Aufgabe 12: (8 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die kürzesten Wegelängen $d[\cdot]$ für einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Startknoten $s \in V$ die Bellmannschen Gleichungen erfüllen:

$$d[s] = 0, \quad d[j] = \min_{(i,j) \in E} \{d[i] + c_{ij}\} \text{ für alle } j \in V \setminus \{s\}$$

(b) Es gebe umgekehrt Markierungen $d[\cdot]$, die die Bellmannschen Gleichungen erfüllen. Zeigen Sie, dass die Werte $d[\cdot]$ kürzeste Wegelängen sind, falls G keine Kreise mit Kosten 0 enthält. Gilt diese Aussage auch für Graphen, die Kreise mit Kosten 0 enthalten?

Aufgabe 13: (6 Punkte)

Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c : E \to \mathbb{Z}$.
Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Sind alle Kantenkosten unterschiedlich, so besitzt G einen eindeutig bestimmten Kürzeste-Wege-Baum.

(b) Gegeben sei nun ein ungerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c : E \to \mathbb{N}$. Zeigen oder widerlegen Sie: Jeder Kürzeste-Wege-Baum von G ist auch ein minimaler Spannbaum von G.

Programmieraufgabe P4: (10 Punkte)

Implementieren Sie den Algorithmus von Dijkstra und testen Sie ihn für die Graphen `dijkstra_01.gra`, `dijkstra_02.gra` und `dijkstra_03.gra` (siehe studIP). Als Start wählen Sie bei jeder Testinstanz den Knoten 1. Ihre Ausgabe sollte die Längen der gefundenen kürzesten Wege von Knoten 1 zu allen Knoten enthalten.