

# Kapitel 1

## Kolimes

### 1.1 Einführung in den Kolimes

#### Definition des Kolimes

**Definition 1.** [vgl. Anhang A6 David Eisenbud 1994] Sei  $\mathcal{A}$  eine Kategorie.

- Ein Diagramm über  $\mathcal{A}$  ist eine Kategorie  $\mathcal{B}$  zusammen mit einem Funktor  $\mathcal{F} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ .
- Sei  $\mathcal{F} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  ein Diagramm und  $A \in \mathcal{A}$  ein Objekt. Dann definieren wir einen Morphismus  $\psi : \mathcal{F} \rightarrow A$  als eine Menge von Funktionen  $\{\psi_B \in \text{Hom}(\mathcal{F}(B), A) \mid B \in \mathcal{B}\}$ , wobei für alle  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  und  $\varphi \in \text{Hom}(B_1, B_2)$  folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(B_1) & & \\ \downarrow \mathcal{F}(\varphi) & \searrow \psi_{B_1} & \\ & & C \\ \uparrow \psi_{B_2} & \nearrow & \\ \mathcal{F}(B_2) & & \end{array}$$

- Der Kolimes  $\varinjlim \mathcal{F}$  eines Diagramms  $\mathcal{F} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  ist ein Paar aus einem Objekt  $A \in \mathcal{A}$  zusammen mit einem Morphismus  $\psi : \mathcal{F} \rightarrow A$ , welche folgende universelle Eigenschaft erfüllen:

Für Objekte  $A' \in \mathcal{A}$  und alle Morphismen  $\psi' : \mathcal{F} \rightarrow A'$  existiert genau eine Funktion  $\varphi \in \text{Hom}(A, A')$ , sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \psi' \swarrow & & \searrow \psi \\ A' & \xleftarrow{\exists! \varphi} & A \end{array}$$

**Eindeutigkeit des Kolimes** [vgl. A6 David Eisenbud 1994]

**Lemma 2.** Seien  $\mathcal{B}, \mathcal{A}$  zwei Kategorien und  $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$  ein Funktor. Dann ist im Falle der Existenz  $\varinjlim \mathcal{F}$  eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Seien  $A_1 \in \mathcal{A}, (\psi_1 : \mathcal{F} \longrightarrow A_1)$  und  $A_2 \in \mathcal{A}, (\psi_2 : \mathcal{F} \longrightarrow A_2)$  beide gleich  $\varinjlim \mathcal{F}$ .

Erhalte durch die universelle Eigenschaft des Kolimes die eindeutig bestimmten Funktionen  $\varphi_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$  und  $\varphi_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_2, A_1)$ , für welche die folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \psi_2 \swarrow & & \searrow \psi_1 \\ A_2 & \xleftarrow{\exists! \varphi_1} & A_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \psi_1 \swarrow & & \searrow \psi_2 \\ A_1 & \xleftarrow{\exists! \varphi_2} & A_2 \end{array}$$

Wende nun die Universelle Eigenschaft von  $\psi_1$  auf  $\psi_1$  selbst an und erhalte  $\text{id}_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1$ . Analog erhalte auch  $\text{id}_{A_2} = \varphi_1 \circ \varphi_2$ .

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \psi_1 \swarrow & & \searrow \psi_1 \\ A_1 & \xleftarrow{\exists! \text{id}_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1} & A_1 \end{array}$$

Somit existiert genau eine Isomorphie  $\varphi_1 : A_1 \longrightarrow A_2$ . □

### Vereinfachung des Kolimes

**Korrolar 3.** [Eigene Überlegung]

Sei  $\mathcal{A}$  eine Kategorie und  $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$  ein Diagramm. Betrachte die Unterkategorie  $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$  zusammen mit dem Inklusionsfunktor  $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}$  ebenfalls als Diagramm. Dann gilt:

$$\begin{array}{l} \varinjlim \mathcal{F} \text{ existiert genau dann, wenn } \varinjlim (\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \text{ existiert.} \\ \text{Mit } \varinjlim \mathcal{F} = \varinjlim (\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}). \end{array}$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus unserer Definition von Morphismen:

In definition 1 haben wir einen Morphismus  $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$  als eine Menge von Funktionen  $\psi_{\mathcal{B}} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\mathcal{B}), A)$  definiert. Dies zeigt, dass es keinen Unterschied macht, ob wir von Morphismen  $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$  oder von Morphismen  $\psi : (\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$  reden.

Wenn wir nun die universelle Eigenschaft des Kolimes genauer betrachten, sehen wir, dass diese sich nur auf Morphismen  $\mathcal{F} \longrightarrow A$  bzw.  $(\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$  und auf die Kategorie  $\mathcal{A}$  bezieht. Es macht also keinen Unterschied, ob wir vom Kolimes des Diagramms  $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$  oder vom Kolimes des Diagramms  $(\mathcal{F}(\mathcal{B}), \mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A})$  sprechen. □

Es genügt also im Fall von Kolimenn Diagramme  $(\mathcal{B}, \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$  mit  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  zu betrachten. Zur Vereinfachung schreibe für  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  in Zukunft  $\varinjlim \mathcal{B}$  anstatt von  $\varinjlim (\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$ .

### DifferenzkernUndKoproduktDef

**Definition 4.** [vgl. A6 David Eisenbud 1994]

Sei  $\mathcal{A}$  eine Kategorie.

- Das Koproduct von  $\{B_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq \mathcal{A}$  wird durch  $\coprod_{i \in \Lambda} \{B_i\} := \varinjlim \mathcal{B}$  definiert, wobei  $\{B_i\}_{i \in \Lambda}$  die Objekte und die Identitätsabbildungen  $\{id_{B_i} : B_i \rightarrow B_i\}_{i \in \Lambda}$  die einzigen Morphismen von  $\mathcal{B}$  sind.
- Der Differenzkokern von  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$  wird durch  $\varinjlim \mathcal{C}$  definiert, wobei  $\{C_1, C_2\}$  die Objekte und  $\{f, g\}$  zusammen mit den Identitätsabbildungen die Morphismen von  $\mathcal{C}$  sind.

### NeuDifferenzkokerndef

**Bemerkung 5.** [Wikipedia]

Sei  $\mathcal{A}$  eine Kategorie. Sei weiter  $C_1, C_2 \in \text{Obj}_{\mathcal{A}}$  und  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$ .

Im Falle der Existenz ist der Differenzkokern von  $f, g$  nach definition 4 durch ein Objekt  $C \in \text{Obj}_{\mathcal{A}}$  und einen Morphismus  $\psi = \{\psi_{C_1}, \psi_{C_2}\}$  gegeben, wobei gilt:

$$\psi_{C_2} = f \circ \psi_{C_1} = g \circ \psi_{C_1}$$

Wir sehen, dass  $\psi$  eindeutig durch  $q := \psi_{C_2} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$  gegeben ist. Der Differenzkokern ist also eindeutig durch  $(C \in \text{obj}_{\mathcal{A}}, q \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_1, C_2))$  gegeben, wobei  $q$  folgenden Eigenschaften besitzt:

Es gilt  $f \circ q = g \circ q$  und  
für alle  $C \in \text{Obj}_{\mathcal{A}}$  und  $q' \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}$  mit  $f \circ q' = g \circ q'$  existiert genau ein  
 $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}$ , mit  $q \circ \varphi = q'$ :

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & \xrightarrow{f, g} & C_2 & \xrightarrow{q} & C \\ & & \searrow q' & \downarrow \exists! \varphi & \\ & & & & C' \end{array}$$

Wenn wir fortan vom Differenzkokern sprechen meinen wir damit das Paar  $(C, q)$ .

### Kolimes durch Koproduct und Differenzkokern

**Theorem 6.** [Proposition A6.1 David Eisenbud 1994]

Sei  $\mathcal{A}$  eine Kategorie, in der Koproducte beliebiger Mengen von Objekten und Differenzkokerne von je zwei Morphismen existieren. Dann existiert für jedes Diagramm  $\mathcal{F} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  dessen Kolimes  $\varinjlim \mathcal{F}$ .

*Beweis.* In korollar 3 haben wir gesehen, dass es genügt den Fall  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  zu betrachten. Konstruiere also für eine beliebige Unterkategorie  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  deren Kolimes  $\varinjlim(\mathcal{F})$ :

Bezeichne für jeden Morphismus  $\gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{C}}$  dessen Definitionsbereich mit  $B_{\gamma} \in \mathcal{B}$ . Definiere nun:

- $C_1 := \coprod_{\gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}} B_\gamma$  ist das Koproduct aller Objekte von  $\mathcal{B}$ , in dem jedes Objekt so oft vorkommt, wie es Definitionsbereich eines  $\gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}$  ist. Sei  $\psi^1 : \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_1$  der dazugehörige Morphismus.
- $C_2 := \coprod_{B \in \text{Obj}_{\mathcal{B}}} B$  ist das Koproduct aller Objekte von  $\mathcal{B}$ . Sei  $\psi^2 : \{B | B \in \text{Obj}_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_2$  der dazugehörige Morphismus.

Konstruiere nun  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(C_1, C_2)$  so, dass der Differenzkokern von  $f$  und  $g$  gleich dem Kolimes von  $\mathcal{B}$  ist:

Für  $f$  betrachte den Morphismus  $\Phi : \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_2$ ,  
mit  $\Phi_{B_\gamma} = \psi_{\gamma(B_\gamma)}^2 \circ \gamma$  für  $B_\gamma \in \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\}$ .  
Wende die universelle Eigenschaft von  $C_1 = \varinjlim \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\}$  an:

$$\begin{array}{ccc} & \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\} & \\ \Phi \swarrow & & \searrow \psi^1 \\ C_2 & \xleftarrow{\exists! f} & C_1 \end{array}$$

Wähle  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(C_1, C_2)$  als die eindeutige Funktion, für die  $\Phi = \psi^1 \circ f$  gilt.

Für  $g$  betrachte den Morphismus  $\Phi' : \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_2$ ,  
mit  $\Phi'_{B_\gamma} = \psi_{\gamma(B_\gamma)}^2$  für  $B_\gamma \in \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\}$ .

Wähle analog zu  $f$  mithilfe der universellen Eigenschaft des Kolimes  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(C_1, C_2)$  als die eindeutige Funktion, für die  $\Phi' = \psi^1 \circ g$  gilt.

Sei  $C \in \text{Obj}_{\mathcal{B}}$  zusammen mit  $q \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_2, C)$  der Differenzkokern von  $f, g$ .

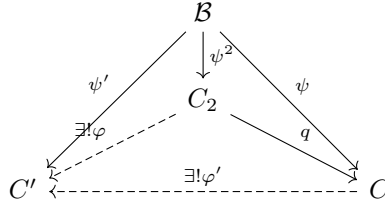
Zeige Abschließend, dass  $(C, \psi : \mathcal{B} \longrightarrow q \circ \psi^2)$  Der Kolimes von  $\mathcal{B}$  ist:

Um zu sehen, dass  $\psi$  ein Morphismus ist, wähle  $B_1, B_2 \in \text{Obj}_{\mathcal{B}}$  beliebig und betrachte folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} B_1 & \xrightarrow{\psi_{B_1}^2 = \Phi'_{B_2}} & C_2 & & \\ & \searrow \psi_{B_1}^1 & \nearrow g & \searrow q & \\ & & C_1 & & C \\ & \searrow \Phi_{B_2} & \searrow f & \nearrow q & \\ B_2 & \xrightarrow{\psi_{B_2}^2} & C_2 & & \end{array}$$

JOJO

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{B} & & & \\ & \searrow \psi' & \searrow \psi^2 & \searrow \psi & \\ & & C_2 & & \\ & \searrow \exists! \varphi & & \searrow q & \\ C' & \xleftarrow{\exists! \varphi'} & & & C \end{array}$$



□

### Tensorprodukt des Differenzkerns [Eigene Bemerkung]

**Bemerkung 7.** Seien  $f, g \in \text{Hom}_A(S_1, S_2)$   $R$ -Algebra-Homomorphismen, so können wir für den Differenzkern  $q : S_2 \longrightarrow T$  für ein beliebiges  $S_1$ -Modul das Tensorprodukt  $T \otimes_{C_1} M$  definieren.

für  $s_1 \in S_1$  und  $t \otimes m) \in T \otimes_{C_1} M$  gilt:

$$s_1 \cdot (t \otimes m) = ((q \circ f)(s_1)) \cdot t \otimes m = ((q \circ g)) \cdot (s_1) t \otimes m$$

### R-Algebra-Kolimiten [vgl. Proposition A6.7 David Eisenbud 1994]

**Proposition 8.** in der Kategorie der  $R$ -Algebren existieren Koprodukte und Differenzkokerne, wobei:

1. Das Koprodukt einer endlichen Familie von  $R$ -Algebren  $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$  entspricht deren Tensorprodukt  $\bigotimes_{i \in \Lambda} S_i$ .
2. Der Differenzkern zweier  $R$ -Algebra-Homomorphismen  $f, g : S_1 \longrightarrow S_2$  entspricht dem Homomorphismus  $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ ,  $y \mapsto [y]$ , wobei  $Q := \{f(x) - g(x) \mid x \in S_2\}$  das Bild der Differenz von  $f$  und  $g$  ist.

*Beweis.* Zu 1.:

Sei  $\mathcal{B}$  die Unterkategorie der  $R$ -Algebren, welche  $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$  zusammen mit den Identitätsabbildungen enthält. Wir wollen die universellen Eigenschaften des Tensorproduktes und des Kähler-Differenzials nutzen, um einen Isomorphismus zwischen  $\lim_{\longrightarrow} \mathcal{F}$  und  $\bigotimes_{i \in \Lambda} B_i$  zu finden.

Es sind der Morphismus  $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \lim_{\longrightarrow} \mathcal{B}$  und die bilineare Abbildung  $g : \bigoplus_i S_i \longrightarrow \bigotimes_i S_i$  gegeben.

Konstruiere den Morphismus  $\psi' : \mathcal{B} \longrightarrow \bigotimes_i S_i$  durch  $\psi'_i : S_i \longrightarrow \bigotimes_i S_i$ ,  $s_i \mapsto g(1, \dots, 1, s_i, 1, \dots, 1)$  für  $i \in \lambda$  und die bilineare Abbildung  $f : \bigoplus_i S_i \longrightarrow \lim_{\longrightarrow} \mathcal{B}$ ,  $s \mapsto \prod_i \psi_i(s_i)$ .

Somit liefern uns die universellen Eigenschaften folgende zwei  $R$ -Algebra-Homomorphismen:

$$\begin{aligned} \varphi : \lim_{\longrightarrow} \mathcal{B} &\longrightarrow \bigotimes_i S_i \\ \phi : \bigotimes_i S_i &\longrightarrow \lim_{\longrightarrow} \mathcal{B}. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
& \mathcal{B} & \\
\psi' \swarrow & & \searrow \psi \\
\bigotimes_i S_i & \xleftarrow{\exists! \varphi} & \varinjlim \mathcal{B}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
& \bigoplus_i S_i & \\
f \swarrow & & \searrow g \\
\varinjlim \mathcal{B} & \xleftarrow{\exists! \phi} & \bigotimes_i S_i
\end{array}$$

Die Eindeutigkeit der universellen Eigenschaften liefert uns, dass  $\varphi$  und  $\phi$  zueinander Inverse sind und somit haben wir unsere gesuchten Isomorphismen zwischen  $\varinjlim \mathcal{B}$  und  $\bigotimes_i S_i$  gefunden.

$$\begin{array}{ccc}
& \mathcal{B} & \\
\psi \swarrow & & \searrow \psi \\
\varinjlim \mathcal{B} & \xleftarrow{\exists! id_{\varinjlim \mathcal{B}} = \phi \circ \varphi} & \varinjlim \mathcal{F}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
& \bigoplus_i S_i & \\
g \swarrow & & \searrow g \\
\bigotimes_i S_i & \xleftarrow{\exists! id_{\bigotimes_i S_i} = \varphi \circ \phi} & \bigotimes_i S_i
\end{array}$$

Zu 2.:

Zeige, dass  $q : S_2 \rightarrow S_2/Q$  die in bemerkung 5 eingeführten Eigenschaften des Differenzkerns besitzt.

$$q \circ f = q \circ g \text{ gilt, da } \ker(q) = Q = \{f(x) - g(x) \mid x \in C_2\}.$$

Sei nun eine Funktion  $q' \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(S_2, T')$  mit  $q' \circ f = q' \circ g$  gegeben.

Somit gilt  $q' \circ (f - g) = 0$ , wodurch  $Q$  ein Untermodul von  $Q' := \ker(q')$  ist.

Mit dem Isomorphiesatz für R-Algebren erhalten wir:

$$S_2/Q' \simeq (S_2/Q)/(Q'/Q).$$

Somit ist  $q' : S_2 \rightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q)$ ,  $y \mapsto [y]'$  eine isomorphe Darstellung von  $q' : S_2 \rightarrow T'$ .

$$\Rightarrow \exists! \varphi : S_2/Q \rightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q), [y] \mapsto [y]' \text{ mit } (\varphi \circ q) = q'.$$

Also ist  $q : S_2 \rightarrow S_2/Q$  der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Differenzkern von  $f$  und  $g$ .  $\square$

### Darstellung der Polynomialalgebra als Tensorprodukt *[Eigene Überlegung]*

**Bemerkung 9.** Die Polynomialalgebra  $R[x_1, \dots, x_d]$  über  $R$  lässt sich wie folgt als Tensorprodukt darstellen:

$$R[x_1, \dots, x_n] = \bigotimes_{i \in \{1, \dots, n\}} R[x_i]$$

Genauer gilt für zwei Polynomialgebren  $A = R[x_1, \dots, x_{n_A}]$ ,  $B = R[y_1, \dots, y_{n_B}]$  über  $R$ :

$$A \otimes_R B = R[x_1, \dots, x_{n_A}, y_1, \dots, y_{n_B}]$$

Skizziere den Beweis.

*Beweis.* Zeige, dass für  $g : A \oplus B \longrightarrow R[x_1, \dots, x_{n_A}, y_1, \dots, y_{n_B}]$ ,  $(a, b) \longmapsto a \cdot b$  die Universelle Eigenschaft des Tensorproduktes gilt:

$$\begin{array}{ccc} A \oplus B & \xrightarrow{g} & R[x_1, \dots, x_{n_A}, y_1, \dots, y_{n_B}] \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \varphi \\ & & M \end{array}$$

Es ist leicht nachzurechnen, dass es sich bei  $\varphi$  um folgende Funktion handeln muss:

$$\varphi : R[x_1, \dots, x_{n_A}, y_1, \dots, y_{n_B}] \longrightarrow M, (x_i \cdot y_j) \longmapsto f(x_i, 1) \cdot f(1, y_j)$$

□

### R-Modul-Kolimiten [Proposition A6.2 David Eisenbud 1994]

**Proposition 10.** In Der Kategorie der  $R$ -Module existieren Koprodukte und Differenzkokerne, wobei:

1. das Koprodukt  $\lim_{\longrightarrow} \mathcal{B}$  von  $R$ -Modulen  $M_i \in (R - \text{Module})$  entspricht der direkten Summe  $\sum_i M_i$ .
2. der Differenzkern zweier Homomorphismen  $f, g : M_1 \longrightarrow M_2$  entspricht dem Kokern  $M_2 / \text{im}(f - g)$  der Differenzenabbildung.

*Beweis.* für **1.** Sei  $\phi : \{M_i\} \longrightarrow \mathcal{B}$  ein beliebiger Morphismus. Zeige:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{B} & \\ \psi_i \swarrow & & \searrow \psi_i \\ M' & \xleftarrow{\exists! \varphi} & \bigoplus_i M_i \end{array}$$

Für ein beliebiges  $i$  existiert genau ein  $\varphi_i : M_i \oplus 0 \longrightarrow M'$ ,  $(0, \dots, 0, m_i, 0, \dots, 0) \longmapsto \psi'_i(m_i)$  mit  $\psi'_i = \psi_i \circ \varphi_i$   
 $\Rightarrow \exists! \varphi : \bigoplus_i M_i \longrightarrow M', (m_1, \dots, m_n) \longmapsto \sum_i \psi_i(m_i)$

**2.** ist Analog zu proposition 8

□

Die in proposition 10 gezeigten Darstellungen gelten mit kurzen Überlegungen auch für  $S$ -Module, wobei  $S$  eine  $R$ -Algebra ist.

## 1.2 Darstellung von Lokalisierung als Kolimes

**Lokalisierung von Algebren als Kolimes** [vgl. Aufgabe A6.7 David Eisenbud 1994]

**Lemma 11.** Sei  $S$  eine  $R$ -Algebra und  $U \subseteq S$  multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$S[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{B}$$

Wobei  $\mathcal{B}$  aus den Objekten  $\{S[t^{-1}] | t \in U\}$  und den Morphismen  $S[t^{-1}] \rightarrow S[t't^{-1}], (\frac{s}{t})_t \mapsto (\frac{st'^n}{(tt')^n})_{(tt')}, \forall t, t' \in U$  besteht.

*Beweis.* Sei  $\psi : \mathcal{B} \rightarrow A$  der Kolimes von  $\mathcal{B}$ . Zeige  $S[U^{-1}] \simeq A$ , definiere dazu:

$$\begin{aligned} \psi' : \mathcal{B} &\rightarrow S[U^{-1}] \\ \psi'_{S[t^{-1}]} : S[t^{-1}] &\rightarrow S[t^{-1}], (\frac{s}{t})_t \mapsto (\frac{s}{t})_U \end{aligned}$$

$\psi'$  ist ein Morphismus, da für beliebige  $t, t' \in U$  und  $s \in S$  gilt:

$$(\frac{s}{t})_U = (\frac{st'^n}{(tt')^n})_U$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir den eindeutigen Homomorphismus  $\varphi : A \rightarrow S[U^{-1}]$ .

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{B} & \\ \psi' \swarrow & & \searrow \psi \\ S[U^{-1}] & \xleftarrow{\exists! \varphi} & A \end{array}$$

Für  $\phi : S[U^{-1}] \rightarrow A$  benötigen wir kleinere Vorüberlegungen.

Zunächst können wir jedes Element  $(\frac{s}{u})_U \in S[U^{-1}]$  als  $\psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t)$  schreiben.

Weiter gilt für alle  $s_1, s_2 \in S, t_1, t_2 \in U$ :

$$\begin{aligned} \text{Sei } \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_t) &= \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_t) \\ \Rightarrow \exists u \in U : (s_1 t_1 - s_2 t_2) \cdot u &= 0 \\ \Rightarrow (\frac{s_1 u}{t_1 u})_{tu} &= (\frac{s_2 u}{t_2 u})_{tu} \\ \Rightarrow \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_t) &= \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_t) \end{aligned}$$

Mit diesem Wissen können wir den  $R$ -Algebra-Homomorphismus  $\phi : S[U^{-1}] \rightarrow A$  definieren:

$$\phi : S[U^{-1}] \rightarrow A, \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t) \mapsto \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t)$$

$\phi \circ \varphi = id_A$  ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{B} & \\ \psi \swarrow & & \searrow \psi \\ A & \xleftarrow{\exists! id_A = \phi \circ \varphi} & A \end{array}$$



Für  $\varphi \circ \phi \stackrel{!}{=} id_{S[U^{-1}]}$  wähle beliebige  $s \in S, t \in U$ , für diese gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{s}{t})_t)) = \varphi(\psi((\frac{s}{t})_t)) = \psi'((\frac{s}{t})_t)$$

Damit haben wir gezeigt, dass  $\varphi, \phi$  Isomorphismen sind und somit  $A \simeq S[U^{-1}]$  gilt.

Da der Kolimes bis auf Isomorphie eindeutig ist, definiere ab sofort  $S[U^{-1}]$  als den eindeutigen Kolimes von  $\mathcal{B}$ .  $\square$

### Lokalisierung von Moduln als Kolimes *[Beweis von Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]*

**Korrolar 12.** Sei  $M$  ein  $S$ -Modul, wobei  $S$  eine  $R$ -Algebra ist. Sei weiter  $U \subseteq S$  multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$M[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{C}$$

Wobei  $\mathcal{C}$  aus den Objekten  $\{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] | t \in U\}$  und folgenden Morphismen besteht:

$$\begin{aligned} S[U^{-1}] \otimes M[t^{-1}] &\longrightarrow S[U^{-1}] \otimes M[(tt')^{-1}], \\ (\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{m}{t^n})_t &\longmapsto (\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{t'^n m}{(tt')^n})_t \end{aligned}$$

Auch wenn sich lemma 11 hier nicht direkt anwenden lässt, so können wir doch im Beweis gleich vorgehen.

*Beweis.* Schließe zunächst den trivialen Fall  $0 \in U$  aus.

Sei  $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow A$  der Colimes von  $\mathcal{C}$ . Zeige  $S[U^{-1}] \simeq A$ , definiere dazu folgenden Morphismus :

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{C} &\longrightarrow M[U^{-1}] \\ \psi_t : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] &\longrightarrow M[U^{-1}], \quad (\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{m}{t^n})_t \longmapsto (\frac{sm}{ut^n})_U \end{aligned}$$

Die Wohldefiniertheit von  $\psi'_t$  für ein beliebiges  $t \in U$  folgt direkt aus der Universellen Eigenschaft des Tensorprodukt's. Denn für die bilineare Abbildung  $f : S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \longrightarrow M[t^{-1}], ((\frac{s}{u})_U, (\frac{m}{t^n})_t) \longmapsto (\frac{sm}{ut^n})_U$  gilt:

$$\begin{array}{ccc} S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] & \xrightarrow{g} & S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \psi'_t \\ & & M[U^{-1}] \end{array}$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir nun den eindeutigen Homomorphismus  $\varphi : A \longrightarrow M[U^{-1}]$ .

$$\begin{array}{ccc}
& \mathcal{C} & \\
\psi' \swarrow & & \searrow \psi \\
M[U^{-1}] & \xleftarrow{\exists! \varphi} & A
\end{array}$$

Für  $\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow A$  benötigen wir kleinere Vorüberlegungen.

Zunächst können wir jedes Element  $(\frac{m}{u})_U \in M[U^{-1}]$  als  $\psi((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)$  schreiben. Wobei mit  $\psi$  gemeint ist, dass wir ein beliebiges  $t \in U$  wählen und dann  $\psi_t$  betrachten. Diese Verallgemeinerung ist möglich, da für beliebige  $t_1, t_2, u \in U$  und  $m \in M$  gilt:

$$\psi_{t_1}((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_{t_1}) = (\frac{m}{u})_U = \psi_{t_2}((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_{t_2})$$

Definiere nun mit diesem Wissen folgenden Homomorphismus:

$$\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow A, \psi((\frac{1}{u})_U \otimes t) \longmapsto \psi'((\frac{1}{u})_U \otimes t)$$

$\phi \circ \varphi = id_A$  ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes.

Für  $\varphi \circ \phi \stackrel{!}{=} id_{M[U^{-1}]}$  wähle  $(\frac{m}{u})_U \in M[U^{-1}]$  beliebig, für dieses gilt:

$$\begin{aligned}
& (\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)) \\
&= \varphi(\psi((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)) \\
&= \psi'((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)
\end{aligned}$$

Damit haben wir  $A \simeq M[U^{-1}]$  gezeigt, definiere also ab sofort  $M[U^{-1}]$  als den eindeutigen Kolimes von  $\mathcal{C}$ .  $\square$