

FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM

Fyzikální praktikum 1

Zpracoval: Lukáš Lejdar

Naměřeno: 27. února 2023

Obor: F

Skupina: Út 16:00

Testováno:

Úloha č. 4:

Měření gravitační konstanty a tíhového zrychlení

$T = 21,1 \text{ }^{\circ}\text{C}$

$p = 101,35 \text{ kPa}$

$\varphi = 47,7 \text{ }^{\circ}$

1. Úvod

V úloze se pokusím změřit gravitační konstantu G Cavendishovou metodou a tíhové zrychlení pomocí reverzního kyvadla.

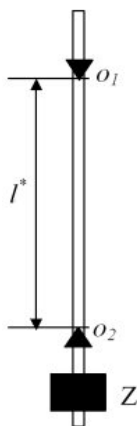
2. Teorie

2.1. Měření tíhového zrychlení reverzním kyvadlem

Pro periodu kmitů T fyzikálního kyvadla platí aproximativní vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgx}}, \quad (1)$$

kde g je tíhové zrychlení, J moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení, m jeho hmotnost a x vzdálenost těžiště kyvadla od osy otáčení. Tíhové zrychlení se dá určit přímo z tohoto vztahu, ale rádi bychom se vyhnuli měření ošemetných veličin jako je moment setrvačnosti. Používá se proto raději tzv. reverzní kyvadlo se dvěma osami otáčení o_1 a o_2 .



Obrázek 1: Reverzní kyvadlo

Označím x_1, x_2 vzdálenosti těžiště od os o_1, o_2 .

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + mx_1^2}{mgx_1}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + mx_2^2}{mgx_2}} \quad (2)$$

Pokud zajistíme stejnou periodu kmitů $T_1=T_2$, můžeme dosazením $l = x_1 + x_2$, obě T vyjádřit jako

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3)$$

2.2. Měření gravitační konstanty Cavendishovou metodou

Dvě malé kuličky spojené tyčinkou jsou zavěšené na torzním vlákne a dohromady tak tvoří tlumený harmonický oscilátor. Při zkroucení jeho závěsu o úhel φ působí na soustavu vratný silový moment M

$$M(\varphi) = -D\varphi, \quad (4)$$

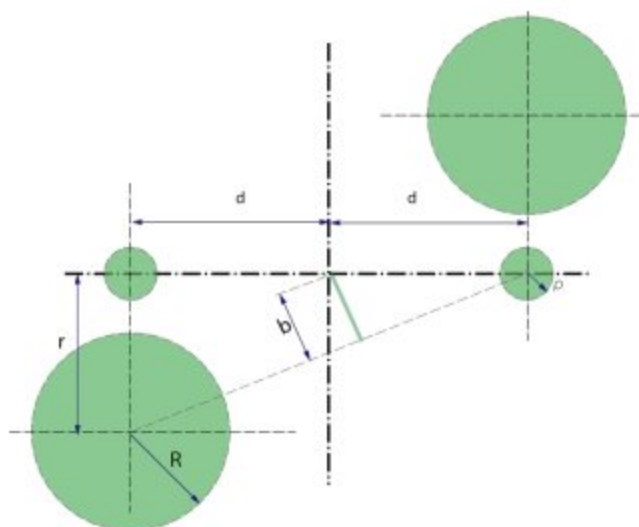
kde D je veličina zvaná direkční moment. Po stranách jsou navíc umístěné dvě větší koule působící na oscilátor momentem gravitační síly M_{grav} jako na obrázku 2. Zanedbáme-li její proměnlivost během torzních kmitů, můžeme z rovnice (4) vyjádřit posun rovnovážné polohy φ_0

$$\varphi_0 = \frac{M_{\text{grav}}}{D}. \quad (5)$$

Při odvozování velikosti momentu gravitačních sil musíme vzít v úvahu, že velká koule působí na obě kuličky, a že momenty těchto sil jsou orientovány proti sobě. Dosazením z Newtonova gravitačního zákona dostaneme

$$M_{\text{grav}} = 2GMmd \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{(4d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \right), \quad (6)$$

kde G je gravitační konstanta, M hmotnost velké koule a m hmotnost kuličky.



Obrázek 2: Schéma torzních vah Cavendishovy metody při pohledu shora.

Zbývá najít způsob jak změřit veličinu D . Volné kmity netlumeného torzního kyvadla jsou popsány diferenciální rovnicí

$$J\ddot{\varphi} + D\varphi = M_{\text{grav}}, \quad (7)$$

kde J je moment setrvačnosti kuliček vzhledem k ose otáčení

$$J = 2m\left(\frac{2}{5}\rho^2 + d^2\right). \quad (8)$$

Vyřešením rovnice (7) dostaneme

$$\varphi(t) = \varphi_m \sin\left(\sqrt{\frac{D}{J}}t + \psi\right) + \varphi_0 \quad (9)$$

odkud jde jednoduše spočítat D , pokud zjistíme periodu kmitání.

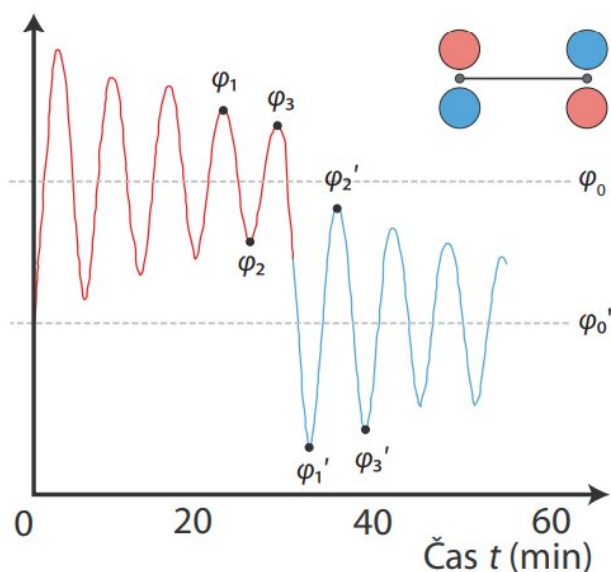
3. Postup měření

3.1. Měření reverzním kyvadlem

Pro výpočet potřebuji docílit stejných period kmitání na osách o_1 a o_2 , přičemž jedinou proměnou je posuvné závaží na konci kyvadla. Provedu několik měření period T_1 a T_2 pro náhodné umístění závaží x a výsledky vynesu do grafu. Místo kde se křivky pro jednu a druhou osu protnou bude můj první hrubý odhad, který potom budu iterativně malými posuvy zlepšovat.

3.2. Cavendishova metoda

V aparatuře je laser namířený na torzní kyvadlo, který se sérií zrcadel projektuje na opačnou stěnu místnosti. Vychýlení kyvadla o úhel φ tedy způsobí i vychýlení laseru o ten samý úhel. Aparatura mi zároveň umožňuje obě větší koule zrcadlově vyměnit, tak aby výchylka φ_0 byla stejná, ale na opačnou stranu. Spustím měření a po uplynutí dostatečně dlouhé doby koule právě takhle vyměním. Výsledná závislost polohy laseru na čase by měla vypadat nějak takto



Obrázek 3: Předpokládaná závislost polohy laseru na čase

Rovnovážnou polohu určím metodou tří kyvů; $\varphi_0 = \frac{1}{2}(\frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2} + \varphi_2)$ a rovnici (5) přepíšu do této notace jako

$$\varphi_0 - \varphi'_0 = 2 \frac{M_{\text{grav}}}{D}. \quad (10)$$

Ve skutečnosti ale měřím vzdálenosti na stěně místo úhlů. Platí mezi nimi převodní vztah

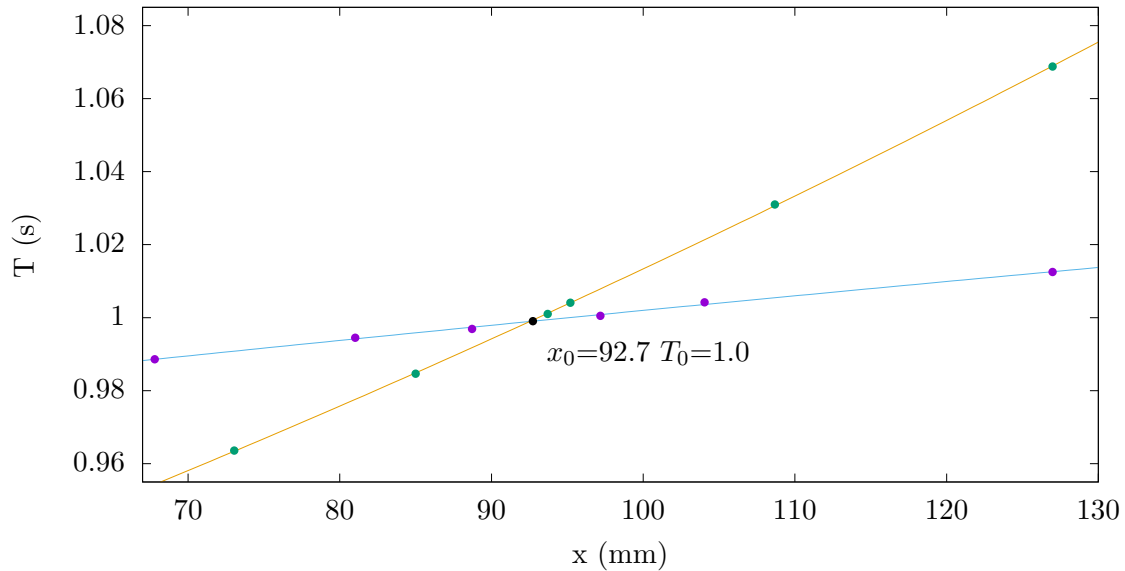
$$\varphi_0 - \varphi'_0 = 2 \arctan\left(\frac{x_0 - x'_0}{2L}\right), \quad (11)$$

kde L je vzdálenost stínítka od oscilátoru.

4. Výsledky měření

4.1. Měření reverzním kyvadlem

Nejprve jsem provedl několik měření period kmitání na obou osách v závislosti na poloze závaží. Hrubý odhad polohy x_0 , zjistím z průniků fitů hodnot.



Obrázek 4: Závislost doby periody T na poloze závaží pro obě osy

Závaží bylo potřeba ještě několikrát nepatrně posunout, než jsem dospěl k nejlepší shodě

$$T_1 = (0.99860 \pm 0.00002) \text{ s}, \quad T_2 = (0.99845 \pm 0.00002) \text{ s}, \quad (12)$$

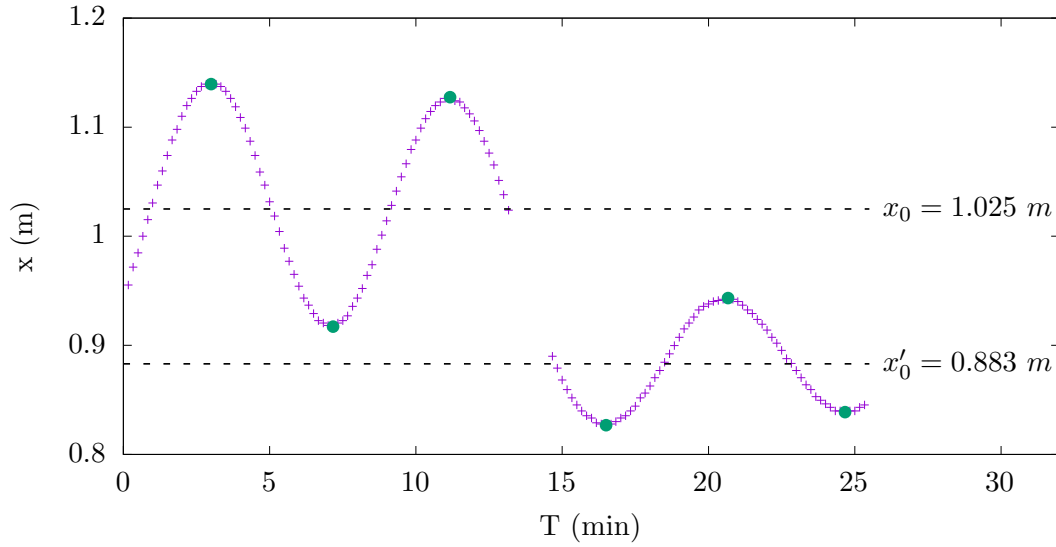
Jako výslednou periodu budu považovat průměr hodnot a nejistotu jako jejich rozdíl. Stačí už jenom dosadit vzdálenost os l do vztahu (3) a můžu dopočítat gravitační zrychlení.

$$T = (0.99853 \pm 0.00002) \text{ s} \quad (13)$$

$$l = (89.90 \pm 0.03) \text{ cm} \quad (14)$$

$$g = (9.800 \pm 0.004) \text{ ms}^{-2} \quad (15)$$

4.2. Měření gravitační konstanty Cavendishovou metodou



Obrázek 5: Graf závislosti polohy laseru na čase

poloměr torzního kyvadla	$d = 50 \text{ mm}$	(16)
vzdálenost bližších dvou koulí	$r = 46.5 \text{ mm}$	(17)
poloměr kuliček	$\rho = 8.19 \text{ mm}$	(18)
hmotnost větší wolframové koule	$M = 1.5 \text{ kg}$	(19)
hmotnost kuličky	$m = (38.3 \pm 0.2) \text{ g}$	(20)
perioda kmitů	$T = (490 \pm 3) \text{ s}$	(21)
Vzdálenost stínítka od oscilátoru	$L = (5.280 \pm 0.003) \text{ m}$	(22)
Dopočítaný rozdíl výchylek	$\varphi_0 - \varphi'_0 = (0.0269 \pm 0.0022) \cdot 10^{-3} \text{ Rad}$	(23)

Vyjádřením gravitační konstanty ze vztahů (5) (6) a (8) získávám hodnotu

$$G = (17.4 \pm 1.5) 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} \quad (24)$$

5. Závěr

Pomocí reverzního kyvadla jsem změřil gravitační zrychlení v laboratoři $g = (9.800 \pm 0.005) \text{ ms}^{-2}$, která velmi dobře odpovídá tabulkovým hodnotám pro Brno $g = 9,809980 \text{ ms}^{-2}$. Na nejistotu má převážně vliv nejistota změřené periody.

Gravitační konstantu jsem pomocí Cavendishovy metody určil na $G = 17.4 \pm 1.5 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ oproti tabulkové hodnotě $6.67430 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$. Na odkaze [1] přikládám článek z Harvardské univerzity, popisující měření stejnou aparaturou jako jsem používal já. Jejich změřená úhlová výchylka, ale byla 0.00540 Rad , zatímco moje hodnota je $\frac{\varphi_0 - \varphi'_0}{2} = 0.0135 \text{ Rad}$. Neznám důvod této chyby, ale je příčinou nesprávné hodnoty gravitační konstanty. Periody kmitání máme přibližně shodné.

Reference

- [1] Cavendishův experiment Harvardské univerzity <https://sciencedemonstrations.fas.harvard.edu/presentations/cavendish-experiment>.