

Kapitel 1

Kolimes

1.1 Einführung in den Kolimes

Definition des Kolimes

Definition 1. [vgl. Anhang A6 David Eisenbud 1994] Sei \mathcal{A} eine Kategorie.

- Ein Diagramm über \mathcal{A} ist eine Kategorie \mathcal{B} zusammen mit einem Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$.
- Sei $\mathcal{F} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ein Diagramm und $A \in \mathcal{A}$ ein Objekt. Dann definieren wir einen Morphismus $\psi : \mathcal{F} \rightarrow A$ als eine Menge von Funktionen $\{\psi_B \in \text{Hom}(\mathcal{F}(B), A) \mid B \in \mathcal{B}\}$, wobei für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $\varphi \in \text{Hom}(B_1, B_2)$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(B_1) & & \\ \downarrow \mathcal{F}(\varphi) & \searrow \psi_{B_1} & \\ & & C \\ \uparrow \psi_{B_2} & \nearrow & \\ \mathcal{F}(B_2) & & \end{array}$$

- Der Kolimes $\varinjlim \mathcal{F}$ eines Diagramms $\mathcal{F} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ist ein Paar aus einem Objekt $A \in \mathcal{A}$ zusammen mit einem Morphismus $\psi : \mathcal{F} \rightarrow A$, welche folgende universelle Eigenschaft erfüllen:

Für Objekte $A' \in \mathcal{A}$ und alle Morphismen $\psi' : \mathcal{F} \rightarrow A'$ existiert genau eine Funktion $\varphi \in \text{Hom}(A, A')$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \psi' \swarrow & & \searrow \psi \\ A' & \xleftarrow{\exists! \varphi} & A \end{array}$$

Eindeutigkeit des Kolimes [vgl. A6 David Eisenbud 1994]

Lemma 2. Seien \mathcal{B}, \mathcal{A} zwei Kategorien und $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor. Dann ist im Falle der Existenz $\varinjlim \mathcal{F}$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien $A_1 \in \mathcal{A}, (\psi_1 : \mathcal{F} \longrightarrow A_1)$ und $A_2 \in \mathcal{A}, (\psi_2 : \mathcal{F} \longrightarrow A_2)$ beide gleich $\varinjlim \mathcal{F}$.

Erhalte durch die universelle Eigenschaft des Kolimes die eindeutig bestimmten Funktionen $\varphi_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$ und $\varphi_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_2, A_1)$, für welche die folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \psi_2 \swarrow & & \searrow \psi_1 \\ A_2 & \xleftarrow{\exists! \varphi_1} & A_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \psi_1 \swarrow & & \searrow \psi_2 \\ A_1 & \xleftarrow{\exists! \varphi_2} & A_2 \end{array}$$

Wende nun die Universelle Eigenschaft von ψ_1 auf ψ_1 selbst an und erhalte $id_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1$. Analog erhalte auch $id_{A_2} = \varphi_1 \circ \varphi_2$.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \psi_1 \swarrow & & \searrow \psi_1 \\ A_1 & \xleftarrow{\exists! id_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1} & A_1 \end{array}$$

Somit existiert genau eine Isomorphie $\varphi_1 : A_1 \longrightarrow A_2$. □

Vereinfachung des Kolimes

Korrolar 3. [Eigene Überlegung]

Sei \mathcal{A} eine Kategorie und $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$ ein Diagramm. Betrachte die Unterkategorie $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$ zusammen mit dem Inklusionsfunktor $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}$ ebenfalls als Diagramm. Dann gilt:

$$\begin{array}{c} \varinjlim \mathcal{F} \text{ existiert genau dann, wenn } \varinjlim (\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \text{ existiert.} \\ \text{Mit } \varinjlim \mathcal{F} = \varinjlim (\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}). \end{array}$$

Beweis. Dies folgt direkt aus unserer Definition von Morphismen:

In definition 1 haben wir einen Morphismus $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$ als eine Menge von Funktionen $\psi_{\mathcal{B}} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\mathcal{B}), A)$ definiert. Dies zeigt, dass es keinen Unterschied macht, ob wir von Morphismen $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$ oder von Morphismen $\psi : (\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$ reden.

Wenn wir nun die universelle Eigenschaft des Kolimes genauer betrachten, sehen wir, dass diese sich nur auf Morphismen $\mathcal{F} \longrightarrow A$ bzw. $(\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$ und auf die Kategorie \mathcal{A} bezieht. Es macht also keinen Unterschied, ob wir vom Kolimes des Diagramms $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$ oder vom Kolimes des Diagramms $(\mathcal{F}(\mathcal{B}), \mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A})$ sprechen. □

Es genügt also im Fall von Kolimenn Diagramme $(\mathcal{B}, \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$ mit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ zu betrachten. Zur Vereinfachung schreibe für $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ in Zukunft $\varinjlim \mathcal{B}$ anstatt von $\varinjlim (\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$.

DifferenzkernUndKoproduktDef

Definition 4. [vgl. A6 David Eisenbud 1994]

Sei \mathcal{A} eine Kategorie.

- Das Koprodukt von $\{B_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq \mathcal{A}$ wird durch $\coprod_{i \in \Lambda} \{B_i\} := \varinjlim \mathcal{B}$ definiert, wobei $\{B_i\}_{i \in \Lambda}$ die Objekte und die Identitätsabbildungen $\{id_{B_i} : B_i \rightarrow B_i\}_{i \in \Lambda}$ die einzigen Morphismen von \mathcal{B} sind.
- Der Differenzkokern von $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$ wird durch $\varinjlim \mathcal{C}$ definiert, wobei $\{C_1, C_2\}$ die Objekte und $\{f, g\}$ zusammen mit den Identitätsabbildungen die Morphismen von \mathcal{C} sind.

Kolimes durch Koprodukt und Differenzkokern

Theorem 5. [Proposition A6.1 David Eisenbud 1994]

Sei \mathcal{A} eine Kategorie, in der Koprodukte beliebiger Mengen von Objekten und Differenzkokerne von je zwei Morphismen existieren. Dann existiert für jedes Diagramm $\mathcal{F} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ dessen Kolimes $\varinjlim \mathcal{F}$.

Beweis. In korollar 3 haben wir gesehen, dass es genügt den Fall $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ zu betrachten. Konstruiere also für eine beliebige Unterkategorie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ deren Kolimes $\varinjlim(\mathcal{F})$:

Bezeichne für jeden Morphismus $\gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{C}}$ dessen Definitionsbereich mit $B_\gamma \in \mathcal{B}$. Definiere nun:

- $C_1 := \coprod_{\gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}} B_\gamma$ ist das Koprodukt aller Objekte von \mathcal{B} , in dem jedes Objekt so oft vorkommt, wie es Definitionsbereich eines $\gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}$ ist. Sei $\psi^1 : \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\} \rightarrow C_1$ der dazugehörige Morphismus.
- $C_2 := \coprod_{B \in \text{Obj}_{\mathcal{B}}} B$ ist das Koprodukt aller Objekte von \mathcal{B} . Sei $\psi^2 : \{B | B \in \text{Obj}_{\mathcal{B}}\} \rightarrow C_2$ der dazugehörige Morphismus.

Konstruiere nun $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(C_1, C_2)$ so, dass der Differenzkokern von f und g gleich dem Kolimes von \mathcal{B} ist:

Für f betrachte den Morphismus $\Phi : \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\} \rightarrow C_2$,
mit $\Phi_{B_\gamma} = \psi_{\gamma(B_\gamma)}^2 \circ \gamma$ für $B_\gamma \in \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\}$.

Wende die universelle Eigenschaft von $C_1 = \varinjlim \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\}$ an:

$$\begin{array}{ccc} & \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\} & \\ \psi^1 \swarrow & & \searrow \psi^1 \\ C_2 & \xleftarrow{\quad \exists! f \quad} & C_1 \end{array}$$

Wähle $f \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(C_1, C_2)$ als die eindeutige Funktion, für die $\Phi = \psi^1 \circ f$ gilt.

Für g betrachte den Morphismus $\Phi' : \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\} \rightarrow C_2$,
mit $\Phi'_{B_\gamma} = \psi_{\gamma(B_\gamma)}^2$ für $B_\gamma \in \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\}$.

Wähle analog zu f mithilfe der universellen Eigenschaft des Kolimes $g \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(C_1, C_2)$ als die eindeutige Funktion, für die $\Phi' = \psi^1 \circ g$ gilt.

Sei $C \in \text{Obj}_{\mathcal{B}}$ zusammen mit dem Morphismus ζ der Differenzkokern von f, g .
 Zeige Abschließend, dass $(C, \psi : \mathcal{B} \longrightarrow \zeta \circ \psi^2 \text{ Der Kolimes von } \mathcal{B})$ ist:

□

NeuDifferenzenkokerndef

Bemerkung 6. [Wikipedia]

Sei \mathcal{A} eine Kategorie. Sei weiter $C_1, C_2 \in \text{Obj}_{\mathcal{A}}$ und $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$.
 Im Falle der Existenz ist der Differenzenkoker von f, g nach definition 4 durch ein Objekt $C \in \text{Obj}_{\mathcal{A}}$ und einen Morphismus $\psi = \{\psi_{C_1}, \psi_{C_2}\}$ gegeben, wobei gilt:

$$\psi_{C_2} = f \circ \psi_1 = g \circ \psi_2$$

Wir sehen, dass ψ eindeutig durch $q := \psi_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$ gegeben ist. Der Differenzenkoker ist also eindeutig durch $(C \in \text{obj}_{\mathcal{A}}, q \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_1, C_2))$ gegeben, wobei q folgenden Eigenschaften besitzt:

Es gilt $f \circ q = g \circ q$ und
 für alle $C \in \text{Obj}_{\mathcal{A}}$ und $q' \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}$ mit $f \circ q' = g \circ q'$ existiert genau ein
 $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}$, mit $q \circ \varphi = q'$:

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & \xrightarrow{f, g} & C_2 & \xrightarrow{q} & C \\ & & & \searrow q' & \downarrow \exists! \varphi \\ & & & & C' \end{array}$$

Wenn wir fortan vom Differenzkokern sprechen meinen wir damit das Paar (C, q) .

Tensorprodukt des Differenzenkokerns [Eigene Bemerkung]

Bemerkung 7. Seien $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(S_1, S_2)$ R -Algebra-Homomorphismen, so können wir für den Differenzenkoker $q : S_2 \longrightarrow T$ für ein beliebiges S_1 -Modul das Tensorprodukt $T \otimes_{C_1} M$ definieren.

$$\begin{aligned} &\text{für } s_1 \in S_1 \text{ und } t \otimes m \in T \otimes_{C_1} M \text{ gilt:} \\ s_1 \cdot (t \otimes m) &= ((q \circ f)(s_1)) \cdot t \otimes m = ((q \circ g)) \cdot (s_1) t \otimes m \end{aligned}$$

R-Algebra-Kolimiten [vgl. Proposition A6.7 David Eisenbud 1994]

Proposition 8. in der Kategorie der R -Algebren existieren Koprodukte und Differenzkokerne, wobei:

1. Das Koprodukt einer endlichen Familie von R -Algebren $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$ entspricht deren Tensorprodukt $\bigotimes_{i \in \Lambda} S_i$.

2. Der Differenzkokern zweier R -Algebra-Homomorphismen $f, g : S_1 \longrightarrow S_2$ entspricht dem Homomorphismus $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$, $y \mapsto [y]$, wobei $Q := \{f(x) - g(x) \mid x \in S_2\}$ das Bild der Differenz von f und g ist.

Beweis. Zu 1.:

Sei \mathcal{B} die Unterkategorie der R -Algebren, welche $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$ zusammen mit den Identitätsabbildungen enthält. Wir wollen die universellen Eigenschaften des Tensorproduktes und des Kähler-Differenzials nutzen, um einen Isomorphismus zwischen $\varinjlim \mathcal{B}$ und $\bigotimes_{i \in \Lambda} B_i$ zu finden.

Es sind der Morphismus $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \varinjlim \mathcal{B}$ und die bilineare Abbildung $g : \bigoplus_i S_i \longrightarrow \bigotimes_i S_i$ gegeben.

Konstruiere den Morphismus $\psi' : \mathcal{B} \longrightarrow \bigotimes_i S_i$ durch $\psi'_i : S_i \longrightarrow \bigotimes_i S_i$, $s_i \mapsto g(1, \dots, 1, s_i, 1, \dots, 1)$ für $i \in \Lambda$ und die bilineare Abbildung $f : \bigoplus_i S_i \longrightarrow \varinjlim \mathcal{B}$, $s \mapsto \prod_i \psi_i(s_i)$.

Somit liefern uns die universellen Eigenschaften folgende zwei R -Algebra-Homomorphismen:

$$\begin{aligned} \varphi : \varinjlim \mathcal{B} &\longrightarrow \bigotimes_i S_i \\ \phi : \bigotimes_i S_i &\longrightarrow \varinjlim \mathcal{B}. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{B} & \\ \psi' \swarrow & & \searrow \psi \\ \bigotimes_i S_i & \xleftarrow{\exists! \varphi} & \varinjlim \mathcal{B} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \bigoplus_i S_i & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ \varinjlim \mathcal{B} & \xleftarrow{\exists! \phi} & \bigotimes_i S_i \end{array}$$

Die Eindeutigkeit der universellen Eigenschaften liefert uns, dass φ und ϕ zueinander Inverse sind und somit haben wir unsere gesuchten Isomorphismen zwischen $\varinjlim \mathcal{B}$ und $\bigotimes_i S_i$ gefunden.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{B} & \\ \psi \swarrow & & \searrow \psi \\ \varinjlim \mathcal{B} & \xleftarrow{\exists! id_{\varinjlim \mathcal{B}} = \phi \circ \varphi} & \varinjlim \mathcal{F} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \bigoplus_i S_i & \\ g \swarrow & & \searrow g \\ \bigotimes_i S_i & \xleftarrow{\exists! id_{\bigotimes_i S_i} = \varphi \circ \phi} & \bigotimes_i S_i \end{array}$$

Zu 2.:

Zeige, dass $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ die in bemerkung 6 eingeführten Eigenschaften des Differenzkokern's besitzt.

$$q \circ f = q \circ g \text{ gilt, da } \ker(q) = Q = \{f(x) - g(x) \mid x \in C_2\}.$$

Sei nun eine Funktion $q' \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(S_2, T')$ mit $q' \circ f = q' \circ g$ gegeben.

Somit gilt $q' \circ (f - g) = 0$, wodurch Q ein Untermodul von $Q' := \ker(q')$ ist.

Mit dem Isomorphiesatz für R -Algebren erhalten wir:

$$S_2/Q' \simeq (S_2/Q)/(Q'/Q).$$

Somit ist $q' : S_2 \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q)$, $y \longmapsto [y]'$ eine isomorphe Darstellung von $q' : S_2 \longrightarrow T'$.

$$\Rightarrow \exists! \varphi : S_2/Q \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q), [y] \longmapsto [y]' \text{ mit } (\varphi \circ q) = q'.$$

Also ist $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Differenzkokern von f und g . \square

Darstellung der Polynomialgebra als Tensorprodukt *[Eigene Überlegung]*

Bemerkung 9. Die Polynomialgebra $R[x_1, \dots, x_d]$ über R lässt sich wie folgt als Tensorprodukt darstellen:

$$R[x_1, \dots, x_n] = \bigotimes_{i \in \{1, \dots, n\}} R[x_i]$$

Genauer gilt für zwei Polynomialgebren $A = R[x_1, \dots, x_{n_A}]$, $B = R[y_1, \dots, y_{n_B}]$ über R :

$$A \otimes_R B = R[x_1, \dots, x_{n_A}, y_1, \dots, y_{n_B}]$$

Skizziere den Beweis.

Beweis. Zeige, dass für $g : A \oplus B \longrightarrow R[x_1, \dots, x_{n_A}, y_1, \dots, y_{n_B}]$, $(a, b) \longmapsto a \cdot b$ die Universelle Eigenschaft des Tensorproduktes gilt:

$$\begin{array}{ccc} A \oplus B & \xrightarrow{g} & R[x_1, \dots, x_{n_A}, y_1, \dots, y_{n_B}] \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \varphi \\ & & M \end{array}$$

Es ist leicht nachzurechnen, dass es sich bei φ um folgende Funktion handeln muss:

$$\varphi : R[x_1, \dots, x_{n_A}, y_1, \dots, y_{n_B}] \longrightarrow M, (x_i \cdot y_j) \longmapsto f(x_i, 1) \cdot f(1, y_j)$$

\square

R-Modul-Kolimiten *[Proposition A6.2 David Eisenbud 1994]*

Proposition 10. In Der Kategorie der R -Module existieren Koproducte und Differenzkokerne, wobei:

1. das Koproduct $\lim_{\longrightarrow} \mathcal{B}$ von R -Modulen $M_i \in (R - \text{Module})$ entspricht der direkten Summe $\sum_i M_i$.
2. der Differenzkokern zweier Homomorphismen $f, g : M_1 \longrightarrow M_2$ entspricht dem Kokern $M_2/\text{im}(f - g)$ der Differenzenabbildung.

Beweis. für **1.** Sei $\phi : \{M_i\} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein beliebiger Morphismus. Zeige:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{B} & \\ \psi_i \swarrow & & \searrow \psi_i \\ M' & \xleftarrow{\exists! \varphi} & \bigoplus_i M_i \end{array}$$

Für ein beliebiges i existiert genau ein $\varphi_i : M_i \oplus 0 \longrightarrow M'$, $(0, \dots, 0, m_i, 0, \dots, 0 \mapsto \psi'_i(m_i)$
mit $\psi'_i = \psi_i \circ \varphi_i$
 $\Rightarrow \exists! \varphi : \bigoplus_i M_i \longrightarrow M'$, $(m_1, \dots, m_n) \mapsto \sum_i \psi_i(m_i)$

2. ist Analog zu proposition 8

□

Die in proposition 10 gezeigten Darstellungen gelten mit kurzen Überlegungen auch für S-Module, wobei S eine R-Algebra ist.

1.2 Darstellung von Lokalisierung als Kolimes

Lokalisierung von Algebren als Kolimes [vgl. Aufgabe A6.7 David Eisenbud 1994]

Lemma 11. Sei S eine R -Algebra und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$S[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{B}$$

Wobei \mathcal{B} aus den Objekten $\{S[t^{-1}] | t \in U\}$ und den Morphismen $S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}], (\frac{s}{t})_t \mapsto (\frac{st'^n}{(tt')^n})_{(tt')}, \forall t, t' \in U$ besteht.

Beweis. Sei $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow A$ der Kolimes von \mathcal{B} . Zeige $S[U^{-1}] \simeq A$, definiere dazu:

$$\begin{aligned} \psi' : \mathcal{B} &\longrightarrow S[U^{-1}] \\ \psi'_{S[t^{-1}]} : S[t^{-1}] &\longrightarrow S[t^{-1}], (\frac{s}{t})_t \mapsto (\frac{s}{t^n})_U \end{aligned}$$

ψ' ist ein Morphismus, da für beliebige $t, t' \in U$ und $s \in S$ gilt:

$$(\frac{s}{t^n})_U = (\frac{st'^n}{(tt')^n})_U$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir den eindeutigen Homomorphismus $\varphi : A \longrightarrow S[U^{-1}]$.

$$\begin{array}{ccc}
& \mathcal{B} & \\
\psi' \swarrow & & \searrow \psi \\
S[U^{-1}] & \xleftarrow{\exists! \varphi} & A
\end{array}$$

Für $\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow A$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen.

Zunächst können wir jedes Element $(\frac{s}{u})_U \in S[U^{-1}]$ als $\psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t)$ schreiben.

Weiter gilt für alle $s_1, s_2 \in S, t_1, t_2 \in U$:

$$\begin{aligned}
\text{Sei } \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_t) &= \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_t) \\
\Rightarrow \exists u \in U : (s_1 t_1 - s_2 t_2) \cdot u &= 0 \\
\Rightarrow (\frac{s_1 u}{t_1 u})_{tu} &= (\frac{s_2 u}{t_2 u})_{tu} \\
\Rightarrow \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_t) &= \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_t)
\end{aligned}$$

Mit diesem Wissen können wir den R -Algebra-Homomorphismus $\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow A$ definieren:

$$\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow A, \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t) \longmapsto \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t)$$

$\phi \circ \varphi = id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes:

$$\begin{array}{ccc}
& \mathcal{B} & \\
\psi \swarrow & & \searrow \psi \\
A & \xleftarrow{\exists! id_A = \phi \circ \varphi} & A
\end{array}$$

Für $\varphi \circ \phi \stackrel{!}{=} id_{S[U^{-1}]}$ wähle beliebige $s \in S, t \in U$, für diese gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{s}{t})_t)) = \varphi(\psi((\frac{s}{t})_t)) = \psi'((\frac{s}{t})_t)$$

Damit haben wir gezeigt, dass φ, ϕ Isomorphismen sind und somit $A \simeq S[U^{-1}]$ gilt.

Da der Kolimes bis auf Isomorphie eindeutig ist, definiere ab sofort $S[U^{-1}]$ als den eindeutigen Kolimes von \mathcal{B} . \square

Lokalisierung von Moduln als Kolimes [Beweis von Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]

Korrolar 12. Sei M ein S -Modul, wobei S eine R -Algebra ist. Sei weiter $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$M[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{C}$$

Wobei \mathcal{C} aus den Objekten $\{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] | t \in U\}$ und folgenden Morphismen besteht:

$$\begin{aligned} S[U^{-1}] \otimes M[t^{-1}] &\longrightarrow S[U^{-1}] \otimes M[(tt')^{-1}], \\ \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{t^n}\right)_t &\longmapsto \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{t'^n m}{(tt')^n}\right)_t \end{aligned}$$

Auch wenn sich lemma 11 hier nicht direkt anwenden lässt, so können wir doch im Beweis gleich vorgehen.

Beweis. Schließe zunächst den trivialen Fall $0 \in U$ aus.

Sei $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow A$ der Colimes von \mathcal{C} . Zeige $S[U^{-1}] \simeq A$, definiere dazu folgenden Morphismus :

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{C} &\longrightarrow M[U^{-1}] \\ \psi_t : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] &\longrightarrow M[U^{-1}], \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{t^n}\right)_t \longmapsto \left(\frac{sm}{ut^n}\right)_U \end{aligned}$$

Die Wohldefiniertheit von ψ'_t für ein beliebiges $t \in U$ folgt direkt aus der Universellen Eigenschaft des Tensorprodukt's. Denn für die bilineare Abbildung $f : S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \longrightarrow M[t^{-1}], \left(\left(\frac{s}{u}\right)_U, \left(\frac{m}{t^n}\right)_t\right) \longmapsto \left(\frac{sm}{ut^n}\right)_U$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] & \xrightarrow{g} & S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \psi'_t \\ & & M[U^{-1}] \end{array}$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir nun den eindeutigen Homomorphismus $\varphi : A \longrightarrow M[U^{-1}]$.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C} & \\ \psi' \swarrow & & \searrow \psi \\ M[U^{-1}] & \xleftarrow{\exists! \varphi} & A \end{array}$$

Für $\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow A$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen.

Zunächst können wir jedes Element $\left(\frac{m}{u}\right)_U \in M[U^{-1}]$ als $\psi\left(\left(\frac{1}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{1}\right)_t\right)$ schreiben. Wobei mit ψ gemeint ist, dass wir ein beliebiges $t \in U$ wählen und dann ψ_t betrachten. Diese Verallgemeinerung ist möglich, da für beliebige $t_1, t_2, u \in U$ und $m \in M$ gilt:

$$\psi_{t_1}\left(\left(\frac{1}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{1}\right)_{t_1}\right) = \left(\frac{m}{u}\right)_U = \psi_{t_2}\left(\left(\frac{1}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{1}\right)_{t_2}\right)$$

Definiere nun mit diesem Wissen folgenden Homomorphismus:

$$\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow A, \psi\left(\left(\frac{1}{u}\right)_U \otimes t\right) \longmapsto \psi'\left(\left(\frac{1}{u}\right)_U \otimes t\right)$$

$\phi \circ \varphi = id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes.
Für $\varphi \circ \phi \stackrel{!}{=} id_{M[U^{-1}]}$ wähle $(\frac{m}{u})_u \in M[U^{-1}]$ beliebig, für dieses gilt:

$$\begin{aligned} & (\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{1}{u})_u \otimes (\frac{m}{1})_t)) \\ &= \varphi(\psi((\frac{1}{u})_u \otimes (\frac{m}{1})_t)) \\ &= \psi'((\frac{1}{u})_u \otimes (\frac{m}{1})_t) \end{aligned}$$

Damit haben wir $A \simeq M[U^{-1}]$ gezeigt, definiere also ab sofort $M[U^{-1}]$ als den eindeutigen Kolimes von \mathcal{C} . \square