Ústav fyziky a technologií plazmatu Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity

FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM

Fyzikální praktikum 1

Zpracoval: Lukáš Lejdar **Naměřeno:** 23. dubna 2024

Obor: F **Skupina:** Út 16:00 **Testováno:**

Úloha č. **4:** **Měření gravitační konstanty a tíhového zrychlení**

$T = 21,1$ °C
$p = 101{,}35$ kPa
$\varphi = 47,7$ %

1. Úvod

V úloze budu měřit gravitační konstantu G Cavendishovou metodou a tíhové zrychlení pomocí reverzního kyvadla.

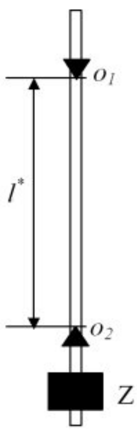
2. Teorie

2.1. Měření tíhového zrychlení reverzním kyvadlem

Pro periodu kmitů T fyzikálního kyvadla platí aproximativní vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgx}}, \tag{1}$$

kde g je tíhové zrychlení, J moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení, m jeho hmotnost a x vzdálenost těžiště kyvadla od osy otáčení. Tíhové zrychlení se dá určit přímo z tohoto vztahu, ale rádi bychom se vyhnuli měření ošemetných veličin jako je moment setrvačnosti. Používá se proto raději tzv. reverzní kyvadlo se dvěma osami otáčení o_1 a o_2.



Obrázek 1: Reverzní kyvadlo

Označím x_1, x_2 vzdálenosti těžiště od os o_1, o_2.

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + mx_1^2}{mgx_1}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + mx_2^2}{mgx_2}} \tag{2}$$

Pokud zajistíme stejnou periodu kmitů T_1=T_2, můžeme dosazením $l = x_1 + x_2$, obě T vyjádřit jako

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3}$$

2.2. Měření gravitační konstanty Cavendishovou metodou

Dvě malé kuličky spojené tyčinkou jsou zavěšené na torzním vlákně a dohromady tak tvoří tlumený harmonický oscilátor: Při zkroucení jeho závěsu o úhel φ působí na soustavu vratný silový moment M

$$M(\varphi) = -D\varphi, \tag{4}$$

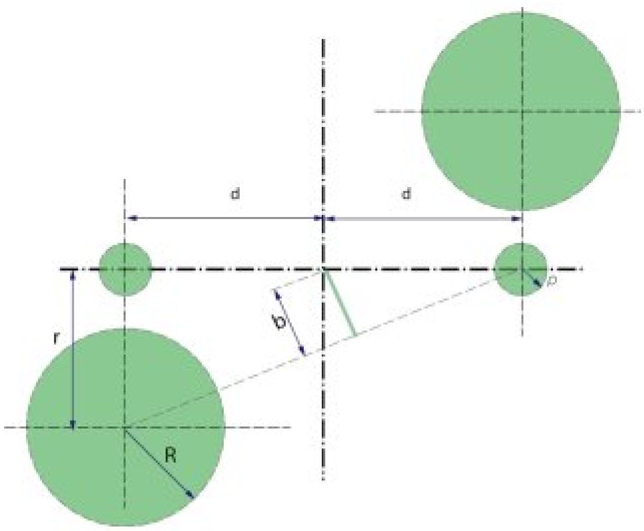
kde D je veličina zvaná direkční moment. Po stranách jsou navíc umístěné dvě větší koule působící na oscilátor momentem gravitační síly M_{grav} jako na obrázku 2. Zanedbáme-li její proměnlivost během torzních kmitů, můžeme z rovnice (4) vyjádřit posun rovnovážné polohy φ_0

$$\varphi_0 = \frac{M_{\mathrm{grav}}}{D}. \tag{5}$$

Při odvozování velikosti momentu gravitačních sil musíme vzít v úvahu, že velká koule působí na obě kuličky, a že momenty těchto sil jsou orientovány proti sobě. Dosazením z Newtonova gravitačního zákona dostaneme

$$M_{\mathrm{grav}} = 2GMmd\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{(4d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}\right), \tag{6}$$

kde G je gravitační konstanta, M hmotnost velké koule a m hmotnost kuličky.



Obrázek 2: Schéma torzních vah Cavendishovy metody při pohledu shora.

Zbývá najít způsob jak změřit veličinu D. Volné kmity netlumeného torzního kyvadla jsou popsané diferenciální rovnicí

$$J\ddot{\varphi} + D\varphi = M_{\text{grav}}, \tag{7}$$

kde J je moment setrvačnosti kuliček vzhledem k ose otáčení

$$J = 2m(\frac{2}{5}\rho^2 + d^2). \tag{8}$$

Vyřešením rovnice (7) dostaneme

$$\varphi(t) = \varphi_m \sin(\sqrt{\frac{D}{J}}t + \psi) + \varphi_0 \tag{9}$$

odkud jde jednoduše spočítat D, pokud zjistíme periodu kmitání.

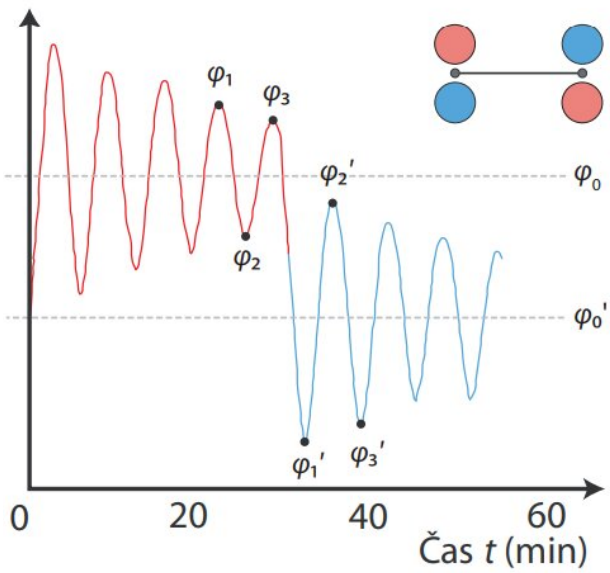
3. Postup měření

3.1. Měření reverzním kyvadlem

Pro výpočet potřebuju docílit stejných period kmitání na osách o1 a o2, přičemž jedinou proměnou je posuvné závaží na konci kyvadla. Provedu několik měření period T_1 a T_2 pro náhodné umístění závaží x a výsledky vynesu do grafu. Místo kde se křivky pro jednu a druhou osu protnou bude můj první hrubý odhad, který potom budu iterativně malými posuvy zlepšovat.

3.2. Cavendishova metoda

V aparatuře je laser namířený na torzní kyvadlo, který se zrcadlem projektuje na opačnou stěnu místnosti tak, že vychýlení kyvadla o úhel φ způsobí vychýlení laseru o úhel 2φ. Navíc aparatura umožňuje obě větší koule zrcadlově vyměnit, tak aby výchylka φ_0 byla stejná, ale na opačnou stranu. Spustím měření a po uplynutí dostatečně dlouhé doby koule právě takhle vyměním. Výsledná závislost polohy laseru na čase by měla vypadat nějak takto



Obrázek 3: Předpokládaná závislost polohy laseru na čase

Rovnovážnou polohu určím metodou tří kyvů; $\varphi_0 = \frac{1}{2}(\frac{\varphi_1+\varphi_3}{2} + \varphi_2)$ a rovnici (5) přepíšu do této notace jako

$$\varphi_0 - \varphi_0' = 2\frac{M_{\text{grav}}}{D}. \tag{10}$$

Ve skutečnosti ale měřím vzdálenosti na stěně místo úhlů. Platí mezi nimi převodní vztah

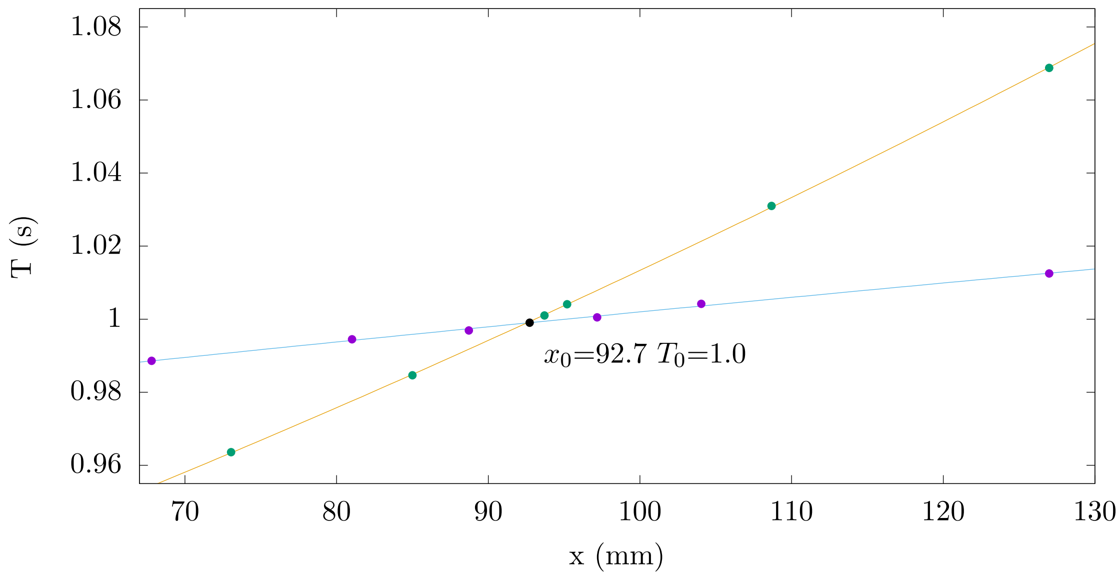
$$\varphi_0 - \varphi_0' = 4\arctan(\frac{x_0 - x_0'}{2L}), \tag{11}$$

kde L je vzdálenost stínítka od oscilátoru.

4. Výsledky měření

4.1. Měření reverzním kyvadlem

Nejprve jsem provedl několik měření period kmitání na obou osách v závislosti na poloze závaží. Hrubý odhad polohy x_0, zjistím z průniků fitů hodnot.



Obrázek 4: Závislost doby periody T na poloze závaží pro obě osy

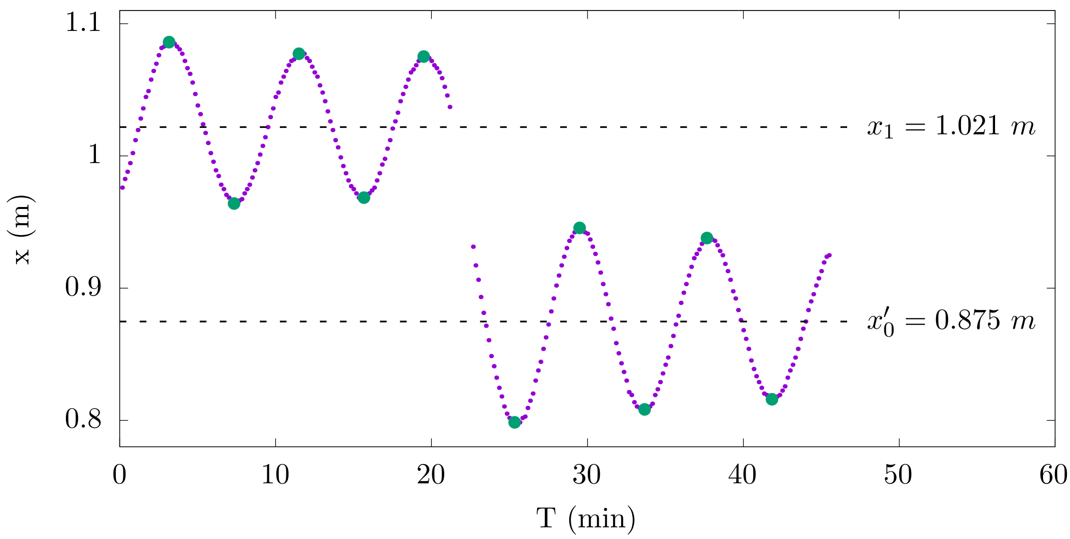
Závaží bylo potřeba ještě několikrát nepatrně posunout, než jsem dospěl k nejlepší shodě

$$\frac{T_1}{2} = (0.99860 \pm 0.00002)\ s,\ \frac{T_2}{2} = (0.99845 \pm 0.00002)\ s, \tag{12}$$

Jako výslednou periodu budu považovat průměr hodnot a nejistotu jako jejich rozdíl. Stačí dosadit vzdálenost os l do vztahu (3) a můžu dopočítat gravitační zrychlení.

$$T = (1.9971 \pm 0.0004)\ s \tag{13}$$
$$l = (99.10 \pm 0.03)\ \text{cm} \tag{14}$$
$$g = (9.800 \pm 0.005)\ \text{ms}^{-2} \tag{15}$$

4.2. Měření gravitační konstanty Cavendishovou metodou



Obrázek 5: Graf závislosti polohy laseru na čase

poloměr torzního kyvadla	$d = 50\ mm$	(16)
vzdálenost bližších dvou koulí	$r = 46.5\ mm$	(17)
poloměr kuliček	$\rho = 8.19\ mm$	(18)
hmotnost větší wolframové koule	$M = 1.5\ kg$	(19)
hmotnost kuličky	$m = (38.3 \pm 0.2)\ g$	(20)
perioda kmitů	$T = (490 \pm 3)\ s$	(21)
Vzdálenost stínítka od oscilátoru	$L = (5.280 \pm 0.003)\ m$	(22)
Dopočítaný rozdíl výchylek	$\varphi_0 - \varphi'_0 = (0.0138 \pm 0.001)\ Rad$	(23)

Vyjádřením gravitační konstanty ze vztahů (5) (6) a (8) získávám hodnotu

$$G = (8.6 \pm 0.7) \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}} \tag{24}$$

5. Závěr

Pomocí reverzního kyvadla jsem změřil gravitační zrychlení v laboratoři $g = (9.800 \pm 0.005)\ \mathrm{ms^{-2}}$, která velmi dobře odpovídá tabulkovým hodnotám pro Brno $g = 9,809980\ \mathrm{ms^{-2}}$. Na nejistotu má převážně vliv nejistota změřené periody.

Gravitační konstantu jsem pomocí Cavendishovy metody určil na $G = 8.6 \pm 0.7 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$ oproti tabulkové hodnotě 6.67430 $\cdot 10^{-11}$ Nm ^{2}kg^{-2}. Na odkaze [1] přikládám článek z Harvardské univerzity, popisující měření stejnou aparaturou jako jsem používal já. Porovnáním výsledků způsobuje největší chybu dopočítané gravitační konstanty výchylka kmitání. Měla by vycházet přibližně 0.00540 Rad, zatímco moje hodnota je $\frac{\varphi_0 - \varphi'_0}{2} = 0.0069$ Rad.

Reference

[1] Cavendishův experiment Harvardské univerzity https://sciencedemonstrations.fas.harvard.edu/presentations/cavendish-experiment.