Graphenalgorithmen: Blatt 6

Lukas Kalbertodt, Elena Resch, Mirko Wagner

29. Mai 2015

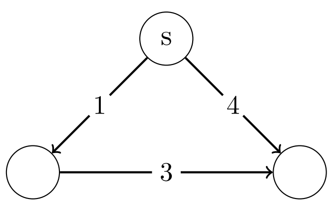
Aufgabe 12

(a) Angenommen es gibt eine Weglänge $d[i]$ die die Bellmannschen Gleichungen nicht erfüllt, d.h. es gibt ein j für das gilt $d'[i] = d[j] + c_{ij} < d[i]$ und sei k der Knoten, der auf dem Weg mit der Weglänge $d'[i]$ von s zu i vor i kam. Dann gilt $d'[i] = d[j] + c_{ji} < d[k] + c_{ki} = d'[i]$ womit $d[i]$ nicht die kürzeste Weglänge für i ist, was der Vorraussetzung widerspricht.

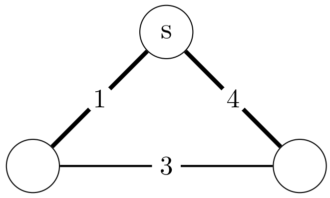
(b) Angenommen es gibt einen Knoten i für den es einen Weg mit der Weglänge $d'[i]$ gibt, mit $d'[i] < d[i]$. Dann gibt es ein j für das gilt $d[j] + c_{ij} = d'[i] < d[i] = \min_{(i,j)\in E} d[i] + c_{ij}$, was der Vorraussetzung, dass alle Markierungen die Bellmannschen Gleichungen erfüllen, widerspricht.
Wenn G Kreise mit Kosten 0 enthält, gilt die Aussage immernoch, jedoch ist eine optimale Markierung nun in jedem Fall nicht mehr eindeutig.

Aufgabe 13:

(a) Der Kürzeste-Wege-Baum ist nicht eindeutig bestimmt. Die Kantenkosten sind zwar alle unterschiedlich, aber d.h. nicht, dass es nicht zwei Wege zum selben Knoten mit den selben Kosten geben kann. Beispiel:



(b) Offentsichtlich ist erstmal jeder Kürzeste-Wege-Baum ein Spannbaum. Dieser Spannbaum ist aber nicht immer minimal. Im folgenden Beispiel sind die markierten Kanten zwar ein gültiger Kürzeste-Wege-Baum, aber kein minimaler Spannbaum:


s
1
4
3