

Bemerkung 1. Die Polynomialalgebra $R[x_1, \dots, x_d]$ über R lässt sich wie folgt als Tensorprodukt darstellen:

$$R[x_1, \dots, x_n] = \bigotimes_{i \in \{1, \dots, n\}} R[x_i]$$

Genauer gilt für zwei Polynomialgebren $A = R[x_1, \dots, x_{n_A}]$, $B = R[y_1, \dots, y_{n_B}]$ über R :

$$A \otimes_R B = R[x_1, \dots, x_{n_A}, y_1, \dots, y_{n_B}]$$

Skizziere den Beweis.

Beweis. Zeige, dass für $g : A \oplus B \rightarrow R[x_1, \dots, x_{n_A}, y_1, \dots, y_{n_B}]$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$ die Universelle Eigenschaft des Tensorproduktes gilt:

$$\begin{array}{ccc} A \oplus B & \xrightarrow{g} & R[x_1, \dots, x_{n_A}, y_1, \dots, y_{n_B}] \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \varphi \\ & & M \end{array}$$

Es ist leicht nachzurechnen, dass es sich bei φ um folgende Funktion handeln muss:

$$\varphi : R[x_1, \dots, x_{n_A}, y_1, \dots, y_{n_B}] \rightarrow M, (x_i \cdot y_j) \mapsto f(x_i, 1) \cdot f(1, y_j)$$

□

Korollar 2. Sei $S = R[x_1, \dots, x_n]$ eine Polynomialalgebra über R . Dann gilt:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} S \langle d_S(x_i) \rangle$$

Wobei $S \langle d_S(x_i) \rangle$ das von $d_S(x_i)$ erzeugte Modul über S ist.

Beweis. Wie in bemerkung 1 gezeigt, können wir S als $\bigotimes_{i \in \{1, \dots, n\}} R[x_i]$ schreiben. In **Kählerdifferenzial des Kolimes von R-Algebren** haben wir gezeigt, wie das Differenzial eines solchen Tensorproduktes aussieht:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} (S \otimes_{R[x_i]} \Omega_{R[x_i]/R})$$

Da $R[x_i]$ die aus dem Element x_i erzeugte Algebra über R ist, folgt [vgl. **BEMERKUNG ZU ENDLICH ERZEUGTEN ALGEBREN**]:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} (S \otimes_{R[x_i]} R[x_i] \langle d_{S[x_i]}(x_i) \rangle) \simeq \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} S \langle d_S(x_i) \rangle$$

Für die letzte Isomorphie nutze, dass wegen $R[x_i] \subseteq S$ zum Einen $d_{R[x_i]}$ als Einschränkung von d_S gesehen werden kann und zum Anderen $S \otimes_{R[x_i]} R[x_i] \simeq S$ gilt. □

Korrolar 3. Sei E eine R -Algebra und $T := S[x_1, \dots, x_n]$ eine Polynomialgebra über S . Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_R(x_i) \rangle$$

Beweis. Betrachte T als Tensorprodukt über R -Algebren und wende anschließend **Kählerdifferenzial des Kolimes von R -Algebren** an:

$$\begin{aligned} T &\simeq S \otimes_R R[x_1, \dots, x_n] \\ \Rightarrow T &\simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \otimes_T (T \otimes_{R[x_1, \dots, x_n]} \Omega_{R[x_1, \dots, x_n]/R}) \end{aligned}$$

Zuletzt nutze den soeben gezeigten ?? an und nutze schließlich $R[x_1, \dots, x_n] \subseteq T$ um das Tensorprodukt zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} &T \otimes_{R[x_1, \dots, x_n]} \Omega_{R[x_1, \dots, x_n]/R} \\ &\simeq T \otimes_{R[x_1, \dots, x_n]} \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} R[x_1, \dots, x_n] \langle d_{R[x_i]}(x_i) \rangle \\ &\simeq \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_R(x_i) \rangle \end{aligned}$$

□