Exersize A6.7

Lemma 1. Seit S eine R-Algebra und $U\subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$S[U^{-1}] = \lim_{\longrightarrow} (\mathcal{F} : \mathcal{B} \hookrightarrow (R - Algebren))$$

Wobei \mathcal{B} aus den Objekten $\{S[t^{-1}]|t\in U\}$ und den Morphismen $S[t^{-1}]\longrightarrow S[tt'^{-1}], (s,t^n)_{mod\sim_t}\longmapsto (st'^n,t^nt'^n)_{mod\sim_{(tt')}} \forall t,t'\in U$ besteht.

Beweis. Sei $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$ der Colimes von \mathcal{F} . Zeige $S[U^{-1}] \simeq A$, definiere dazu:

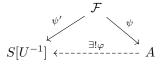
$$\psi': \mathcal{F} \longrightarrow S[U^{-1}]$$

$$\psi'_{S[t^{-1}]}: S[t^{-1}] \longrightarrow S[t^{-1}], (s, t^n)_{mod \sim_t} \longmapsto (s, t^n)_{mod \sim_U}$$

 ψ' ist ein Morphismus, da für beliebige $t, t' \in U$ und $s \in S$ gilt:

$$(s,t^n)_{mod \sim U} = (st'^n, t^nt'^n)_{mod \sim U}$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Colimes, erhalten wir den Homomorphismus $\varphi:A\longrightarrow S[U^{-1}].$



Für $\phi:S[U^{-1}]\longrightarrow A$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen.

Zunächst können wir jedes Element $(s, u)_{mod \sim_U} \in S[U^{-1}]$ als $\psi_{S[u^{-1}]}((s, u)_{mod \sim_U})$ schreiben.

Weiter gilt für alle $s_1, s_2 \in S, t_1, t_2 \in U$:

$$\psi'_{S[t^{-1}]}((s_1, t_1)_{mod \sim_t}) = \psi'_{S[t^{-1}]}((s_2, t_2)_{mod \sim_t})$$

$$\Rightarrow \exists u \in U : (s_1 t_1 - s_2 t_2) \cdot u = 0$$

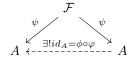
$$\Rightarrow (s_1 u, t_1 u)_{mod \sim_{tu}} = (s_2 u, t_2 u)_{mod \sim_{tu}}$$

$$\Rightarrow \psi_{S[t^{-1}]}((s_1, t_1)_{mod \sim_t}) = \psi_{S[t^{-1}]}((s_2, t_2)_{mod \sim_t})$$

Mit diesem Wissen können wir den R-Algebra-Homomorphismus $\phi:S[U^{-1}]\longrightarrow A$ definieren:

$$\phi: S[U^{-1}] \longrightarrow A\,,\, \psi'_{S[t^{-1}]}((s,t)_{mod \sim_t}) \longmapsto \psi_{S[t^{-1}]}((s,t)_{mod \sim_t})$$

 $\phi\circ\varphi=id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Colimes:



Für $\varphi\circ\phi=id_{S[U^{-1}]}$ wähle beliebige $s\in S, t\in U,$ für diese gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi((s,t)_{mod \sim_t})) = \varphi(\psi'((s,t)_{mod \sim_t}) = \psi((s,t)_{mod \sim_t})$$

Damit haben wir gezeigt, dass φ,ϕ Isomorphismen sind und somit $A\simeq S[U^{-1}]$ gilt.

Da der Colimes bis auf Isomorphie eindeutig ist, definiere ab sofort $S[U^{-1}]$ als den eindeutigen Colimes von $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow (R-Algebren)$.