Satz 1. *Cotangent Sequenz*

Satz 2. *Differenzial von Polynomalgebren 2*

Satz 3. *Differenzial der Lokalisierung*

Satz 4. *Differential von rationalen Funktionen 1*

Differential von rationalen Funktionen 1 *[Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]*

Korrolar 5. *Sei k ein Körper und $L \supset k$ eine Körpererweiterung. Sei weiter $T = L(\{x_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in n Varablen über L. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i\in\{1,\dots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

Beweis. Betrachten T als Lokalisierung von $L[x_1,\dots,x_n]$ und gehen dann analog zu satz 4 vor:

$$\Omega_{T/k} \simeq T \otimes_{L[x_1,\dots,x_n]} \Omega_{L[x_1,\dots,x_n]/k} \text{ (satz 3)}$$
$$\Omega_{L[x_1,\dots,x_n]/R} \simeq (L[x_1,\dots,x_n] \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i\in\{1,\dots,n\}} L[x_1,\dots,x_n]\langle d_{L[x_1,\dots,x_n]}(x_i)\rangle \text{ (satz 2)}$$
$$\Rightarrow \Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i\in\{1,\dots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

□

Cotangent Sequenz von Körpern 1 *[Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]*

Bemerkung 6. *Sei $L \supset k$ und $T = L(x_1,\dots,x_n)$ der Körper der rationalen Funktionen in n Variablen über L. Dann ist die COTANGENT SEQUENZ (satz 1) von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ eine kurze Exakte Sequenz:*

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Im Genauen ist $\varphi : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k}$, $t \otimes d_L(l) \longmapsto t \cdot d_T(l)$ injektiv.

Beweis. Die Injektivität von φ folgt direkt aus der isomorphen Darstellung von $\Omega_{T/k}$, die wir uns in korrolar 6 erarbeitet haben.

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i\in\{1,\dots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

Um sicher zu gehen definiere $\varphi' \simeq \varphi$ und durchlaufe die in korrolar 6 genutzten Isomorphismen noch einmal Schritt für Schritt:

$$\varphi' : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus \bigoplus\nolimits_{i\in\{1,\dots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

$$\begin{tikzcd}
T \otimes_L \Omega_{L/k} \arrow[d, hook] & t \otimes d_L(l) \arrow[d, mapsto] \\
\Omega_{T/k} \arrow[d, hook, two heads, "satz\ 3"] & td_T(l) \arrow[d, mapsto] \\
T \otimes_S \Omega_{L[x_1,\dots,x_n]/k} \arrow[d, hook, two heads, "satz\ 2"] & t \otimes d_S(l) \arrow[d, mapsto] \\
T \otimes_S \left((S \otimes_L \Omega_{L/k}) \oplus \bigoplus_{i\in\{1,\dots,n\}} S\langle d_S(x_i)\rangle\right) \arrow[d, hook, two heads] & t \otimes (d_L(l), 0) \arrow[d, mapsto] \\
(T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i\in\{1,\dots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle & (t \otimes d_L(l), 0)
\end{tikzcd}$$

Damit ist φ eine injektive Einbettung von $T \otimes_L \Omega_{L/k}$ in $\Omega_{T/k}$. $\square$