

FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM

Fyzikální praktikum 1

Zpracoval: Lukáš Lejdar

Naměřeno: 30. dubna 2023

Obor: F

Skupina: Út 16:00

Testováno:

Úloha č. 5: Měření modulu pružnosti pevných látek

$$T = 21,1\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$p = 101,35\text{ kPa}$$

$$\varphi = 47,7\text{ }^{\circ}$$

1. Úvod

V úloze budu měřit různé moduly pružnosti. Zavádíme je následujícím způsobem:

Pro materiál v tahu platí v nejjednodušším případě Hookův zákon

$$\sigma_n = \frac{dF_n}{dS} = \frac{\Delta l}{l} E, \quad (1)$$

kde Δl délkové prodloužení, l délka vzorku, dF_n průmět síly na kolmici ke zvolené plošce dS , σ_n normálové napětí a E modul pružnosti. Pokud je materiál v torzi místo v tahu a speciálně se zabýváme drátem o rozměrech $l \times \rho \times 2\pi$, bude platit velmi obdobný zákon

$$\sigma_t = \frac{dF_t}{dS} = \frac{\rho \varphi}{a} G \quad (2)$$

kde φ je úhel zkroucení konce drátu a G modul pružnosti ve smyku.

2. Postup měření

2.1. Měření modulu pružnosti v tahu přímou metodou z prodloužení drátu

Měření bude probíhat jako na obrázku 1. Z úchyty visí kolmo dolů drát o délce l a průměru d , který můžu postupně zatěžovat a úchylkoměrem velmi citlivě měřit jeho prodloužení.

Do Hookova zákona dosadím za S obsah průřezu drátu a za F gravitační sílu, kterou na drát působí závaží.

$$\frac{4gm}{\pi d^2} = \frac{\Delta l}{l} E \quad (3)$$

Změřím odchylku pro každé další přidání závaží a modul pružnosti určím ze sklonu lineárního fitu hodnot.

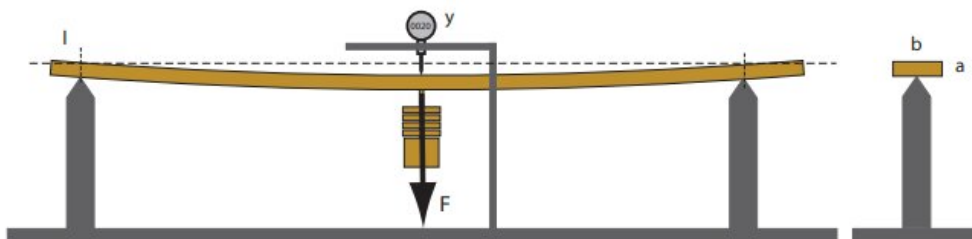
$$k = \frac{\Delta l}{m} = \frac{4gl}{\pi d^2 E} \quad (4)$$



Obrázek 1:
Přímá metoda

2.2. Měření modulu pružnosti v tahu z průhybu plného obdélníkového nosníku

Měření bude probíhat jako na obrázku 2. Mezi dvěma podpěrami ve vzdálenosti l je položený obdélníkový nosník o rozměrech $a \times b \times c$, který můžeme postupně zatěžovat přidáváním závaží a úchylkoměrem měřit výchylku y od původní polohy.



Obrázek 2: průhyb nosníku

Vztah mezi průhybem y daného nosníku a zatížením $F=mg$ je

$$y = \frac{mgl^3}{4Ea^3b} \quad (5)$$

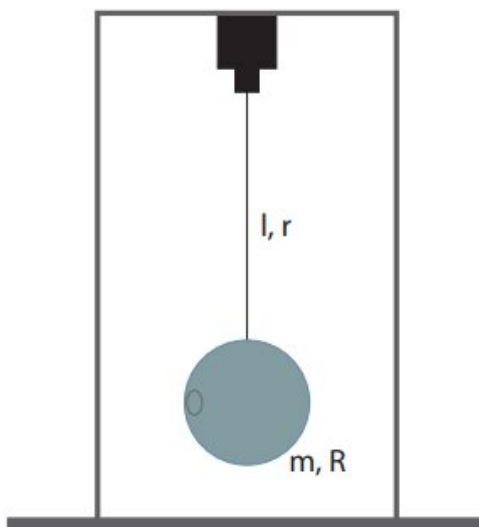
Stejně jako v předešlém případě budu postupovat zvyšováním zátěže pro závislost $y(m)$, kterou vyhodnotím fitem.

2.3. Měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou

Na homogenní drát délky l o poloměru r je zavěšena homogenní koule o poloměru R a hmotnosti m mnohem větší, než je hmotnost drátu. Když kouli pootočím kolem svislé osy, vykonává torzní kmity. Pokud zkroucení drátu odpovídá pružné torzní deformaci, pak platí vztah pro modul pružnosti ve smyku G

$$G = \frac{16\pi m R^2 l}{5r^4 T^2}. \quad (6)$$

Přitom T je perioda kmitání. Provedu 10 měření doby 10 period kmitání, veličiny zprůměruju a dopočítám G .

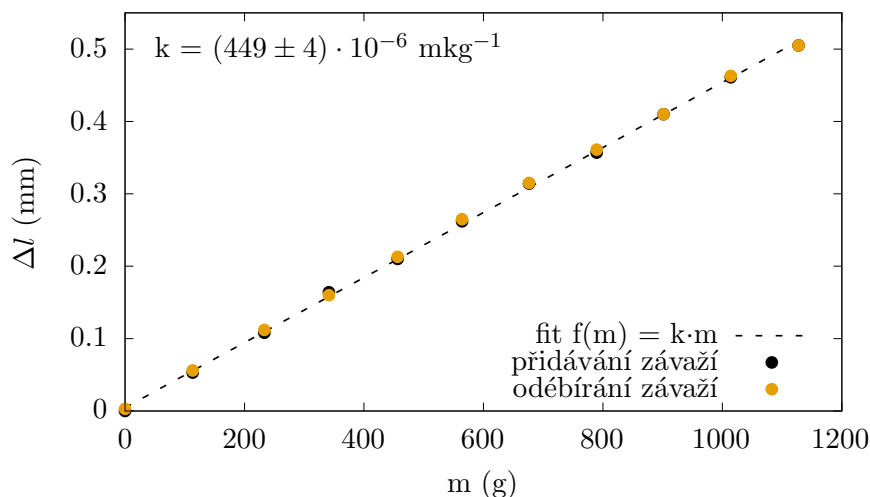


Obrázek 3: Torzní oscilátor

3. Výsledky měření

3.1. Měření modulu pružnosti v tahu přímoou metodou z prodloužení drátu

Na svislý ocelový drát o průměru d a délce $l = 1567$ mm jsem postupně přidával závaží a měřil prodloužení Δl . Získané hodnoty jsou uvedené v grafu 4. Dosazením do vztahu (4) dostávám modul pružnosti drátu E . Pro výpočet nejistoty jsem použil python script uvedený v příloze 1.



Graf 4: Závislost prodloužení drátu na hmotnosti závaží

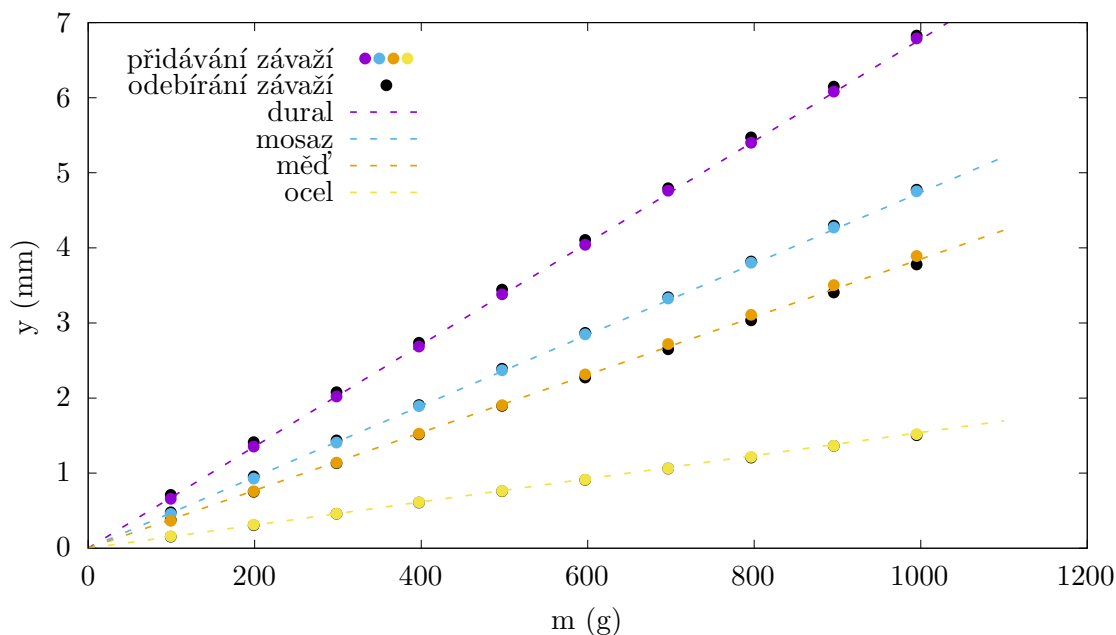
n	d (mm)
1	0.50
2	0.50
3	0.50
4	0.50
5	0.51
6	0.50
7	0.49
8	0.50
9	0.49
10	0.50
x	(0.499 ± 0.007)

Tabulka 1: měření průměru drátu mikrometrem

$$E = (175 \pm 5) \text{ GPa } (p = 99.73 \%, \nu = 9)$$

3.2. Měření modulu pružnosti v tahu z průhybu plného obdélníkového nosníku

Na obdélníkové nosníky o rozměrech $a \times b \times c$ (tabulka 2) jsem postupně přidával závaží a měřil prohnutí y . Získané hodnoty jsou uvedené v grafu 5, python script pro výpočet v příloze 2 a výsledné moduly pružnosti v tabulce 2. Vzdálenost britů $l = (89.9 \pm 0.03)$ cm jsem změřil pravítkem.



Graf 5: Závislost prohnutí nosníku na hmotnosti závaží.

materiál	dural		mosaz		měď		ocel	
rozměry	a (mm)	b (cm)	a (mm)	b (cm)	a (mm)	b (cm)	a (mm)	b (cm)
1	5.04	3.030	5.06	3.008	5.04	3.022	5.75	2.980
2	5.04	3.028	5.05	3.012	5.06	3.010	5.75	2.978
3	5.04	3.022	5.06	3.022	5.10	3.032	5.77	2.980
4	5.03	3.020	5.06	3.014	5.04	3.024	5.76	2.988
5	5.03	3.040	5.06	3.016	5.03	3.010	5.75	2.982
6	5.04	3.022	5.06	3.012	5.04	3.080	5.75	2.986
7	5.02	3.020	5.06	3.080	5.02	3.120	5.76	2.980
8	5.03	3.036	5.06	3.010	5.04	3.120	5.75	2.982
9	5.04	3.020	5.06	3.008	5.04	3.160	5.75	2.984
10	5.02	3.016	5.06	3.012	5.05	3.020	5.75	2.982

Tabulka 2: Měření rozměrů nosníků

materiál	a (mm)	b (cm)	k ($\mu\text{m kg}^{-1}$)	E (GPa)
dural	5.03 ± 0.01	3.03 ± 0.01	6800 ± 8	67.9 ± 0.5
mosaz	5.059 ± 0.004	3.02 ± 0.03	4770 ± 5	95.6 ± 0.9
měď	5.05 ± 0.03	3.06 ± 0.07	3894 ± 9	116 ± 3
ocel	5.754 ± 0.009	2.982 ± 0.004	1528 ± 2	205 ± 1

Tabulka 3: Vypočítané moduly pružnosti E z rozměrů nosníků. ($p = 99.73\%$, $\nu = 9$)

3.3. Měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou

Železná koule o poloměru D a hmotnosti $m = 5.905$ kg je zavěšená na drátě o průměru d a délce $l = 51.450 \pm 0.003$ cm. Vychýlil jsem kouli a pokaždé změřil dobu deseti period T . Pro výpočet modulu pružnosti ze vztahu (6) jsem použil python script z přílohy 3.

měření	d (mm)	D (mm)	$10 \cdot T$ (s)
1	1.00	99.60	39.89
2	0.99	99.70	39.81
3	0.99	99.80	39.56
4	0.99	99.78	40.05
5	0.99	99.70	39.64
6	0.99	99.80	39.94
7	1.00	99.72	39.82
8	0.99	99.78	39.94
9	0.99	99.76	39.93
10	1.00	99.76	39.72
x	0.993 ± 0.006	99.74 ± 0.08	39.8 ± 0.2

Tabulka 4: Měření poloměru drátu a na něm zavěšené koule. ($p = 99.73\%$, $\nu = 9$)

$$G = (79 \pm 2) \text{ GPa } (p = 99.73\%, \nu = 9)$$

4. Závěr

Z prodloužení ocelového drátu jsem změřil modul pružnosti $E = (175 \pm 5)$ GPa. Ne celkové nejistotě se podílela nejistota měření průměru drátu mikrometrem a nejistota sklonu lineárního fitu hodnot.

Metodou prohnutí nosníků jsem změřil moduly pružnosti hliníku, mědi, mosazi a ocele a výsledné hodnoty uvedl v tabulce 3. Pro všechny čtyři kovy je rozdíl oproti tabulkám z odkazu [1] v řádech několika procent. Metoda průhybu nosníku dosáhla mnohem přesnějšího výsledku, než přímá metoda měření z prodloužení drátu.

Pomocí periody torzních kmitů jsem změřil modul pružnosti ve smyku ocelového drátu $G = (79 \pm 2)$ GPa. Nepřesnost měření je převážně způsobená nejistotou periody kmitání. Bylo by potřeba místo manuálního spouštění stopek použít nějakou přesnější metodu. Tabulková hodnota je 79.3 GPa.

Reference

- [1] Tabulky Youngových modulů pružnosti <http://kabinet.fyzika.net/studium/tabulky/modul-pruznosti.php>.
- [2] návod k úloze https://www.physics.muni.cz/kof/vyuka/fp1_05.pdf

5. Přílohy

```
1 import numpy as np
2 import uncertainties as unc
3 import math
4
5 d = np.array([ 0.50, 0.50, 0.50, 0.50, 0.51, 0.50, 0.49, 0.50, 0.49, 0.50 ]) * 0.001
6 d = unc.ufloat(np.mean(d), np.std(d) * 4.094)
7 k = unc.ufloat(449, 4) * 1e-6
8 l = 1567 * 0.001
9
10 print(4 * 9.81 * l / (math.pi * d ** 2 * k))
```

Listing 1: Výpočet modulu pružnosti v tahu přímou metodou

```
1 import uncertainties as unc
2 import numpy as np
3 import scipy.stats as stats
4 import math
5
6 def kf(ddof):
7     return stats.t.ppf(0.5 + 0.9973 / 2, df=ddof)
8
9 def E(b, a, k):
10     k = unc.ufloat(k[0], k[1]) * 1e-6
11     a = unc.ufloat(np.mean(a), np.std(a, ddof=1)/math.sqrt(len(a))*kf(len(a)-1))*1e-3
12     b = unc.ufloat(np.mean(b), np.std(b, ddof=1)/math.sqrt(len(b))*kf(len(b)-1))*1e-2
13     l = unc.ufloat(89.9, 0.03) * 0.01
14
15     return 9.809980 * l**3 / (4 * k * a ** 3 * b)
16
17 table = np.loadtxt("nosniky_rozmary.txt")
18 print('dural', E(table[:, 0], table[:, 1], (6800, 8)))
19 print('mosaz', E(table[:, 4], table[:, 5], (4770, 5)))
20 print('med', E(table[:, 2], table[:, 3], (3894, 9)))
21 print('ocel', E(table[:, 6], table[:, 7], (1528, 2)))
```

Listing 2: Výpočet modulů pružností nosníků

```

1 import uncertainties as unc
2 import math
3 import numpy as np
4 import scipy.stats as stats
5
6 def k(ddof):
7     return stats.t.ppf(0.5 + 0.9973 / 2, df=ddof)
8
9 table = np.loadtxt("oscilator_rozmary.txt")
10 d = table[:, 0]
11 D = table[:, 1]
12 T = table[:, 2]
13
14 d = unc.ufloat(np.mean(d), np.std(d, ddof=1) / math.sqrt(len(d)) * k(len(d)-1))*1e-3
15 D = unc.ufloat(np.mean(D), np.std(D, ddof=1) / math.sqrt(len(D)) * k(len(D)-1))*1e-3
16 T = unc.ufloat(np.mean(T), np.std(T, ddof=1) / math.sqrt(len(T)) * k(len(T)-1))/10.0
17 l = unc.ufloat(51.45, 0.003) * 0.01
18 m = 5.905
19
20 print(16 * math.pi * m * (D/2) ** 2 * l / (5 * (d/2) ** 4 * T ** 2))

```

Listing 3: Výpočet modulu pružnosti dynamickou metodou