Graphenalgorithmen: Blatt 5

Lukas Kalbertodt, Elena Resch, Mirco Wagner

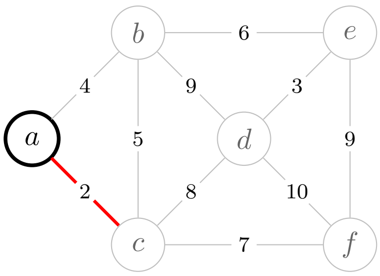
18. Mai 2015

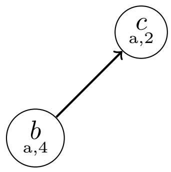
Aufgabe 10:

Hinweis: Es wird angenommen, dass mit „Heap“ ein „BinaryHeap“ gemeint ist.

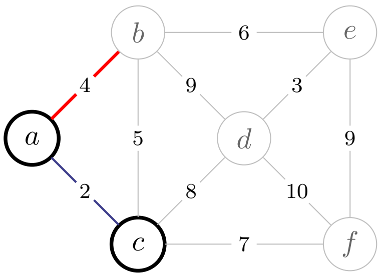
Legende für den Graphen: Dick schwarz umkreiste Knoten sind im Spannbaum enthalten. Die dicke rote Kante wird in dem Schritt als neue Kante dem Spannbaum hinzugefügt. Blaue Kanten befinden sich bereits im Spannbaum.

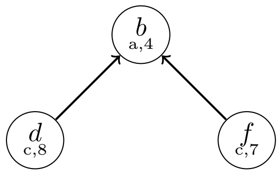
Legende for den BinaryHeap: Der dickere Buchstabe in jedem Knoten des Heaps steht für den Knoten im Graphen. In der zweiten Zeile steht zuerst der Predecessor und dann die Kosten.



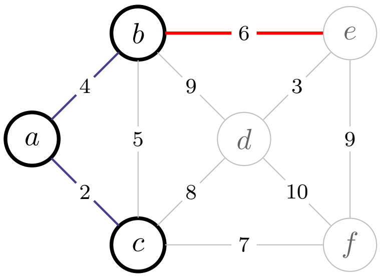


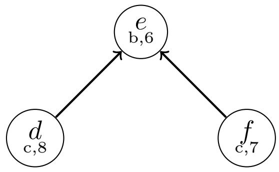
- `insert(b, a, 4)`
- `insert(c, a, 2)`



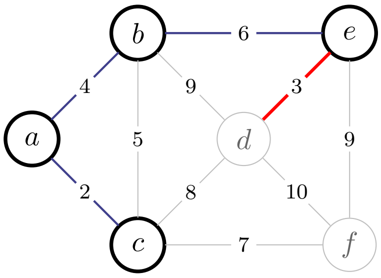


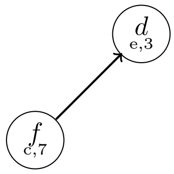
- `remove(c)`
- `insert(d, c, 8)`
- `insert(f, c, 7)`



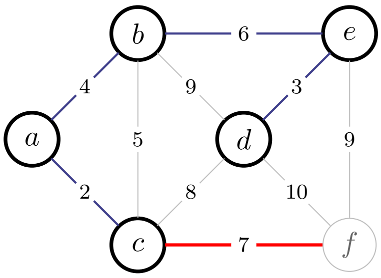


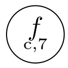
- `remove(b)`
- `insert(e, b, 6)`



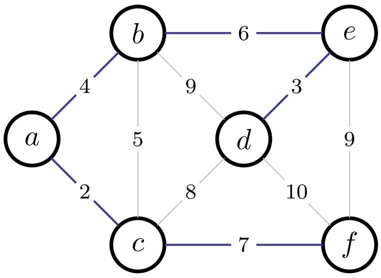


- `remove(e)`
- `update(d, e, 3)`





- `remove(d)`



- `remove(f)`

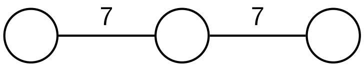
Aufgabe 11:

(a) Seien alle Kantengewichte in G paarweise unterschiedlich. Gegeben sei T, ein minimaler Spannbaum von G mit dem Wert v. Angenommen es gibt einen weiteren Spannbaum $T^* \neq T$ von G mit dem Wert v^*, wobei $v^* = v$ (also ist T^* auch minimal).
Wir wählen nun eine Kante $e \in T \setminus T^*$ und löschen sie aus T. T ist jetzt ein Wald mit zwei Komponenten/Bäumen. T^* besitzt eine Kante e^*, die diese beiden Komponenten in T verbindet. Nach Vorraussetzung ist $c(e) \neq c(e^*)$, somit können genau zwei Fälle auftreten:

1. $c(e) > c(e^*)$: Wenn wir in T die Kante e durch $e*$ ersetzen würden, hätten wir wieder einen Spannbaum, aber mit geringeren Kosten. Weder T noch T^* wären also minimale Spannbäume: Wiederspruch!
2. $c(e) < c(e^*)$: Analog.

$\square$

(b) Die Behauptung ist falsch. Im folgenden trivialen Gegenbeispiel ist der Spannbaum eindeutig bestimmt, aber es gibt zwei gleiche Kantenkosten:



(c) In allen Graphen, die in zwei Komponenten zerfallen, wenn man die teuerste Kante löscht, ist die teuerste Kante offentsichtlich auch Teil jedes Spannbaums. Minimalbeispiel: