Graphenalgorithmen: Blatt 1

Lukas Kalbertodt, Elena Resch, Mirco Wagner

21. April 2015

Aufgabe 1:

(a) Bei dem Graphen mit n Knoten, kann ein gewählter Knoten nur folgende Knotengrade besitzen: $0, 1, \dots (n-1)$. Dies gilt zwar für jeden Knoten, allerdings gilt folgende Einschränkung: Wenn ein Knoten den Knotengrad $n-1$ besitzt, kann es keinen Knoten mehr mit dem Knotengrad 0 geben. Insgesamt können also nur $n-1$ Knotengrade in dem Graphen existieren. Bei n Knoten heißt das, dass mindestens zwei Knoten einen doppelten Grad haben.

(b) Informale Induktion: Mit zwei Knoten (also einer Kante) ist es offentsichtlich, dass beide Knoten den Grad 1 haben. Wenn wir einen Knoten und eine Kante hinzufügen, erhöhen wir den Knotengrad von nur einem Knoten (nur ein Knoten mit Grad 1 könnte verloren gehen). Allerdings fügen wir auch einen weiteren Knoten mit Grad 1 hinzu, daher kann sich die Anzahl der Knoten mit Grad 1 nie verringern. Ist halt ein Pfad ...

Aufgabe 2:

Der Sonderfall $n = 1$, bei dem man nur eine Farbe braucht, wird im Folgenden nicht betrachtet.

- $\chi(K_n) = n$
  In einem vollständigen Graphen sind alle Knoten miteinander verbunden, d.h. alle Knoten müssen eine andere Farbe haben.

- $\chi(K_{m,n}) = 2$
  Jeder Knoten hat nur Nachbarn aus der anderen Partition. Wenn man jede Partition mit einer Farbe einfärbt, reicht das schon aus.

- $\chi(P_n) = 2$
  Man kann alle Knoten entlang des Pfades in abwechselnder Farbe einfärben. So ist der Vorgänger und Nachfolger eines Knoten immer in einer anderen Farbe eingefärbt.

- $\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & n \text{ gerade} \\ 3 & n \text{ ungerade} \end{cases}$
  Man färbt wie beim Pfad ein. Wenn n allerdings ungerade ist, sind an einer Stelle

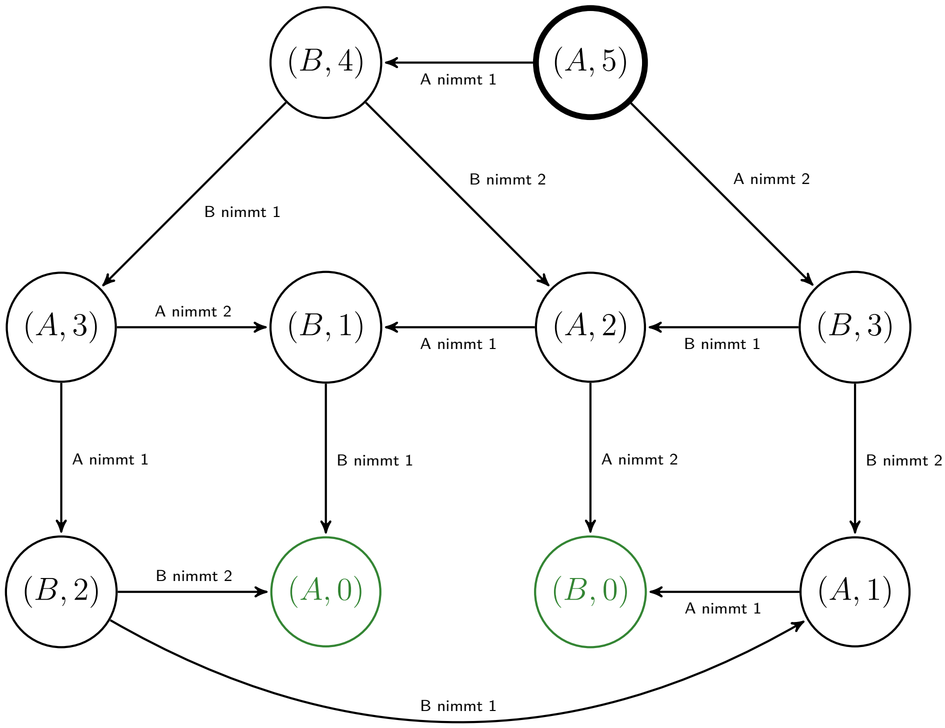
zwei selbe Farben benachbart. Dort färbt man dann einen der beiden Knoten in einer dritten Farbe.

- $\chi(\text{bipartiter Graph}) = 2$
  Wie beim vollständigen bipartiten Graphen. Falls der Graph nicht vollständig ist, gibt es ja nur weniger Kanten $\rightarrow$ weniger Nachbarn. Also wird das Problem nur erleichtert. Und solange es mindestens eine Kante gibt, braucht man 2 Farben.

- $\chi'(C_n) = \begin{cases} 2 & n \text{ gerade} \\ 3 & n \text{ ungerade} \end{cases}$
  Selbe Begründung wie bei $\chi(C_n)$.

Aufgabe 3:

(a) Jeder Knoten enthält folgende Daten: (Nächster Spieler, Steine auf dem Tisch). Dabei steht A für den Startspieler und B für den Spieler, der als zweites dran ist.



(b) Es gibt sieben unterschiedliche Spielverläufe, bei drei davon gewinnt A, bei vier davon gewinnt B.

(c) Spieler A kann immer gewinnen, indem er im ersten Zug nur einen Stein nimmt [$\rightarrow (B, 4)$]. Danach muss er abhängig von B's Zug so viel Steine nehmen, dass das Spiel auf $(B, 1)$ landet.

Spieler B kann entsprechend nicht immer gewinnen.