \mathbf{y}_{ex} & \mathbf{z}_{ex} \\ \mathbf{x}_{ey} & \mathbf{y}_{ey} & \mathbf{z}_{ey} \\ \mathbf{x}_{ez} & \mathbf{y}_{ez} & \mathbf{z}_{ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \boldsymbol{\phi} & -\sin \boldsymbol{\phi} & 0 \\ \sin \boldsymbol{\phi} & \cos \boldsymbol{\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \boldsymbol{\theta} & 0 & -\sin \boldsymbol{\theta} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \boldsymbol{\theta} & 0 & \cos \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \boldsymbol{\psi} & -\sin \boldsymbol{\psi} \\ 0 & \sin \boldsymbol{\psi} & \cos \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix}$$



Rückwärtstransformation:
Analytisches Verfahren (2)

Aufstellen von 12 Gleichungen durch Koeffizientenvergleich der 9 Ausdrücke welche die Orientierung beschreiben (Rotationsmatrix) und der 3 Ausdrücke welche die Position beschreiben im Direkten Kinematischen Modell D_{TCP}^{Base} mit den 12 numerischen Werten die aus den 6 TCP-Werten berechnet werden.

Auflösung der 12 Gleichungen der Vorwärtstransformation nach den Gelenkvariablen θ_i (Rotationen), l_i (Translationen) .

Position	$x_s = f_1(\theta_i, l_i)$	$\vec{x}_e = \vec{g}_1(\theta_i, l_i)$
	$y_s = f_2(\theta_i, l_i)$	$\vec{y}_e = \vec{g}_2(\theta_i, l_i)$
	$z_s = f_3(\theta_i, l_i)$	$\vec{z}_e = \vec{g}_3(\theta_i, l_i)$
	3-dimens. Orientierungs- einheitsvektoren	$i = 1, \dots, 6$

Problem: Lösung nach den Gelenkvariablen mit diesen 12 Gleichungen oftmals nicht möglich (Summen von Sinus- und Cosinusprodukten!)

Lösung: Systematische Entwicklung weiterer je 12 Gleichungen und Auswahl geeigneter Gleichungen und weiterer kinematischer Beziehungen

Anforderung: Intuition und viel Erfahrung.



Rückwärtstransformation:
Analytisches Verfahren (3)

Entwicklung weiterer Gleichungen:

1. $W = D_{TCP}^{Base} = D_1^{Base} \cdot D_2^1 \cdot \underbrace{D_3^2 \cdot D_4^3 \cdot D_5^4 \cdot D_6^5 \cdot D_{TCP}^6}_{D_{TCP}^2}$
2. $D_1^{Base^{-1}} W = D_{TCP}^1$ D_{TCP}^1
3. $D_2^{1^{-1}} D_1^{Base^{-1}} W = D_{TCP}^2$ D_{TCP}^1
4. $D_3^{2^{-1}} D_2^{1^{-1}} D_1^{Base^{-1}} W = D_{TCP}^3$
5. $D_4^{3^{-1}} D_3^{2^{-1}} D_2^{1^{-1}} D_1^{Base^{-1}} W = D_{TCP}^4$
6. $D_5^{4^{-1}} D_4^{3^{-1}} D_3^{2^{-1}} D_2^{1^{-1}} D_1^{Base^{-1}} W = D_{TCP}^5$

- Jede der 6 Gleichungen führt zu 12 nichttrivialen einzelnen Gleichungen.
- Die linken Seiten enthalten die ersten i Gelenkvariablen, die rechten Seiten die Gelenkvariablen ($i+1$ bis n).
- Auswahl geeigneter Gleichungen führt zur Lösung des Problems.



Rückwärtstransformation:

Analytisches Verfahren (4) – Erinnerung Matrizeninversion (!)

Die zur Lösung notwendigen Matrizeninversionen werden stark vereinfacht durch die spezielle Struktur einer homogenen Matrix.

$$T = \begin{bmatrix} R & P_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} x_{ex} & y_{ex} & z_{ex} & x_s \\ x_{ey} & y_{ey} & z_{ey} & y_s \\ x_{ez} & y_{ez} & z_{ez} & z_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es ergibt sich die inverse Matrix zu:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T \cdot P_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Transposition des Rotationsteils
- $-rx_e = -(x_{ex}x_s + x_{ey}y_s + x_{ez}z_s)$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} x_{ex} & x_{ey} & x_{ez} & -rx_e \\ y_{ex} & y_{ey} & y_{ez} & -ry_e \\ z_{ex} & z_{ey} & z_{ez} & -rz_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- Vereinfachung der Gleichungen durch trigonometrische Umrechnungsformeln

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 * \cos \theta_2 + \cos \theta_1 * \sin \theta_2$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 * \cos \theta_2 - \sin \theta_1 * \sin \theta_2$$

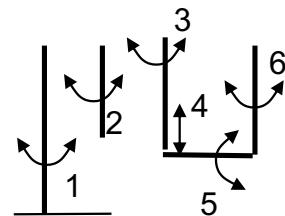
$$\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \sin(\theta_1 + \theta_2) * \cos \theta_3 + \cos(\theta_1 + \theta_2) * \sin \theta_3$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \cos(\theta_1 + \theta_2) * \cos \theta_3 - \sin(\theta_1 + \theta_2) * \sin \theta_3$$



Rückwärtstransformation: Analytisches Verfahren (5)

Beispiel zur Lösung des Inversen Kinematischen Problems für einen Roboter mit 6-Achsen (Aufstellung von 252 Gleichungen):



$$\mathbf{D}_{TCP}^{Base} = \mathbf{D}_1^{Base} \cdot \mathbf{D}_2^1 \cdot \dots \cdot \mathbf{D}_i^{i-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{D}_{TCP}^{TCP-1}$$

$$\mathbf{D}^{i-1}_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \triangleq A_i$$

scara.6.ltb					
	Typ	θ_i	d_i	a_i	α_i
Gelenk 1	Rot.	θ_1	0	a_1	0
Gelenk 2	Rot.	θ_2	0	a_2	0
Gelenk 3	Rot.	θ_3	0	0	0
Gelenk 4	Trans.	0	D_4	0	90
Gelenk 5	Rot.	θ_5	0	0	90
Gelenk 6	Rot.	θ_6	0	0	0

$\underbrace{z_{i-1}}_{z_{i-1}}$ $\underbrace{x_i}_{x_i}$

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & a_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & a_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & 0 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & D_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rückwärtstransformation: Analytisches Verfahren (6)

Vereinfachung der Gleichungen durch trigonometrische Umrechnungsformeln:

$$\text{z.B. } S_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2$$

Gleichungen $A_{i-1}^{-1} \cdot A_i^{-1} \cdots {}^R T_H = A_i \cdots A_6$

$${}^R T_H = A_1 \cdots A_6$$

$$1: N_x = C_{123}C_5C_6 + S_{123}S_6$$

$$2: O_x = C_6S_{123} - C_{123}C_5S_6$$

$$3: A_x = C_{123}S_5$$

$$4: P_x = a_2C_{12} + a_1C_1$$

$$5: N_y = C_5C_6S_{123} - C_{123}S_6$$

$$6: O_y = -(C_5S_{123}S_6 + C_{123}C_6)$$

$$7: A_y = S_{123}S_5$$

$$8: P_y = a_2S_{12} + a_1S_1$$

$$9: N_z = C_6S_5$$

$$10: O_z = -S_5S_6$$

$$11: A_z = -C_5$$

$$12: P_z = D_4$$

N: Einheitsvektor Ri. X

O: Einheitsvektor Ri. Y

A: Einheitsvektor Ri. Z

P: Position (Ursprung)

$$D_{TCP}^{Base} = \prod_{i=1}^{TCP} D_i^{i-1} = \begin{bmatrix} N & O & A & P \\ x_{ex} & y_{ex} & z_{ex} & x_s \\ x_{ey} & y_{ey} & z_{ey} & y_s \\ x_{ez} & y_{ez} & z_{ez} & z_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{=} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}$$



Analytisches Verfahren (7)

Entwicklung weiterer Gleichungen durch **Multiplikation der inversen Teilmatrizen von links** und **Koeffizientenvergleich** der Elemente der Ergebnismatrizen der linken und rechten Seite

$$A_1^{-1} \cdot {}^R T_H = A_2 \cdot \dots \cdot A_6$$

$$13: N_x C_1 + N_y S_1 = C_{23} C_5 C_6 + S_{23} S_6$$

$$14: O_x C_1 + O_y S_1 = C_6 S_{23} - C_{23} C_5 S_6$$

$$15: A_x C_1 + A_y S_1 = C_{23} S_5$$

$$16: P_x C_1 + P_y S_1 - a_1 = a_2 C_2$$

$$17: N_y C_1 - N_x S_1 = C_5 C_6 S_{23} - C_{23} S_6$$

$$18: O_y C_1 - O_x S_1 = - (C_5 S_{23} S_6 + C_{23} C_6)$$

$$19: A_y C_1 - A_x S_1 = S_{23} S_5$$

$$20: P_y C_1 - P_x S_1 = a_2 S_2$$

$$21: N_z = C_6 S_5$$

$$22: O_z = - S_5 S_6$$

$$23: A_z = - C_5$$

$$24: P_z = D_4$$

$$A_2^{-1} \cdot A_1^{-1} \cdot {}^R T_H = A_3 \cdot \dots \cdot A_6$$

$$25: N_x C_{12} + N_y S_{12} = C_3 C_5 C_6 + S_3 S_6$$

$$26: O_x C_{12} + O_y S_{12} = C_6 S_3 - C_3 C_5 S_6$$

$$27: A_x C_{12} + A_y S_{12} = C_3 S_5$$

$$28: P_x C_{12} - a_1 C_2 + P_y S_{12} - a_2 = 0$$

$$29: N_y C_{12} - N_x S_{12} = C_5 C_6 S_3 - C_3 S_6$$

$$30: O_y C_{12} - O_x S_{12} = - (C_5 S_3 S_6 + C_3 C_6)$$

$$31: A_y C_{12} - A_x S_{12} = S_3 S_5$$

$$32: P_y C_{12} - P_x S_{12} + a_1 S_2 = 0$$

$$33: N_z = C_6 S_5$$

$$34: O_z = - S_5 S_6$$

$$35: A_z = - C_5$$

$$36: P_z = D_4$$



Analytisches Verfahren (8)

$$A_3^{-1} \cdot \dots \cdot A_1^{-1} \cdot {}^R T_H = A_4 \cdot \dots \cdot A_6$$

$$37: N_x C_{123} + N_y S_{123} = C_5 C_6$$

$$38: O_x C_{123} + O_y S_{123} = -C_5 S_6$$

$$39: A_x C_{123} + A_y S_{123} = S_5$$

$$40: P_x C_{123} - a_1 C_{23} + P_y S_{123} - a_2 C_3 = 0$$

$$41: N_y C_{123} - N_x S_{123} = -S_6$$

$$42: O_y C_{123} - O_x S_{123} = -C_6$$

$$43: A_y C_{123} - A_x S_{123} = 0$$

$$44: P_y C_{123} - P_x S_{123} + a_2 S_3 + a_1 S_{23} = 0$$

$$45: N_z = C_6 S_5$$

$$46: O_z = -S_5 S_6$$

$$47: A_z = -C_5$$

$$48: P_z = D_4$$

$$A_4^{-1} \cdot \dots \cdot A_1^{-1} \cdot {}^R T_H = A_5 \cdot A_6$$

$$49: N_x C_{123} + N_y S_{123} = C_5 C_6$$

$$50: O_x C_{123} + O_y S_{123} = -C_5 S_6$$

$$51: A_x C_{123} + A_y S_{123} = S_5$$

$$52: P_x C_{123} - a_1 C_{23} + P_y S_{123} - a_2 C_3 = 0$$

$$53: N_z = C_6 S_5$$

$$54: O_z = -S_5 S_6$$

$$55: A_z = -C_5$$

$$56: P_z - D_4 = 0$$

$$57: N_x S_{123} - N_y C_{123} = S_6$$

$$58: O_x S_{123} - O_y C_{123} = C_6$$

$$59: A_x S_{123} - A_y C_{123} = 0$$

$$60: P_x S_{123} - a_2 S_3 - (a_1 S_{23} + P_y C_{123}) = 0$$



Analytisches Verfahren (9)

$$A_5^{-1} \cdot \dots \cdot A_1^{-1} \cdot \dots \cdot {}^R T_H = A_6$$

$$61: C_5(N_x C_{123} + N_y S_{123}) + N_z S_5$$

$$62: C_5(O_x C_{123} + O_y S_{123}) + O_z S_5$$

$$63: C_5(A_x C_{123} + A_y S_{123}) + A_z S_5$$

$$64: S_5(P_z - D_4) + C_5(P_x C_{123} - a_1 C_{23} + P_y S_{123} - a_2 C_3) = 0$$

$$65: N_x S_{123} - N_y C_{123}$$

$$66: O_x S_{123} - O_y C_{123}$$

$$67: A_x S_{123} - A_y C_{123}$$

$$68: P_x S_{123} - a_2 S_3 - (a_1 S_{23} + P_y C_{123})$$

$$69: S_5(N_x C_{123} + N_y S_{123}) - N_z C_5$$

$$70: S_5(O_x C_{123} + O_y S_{123}) - O_z C_5$$

$$71: S_5(A_x C_{123} + A_y S_{123}) - A_z C_5 = 1$$

$$72: S_5(P_x C_{123} - a_1 C_{23} + P_y S_{123} - a_2 C_3) + C_5(D_4 - P_z) = 0$$

Gleichungen

$${}^R T_H \cdot A_6^{-1} \cdot \dots \cdot A_{6-i+2}^{-1} = A_1 \cdot \dots \cdot A_{6-i+1}$$

Entwicklung weiterer Gleichungen durch **Multiplikation der inversen Teilmatrizen von rechts und Koeffizientenvergleich** der Elemente der Ergebnismatrizen der linken und rechten Seite

$$\begin{array}{ll} = C_6 & {}^R T_H \cdot A_6^{-1} = A_1 \cdot \dots \cdot A_5 \\ = -S_6 & 73: N_x C_6 - O_x S_6 = C_{123} C_5 \\ = 0 & 74: N_x S_6 + O_x C_6 = S_{123} \\ = S_6 & 75: A_x = C_{123} S_5 \\ = C_6 & 76: P_x = a_2 C_{12} + a_1 C_1 \\ = 0 & 77: N_y C_6 - O_y S_6 = C_5 S_{123} \\ = 0 & 78: N_y S_6 + O_y C_6 = -C_{123} \\ = 0 & 79: A_y = S_{123} S_5 \\ = 0 & 80: P_y = a_2 S_{12} + a_1 S_1 \\ = 0 & 81: N_z C_6 - O_z S_6 = S_5 \\ = 1 & 82: N_z S_6 + O_z C_6 = 0 \\ = 0 & 83: A_z = -C_5 \\ = 0 & 84: P_z = D_4 \end{array}$$



Analytisches Verfahren (10)

$${}^R T_H \cdot A_6^{-1} \cdot A_5^{-1} = A_1 \cdot \dots \cdot A_4$$

$$85: C_5(N_x C_6 - O_x S_6) + A_x S_5 = C_{123}$$

$$86: S_5(N_x C_6 - O_x S_6) - A_x C_5 = 0$$

$$87: N_x S_6 + O_x C_6 = S_{123}$$

$$88: P_x = a_2 C_{12} + a_1 C_1$$

$$89: C_5(N_y C_6 - O_y S_6) + A_y S_5 = S_{123}$$

$$90: S_5(N_y C_6 - O_y S_6) - A_y C_5 = 0$$

$$91: N_y S_6 + O_y C_6 = -C_{123}$$

$$92: P_y = a_2 S_{12} + a_1 S_1$$

$$93: C_5(N_z C_6 - O_z S_6) + A_z S_5 = 0$$

$$94: S_5(N_z C_6 - O_z S_6) - A_z C_5 = 1$$

$$95: N_z S_6 + O_z C_6 = 0$$

$$96: P_z = D_4$$

$${}^R T_H \cdot A_6^{-1} \cdot \dots \cdot A_4^{-1} = A_1 \cdot \dots \cdot A_3$$

$$97: C_5(N_x C_6 - O_x S_6) + A_x S_5 = C_{123}$$

$$98: -(N_x S_6 + O_x C_6) = -S_{123}$$

$$99: S_5(N_x C_6 - O_x S_6) - A_x C_5 = 0$$

$$100: D_4(S_5(O_x S_6 - N_x C_6) + A_x C_5) + P_x = a_2 C_{12} + a_1 C_1$$

$$101: C_5(N_y C_6 - O_y S_6) + A_y S_5 = S_{123}$$

$$102: -(N_y S_6 + O_y C_6) = C_{123}$$

$$103: S_5(N_y C_6 - O_y S_6) - A_y C_5 = 0$$

$$104: D_4(S_5(O_y S_6 - N_y C_6) + A_y C_5) + P_y = a_2 S_{12} + a_1 S_1$$

$$105: C_5(N_z C_6 - O_z S_6) + A_z S_5 = 0$$

$$106: -(N_z S_6 + O_z C_6) = 0$$

$$107: S_5(N_z C_6 - O_z S_6) - A_z C_5 = 1$$

$$108: D_4(S_5(O_z S_6 - N_z C_6) + A_z C_5) + P_z = 0$$



Analytisches Verfahren (11)

$${}^R T_H \cdot A_6^{-1} \cdot \dots \cdot A_3^{-1} = A_1 \cdot A_2$$

$$109: C_3 C_5 (N_x C_6 - O_x S_6) + S_3 N_x S_6 + C_3 A_x S_5 + S_3 O_x C_6 = C_{12}$$

$$110: N_x (S_3 C_5 C_6 - C_3 S_6) - O_x (S_3 C_5 S_6 + C_3 C_6) + A_x S_3 S_5 = -S_{12}$$

$$111: S_5 (N_x C_6 - O_x S_6) - A_x C_5 = 0$$

$$112: D_4 (S_5 (O_x S_6 - N_x C_6) + A_x C_5) + P_x = a_2 C_{12} + a_1 C_1$$

$$113: C_3 C_5 (N_y C_6 - O_y S_6) + S_3 N_y S_6 + C_3 A_y S_5 + S_3 O_y C_6 = S_{12}$$

$$114: N_y (S_3 C_5 C_6 - C_3 S_6) - O_y (S_3 C_5 S_6 + C_3 C_6) + A_y S_3 S_5 = C_{12}$$

$$115: S_5 (N_y C_6 - O_y S_6) - A_y C_5 = 0$$

$$116: D_4 (S_5 (O_y S_6 - N_y C_6) + A_y C_5) + P_y = a_2 S_{12} + a_1 S_1$$

$$117: C_3 C_5 (N_z C_6 - O_z S_6) + S_3 N_z S_6 + C_3 A_z S_5 + S_3 O_z C_6 = 0$$

$$118: N_z (S_3 C_5 C_6 - C_3 S_6) - O_z (S_3 C_5 S_6 + C_3 C_6) + A_z S_3 S_5 = 0$$

$$119: S_5 (N_z C_6 - O_z S_6) - A_z C_5 = 1$$

$$120: D_4 (S_5 (O_z S_6 - N_z C_6) + A_z C_5) + P_z = 0$$



Analytisches Verfahren (12)

$${}^R T_H \cdot A_6^{-1} \cdot \dots \cdot A_2^{-1} = A_1$$

$$121: C_{23}C_5(N_xC_6 - O_xS_6) + S_{23}N_xS_6 + C_{23}A_xS_5 + S_{23}O_xC_6 = C_1$$

$$122: N_x(S_{23}C_5C_6 - C_{23}S_6) - O_x(S_{23}C_5S_6 + C_{23}C_6) + A_xS_{23}S_5 = -S_1$$

$$123: S_5(N_xC_6 - O_xS_6) A_xC_5 = 0$$

$$124: O_xa_2(C_3C_5S_6 - S_3C_6) - N_xa_2(C_3C_5C_6 + S_3S_6) + D_4S_5(O_xS_6 - N_xC_6) + A_x(D_4C_5 - a_2C_3S_5) + P_x = a_1C_1$$

$$125: C_{23}C_5(N_yC_6 - O_yS_6) + S_{23}N_yS_6 + C_{23}A_yS_5 + S_{23}O_yC_6 = S_1$$

$$126: N_y(S_{23}C_5C_6 - C_{23}S_6) - O_y(S_{23}C_5S_6 + C_{23}C_6) + A_yS_{23}S_5 = C_1$$

$$127: S_5(N_yC_6 - O_yS_6) - A_yC_5 = 0$$

$$128: O_ya_2(C_3C_5S_6 - S_3C_6) - N_ya_2(C_3C_5C_6 + S_3S_6) + D_4S_5(O_yS_6 - N_yC_6) + A_y(D_4C_5 - a_2C_3S_5) + P_y = a_1S_1$$

$$129: C_{23}C_5(N_zC_6 - O_zS_6) + S_{23}N_zS_6 + C_{23}A_zS_5 + S_{23}O_zC_6 = 0$$

$$130: N_z(S_{23}C_5C_6 - C_{23}S_6) - O_z(S_{23}C_5S_6 + C_{23}C_6) + A_zS_{23}S_5 = 0$$

$$131: S_5(N_zC_6 - O_zS_6) - A_zC_5 = 1$$

$$132: O_za_2(C_3C_5S_6 - S_3C_6) - N_za_2(C_3C_5C_6 + S_3S_6) + D_4S_5(O_zS_6 - N_zC_6) + A_z(D_4C_5 - a_2C_3S_5) + P_z = 0$$



Analytisches Verfahren (13)

Entwicklung weiterer Gleichungen durch **Multiplikation der inversen Teilmatrizen von links und und rechts und Koeffizientenvergleich** der Elemente der Ergebnismatrizen der linken und rechten Seite

<p>Gleichungen $A_i^{-1} \cdot \dots \cdot A_1^{-1} \cdot {}^R T_H \cdot A_n^{-1} \cdot \dots \cdot A_{j-1}^{-1} = A_{i+1} \cdot \dots \cdot A_j$</p> <p>$A_4^{-1} \cdot \dots \cdot A_1^{-1} \cdot {}^R T_H \cdot A_6^{-1} = A_5$</p> <p>133: $(N_x C_{123} + N_y S_{123})C_6 - (O_x C_{123} + O_y S_{123})S_6 = C_5$</p> <p>134: $(N_x C_{123} + N_y S_{123})S_6 + (O_x C_{123} + O_y S_{123})C_6 = 0$</p> <p>135: $A_x C_{123} + A_y S_{123} = S_5$</p> <p>136: $P_x C_{123} - a_1 C_{23} + P_y S_{123} - a_2 C_3 = 0$</p> <p>137: $N_z C_6 - O_z S_6 = S_5$</p> <p>138: $N_z S_6 + O_z C_6 = 0$</p> <p>139: $A_z = -C_5$</p> <p>140: $P_z - D_4 = 0$</p> <p>141: $(N_x S_{123} - N_y C_{123})C_6 - (O_x S_{123} - O_y C_{123})S_6 = 0$</p> <p>142: $(N_x S_{123} - N_y C_{123})S_6 + (O_x S_{123} - O_y C_{123})C_6 = 1$</p> <p>143: $A_x S_{123} - A_y C_{123} = 0$</p> <p>144: $P_x S_{123} - a_2 S_3 - (a_1 S_{23} + P_y C_{123}) = 0$</p>	<p>$A_3^{-1} \cdot \dots \cdot A_1^{-1} \cdot {}^R T_H \cdot A_6^{-1} = A_4 \cdot A_5$</p> <p>145: $(N_x C_{123} + N_y S_{123})C_6 - (O_x C_{123} + O_y S_{123})S_6 = C_5$</p> <p>146: $(N_x C_{123} + N_y S_{123})S_6 + (O_x C_{123} + O_y S_{123})C_6 = 0$</p> <p>147: $A_x C_{123} + A_y S_{123} = S_5$</p> <p>148: $P_x C_{123} - a_1 C_{23} + P_y S_{123} - a_2 C_3 = 0$</p> <p>149: $(N_y C_{123} - N_x S_{123})C_6 - (O_y C_{123} - O_x S_{123})S_6 = 0$</p> <p>150: $(N_y C_{123} - N_x S_{123})S_6 + (O_y C_{123} - O_x S_{123})C_6 = -1$</p> <p>151: $A_y C_{123} - A_x S_{123} = 0$</p> <p>152: $P_y C_{123} - P_x S_{123} + a_1 S_{23} + a_2 S_3 = 0$</p> <p>153: $N_z C_6 - O_z S_6 = S_5$</p> <p>154: $N_z S_6 + O_z C_6 = 0$</p> <p>155: $A_z = -C_5$</p> <p>156: $P_z = D_4$</p>
---	---



Analytisches Verfahren (14)

$$A_2^{-1} \cdot A_1^{-1} \cdot {}^R T_H \cdot A_6^{-1} = A_3 \cdot \dots \cdot A_5$$

$$157: (N_x C_{12} + N_y S_{12}) C_6 - (O_x C_{12} + O_y S_{12}) S_6 = C_3 C_5$$

$$158: (N_x C_{12} + N_y S_{12}) S_6 + (O_x C_{12} + O_y S_{12}) C_6 = S_3$$

$$159: A_x C_{12} + A_y S_{12} = C_3 S_5$$

$$160: P_x C_{12} - a_1 C_2 + P_y S_{12} - a_2 = 0$$

$$161: (N_y C_{12} - N_x S_{12}) C_6 - (O_y C_{12} - O_x S_{12}) S_6 = C_5 S_3$$

$$162: (N_y C_{12} - N_x S_{12}) S_6 + (O_y C_{12} - O_x S_{12}) C_6 = -C_3$$

$$163: A_y C_{12} - A_x S_{12} = S_3 S_5$$

$$164: P_y C_{12} - P_x S_{12} + a_1 S_2 = 0$$

$$165: N_z C_6 - O_z S_6 = S_5$$

$$166: N_z S_6 + O_z C_6 = 0$$

$$167: A_z = -C_5$$

$$168: P_z = D_4$$

$$A_1^{-1} \cdot {}^R T_H \cdot A_6^{-1} = A_2 \cdot \dots \cdot A_5$$

$$169: (N_x C_1 + N_y S_1) C_6 - (O_x C_1 + O_y S_1) S_6 = C_{23} C_5$$

$$170: (N_x C_1 + N_y S_1) S_6 + (O_x C_1 + O_y S_1) C_6 = S_{23}$$

$$171: A_x C_1 + A_y S_1 = C_{23} S_5$$

$$172: P_x C_1 + P_y S_1 - a_1 = a_2 C_2$$

$$173: (N_y C_1 - N_x S_1) C_6 - (O_y C_1 - O_x S_1) S_6 = C_5 S_{23}$$

$$174: (N_y C_1 - N_x S_1) S_6 + (O_y C_1 - O_x S_1) C_6 = -C_{23}$$

$$175: A_y C_1 - A_x S_1 = S_{23} S_5$$

$$176: P_y C_1 - P_x S_1 = a_2 S_2$$

$$177: N_z C_6 - O_z S_6 = S_5$$

$$178: N_z S_6 + O_z C_6 = 0$$

$$179: A_z = -C_5$$

$$180: P_z = D_4$$



Analytisches Verfahren (15)

$$A_3^{-1} \cdot \dots \cdot A_1^{-1} \cdot {}^R T_H \cdot A_6^{-1} \cdot A_5^{-1} = A_4$$

$$181: [C_5((N_x C_{123} + N_y S_{123})C_6 - (O_x C_{123} + O_y S_{123})S_6) + (A_x C_{123} + A_y S_{123})S_5] = 1$$

$$182: [S_5((N_x C_{123} + N_y S_{123})C_6 - (O_x C_{123} + O_y S_{123})S_6) - (A_x C_{123} + A_y S_{123})C_5] = 0$$

$$183: (N_x C_{123} + N_y S_{123})S_6 + (O_x C_{123} + O_y S_{123})C_6 = 0$$

$$184: P_x C_{123} - a_1 C_{23} + P_y S_{123} - a_2 C_3 = 0$$

$$185: [C_5((N_y C_{123} - N_x S_{123})C_6 - (O_y C_{123} - O_x S_{123})S_6) + (A_y C_{123} - A_x S_{123})S_5] = 0$$

$$186: [S_5((N_y C_{123} - N_x S_{123})C_6 - (O_y C_{123} - O_x S_{123})S_6) - (A_y C_{123} - A_x S_{123})C_5] = 0$$

$$187: (N_y C_{123} - N_x S_{123})S_6 + (O_y C_{123} - O_x S_{123})C_6 = -1$$

$$188: P_y C_{123} - P_x S_{123} + a_1 S_{23} + a_2 S_3 = 0$$

$$189: C_5(N_z C_6 - O_z S_6) + A_z S_5 = 0$$

$$190: S_5(N_z C_6 - O_z S_6) - A_z C_5 = 1$$

$$191: N_z S_6 + O_z C_6 = 0$$

$$192: P_z = D_4$$



Analytisches Verfahren (16)

$$A_2^{-1} \cdot A_1^{-1} \cdot {}^R T_H \cdot A_6^{-1} \cdot A_5^{-1} = A_3 \cdot A_4$$

$$193: C_5((N_x C_{12} + N_y S_{12})C_6 - (O_x C_{12} + O_y S_{12})S_6) + (A_x C_{12} + A_y S_{12})S_5 = C_3$$

$$194: S_5((N_x C_{12} + N_y S_{12})C_6 - (O_x C_{12} + O_y S_{12})S_6) - (A_x C_{12} + A_y S_{12})C_5 = 0$$

$$195: (N_x C_{12} + N_y S_{12})S_6 + (O_x C_{12} + O_y S_{12})C_6 = S_3$$

$$196: P_x C_{12} - a_1 C_2 + P_y S_{12} - a_2 = 0$$

$$197: C_5((N_y C_{12} - N_x S_{12})C_6 - (O_y C_{12} - O_x S_{12})S_6) + (A_y C_{12} - A_x S_{12})S_5 = S_3$$

$$198: S_5((N_y C_{12} - N_x S_{12})C_6 - (O_y C_{12} - O_x S_{12})S_6) - (A_y C_{12} - A_x S_{12})C_5 = 0$$

$$199: (N_y C_{12} - N_x S_{12})S_6 + (O_y C_{12} - O_x S_{12})C_6 = -C_3$$

$$200: P_y C_{12} - P_x S_{12} + a_1 S_2 = 0$$

$$201: C_5(N_z C_6 - O_z S_6) + A_z S_5 = 0$$

$$202: S_5(N_z C_6 - O_z S_6) - A_z C_5 = 1$$

$$203: N_z S_6 + O_z C_6 = 0$$

$$204: P_z = D_4$$



Analytisches Verfahren (17)

$$A_1^{-1} \cdot {}^R T_H \cdot A_6^{-1} \cdot A_5^{-1} = A_2 \cdot \dots \cdot A_4$$

$$205: C_5((N_x C_1 + N_y S_1)C_6 - (O_x C_1 + O_y S_1)S_6) + (A_x C_1 + A_y S_1)S_5 = C_{23}$$

$$206: S_5((N_x C_1 + N_y S_1)C_6 - (O_x C_1 + O_y S_1)S_6) - (A_x C_1 + A_y S_1)C_5 = 0$$

$$207: (N_x C_1 + N_y S_1)S_6 + (O_x C_1 + O_y S_1)C_6 = S_{23}$$

$$208: P_x C_1 + P_y S_1 - a_1 = a_2 C_2$$

$$209: C_5((N_y C_1 - N_x S_1)C_6 - (O_y C_1 - O_x S_1)S_6) + (A_y C_1 - A_x S_1)S_5 = S_{23}$$

$$210: S_5((N_y C_1 - N_x S_1)C_6 - (O_y C_1 - O_x S_1)S_6) - (A_y C_1 - A_x S_1)C_5 = 0$$

$$211: (N_y C_1 - N_x S_1)S_6 + (O_y C_1 - O_x S_1)C_6 = -C_{23}$$

$$212: P_y C_1 - P_x S_1 = a_2 S_2$$

$$213: C_5(N_z C_6 - O_z S_6) + A_z S_5 = 0$$

$$214: S_5(N_z C_6 - O_z S_6) - A_z C_5 = 1$$

$$215: N_z S_6 + O_z C_6 = 0$$

$$216: P_z = D_4$$



Analytisches Verfahren (18)

$$A_2^{-1} \cdot A_1^{-1} \cdot {}^R T_H \cdot A_6^{-1} \cdot \dots \cdot A_4^{-1} = A_3$$

- 217: $C_5((N_x C_{12} + N_y S_{12})C_6 - (O_x C_{12} + O_y S_{12})S_6) + (A_x C_{12} + A_y S_{12})S_5 = C_3$
- 218: $-((N_x C_{12} + N_y S_{12})S_6 + (O_x C_{12} + O_y S_{12})C_6) = -S_3$
- 219: $S_5((N_x C_{12} + N_y S_{12})C_6 - (O_x C_{12} + O_y S_{12})S_6) - (A_x C_{12} + A_y S_{12})C_5 = 0$
- 220: $P_x C_{12} - a_1 C_2 + D_4(S_5((O_x C_{12} + O_y S_{12})S_6 - (N_x C_{12} + N_y S_{12})C_6) + (A_x C_{12} + A_y S_{12})C_5) + P_y S_{12} - a_2 = 0$
- 221: $C_5((N_y C_{12} - N_x S_{12})C_6 - (O_y C_{12} - O_x S_{12})S_6) + (A_y C_{12} - A_x S_{12})S_5 = S_3$
- 222: $-((N_y C_{12} - N_x S_{12})S_6 + (O_y C_{12} - O_x S_{12})C_6) = C_3$
- 223: $S_5((N_y C_{12} - N_x S_{12})C_6 - (O_y C_{12} - O_x S_{12})S_6) - (A_y C_{12} - A_x S_{12})C_5 = 0$
- 224: $P_y C_{12} - P_x S_{12} + D_4(S_5((O_y C_{12} - O_x S_{12})S_6 - (N_y C_{12} - N_x S_{12})C_6) + (A_y C_{12} - A_x S_{12})C_5) + a_1 S_2 = 0$
- 225: $C_5(N_z C_6 - O_z S_6) + A_z S_5 = 0$
- 226: $-(N_z S_6 + O_z C_6) = 0$
- 227: $S_5(N_z C_6 - O_z S_6) - A_z C_5 = 1$
- 228: $D_4(S_5(O_z S_6 - N_z C_6) + A_z C_5) + P_z = 0$



Analytisches Verfahren (19)

$$A_1^{-1} \cdot {}^R T_H \cdot A_6^{-1} \cdot \dots \cdot A_4^{-1} = A_2 \cdot A_3$$

- 229: $C_5((N_x C_1 + N_y S_1)C_6 - (O_x C_1 + O_y S_1)S_6) + (A_x C_1 + A_y S_1)S_5 = C_{23}$
230: $-((N_x C_1 + N_y S_1)S_6 + (O_x C_1 + O_y S_1)C_6) = -S_{23}$
231: $S_5((N_x C_1 + N_y S_1)C_6 - (O_x C_1 + O_y S_1)S_6) - (A_x C_1 + A_y S_1)C_5 = 0$
232: $P_x C_1 + P_y S_1 + D_4(S_5((O_x C_1 + O_y S_1)S_6 - (N_x C_1 + N_y S_1)C_6) + (A_x C_1 + A_y S_1)C_5) - a_1 = a_2 C_2$
233: $C_5((N_y C_1 - N_x S_1)C_6 - (O_y C_1 - O_x S_1)S_6) + (A_y C_1 - A_x S_1)S_5 = S_{23}$
234: $-((N_y C_1 - N_x S_1)S_6 + (O_y C_1 - O_x S_1)C_6) = C_{23}$
235: $S_5((N_y C_1 - N_x S_1)C_6 - (O_y C_1 - O_x S_1)S_6) - (A_y C_1 - A_x S_1)C_5 = 0$
236: $P_y C_1 - P_x S_1 + D_4(S_5((O_y C_1 - O_x S_1)S_6 - (N_y C_1 - N_x S_1)C_6) + (A_y C_1 - A_x S_1)C_5) = a_2 S_2$
237: $C_5(N_z C_6 - O_z S_6) + A_z S_5 = 0$
238: $-(N_z S_6 + O_z C_6) = 0$
239: $S_5(N_z C_6 - O_z S_6) - A_z C_5 = 1$
240: $D_4(S_5(O_z S_6 - N_z C_6) + A_z C_5) + P_z = 0$



Analytisches Verfahren (20)

$$A_1^{-1} \cdot {}^R T_H \cdot A_6^{-1} \cdot \dots \cdot A_3^{-1} = A_2$$

$$241: C_3 C_5 ((N_x C_1 + N_y S_1) C_6 - (O_x C_1 + O_y S_1) S_6) + S_3 (N_x C_1 + N_y S_1) S_6 + \\ + C_3 (A_x C_1 + A_y S_1) S_5 + S_3 (O_x C_1 + O_y S_1) C_6 = C_2$$

$$242: (N_x C_1 + N_y S_1) (S_3 C_5 C_6 - C_3 S_6) - (O_x C_1 + O_y S_1) (S_3 C_5 S_6 + C_3 C_6) + (A_x C_1 + A_y S_1) S_3 S_5 = -S_2$$

$$243: S_5 ((N_x C_1 + N_y S_1) C_6 - (O_x C_1 + O_y S_1) S_6) - (A_x C_1 + A_y S_1) C_5 = 0$$

$$244: P_x C_1 + P_y S_1 + D_4 (S_5 ((O_x C_1 + O_y S_1) S_6 - (N_x C_1 + N_y S_1) C_6) + (A_x C_1 + A_y S_1) C_5) - a_1 = a_2 C_2$$

$$245: C_3 C_5 ((N_y C_1 - N_x S_1) C_6 - (O_y C_1 - O_x S_1) S_6) + S_3 (N_y C_1 - N_x S_1) S_6 + C_3 (A_y C_1 - A_x S_1) S_5 + \\ + S_3 (O_y C_1 - O_x S_1) C_6 = S_2$$

$$246: (N_y C_1 - N_x S_1) (S_3 C_5 C_6 - C_3 S_6) - (O_y C_1 - O_x S_1) (S_3 C_5 S_6 + C_3 C_6) + (A_y C_1 - A_x S_1) S_3 S_5 = C_2$$

$$247: S_5 ((N_y C_1 - N_x S_1) C_6 - (O_y C_1 - O_x S_1) S_6) - (A_y C_1 - A_x S_1) C_5 = 0$$

$$248: P_y C_1 - P_x S_1 + D_4 (S_5 ((O_y C_1 - O_x S_1) S_6 - (N_y C_1 - N_x S_1) C_6) + (A_y C_1 - A_x S_1) C_5) = a_2 S_2$$

$$249: C_3 C_5 (N_z C_6 - O_z S_6) + S_3 N_z S_6 + C_3 A_z S_5 + S_3 O_z C_6 = 0$$

$$250: N_z (S_3 C_5 C_6 - C_3 S_6) - O_z (S_3 C_5 S_6 + C_3 C_6) + A_z S_3 S_5 = 0$$

$$251: S_5 (N_z C_6 - O_z S_6) - A_z C_5 = 1$$

$$252: D_4 (S_5 (O_z S_6 - N_z C_6) + A_z C_5) + P_z = 0$$



Rückwärtstransformation: Analytisches Verfahren (21)

Variablen						
Gelenkvariablen	θ_1	θ_2	θ_3	D_4	θ_5	θ_6
Gelenksummen	θ_{23}	θ_{123}	θ_{12}			

Herleitung							
Schritt	Typ	Gl.	Var.	T/F	Mat.	Zeile	Spalte
1	$a \cdot \cos\theta + b \cdot \sin\theta = d$	43	θ_{123}	T	4	2	3
2	$\cos\theta = k_1 \quad \sin\theta = k_2$	11 39	θ_5	T T	1 4	3 1	3 3
3	$\cos\theta = k_1 \quad \sin\theta = k_2$	42 62	θ_6	T T	4 6	2 1	2 2
4	square-add-trick	4 8	θ_{12}	T T	1 1	1 2	4 4
5	$\cos\theta = k_1 \quad \sin\theta = k_2$	28 32	θ_2	T T	3 3	1 2	4 4
6	$D = K(D \text{ Schubgelenk})$	56	D_4	T	5	2	4



Rückwärtstransformation:
Analytisches Verfahren (22)

	Inverse Lösung
43	$\theta_{123} = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$ $\theta_{123} = \theta_{123} + 180$
11 und 39	$\theta_5 = \tan^{-1}\left(\frac{A_x C_{123} + A_y S_{123}}{-A_z}\right)$
42 und 62	$\theta_6 = \tan^{-1}\left(\frac{-(C_5(O_x C_{123} + O_y S_{123}) + O_z S_5)}{O_x S_{123} - O_y C_{123}}\right)$
4 und 8	$\theta_{12} = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{(a_2^2 + P_x^2 + P_y^2 - a_1^2)}{(2a_2)}}{\pm \sqrt{P_x^2 + P_y^2 - \left(\frac{(a_2^2 + P_x^2 + P_y^2 - a_1^2)}{(2a_2)}\right)^2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{P_x}{P_y}\right)$ $\theta_3 = \theta_{123} - \theta_{12}$
28 und 32	$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{(P_x S_{12} - P_y C_{12})}{a_1}}{\frac{(a_2 - (P_x C_{12} + P_y S_{12}))}{a_1}}\right)$ $\theta_{23} = \theta_2 + \theta_3 \quad \theta_1 = \theta_{123} - \theta_{23}$
56	$D_4 = P_z$



Gleichungssystem für die direkte Kinematik eines Roboters mit 6 DOF

$T_{i,i+1}$: 4x4 Transformationsmatrix

$T_{i+1,i}$: inverse Transformationsmatrix

R: Ergebniskinematik

$$\begin{array}{l} T_{01} \quad T_{12} \quad T_{23} \quad T_{34} \quad T_{45} \quad T_{56} = R \\ T_{01} \quad T_{12} \quad T_{23} \quad T_{34} \quad T_{45} = R \quad T_{65} \\ T_{01} \quad T_{12} \quad T_{23} \quad T_{34} = R \quad T_{65} \quad T_{54} \\ T_{01} \quad T_{12} \quad T_{23} = R \quad T_{65} \quad T_{54} \quad T_{43} \\ T_{01} \quad T_{12} = R \quad T_{65} \quad T_{54} \quad T_{43} \quad T_{32} \\ T_{01} = R \quad T_{65} \quad T_{54} \quad T_{43} \quad T_{32} \quad T_{21} \\ \\ T_{12} \quad T_{23} \quad T_{34} \quad T_{45} \quad T_{56} = T_{10} \quad R \\ T_{12} \quad T_{23} \quad T_{34} \quad T_{45} = T_{10} \quad R \quad T_{65} \\ T_{12} \quad T_{23} \quad T_{34} = T_{10} \quad R \quad T_{65} \quad T_{54} \\ T_{12} \quad T_{23} = T_{10} \quad R \quad T_{65} \quad T_{54} \quad T_{43} \\ T_{12} = T_{10} \quad R \quad T_{65} \quad T_{54} \quad T_{43} \quad T_{32} \\ \\ T_{23} \quad T_{34} \quad T_{45} \quad T_{56} = T_{21} \quad T_{10} \quad R \\ T_{23} \quad T_{34} \quad T_{45} = T_{21} \quad T_{10} \quad R \quad T_{65} \\ T_{23} \quad T_{34} = T_{21} \quad T_{10} \quad R \quad T_{65} \quad T_{54} \\ T_{23} = T_{21} \quad T_{10} \quad R \quad T_{65} \quad T_{54} \quad T_{43} \\ \\ T_{34} \quad T_{45} \quad T_{56} = T_{32} \quad T_{21} \quad T_{10} \quad R \\ T_{34} \quad T_{45} = T_{32} \quad T_{21} \quad T_{10} \quad R \quad T_{65} \\ T_{34} = T_{32} \quad T_{21} \quad T_{10} \quad R \quad T_{65} \quad T_{54} \\ \\ T_{45} \quad T_{56} = T_{43} \quad T_{32} \quad T_{21} \quad T_{10} \quad R \\ T_{45} = T_{43} \quad T_{32} \quad T_{21} \quad T_{10} \quad R \quad T_{65} \\ T_{56} = T_{54} \quad T_{43} \quad T_{32} \quad T_{21} \quad T_{10} \quad R \end{array}$$



Geschlossene Lösung der Rückwärtstransformation für Kuka KR 6

- Ergebnis des analytischen Verfahrens: 7 Einzelmatrizen für die Vorwärtstransformation führen zu $12*n*(n+1)/2 = 336$ Gleichungen

Gegeben:

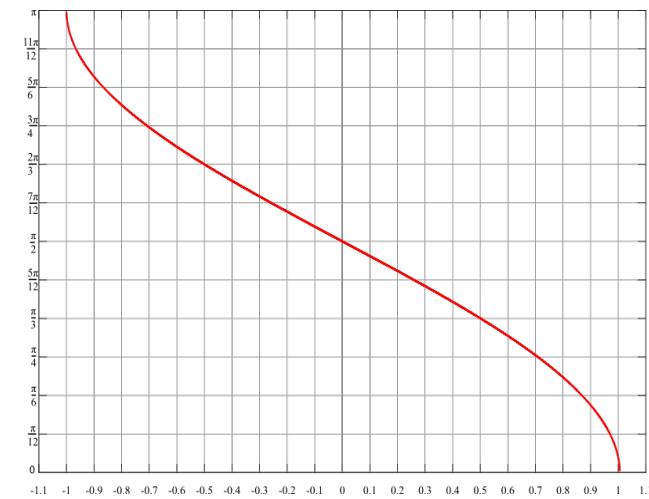
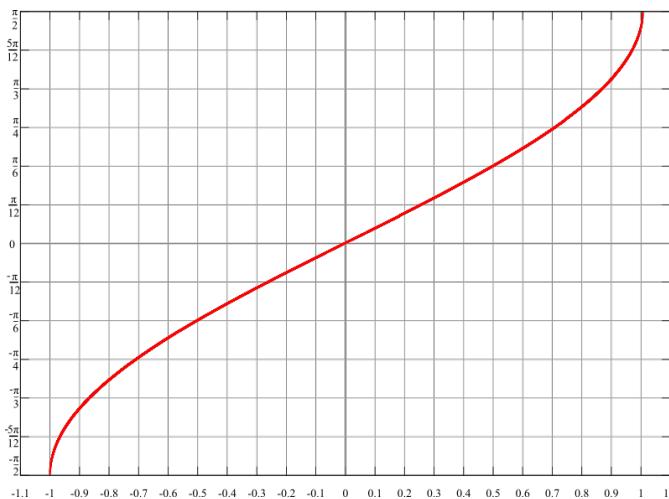
$$TCP = R = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \theta_1^{(1)} &= \arctan_2(a_1, -b_1) & a_1 &= -140 * a_y + p_y, \quad b_1 = -140 * a_x + p_x \\ \theta_1^{(2)} &= \arctan_2(-a_1, b_1) \\ a_2 &= -675 - 140 * a_z + p_z & b_2 &= 300 + (140 * a_x - p_x) * \cos \theta_1 + (-140 * a_y + p_y) * \sin \theta_1 \\ c_2 &= 650 & d_2 &= -600 & e_2 &= -155 & h &= \frac{d_2^2 + e_2^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2}{2 * c_2} \\ \theta_2^{(1,2)} &= \arctan_2(h, \pm \sqrt{a_2^2 + b_2^2 - h^2}) - \arctan_2(b_2, a_2) \\ h_1 &= a_2 * \sin \theta_2 + b_2 * \cos \theta_2 + c_2 & h_2 &= b_2 * \sin \theta_2 - a_2 * \cos \theta_2 \\ \theta_3 &= \arctan_2(e_2 * h_1 - d_2 * h_2, d_2 * h_1 + e_2 * h_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_4^{(1)} &= \arctan_2(a_4, -b_4), & a_4 &= -p_x * \sin \theta_1 - p_y * \cos \theta_1 \\ \theta_4^{(2)} &= \arctan_2(-a_4, b_4) & b_4 &= -155 + (p_x * \cos \theta_1 - p_y * \sin \theta_1 - 300) * \sin(\theta_2 + \theta_3) + (p_z - 675) * \cos(\theta_2 + \theta_3) - 650 * \sin \theta_3 \\ \theta_5 &= \arctan_2(a_5, b_5) & a_5 &= (-a_x * \cos \theta_1 + a_y * \sin \theta_1) * \cos \theta_4 * \sin(\theta_2 + \theta_3) + (-a_x * \sin \theta_1 - a_y * \cos \theta_1) * \sin \theta_4 - a_z * \cos \theta_4 * \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ && b_5 &= (a_x * \cos \theta_1 - a_y * \sin \theta_1) * \cos(\theta_2 + \theta_3) - a_z * \sin(\theta_2 + \theta_3) \\ \theta_6 &= \arctan_2(a_6, b_6) & a_6 &= (n_x * \cos \theta_1 - n_y * \sin \theta_1) * \sin(\theta_2 + \theta_3) * \sin \theta_4 - n_x * \cos \theta_4 * \sin \theta_1 - n_y * \cos \theta_1 * \cos \theta_4 + n_z * \cos(\theta_2 + \theta_3) * \sin \theta_4 \\ && b_6 &= (-o_x * \cos \theta_1 + o_y * \sin \theta_1) * \sin(\theta_2 + \theta_3) * \sin \theta_4 + o_x * \cos \theta_4 * \sin \theta_1 + o_y * \cos \theta_1 * \cos \theta_4 - o_z * \cos(\theta_2 + \theta_3) * \sin \theta_4 \end{aligned}$$

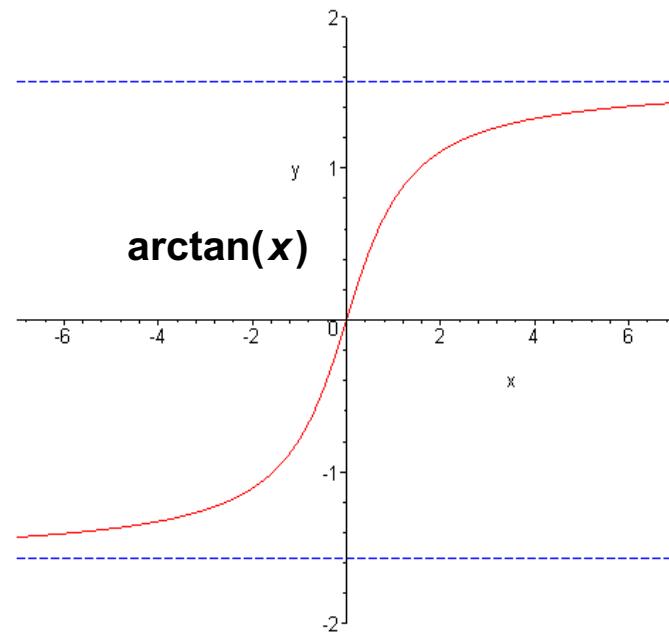
Funktionen arcsin und arccos

- Definitionsbereich von \arcsin : -1 bis 1
 - Wertebereich von \arcsin : $-\pi/2$ bis $\pi/2$
- $\arccos(x) = \pi/2 - \arcsin(x)$



Funktionen arctan und arctan2

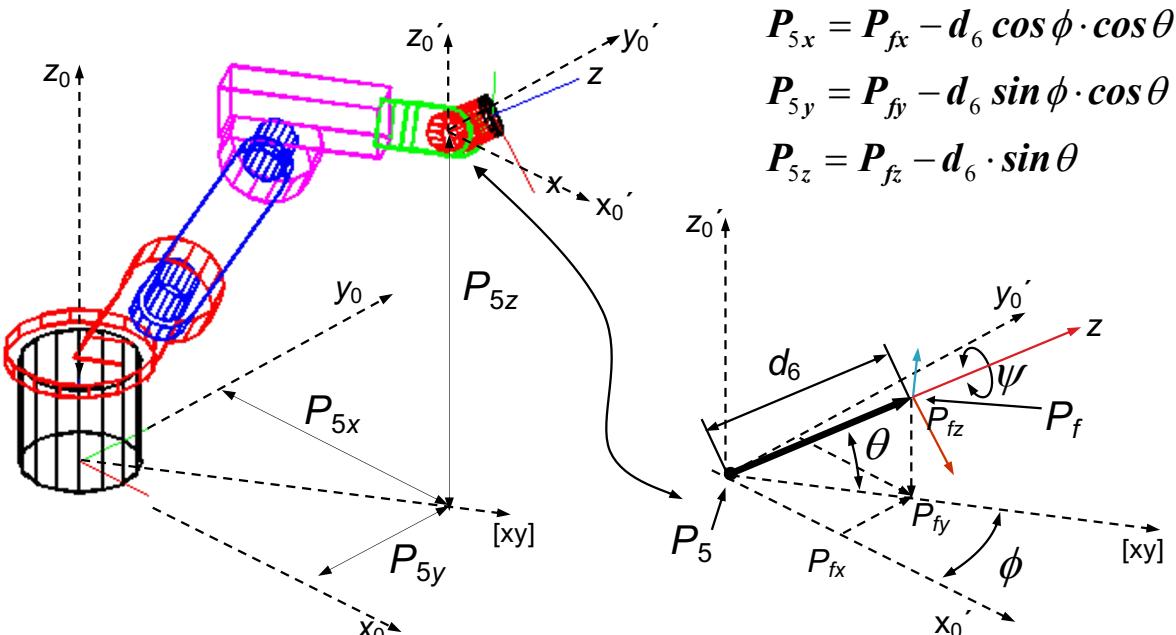
- Funktion arctan liefert nur Werte im Bereich $-\pi/2$ bis $\pi/2$
- Durch Fallunterscheidung liefert die Funktion arctan2 eindeutige Werte im Bereich $-\pi$ bis π



$$\arctan 2(a, b) = \begin{cases} \arctan(a/b) & , b > 0 \\ \pi/2 & , b = 0, a > 0 \\ \text{undefined} & , b = 0, a = 0 \\ -\pi/2 & , b = 0, a < 0 \\ \arctan(a/b) + \pi & , b < 0 \end{cases}$$

Geometrisches Verfahren (1)

Es erfolgt die Vorgabe der kartesischen TCP-Lage in Form der Koordinaten des Punktes P_f und der drei Raumwinkel (Eulerwinkel) ϕ, θ, ψ (Def. KUKA-Roboter) (um $z_0(\phi)$, um neues $y(\theta)$, um neues $z(\psi)$). P_5 ist der Handwurzelpunkt, welcher aus P_f und den Orient.-Winkeln ϕ, θ und ψ in Eulerwinkeln gegeben ist.



x_0, y_0, z_0 – Basis-KS

x_0', y_0', z_0' – Parallel verschobenes KS, [xy] Projekt. von Ober-/Unterarm auf Fläche $x_0, y_0,$

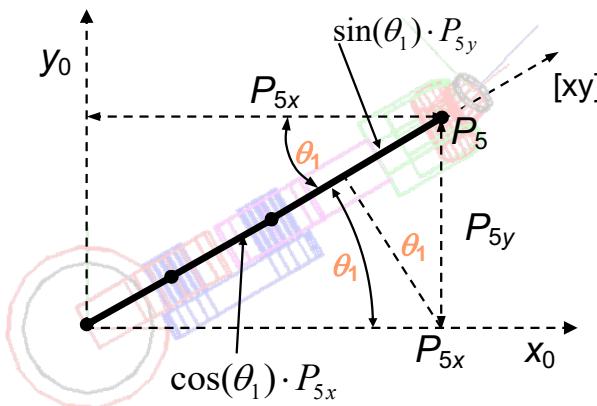


Geometrisches Verfahren (2)

Berechnung von θ_1

Der Winkel θ_1 ist sehr einfach zu bestimmen. Es ergibt sich

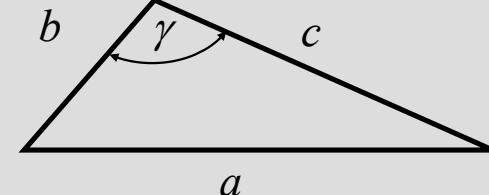
$$\theta_1 = \text{atan}2(P_{5y}, P_{5x}); \text{atan}2: 0-360^\circ$$



x_0, y_0, z_0 – Basis-KS

Kosinus Satz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\gamma)$$



Additionstheoreme für Sinus und Kosinus

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

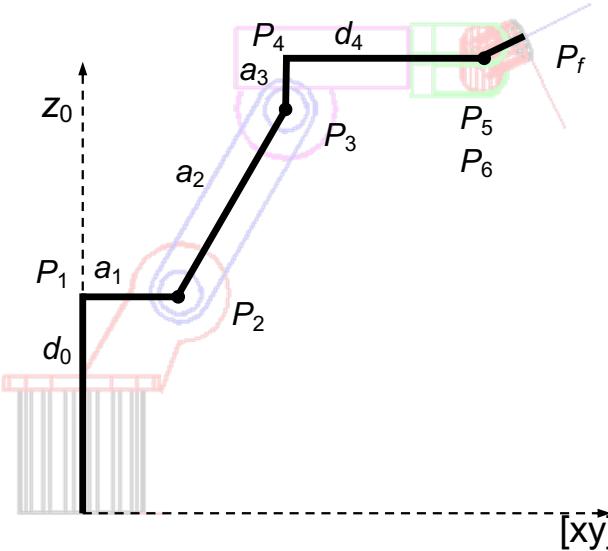


Geometrisches Verfahren (3)

Berechnung von θ_2

Gesucht: $\theta_2 = \alpha + \beta$

1. Schritt: Berechnung von α

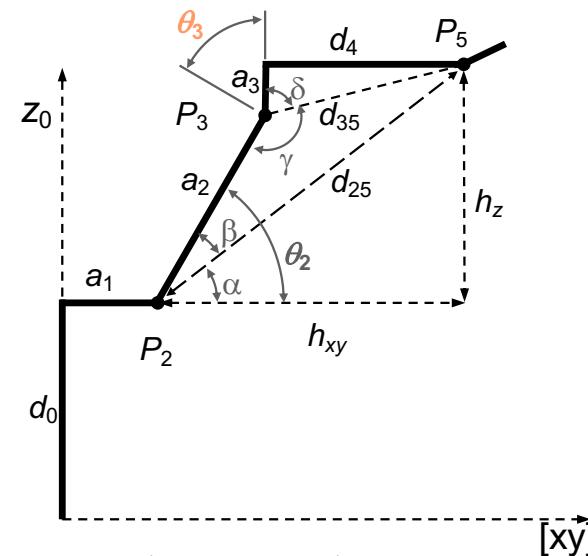


$$d_{35} = \sqrt{a_3^2 + d_4^2}$$

$$\cos \delta = \cos(\pi/2 - \arccos(d_4/d_{35}))$$

$$\sin \delta = \sin(\pi/2 - \arcsin(a_3/d_{35}))$$

$$h_{xy} = \cos(\theta_1) \cdot P_{5x} + \sin(\theta_1) \cdot P_{5y} - a_1$$



$$h_z = P_{5z} - d_0$$

$$d_{25} = \sqrt{h_{xy}^2 + h_z^2}$$

$$\cos(\alpha) = h_{xy}/d_{25}$$

$$\sin(\alpha) = h_z/d_{25}$$



Geometrisches Verfahren (4)

Berechnung von θ_2

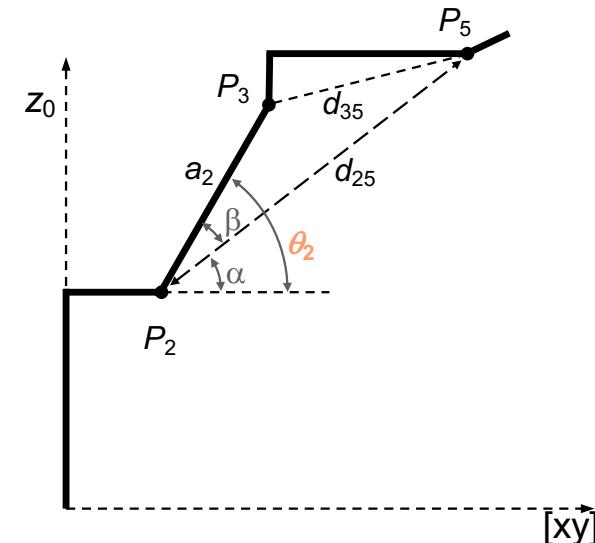
2. Schritt: Berechnung von β

Den Kosinus von β kann man mit Hilfe des Kosinussatzes aus dem Dreieck ($P_2P_3P_5$) gewinnen

$$d_{35}^2 = a_2^2 + d_{25}^2 - 2 \cdot a_2 \cdot d_{25} \cdot \cos(\beta)$$

$$\cos(\beta) = \frac{a_2^2 + d_{25}^2 - d_{35}^2}{2 \cdot a_2 \cdot d_{25}}$$

$$\sin(\beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\beta)}$$



3. Schritt: Berechnung von θ_2

Mit den Additionstheoremen für Sinus und Kosinus ergibt sich θ_2

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\theta_2 = (\alpha + \beta) = \text{atan2}(\sin(\alpha + \beta), \cos(\alpha + \beta))$$



Geometrisches Verfahren (5)

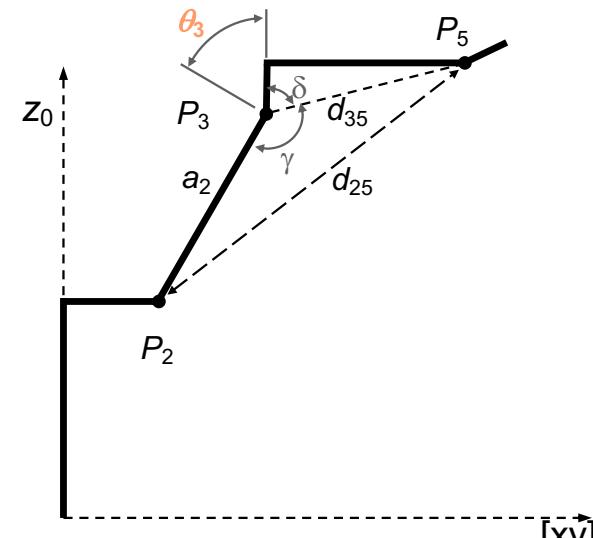
Berechnung von θ_3

Den Kosinus von γ kann man mit Hilfe des Kosinussatzes aus dem Dreieck ($P_2P_3P_5$) gewinnen

$$d_{25}^2 = a_2^2 + d_{35}^2 - 2 \cdot a_2 \cdot d_{35} \cdot \cos(\gamma)$$

$$\cos(\gamma) = \frac{a_2^2 + d_{35}^2 - d_{25}^2}{2 \cdot a_2 \cdot d_{35}}$$

$$\sin(\gamma) = \sqrt{1 - \cos^2(\gamma)}$$



Mit den Additionstheoremen für Sinus und Kosinus ergibt sich mit

$$\sin(\delta + \gamma) = -\cos \delta \cdot \cos \gamma + \sin \delta \cdot \sin \gamma$$

$$\cos(\delta + \gamma) = -\sin \delta \cdot \cos \gamma - \cos \delta \cdot \sin \gamma$$

$$(\delta + \gamma) = \text{atan2}(\sin(\delta + \gamma), \cos(\delta + \gamma))$$

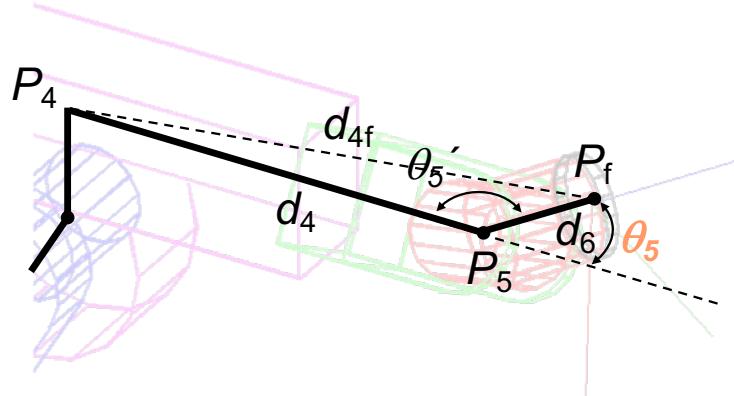
somit :

$$\theta_3 = \frac{3}{2}\pi - (\delta + \gamma) = \frac{3}{2}\pi - \text{atan2}(\sin(\delta + \gamma), \cos(\delta + \gamma)):$$

Geometrisches Verfahren (6)

Berechnung des Handachsenwinkels θ_5

Der zu θ_5 komplementäre Winkel ($\pi - \theta_5'$) wird durch Anwendung des Kosinussatzes auf das durch die Punkte $P_4 P_5 P_f$ gebildete Dreieck bestimmt:



$$d_{4f}^2 = d_4^2 + d_6^2 - 2 \cdot d_4 \cdot d_6 \cdot \cos(\theta_5')$$

$$\cos(\theta_5') = \frac{d_4^2 + d_6^2 - d_{4f}^2}{2 \cdot d_4 \cdot d_6}$$

$$\theta_5' = \arccos\left(\frac{d_4^2 + d_6^2 - d_{4f}^2}{2 \cdot d_4 \cdot d_6}\right)$$

$$\theta_5 = \pi - \theta_5'$$

$$d_{4f} = \sqrt{(P_{fx} - P_{4x})^2 + (P_{fy} - P_{4y})^2 + (P_{ fz} - P_{4z})^2}$$

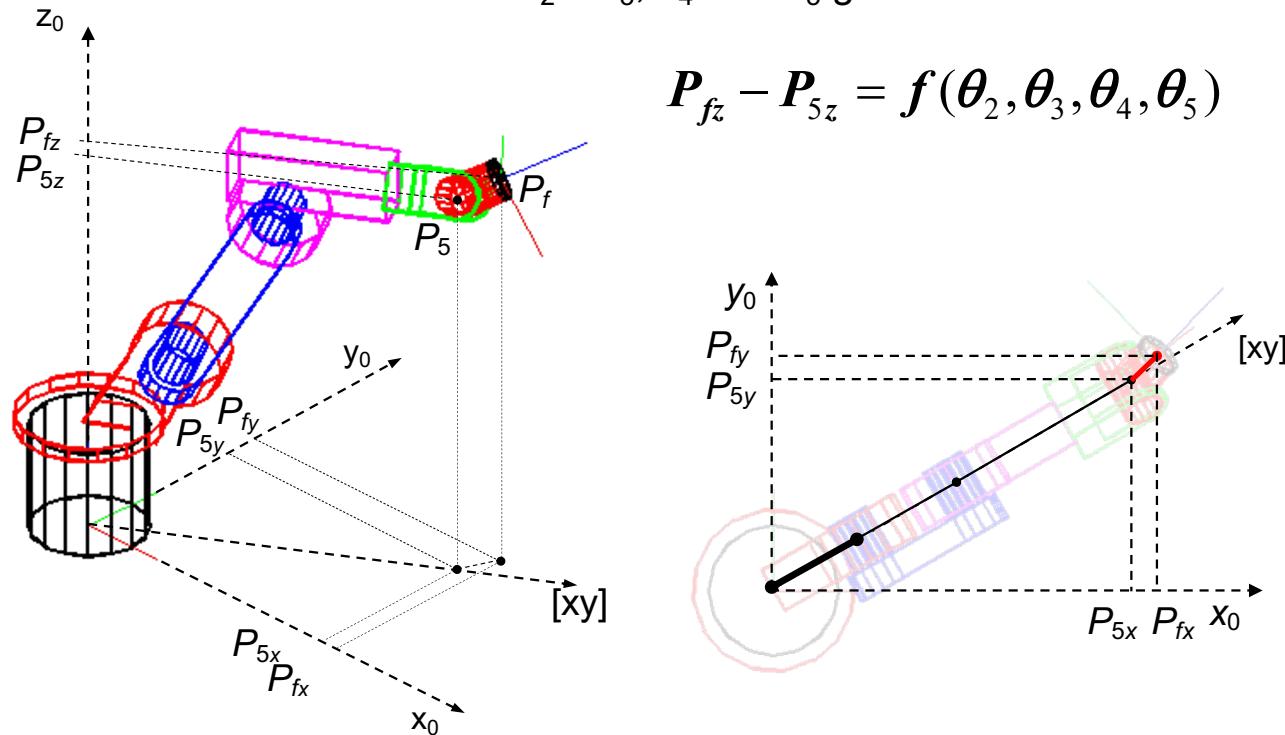


Geometrisches Verfahren (7)

Berechnung des Handachsenwinkels θ_4

Da P_5 und P_f bekannt sind, wird der Winkel θ_4 mit Hilfe der Projektion von P_5 und P_f auf die z Achse bestimmt

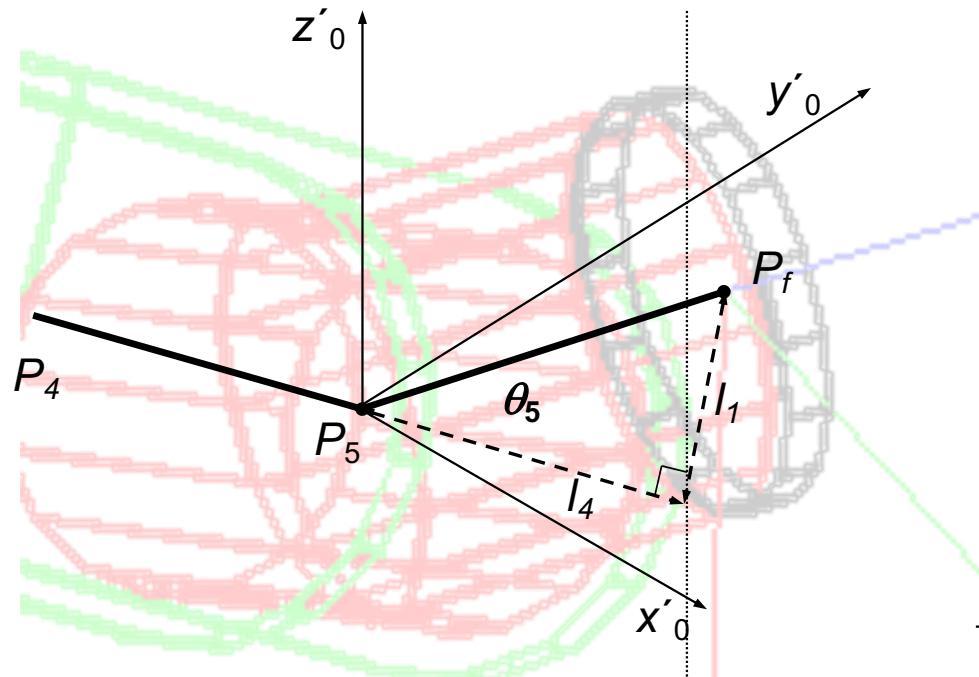
Ziel ist, die Lage des Vektors P_5 , P_f auf die z_0 -Achse abzubilden.
Dieser Vektor ist durch die Winkel $\theta_2 + \theta_3$, θ_4 und θ_5 gedreht



Geometrisches Verfahren (8)

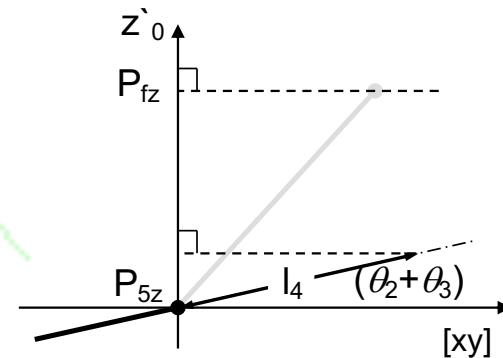
Berechnung des Handachsenwinkels θ_4

l_4 : Projektion von P_5P_f auf P_4P_5 (Gerade: Oberarm)



$$1 \rightarrow l_1 = d_6 \cdot \sin(\theta_5)$$

$$4 \rightarrow l_4 = d_6 \cdot \cos(\theta_5)$$



Gerade xy liegt in der Ebene des Basis-KS x_0y_0

Der Oberarm P_4P_5 (l_4) ist um $\theta_2 + \theta_3$ aus der Ebene x_0y_0 herausgedreht

Der Punkt P_f ist um den Winkel θ_5 gegenüber P_4P_5 (l_4) gedreht

Der Punkt P_f ist um den Winkel θ_4 um P_4P_5 (l_4) in die Bildebene hineingedreht

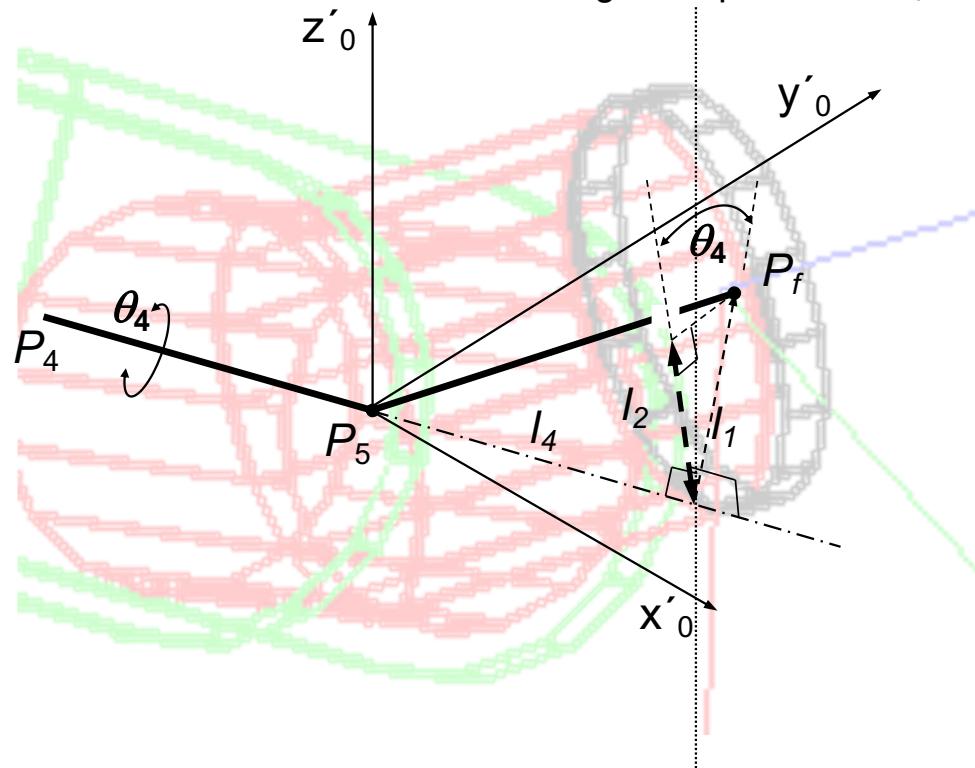


Geometrisches Verfahren (9)

Berechnung des Handachsenwinkels θ_4

l_2 : Projektion von l_1 auf die Fläche ($xy-z'$) Senkrecht zu $P_4P_5(l_4)$

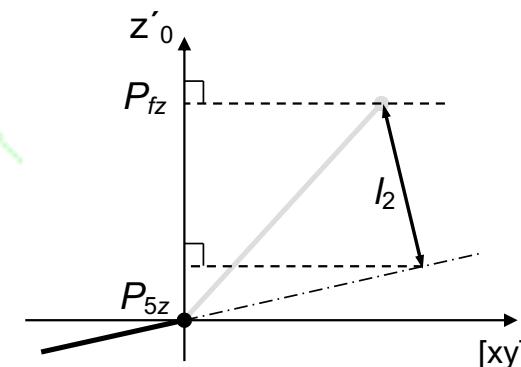
Hilfsgerade parallel zu z'_0



$$1 \rightarrow l_1 = d_6 \cdot \sin(\theta_5)$$

$$2 \rightarrow l_2 = l_1 \cdot \cos(\theta_4)$$

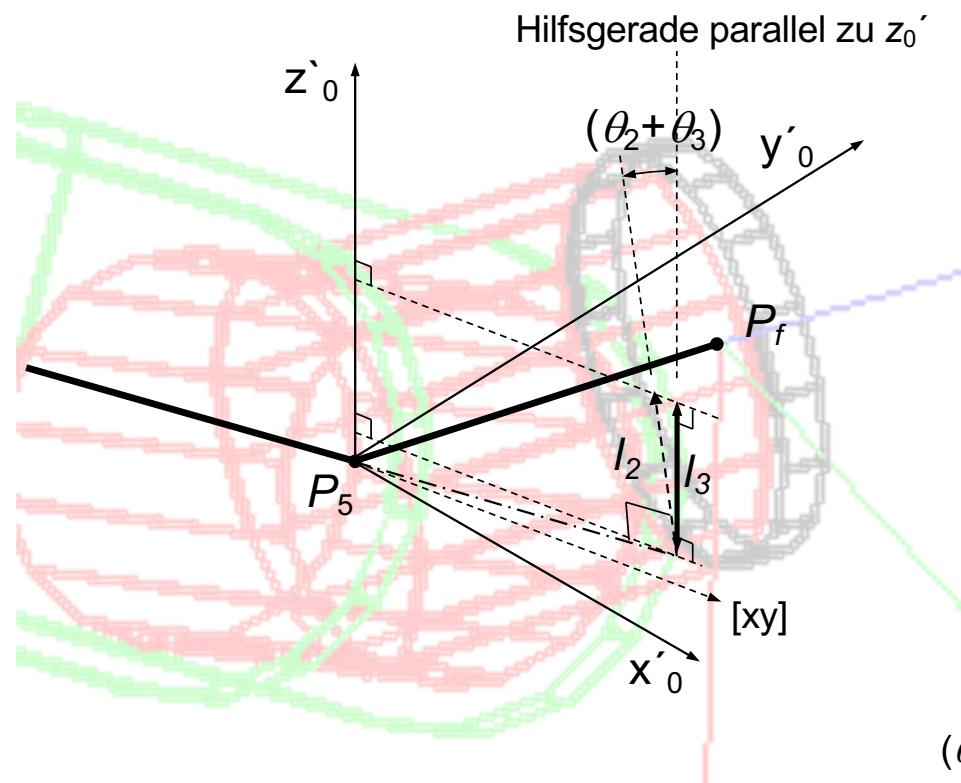
$$4 \rightarrow l_4 = d_6 \cdot \cos(\theta_5)$$



Geometrisches Verfahren (10)

Berechnung des Handachsenwinkels θ_4

l_3 : Projektion von l_2 auf z'_0

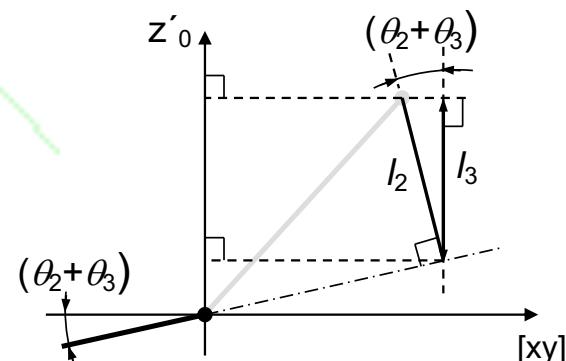


$$1 \rightarrow l_1 = d_6 \cdot \sin(\theta_5)$$

$$2 \rightarrow l_2 = l_1 \cdot \cos(\theta_4)$$

$$3 \rightarrow l_3 = l_2 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3) \quad \boxed{3}$$

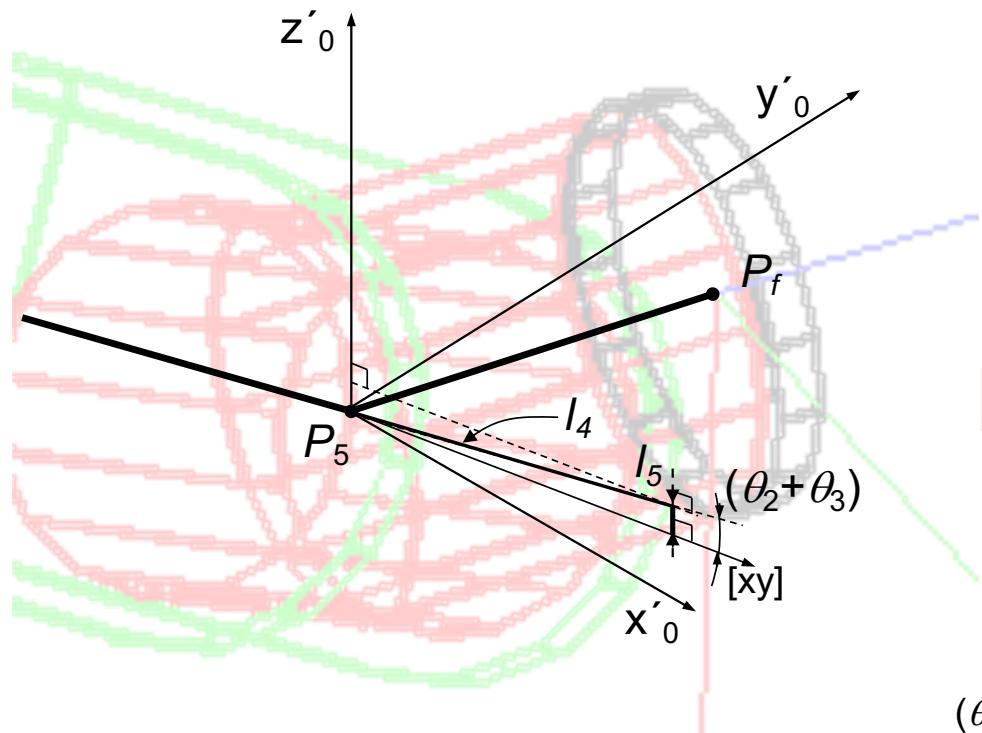
$$4 \rightarrow l_4 = d_6 \cdot \cos(\theta_5)$$



Geometrisches Verfahren (11)

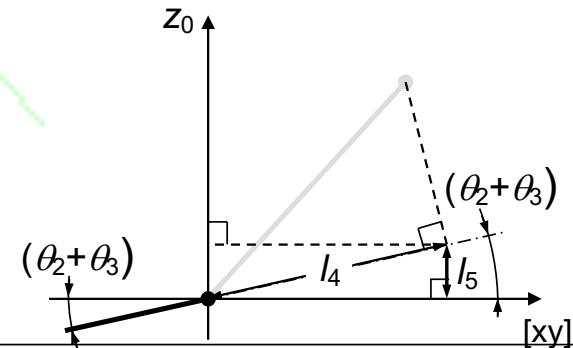
Berechnung des Handachsenwinkels θ_4

l_5 : Projektion von l_4 auf z'_0



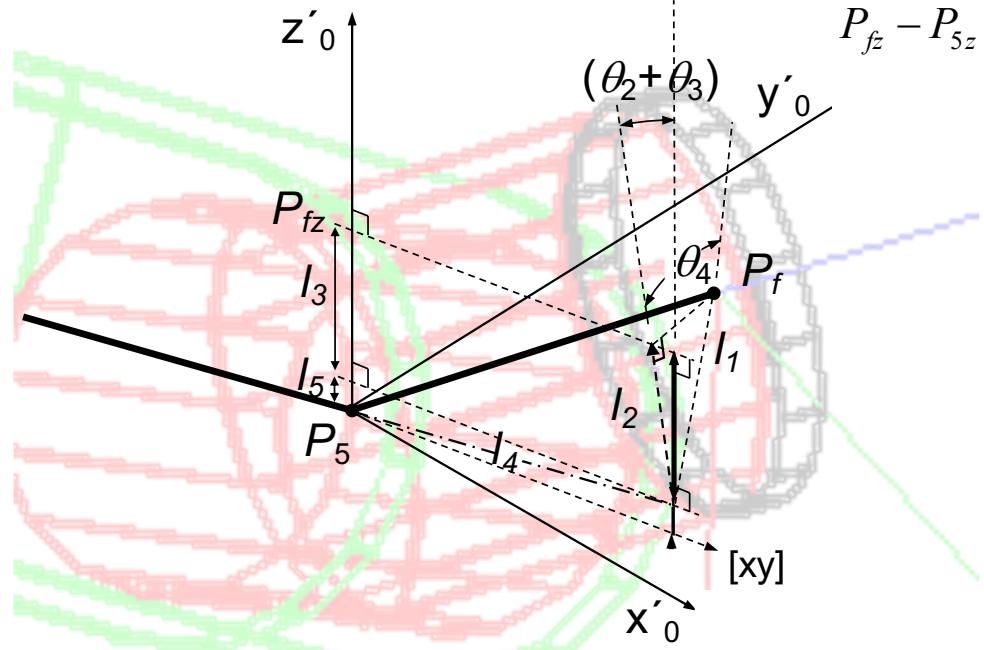
$$1 \rightarrow l_1 = d_6 \cdot \sin(\theta_5)$$
$$2 \rightarrow l_2 = l_1 \cdot \cos(\theta_4)$$
$$3 \rightarrow l_3 = l_2 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3)$$

$$4 \rightarrow l_4 = d_6 \cdot \cos(\theta_5)$$
$$5 \rightarrow l_5 = l_4 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3)$$



Geometrisches Verfahren (12)

Berechnung des Handachsenwinkels θ_4



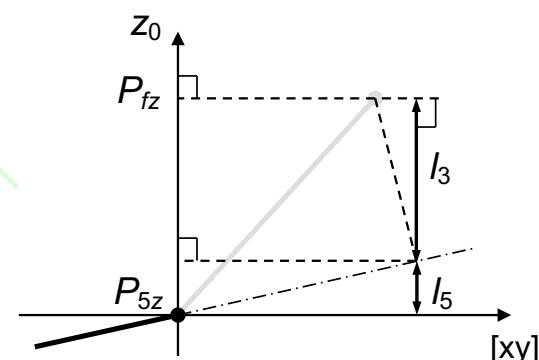
$$\theta_4 = \cos^{-1} \left(\frac{P_{fz} - P_{5z} - d_6 \cdot \cos(\theta_5) \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3)}{d_6 \cdot \sin(\theta_5) \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3)} \right)$$

$$P_{fz} - P_{5z} = l_3 + l_5$$

$$P_{fz} - P_{5z} = d_6 \cdot \sin(\theta_5) \cdot \cos(\theta_4) \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ + d_6 \cdot \cos(\theta_5) \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3)$$

$$l_3 = l_2 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3)$$

$$l_5 = l_4 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3)$$

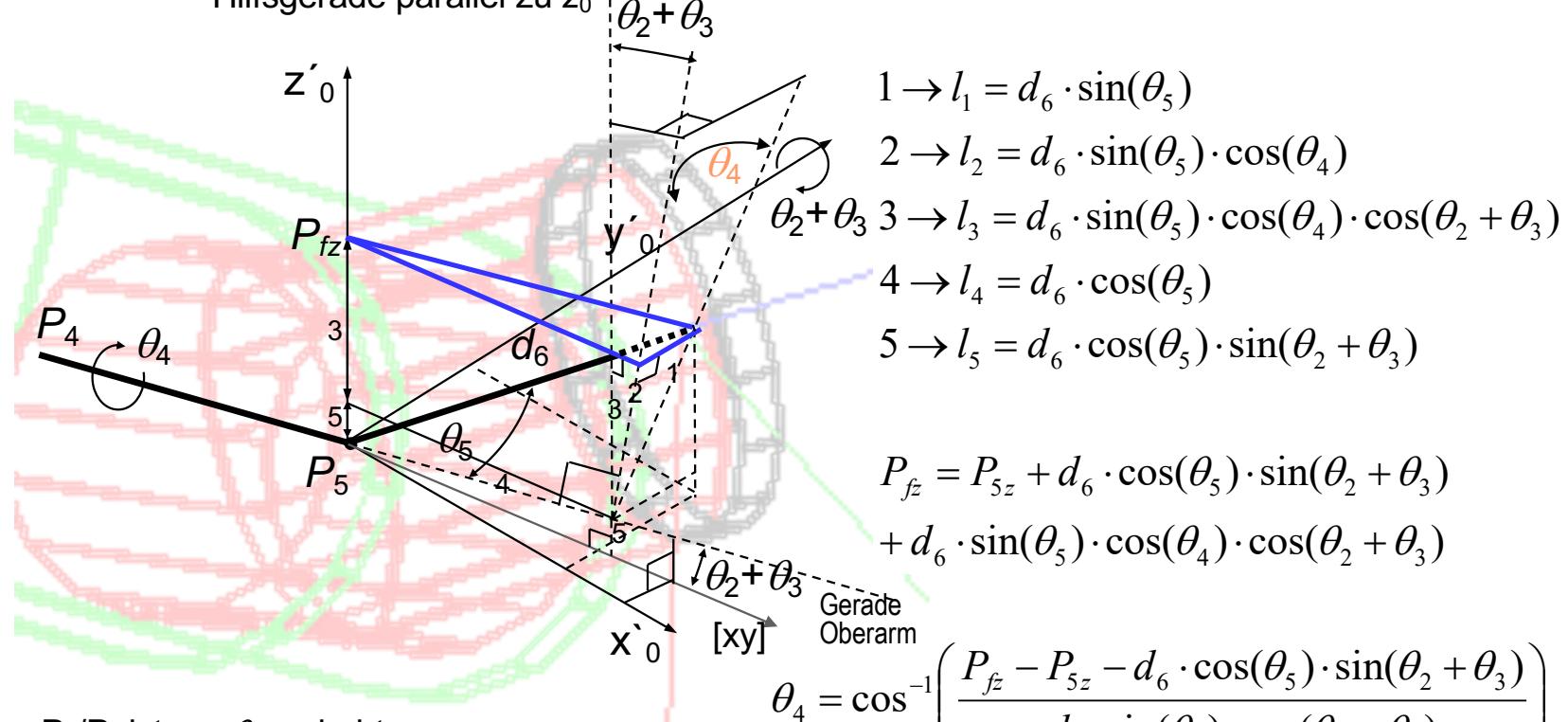


Geometrisches Verfahren (13)

Berechnung des Handachsenwinkels θ_4

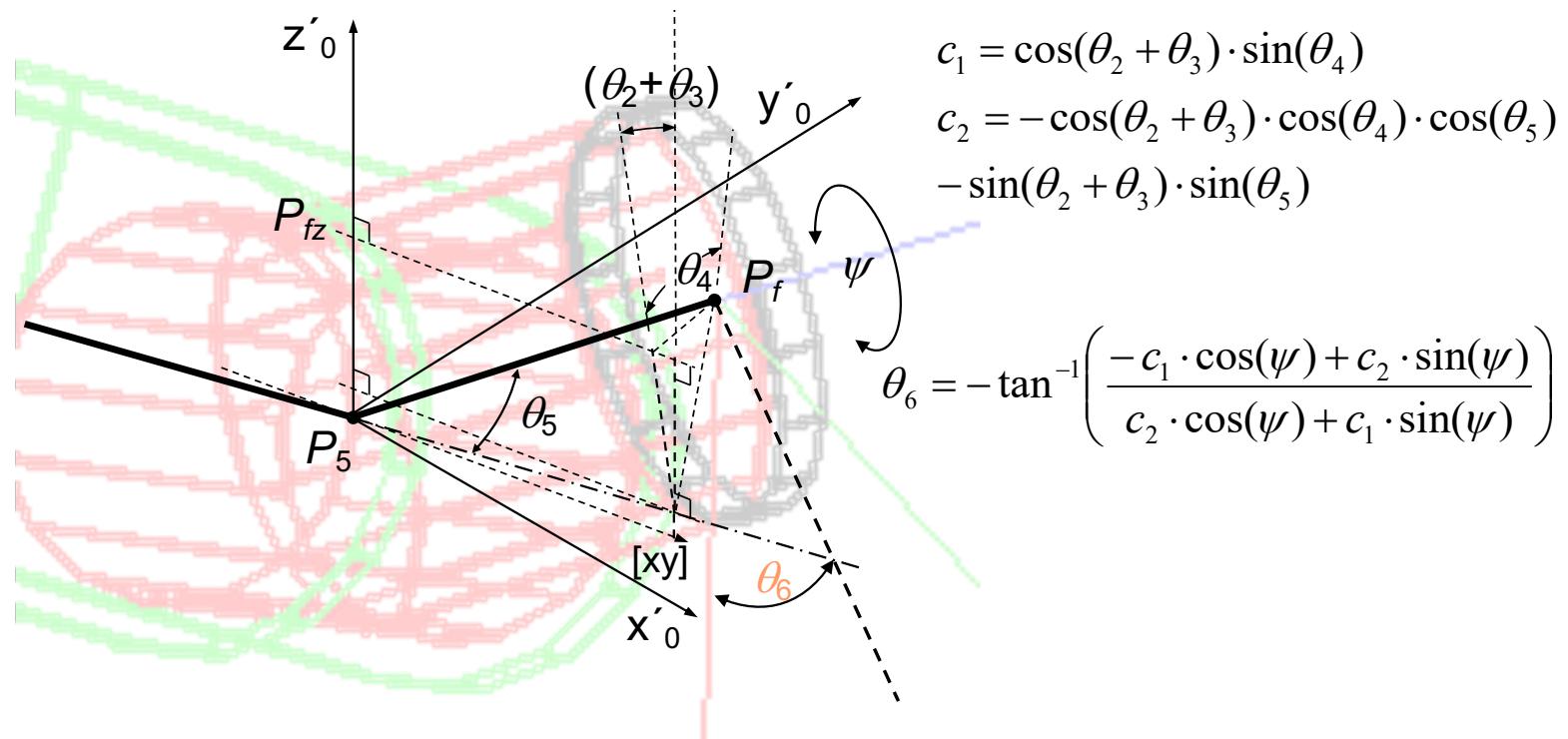
Der Winkel θ_4 wird zusammengefasst bestimmt:

Hilfsgerade parallel zu z'_0



Geometrisches Verfahren (14)

Die Bestimmung des Winkels θ_6 erfordert zahlreiche trigonometrische Berechnungen und führt zu folgenden Formeln:



Geometrisches Verfahren - Ergebnis

Gegeben aus dem Interpolator:

$$P_{fx}, P_{fy}, P_{fz}, \phi \text{ um } z_0, \theta \text{ um } y_0, \psi \text{ um } z'''$$

$$P_{5x} = P_{fx} - d_6 \cos \phi \cdot \cos \theta$$

$$P_{5y} = P_{fy} - d_6 \sin \phi \cdot \cos \theta$$

$$P_{5z} = P_{fz} - d_6 \cdot \sin \theta$$

$$\theta_1 = \text{atan2}(P_{5y}, P_{5x});$$

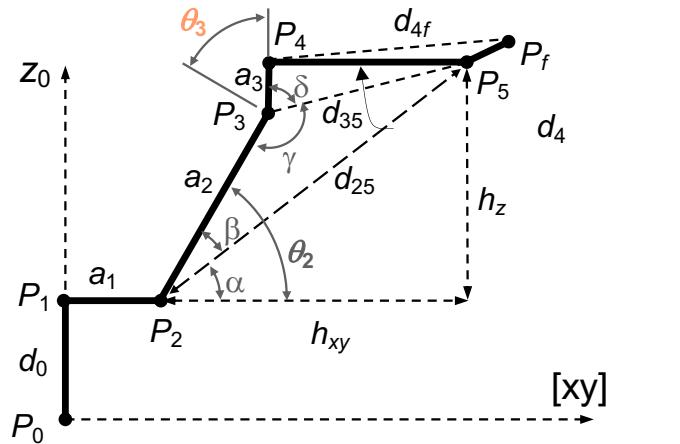
$$\theta_2 = \left(a \cos \frac{h_{xy}}{d_{25}} + a \cos \frac{a^2 + d_{25}^2 - d_{35}^2}{2 \cdot a_2 \cdot d_{25}} \right);$$

$$\theta_3 = \frac{3}{2}\pi - \left((\pi/2 - \arccos(d_4/d_{35})) + a \cos \frac{a^2 + d_{35}^2 - d_{25}^2}{2 \cdot a_2 \cdot d_{35}} \right);$$

$$d_{25} = \sqrt{(P_{5x} - P_{2x})^2 + (P_{5y} - P_{2y})^2 + (P_{5z} - P_{2z})^2}$$

$$h_{xy} = \cos(\theta_1) \cdot P_{5x} + \sin(\theta_1) \cdot P_{5y} - a_1$$

$$d_{4f} = \sqrt{(P_{fx} - P_{4x})^2 + (P_{fy} - P_{4y})^2 + (P_{fz} - P_{4z})^2}$$



$$\theta_4 = \cos^{-1} \left(\frac{P_{fx} - P_{5z} - d_6 \cdot \cos(\theta_5) \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3)}{d_6 \cdot \sin(\theta_5) \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3)} \right);$$

$$\theta_5 = \pi - \arccos \left(\frac{d_4^2 + d_6^2 - d_{4f}^2}{2 \cdot d_4 \cdot d_6} \right);$$

$$\theta_6 = -\tan^{-1} \left(\frac{-c_1 \cdot \cos(\psi) + c_2 \cdot \sin(\psi)}{c_2 \cdot \cos(\psi) + c_1 \cdot \sin(\psi)} \right).$$

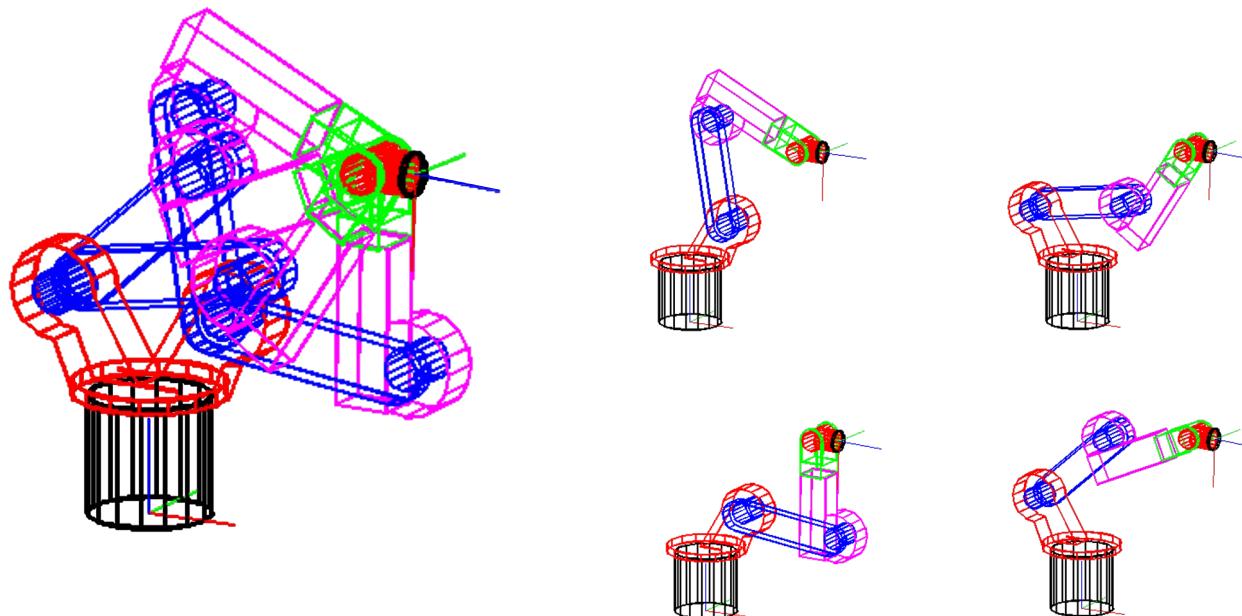
$$c_1 = \cos(\theta_2 + \theta_3) \cdot \sin(\theta_4)$$

$$c_2 = -\cos(\theta_2 + \theta_3) \cdot \cos(\theta_4) \cdot \cos(\theta_5) \\ - \sin(\theta_2 + \theta_3) \cdot \sin(\theta_5)$$



Geometrisches Verfahren (15)

Es können vier sinnvolle Lösungen für die Berechnung der Hauptachsenwinkel $\theta_1 \theta_2 \theta_3$ auftreten: Mehrdeutigkeiten



Geometrisches Verfahren (16)

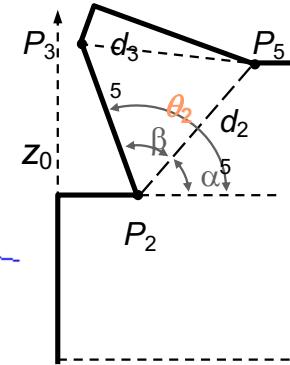
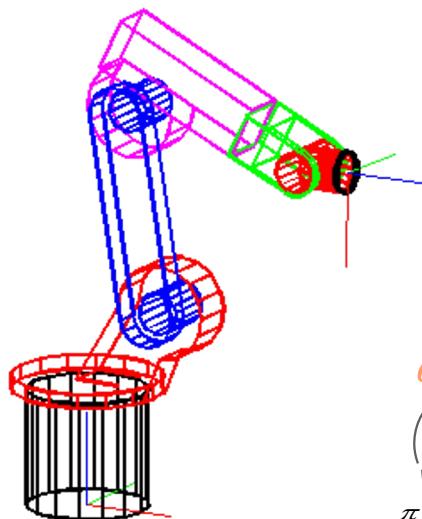
Fall 1 – 1-te Lösung f. θ_2, θ_3

$$\theta_2 = -(|\alpha| + |\beta|)$$

$$\theta_1 = \text{atan } 2(P_{5y}, P_{5x})$$

$$\theta_3 = \frac{3}{2} \cdot \pi - (|\delta| + |\gamma|)$$

$$\sin(360^\circ) = \sin(0^\circ) = \sin(\theta_3 + |\delta| + |\gamma| + \frac{\pi}{2})$$

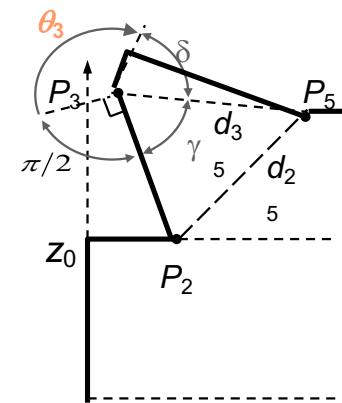


$$\theta_2 = 0$$

$$\alpha = 51^\circ$$

$$\beta = 59^\circ$$

$$\theta_2 = -110^\circ$$



$$\delta = 78^\circ$$

$$\gamma = 63^\circ$$

$$\theta_3 = 129^\circ$$

[xy]



Geometrisches Verfahren (17)

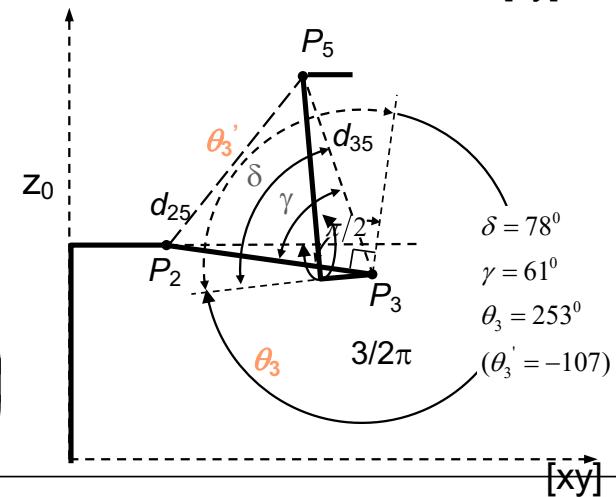
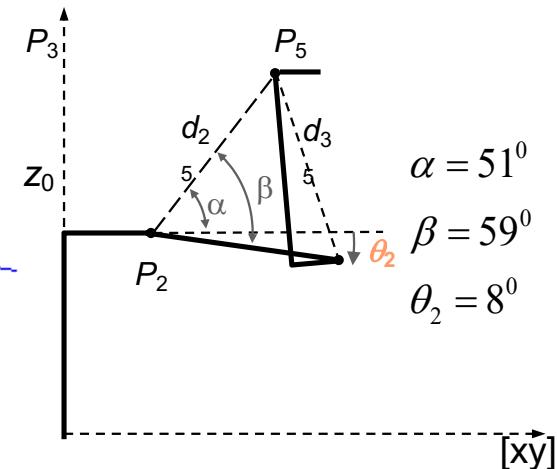
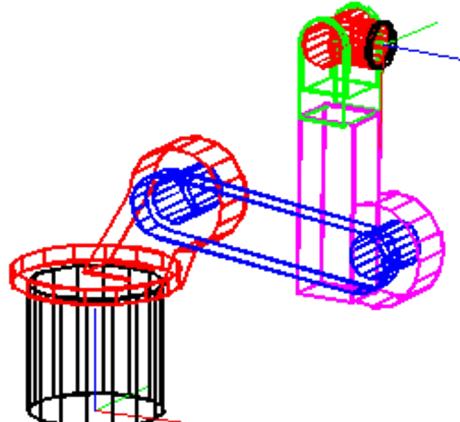
Fall 2 – 2-te Lösung f. θ_2, θ_3

$$\theta_2 = -(|\alpha| - |\beta|)$$

$$\theta_1 = \text{atan } 2(P_{5y}, P_{5x})$$

$$\theta_3 = \frac{3}{2} \cdot \pi - (|\delta| - |\gamma|)$$

$$\theta_3' = -\left(2\pi - \left(\frac{3}{2} \cdot \pi - (|\delta| - |\gamma|)\right)\right) = -\left(\frac{\pi}{2} + (|\delta| - |\gamma|)\right)$$



Geometrisches Verfahren (18)

Es können vier sinnvolle Lösungen für die Berechnung der Hauptachsenwinkel $\theta_1 \theta_2 \theta_3$ auftreten:

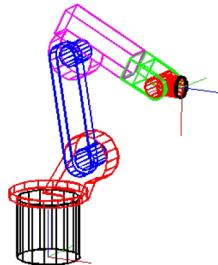
$$\theta_1 = \text{atan}2(P_{5y}, P_{5x})$$

$$\theta_1 = \text{atan}2(P_{5y}, P_{5x}) + \pi$$

Fall 1

$$\theta_{21} = -(|\alpha| + |\beta|)$$

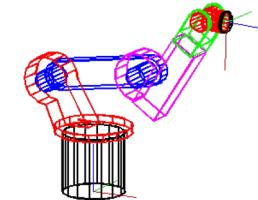
$$\theta_{31} = \frac{3}{2} \cdot \pi - (|\delta| + |\gamma|)$$



Fall 3

$$\theta_{23} =$$

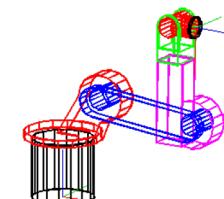
$$\theta_{33} =$$



Fall 2

$$\theta_{22} = -(|\alpha| - |\beta|)$$

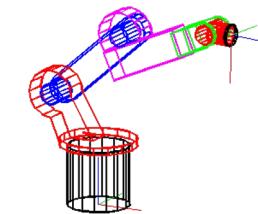
$$\theta_{32} = \frac{3}{2} \cdot \pi - (|\delta| - |\gamma|)$$



Fall 4

$$\theta_{24} =$$

$$\theta_{34} =$$

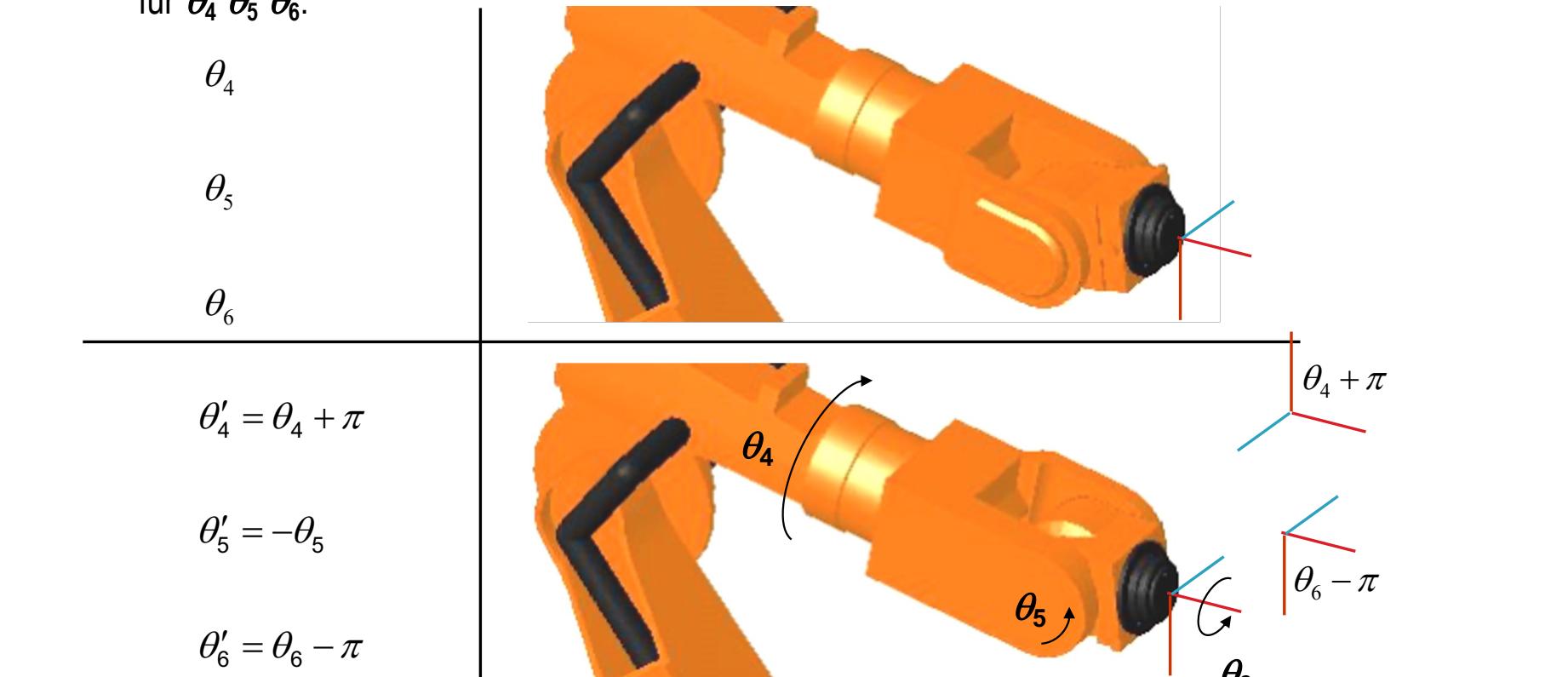


Geometrisches Verfahren (19)

2 unterschiedliche Handachsenwinkel $\theta_4 \theta_5 \theta_6$ ergeben den selben TCP

Fallunterscheidungen

für $\theta_4 \theta_5 \theta_6$:



„Discrete Linkage Method“: Teilnumerisches Verfahren
Modifiziertes Newton – Verfahren

Ausgehend von einem Näherungswert (Startwert) erhält man eine Lösung mit Hilfe von Iterationsverfahren.



Vergleich der Verfahren

Analytisches Verfahren:

- Nicht allgemeingültig für alle Kinematiken möglich.
- Lösung erfordert hohen Rechenaufwand und viel Erfahrung.

Geometrisches Verfahren:

- + Minimierung der Anzahl erforderlicher arithmetischer Funktionen.
- Zahlreiche geometrische Fallunterscheidungen nötig bei Herleitung.

Numerisches Verfahren:

- Näherungslösung.
- Schwierigkeiten in der Nähe von Singularitäten.
- Sehr rechenzeitintensiv.



- Kreuzer, E. J. und Lugtenburg J.B.:
Industrieroboter. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- Rieseler, H.: Roboterkinematik Grundlagen,
Invertierung und symbolische Berechnung.
Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992.
- Rojek, P.: Bahnführung eines Industrieroboters mit
Multiprozessorsystem. Friedrich Vieweg & Sohn,
Braunschweig, 1989.
- Paul, R.P.: Robot Manipulators: Mathematics,
Programming and Control. The MIT Press,
Cambridge, 1981.



Definition:

Singularitäten sind TCP-Roboterstellungen, die durch unendlich viele Konfigurationen von Achswerten erreicht werden können.

Eigenschaft:

In Singularitäten ist der Freiheitsgrad des Roboters um mindestens 1 reduziert.

Bei Industrierobotern häufig auftretende Singularitäten:

Eine Singularität ist gegeben, wenn eine Roboterstellung (-konfiguration) dazu führt, dass die Drehachsen von zwei Rotationsgelenken identisch werden. Dann können die Armelemente dazwischen beliebig gedreht werden ohne eine Bewegung der Elemente davor oder dahinter.
(Achskombinationen 4-6, 1-4, 1-6)



Singularitäten (4)

- Probleme in Singularitäten:
 - Eindeutige Bestimmung einer Gelenkkonfiguration
 - Im allgemeinen unendlich schnelle Achsbewegungen erforderlich beim Durchfahren
- Behandlung:
 - Meistens durch Vermeidung bei der Programmierung
 - Auswahl der nächstliegenden Gelenkkonfiguration
 - Schnellstmögliche Ausführen der erforderlichen Achsbewegungen bei gleichzeitiger TCP-Bahn-Überwachung (max. zulässige Abweichungen im TCP-Aufpunkt und in der TCP-Orientierung), wobei dadurch i.a. die Bahngeschwindigkeit reduziert wird.



Anhang:

Festlegung der KO-Systeme gemäß

Denavit-Hartenberg

(nicht klausurrelevant)



Festlegung der KO-Systeme

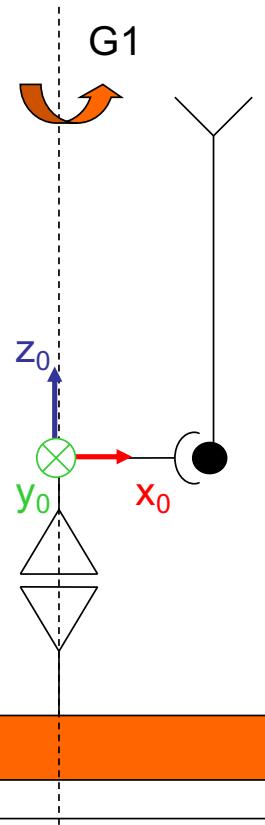
- Festlegung des Roboter-KO-Systems K_0 :
 - K_0 ist fest verbunden mit Armteil 0 (Roboterbasis)
 - Ursprung von K_0 liegt irgendwo auf der ersten Gelenkachse (sinnvollerweise in der Nähe von Armteil 1)
 - z_0 -Achse zeigt entlang der ersten Gelenkachse
 - x_0 - und y_0 -Achse werden so gewählt, dass ein Rechtssystem entsteht



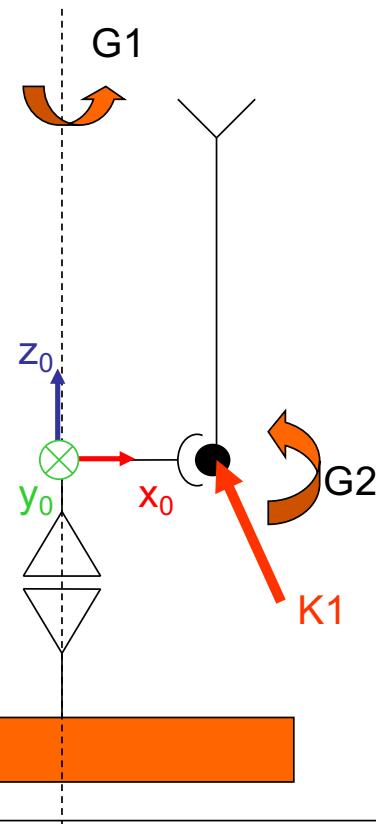
- Festlegung der KO-Systeme K_i ($i=1, 2, \dots, n-1$)
 - Ursprung von K_i liegt auf der Gelenkachse $i+1$
 - Fall 1: Gelenkachsen i und $i+1$ schneiden sich
 - > Ursprung von K_i liegt im Schnittpunkt
 - Fall 2: Gelenkachsen i und $i+1$ parallel
 - > zuerst Ursprung von K_{i+1} festlegen, dann Ursprung von K_i so auf Gelenkachse $i+1$ legen, dass der Abstand zum Ursprung von K_{i+1} minimal wird
 - Fall 3: Gelenkachsen i und $i+1$ sind windschief
 - > Ursprung von K_i liegt auf dem Schnittpunkt zwischen der gemeinsamen Normalen der Gelenkachsen mit der Gelenkachse $i+1$



Denavit-Hartenberg-Konvention



Denavit-Hartenberg-Konvention



G1 und G2 schneiden
sich nicht und sind nicht
parallel
-> Fall 3:
Ursprung von K_1 liegt auf
dem Schnittpunkt zwischen
der gemeinsamen Normalen
und G2

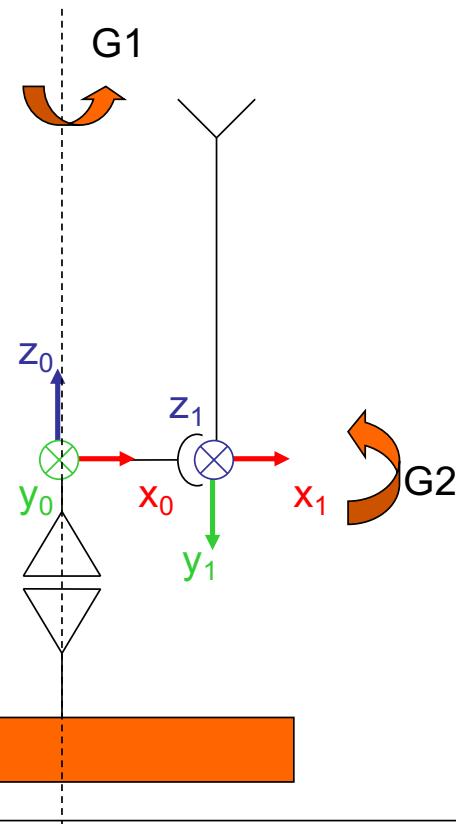


Festlegung der KO-Systeme

- z_i -Achse wird entlang der Gelenkachse $i+1$ gelegt
- Fall 1: z_{i-1} - Achse und z_i -Achse schneiden sich
 - > x_i -Achse zeigt in Richtung des Kreuzproduktes der z_{i-1} - und z_i -Achse
- Fall 2: z_{i-1} - Achse und z_i -Achse schneiden sich nicht
 - > x_i -Achse zeigt in Richtung der gemeinsamen Normalen von Gelenkachse i zu Gelenkachse $i+1$



Denavit-Hartenberg-Konvention



z_1 wird entlang G2 gelegt
 z_0 und z_1 schneiden sich
nicht
-> Fall 2:
 x_1 zeigt in Richtung der
gemeinsamen Normalen
von G1 auf G2



- Festlegung des KO-Systems K_n

- Ursprung möglichst im TCP
- z_n -Achse wird durch den TCP in Richtung der z_{n-1} -Achse gelegt
- x_n steht senkrecht auf die z_{n-1} -Achse und zeigt von der z_{n-1} -Achse auf die z_n -Achse
- Falls die z_{n-1} -Achse und die z_n -Achse auf einer Linie liegen, dann ist x_n wie x_{n-1} zu wählen



Denavit-Hartenberg-Konvention

