

**Aufgabe 1:** (6 Punkte)

Es sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph mit  $n \geq 2$  Knoten. Zeigen Sie:

- (a) Es gibt stets zwei Knoten mit gleichem Grad.
- (b) Hat  $G$  keine isolierten Knoten und  $n - 1$  Kanten, so gibt es mindestens zwei Knoten mit Grad 1.

**Aufgabe 2:** (6 Punkte)

Gegeben sei ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$ . Eine *Knotenfärbung* von  $G$  ist eine Zuordnung von Farben zu den Knoten aus  $V$ , so dass benachbarte Knoten unterschiedliche Farben haben. Die *chromatische Zahl*  $\chi(G)$  ist die kleinste Anzahl von Farben, die für eine Knotenfärbung von  $G$  benötigt werden.

Eine *Kantenfärbung* von  $G$  ist eine Zuordnung von Farben zu den Kanten aus  $E$ , so dass benachbarte Kanten unterschiedliche Farben haben. Der *chromatische Index*  $\chi'(G)$  ist die kleinste Anzahl von Farben, die für eine Kantenfärbung von  $G$  benötigt werden.

Bestimmen Sie die Werte  $\chi(K_n)$ ,  $\chi(K_{m,n})$ ,  $\chi(P_n)$ ,  $\chi(C_n)$ ,  $\chi(\text{bipartiter Graph})$  und  $\chi'(C_n)$  und begründen Sie Ihre Antworten.

**Aufgabe 3:** (7 Punkte)

Zu Beginn des Spiels liegen fünf Spielsteine auf einem Tisch. Zwei Spieler nehmen abwechselnd jeweils einen oder zwei Steine weg. Wer den letzten Stein nehmen muss, hat verloren.

- (a) Geben Sie einen Zustandsgraphen für dieses Spiel an, der alle möglichen Spielzustände repräsentiert.
- (b) Wie viele unterschiedliche Spielverläufe gibt es? Bei wie vielen Spielverläufen gewinnt der Spieler, der anfängt?
- (c) Gibt es für einen der beiden Spieler eine Strategie, so dass er immer gewinnt?