# Kapitel 1

# Einführung des Kähler-Differentials

### Definition Leibnizregel

**Definition 1.** *[Kapitel 16 David Eisenbud 1994]*
*Sei $S$ ein Ring und $M$ ein $S$-Modul*

> *Ein Homomoprphismus abelscher Gruppen $d : S \longrightarrow M$ ist eine Derivation, falls gilt:*
>
> $$\forall s_1, s_2 \in S : \; d(s_1 \cdot s_2) = s_1 d(s_2) + s_2 d(s_1) \;\; \textbf{\textit{(Leibnitzregel)}}$$
>
> *Sei $S$ eine $R$-Algebra, dann nennen wir eine Derivation $d : S \longrightarrow M$ $R$-linear, falls sie zusätzlich ein $R$-Modulhomomorphismus ist, also falls gilt:*
>
> $$\forall r_1, r_2 \in R \, \forall s_1, s_2 \in S : \; d(r_1 s_1 + r_2 s_2) = r_1 d(s_1) + r_2 d(s_2)$$

### Summe von Derivationen

**Lemma 2.** *[Eigene Überlegung]*
*Seien $S$ eine $R$-Algebra und $M$ ein $S$-Modul. Seien weiter $d, d' : S \longrightarrow M$ zwei Derivationen. Dann ist auch $d, d' : S \longrightarrow M$ eine Derivation.*

*Beweis.* Zeige also, dass $d + d'$ die Leibnizregel erfüllt *(siehe definition 1)*. Seien dazu $s_1, s_2 \in S$ beliebig, somit gilt:

$$\begin{aligned}(d + d')(s_1 s_2) &= d(s_1 s_2) + d'(s_1 s_2) \\ &= s_1 d(s_2) + s_2 d(s_1) + s_1 d'(s_2) + s_2 d'(s_1) \\ &= s_1 \left(d(s_2) + d'(s_2)\right) + s_2 \left(d(s_1) + d'(s_1)\right) \\ &= s_1 (d + d')(s_2) + s_2 (d + d')(s_1)\end{aligned}$$

Damit erfüllt $d + d' : S \longrightarrow M$ die Leibnizregel und ist eine Derivation. □

### Differenzial indempotenter Elemente

**Lemma 3.** *[Aufgabe 16.1 David Eisenbud 1994]*
*Sei $S$ ein Ring und $M$ ein $S$-Modul und $d : S \longrightarrow M$ eine Derivation. Sei weiter $a \in S$ ein indempotentes Element ($a^2 = a$).*

$$\textit{Dann gilt } d(a) = 0.$$

*Insbesondere gilt somit auch $d(1) = 0$.*

*Beweis.* Nutze hierfür allein die Leibnizregel *(crefDefinition Leibnizregel)*

$$\begin{gathered}
\text{Schritt 1: } d_S(a) = d_S(a^2) = ad_S(a) + ad_S(a) \\
\text{Schritt 2: } ad_S(a) = ad_S(a^2) = a^2 d_S(a) + a^2 d_S(a) = ad_S(a) + ad_S(a) \\
\Rightarrow d_S(a) = ad_S(a) = 0
\end{gathered}$$

□

### Definition Kaehler-Differenzial

**Definition 4.** *Kapitel 16 David Eisenbud 1994*
*Sei $S$ eine $R$-Algebra.*
*Das $S$-Modul $\Omega_{S/R}$ der Kähler-Differenziale von $S$ über $R$ und die dazugehörige universelle $R$-lineare Derivation $d_S : S \longrightarrow \Omega_{S/R}$ mit $im(d_S) = \Omega_{S/R}$ sind durch die folgende universelle Eigenschaft definiert:*

*Für alle $R$-linearen Derivationen $e : S \longrightarrow M$ von $S$ in ein $S$-Modul $M$ existiert genau ein $S$-Modulhomomorphismus $e' : \Omega_{S/R} \longrightarrow M$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "d_S"] \arrow[dr, "e"'] & \Omega_{S/R} \arrow[d, dashed, "\exists! e'"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

### Eindeutigkeit des Kaehler-Differentials

**Lemma 5.** *(Das Kähler-Differentials ist eindeutig) [Eigene Überlegung]*
*Sei $S$ eine $R$-Algebra.*
*Dann ist das $S$-Modul $\Omega_{S/R}$ der Kähler-Differenziale von $S$ über $R$ und die dazugehörige universelle $R$-lineare Derivation $d_S$ bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Seien $d_S : S \longrightarrow \Omega_{S/R} und d'_S : S \longrightarrow \Omega'_{S/R}$ beide eine universelle $R$-lineare Derivation.
Durch die universelle Eigenschaft der universellen Ableitung erhalten wir eindeutig bestimmte Funktionen $\varphi : \Omega_{S/R} \longrightarrow \Omega'_{S/R}$ und $\varphi' : \Omega'_{S/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}$, für welche die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "d_S"] \arrow[dr, "d'_S"'] & \Omega_{S/R} \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & \Omega'_{S/R} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[r, "d'_S"] \arrow[dr, "d_S"'] & \Omega'_{S/R} \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi'"] \\ & \Omega_{S/R} \end{tikzcd}$$

Wende nun die Universelle Eingenschaft von $d_S$ auf $d_S$ selbst an und erhalte $id_{\Omega_{S/R}} = \varphi' \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "d_S"] \arrow[dr, "d_S"'] & \Omega_{S/R} \arrow[d, dashed, "\exists! id_{\Omega_{S/R}} = \varphi' \circ \varphi"] \\ & \Omega_{S/R} \end{tikzcd}$$

Analog erhalte auch $id_{\Omega'_{S/R}} = \varphi \circ \varphi'$. Damit existiert genau ein Isomorphismus $\varphi' \circ \varphi : \Omega_{R/S} \longrightarrow \Omega'_{R/S}$ mit $d'_S = d_S \circ (\varphi' \circ \varphi)$. □

## Differenzial ist Ableitung

**Korrolar 6.** *[Eigene Überlegung]*
*Für Differentialraum des Plynomrings $R[x]$ gilt:*

$$\Omega_{R[x]/R} = R[x]\langle \div R[x](x) \rangle$$

*Wobei $R[x]\langle d_{R[x]}(x) \rangle$ das von $d_{R[x]}(x)$ erzeugt Modul über $R[x]$ ist.*
*Genauer gesagt entspricht die universellen Derivation des Polynomrings $R[x]$ der formalen Ableitung von Polynomfunktionen, wie wir sie aus der Analysis kennen. Für $P(x) \in R[x]$ gilt also:*

$$d_{R[x]}(P(x)) = P'(x) d_{R[x]}(x)$$

*Beweis.* Da $d_{R[x]}$ $R$-linear ist, genügt es die Behauptung für Monome $P(x) \in k[x]$ zu zeigen, führe dazu eine Induktion über den Grad $n$ von $P(x) = ax^n$:

**IA**: $d_{R[x]}(ax) = ad_{R[x]}(x) + xd_{R[x]}(a) = ad_{R[x]}(x)$

**IV**: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $d_S(ax^n) = nax^{n-1} d_S(x)$

**IS**: $d_S(ax^{n+1}) = ax^n d_{R[x]}(x) + xd_{R[x]}(ax^n) = ax^n d_{R[x]}(x) + x \cdot (nax^{n-1} d_{R[x]}(x))$
$= (n+1)ax^n d_{R[x]}(x)$

□

## Propositon 11 delta

**Lemma 7.** *[Lemma 16.11 David Eisenbud 1994]*
*Seien $S$, $S'$ zwei $R$-Algebren. Sei weiter $f : S \longrightarrow S'$ ein $R$-Algebrenhomomorphismus und $\delta : S \longrightarrow S'$ ein Homomorphismus abelscher Gruppen mit $\delta(S)^2 = 0$. Dann gilt:*

$$f\ + \delta \text{ ist ein } R\text{-Algebrenhomomorphismus}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\delta \text{ ist eine } R\text{-linear und } \forall s_1, s_2 \in S:\ \delta(s_1 \cdot s_2) = f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1).$$

*Beweis.*

„$\Rightarrow$ “: Da $f$ und $f + \delta$ $R$-linear sind, ist auch $\delta = (f + \delta) - f$ $R$-linear.
Seien nun $s_1, s_2 \in S$ beliebig, somit gilt:

$$\begin{aligned}(f + \delta)(s_1 \cdot s_2) &= (f + \delta)(s_1) \cdot (f + \delta)(s_2)\\ \Rightarrow f(s_1 \cdot s_2) + \delta(s_1 \cdot s_2) &= f(s_1)f(s_2) + f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1) + \delta(s_1)\delta(s_2)\\ \Rightarrow \delta(s_1 \cdot s_2) &= f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1) + \delta(s_1)\delta(s_2) \ \mathit{mit}\ \delta(s_1)\delta(s_2) \in \delta(S)^2 = 0\\ \Rightarrow \delta(s_1 \cdot s_2) &= f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1) + \delta(s_1)\delta(s_2)\end{aligned}$$

„$\Leftarrow$ “: Da $f$ und $\delta$ beide $R$-lineare Homomorphismen abelscher Gruppen sind, trifft die auch für $f + \delta$ zu.
Wähle nun also $s_1, s_2 \in S$ beliebig, somit gilt:

$$\begin{aligned}&(f + \delta)(s_1) \cdot (f + \delta)(s_2)\\ &= f(s_1)f(s_2) + f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1) + \delta(s_1)\delta(s_2)\\ &= f(s_1 \cdot s_2) + \delta(s_1 \cdot s_2)\\ &= (f + \delta)(s_1 \cdot s_2)\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass $f + \delta$ ein $R$-Algebrenhomomorphismus ist.

□

## Kontruktion Kaehler-Differential

**Theorem 8.** *(Konstruktion des Kähler-Differentials[Theorem 16.21 David Eisenbud 1994]*
*Sei $S$ ein $R$-Algebra. Definiere eine $S$-Modulstruktur auf $S \otimes_R S$ durch:*

$$S \oplus (S \otimes_R S) \longrightarrow S \otimes_R S, (s, s_1 \otimes s_2) \longmapsto ss_1 \otimes s_2$$

*Betrachte $\mu : S \otimes_R S \longrightarrow S$ , $s_1 \otimes s_2 \longmapsto s_1 \cdot s_2$ mit $I := kern(\mu)$.*

*Dann ist durch $e : S \longrightarrow I/I^2$ , $s \longmapsto [s \otimes 1 - 1 \otimes s]$ die universelle $R$-lineare Derivation auf $S$ definiert.*

*Beweis.* Zeige zunächst, dass $e$ eine $R$-linare Derivation ist. Betrachte dazu:

$$f_1 : S \longrightarrow S \otimes_R S\,,\; s \longmapsto s \otimes 1, f_2 : S \longrightarrow S \otimes_R S\,,\; s \longmapsto 1 \otimes s$$
$$\textit{Damit ist die Wirkung von } S \textit{ auf } S \otimes_R S \textit{ durch}$$
$$S \oplus (S \otimes_R S) \longrightarrow S \otimes_R S, (s, s_1 \otimes s_2) \longmapsto f_1(s)(s_1 \otimes s_2) \textit{ gegeben.}$$

Setze nun in der Notation von lemma 7 $f = f_1$ und $\delta = e$.
Damit ist $f + \delta = f_1 + \delta = f_2$ ein $R$-Algebra-Homomorphismus und es folgt aus lemma 7 und unserer Definition der Wirkung von $S$ auf $S \otimes_R S$, dass $e$ eine $R$-lineare Derivation ist. Durch die Universelle Eigenschaft von $d_S$ existiert also genau ein $R$-Algebrenhomomorphismus $e' : \Omega_{S/R} \longrightarrow I/I^2$ mit $e = d_S \circ e'$.
Betrachte nun folgende Umkehrabbildung $\phi$ zu $e'$:

$$\phi : I/I^2 \longrightarrow \Omega_{S/R}\,,\; [s_1 \otimes s_2] \longmapsto s_1 d_S(s_2)$$

Um zu prüfen, dass $\phi$ die Umkehrabbildung von $e$ ist, wähle $s, s_1, s_2 \in S$ beliebig, somit gilt:

$$(\phi \circ e')(d_S(s)) = (\phi \circ e)(s) = \phi([s \otimes 1 - 1 \otimes s]) = s d_S(1) + 1 d_S(b) = d_S(b)$$
$$(e' \circ \phi)([s_1 \otimes s_2]) = e'(s_1 d_{s_2}) = s_1 e(s_2) = [s_1 1 \otimes s_2 - s_1 s_2 \otimes 1] = [s_1 \otimes s_2 - s_1 s_2 \otimes 1] = [s_1 \otimes s_2]$$

□

**Differenzial des Produktes von Algebren** *[Proposition 16.10 David Eisenbud 1994]*

**Proposition 9.** *Seien $S_1, \ldots, S_n$ $R$-Algebren. Sei dazu $S := \prod_{i \in \{1,\ldots,n\}} S_i$ deren direktes Produkt. Dann gilt:*

$$\Omega_{S/R} = \prod_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Omega_{S_i/R}$$

*Wobei die universelle Derivation folgende Form hat:*

$$d_S : S \longrightarrow \prod_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Omega_{S_i/R}\,,\; s \longmapsto ((d_{S_1} \circ p_1)(s), \ldots, (d_{S_1} \circ p_1)(s))$$

*Beweis.* Sei für $i \in \{1, \ldots, n\}$ jeweils $e_i \in S$ die Einbettung des Einselement's von $S_i$ in $S$, somit ist $p_i : e_i S \longrightarrow S_i$ ein Isomorphismus.
Nutze weiter, dass $e_i$ jeweils ein indempotentes Element von (${e_i}^2 = e_i$) von $S$ ist:

$$\text{Nach lemma 3 gilt } d_S(e_i) = 0$$
$$\Rightarrow \forall s \in s : d_S(e_i s) = d_S({e_i}^2 s) = e_i d_S(e_i s) + e_i s d_S(e_i) = e_i d_S(e_i s)$$

Mit diesem Wissen können wir einen Isomorphismus $\Phi : \Omega_{S/R} \longrightarrow \prod_{i\in\{1,\dots,n\}} \Omega_{S_i/R}$ definieren:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{S/R} & & d_S(s) = \sum_{i\in\{1,\dots,n\}} d_S(e_i s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{i\in\{1,\dots,n\}} e_i d_S(e_i S) & & (e_1 d_S(e_1 s), \dots, e_n d_S(e_n s)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{i\in\{1,\dots,n\}} \Omega_{S_i/R} & & ((d_{S_1} \circ p_1)(s), \dots, (d_{S_n} \circ p_n)(s)) \end{array}$$

Da der Differenzialraum $\Omega_{S/R}$ bis auf eine eindeutige Isomophie eindeutig ist *(lemma 5)*, definiere diesen ab jetzt als $\prod_{i\in\{1,\dots,n\}} \Omega_{S_i/R}$. □

## Realtiv Cotangent Sequenz

**Satz 10.** ***(Relativ Cotangent Sequenz)*** *[vgl. Proposition 16.2 David Eisenbud 1994]*
*Seien $\alpha : R \longrightarrow S$ und $\beta : S \longrightarrow T$ zwei Ringhomomorphismen. Dann existiert folgende exakte Sequenz:*

$$T \otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{D_\beta} \Omega_{T/R} \xrightarrow{d_{T_R}(t) \mapsto d_{T_S}(t)} \Omega_{T/S} \longrightarrow 0$$
$$\text{mit: } D_\beta : T \otimes_S \Omega_{S/R} \longrightarrow \Omega_{T/R}\,,\ t \otimes d_S(s) \longmapsto t(d_{T_R} \circ \beta)(s)$$

*Im Besonderen gilt für die Differenzialräume von $T$ über $R$ und $S$:*

$$\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R}/T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle$$

*Beweis.* Durch $st := \beta(S) \cdot t$ und $rt := (\beta \circ \alpha)(r) \cdot t$ können wir $T$ als $S$- bzw. $R$-Algebra betrachten.
Zeige zunächst, dass $g : \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/S}\,,\ d_{T_R}(t) \longmapsto d_{T_S}(t)$ surjektiv ist:

> $d_{T_S}$ ist $R$ - Linear, da $R$ durch $(\beta \circ \alpha)$ auf $T$ wirkt, es lässt sich also die universelle Eigenschaft von $d_{T_R}$ auf $d_{T_S}$ anwenden:
>
> $$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "d_{T_R}"] \arrow[dr, "d_{T_S}"'] & \Omega_{T/R} \arrow[d, dashed, "\exists! g"] \\ & \Omega_{T/S} \end{tikzcd}$$
>
> Wir können also alle Elemente $d_{T_S}(s) \in \Omega_{T/S}$ als $g(d_{T_R}(s))$ darstellen. Dies zeigt, dass $g : \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/S}\,,\ d_{T_R}(t) \longmapsto d_{T_S}(t)$ surjektiv ist.

Zeige nun, dass $\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R}/T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle$ gilt:

> Definiere zunächst folgende $S$-lineare Derivation:
>
> $$e : T \longrightarrow \Omega_{T/R}/T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle\,,\ t \longmapsto [d_{T_R}(t)]_{T\langle(d_{T_R}\circ\beta)(S)\rangle}$$

Wir sehen, dass $e$ auch $S$-linear ist:

$$\text{Seien dazu } s \in S \text{ und } t \in T \text{ beliebig, somit gilt:}$$
$$e(st) = [d_{T_R}(st)]_{T\langle(d_{T_R}\circ\beta)(S)\rangle}$$
$$= [\beta(s)d_{T_R}(t)]_{T\langle(d_{T_R}\circ\beta)(S)\rangle} + [td_T(\beta(s))]_{T\langle(d_T\circ\beta)(S)\rangle}$$
$$= [\beta(s)d_T(t)]_{T\langle(d_{T_R}\circ\beta)(S)\rangle} + 0 = se(t)$$

Dies bedeutet, dass wir die universelle Eigenschaft von $d_{T_S}$ anwenden können:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "d_{T_S}"] \arrow[dr, "e"'] & \Omega_{T/S} \arrow[d, dashed, "\exists ! e'"] \\
 & \Omega_{T/R}/T\Omega_{S/R}
\end{tikzcd}$$

Dadurch erhalten wir $e' : \Omega_{T/S} \longrightarrow \Omega_{T/R}/T\Omega_{S/R}$.
Für die Umkehrfunktion $\phi$ nutze $g : \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/S}$ , $d_{T_R}(t) \longmapsto d_{T_S}(t)$ vom Beginn des Beweises:

$$\text{Für alle } s \in S \text{ gilt } d_{T_S}(s) = 0.$$
$$\text{Somit gilt } T\langle(d_{T_R}\circ\beta)(S)\rangle \subseteq kern(g).$$
$$\text{Also ist die Umkehrfunktion } \phi \text{ von } e' \text{ wohldefiniert:}$$
$$\phi : \Omega_{T/R}/T\langle(d_{T_R}\circ\beta)(S)\rangle \longrightarrow \Omega_{T/S}\,,\ [d_{T_R}(t)]_{T\langle(d_{T_R}\circ\beta)(S)\rangle} \longmapsto d_{T_S}(t).$$

Damit gilt $\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R}/T\langle(d_{T_R}\circ\beta)(S)\rangle$.
Auf unsere Sequenz bezogen bedeutet dies:

$$\text{Es gilt } im(\Omega_{T/R} \to \Omega_{T/S}) \simeq \Omega_{T/R}/im(D_\beta).$$
$$\text{Somit gilt auch } im(D_\beta) = kern(\Omega_{T/R} \to \Omega_{T/S}).$$

Damit haben wir gezeigt, dass die **Relative Cotangent Sequenz** exakt ist.

□

## Konormale Sequenz *[vlg. Proposition 16.3 David Eisenbud 1994]*

**Satz 11.** *Sei $\pi : S \longrightarrow T$ ein $R$-Algebrenephimorphismus mit Kern($\pi$):= $I$ Dann ist folgende Sequenz rechtsexakt:*

$$I/I^2 \xrightarrow{1\otimes d_S} T \otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$
$$\textit{mit: } 1 \otimes d_S : I/I^2 \longrightarrow T \otimes_S \Omega_{S/R}\,,\ [s] \longmapsto 1 \otimes d_S(s)$$
$$D\pi : T \otimes_S \Omega_{S/R} \longrightarrow \Omega_{T/R}\,,\ t \otimes d_S(s) \longmapsto t \cdot (d_S \circ \pi)(s)$$

*Beweis.*
Zeigen zunächst, dass $1 \otimes d_S$ wohldefiniert ist. Seien dazu $s, s' \in I$ beliebig, somit gilt:

$$(1 \otimes d_S)(s \cdot s') = 1 \otimes s d_S(s') + 1 \otimes s' d_S(s) = \pi(s) \otimes d_S(s') + \pi(s') \otimes d_S(s) = 0$$

$D\pi$ ist surjektiv, da $\Omega_{S/R}$ und $\Omega_{T/S}$ jeweils von $d_S$ und $d_T$ erzeugt werden und sich somit die Surjektivität von $\pi$ auf $D\pi$ vererbt:

$$\begin{tikzcd} \Omega_{S/R} \arrow[r, two heads, "D\pi"] & \Omega_{T/R} \\ S \arrow[u, "d_S"] \arrow[r, two heads, "\pi"] & T \arrow[u, "d_T"'] \end{tikzcd}$$

Für $im(1 \otimes d_S) \overset{!}{=} kern(D\pi)$ zeige $(T \otimes_S \Omega_{S/R})/Im(f) \simeq \Omega_{T/R}$:

$$(T \otimes_S \Omega_{S/R})/(T \otimes_S d_S(I)) = T \otimes_S (\Omega_{S/R}/d_S(I)) \simeq T \otimes_S d_S(S/I) \simeq T \otimes_S d_T(T)$$

$\square$

# Kapitel 2

# Kolimiten

## 2.1 Einführung in den Kolimes

**Definition des Kolimes**

**Definition 1.** *[vgl. Anhang A6 David Eisenbud 1994] Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie.*

- *Ein Diagramm über $\mathcal{A}$ ist eine Kategorie $\mathcal{B}$ zusammen mit einem Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$.*

- *Sei $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Diagramm und $A \in \mathcal{A}$ ein Objekt. Dann definieren wir einen Morphismus $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$ als eine Menge von Funktionen $\{\psi_B \in Hom(F(B), A) | B \in \mathcal{B}\}$, wobei für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $\varphi \in Hom(B_1, B_2)$ folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(B_1) \arrow[d, "\mathcal{F}(\varphi)"] \arrow[dr, "\psi_{B_1}"] & \\ & C \\ \mathcal{F}(B_2) \arrow[ur, "\psi_{B_2}"'] & \end{tikzcd}$$

- *Der Kolimes $\varinjlim \mathcal{F}$ eines Diagramms $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ist ein Paar aus einem Objekt $A \in \mathcal{A}$ zusammen mit einem Morphismus $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$, welche folgende universelle Eingenschaft erfüllen:*

  *Für Objekte $A' \in \mathcal{A}$ und alle Morphismen $\psi' : \mathcal{F} \longrightarrow A'$ existiert genau eine Funktion $\varphi \in Hom(A, A')$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F} \arrow[dl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ A' & & A \arrow[ll, dashed, "\exists! \varphi"'] \end{tikzcd}$$

**Eindeutigkeit des Kolimes** *[vgl. A6 David Eisenbud 1994]*

**Lemma 2.** *Seien $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ zwei Kategorien und $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor. Dann ist im Falle der Existenz $\varinjlim \mathcal{F}$ eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Seien $A_1 \in \mathcal{A}, (\psi_1 : \mathcal{F} \longrightarrow A_1)$ und $A_2 \in \mathcal{A}, (\psi_2 : \mathcal{F} \longrightarrow A_2)$ beide gleich $\varinjlim \mathcal{F}$.
Erhalte durch die universelle Eigenschaft des Kolimes die eindeutig bestimmten Funktionen $\varphi_1 \in Hom_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$ und $\varphi_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(A_2, A_1)$, für welche die folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F} \arrow[dl, "\psi_2"'] \arrow[dr, "\psi_1"] & \\ A_2 & & A_1 \arrow[ll, dashed, "\exists ! \varphi_1"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathcal{F} \arrow[dl, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\psi_2"] & \\ A_1 & & A_2 \arrow[ll, dashed, "\exists ! \varphi_2"'] \end{tikzcd}$$

Wende nun die Universelle Eigenschaft von $\psi_1$ auf $\psi_1$ selbst an und erhalte $id_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1$. Analog erhalte auch $id_{A_2} = \varphi_1 \circ \varphi_2$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F} \arrow[dl, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\psi_1"] & \\ A_1 & & A_1 \arrow[ll, dashed, "\exists ! id_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1"'] \end{tikzcd}$$

Somit existiert genau eine Isomorphie $\varphi_1 : A_1 \longrightarrow A_2$. $\square$

## Vereinfachung des Kolimes

**Korrolar 3.** *[Eigene Überlegung ]*
*Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie und $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$ ein Diagramm. Betrachte die Unterkategorie $\mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{A}$ zusammen mit dem Inklusionsfunktor $\mathcal{F}(B) \hookrightarrow \mathcal{A}$ ebenfalls als Diagramm. Dann gilt:*

$$\varinjlim \mathcal{F} \text{ existiert genau dann, wenn } \varinjlim(\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \text{ existiert.}$$
$$\text{Mit } \varinjlim \mathcal{F} = \varinjlim(\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}).$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus unserer Definition von Morphismen:
In definition 1 haben wir einen Morphismus $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$ als eine Menge von Funktionen $\psi_{\mathcal{B}} \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(B), A)$ definiert. Dies zeigt, dass es keinen Unterschied macht, ob wir von Morphismen $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$ oder von Morphismen $\psi : (\mathcal{F}(B) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$ reden.
Wenn wir nun die universelle Eigenschaft des Kolimes genauer betrachten, sehen wir, dass diese sich nur auf Morphismen $\mathcal{F} \longrightarrow A$ bzw. $(\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$ und auf die Kategorie $\mathcal{A}$ bezieht. Es macht also keinen Unterschied, ob wir vom Kolimes des Diagramms $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$ oder vom Kolimes des Diagramms $(\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(B) \hookrightarrow \mathcal{A})$ sprechen. $\square$

Es genügt also im Fall von Kolimtenn Diagramme $(\mathcal{B}, \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$ mit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ zu betrachten. Zur Vereinfachung schreibe für $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ in Zukunft $\varinjlim \mathcal{B}$ anstatt von $\varinjlim(\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$.

## DifferenzkokernUndKoproduktDef

**Definition 4.** *[vlg. A6 David Eisenbud 1994]*
*Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie.*

- *Das Koprodukt von $\{B_i\}_{i\in\Lambda} \subseteq \mathcal{A}$ wird durch $\coprod_{i\in\Lambda}\{B_i\} := \varinjlim \mathcal{B}$ definiert, wobei $\{B_i\}_{i\in\Lambda}$ die Objekte und die Identitätsabbildungen $\{id_{B_i} : B_i \longrightarrow B_i\}_{i\in\Lambda}$ die einzigen Morphismen von $\mathcal{B}$ sind.*

- *Der Differenzkokern von $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$ wird durch $\varinjlim \mathcal{C}$ definiert, wobei $\{C_1, C_2\}$ die Objekte und $\{f, g\}$ zusammen mit den Identitätsabbildungen die Morphismen von $\mathcal{C}$ sind.*

**NeuDifferenzenkokerndef**

**Bemerkung 5.** *[Wikipedia]*
*Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie. Sei weiter $C_1, C_2 \in Obj_{\mathcal{A}}$ und $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$.*
*Im Falle der Existenz ist der Differnenzenkokern von $f, g$ nach definition 4 durch ein Objekt $C \in Obj_{\mathcal{A}}$ und einen Morphismus $\psi = \{\psi_{C_1}, \psi_{C_2}\}$ gegeben, wobei gilt:*

$$\psi_{C_2} = f \circ \psi_1 = g \circ \psi_2$$

*Wir sehen, dass $\psi$ eindeutig durch $q := \psi_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$ gegeben ist. Der Differnzenkokern ist also eindeutig durch $(C \in obj_{\mathcal{A}}, q \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2))$ gegeben, wobei $q$ folgenden Eigenschaften besitzt:*

*Es gilt $f \circ q = g \circ g$ und*
*für alle $C \in Obj_A$ und $q' \in Hom_{\mathcal{A}}$ mit $f \circ q' = g \circ q'$ existiert genau ein $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}$, mit $q \circ \varphi = q'$:*

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "{f,g}"] & C_2 \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q'"] & C \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & & C' \end{tikzcd}$$

Wenn wir fortan vom Differenzkokern sprechen meinen wir damit das Paar $(C, q)$.

**Kolimes durch Koprodukt und Differenzkokern**

**Theorem 6.** *[Proposition A6.1 David Eisenbud 1994]*
*Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie, in der Koprodukte beliebiger Mengen von Objekten und Differenzkokerne von je zwei Morphismen existieren. Dann existiert für jedes Diagramm $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ dessen Kolimes $\varinjlim \mathcal{F}$.*

*Beweis.* In korrolar 3 haben wir gesehen, dass es genügt den Fall $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ zu betrachten. Konstruiere also für eine beliebige Unterkategorie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ deren Kolimes $\varinjlim \mathcal{B}$:
Bezeichne für jeden Morphismus $\gamma \in Morph_{\mathcal{C}}$ dessen Definitionsbreich mit $B_\gamma \in$

$\mathcal{B}$. Weiter, wenn wir einen Morphismus $\psi$ gegeben haben und $\psi_{\gamma(B_\gamma)}$ betrachten, ist damit $\psi_B$ gemeint, wobei $B$ die Zielmenge von $\gamma$ ist. Definiere nun:

- $C_1 := \coprod_{\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}} B_\gamma$ ist das Koprodukt aller Objekte von $\mathcal{B}$, in dem jedes Objekt so oft vorkommt, wie es Definitionsbereich eines $\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}$ ist. Sei $\psi^1 : \{B_\gamma | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_1$ der dazugehörige Morphismus.

- $C_2 := \coprod_{B \in Obj_{\mathcal{B}}}$ ist das Koprodukt aller Objekte von $\mathcal{B}$.
  Sei $\psi^2 : \{B | B \in Obj_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_2$ der dazugehörige Morphismus.

Konstruiere nun $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$ so, dass der Differenzkokern von $f$ und $g$ dem Kolimes von $\mathcal{B}$ entspricht. Nutze dazu die universelle Eigenschaft von $(C_1, \psi^1) = \varinjlim\{B_\gamma | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\}$:

> Für $f$ betrachte den Morphismus $\zeta : \{B_\gamma | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_2$,
> mit $\zeta_{B_\gamma} := \psi^2_{\gamma(B_\gamma)}$ für $B_\gamma \in \{B_\gamma | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\}$.
> Wähle $f \in Hom_{\mathcal{B}}(C_1, C_2)$ als die eindeutige Funktion, mit $\zeta = f \circ \psi^1$.
>
> Für $g$ betrachte den Morphismus $\zeta' : \{B_\gamma | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_2$,
> mit $\zeta'_{B_\gamma} := \psi^2_{\gamma(B_\gamma)} \circ \gamma$ für $B_\gamma \in \{B_\gamma | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\}$.
> Wähle $g \in Hom_{\mathcal{B}}(C_1, C_2)$ als die eindeutige Funktion, mit $\zeta' = g \circ \psi^1$.

$$\begin{tikzcd}
 & \{B_\gamma | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\} \arrow[dl, "\zeta"'] \arrow[dr, "\psi^1"] & \\
C_2 & & C_1 \arrow[ll, dashed, "\exists! f"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \{B_\gamma | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\} \arrow[dl, "\zeta'"'] \arrow[dr, "\psi^1"] & \\
C_2 & & C_1 \arrow[ll, dashed, "\exists! g"']
\end{tikzcd}$$

$$\zeta_{B_\gamma} := \psi^2_{\gamma(B_\gamma)} \qquad \zeta'_{B_\gamma} := \psi^2_{\gamma(B_\gamma)} \circ \gamma$$

Sei $C \in Obj_{\mathcal{B}}$ zusammen mit $q \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, C)$ der Differenzkokern von $f$,$g$.
Betrachte abschließend $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow C$, mit $\psi_B = q \circ \psi^2_B$ für $B \in Obj_{\mathcal{B}}$.
Um zu sehen, dass $\psi$ ein Morphismus ist, wähle $B_1, B_2 \in Obj_{\mathcal{B}}$ beliebig und betrachte folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[rr, "\psi^2_{B_1}=\zeta_{B_1}"] \arrow[dr, "\psi^1_{B_1}"] \arrow[dd, "\gamma"'] \arrow[ddrr, bend right, "\zeta'_{B_2}"] & & C_2 \arrow[dr, "q"] & \\
 & C_1 \arrow[ur, "f"'] \arrow[dr, "g"] & & C \\
B_2 \arrow[rr, "\psi^2_{B_2}"'] & & C_2 \arrow[ur, "q"'] &
\end{tikzcd}$$

Zeige nun, dass $(C, \psi)$ die Universelle Eigenschaft des Kolimes besitzt. Nutze dazu nacheinander die universellen Eigenschaften von $(C_2, \psi^2)$ und $(q, C)$:

> Da $\psi'$ ein Morphismus von $\mathcal{B}$ nach $C'$ ist, ist $\psi'$ insbesondere auch ein Morphismus von $\{B | B \in Obj_{\mathcal{B}}\}$ nach $C$. Somit existiert genau ein $q' \in Hom_{\mathcal{B}}(C_2, C')$ mit $\psi^2 \circ q' = \psi'$.

Zeige nun $q' \circ f \overset{!}{=} q' \circ g$. Sei dazu $c \in C_1$ beliebig und $\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}$, $b \in B_\gamma$ mit $\psi^1_{B_\gamma}(b) = c$, dann gilt:

$$(q' \circ f)(c) = (q' \circ f \circ \psi^1_{B_\gamma})(b) = (q' \circ \zeta_{B_\gamma})(b) = (q' \circ \psi^2_{B_\gamma})(b) = \psi'_{B_\gamma}(b)$$
$$(q' \circ g)(c) = (q' \circ g \circ \psi^1_{B_\gamma})(b) = (q' \circ \zeta'_{B_\gamma})(b)$$
$$= (q' \circ \psi^2_{\gamma(B_\gamma)} \circ \gamma)(b) = (\psi'_{\gamma(B_\gamma)} \circ \gamma)(b) = \psi'_{B_\gamma}(b)$$

Somit können wir die universelle Eigenschaft von $q$ auf $q'$ anwenden und erhalten ein eindeutiges $\varphi \in Hom(C, C')$ mit $q' = q \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B} \arrow[ddl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi^2"] \arrow[ddrr, bend left, "\psi"] & & \\
& & C_2 \arrow[dll, dashed, "\exists! q'"'] \arrow[dr, "q"] & \\
C' & & & C \arrow[lll, dashed, "\exists! \varphi"']
\end{tikzcd}$$

Dieses $\varphi \in Hom(C, C')$ erfüllt auch $\psi \circ \varphi = \psi^2 \circ q \circ \varphi = \psi^2 \circ q' = \psi'$ und ist nach Konstruktion eindeutig. Damit gilt $\varinjlim \mathcal{B} = (C, \psi)$. □

**Bemerkung 7.** *(Unendliche Indexmengen)*
*Wir wollen uns hier nochmal kurz in Erinnerung rufen, was es bedeutet, wenn wir eine unendlich große Indexmenge $\Lambda$ vor uns haben:*

1. *Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie und $\{B_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq Obj_{\mathcal{A}}$, dann gilt:*

$$\bigoplus_{i \in \Lambda} B_i = \bigcup_{\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \Lambda} \bigoplus_{k=1}^{n} B_{i_k} = \{(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) | n \in \mathbb{N} \wedge \{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \Lambda\}$$

2. *Sei $\{M_i\}_{i \in \Lambda}$ eine Menge von R-Moduln (oder R-Algebren), dann gilt:*

$$\bigotimes_{i \in \Lambda} M_i = \bigcup_{\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \Lambda} \bigotimes_{k=1}^{n} M_{i_k} = \{(m_{i_1} \otimes \cdots \otimes m_{i_n}) | n \in \mathbb{N} \wedge \{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \Lambda\}$$

3. *Für den Polynomring über $R$ in unendlich vielen Variablen $\{x_i\}_{i \in \Lambda}$ gilt:*

$$P[\{x_i\}_{i \in \Lambda}] = \bigcup_{\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \Lambda} P[x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}] = \{P(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) | n \in \mathbb{N} \wedge \{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \Lambda\}$$

*Dies zeigt, dass sich diesen drei Fällen eine unendliche Indexmenge $\Lambda$ immer auf endliche Indexmengen $\{1, \ldots, n\}$ zurückführen lässt.*

### R-Algebra-Kolimiten

**Proposition 8.** *[vlg. Proposition A6.7 David Eisenbud 1994]*
*In der Kategorie der R-Algebren existieren Kolimiten beliebiger Diagramme, wobei gilt:*

1. *Das Koprodukt einer Familie von $R-$ Algebren $\{S_i\}_{i\in\Lambda}$ entspricht deren Tesorprodukt $\bigotimes_{i\in\Lambda} S_i$.*

2. *Der Differenzkokern zweier R-Algebrenhomomorphismen $f, g : S_1 \longrightarrow S_2$ einspricht dem Homomorphismus $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ , $y \longmapsto [y]$,*
*wobei $Q := \{f(x) - g(x) \mid x \in S_1\}$ das Bild der Differenz von $f$ und $g$ ist.*

*Beweis.*
<u>Zu ***1.***:</u> Sei $\mathcal{B} = \{S_i\}_{i\in\Lambda}$ die Unterkategorie der R-Algebren, welche $\{S_i\}_{i\in\Lambda}$ zusammen mit den Identitätsabbildungen enthält. Somit gilt nach definition 4 $\coprod_{i\in\Lambda} S_i = \varinjlim \mathcal{B}$. Seien weiter:

$\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \coprod_{i\in\Lambda} S_i$ der Morphismus des Koprodukts und

$g : \bigoplus_{i\in\Lambda} S_i \longrightarrow \bigotimes_{i\in\Lambda} S_i$ die multilineare Abbildung des Tensorprodukts.

Konstruiere daraus einen Morphismus $\psi'$ und eine multilineare Abbildung $g'$:

$$\psi' : \mathcal{B} \longrightarrow \bigotimes_{i\in\Lambda} S_i, \text{ mit } \psi'_{S_i} : S_i \longrightarrow \bigotimes_{i\in\Lambda} S_i \text{ , } s_i \longmapsto g(1, .., 1, s_i, 1, .., 1) \text{ für } i \in \Lambda$$

$$g' : \bigoplus_{i\in\Lambda} S_i \longrightarrow \coprod_{i\in\Lambda} S_1 \text{ , } s \longmapsto \prod_{i\in\{i\in\Lambda \mid s_i\neq 0\}} \psi_i(s_i)$$

Somit liefern uns die universellen Eigenschaften folgende zwei R-Algebra-Homomorphismen:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ \bigotimes_{i\in\Lambda} S_i & & \coprod_{i\in\Lambda} S_1 \arrow[ll, dashed, "\exists!\varphi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \bigoplus_i S_i \arrow[dl, "g'"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \coprod_{i\in\Lambda} S_i & & \bigotimes_{i\in\Lambda} S_i \arrow[ll, dashed, "\exists!\phi"'] \end{tikzcd}$$

$$\varphi : \coprod_{i\in\Lambda} S_i \longrightarrow \bigotimes_{i\in\Lambda} S_i \qquad \phi : \bigotimes_{i\in\Lambda} S_i \longrightarrow \coprod_{i\in\Lambda} S_i$$

Wende nun die Universelle Eigenschaft von $\psi$ auf $\psi$ selbst an und erhalte $id_{\coprod_{i\in\Lambda} S_i} = \phi \circ \varphi$. Analog erhalte auch durch die universelle Eigenschschaft des Tensorpruduktes $id_{\bigotimes_i S_i} = \varphi \circ \phi$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ \coprod_{i\in\Lambda} S_i & & \coprod_{i\in\Lambda} S_i \arrow[ll, dashed, "\exists! id_{\coprod_{i\in\Lambda} S_i}=\phi\circ\varphi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \bigoplus_i S_i \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \bigotimes_{i\in\Lambda} S_i & & \bigotimes_i S_i \arrow[ll, dashed, "\exists! id_{\bigotimes_i S_i}=\varphi\circ\phi"'] \end{tikzcd}$$

Damit haben wir Isomorphismen zwischen $\coprod_{i\in\Lambda} S_i$ und $\bigotimes_i S_i$ gefunden.
Da das Koprodukt $\coprod_{i\in\Lambda} S_i = \varinjlim \mathcal{B}$ bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist *(lemma 2)*, definiere dies ab jetzt als $\bigotimes_{i\in\Lambda} S_i$.

Zu ***2.***: Zeige, dass $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ die in bemerkung 5 eingeführten Eigenschaften des Differenzkokern's besitzt:

$$q \circ f = q \circ g \text{ gilt, da } kern(q) = Q = \{f(x) - g(x) \mid x \in C_2\}.$$

Sei nun ein R-Algabrahomomorphismus $q' : S_2 \longrightarrow T'$ mit $q' \circ f = q' \circ g$ gegeben. Somit gilt $q' \circ (f - g) = 0$, wodurch $Q$ ein Untermodul von $Q' := kern(q')$ ist. Mit dem Isomorphiesatz für R-Algebren erhalten wir:

$$S_2/Q' \simeq (S_2/Q)/(Q'/Q).$$

Somit ist $q' : S_2 \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q)\,,\, y \longmapsto [y]'$ eine isomorphe Darstellung von $q' : S_2 \longrightarrow T'$.

$$\Rightarrow \exists! \varphi : S_2/Q \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q)\,,\, [y] \longmapsto [y]' \ mit\ (\varphi \circ q) = q'.$$

Also ist $S_2/Q$ zusammen mit $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ der bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmte Differenzkokern von $f$ und $g$.

Damit haben wir gezeigt, dass Koprodukte beliebiger Mengen von R-Algebren und Differenzkokerne von je zwei R-Algebrenhomomorphismus existieren. Nach theorem 6 existieren somit in der Kategorie der R-Algebren Kolimiten beliebiger Diagramme. □

## R-Modul-Kolimiten

**Proposition 9.** *[Proposition A6.2 David Eisenbud 1994]*
*In der Kategorie der R-Moduln existieren Kolimiten beliebiger Diagramme, wobei gilt:*

1. *Das Koprodukt einer Familie von $R - Moduln$ $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$ entspricht deren direkter Summe $\bigoplus_{i\in\Lambda} M_i$.*
2. *Der Differenzenkokern zweier R-Modulhomomorphismen $f, g : M_1 \longrightarrow M_2$ entspricht dem Homomorphismus $q : M_2 \longrightarrow M_2/Q\,,\, y \longmapsto [y]$, wobei $Q := \{f(x) - g(x) \mid x \in M_1\}$ das Bild der Differenz von $f$ und $g$ ist.*

*Beweis.*
Zu ***1.***: Sei $\mathcal{B} = \{M_i\}_{i\in\Lambda}$ die Unterkategorie der R-Moduln, welche $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$ zusammen mit den Identitätsabbildungen enthält. Betrachte als Morphismus $\psi$ die jeweilige Einbettung von $M_i$ in $\bigoplus_{i\in\Lambda} M_i$:

$$\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda} M_i \text{ mit } \psi_{M_i} : M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda} M_i\,,\, m_i \longmapsto (0, \dots \cdots, 0, m_i, 0, \cdots, 0) \text{ für } i \in \Lambda$$

Somit lässt sich jedes $(m_1, \cdots m_n) \in \bigoplus_{i\in\Lambda} M_i$ *(im Fall von $|\lambda| = \infty$ siehe bemerkung 7)* eindeutig durch die Elemente $m_i \in M_i$ (für $i \in \{i, \cdots, n\}$) darstellen:

$$(m_1, \cdots, m_n) = \sum_{i=1}^{n} \psi_{M_i}(m_i)$$

Damit erfüllt $\psi$ die universelle Eigenschaft von $\varinjlim \mathcal{B}$, denn sei $\psi' : \mathcal{B} \longrightarrow M'$ ein bieliebiger Morphismus, so existiert genau ein R-Modulhomomorphismus:

$$\varphi : \bigoplus_{i \in \Lambda} M_i \longrightarrow M' \,,\, (m_1, \cdots, m_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \psi'_{M_i}(m_i)$$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ M' & & \bigoplus_i M_i \arrow[ll, dashed, "\exists! \varphi"'] \end{tikzcd}$$

Also ist $\oplus_{i \in \Lambda} M_i$ zusammen mit den Einbettungen $\psi_{M_i} : M_i \hookrightarrow \bigoplus_{i \in \Lambda} M_i$ das bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmte Koprodukt von $\{M_i\}_{i \in \Lambda}$.
*2.* Gehe hier vor wie bei proposition 8. Dort haben wir schon gezeigt, dass der Differenzkokern von zwei R-Algebra-Homomorphismen dem Kokern, von deren Differenz entspricht.

Damit haben wir gezeigt, dass Koprodukte beliebiger Mengen von R-Moduln und Differenzkokerne von je zwei R-Modulhomomorphismen existieren. Nach theorem 6 existieren somit in der Kategorie der R-Moduln Kolimiten beliebiger Diagramme. □

## 2.2 Darstellung von Lokalisierung als Kolimes

### Lokalisierung von Algebren als Kolimes

**Proposition 10.** *[vlg. Aufgabe A6.7 David Eisenbud 1994]*
*Sei $S$ eine $R-$ Algebra und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$S[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{B}$$

*Wobei $\mathcal{B}$ aus den Objekten $\{S[t^{-1}] | t \in U\}$ und den Morphismen*
*$S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}], (\frac{s}{t^n})_t \longmapsto (\frac{st'^n}{(tt')^n})_{(tt')}$ (für $t, t' \in U$) besteht.*

*Beweis.* Sei $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow T$ der Kolimes von $\mathcal{B}$. Zeige $S[U^{-1}] \simeq T$, definiere dazu:

$$\psi' : \mathcal{B} \longrightarrow S[U^{-1}]$$
$$\psi'_{S[t^{-1}]} : S[t^{-1}] \longrightarrow S[U^{-1}] \,,\, (\frac{s}{t^n})_t \longmapsto (\frac{s}{t^n})_U$$

$\psi'$ ist ein Morphismus, da für beliebige $t, t' \in U$ und $s \in S$ gilt:

$$(\frac{s}{t^n})_U = (\frac{st'^n}{(tt')^n})_U$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir einen eindeutigen Homomorphismus $\varphi$ mit:

$$\varphi \circ \psi_{S[t^{-1}]} = \psi'_{S[t^{-1}]} \text{ für alle } S[t^{-1}] \in \mathcal{B}.$$

Für die Umkehrabbildung $\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow T$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen: Zunächst stellen wir fest, dass $\psi'$ ganz $S[U^{-1}]$ abdeckt, also:

Jedes $(\frac{s}{u})_{_U} \in S[U^{-1}]$ lässt sich in der Form $(\frac{s}{u})_{_U} = \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_{_t})$ schreiben *(für $t = u$).*

Allerdings ist diese Darstellung nicht eindeutig. Zeige also noch, dass $\phi$ unabhängig von der Wahl von eines Repräsentanten ist. Seien dazu $s_1, s_2 \in S$, $t_1, t_2 \in U$ beliebig, somit gilt:

$$\begin{aligned}
\textit{Sei } \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_{_t}) &= \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_{_t}) \\
\Rightarrow \exists u \in U : (s_1 t_1 - s_2 t_2) \cdot u &= 0 \\
\Rightarrow (\frac{s_1 u}{t_1 u})_{_{tu}} &= (\frac{s_2 u}{t_2 u})_{_{tu}} \\
\Rightarrow \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_{_t}) &= \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_{_t})
\end{aligned}$$

Mit diesem Wissen können wir den R-Algebra-Homomorphismus $\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow T$ definieren:

$$\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow T \,,\ \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_{_t}) \longmapsto \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_{_t})$$

$\phi \circ \varphi = id_T$ ergibt sich direkt aus der universellen Eigenschaft des Kolimes:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B} \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
T & & T \arrow[ll, dashed, "\exists! id_T = \phi\circ\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Für $\varphi \circ \phi \overset{!}{=} id_{S[U^{-1}]}$ wähle $s \in S, t \in U$ beliebig. Für diese gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{s}{t})_{_t})) = \varphi(\psi((\frac{s}{t})_{_t}) = \psi'((\frac{s}{t})_{_t})$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\varphi, \phi$ Isomorphismen sind und somit $T \simeq S[U^{-1}]$ gilt. Da der Kolimes bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig ist *(siehe lemma 2)*, definiere ab sofort $\varinjlim \mathcal{B}$ als $S[U^{-1}]$. $\square$

**Lokalisierung von Moduln als Kolimes** *[Beweis von Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]*

**Korrolar 11.** *Sei $M$ ein $S$-Modul, wobei $S$ eine $R$-Algebra ist. Sei weiter $U \subseteq S$*

*multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$M[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{C}$$

*Wobei $\mathcal{C}$ aus den Objekten $\{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] | t \in U\}$ und folgenden Morphismen besteht:*

$$S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[(tt')^{-1}]} M[(tt')^{-1}],$$
$$(\frac{s}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{t^n})_{t} \longmapsto (\frac{s}{u})_{U} \otimes (\frac{t'^n m}{(tt')^n})_{t}$$

Auch wenn sich proposition 10 hier nicht direkt anwenden lässt, so können wir doch im Beweis gleich vorgehen.

*Beweis.* Sei $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow T$ der Colimes von $\mathcal{C}$. Zeige $M[U^{-1}] \simeq T$, definiere dazu folgenden Morphismus:

$$\psi' : \mathcal{C} \longrightarrow M[U^{-1}]$$
$$\psi'_t : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \longrightarrow M[U^{-1}]\,,\ (\frac{s}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{t^n})_{t} \longmapsto (\frac{sm}{ut^n})_{U}$$

Die Wohldefiniertheit von $\psi'_t$ für ein beliebiges $t \in U$ folgt direkt aus der Universellen Eigenschaft des Tensorprodukt's. Denn für die bilineare Abbildung $f : S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \longrightarrow M[t^{-1}]\,,\ ((\frac{s}{u})_{U}, (\frac{m}{t^n})_{t}) \longmapsto (\frac{sm}{ut^n})_{U}$ gilt:

$$\begin{tikzcd}
S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \arrow[d, dashed, "\exists! \psi'_t"] \\
& M[U^{-1}]
\end{tikzcd}$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir nun einen eindeutigen Homomorphismus $\varphi : T \longrightarrow M[U^{-1}]$ mit:

$$\varphi \circ \psi_t = \psi'_t \text{ für alle } t \in U.$$

Für die Umkehrabbildung $\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow T$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen: Wir stellen fest, dass für jedes $t \in U$ gilt:

Jedes $(\frac{m}{u})_{U} \in M[U^{-1}]$ lässt sich in der Form $(\frac{m}{u})_{U} = \psi_t((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t})$ schreiben.

Diese Darstellung ist unabhängig von den Wahl von $t \in U$, denn für beliebige $t_1, t_2, u \in U$ und $m \in M$ gilt:

$$\psi'_{t_1}((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t_1}) = (\frac{m}{u})_{U} = \psi'_{t_2}((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t_2})$$

Für $\psi$ gilt in diesem Fall:

$$\psi_{t_1}((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t_1}) = \psi_{t_1 t_2}((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t_1 t_2}) = \psi_{t_2}((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t_2})$$

Definiere nun mit diesem Wissen folgenden Homomorphismus:

$$\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow T \,,\; \psi_t((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t) \longmapsto \psi'_t((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)$$

$\phi \circ \varphi = id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes.
Für $\varphi \circ \phi \overset{!}{=} id_{M[U^{-1}]}$ wähle $(\frac{m}{u})_U \in M[U^{-1}]$ beliebig, für dieses gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi'_t((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)) = \varphi(\psi_t((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)) = \psi'_t((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)$$

Damit haben wir $T \simeq M[U^{-1}]$ gezeigt, definiere also ab sofort $M[U^{-1}]$ als den Kolimes von $\mathcal{C}$. □

## 2.3 Kähler-Differenzial von Kolimiten

**Differenzial des Kolimes von R-Algebren** *[vlg. Korolar 16.7 David Eisenbud 1994]*

**Proposition 12.**

1. *Sei $T = \otimes_{i \in \Lambda} S_i$ das Koprodukt der R-Algebren $S_i$.
Dann gilt:*

$$\Omega_{T/R} \simeq \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$$

2. *Seien $S_1, S_2$ R-Algebren und $\varphi, \varphi' : S_1 \longrightarrow S_2$ R-Algebra-Homomorphismen. Sei weiter $q : S_2 \longrightarrow T$ der Differenzkokern von $\varphi$,$\varphi'$. Dann ist folgende Sequenz rechtsexakt:*

$$T \otimes_{S_1} \Omega_{S_1/R} \xrightarrow{f} T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R} \xrightarrow{g} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

*mit:* $f : T \otimes \Omega_{S_1/R} \longrightarrow T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R} \,,\; t \otimes d_{S_1}(x_1) \longmapsto t \otimes d_{S_2}(\varphi(x_1) - \varphi(x_2))$
$g : T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R} \longrightarrow \Omega_{T/R} \,,\; t \otimes d_{S_2}(x_2) \longmapsto (d_T \circ q)(x_2)$

*Beweis.*
Für ***1.*** finde durch die Universelle Eigenschaft des Kähler-Differenzials Isomorphismen $\Omega_{T/R} \longleftrightarrow \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$.
Definiere das Differenzial $e : T \longrightarrow \bigoplus_{i \in \Lambda} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \,,\; (s_i \otimes ...) \longmapsto (1 \otimes d_{S_1}, ...)$ und erhalte dadurch

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "d_T"] \arrow[dr, "e"'] & \Omega_{T/R} \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & \bigoplus_{i \in \Lambda} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \end{tikzcd} \qquad \varphi : \Omega_{T/R} \longrightarrow \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}).$$

Definiere nun das Differenzial $k : S_i \hookrightarrow T \longrightarrow \Omega_{T/R}$ und erhalte dadurch:

$$\begin{tikzcd}
S_i \arrow[r, "d_{S_i}"] \arrow[dr, "k"'] & \Omega_{S_i/R} \arrow[r, "a"] \arrow[d, dashed, "\exists! k'"] & T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \arrow[dl, "\phi_i"] \\
& \Omega_{T/R} &
\end{tikzcd} \qquad \phi_i : \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \longrightarrow \Omega_{T/R}$$

$$\phi : \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \longrightarrow \Omega_{T/R}\, ,\ (..., t_i \otimes d_{S_i}(s_i), ...) \longmapsto \prod_{i \in \Lambda} t_i \cdot \phi_i(d_{S_i}(s_i))$$

Damit haben wir zwei zueinander inverse Funktionen $\varphi, \phi$ gefunden.
$\Rightarrow \Omega_{T/R} \simeq \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$

Für *2.* Wende satz 11 auf den Differenzkokern $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ *(vlg. proposition 8)* an und erhalte dadurch eine exakte Sequenz, welche ähnlich zu der gesuchten ist:

$$Q/Q^2 \xrightarrow{f'} T \otimes \Omega_{S_2/R} \xrightarrow{g} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

mit $f' : Q/Q^2 \longrightarrow T \otimes_{S_2} \Omega_{S/R}\, ,\ [s_2]_{Q^2} \longmapsto 1 \otimes d_{S_2}(s_2)$.
Somit gilt $im(f) = T \otimes_{S_2} d_{S_2}(Q) = im(f')$.
$\Rightarrow$ die gesuchte Sequenz ist exakt. $\square$

s

**Differenzial von Polynomalgebren 1** *[vlg. Proposition 16.1 David Eisenbud 1994]*

**Korrolar 13.** *Sei $S = R[x_1, ..., x_n]$ eine Polynomalgebra über $R$. Dann gilt:*

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i \in \{1,...,n\}} S\langle d_S(x_i)\rangle$$

*Wobei $S\langle d_S(x_i)\rangle$ das von $d_S(x_i)$ erzeugt Modul über $S$ ist.*

*Beweis.* Wie in **??** gezeigt, können wir $S$ als $\bigotimes_{i \in \{1,...,n\}} R[x_i]$ schreiben. In proposition 12 haben wir gezeigt, wie das Differenzial eines solchen Tensorproduktes aussieht:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i \in \{1,...,n\}} (S \otimes_{R[x_i]} \Omega_{R[x_i]/R})$$

Da $R[x_i]$ die aus dem Element $x_i$ erzeugte Algebra über $R$ ist, folgt *[vlg. BEMERKUNG ZU ENDLICH ERZEUGTEN ALGEBREN]*:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i \in \{1,...,n\}} (S \otimes_{R[x_i]} R[x_i]\langle d_{S[x_i]}(x_i)\rangle) \simeq \bigoplus_{i \in \{1,...,n\}} S\langle d_S(x_i)\rangle$$

Für die letzte Isomorphie nutze, dass wegen $R[x_i] \subseteq S$ zum Einen $d_{R[x_i]}$ als Einschränkung von $d_S$ gesehen werden kann und zum Anderen $S \otimes_{R[x_i]} R[x_i] \simeq S$ gilt. $\square$

**Differenzial von Polynomalgebren 2** *[vgl. Korrolar 16.6 David Eisenbud 1994]*

**Korrolar 14.** *Sei $S$ eine $R$-Algebra und $T := S[x_1, ..., x_n]$ eine Polynomalgebra über $S$. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1,...,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

*Beweis.* Betrachte $T$ als Tensorprodukt über R-Algebren und wende anschließend proposition 12 an:

$$\begin{aligned} T &\simeq S \otimes_R R[x_1, ..., x_n] \\ \Rightarrow \Omega_{T/R} &\simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus (T \otimes_{R[x_1,...,x_n]} \Omega_{R[x_1,...,x_n]/R}) \end{aligned}$$

Zuletzt wende den soeben gezeigten korrolar 13 an und nutze schließlich $R[x_1, ..., x_n] \subseteq T$ um das Tensorprodukt zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} & T \otimes_{R[x_1,...,x_n]} \Omega_{R[x_1,...,x_n]/R} \\ \simeq\ & T \otimes_{R[x_1,...,x_n]} \bigoplus_{i \in \{1,...,n\}} R[x_1, ..., x_n]\langle d_{R[x_i]}(x_i)\rangle \\ \simeq\ & \bigoplus_{i \in \{1,...,n\}} T\langle d_R(x_i)\rangle \end{aligned}$$

$\square$

**Differenzial der Lokalisierung** *[vlg. Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]*

**Theorem 15.** *Sei $S$ eine $R-$Algebra und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} &\Omega_{S[U^{-1}]/R} \simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}, \text{ Wobei:} \\ &d_{S[U^{-1}]}((\frac{1}{u})_U) \longmapsto -(\frac{1}{u^2})_U \otimes d_S(u) \end{aligned}$$

*Beweis.* Wir wollen THEOREM16.8 auf $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$ aus proposition 10 anwenden.
Zeige also zunächsten den einfacheren Fall $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ für ein beliebiges $t \in U$:

> Nutze hierfür die Isomorphe Darstellung $S[t^{-1}] \simeq S[x]/(tx - 1)$, sowie die Isomorphie $\Omega_{S[x]/R} \simeq S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x)$. aus korrolar 14

Daraus erhalten wir folgende Isomorphismen:

$$\alpha : S[t^{-1}] \longrightarrow S[x]/(tx-1)$$
$$\beta : S[x]/(tx-1) \longrightarrow S[t^{-1}]$$
$$\gamma : \Omega_{S[x]/R} \longrightarrow S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x)$$

Nutze diese nun, um $\Omega_{S[t^{-1}]/R}$ isomorph zu $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ umzuformen:

$$\begin{array}{cc}
\Omega_{S[t^{-1}]/R} & d_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t) \\
\downarrow D\alpha & \downarrow D\alpha \\
\Omega_{S[x]/R}/d_{S[x]}(tx-1) & [d_{S[x]}(sx)] = [xd_{S[x]}(s) + sd_{S[x]}(x)] \\
\downarrow \gamma & \downarrow \gamma \\
(S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}x)/((tx-1)d_{S[x]}(tx-1)) & [x \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \\
\downarrow \beta & \downarrow \beta \\
(S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus S[t^{-1}]d_{S[x]}(x)/d_{S[x]}(tx-1) =: M & [(\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \\
\downarrow f & \downarrow f \\
S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} & ((\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s)) - ((\frac{s}{t^2})_t \otimes d_S(t))
\end{array}$$

Die ersten drei Schritte ergeben sich aus den oben angegeben Isomorphismen. Für den letzten Schritt definiere:

$$f : M \longrightarrow S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}\, ,\ [(\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \longmapsto ((\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s)) - ((\frac{s}{t^2})_t \otimes d_S(t))$$

Damit $f$ ein Isomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ ein eindeutiges Repräsentantensystem von $M$ ist.
Sei dazu $[m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]$ ein beliebiger Erzeuger von $M$. Somit gilt:

$$d_{S[x]}(tx-1) = td_{S[x]}(x) + \beta(x)d_{S[x]}(s)$$
$$\Rightarrow [0, d_{S[x]}(x)] = [-(\frac{1}{t^2})_t d_S(t), 0]$$
$$\Rightarrow [m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)] = [m_1 - (\frac{s}{t^{n+2}})_t d_S(t), 0] = [f([m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]), 0]$$

f ist also wie vermutet ein Isomorphismus und aus obigen Umformungen folgt $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} = \Omega_{S/R}[t^{-1}]$.
Definiere für beliebige $t \in U$ folgenden Isomorphismus:

$$f \circ \beta \circ \gamma \circ D\alpha =: \delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}]\, ,\ d_{S[t^{-1}]}((\frac{1}{t})_t) \longmapsto -(\frac{d_S(t)}{t^2})_t$$

Zeige nun den Allgemeinen Fall $\Omega_{S[U^{-1}]/R} \simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$:
Wähle $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$ wie in proposition 10, sodass $\varinjlim \mathcal{B} = S[U^{-1}]$ gilt.

Mit THEOREM16.8  folgt somit:

$$\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \varinjlim \mathcal{F} \text{ mit:}$$

$$\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow (S[U^{-1}] - Module)\,,\ S[t^{-1}] \longmapsto S[U^{-1}] \otimes \Omega_{S[t^{-1}]/R}$$

$$(\varphi : S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}])$$

$$\longmapsto (1 \otimes D\varphi : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}))$$

Zur Vereinfachung der Morphismen in $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ definiere folgenden Isomorphismus:

$$g : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}$$

$$(\frac{s}{u})_{U} \otimes ((\frac{s'}{t})_t \otimes d_{S[tt'^{-1}]}(x)) \longmapsto (\frac{s}{u})_{U} \otimes \varphi((\frac{s'}{t})_t) d_{S[tt'^{-1}]}(x)$$

Als letzten Schritt wollen wir **??** anwenden. Nutze dazu $\delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}]$ um den zu $\mathcal{F}$ isomorphen Funktor $\mathcal{F}' := \delta \circ \mathcal{F}$ zu erhalten. Um ein genaueres Bild von $\mathcal{F}'$ zu erlangen, betrachte folgendes Kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
S[t^{-1}] \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dd, "\mathcal{F}"] & & S[tt'^{-1}] \arrow[d, "\mathcal{F}"] \\
& & S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) \arrow[d, "g"] \\
S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[t^{-1}]/R} \arrow[urr, "1\otimes D\varphi"] \arrow[d, "\delta_t"] & & S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R} \arrow[d, "\delta_{tt'}"] \\
S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] \arrow[rr, "1\otimes\varphi"] & & S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S/R}[tt'^{-1}]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\frac{s}{t})_t \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "d_{S[t^{-1}]}"] & (\frac{st'}{tt'})_{tt'} \arrow[d, "d_{S[tt'^{-1}]}"] \\
1 \otimes ((\frac{1}{t})_t d_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{1})_t) + (\frac{s}{1})_t d_{S[t^{-1}]}((\frac{1}{t})_t)) \arrow[r, "g\circ(1\otimes D\varphi)"] \arrow[d, "\delta_t"] & 1 \otimes ((\frac{1}{tt'})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{st'}{1})_{tt'}) + (\frac{st'}{1})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{1}{tt'})_{tt'})) \arrow[d, "\delta_{tt'}"] \\
1 \otimes ((\frac{d_S(s)}{t})_t - (\frac{s d_S(t)}{t^2})_t) \arrow[r, "1\otimes\varphi"] & 1 \otimes ((\frac{t' d_S(s)}{tt'})_{tt'} - (\frac{st' d_S(t)}{(tt')^2})_{tt'})(*)
\end{tikzcd}$$

Dass das Diagramm in dieser Form kommutiert, ergibt sich in fast allen Fällen direkt aus dem Einsetzen in die entsprechenden Homomorphismen. Der einzige

Fall, welcher nicht direkt klar ist, ist **(*)**. Rechne diesen also nochmal nach:

$$\begin{aligned}
\delta_{tt'}(1 \otimes ((\frac{1}{tt'})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{st'}{1})_{tt'}) + (\frac{st'}{1})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{1}{tt'})_{tt'})))\\
= 1 \otimes ((\frac{d_S(st')}{tt'})_{tt'} - (\frac{t' s d_S(tt')}{(tt')^2})_{tt'})\\
= 1 \otimes ((\frac{t' d_S(s')}{tt'})_{tt'} + (\frac{s d_S(t')}{tt'})_{tt'} - (\frac{tt' d_S(t')}{(tt')^2})_{tt'} - (\frac{t'^2 s d_S(t)}{(tt')^2})_{tt'})\\
= 1 \otimes ((\frac{t' d_S(s)}{tt'})_{tt'} - (\frac{t'^2 s d_S(t)}{(tt')^2})_{tt'})\\
= (1 \otimes \varphi)(1 \otimes ((\frac{d_S(s)}{t})_t - (\frac{s d_S(t)}{t^2})_t))
\end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{F}'$ zu $\mathcal{F}$ isomorph und für $\mathcal{C} := \mathcal{F}'(\mathcal{B})$ gilt $\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \varinjlim \mathcal{F}' = \varinjlim \mathcal{C}$ *[vlg. korrolar 3]*. Wobei die Form von $\mathcal{C}$ genau dem Fall aus **??** entspricht:

$$\begin{gathered}
\mathcal{C} = \{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] | t \in U\} \textit{ mit den Morphismen}\\
1 \otimes \varphi : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S/R}[tt'^{-1}]\\
(\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{d_S(x)}{t^n})_t \longmapsto (\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{t'^n d_S(x)}{(tt')^n})_{tt'}
\end{gathered}$$

Somit folgt $\varinjlim \mathcal{C} = \Omega_{S/R}[U^{-1}]$ und wir haben $\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \Omega_{S/R}[U^{-1}]$ gezeigt.

□

# Kapitel 3

# Körpererweiterungen

## 3.1 Einführung in transzendente Körpererweiterungen

Sei im folgenden $k$ ein Körper.
Wir haben in BEISPIEL  gesehen, dass das Kähler-Differenzial algebraischer Körpererweiterungen über $k$ der Null-Vektorraum über $k$ ist. Dies liegt daran, dass im Falle einer algebraischen Körpererweiterung $k(\alpha)/k$ ein irreduzibles Polynom $f(x) \in k[x]$ existiert, mit $f(\alpha) = 0$ und $k[\alpha] \simeq k[x]/(f(x))$.
Im Falle einer transzendenten Körpererweiterung $k(\beta)$ existiert kein solches Polynom in $k[x]$ und es gilt $k(\beta) \simeq k(x)$. In KORROLAR  haben wir gesehen, dass in diesem Falle $\Omega_{k(x)/k} \simeq$??? gilt. Dies motiviert dazu Transzendente Körpererweiterungen und deren Differenzial näher zu untersuchen. Dazu wird hier elementares Wissen über algebraische Körpererweiterungen vorausgesetzt *[eventuell nach zu lesen in Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009].*
In diesem Kapitel führen wir Transzendenzbasisen ein und untersuchen diese näher.

**Definition 1.** *[vlg. Anhang A1 David Eisenbud 1994sowie Kapitel 22 Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009]*
*Sei $L/k$ eine Körpererweiterung. Dann definieren wir:*

- *Eine endliche Teilmengen $\{l_1, \ldots, l_n\} \subseteq L$ heißt algebraisch unabhängig über k, falls gilt:*

$$\forall P(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n] : P(l_1, \ldots, l_n) \neq 0$$

- *Eine Teilmenge $B \subseteq L$ heißt transzendent über $k$, falls jede ihrer endlichen Teilmengen $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq B$ algebraisch unabhängig über $k$ ist.*

- *Eine Teilmenge $B \subseteq L$ ist eine Transzendenzbasis von $L/k$, falls sie transzendent über $k$ und die Körpererweiterung $L/k(B)$ algebraisch ist.*

- *Falls eine Transzendenzbasis von $B$ von $L/k$ existiert, sodass $k(B) = L$ gilt, so ist $L/k$ eine pur transzendente Körpererweiterung.*

### pur transzendente Erweiterung

**Korrolar 2.** *[Eigene Überlegung]*
*Sei $L/k$ eine pur transzendente Körpererweiterung mit Transzendenzbasis $B$. Dann gilt:*

$$L \simeq k(\{x_b\}_{b\in B})$$

*Insbesondere ist $\{x_b\}_{b\in B}$ eine Transzendenzbasis der Körpererweiterung der rationalen Funktionen $k(\{x_b\}_{b\in B})$ über $k$.*

*Beweis.* Betrachte folgenden Körpermorphismus und zeige, dass es sich dabei um einen Isomorphismus handelt:

$$\Phi : k(\{x_b\}_{b\in B}) \longrightarrow k(B)\,,\ \frac{P(x_{b_1},\dots,x_{b_n})}{Q(x_{b_1},\dots,x_{b_n})} \longmapsto \frac{P(b_1,\dots,b_n)}{Q(b_1,\dots b_n)}$$

Da $B$ als Transzendenzbasis insbesondere transzendent über $k$ ist, ist jede endliche Teilmenge von algebraisch unabhängig über $k$. Dies bedeutet:

$$\forall\{b_1,\dots,b_n\} \in B\,\forall P(x_{b_1},\dots,x_{b_n}) \in k[x_{b_1},\dots,x_{b_n}] : \\ P(x_{b_1},\dots,x_{b_n}) \Rightarrow P(b_1,\dots,b_n) \neq 0$$

Folglich ist $\Phi$ wohldefiniert und insbesondere injektiv.
Dass $\Phi$ surjektiv ist, folgt direkt aus der Definition von $L = k(B)$ als Quotientenkörper über $k[x]$.

Dass $\{x_b\}_{b\in B}$ Transzendenzbasis von $k(\{x_i\}_{i\in B})$ ist folgt direkt aus **??**. Denn jede endliche Teilmenge $\{x_{b_1},\dots x_{b_n}\} \subseteq \{x_b\}_{b\in B}$ ist transzendent, da $k[x_1,\dots,x_n]$ und $k[x_{b_1},\dots x_{b_n}]$ isomorph zueinander sind. Außerdem ist die triviale Körpererweiterung $k(x_{b_1},\dots x_{b_n})/k(x_{b_1},\dots x_{b_n})$ algebraisch. □

### Transzendenzbasis ist maximale transzendente Menge

**Lemma 3.** *[Lemma 22.1 Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009]*
*Sei $L/k$ ein Körpererweiterung und $B \subseteq L$ eine über $k$ transzendente Teilmenge. Dann gilt:*
*$B$ ist genau dann eine Transzendenzbasis von $L/k$, wenn $B$ bezüglich der Inklusion ein maximales Element der Menge aller über $k$ transzendenten Elemente aus $L$ ist.*

*Beweis.*

„$\Rightarrow$:“ Sei B eine Transzendenzbasis über $k$. Zeige, dass für ein beliebiges Element $a \in L \setminus B$ die Menge $B \cup \{a\} \subseteq L$ nicht transzendent über $k$ ist:

$$\text{Da die Körpererweiterung } L/k(B) \text{ algebraisch ist, existiert}$$
$$0 \neq P(x) \in k(B)[x] \text{ mit } P(a) = 0.$$

Aus der Definition von $k(B)$ geht hervor, dass $\{b_1, \dots b_n\} \subseteq B$ existiert, mit $P(x) \in k(\{b_1, \dots b_n\})[x]$.
Wir können ohne weitere Einschränkung annehmen, dass $P(x) \in k[\{b_1, \dots, b_n\}][x]$ gilt, denn falls dies nicht der Fall sein sollte, wähle $m \in \mathbb{N}$ groß genug, sodass $\left(P(x) \cdot (\prod_i^n b_i)^m\right) \in k[\{b_1, \dots, b_n\}]$ gilt.

Wähle nun $P'(x_1, \dots, x_n, x) \in k[x_1, \dots, x_n, x]$ mit $P'(b_1, \dots, b_n, x) = P(x)$.
$$\text{Dies erfüllt } P'(b_1, \dots, b_n, a) = 0.$$

Folglich ist $B \cup \{b_1, \dots, b_n, a\}$ algebraisch abhängig und insbesondere $B \cup \{a\}$ nicht transzendent über k.

„$\Leftarrow$:“ Sei $B$ bezüglich der Inklusion ein maximales Element der Menge aller über $k$ transzendenten Elemente aus $L$. Zeige für ein beliebiges Element $a \in L \setminus k(B)$, dass dieses algebraisch über $k(B)$ ist:

Nach Voraussetzung existiert eine endliche Teilmenge $\{b_1, \dots, b_n, a\} \subseteq B \cup \{a\}$, welche algebraisch abhängig über $k$ ist.

$$\text{Also existiert } P(x_1, \dots, x_{n+1}) \in k[x_1, \dots, x_{n+1}] \text{ mit } P(b_1, \dots, b_n, a) = 0.$$
$$\text{Für } P'(x) := P(b_1, \dots, b_n, x) \in k(B)[x] \text{ gilt somit } P'(a) = 0$$

Die Existenz eines solchen Polynoms $P'(x)$ zeigt uns, dass $a$ algebraisch über $k(B)$ ist.
Damit haben wir gezeigt, dass jedes $a \in L$ algebraisch über $k(B)$ ist.
Folglich ist $L/k(B)$ algebraisch und $B$ eine Transzendenzbasis von $L$ über $k$.

□

### Existenz von Transzendenzbasen

**Proposition 4.** *[Kapitel 22.1.3 Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009] Jede Körpererweiterung $L \subseteq k$ besitzt eine Transzendenzbasis $B \subseteq L$.*

*Beweis.* Verwende hierzu das Lemma von Zorn:
lemma 3 besagt, dass die Transzendenzbasen von $L/k$ gerade die maximalen Elemente der Menge aller über $k$ transzendenten Elemente aus $L$ sind.
Das Lemma von Zorn besagt, dass jede partiell geordenete Menge, in der jede total geordneten Untermenge (auch Kette genannt) eine obere Schranke besitzt, ein Maximales Element besitzt *[vlg. Kapitel A2.3 Christian Karpfinger, Kurt*

*Meyberg 2009].*
Sei also $\mathbb{B}$ eine Kette von Transzendenten Mengen.
Offensichtlich ist $\tilde{B} \coloneqq \bigcup_{B \in \mathbb{B}} \in L$ eine obere Schranke von $\mathbb{B}$. Zeige also noch, dass $\tilde{B}$ auch transzendent ist.
Annahme: $\tilde{B}$ ist nicht transzendent:
Also existiert $\{b_1, \dots, b_n\} \in \tilde{B}$ mit: $\{b_1, \dots, b_n\}$ ist algebraisch abhängig über $k$. Da $\mathbb{B}$ bezüglich der Inklusion total geordnet ist, existiert ein $B \in \mathbb{B}$ mit $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq B$. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass $B \in \mathbb{B}$ transzendent über $k$ ist.
Damit war unsere Annahme falsch und wir haben gezeigt, dass die Menge der über $k$ transzendente Teilmengen von $L$ mindestens ein maximales Element und damit $L/k$ eine Transzendenzbasis besitzt. □

*Transzendent ist pur transzendent plus algebraisch 1*

**Korrolar 5.** *[Eigene Überlegung] Für jede Körpererweiterung $L/k$ existiert ein Zwischenkörper $K \subseteq L$, sodass $K/k$ eine pur transzendente und $L/K$ eine algebraische Körpererweiterung ist.*

*Beweis.* Nach proposition 4 existiert eine Transzendenzbasis $B$ von $L/k$.
Wie in definition 1 beschrieben ist somit $k(B)/k$ pur transzendent und $L/k(B)$ algebraisch.
Wähle also $K \coloneqq k(B)$. □

**Transzendenzbasen sind immer gleich lang** *[Theorem A1.1 David Eisenbud 1994]*

**Proposition 6.** *Sei $L/k$ eine Körpererweiterung. Seinen weiter $A$, $B$ zwei Transzendenzbasen von $L$ über $k$. Dann gilt:*

$$|A| = |B|$$

*Wir nennen $|B|$ den Transzendenzgrad von $L/k$.*

*Beweis.* Im Fall von $|A| = |B| = \infty$ sind wir schon fertig, Sei also ohne Einschränkung $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ mit $min(m, n) = n < \infty$.
Wir wollen zunächst in $n$ Schritten die Elemente aus $B$ durch Elemente aus $A$ ersetzten und damit zeigen, dass $\{a_1, \dots, a_n\}$ eine Transzendenzbasis von $L$ über $k$ ist:

Für den $i$-ten Schritt definiere $A_i \coloneqq \{a_1, \dots, a_{i-1}\} \subseteq A$, $B_i \coloneqq \{b_i, \dots, b_n\} \subseteq B$ und gehe davon aus, dass $A_i \cup B_i$ eine Transzendenzbasis ist:
Nach lemma 3 ist $\{a_i\} \cup A_i \cup B_i = A_{i+1} \cup B_i$ nicht transzendent und somit

algebraisch abhängig.

$$\text{Also existiert } P \in k[x, x_1, \dots, x_n] \text{ mit } P(a_i, a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, \dots, b_n) = 0.$$
$$\text{Definiere } P'(x) := P(a_i, a_1, \dots, a_{i-1}, x, b_{i+1}, \dots, b_n) \in k(A_{i+1} \cup B_{i+1})[x].$$
$$\text{Dieses erfüllt } P'(b_i) = 0.$$

Da $A_i \subseteq A$ algebraisch unabhängig ist, gilt $P(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, \dots, x_n) \neq 0$. Nummeriere also gegebenenfalls $B$ vor der Bildung von $P'(x)$ so um, dass auch $P'(x) \neq 0$ gilt.
Die Existenz eines solchen $P'(x)$ zeigt uns, dass die Körpererweiterungen $L \subset k(A_{i+1} \cup B_i) = k(A_{i+1} \cup B_{i+1})(\{b_i\}) \subset k(A_{i+1} \cup B_{i+1})$ algebraisch sind und legt nahe, dass $A_{i+1} \cup B_{i+1}$ wieder eine Transzendenzbasis ist.
Um dies zu zeigen nehme zunächst an $A_{i+1} \cup B_{i+1}$ wäre algebraisch abhängig.

$$\text{Also existiert } Q \in k[x_1, \dots, x_n] \text{ mit } Q(a_1, \dots, a_i, b_{i+1}, \dots, b_n) = 0.$$
$$\text{Definiere } Q'(x) := Q(a_1, \dots, a_{i-1}, x, b_{i+1}, b_n) \in k(a_1, \dots, a_{i-1}, b_{i+1}, b_n)[x].$$
$$\text{Dieses erfüllt } Q'(a_i) = 0.$$

Da $(A_{i+1} \cup B_{i+1}) \setminus \{a_i\} \subseteq A_i \cup B_i$ algebraisch unabhängig ist gilt $Q'(x) \neq 0$.
Die Existenz eines solchen $Q'(x)$ zeigt uns, dass die Körpererweiterung $L \subset k(A_{i+1} \cup B_{i+1}) \subset k((A_{i+1} \cup B_{i+1}) \setminus \{a_i\}) = k((A_i \cup B_i) \setminus \{b_i\})$ algebraisch ist. Damit ist $(A_i \cup B_i) \setminus \{b_i\}$ eine Transzendenzbasis, was nach lemma 3 im Widerspruch dazu steht, dass $A_i \cup B_i$ eine Transzendenzbasis ist.
Folglich ist $A_{i+1} \cup B_{i+1}$ transzendent und somit eine Transzendenzbasis von $L$ über $k$.

Dieses Verfahren zeigt uns, dass $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$ eine Transzendenbasis von $L$ über $k$ ist. Nach lemma 3 muss somit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $m = n$ gelten. □

## Unterschiedliche Transzendenzbasen bsp

**Beispiel 7.** *[Eigene Überlegung] Sei dazu $L = k(y)$ der Körper der rationalen Funktionen über $k$. Betrachte zwei unterschiedliche Transzendenzbasen von $L/k$:*

1. *$B = \{y\}$ ist eine Transzendenzbasis von $L/k$ mit $\deg(L/k(B)) = 1$.*
2. *Für $n \in \mathbb{N}$ ist $B' = \{y^n\}$ eine Transzendenzbasis von $L/k$ mit $\deg(L/k(B)) = n$.*

$$f(x) = x^n - y^n \in k(y^n)[x] \textit{ ist Minnimalpolynom von } x \textit{ über } k(y^n).$$
$$\Rightarrow k(y)/k(y^n) \textit{ ist eine algebraische Körpererweiterung vom Grad } n$$

*Dies zeigt, dass die Form des Körpers $k(B)$ und insbesondere der Grad der Körpererweiterung $L/k(B)$ sehr von der Wahl der Transzendenzbasis $B$ abhängt.*

## 3.2 Kähler-Differenzial von Körpererweiterungen

**Definition der Differenzialbasis** *[vlg. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]*

**Definition 8.** *Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung. Dann nennen wir eine Teilmenge $\{b_i\}_{i\in\Lambda} \subseteq L$ eine Differenzialbasis von $L$ über $k$, falls $\{d_K(b_i)\}_{i\in\Lambda}$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{L/R}$ über $L$ ist.*

**Differential von rationalen Funktionen 1** *[vlg. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]*

**Beispiel 9.** *Sei $k$ ein Körper und $L = k(\{x_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in $n$ Varablen über $k$.*
*Dann gilt:*

$$\Omega_{L/k} \simeq L\langle d_{k[x_1,\dots x_n]}(x_i)\rangle$$

*Insbesondere ist $\{x_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ eine Differenzialbasis von $\Omega_{L/k}$.*

*Beweis.* Betrachte $L = k[x_1,\dots,x_n][k[x_1,\dots,x_n]^{-1}]$ als Lokalisierung um theorem 15 anwenden zu können. Anschließend forme noch $\Omega_{k[x_1,\dots,x_n]/k}$ mithilfe von korrolar 13 isomorph um:

$$\begin{aligned}\Omega_{L/k} &\simeq L \otimes \Omega_{k[x_1,\dots,x_n]/k}\\ &\simeq L \otimes \oplus_{i\in\{1,\dots,n\}} k[x_1,\dots,x_n]\langle d_{k[x_1,\dots x_n]}(x_i)\rangle\\ &\simeq L\langle d_{k[x_1,\dots x_n]}(x_i)\rangle\end{aligned}$$

Damit ist $\{d_L(x_i)\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{L/k}$. □

**Differential von rationalen Funktionen 2** *[Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]*

**Korrolar 10.** *Sei $k$ ein Körper und $L \supset k$ eine Körpererweiterung und $T = L(\{x_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in $n$ Varablen über $L$.*
*Dann gilt:*

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i\in\{1,\dots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

*Beweis.* Betrachten $T$ als Lokalisierung von $L[x_1,\dots,x_n]$ und gehen dann analog zu beispiel 9 vor:

$$\begin{aligned}\Omega_{T/k} &\simeq T \otimes_{L[x_1,\dots,x_n]} \Omega_{L[x_1,\dots,x_n]/k} \text{ (theorem 15)}\\ \Omega_{L[x_1,\dots,x_n]/R} &\simeq (L[x_1,\dots,x_n] \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i\in\{1,\dots,n\}} L[x_1,\dots,x_n]\langle d_{L[x_1,\dots,x_n]}(x_i)\rangle \text{ (korrolar 14)}\\ &\Rightarrow \Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i\in\{1,\dots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle\end{aligned}$$

□

**Cotangent Sequenz von Koerpern 1** *[Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]*

**Bemerkung 11.** *Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung und $T = L(x_1, \dots, x_n)$ der Körper der rationalen Funktionen in $n$ Variablen über $L$. Dann ist die COTANGENT SEQUENZ (satz 10) von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ eine kurze Exakte Sequenz:*

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

*Im Genauen ist $\varphi : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k}$ , $t \otimes d_L(l) \longmapsto t \cdot d_T(l)$ injektiv.*

*Beweis.* Die Injektivität von $\varphi$ folgt direkt aus der isomorphen Darstellung von $\Omega_{T/k}$, die wir uns in korrolar 10 erarbeitet haben.

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1,\dots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

Um sicher zu gehen definiere $\varphi' \simeq \varphi$ und durchlaufe die in korrolar 10 genutzten Isomorphismen noch einmal Schritt für Schritt:

$$\varphi' : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus \bigoplus\nolimits_{i \in \{1,\dots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

$$\begin{tikzcd}
T \otimes_L \Omega_{L/k} \arrow[d, hook] & t \otimes d_L(l) \arrow[d, mapsto] \\
\Omega_{T/k} \arrow[d, hook, two heads, "theorem\ 15"] & td_T(l) \arrow[d, mapsto] \\
T \otimes_S \Omega_{L[x_1,\dots,x_n]/k} \arrow[d, hook, two heads, "korrolar\ 14"] & t \otimes d_S(l) \arrow[d, mapsto] \\
T \otimes_S ((S \otimes_L \Omega_{L/k}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1,\dots,n\}} S\langle d_S(x_i)\rangle) \arrow[d, hook, two heads] & t \otimes (d_L(l), 0) \arrow[d, mapsto] \\
(T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1,\dots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle & (t \otimes d_L(l), 0)
\end{tikzcd}$$

Damit ist $\varphi$ eine injektive Einbettung von $T \otimes_L \Omega_{L/k}$ in $\Omega_{T/k}$. $\square$

**Aufbaulemma Koerperdifferenzial** *[vlg. Lemma 16.15 David Eisenbud 1994]*

**Lemma 12.** *Sei $L \subset T$ eine seperable und algebraische Körpererweiterung und $R \longrightarrow L$ ein Ringhomomorphismus. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/R} = T \otimes_L \Omega_{L/R}$$

*Insbesondere ist in diesem Fall die COTANGENT SEQUENZ (satz 10) von $R \to L \hookrightarrow T$ eine kurze Exakte Sequenz:*

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \longrightarrow \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

*Beweis.* Wähle $\alpha \in T$ mit $L[\alpha] = T$. Sei weiter f(x) das Minimalpolynom von $\alpha$. Betrachte dazu die conormale Sequenz von $\pi : L[x] \longrightarrow L[x]/(f) \simeq T$ *(satz 11)*:

$$(f)/(f^2) \xrightarrow{1 \otimes d_{L[x]}} T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

Wende nun Proposition 16.6 auf $\Omega_{L[x]/R}$ an und tensoriere mit $T$, somit gilt:

$$T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \simeq T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T\langle d_{L[x]}(x)\rangle$$

Zusammen mit der conormalen Sequenz bedeutet dies:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T\langle d_{L[x]}(x)\rangle)/(d_{L[x]}(f))$$

Wenn wir $d_{L[x]} : (f) \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T\langle d_{L[x](x)}\rangle$ wie in **??** betrachten , sehen wir:

$$d_{L[x]}((f)) = J \oplus (f'(\alpha)d_{L[x]}) = J \oplus T\langle d_{S[x]}(x)\rangle$$
,wobei $J \subseteq T \otimes_L \Omega_{L/R}$ ein Ideal ist.

Für die letzte Gleichheit nutze, dass $T \supset L$ seperabel und somit $f'(\alpha) \neq 0$ ist und nach obiger Wahl $T = L[\alpha]$ gilt.
Damit erhalten wir nun:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R})/J$$
$$\Rightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \hookrightarrow \Omega_{T/R} \textit{ ist surjektiv.}$$

Somit muss J = 0 gelten und es folgt $T \otimes_L \Omega_{L/R} \simeq \Omega_{T/R}$.
Damit haben wir insbesondere auch gezeigt, dass $T \otimes_L \Omega_{L/R} \to \Omega_{T/R}$ injektiv und somit die COTANGENT SEQUENZ von $R \to L \hookrightarrow T$ eine kurze exakte Sequenz ist. □

**Transzendenzbasis ist Differenzialbasis** *[vlg. Theorem 16.4 David Eisenbud 1994]*

**Theorem 13.** *Sei $T \supset k$ eine seperabel generierte Körpererweiterung und $B = \{b_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq T$. Dann ist $B$ genau dann eine Differenzialbasis von $T$ über $k$, falls eine der folgedenen Bedingungen erfüllt ist:*

***1.*** *char(k) = 0 und $B$ ist eine Transzendenzbasis von $T$ über $k$.*

***2.*** *char(k) = p und $B$ ist eine p-Basis von $T$ über $k$.*

*Beweis.*

**1.„⇐“:** Sei $B$ eine Transzendenzbasis von $T$ über $k$.
Damit ist die Körpererweiterung $L := k(B) \supset k$ algebraisch und seperabel.

Mit lemma 12 folgt:

$$\Omega_{T/k} = T \otimes_L \Omega_{L/k}$$

Betrachte $L = k[B][k[B] \setminus 0^{-1}]$ als Lokalisierung und wende theorem 15 auf $\Omega_{L/k}$ an, somit gilt:

$$\Omega_{L/k} = L \otimes_{k[B]} \Omega_{k[B]/k}$$

In korrolar 13 haben wir gesehen, dass $\Omega_{k[B]/k}$ ein freis Modul über $k[B]$ mit $\{b_i\}_{i\in\Lambda}$ als Basis ist. Dies liefert uns letztendlich die gewünschte Darstellung

$$\Omega_{T/k} = \bigoplus_{\{i\in\Lambda\}} T\langle d_T(b_i)\rangle.$$

**1.„$\Rightarrow$"**: Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.
Zeige zunächst, dass T algebraisch über $L := k(B)$ ist:

Die COTANGENT SEQUENZ *(satz 10)* von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ besagt $\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(S)\rangle$ und nach Vorraussetzung gilt $\Omega_{T/k} = T\langle d_T(B)\rangle$.

$$\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L)\rangle = \Omega_{T/k}/T\langle d_T(B)\rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$$

Da, wie wir in „$\Leftarrow_{1.}$"gezeigt haben, jede Transzendenzbasis $B'$ von $T$ über $L$ auch eine Differenzialbasis von $\Omega_{T/L} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Somit ist $T$ schon algebraisch über $L$.

Zeige noch, dass $B$ auch algebraisch unabhängig über $L$ ist:
Sei dazu $\Gamma$ eine minimale Teilmenge von $\Lambda$, für welche $T$ noch algebraisch über $k(\{b_i\}_{i\in\Gamma})$ ist. Für diese ist $\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ algebraisch unabhängig über K. Damit ist nach „$\Leftarrow_{1.}$"$\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von $T$ über $k$. Also muss schon $\Gamma = \Lambda$ gegolten haben und $B$ ist eine Transzendenzbasis von $T$ über $k$.

**2.„$\Leftarrow$"**: Sei B eine p-Basis von T über k.
Somit wird nach DEFINITION-PROPOSITION $T$ von $B$ als Algebra über $(k * T^p)$ und $\Omega_{T/(k*T^p)}$ von $d_T(B)$ als Vektorraum über $T$ *(PROPOSITION)* erzeugt. Zeige also $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p*k)}$:
Die Cotangent Sequenz *(satz 10)* von $K \hookrightarrow (k * T^p) \hookrightarrow T$ besagt:

$$\Omega_{T/(T^p*k)} \simeq \Omega_{T/k}/d_T(T^p * k)$$

Für beliege $t^p \in T^p$ gilt $d_T(t^p) = pt^{p-1}d_T(t) = 0$, da $char(T) = p$.

$$\Rightarrow d_T(T^p * k) = d_T(k(T^p)) = 0$$

Damit ist $d_T : T \longrightarrow \Omega_{T/k}$ auch $(T^p*k)$-linear und es gilt $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p*k)}$.

**2.„$\Rightarrow$“:** Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.
Zeige zunächst, dass $T$ von $B$ als Algebra über $k$ erzeugt wird:

Die COTANGENT SEQUENZ (satz 10) von $k \hookrightarrow L := k(B) \hookrightarrow T$ besagt $\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L)\rangle$ und nach Vorraussetzung gilt $\Omega_{T/k} = T\langle d_T(B)\rangle$.

$$\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L)\rangle = \Omega_{T/k}/T\langle d_T(B)\rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$$

Da, wie wir in „$\Leftarrow_{2.}$“gezeigt haben, jede p-Basis $B'$ von $T$ über $L$ auch eine Differenzialbasis von $\Omega_{T/L} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Somit wird $T$ schon von $B$ als Algebra über $k$ erzeugt.

Zeige noch, dass $B$ auch minimal als Erzeugendensystem von $T$ als Algebra über $k$ ist:
Sei dazu $\Gamma$ die minimale Teilmenge von $\Lambda$, für welche $T$ noch von $\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ als Algebra über $k$ erzeugt wird. Dann ist $\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ eine p-Basis von $T$ über $k$. Somit ist nach „$\Leftarrow_{2.}$“$\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von $T$ über $k$. Es muss also schon $\Gamma = \Lambda$ gegolten haben und $B$ ist eine p-Basis von $T$ über $k$.

$\square$

# Kapitel 4

# Aufgaben

- Aufgabe 6.7 aus David Eisenbud 1994 ist proposition 10.
- Aufgabe 16.6 a) aus David Eisenbud 1994 ist bemerkung 11.

**Cotangent Sequenz von Koerpern 3** *[Aufgabe 16.6 b) David Eisenbud 1994]*
Wir nennen eine Körpererweiterung $T \supset L$ pur inseperabel, falls gilt:

$$char(L) = p > 0 \ und \ \forall t \in T \, \exists l \in L \, \exists n \in \mathbb{N} : t^{p^n} = l$$

**Proposition 1.** *Seien $T \supset L \supset k$ endliche Körpererweiterungen. Betrachte die COTANGENT SEQUENZ (satz 10) von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$:*

$$T \otimes_L \Omega_{L/k} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

*Sei weiter die Körpererweiterung $T \supset L$ algebraisch und pur inseperabel und existiere ein $\alpha \in T$ mit $L(\alpha) = T$ und $Mipo(\alpha) = f(x) = x^p - a$.*
*Dann gilt:*

$$\varphi \ ist \ injektiv \Leftrightarrow d_L(a) = 0$$

*Beweis.* Lege zunächst $T = L[x]/(f(x))$ fest und betrachte den kanonischen Epimorphismus $\pi : L[x] \longrightarrow T$, sowie die dazugehörige Konormale Sequenz *(satz 11)*. Forme diese leicht um **(2)**, sodass wir sie mit der COTANGENT SEQUENZ von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ **(3)** vergleichen können:

$$(f(x))/(f(x)^2) \xrightarrow{1 \otimes d_{L[x]}} T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/k} \longrightarrow 0 \tag{1}$$

$$T\langle d_{L[x]}(f(x))\rangle \longleftrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/k} \oplus T\langle d_{L[x]}(x)\rangle \xrightarrow{\widetilde{D\pi}} \Omega_{T/k} \longrightarrow 0 \tag{2}$$

$$T \otimes_L \Omega_{L/k} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0 \tag{3}$$

Zeige, dass **(2)** auch wirkliche exakt ist:

$$\begin{gathered}(1 \otimes d_{L[x]})(f(x)) = T \otimes_{L[x]} L[x]\langle d_{L[x]}(f(x))\rangle \simeq T\langle d_{L[x]}(f(x))\rangle \\ \Rightarrow \text{ Ersetze } 1 \otimes d_{L[x]} : (f(x))/(f(x)^2) \longrightarrow T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k} \\ \text{durch } T\langle d_{L[x]}(f(x))\rangle \hookrightarrow T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k}.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\text{nach korrolar 14 gilt } \Omega_{L[x]/k} \simeq L[x] \otimes_L \Omega_{L/k} \oplus L[x]\langle d_{L[x]}(x)\rangle \\ \text{und tensorieren mit } T \text{ ergibt } T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k} \simeq T \otimes_L \Omega_{L/k} \oplus T\langle d_{L[x]}(x)\rangle.\end{gathered}$$

„$\Rightarrow$ “: Wenn wir nun unsere zwei exakten Sequenzen betrachten sehen wir, dass $\varphi$ eine Einschränkung von $D\pi$ auf einen kleineren Definitionsbereich ist. Zeige also, dass $D\pi$ injektiv ist:

$$\begin{gathered}\text{Nach Vorraussetung gilt } d_L(a) = 0 \text{ also auch } d_{L[x]}(a) = 0 \\ \Rightarrow d_{L[x]}(f) = d_{L[x]}(x^p) - d_{L[x]}(a) = px^{p-1}d_{L[x]}(x) - d_{L[x]}(a) = 0 - 0 \\ \Rightarrow T\langle d_{L[x]}(f(x))\rangle = 0\end{gathered}$$

Bezogen auf die exakte Sequenz **(2)** bedeutet dies, dass $D\pi$ injektiv ist.

„$\Leftarrow$ “: Da $\varphi$ nach Vorrausetzung injektiv ist, genügt es $\varphi 1 \otimes a = 0$ zu zeigen:

$$\begin{gathered}\text{In } T \text{ gilt } [f(x)]_T = 0 \\ \Rightarrow 0 = d_T([f(x)]_T) = d_T([x^p]_T) - d_T([a]_T) = d_T([a]_T) \\ \Rightarrow \varphi(1 \otimes d_L(a)) = d_T([a]_T) = 0\end{gathered}$$

Da $\varphi$ nach Voraussetzung injektiv ist, gilt $1 \otimes d_{L[x]}(a) = 0$ und somit auch $d_L(a) = 0$.

□

**Cotangent Sequenz von Koerpern 3 Beispiel** *[Aufgabe 16.6 b) David Eisenbud 1994]*

**Beispiel 2.** *Betrachte das in proposition 1 gegebenen Szenario und wähle:*

$$k = \mathbb{F}_3,\ L = k[y]/(y^2+1),\ T = L(\sqrt[3]{y}) \simeq L[x]/(x^3 - y).$$

*Hierbei gilt $d_L(x) \neq 0$ und somit ist $\varphi : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{L/k}$ nicht injektiv.*

**seperabel generierte Koerpererweiterung mit DifR(T)(R) ist 0** *[Aufgabe 16.10 David Eisenbud 1994(steht im Bezug zu Korrolar 16.17)]*

**Beispiel 3.** *Sei $k$ ein Körper mit $char(k) = p > 0$ und sei weiter $K(x)$ der*

*Raum der Rationalen Funktionen über k.*

$$\textit{Definiere: } L := k(x^{1/p^\infty}) = \varinjlim\{k(x^{1/p^n})|n \in \mathbb{N}\}$$

*Dann gilt :* $\Omega_{L/k} = 0$
*Prüfe noch, ob $L \supset k$ eine seperabel generierte Körpererweiterung ist.*

*Beweis.* Es gilt:

$$d_L(x^{1/p^n}) = d_L\left(\prod_{i\in\{1,\dots,p\}} x^{1/p^{n+1}}\right) = p\cdot\left(\prod_{i\in\{1,\dots,p-1\}} x^{1/p^{n+1}}\right)\cdot d_L(x^{1/p^{n+1}}) = 0$$

Nute noch proposition 12 und beispiel 9 um zu folgern, dass $\Omega_{L/k}$ von $\{d_L(x^{1/p^n})|n \in \mathbb{N}\}$ erzeugt wird. □

**Differenzial algebraischer Algebren ist Null** *[Aufgabe 16.11 David Eisenbud 1994]*

**Beispiel 4.** *Sei $K$ ein Körper mit $char(K) = 0$ und $T$ eine noethersche $K$-Algebra. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/K} = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$T = \prod_{i\in\{1,\dots,n\}} K(\alpha_i) \textit{ ist ein endliches Produkt algebraischer Körpererweiterungen.}$$

*Beweis.*

„$\Rightarrow$ “: Da $T$ noethersch ist, ist $T$ als Algebra über $K$ endlich erzeugt und es gilt:

$$T = \prod_{i\in\{1,\dots,n\}} K[\alpha_i]/I_i$$

Wobei $I_i \subseteq K[\alpha_i]$ ein Ideal ist.($\forall i \in \{1,\dots,n\}$)

Zur Vereinfachung definiere $T' := \prod_{i\in\{1,\dots,n\}} K[\alpha_i]$. Betrachte nun den Differentialraum von T genauer:

$$\Omega_{T/K} = d_{T'}\left(\prod_{i\in\{1,\dots,n\}} K[\alpha_i]/I_i\right)$$
$$= \prod_{i\in\{1,\dots,n\}} d_{K[\alpha]}\left(K[\alpha_i]/I_i\right) \ \textit{(proposition 9)}$$

Betrachte also jeweils für $i \in \{1,\dots,n\}$ die $K$-Algebra $K[\alpha_i]/I_i$.
Sei $I_i \neq K[\alpha_i]$, da andernfalls $K[\alpha_i]/I_i = 0$ und somit $\alpha_i$ kein Erzeuger

vor T wäre.
Unterscheide nun zwischen den zwei möglichen Fällen $\underline{I_i = 0}$ und $\underline{I_i \neq 0}$:

**1.** $\underline{I_i = 0}$: Da $\Omega_{T/K} = 0$ gilt, muss $K[\alpha_i] = 0$ gelten.
Annhame: $\alpha_i$ ist transzendent über K.

$$\text{Dies bedeutet } K[\alpha_i] \simeq K[x]$$
$$\Rightarrow \Omega_{K[\alpha_i]/K} \simeq K[x]\langle d_{K[x]}(x)\rangle \neq 0 \textit{ (korrolar 13)}$$

Dies steht allerdings im Widerspruch zu $K[\alpha_i] = 0$. Folglich war unsere Annahme falsch und $\alpha_i$ ist algebraisch über K.
Folglich ist $K[\alpha_i] = K(\alpha_i)$ eine algebraische Körpererweiterung.

**2.** $\underline{I_i \neq 0}$: Zunächst sehen wir, dass $\alpha_i$ transzendent sein muss, da sonst $K[\alpha_i] = K(\alpha_i)$ ein Körper wäre und somit $I_i = K(\alpha_i)$ gelten würde.
Also ist $\alpha_i$ transzendent und es gilt:

$$K[\alpha_i] \simeq K[x] \text{ und } I \simeq (f(x)) \text{ mit } f(x) \in K[x]$$
$$\Rightarrow K[\alpha_i] \simeq K[\beta_1, \dots \beta_n] = K(\beta_1, \dots \beta_n), \text{ wobei } \beta_1, \dots \beta_n \text{ die Nullstellen von f sind.}$$

Somit haben wir gezeigt, dass auch in diesem Fall $K[\alpha_i]/I_i$ eine Algebraische Körpererweiterung ist.

„$\Leftarrow$ “: proposition 9 besagt, dass das direkte Produkt unter Bildung des Differenzials erhalten bleibt, also gilt in diesem Fall:

$$\Omega_{T/K} = \prod_{i \in \{1,\dots,n\}} \Omega_{K(\alpha_i)/K}$$

Nach Voraussetzung sind alle Körpererweiterungen $K\alpha_i \supset K$ algebraisch. Wir haben schon in BSP gesehen, dass somit deren Differentiale gleich 0 sind. Folglich ist auch das direkte Produkt der einzelnen Differenziale und somit $\Omega_{T/K}$ gleich 0.

□