Definition Leibnizregel

**Definition 1.** *[Kapitel 16 David Eisenbud 1994]*
*Sei $S$ ein Ring und $M$ ein $S$-Modul*

*Ein Homomoprphismus abelscher Gruppen $d : S \longrightarrow M$ ist eine Ableitung, falls gilt:*

$$\forall s_1, s_2 \in S: \; d(s_1 \cdot s_2) = s_1 d(s_2) + s_2 d(s_1) \quad \textbf{\textit{(Leibnitzregel)}}$$

*Sei $S$ eine $R$-Algebra, dann nennen wir eine Ableitung $d : S \longrightarrow M$ $R$-linear, falls sie zusätzlich ein $R$-Modulhomomorphismus ist, also falls gilt:*

$$\forall r_1, r_2 \in R \, \forall s_1, s_2 \in S: \; d(r_1 s_1 + r_2 s_2) = r_1 d(s_1) + r_2 d(s_2)$$

### Differenzial indempotenter Elemente

**Lemma 2.** *[Aufgabe 16.1 David Eisenbud 1994]*
*Sei $S$ ein Ring, $M$ ein $S$-Modul und $d : S \longrightarrow M$ eine Ableitung. Sei weiter $a \in S$ ein indempotentes Element ($a^2 = a$).*

*Dann gilt $d(a) = 0$.*

*Insbesondere gilt somit auch $d(1) = 0$.*

*Beweis.* Nutze hierfür allein die Leibnizregel *(crefDefinition Leibnizregel)*

$$\text{Schritt 1: } d_S(a) = d_S(a^2) = a d_S(a) + a d_S(a)$$
$$\text{Schritt 2: } a d_S(a) = a d_S(a^2) = a^2 d_S(a) + a^2 d_S(a) = a d_S(a) + a d_S(a)$$
$$\Rightarrow d_S(a) = a d_S(a) = 0$$

□

**Definition 3.** *Sei $S$ eine $R$-Algebra.*
*Das $S$-Modul $\Omega_{S/R}$ der Kähler-Differenziale von $S$ über $R$ und die dazugehörige universelle $R$-lineare Ableitung$d_S : S \longrightarrow \Omega_{S/R}$ sind durch die folgende Universelle Eigenschaft definiert*

### Propositon 11 delta

**Lemma 4.** *[Lemma 16.11 David Eisenbud 1994]*
*Seien $S, S'$ zwei $R$-Algebren. Sei weiter $f : S \longrightarrow S'$ ein $R$-Algebrenhomomorphismus und $\delta : S \longrightarrow S'$ ein Homomorphismus abelscher Gruppen mit $\delta(S)^2 = 0$. Dann gilt:*

*$f\;+\delta$ ist ein $R$-Algebrenhomomorphismus*

$$\Leftrightarrow$$

*$\delta$ ist eine $R$-linear und es gilt $\forall s_1, s_2 \in S:\ \delta(s_1 \cdot s_2) = f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1)$.*

*Beweis.*

„$\Rightarrow$ “: Da $f$ und $f + \delta$ $R$-linear sind, ist auch $\delta = (f+\delta) - f$ $R$-linear.
Seien nun $s_1, s_2 \in S$ beliebig, somit gilt:

$$\begin{gathered}(f+\delta)(s_1 \cdot s_2) = (f+\delta)(s_1) \cdot (f+\delta)(s_2)\\ \Rightarrow f(s_1 \cdot s_2) + \delta(s_1 \cdot s_2) = f(s_1)f(s_2) + f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1) + \delta(s_1)\delta(s_2)\\ \Rightarrow \delta(s_1 \cdot s_2) = f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1) + \delta(s_1)\delta(s_2)\ \mathit{mit}\ \delta(s_1)\delta(s_2) \in \delta(S)^2 = 0\\ \Rightarrow \delta(s_1 \cdot s_2) = f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1) + \delta(s_1)\delta(s_2)\end{gathered}$$

„$\Leftarrow$ “: Da $f$ und $\delta$ beide $R$-lineare Homomorphismen abelscher Gruppen sind, trifft die auch für $f + \delta$ zu.
Wähle nun also $s_1, s_2 \in S$ beliebig, somit gilt:

$$\begin{aligned}&(f+\delta)(s_1) \cdot (f+\delta)(s_2)\\ &= f(s_1)f(s_2) + f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1) + \delta(s_1)\delta(s_2)\\ &= f(s_1 \cdot s_2) + \delta(s_1 \cdot s_2) = (f+\delta)(s_1 \cdot s_2)\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass $f + \delta$ ein $R$-Algebrenhomomorphismus ist.

□