

# Príprava na ESC

Lukáš Lafférs

Katedra matematiky, Univerzita Mateja Bela

Nov 27, 2025

#UMBmath [www.lukaslaffers.com](http://www.lukaslaffers.com) [lukas.laffers@gmail.com](mailto:lukas.laffers@gmail.com)

# I. etapa: Tri testy

Od 6.11.2025 do **12.1.2026**

## Test 1 (DNES)

### Prav. a Štatistika

- Pojmy: priemer, variancia, smerodajná odchýlka.
- Vlastnosti pravd.
- Typy premenných
- Tabuľka početností

## Test 2

### Vyhľadávanie info

- Stránka štat. úradu SR
- Práca s DATAcube
- Eurostat
- Rozumieť grafom
- Googlovať

## Test 3

### Porozumenie štat. dokumentov

- Čítať
- Trpezlivosť

# Tím PERO4F z GJGT



# Pravdepodobnosť a Štatistika

# Kocky, mince, karty

- s opakovaním/bez opakovania
- kombinátorika
- $\frac{\text{\# vhodné možnosti}}{\text{\# všetky možnosti}}$
- (permutácie/kombinácie)

[<https://lukaslaffers.github.io/pas1>]

[<https://lukaslaffers.github.io/pas2>]

Skupina priateľov hrá kocky. Hráč hodí dvoma kockami a vyhrá, ak súčet hodných hodnôt je menší alebo rovný 7. Aká je pravdepodobnosť výhry?

Skupina priateľov hrá kocky. Hráč hodí dvoma kockami a vyhrá, ak súčet hodných hodnôt je menší alebo rovný 7. Aká je pravdepodobnosť výhry?

Spolu možností je  $6 \times 6 = 36$ .

- Súčet 2 vie padnúť ako (1, 1), teda 1 možnosť.
- Súčet 3 vie padnúť ako (1, 2), (2, 1) teda 2 možnosti.
- Súčet 4 vie padnúť ako (1, 3), (2, 2), (3, 1) teda 3 možnosti.
- Súčet 5 vie padnúť ako (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) teda 4 možnosti.
- Súčet 6 vie padnúť ako (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) teda 5 možností.
- Súčet 7 vie padnúť ako (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), teda 6 možností.

Spolu  $\frac{1+2+3+4+5+6}{36} = \frac{21}{36}$

Hra pozostáva z hádzania dvoch kociek. Víťazom je osoba, ktorej súčet ho-  
dených čísel je vyšší ako 7. Aká je pravdepodobnosť výhry?

Hra pozostáva z hádzania dvoch kociek. Víťazom je osoba, ktorej súčet ho-  
dených čísel je vyšší ako 7. Aká je pravdepodobnosť výhry?

Je to opačná úloha k predošlej. Preto  $1 - \frac{21}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

Spolu  $\frac{1+2+3+4+5+6}{36} = \frac{21}{36}$

Jakub a Samuel sa musia dohodnúť, kto z nich vynesie odpadky. Keďže sa ani jednému do tejto „úlohy“ nechce, rozhodnú sa použiť kocku. Takže hodia dvoma kockami, pričom každá má 6 strán očíslovaných od 1 do 6. Ak bude konečný výsledok (súčet dvoch kociek) párny, Jakub vynesie odpadky, ak bude nepárny, vynesie ich Samuel. Aká je pre každého z nich šanca, že pôjde vyniesť odpadky?

Jakub a Samuel sa musia dohodnúť, kto z nich vynesie odpadky. Keďže sa ani jednému do tejto „úlohy“ nechce, rozhodnú sa použiť kocku. Takže hodia dvoma kockami, pričom každá má 6 strán očíslovaných od 1 do 6. Ak bude konečný výsledok (súčet dvoch kociek) párny, Jakub vynesie odpadky, ak bude nepárny, vynesie ich Samuel. Aká je pre každého z nich šanca, že pôjde vyniesť odpadky?

Jakub: 2,4,6,8,10,12

$$\frac{1 + 3 + 5 + 5 + 3 + 1}{36} = \frac{18}{36} = 0.5$$

Samuel: 3,5,7,9,11

$$\frac{2 + 4 + 6 + 4 + 2}{36} = \frac{18}{36} = 0.5$$

Koľko rôznych štvorciferných čísel možno vytvoriť tak, aby na konci bolo párne číslo, pričom sa použijú iba čísla 1, 2, 3, 4, 5 (bez opakovania)?

Koľko rôznych štvorciferných čísel možno vytvoriť tak, aby na konci bolo párne číslo, pričom sa použijú iba čísla 1, 2, 3, 4, 5 (bez opakovania)?

- Na konci je 2:  $4 \times 3 \times 2 \times 1$  možností.
- Na konci je 4:  $4 \times 3 \times 2 \times 1$  možností.

Spolu  $2 \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 2 \times 24 = 48$ .

V kartotéke máme 10 dokumentov, 5 z nich je účtovných, 3 organizačné a 2 finančné. Ak vieme, že prvý dokument je účtovný a ostatné sú uložené náhodne, aká je pravdepodobnosť, že dokumenty rovnakého typu sú spolu?

V kartotéke máme 10 dokumentov, 5 z nich je účtovných, 3 organizačné a 2 finančné. Ak vieme, že prvý dokument je účtovný a ostatné sú uložené náhodne, aká je pravdepodobnosť, že dokumenty rovnakého typu sú spolu?

Z 9 ostávajúcich dokumentov máme ešte 4 účtovné, 3 organizačné a 2 finančné.

- účtovné, organizačné, finančné:

$$\frac{\# \text{ vhodne uložené možnosti}}{\# \text{ všetky možnosti}} = \frac{4!3!2!}{9!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

- účtovné, finančné, organizačné -

$$\frac{4!2!3!}{9!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

Spolu

$$2 \frac{4!3!2!}{9!} = \frac{1}{630}$$

V šatníku máme 4 vešiaky s nohavicami, 3 vešiaky s košeľami a 2 vešiaky s kabátmi. Ak sú vešiaky v šatníku umiestnené náhodne, aká je pravdepodobnosť, že 4 páry nohavíc budú spolu?

V šatníku máme 4 vešiaky s nohavicami, 3 vešiaky s košelami a 2 vešiaky s kabátmi. Ak sú vešiaky v šatníku umiestnené náhodne, aká je pravdepodobnosť, že 4 páry nohavíc budú spolu?

4 nohavice spojíme do nohavicovej kopy. Tým pádom máme 6 ks oblečenia: 1 nohavicovú kopy, 3 košele, 2 kabáty. Nohavicová kopa môže byť poprehadzovaná  $4!$  spôsobmi.

$$\frac{\text{\# vhodné možnosti}}{\text{\# všetky možnosti}} = \frac{4!6!}{9!} = \frac{4 \times 3 \times 2}{9 \times 8 \times 7} = \frac{1}{21}$$

Poznávacie značky áut v istej krajine pozostávajú zo štyroch číslíc a troch písmen. Používajú sa nasledujúce písmená: B, C, D, F, G, H, J, K, L, M, N, P, R, S, T, V, W, X, Y a Z a všetky čísllice od 0 do 9. Pravdepodobnosť, že poznávacia značka má všetky čísllice a písmená rozdielne, je:

Poznávacie značky áut v istej krajine pozostávajú zo štyroch číslic a troch písmen. Používajú sa nasledujúce písmená: B, C, D, F, G, H, J, K, L, M, N, P, R, S, T, V, W, X, Y a Z a všetky číslice od 0 do 9. Pravdepodobnosť, že poznávacia značka má všetky číslice a písmená rozdielne, je:

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18}{10^4 20^3} = 0.4309$$

Vyváženou hracou kockou sa hádže nezávisle 10-krát. Aká je pravdepodobnosť, že rozdiel medzi počtom padnutí párneho a nepárneho čísla je menší alebo rovný 2?

Vyváženou hracou kockou sa hádže nezávisle 10-krát. Aká je pravdepodobnosť, že rozdiel medzi počtom padnutí párneho a nepárneho čísla je menší alebo rovný 2?

- Rozdiel je 2:
  - Musí padnúť 6 krát párne číslo a 4 krát nepárne číslo.  
$$\binom{10}{6} 0.5^6 0.5^4 = \frac{10!}{6!4!} 0.5^6 0.5^4$$
 alebo
  - Musí padnúť 4 krát párne číslo a 6 krát nepárne číslo.  
$$\binom{10}{6} 0.5^4 0.5^6 = \frac{10!}{4!6!} 0.5^4 0.5^6$$
- Rozdiel je 1: Nedá sa.
- Rozdiel je 0: Musí padnúť 5 krát párne číslo a 5 krát nepárne číslo.  
$$\binom{10}{5} 0.5^5 0.5^5 = \frac{10!}{5!5!} 0.5^5 0.5^5$$

Spolu 0.6563.

5 % prípadov, ktoré boli označené lekárske testom ako pozitívne, je falošne pozitívnych. Ak preskúmame prípady desiatich ľudí, ktorí boli testovaní s pozitívnym výsledkom, aká je pravdepodobnosť, že aspoň deväť je skutočne pozitívnych?

5 % prípadov, ktoré boli označené lekárske testom ako pozitívne, je falošne pozitívnych. Ak preskúmame prípady desiatich ľudí, ktorí boli testovaní s pozitívnym výsledkom, aká je pravdepodobnosť, že aspoň deväť je skutočne pozitívnych?

$$P(9 \text{ je pozitívnych}) + P(10 \text{ je pozitívnych}) = \binom{10}{9} 0.95^9 0.05^1 + \binom{10}{10} 0.95^{10} 0.05^0 = 0.914$$

V štúdií sa analyzuje určitý počet spoločností, z ktorých 30% majú za vrcholového manažéra ženu. Aká je pravdepodobnosť, že v 20 náhodne vybraných spoločnostiach je aspoň 10 top manažérok?

V štúdií sa analyzuje určitý počet spoločností, z ktorých 30% majú za vrcholového manažéra ženu. Aká je pravdepodobnosť, že v 20 náhodne vybraných spoločnostiach je aspoň 10 top manažérok?

$$P(10 \text{ manažérok}) + \dots + P(20 \text{ manažérok}) = \binom{20}{10} 0.3^{10} 0.7^{10} + \dots + \binom{20}{20} 0.3^{20} 0.7^0 \approx 0.048$$

```
sum(dbinom(10:20, size=20, prob=0.3))
```

V starej krabici so šachom máme 12 figúrok pešiakov a 14 ostatných figúrok. Polovica figúrok pešiakov je čiernych a 8 ostatných figúrok je tiež čiernych. Ak náhodne vyberieme figúrku, ktorá je čierna, aká je pravdepodobnosť, že je to pešiak?

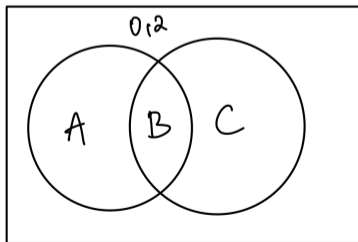
V starej krabici so šachom máme 12 figúrok pešiakov a 14 ostatných figúrok. Polovica figúrok pešiakov je čiernych a 8 ostatných figúrok je tiež čiernych. Ak náhodne vyberieme figúrku, ktorá je čierna, aká je pravdepodobnosť, že je to pešiak?

Využijeme vzťah pre podmienenú pravdepodobnosť.

$$P(\text{pešiak}|\text{čierny}) = \frac{P(\text{pešiak} \cap \text{čierny})}{P(\text{čierny})} = \frac{\frac{6}{26}}{\frac{14}{26}} = \frac{3}{7}$$

Lekársky posudok sa stanovuje na základe dvoch diagnostických testov. Pre pozitívny nález v lekárskom posudku je potrebné mať pozitívny výsledok z oboch testov. Vieme, že 60 % je pozitívnych v každom z testov a pravdepodobnosť negatívneho výsledku súčasne v oboch testoch je 0.2. Aká je pravdepodobnosť pozitívneho lekárskeho posudku?

Lekársky posudok sa stanovuje na základe dvoch diagnostických testov. Pre pozitívny nález v lekárskom posudku je potrebné mať pozitívny výsledok z oboch testov. Vieme, že 60 % je pozitívnych v každom z testov a pravdepodobnosť negatívneho výsledku súčasne v oboch testoch je 0.2. Aká je pravdepodobnosť pozitívneho lekárskeho posudku?



$$\begin{aligned}A + B &= 0.6 \\B + C &= 0.6 \\A + B + C &= 0.8 \\ \Rightarrow \\ B &= 0.4\end{aligned}$$

A a B sú dve udalosti z rovnakého výberového priestoru. Ktoré z nasledujúcich tvrdení je pravdivé?:

(A)  $P(A \cap B) \geq P(A)$

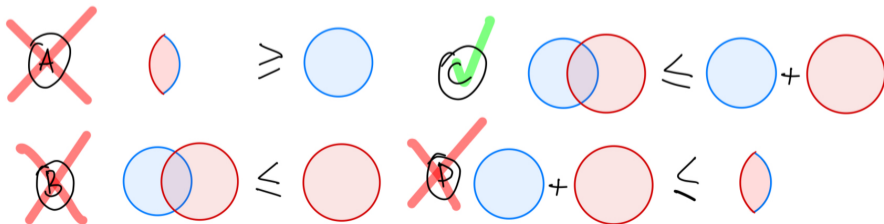
(B)  $P(A \cup B) \leq P(B)$

(C)  $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

(D)  $P(A) + P(B) \leq P(A \cap B)$

A a B sú dve udalosti z rovnakého výberového priestoru. Ktoré z nasledujúcich tvrdení je pravdivé?:

- (A)  $P(A \cap B) \geq P(A)$
- (B)  $P(A \cup B) \leq P(B)$
- (C)  $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
- (D)  $P(A) + P(B) \leq P(A \cap B)$



Nech  $A$  a  $B$  sú dve navzájom sa vylučujúce udalosti, pričom  $P(A) = 0.4$  a  $P(B) = 0.3$ . Akú hodnotu má  $P(A|B)$ ?

Nech  $A$  a  $B$  sú dve navzájom sa vylučujúce udalosti, pričom  $P(A) = 0.4$  a  $P(B) = 0.3$ . Akú hodnotu má  $P(A|B)$ ?

Sú vylučujúce sa takže 0.

Nech  $A$  a  $B$  sú dve navzájom sa vylučujúce udalosti, pričom  $P(A) = 0.55$  a  $P(B) = 0.3$ . Akú hodnotu má  $P(B|A)$ ?

Nech  $A$  a  $B$  sú dve navzájom sa vylučujúce udalosti, pričom  $P(A) = 0.55$  a  $P(B) = 0.3$ . Akú hodnotu má  $P(B|A)$ ?

Sú vylučujúce sa takže 0.

Technická správa pozostáva z dvoch častí. Každá časť je vypracovaná rôznymi zamestnancami, čo znamená, že správnosť jednotlivých častí je navzájom nezávislá. Ak vieme, že prvý zamestnanec vykoná 90 % svojej práce správne a druhý zamestnanec vykoná 80 % svojej práce správne, aká je pravdepodobnosť, že celá správa je správna?

Technická správa pozostáva z dvoch častí. Každá časť je vypracovaná rôznymi zamestnancami, čo znamená, že správnosť jednotlivých častí je navzájom nezávislá. Ak vieme, že prvý zamestnanec vykoná 90 % svojej práce správne a druhý zamestnanec vykoná 80 % svojej práce správne, aká je pravdepodobnosť, že celá správa je správna?

$$0.9 \times 0.8 = 0.72$$

Študent má dve skúšky, každú s hodnotením vyhovet/nevyhovet. Skúšky sa robia v rôznych dňoch a pred vykonaním druhej skúšky študent pozná hodnotenie prvej skúšky. Pravdepodobnosť úspešného absolvovania prvej skúšky je 60%. Ak študent úspešne vykonal prvú skúšku, viac si verí a pri druhej skúške má 80%-nú šancu, že ju zvládne, no ak neuspeje, verí si menej a pravdepodobnosť úspešného absolvovania druhej skúšky je 30%-ná. Aká je pravdepodobnosť úspešného absolvovania oboch skúšok?

Študent má dve skúšky, každú s hodnotením vyhovet/nevyhovet. Skúšky sa robia v rôznych dňoch a pred vykonaním druhej skúšky študent pozná hodnotenie prvej skúšky. Pravdepodobnosť úspešného absolvovania prvej skúšky je 60%. Ak študent úspešne vykonal prvú skúšku, viac si verí a pri druhej skúške má 80%-nú šancu, že ju zvládne, no ak neuspěje, verí si menej a pravdepodobnosť úspešného absolvovania druhej skúšky je 30%-ná. Aká je pravdepodobnosť úspešného absolvovania oboch skúšok?

$$0.6 \times 0.8 = 0.48$$

30% študentov v triede so 100 študentmi urobilo skúšku. Predtým, ako sa dozvedeli hodnotenie, 90% tých, ktorí uspeli, verili, že skúšku urobili, a 10% si myslelo, že skúšku neurobili. Z tých, ktorí neuspeli, 40% verilo, že skúšku urobili a 60% si myslelo, že ju neurobili. Ak je študent vybraný náhodne, aká je pravdepodobnosť, že si myslí, že skúšku urobil?

30% študentov v triede so 100 študentmi urobilo skúšku. Predtým, ako sa dozvedeli hodnotenie, 90% tých, ktorí uspeli, verili, že skúšku urobili, a 10% si myslelo, že skúšku neurobili. Z tých, ktorí neuspeli, 40% verilo, že skúšku urobili a 60% si myslelo, že ju neurobili. Ak je študent vybraný náhodne, aká je pravdepodobnosť, že si myslí, že skúšku urobil?

$$\frac{100 \cdot 0.3 \cdot 0.9 + 100 \cdot 0.7 \cdot 0.4}{100} = \frac{55}{100} = 0.55$$

# Typy premenných

- Kvalitatívne
  - nominálne - farba auta, štátna príslušnosť, značka topánok
  - ordinálne - medajle, hodnotenie v škole, dobrý-neutrál-zlý
- Kvantitatívne
  - diskkrétne - počet detí, počet rokov štúdia,
  - spojité - telesná výška, príjem, váha, glukóza v krvi

<https://esc2024.statistics.sk/studijne-materialy.html> → štatistické pojmy  
→ štatistický znak

Test 1, Úloha 1, kat. B [https://esc2024.statistics.sk/files/priklady-sutaznych-testov/Test1\\_kat.B\\_ver.1.pdf](https://esc2024.statistics.sk/files/priklady-sutaznych-testov/Test1_kat.B_ver.1.pdf)

Juraj si kupuje noviny každý deň. Čas, ktorý Juraj strávi ich čítaním každý deň, a počet článkov v jednotlivých novinách sú štatistické premenné:

Test 1, Úloha 1, kat. B [https://esc2024.statistics.sk/files/priklady-sutaznych-testov/Test1\\_kat.B\\_ver.1.pdf](https://esc2024.statistics.sk/files/priklady-sutaznych-testov/Test1_kat.B_ver.1.pdf)

Juraj si kupuje noviny každý deň. Čas, ktorý Juraj strávi ich čítaním každý deň, a počet článkov v jednotlivých novinách sú štatistické premenné:

Spojité (čas) a diskrétna (počet článkov).

Počet študentov v skupine a druh mimoškolskej aktivity, ktorú si každý z nich vybral, sú náhodné premenné:

- Diskrétna kvantitatívna a kvalitatívna
- Diskrétna kvalitatívna a kvantitatívna
- Ordinálna a diskretná kvantitatívna
- Spojitá kvantitatívna a diskretná kvantitatívna

Počet študentov v skupine a druh mimoškolskej aktivity, ktorú si každý z nich vybral, sú náhodné premenné:

- Diskrétna kvantitatívna a kvalitatívna
- ~~Diskrétna kvalitatívna a kvantitatívna~~
- ~~Ordinálna a diskrétna kvantitatívna~~
- ~~Spojité kvantitatívna a diskrétna kvantitatívna~~

# Čítanie z tabuliek

- hm, čítať snád' viete
- buďte pozorní, príklady sú urobené tak, aby atraktívna chyba viedla k jednému z riešení

Nasledujúca tabuľka zobrazuje rozdelenie stavu hospodárskych zvierat v kusoch v štyroch krajoch západného Slovenska v roku 2019 (zdroj: Štatistický úrad SR, databáza DATAcube.): Aké približné percento z celkového počtu zvierat tvoria spolu hovädzí dobytok a ošípané?

| Kraj              | Hovädzi dobytok spolu | Ošípané spolu  | Ovce spolu    | Hydina spolu     | Spolu            |
|-------------------|-----------------------|----------------|---------------|------------------|------------------|
| Bratislavský kraj | 12 960                | 28 518         | 1 042         | 815 358          | 857 878          |
| Trnavský kraj     | 54 783                | 223 303        | 2 238         | 1 393 629        | 1 673 953        |
| Trenčiansky kraj  | 40 725                | 45 131         | 31 914        | 1 935 559        | 2 053 329        |
| Nitriansky kraj   | 54 318                | 145 434        | 8 445         | 3 244 039        | 3 452 236        |
| <b>Spolu</b>      | <b>162 786</b>        | <b>442 386</b> | <b>43 639</b> | <b>7 388 585</b> | <b>8 037 396</b> |

Nasledujúca tabuľka zobrazuje rozdelenie stavu hospodárskych zvierat v kusoch v štyroch krajoch západného Slovenska v roku 2019 (zdroj: Štatistický úrad SR, databáza DATAcube.): Aké približné percento z celkového počtu zvierat tvoria spolu hovädzí dobytok a ošípané?

| Kraj              | Hovädzi dobytok spolu | Ošípané spolu | Ovce spolu | Hydina spolu | Spolu     |
|-------------------|-----------------------|---------------|------------|--------------|-----------|
| Bratislavský kraj | 12 960                | 28 518        | 1 042      | 815 358      | 857 878   |
| Trnavský kraj     | 54 783                | 223 303       | 2 238      | 1 393 629    | 1 673 953 |
| Trenčiansky kraj  | 40 725                | 48 134        | 31 814     | 1 985 659    | 2 053 329 |
| Nitriansky kraj   | 54 318                | 145 434       | 8 445      | 3 244 039    | 3 452 236 |
| Spolu             | 162 786               | 442 386       | 43 639     | 7 388 585    | 8 037 396 |

# Tabulky početností

- vyplníte ako sudoku

Majiteľ obchodu chce zistiť názor svojich zákazníkov a tak sa ich pýta na úroveň spokojnosti s ponúkanými službami. Nasledujúca tabuľka početnosti sumarizuje hodnotenie 55 zákazníkov, ktorí navštívili obchod v jeden konkrétny deň: Aké približné percento zákazníkov bolo „priemerne spokojných“?

|                    | Absolútna početnosť | Relatívna početnosť |
|--------------------|---------------------|---------------------|
| Nadmieru spokojný  |                     | 0,127               |
| Veľmi spokojný     | 16                  |                     |
| Priemerne spokojný |                     |                     |
| Nie veľmi spokojný |                     | 0,200               |
| Nespokojný         | 4                   |                     |

Majiteľ obchodu chce zistiť názor svojich zákazníkov a tak sa ich pýta na úroveň spokojnosti s ponúkanými službami. Nasledujúca tabuľka početnosti sumarizuje hodnotenie 55 zákazníkov, ktorí navštívili obchod v jeden konkrétny deň: Aké približné percento zákazníkov bolo „priemerne spokojných“?

|                    | Absolútna početnosť           | Relatívna početnosť     |
|--------------------|-------------------------------|-------------------------|
| Nadmieru spokojný  | $55 \cdot 0,127 = 7$          | 0,127                   |
| Veľmi spokojný     | 16                            | $\frac{16}{55} =$       |
| Priemerne spokojný | $55 - (7 + 16 + 11 + 4) = 17$ | $\frac{17}{55} = 0,309$ |
| Nie veľmi spokojný | $55 \cdot 0,2 = 11$           | 0,200                   |
| Nespokojný         | 4                             | $\frac{4}{55}$          |

Aby letecká spoločnosť analyzovala mieru spokojnosti cestujúcich, nainštalovala na letisku zariadenie, ktoré zhromažďuje odpovede na otázku „Ako ste spokojný so službami letiska?“. Nasledujúca tabuľka početností sumarizuje hodnotenie 60 ľudí, ktorí odpovedali v konkrétnu hodinu na prieskum. Aké percento cestujúcich je „nespokojných“?

|                           | <b>Absolútna početnosť</b> | <b>Relatívna početnosť</b> |
|---------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <b>Nadmieru spokojný</b>  | 10                         |                            |
| <b>Veľmi spokojný</b>     |                            | 0,2500                     |
| <b>Priemerne spokojný</b> |                            | 0,3333                     |
| <b>Nie veľmi spokojný</b> |                            | 0,1667                     |
| <b>Nespokojný</b>         |                            |                            |

Aby letecká spoločnosť analyzovala mieru spokojnosti cestujúcich, nainštalovala na letisku zariadenie, ktoré zhromažďuje odpovede na otázku „Ako ste spokojný so službami letiska?“. Nasledujúca tabuľka početností sumarizuje hodnotenie 60 ľudí, ktorí odpovedali v konkrétnu hodinu na prieskum. Aké percento cestujúcich je „nespokojných“?

|                    | Absolútna početnosť | Relatívna početnosť  |
|--------------------|---------------------|----------------------|
| Nadmieru spokojný  | 10                  | $10/60 = 0,1667$     |
| Veľmi spokojný     |                     | 0,2500               |
| Priemerne spokojný |                     | 0,3333               |
| Nie veľmi spokojný |                     | 0,1667               |
| Nespokojný         |                     | $1 - 0,916 = 0,0833$ |

# Názvoslovie

- štatistická premenná
- populácia
- výberová vzorka
- veľkosť výberovej vzorky

<https://esc2024.statistics.sk/studijne-materialy.html> → štatistické pojmy

Budeme skúmať pracovné uplatnenie študentov odboru štatistika. Z 2 500 študentov, ktorí ukončili štúdium v konkrétnom čase, zoberieme vzorku 150 jednotlivcov. Týchto jednotlivcov sme sa pýtali, či získali prácu v ich odbore do 6 mesiacov po ukončení štúdia. Získané odpovede možno rozšíriť na zvyšok populácie. Identifikujte: štatistickú premennú, populáciu, výberovú vzorku a veľkosť výberovej vzorky.

Budeme skúmať pracovné uplatnenie študentov odboru štatistika. Z 2 500 študentov, ktorí ukončili štúdium v konkrétnom čase, zoberieme vzorku 150 jednotlivcov. Týchto jednotlivcov sme sa pýtali, či získali prácu v ich odbore do 6 mesiacov po ukončení štúdia. Získané odpovede možno rozšíriť na zvyšok populácie. Identifikujte: štatistickú premennú, populáciu, výberovú vzorku a veľkosť výberovej vzorky.

- **štatistická premenná**: údaj o tom, či jednotlivец má alebo nemá prácu súvisiacu s jeho hlavným zameraním šesť mesiacov po ukončení štúdia
- **populácia**: 2 500 študentov, ktorí ukončili odbor štatistika;
- **výberová vzorka**: 150 vybraných jednotlivcov
- **veľkosť výberovej vzorky**: 150

V meste so 145 678 obyvateľmi sa vykonáva štúdia o podiele ľudí, ktorí majú domáce zvieratá. Z tohto dôvodu je oslovených 2 654 obyvateľov a získané odpovede sú rozšírené na zvyšok populácie. Identifikujte: štatistickú premennú, populáciu, vzorku a veľkosť vzorky.

V meste so 145 678 obyvateľmi sa vykonáva štúdia o podiele ľudí, ktorí majú domáce zvieratá. Z tohto dôvodu je oslovených 2 654 obyvateľov a získané odpovede sú rozšírené na zvyšok populácie. Identifikujte: štatistickú premennú, populáciu, vzorku a veľkosť vzorky.

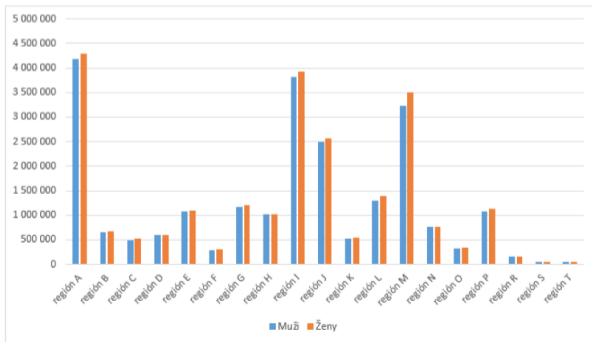
- štatistická premenná: či osoba má alebo nemá domáce zviera
- populácia: 145 678 obyvateľov;
- výberová vzorka: 2654 vybraných obyvateľov
- veľkosť výberovej vzorky: 2654

# Porozumenie grafov

- nesmierne dôležitá zručnosť
- grafmi odkomunikujeme veci oveľa efektívnejšie ako napr. tabuľkami.

Nasledujúci graf zobrazuje populáciu jednotlivých regiónov podľa pohlavia. Analyzujte regióny A, F, K a M a zistite, v ktorom regióne je najväčší rozdiel v počte mužov a žien.

- (A) región A
- (B) región K
- (C) región M
- (D) región F



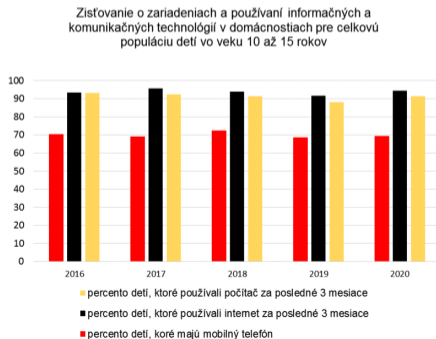
Nasledujúci graf zobrazuje populáciu jednotlivých regiónov podľa pohlavia. Analyzujte regióny A, F, K a M a zistite, v ktorom regióne je najväčší rozdiel v počte mužov a žien.

- (A) ~~región A~~
- (B) ~~región K~~
- (C) ~~región M~~
- (D) ~~región F~~



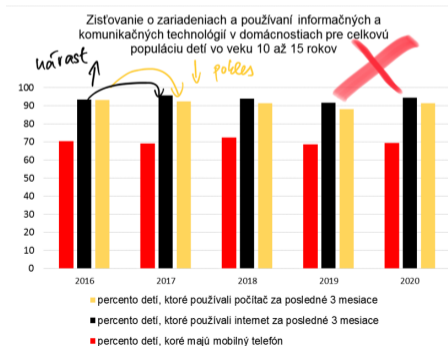
Nasledujúci graf zobrazuje výsledky zo zisťovania o zariadeniach a používaní informačných a komunikačných technológií v domácnostiach (zdroj: INE (štatistický úrad Španielska)). Predstavuje celkový počet detí vo veku 10 až 15 rokov (v percentách) za roky 2016 až 2020. Ktoré z týchto tvrdení je pravdivé?

- (A) Pokles používateľov počítačov od roku 2016 do roku 2017 bol úmerný poklesu používania internetu za tie isté roky.
- (B) V roku 2019 bol najmenší podiel detí, ktoré používali spomínané technológie.
- (C) Nárast / pokles používateľov internetu z jedného roka na druhý súvisí s nárastom / poklesom používateľov, ktorí majú mobilný telefón v danom roku.
- (D) Rok 2016 bol rokom s najnižším podielom používateľov internetu.



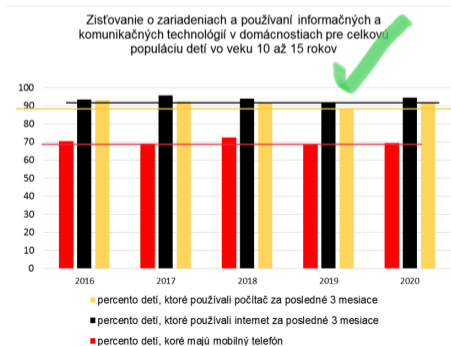
Nasledujúci graf zobrazuje výsledky zo zisťovania o zariadeniach a používaní informačných a komunikačných technológií v domácnostiach (zdroj: INE (štatistický úrad Španielska)). Predstavuje celkový počet detí vo veku 10 až 15 rokov (v percentách) za roky 2016 až 2020. Ktoré z týchto tvrdení je pravdivé?

- (A) Pokles používateľov počítačov od roku 2016 do roku 2017 bol úmerný poklesu používania internetu za tie isté roky.
- (B) V roku 2019 bol najmenší podiel detí, ktoré používali spomínané technológie.
- (C) Nárast / pokles používateľov internetu z jedného roka na druhý súvisí s nárastom / poklesom používateľov, ktorí majú mobilný telefón v danom roku.
- (D) Rok 2016 bol rokom s najnižším podielom používateľov internetu.



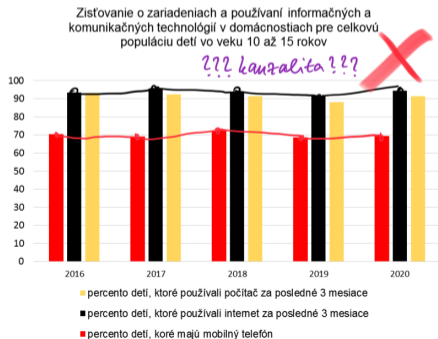
Nasledujúci graf zobrazuje výsledky zo zisťovania o zariadeniach a používaní informačných a komunikačných technológií v domácnostiach (zdroj: INE (štatistický úrad Španielska)). Predstavuje celkový počet detí vo veku 10 až 15 rokov (v percentách) za roky 2016 až 2020. Ktoré z týchto tvrdení je pravdivé?

- (A) Pokles používateľov počítačov od roku 2016 do roku 2017 bol úmerný poklesu používania internetu za tie isté roky.
- (B) V roku 2019 bol najmenší podiel detí, ktoré používali spomínané technológie.
- (C) Nárast / pokles používateľov internetu z jedného roka na druhý súvisí s nárastom / poklesom používateľov, ktorí majú mobilný telefón v danom roku.
- (D) Rok 2016 bol rokom s najnižším podielom používateľov internetu.



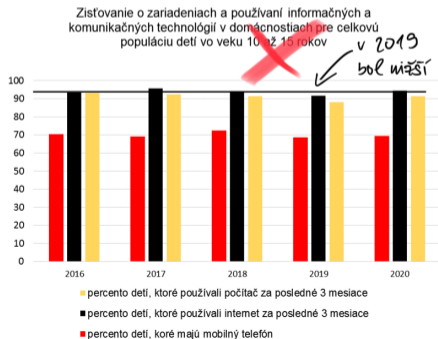
Nasledujúci graf zobrazuje výsledky zo zisťovania o zariadeniach a používaní informačných a komunikačných technológií v domácnostiach (zdroj: INE (štatistický úrad Španielska)). Predstavuje celkový počet detí vo veku 10 až 15 rokov (v percentách) za roky 2016 až 2020. Ktoré z týchto tvrdení je pravdivé?

- (A) Pokles používateľov počítačov od roku 2016 do roku 2017 bol úmerný poklesu používania internetu za tie isté roky.
- (B) V roku 2019 bol najmenší podiel detí, ktoré používali spomínané technológie.
- (C) Nárast / pokles používateľov internetu z jedného roka na druhý súvisí s nárastom / poklesom používateľov, ktorí majú mobilný telefón v danom roku.
- (D) Rok 2016 bol rokom s najnižším podielom používateľov internetu.



Nasledujúci graf zobrazuje výsledky zo zisťovania o zariadeniach a používaní informačných a komunikačných technológií v domácnostiach (zdroj: INE (štatistický úrad Španielska)). Predstavuje celkový počet detí vo veku 10 až 15 rokov (v percentách) za roky 2016 až 2020. Ktoré z týchto tvrdení je pravdivé?

- (A) Pokles používateľov počítačov od roku 2016 do roku 2017 bol úmerný poklesu používania internetu za tie isté roky.
- (B) V roku 2019 bol najmenší podiel detí, ktoré používali spomínané technológie.
- (C) Nárast / pokles používateľov internetu z jedného roka na druhý súvisí s nárastom / poklesom používateľov, ktorí majú mobilný telefón v danom roku.
- (D) Rok 2016 bol rokom s najnižším podielom používateľov internetu.



# Štatistické názvoslovie

Majme štatistickú vzorku veľkosti  $n$ :  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

- priemer -  $\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n) = \sum_{i=1}^n x_i / n$
- medián - hodnota v strede (polovica hodnôt je nad  $m$  a polovica pod  $m$ )
- modus - najčastejšia hodnota
- rozptyl/variancia -  $s^2 = \frac{1}{n} ((x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / n$
- smerodajná odchýlka -  $s = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / n}$
- variačný koeficient  $v = \frac{s}{\bar{x}}$

<https://esc2024.statistics.sk/studijne-materialy.html> → štatistické pojmy  
[link BAKademia na YT]

Poznáme bodové hodnotenie prijímacích skúšok na vysokú školu pre triedu s 25 študentami. Výsledky sú nasledovné:

7; 11.3; 5.4; 5; 12.6; 9; 8.9; 7.8; 6; 6.2; 4.8; 10.2; 13.1; 8.7; 6.7; 5.5; 5.5; 5; 12; 10.2; 4.5; 5; 9.9; 10; 10.1.

Ktoré z nasledujúcich tvrdení je pravdivé pre tento súbor údajov?

- (A) ~~Variačný koeficient je väčší ako 0,5~~
- (B) Rozptyl je menší ako priemer.
- (C) ~~Priemer delený rozptylom sa rovná 1.~~
- (D) ~~Smerodajná odchýlka sa zhoduje s druhou odmocninou priemeru.~~

Poznáme bodové hodnotenie prijímacích skúšok na vysokú školu pre triedu s 25 študentami. Výsledky sú nasledovné:

7; 11.3; 5.4; 5; 12.6; 9; 8.9; 7.8; 6; 6.2; 4.8; 10.2; 13.1; 8.7; 6.7; 5.5; 5.5; 5; 12; 10.2; 4.5; 5; 9.9; 10; 10.1.

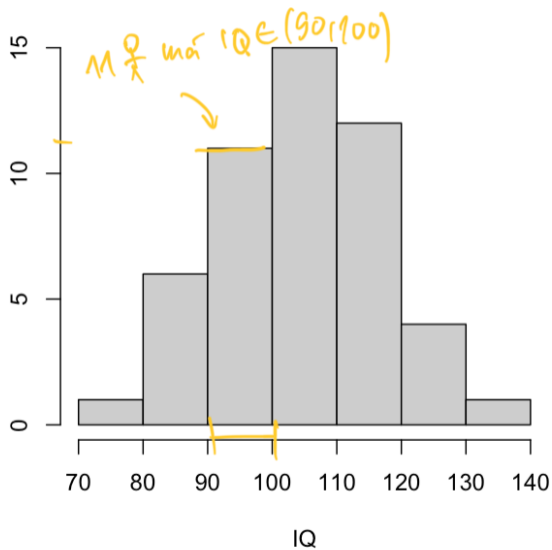
Ktoré z nasledujúcich tvrdení je pravdivé pre tento súbor údajov?

- (A) ~~Variačný koeficient je väčší ako 0,5~~
- (B) Rozptyl je menší ako priemer.
- (C) ~~Priemer delený rozptylom sa rovná 1.~~
- (D) ~~Smerodajná odchýlka sa zhoduje s druhou odmocninou priemeru.~~

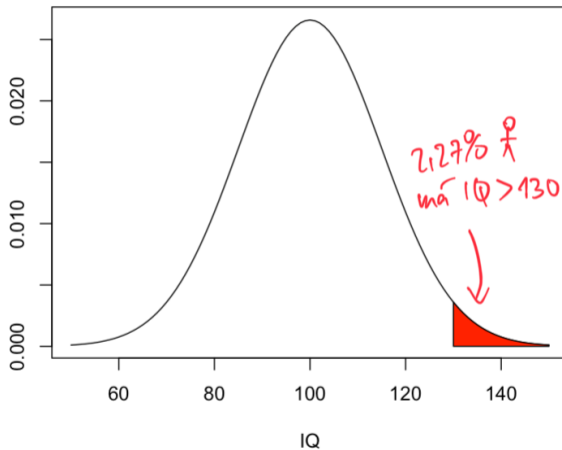
$$\bar{x} = 8.016, s = 2.66, s^2 = 7.07, v = 0.33.$$

(B) je správne.

# Histogram



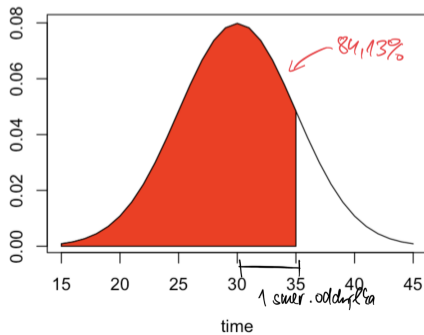
## \*Normálne rozdelenie (kat. A)



[Advanced:] Viacej tu.

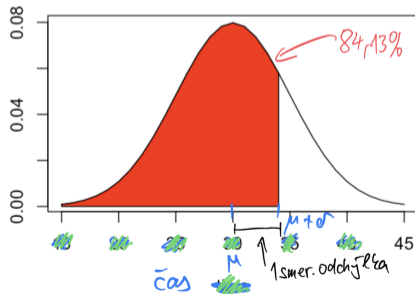
Chemickou analýzou, ktorá sa zvykne používať na odhad času potrebného na vykonanie určitého medicínskeho zákroku, sa odhadlo, že čas, kým prebehne chemická reakcia, má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 30 minút a so smerodajnou odchýlkou 5 minút. Ak máme na pozorovanie chemickej reakcie celkovo 35 minút, aká je pravdepodobnosť, že budeme pozorovať chemickú reakciu ešte pred uplynutím tohto času ?

Chemickou analýzou, ktorá sa zvykne používať na odhad času potrebného na vykonanie určitého medicínskeho zákroku, sa odhadlo, že čas, kým prebehne chemická reakcia, má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 30 minút a so smerodajnou odchýlkou 5 minút. Ak máme na pozorovanie chemickej reakcie celkovo 35 minút, aká je pravdepodobnosť, že budeme pozorovať chemickú reakciu ešte pred uplynutím tohto času ?



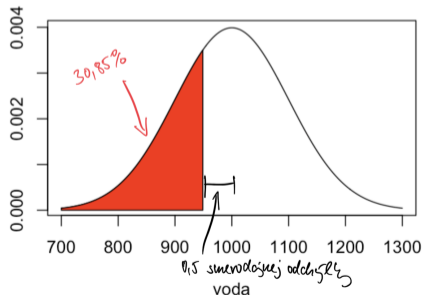
Odhadovaný čas potrebný na upečenie bochníka chleba tak, aby nebol po vyklopení nedopečený, má normálne rozdelenie so strednou hodnotou  $\mu$  minút a štandardnou odchýlkou  $\sigma$  minút. Ak sa peče  $\mu + \sigma$  minút, aká je pravdepodobnosť, že chlieb nebude nedopečený?

Odhadovaný čas potrebný na upečenie bochníka chleba tak, aby nebol po vyklopení nedopečený, má normálne rozdelenie so strednou hodnotou  $\mu$  minút a štandardnou odchýlkou  $\sigma$  minút. Ak sa peče  $\mu + \sigma$  minút, aká je pravdepodobnosť, že chlieb nebude nedopečený?



Štúdia sa snaží určiť množstvo vody, ktoré ľudia skonzumujú za rok. Množstvo vody vypitej obyvateľmi za rok sa riadi normálnym rozdelením so strednou hodnotou 1 000 litrov a smerodajnou odchýlkou rovnajúcou sa jednej desatine strednej hodnoty. Aké percento populácie spotrebuje menej ako 950 litrov vody za rok?

Štúdia sa snaží určiť množstvo vody, ktoré ľudia skonzumujú za rok. Množstvo vody vypitej obyvateľmi za rok sa riadi normálnym rozdelením so strednou hodnotou 1 000 litrov a smerodajnou odchýlkou rovnajúcou sa jednej desatine strednej hodnoty. Aké percento populácie spotrebuje menej ako 950 litrov vody za rok?



Ktoré z nasledujúcich tvrdení o mierach centrálnej tendencie je pravdivé?

- (A) Pri binomickom rozdelení sa priemer rovná mediánu.
- (B) Priemer možno vypočítať pre všetky druhy premenných.
- (C) Priemer je citlivejší na extrémne prípady ako medián.

Ktoré z nasledujúcich tvrdení o mierach centrálnej tendencie je pravdivé?

- (A) Pri binomickom rozdelení sa priemer rovná mediánu.
- (B) Priemer možno vypočítať pre všetky druhy premenných.
- (C) Priemer je citlivejší na extrémne prípady ako medián.

Ktoré z nasledujúcich tvrdení o mierach centrálnej tendencie je pravdivé?

- (A) ~~Pri binomickom rozdelení sa priemer rovná mediánu.~~
- (B) ~~Priemer možno vypočítať pre všetky druhy premenných.~~
- (C) Priemer je citlivejší na extrémne prípady ako medián.

## \*Lineárna regresia (kat A)

- fantastický nástroj štatistického modelovania
- vysvetľovanie a predikcia nejakej **premennej** pomocou **iných premených**
- Napr. **cena ojazdeného auta** pomocou **značky, veku, nájazdu, objemu motora, spotreby, výbavy**
- Napr. **výsledok na teste** pomocou **počtu hodín, ktoré ste sa učili**
- Napr. **prognóza pacienta** pomocou **veku, pohlavia, BMI, toho či pije/fajčí**

Predpokladá sa, že počet hodín prípravy na skúšku ovplyvňuje hodnotenie na skúške. Desať žiakov malo tieto výsledky:

|                              |    |    |     |     |     |     |    |     |     |    |
|------------------------------|----|----|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|----|
| Hodiny prípravy na skúšku    | 10 | 15 | 25  | 25  | 30  | 30  | 35 | 40  | 40  | 45 |
| Hodnotenie skúšky (v bodoch) | 2  | 3  | 4,8 | 5,2 | 5,4 | 6,6 | 7  | 7,9 | 8,1 | 9  |

Vypočítaná regresná priamka predpovedá výsledok hodnotenia skúšky v závislosti od počtu hodín štúdia. Zistili sme, že s každou hodinou prípravy sa hodnotenie skúšky zvyšuje o...

Toto je nad rámec dneška ale ak vás to zaujalo, tak sa dočítate viacej napríklad tu: <https://lukaslaoffers.github.io/pas2/reg.html>

# Zdroje

- [ESC 2023]
- [ESC 2024]
- [ESC 2025]
- [štat. úrad SR]
- [DATAcube]
- [Eurostat]
- [BAkademia na YT]
- [\*3Blue1Brown YT]
- [\*LL PaŠ1] a [\*LL PaŠ2]

Táto prezentácia bude na [<https://www.lukaslaoffers.com/misc>].

# Otázky?

- lukas.laffers@gmail.com
- Zoom/Teams
- osobne [FPV UMB], F226A

Ďakujem za pozornosť!



KM

KATEDRA MATEMATIKY  
UNIVERZITA MATEJA BELA



UMBmath



umbmath