

Kapitel 1

Einführung des Kähler-Differentials

Definition Leibnizregel

Definition 1. [Kapitel 16 David Eisenbud 1994]

Sei S ein Ring und M ein S -Modul

Ein Homomorphismus abelscher Gruppen $d : S \rightarrow M$ ist eine Ableitung, falls gilt:

$$\forall s_1, s_2 \in S : d(s_1 \cdot s_2) = s_1 d(s_2) + s_2 d(s_1) \quad (\text{Leibnizregel})$$

Sei S eine R -Algebra, dann nennen wir eine Ableitung $d : S \rightarrow M$ R -linear, falls sie zusätzlich ein R -Modulhomomorphismus ist, also falls gilt:

$$\forall r_1, r_2 \in R \forall s_1, s_2 \in S : d(r_1 s_1 + r_2 s_2) = r_1 d(s_1) + r_2 d(s_2)$$

Differenzial idempotenter Elemente

Lemma 2. [Aufgabe 16.1 David Eisenbud 1994]

Sei S ein Ring, M ein S -Modul und $d : S \rightarrow M$ eine Ableitung. Sei weiter $a \in S$ ein idempotentes Element ($a^2 = a$).

$$\text{Dann gilt } d(a) = 0.$$

Insbesondere gilt somit auch $d(1) = 0$.

Beweis. Nutze hierfür allein die Leibnizregel ([crefDefinition Leibnizregel](#))

$$\text{Schritt 1: } d_S(a) = d_S(a^2) = a d_S(a) + a d_S(a)$$

$$\text{Schritt 2: } a d_S(a) = a d_S(a^2) = a^2 d_S(a) + a^2 d_S(a) = a d_S(a) + a d_S(a)$$

$$\Rightarrow d_S(a) = a d_S(a) = 0$$

□

Definition Kaehler-Differenzial

Definition 3. Kapitel 16 David Eisenbud 1994

Sei S eine R -Algebra.

Das S -Modul $\Omega_{S/R}$ der Kähler-Differenziale von S über R und die dazugehörige universelle R -lineare Ableitung $d_S : S \rightarrow \Omega_{S/R}$ mit $\text{im}(d_S) = \Omega_{S/R}$ sind durch die folgende universelle Eigenschaft definiert:

Für alle R -linearen Ableitungen $e : S \rightarrow M$ von S in ein S -Modul M existiert genau ein S -Modulhomomorphismus $e' : \Omega_{S/R} \rightarrow M$, sodass folgendes

Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{d_S} & \Omega_{S/R} \\ & \searrow e & \downarrow \exists! e' \\ & & M \end{array}$$

Eindeutigkeit des Kaehler-Differentials

Lemma 4. (Das Kähler-Differentials ist eindeutig) [Eigene Überlegung]

Sei S eine R -Algebra.

Dann ist das S -Modul $\Omega_{S/R}$ der Kähler-Differenziale von S über R und die dazugehörige universelle R -lineare Ableitung d_S bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien $d_S : S \rightarrow \Omega_{S/R}$ und $d'_S : S \rightarrow \Omega'_{S/R}$ beide eine universelle R -lineare Ableitung.

Durch die universelle Eigenschaft der universellen Ableitung erhalten wir eindeutig bestimmte Funktionen $\varphi : \Omega_{S/R} \rightarrow \Omega'_{S/R}$ und $\varphi' : \Omega'_{S/R} \rightarrow \Omega_{S/R}$, für welche die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{d_S} & \Omega_{S/R} \\ & \searrow d'_S & \downarrow \exists! \varphi \\ & & \Omega'_{S/R} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{d'_S} & \Omega'_{S/R} \\ & \searrow d_S & \downarrow \exists! \varphi' \\ & & \Omega_{S/R} \end{array}$$

Wende nun die Universelle Eigenschaft von d_S auf d_S selbst an und erhalte $\text{id}_{\Omega_{S/R}} = \varphi' \circ \varphi$.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{d_S} & \Omega_{S/R} \\ & \searrow d_S & \downarrow \exists! \text{id}_{\Omega_{S/R}} = \varphi' \circ \varphi \\ & & \Omega_{S/R} \end{array}$$

Analog erhalte auch $\text{id}_{\Omega'_{S/R}} = \varphi \circ \varphi'$. Damit existiert genau ein Isomorphismus $\varphi' \circ \varphi : \Omega_{S/R} \rightarrow \Omega'_{S/R}$ mit $d'_S = d_S \circ (\varphi' \circ \varphi)$. \square

Differenzial ist Ableitung

Proposition 5. *[Eigene Überlegung]*

Sei R ein Körper, somit entspricht die universellen Ableitung des Polynomrings $R[x]$ der analytischen Ableitung von Polynomfunktionen:

$$d_{R[x]} : R[x] \longrightarrow \Omega_{R[x]/k}, P(x) \longmapsto P'(x)d_{R[x]}(x)$$

Beweis. Da $d_{R[x]}$ R -linear ist, genügt es die Behauptung für Monome $P(x) \in k[x]$ zu zeigen, führe dazu eine Induktion über den Grad n von $P(x) = ax^n$:

$$\text{IA: } d_{R[x]}(ax) = ad_{R[x]}(x) + xd_{R[x]}(a) = ad_{R[x]}(x)$$

$$\text{IV: Für } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } d_S(ax^n) = nax^{n-1}d_S(x)$$

$$\begin{aligned} \text{IS: } d_S(ax^{n+1}) &= ax^n d_{R[x]}(x) + xd_{R[x]}(ax^n) = ax^n d_{R[x]}(x) + x \cdot (nax^{n-1}d_{R[x]}(x)) \\ &= (n+1)ax^n d_{R[x]}(x) \end{aligned}$$

□

Propositon 11 delta**Lemma 6.** *[Lemma 16.11 David Eisenbud 1994]*

Seien S, S' zwei R -Algebren. Sei weiter $f : S \longrightarrow S'$ ein R -Algebrenhomomorphismus und $\delta : S \longrightarrow S'$ ein Homomorphismus abelscher Gruppen mit $\delta(S)^2 = 0$. Dann gilt:

$$f + \delta \text{ ist ein } R\text{-Algebrenhomomorphismus}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\delta \text{ ist eine } R\text{-linear und } \forall s_1, s_2 \in S : \delta(s_1 \cdot s_2) = f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1).$$

Beweis.

„ \Rightarrow “: Da f und $f + \delta$ R -linear sind, ist auch $\delta = (f + \delta) - f$ R -linear.

Seien nun $s_1, s_2 \in S$ beliebig, somit gilt:

$$\begin{aligned} (f + \delta)(s_1 \cdot s_2) &= (f + \delta)(s_1) \cdot (f + \delta)(s_2) \\ \Rightarrow f(s_1 \cdot s_2) + \delta(s_1 \cdot s_2) &= f(s_1)f(s_2) + f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1) + \delta(s_1)\delta(s_2) \\ \Rightarrow \delta(s_1 \cdot s_2) &= f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1) + \delta(s_1)\delta(s_2) \text{ mit } \delta(s_1)\delta(s_2) \in \delta(S)^2 = 0 \\ \Rightarrow \delta(s_1 \cdot s_2) &= f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1) + \delta(s_1)\delta(s_2) \end{aligned}$$

„ \Leftarrow “: Da f und δ beide R -lineare Homomorphismen abelscher Gruppen sind, trifft die auch für $f + \delta$ zu.

Wähle nun also $s_1, s_2 \in S$ beliebig, somit gilt:

$$\begin{aligned} & (f + \delta)(s_1) \cdot (f + \delta)(s_2) \\ &= f(s_1)f(s_2) + f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1) + \delta(s_1)\delta(s_2) \\ &= f(s_1 \cdot s_2) + \delta(s_1 \cdot s_2) \\ &= (f + \delta)(s_1 \cdot s_2) \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass $f + \delta$ ein R -Algebrenhomomorphismus ist.

□

Konstruktion Kaehler-Differential

Theorem 7. (Konstruktion des Kähler-Differentials [Theorem 16.21 David Eisenbud 1994])

Sei S ein R -Algebra. Definiere eine S -Modulstruktur auf $S \otimes_R S$ durch:

$$S \oplus (S \otimes_R S) \longrightarrow S \otimes_R S, (s, s_1 \otimes s_2) \longmapsto ss_1 \otimes s_2$$

Betrachte $\mu : S \otimes_R S \longrightarrow S, s_1 \otimes s_2 \longmapsto s_1 \cdot s_2$ mit $I := \ker(\mu)$.

Dann ist durch $e : S \longrightarrow I/I^2, s \longmapsto [s \otimes 1 - 1 \otimes s]$ die universelle R -lineare Ableitung auf S definiert.

Beweis. Zeige zunächst, dass e eine R -lineare Ableitung ist. Betrachte dazu:

$$f_1 : S \longrightarrow S \otimes_R S, s \longmapsto s \otimes 1, f_2 : S \longrightarrow S \otimes_R S, s \longmapsto 1 \otimes s$$

Damit ist die Wirkung von S auf $S \otimes_R S$ durch

$$S \oplus (S \otimes_R S) \longrightarrow S \otimes_R S, (s, s_1 \otimes s_2) \longmapsto f_1(s)(s_1 \otimes s_2) \text{ gegeben.}$$

Setze nun in der Notation von lemma 6 $f = f_1$ und $\delta = e$.

Damit ist $f + \delta = f_1 + \delta = f_2$ ein R -Algebrenhomomorphismus und es folgt aus lemma 6 und unserer Definition der Wirkung von S auf $S \otimes_R S$, dass e eine R -lineare Ableitung ist. Durch die Universelle Eigenschaft von d_S existiert also genau ein R -Algebrenhomomorphismus $e' : \Omega_{S/R} \longrightarrow I/I^2$ mit $e = d_S \circ e'$.

Betrachte nun folgende Umkehrabbildung ϕ zu e' :

$$\phi : I/I^2 \longrightarrow \Omega_{S/R}, [s_1 \otimes s_2] \longmapsto s_1 d_S(s_2)$$

Um zu prüfen, dass ϕ die Umkehrabbildung von e ist, wähle $s, s_1, s_2 \in S$ beliebig, somit gilt:

$$\begin{aligned} (\phi \circ e')(d_S(s)) &= (\phi \circ e)(s) = \phi([s \otimes 1 - 1 \otimes s]) = s d_S(1) + 1 d_S(s) = d_S(s) \\ (e' \circ \phi)([s_1 \otimes s_2]) &= e'(s_1 d_S(s_2)) = s_1 e(s_2) = [s_1 1 \otimes s_2 - s_1 s_2 \otimes 1] = [s_1 \otimes s_2 - s_1 s_2 \otimes 1] = [s_1 \otimes s_2] \end{aligned}$$

□

Differenzial des Produktes von Algebren [Proposition 16.10 David Eisenbud 1994]

Proposition 8. Seien S_1, \dots, S_n R -Algebren. Sei dazu $S := \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} S_i$ deren direktes Produkt. Dann gilt:

$$\Omega_{S/R} = \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} \Omega_{S_i/R}$$

Beweis. Sei für $i \in \{1, \dots, n\}$ jeweils $e_i \in S$ die Einbettung des Einselement's von S_i in S , somit ist $p_i : e_i S \rightarrow S_i$ ein Isomorphismus.

Nutze weiter, dass e_i jeweils ein idempotentes Element von $(e_i^2 = e_i)$ von S ist:

$$\begin{aligned} & \text{Nach lemma 2 gilt } d_S(e_i) = 0 \\ \Rightarrow \forall s \in S : d_S(e_i s) &= d_S(e_i^2 s) = e_i d_S(e_i s) + e_i s d_S(e_i) = e_i d_S(e_i s) \end{aligned}$$

Mit diesem Wissen können wir einen Isomorphismus $\Phi : \Omega_{S/R} \rightarrow \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} \Omega_{S_i/R}$ definieren:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{S/R} & & d_S(s) = \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} d_S(e_i s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} e_i d_S(e_i s) & & (e_1 d_S(e_1 s), \dots, e_n d_S(e_n s)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} \Omega_{S_i/R} & & ((d_{S_1} \circ p_1)(s), \dots, (d_{S_n} \circ p_n)(s)) \end{array}$$

Da der Differenzialraum $\Omega_{S/R}$ bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig ist (lemma 4), definiere diesen ab jetzt als $\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} \Omega_{S_i/R}$. \square

Relativ Cotangent Sequenz

Satz 9. (Relativ Cotangent Sequenz) [vgl. Proposition 16.2 David Eisenbud 1994]

Seien $\alpha : R \rightarrow S$ und $\beta : S \rightarrow T$ zwei Ringhomomorphismen. Dann existiert folgende exakte Sequenz:

$$\begin{aligned} T \otimes_S \Omega_{S/R} &\xrightarrow{D_\beta} \Omega_{T/R} \xrightarrow{d_{T_R}(t) \mapsto d_{T_S}(t)} \Omega_{T/S} \longrightarrow 0 \\ \text{mit: } D_\beta : T \otimes_S \Omega_{S/R} &\longrightarrow \Omega_{T/R}, \quad t \otimes d_S(s) \longmapsto t(d_{T_R} \circ \beta)(s) \end{aligned}$$

Im Besonderen gilt für die Differenzialräume von T über R und S :

$$\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R} / T \langle (d_{T_R} \circ \beta)(S) \rangle$$

Beweis. Durch $st := \beta(S) \cdot t$ und $rt := (\beta \circ \alpha)(r) \cdot t$ können wir T als S - bzw. R -Algebra betrachten.

Zeige zunächst, dass $g : \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/S}, d_{T_R}(t) \longmapsto d_{T_S}(t)$ surjektiv ist:

d_{T_S} ist R -Linear, da R durch $(\beta \circ \alpha)$ auf T wirkt, es lässt sich also die universelle Eigenschaft von d_{T_R} auf d_{T_S} anwenden:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{d_{T_R}} & \Omega_{T/R} \\ & \searrow d_{T_S} & \downarrow \exists! g \\ & & \Omega_{T/S} \end{array}$$

Wir können also alle Elemente $d_{T_S}(s) \in \Omega_{T/S}$ als $g(d_{T_R}(s))$ darstellen. Dies zeigt, dass $g : \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/S}, d_{T_R}(t) \longmapsto d_{T_S}(t)$ surjektiv ist.

Zeige nun, dass $\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R}/T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle$ gilt:

Definiere zunächst folgende S -lineare Ableitung:

$$e : T \longrightarrow \Omega_{T/R}/T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle, t \longmapsto [d_{T_R}(t)]_{T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle}$$

Wir sehen, dass e auch S -linear ist:

Seien dazu $s \in S$ und $t \in T$ beliebig, somit gilt:

$$\begin{aligned} e(st) &= [d_{T_R}(st)]_{T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle} \\ &= [\beta(s)d_{T_R}(t)]_{T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle} + [td_{T_R}(\beta(s))]_{T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle} \\ &= [\beta(s)d_{T_R}(t)]_{T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle} + 0 = se(t) \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass wir die universelle Eigenschaft von d_{T_S} anwenden können:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{d_{T_S}} & \Omega_{T/S} \\ & \searrow e & \downarrow \exists! e' \\ & & \Omega_{T/R}/T\Omega_{S/R} \end{array}$$

Dadurch erhalten wir $e' : \Omega_{T/S} \longrightarrow \Omega_{T/R}/T\Omega_{S/R}$.

Für die Umkehrfunktion ϕ nutze $g : \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/S}, d_{T_R}(t) \longmapsto d_{T_S}(t)$ vom Beginn des Beweises:

Für alle $s \in S$ gilt $d_{T_S}(s) = 0$.

Somit gilt $T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle \subseteq \ker(g)$.

Also ist die Umkehrfunktion ϕ von e' wohldefiniert:

$$\phi : \Omega_{T/R}/T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle \longrightarrow \Omega_{T/S}, [d_{T_R}(t)]_{T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle} \longmapsto d_{T_S}(t).$$

Damit gilt $\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R}/T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle$.
Auf unsere Sequenz bezogen bedeutet dies:

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } \operatorname{im}(\Omega_{T/R} \rightarrow \Omega_{T/S}) &\simeq \Omega_{T/R}/\operatorname{im}(D_\beta). \\ \text{Somit gilt auch } \operatorname{im}(D_\beta) &= \operatorname{kern}(\Omega_{T/R} \rightarrow \Omega_{T/S}). \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die **Relative Cotangent Sequenz** exakt ist.

□

Konormale Sequenz [vgl. Proposition 16.3 David Eisenbud 1994]

Satz 10. Sei $\pi : S \longrightarrow T$ ein R -Algebrenepimorphismus mit $\operatorname{Kern}(\pi) := I$.
Dann ist folgende Sequenz rechtsexakt:

$$\begin{aligned} I/I^2 &\xrightarrow{1 \otimes d_S} T \otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0 \\ \text{mit: } 1 \otimes d_S : I/I^2 &\longrightarrow T \otimes_S \Omega_{S/R}, [s] \longmapsto 1 \otimes d_S(s) \\ D\pi : T \otimes_S \Omega_{S/R} &\longrightarrow \Omega_{T/R}, t \otimes d_S(s) \longmapsto t \cdot (d_S \circ \pi)(s) \end{aligned}$$

Beweis.

Zeigen zunächst, dass $1 \otimes d_S$ wohldefiniert ist. Seien dazu $s, s' \in I$ beliebig, somit gilt:

$$(1 \otimes d_S)(s \cdot s') = 1 \otimes s d_S(s') + 1 \otimes s' d_S(s) = \pi(s) \otimes d_S(s') + \pi(s') \otimes d_S(s) = 0$$

$D\pi$ ist surjektiv, da $\Omega_{S/R}$ und $\Omega_{T/S}$ jeweils von d_S und d_T erzeugt werden und sich somit die Surjektivität von π auf $D\pi$ vererbt:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{S/R} & \xrightarrow{D\pi} & \Omega_{T/R} \\ d_S \uparrow & & \uparrow d_T \\ S & \xrightarrow{\pi} & T \end{array}$$

Für $\operatorname{im}(1 \otimes d_S) \stackrel{!}{=} \operatorname{kern}(D\pi)$ zeige $(T \otimes_S \Omega_{S/R})/\operatorname{Im}(f) \simeq \Omega_{T/R}$:

$$(T \otimes_S \Omega_{S/R})/(T \otimes_S d_S(I)) = T \otimes_S (\Omega_{S/R}/d_S(I)) \simeq T \otimes_S d_S(S/I) \simeq T \otimes_S d_T(T)$$

□

Kapitel 2

Kolimiten

2.1 Einführung in den Kolimes

Definition des Kolimes

Definition 1. [vgl. Anhang A6 David Eisenbud 1994] Sei \mathcal{A} eine Kategorie.

- Ein Diagramm über \mathcal{A} ist eine Kategorie \mathcal{B} zusammen mit einem Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$.
- Sei $\mathcal{F} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ein Diagramm und $A \in \mathcal{A}$ ein Objekt. Dann definieren wir einen Morphismus $\psi : \mathcal{F} \rightarrow A$ als eine Menge von Funktionen $\{\psi_B \in \text{Hom}(\mathcal{F}(B), A) \mid B \in \mathcal{B}\}$, wobei für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $\varphi \in \text{Hom}(B_1, B_2)$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(B_1) & & \\ \downarrow \mathcal{F}(\varphi) & \searrow \psi_{B_1} & \\ & & C \\ \mathcal{F}(B_2) & \nearrow \psi_{B_2} & \end{array}$$

- Der Kolimes $\varinjlim \mathcal{F}$ eines Diagramms $\mathcal{F} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ist ein Paar aus einem Objekt $A \in \mathcal{A}$ zusammen mit einem Morphismus $\psi : \mathcal{F} \rightarrow A$, welche folgende universelle Eigenschaft erfüllen:

Für Objekte $A' \in \mathcal{A}$ und alle Morphismen $\psi' : \mathcal{F} \rightarrow A'$ existiert genau eine Funktion $\varphi \in \text{Hom}(A, A')$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \psi' \swarrow & & \searrow \psi \\ A' & \xleftarrow{\exists! \varphi} & A \end{array}$$

Eindeutigkeit des Kolimes [vgl. A6 David Eisenbud 1994]

Lemma 2. Seien \mathcal{B}, \mathcal{A} zwei Kategorien und $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor. Dann ist im Falle der Existenz $\varinjlim \mathcal{F}$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien $A_1 \in \mathcal{A}, (\psi_1 : \mathcal{F} \longrightarrow A_1)$ und $A_2 \in \mathcal{A}, (\psi_2 : \mathcal{F} \longrightarrow A_2)$ beide gleich $\varinjlim \mathcal{F}$.

Erhalte durch die universelle Eigenschaft des Kolimes die eindeutig bestimmten Funktionen $\varphi_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$ und $\varphi_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_2, A_1)$, für welche die folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \psi_2 \swarrow & & \searrow \psi_1 \\ A_2 & \xleftarrow{\exists! \varphi_1} & A_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \psi_1 \swarrow & & \searrow \psi_2 \\ A_1 & \xleftarrow{\exists! \varphi_2} & A_2 \end{array}$$

Wende nun die Universelle Eigenschaft von ψ_1 auf ψ_1 selbst an und erhalte $id_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1$. Analog erhalte auch $id_{A_2} = \varphi_1 \circ \varphi_2$.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \psi_1 \swarrow & & \searrow \psi_1 \\ A_1 & \xleftarrow{\exists! id_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1} & A_1 \end{array}$$

Somit existiert genau eine Isomorphie $\varphi_1 : A_1 \longrightarrow A_2$. □

Vereinfachung des Kolimes

Korrolar 3. [Eigene Überlegung]

Sei \mathcal{A} eine Kategorie und $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$ ein Diagramm. Betrachte die Unterkategorie $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$ zusammen mit dem Inklusionsfunktor $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}$ ebenfalls als Diagramm. Dann gilt:

$$\begin{array}{c} \varinjlim \mathcal{F} \text{ existiert genau dann, wenn } \varinjlim (\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \text{ existiert.} \\ \text{Mit } \varinjlim \mathcal{F} = \varinjlim (\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}). \end{array}$$

Beweis. Dies folgt direkt aus unserer Definition von Morphismen:

In definition 1 haben wir einen Morphismus $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$ als eine Menge von Funktionen $\psi_{\mathcal{B}} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\mathcal{B}), A)$ definiert. Dies zeigt, dass es keinen Unterschied macht, ob wir von Morphismen $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$ oder von Morphismen $\psi : (\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$ reden.

Wenn wir nun die universelle Eigenschaft des Kolimes genauer betrachten, sehen wir, dass diese sich nur auf Morphismen $\mathcal{F} \longrightarrow A$ bzw. $(\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$ und auf die Kategorie \mathcal{A} bezieht. Es macht also keinen Unterschied, ob wir vom Kolimes des Diagramms $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$ oder vom Kolimes des Diagramms $(\mathcal{F}(\mathcal{B}), \mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A})$ sprechen. □

Es genügt also im Fall von Kolimenn Diagramme $(\mathcal{B}, \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$ mit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ zu betrachten. Zur Vereinfachung schreibe für $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ in Zukunft $\varinjlim \mathcal{B}$ anstatt von $\varinjlim (\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$.

DifferenzkernUndKoproduktDef

Definition 4. [vgl. A6 David Eisenbud 1994]

Sei \mathcal{A} eine Kategorie.

- Das Koprodukt von $\{B_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq \mathcal{A}$ wird durch $\coprod_{i \in \Lambda} \{B_i\} := \varinjlim \mathcal{B}$ definiert, wobei $\{B_i\}_{i \in \Lambda}$ die Objekte und die Identitätsabbildungen $\{id_{B_i} : B_i \rightarrow B_i\}_{i \in \Lambda}$ die einzigen Morphismen von \mathcal{B} sind.
- Der Differenzkokern von $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$ wird durch $\varinjlim \mathcal{C}$ definiert, wobei $\{C_1, C_2\}$ die Objekte und $\{f, g\}$ zusammen mit den Identitätsabbildungen die Morphismen von \mathcal{C} sind.

NeuDifferenzkokerndef

Bemerkung 5. [Wikipedia]

Sei \mathcal{A} eine Kategorie. Sei weiter $C_1, C_2 \in \text{Obj}_{\mathcal{A}}$ und $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$.

Im Falle der Existenz ist der Differenzkokern von f, g nach definition 4 durch ein Objekt $C \in \text{Obj}_{\mathcal{A}}$ und einen Morphismus $\psi = \{\psi_{C_1}, \psi_{C_2}\}$ gegeben, wobei gilt:

$$\psi_{C_2} = f \circ \psi_{C_1} = g \circ \psi_{C_2}$$

Wir sehen, dass ψ eindeutig durch $q := \psi_{C_2} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$ gegeben ist. Der Differenzkokern ist also eindeutig durch $(C \in \text{obj}_{\mathcal{A}}, q \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_1, C_2))$ gegeben, wobei q folgenden Eigenschaften besitzt:

Es gilt $f \circ q = g \circ q$ und
für alle $C \in \text{Obj}_{\mathcal{A}}$ und $q' \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}$ mit $f \circ q' = g \circ q'$ existiert genau ein
 $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}$, mit $q \circ \varphi = q'$:

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{f, g} & C_2 & \xrightarrow{q} & C \\ & & \searrow q' & & \downarrow \exists! \varphi \\ & & & & C' \end{array}$$

Wenn wir fortan vom Differenzkokern sprechen meinen wir damit das Paar (C, q) .

Kolimes durch Koprodukt und Differenzkokern

Theorem 6. [Proposition A6.1 David Eisenbud 1994]

Sei \mathcal{A} eine Kategorie, in der Koprodukte beliebiger Mengen von Objekten und Differenzkokerne von je zwei Morphismen existieren. Dann existiert für jedes Diagramm $\mathcal{F} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ dessen Kolimes $\varinjlim \mathcal{F}$.

Beweis. In korollar 3 haben wir gesehen, dass es genügt den Fall $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ zu betrachten. Konstruiere also für eine beliebige Unterkategorie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ deren Kolimes $\varinjlim \mathcal{B}$:

Bezeichne für jeden Morphismus $\gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{C}}$ dessen Definitionsbereich mit $B_{\gamma} \in$

\mathcal{B} . Weiter, wenn wir einen Morphismus ψ gegeben haben und $\psi_{\gamma(B_\gamma)}$ betrachten, ist damit ψ_B gemeint, wobei B die Zielmenge von γ ist. Definiere nun:

- $C_1 := \coprod_{\gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}} B_\gamma$ ist das Koproduct aller Objekte von \mathcal{B} , in dem jedes Objekt so oft vorkommt, wie es Definitionsbereich eines $\gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}$ ist.
Sei $\psi^1 : \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\} \rightarrow C_1$ der dazugehörige Morphismus.
- $C_2 := \coprod_{B \in \text{Obj}_{\mathcal{B}}} B$ ist das Koproduct aller Objekte von \mathcal{B} .
Sei $\psi^2 : \{B | B \in \text{Obj}_{\mathcal{B}}\} \rightarrow C_2$ der dazugehörige Morphismus.

Konstruiere nun $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$ so, dass der Differenzkokern von f und g dem Kolimes von \mathcal{B} entspricht. Nutze dazu die universelle Eigenschaft von $(C_1, \psi^1) = \varinjlim \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\}$:

Für f betrachte den Morphismus $\zeta : \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\} \rightarrow C_2$,
mit $\zeta_{B_\gamma} := \psi_{\gamma(B_\gamma)}^2$ für $B_\gamma \in \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\}$.
Wähle $f \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(C_1, C_2)$ als die eindeutige Funktion, mit $\zeta = f \circ \psi^1$.

Für g betrachte den Morphismus $\zeta' : \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\} \rightarrow C_2$,
mit $\zeta'_{B_\gamma} := \psi_{\gamma(B_\gamma)}^2 \circ \gamma$ für $B_\gamma \in \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\}$.
Wähle $g \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(C_1, C_2)$ als die eindeutige Funktion, mit $\zeta' = g \circ \psi^1$.

$$\begin{array}{ccc}
 & \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\} & \\
 \zeta \swarrow & & \searrow \psi^1 \\
 C_2 & \xleftarrow{\exists! f} & C_1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & \{B_\gamma | \gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}\} & \\
 \zeta' \swarrow & & \searrow \psi^1 \\
 C_2 & \xleftarrow{\exists! g} & C_1
 \end{array}$$

$$\zeta_{B_\gamma} := \psi_{\gamma(B_\gamma)}^2 \qquad \zeta'_{B_\gamma} := \psi_{\gamma(B_\gamma)}^2 \circ \gamma$$

Sei $C \in \text{Obj}_{\mathcal{B}}$ zusammen mit $q \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_2, C)$ der Differenzkokern von f, g .

Betrachte abschließend $\psi : \mathcal{B} \rightarrow C$, mit $\psi_B = q \circ \psi_B^2$ für $B \in \text{Obj}_{\mathcal{B}}$.

Um zu sehen, dass ψ ein Morphismus ist, wähle $B_1, B_2 \in \text{Obj}_{\mathcal{B}}$ beliebig und betrachte folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 B_1 & \xrightarrow{\psi_{B_1}^2 = \zeta_{B_1}} & C_2 & & \\
 \downarrow \gamma & \searrow \psi_{B_1}^1 & \nearrow f & \searrow q & \\
 & & C_1 & & C \\
 & \searrow \zeta'_{B_2} & \nearrow g & \nearrow q & \\
 B_2 & \xrightarrow{\psi_{B_2}^2} & C_2 & &
 \end{array}$$

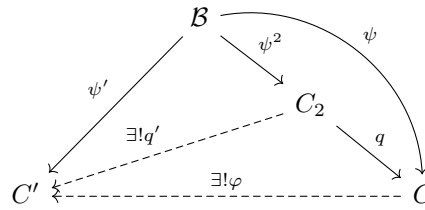
Zeige nun, dass (C, ψ) die Universelle Eigenschaft des Kolimes besitzt. Nutze dazu nacheinander die universellen Eigenschaften von (C_2, ψ^2) und (q, C) :

Da ψ' ein Morphismus von \mathcal{B} nach C' ist, ist ψ' insbesondere auch ein Morphismus von $\{B | B \in \text{Obj}_{\mathcal{B}}\}$ nach C . Somit existiert genau ein $q' \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(C_2, C')$ mit $\psi^2 \circ q' = \psi'$.

Zeige nun $q' \circ f \stackrel{!}{=} q' \circ g$. Sei dazu $c \in C_1$ beliebig und $\gamma \in \text{Morph}_{\mathcal{B}}$, $b \in B_\gamma$ mit $\psi_{B_\gamma}^1(b) = c$, dann gilt:

$$\begin{aligned} (q' \circ f)(c) &= (q' \circ f \circ \psi_{B_\gamma}^1)(b) = (q' \circ \zeta_{B_\gamma})(b) = (q' \circ \psi_{B_\gamma}^2)(b) = \psi'_{B_\gamma}(b) \\ (q' \circ g)(c) &= (q' \circ g \circ \psi_{B_\gamma}^1)(b) = (q' \circ \zeta'_{B_\gamma})(b) \\ &= (q' \circ \psi_{\gamma(B_\gamma)}^2 \circ \gamma)(b) = (\psi'_{\gamma(B_\gamma)} \circ \gamma)(b) = \psi'_{B_\gamma}(b) \end{aligned}$$

Somit können wir die universelle Eigenschaft von q auf q' anwenden und erhalten ein eindeutiges $\varphi \in \text{Hom}(C, C')$ mit $q' = q \circ \varphi$.



Dieses $\varphi \in \text{Hom}(C, C')$ erfüllt auch $\psi \circ \varphi = \psi^2 \circ q \circ \varphi = \psi^2 \circ q' = \psi'$ und ist nach Konstruktion eindeutig. Damit gilt $\varinjlim \mathcal{B} = (C, \psi)$. \square

Bemerkung 7. (Unendliche Indexmengen)

Wir wollen uns hier nochmal kurz in Erinnerung rufen, was es bedeutet, wenn wir eine unendlich große Indexmenge Λ vor uns haben:

1. Sei \mathcal{A} eine Kategorie und $\{B_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq \text{Obj}_{\mathcal{A}}$, dann gilt:

$$\bigoplus_{i \in \Lambda} B_i = \bigcup_{\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \Lambda} \bigoplus_{k=1}^n B_{i_k} = \{(b_{i_1}, \dots, b_{i_n}) | n \in \mathbb{N} \wedge \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \Lambda\}$$

2. Sei $\{M_i\}_{i \in \Lambda}$ eine Menge von R -Moduln (oder R -Algebren), dann gilt:

$$\bigotimes_{i \in \Lambda} M_i = \bigcup_{\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \Lambda} \bigotimes_{k=1}^n M_{i_k} = \{(m_{i_1} \otimes \dots \otimes m_{i_n}) | n \in \mathbb{N} \wedge \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \Lambda\}$$

3. Für den Polynomring über R in unendlich vielen Variablen $\{x_i\}_{i \in \Lambda}$ gilt:

$$P[\{x_i\}_{i \in \Lambda}] = \bigcup_{\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \Lambda} P[x_{i_1}, \dots, x_{i_n}] = \{P(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) | n \in \mathbb{N} \wedge \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \Lambda\}$$

Dies zeigt, dass sich diesen drei Fällen eine unendliche Indexmenge Λ immer auf endliche Indexmengen $\{1, \dots, n\}$ zurückführen lässt.

Darstellung der Polynomalgebra als Tensorprodukt

Bemerkung 8. *[Eigene Überlegung]*

Die Polynomialgebra $R[\{x_i\}_{i \in \Lambda}]$ über R lässt sich wie folgt als Tensorprodukt darstellen:

$$R[\{x_i\}_{i \in \Lambda}] = \bigotimes_{i \in \Lambda} R[x_i]$$

Beweis. Im Falle einer endlichen Indexmenge Λ wollen wir induktiv vorgehen. Seien für den Induktionsschritt $S_x := R[x_1, \dots, x_n]$ und $S_y := R[y_1, \dots, y_m]$ zwei Polynomialgebren über R , zeige:

$$S_{xy} := R[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m] \simeq S_x \otimes_R S_y$$

Dazu betrachten wir folgende bilineare Funktion:

$$g' : S_x \oplus S_y \longrightarrow S, (P, Q) \longmapsto P \cdot Q$$

Erhalte nun eine Funktion $\varphi : S_x \otimes_R S_y \longrightarrow S_{xy}$ aus der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes:

$$\begin{array}{ccc} S_x \oplus S_y & \xrightarrow{g} & S_x \otimes_R S_y \\ & \searrow g' & \downarrow \exists! \varphi \\ & & S_{xy} \end{array}$$

$$\varphi : S_x \otimes_R S_y \longrightarrow S_{xy}, P \otimes Q \longmapsto P \cdot Q$$

Der Homomorphismus φ ist surjektiv und bildet die Erzeuger $\{x_i \otimes 1\} \cup \{1 \otimes y_j\}$ von $S_x \otimes_R S_y$ eindeutig auf die Erzeuger $\{x_i\} \cup \{y_j\}$ von S_{xy} ab. Folglich ist φ ein Isomorphismus.

Induktiv erhalten wir daraus für den Fall $|\Lambda| < \infty$ folgenden Isomorphismus:

$$\Phi : \bigotimes_{i \in \Lambda} R[x_i] \longrightarrow R[\{x_i\}_{i \in \Lambda}], (P_1(x_1), \dots, P_n(x_n)) \longmapsto \prod_{i=1}^n P_i(x_i)$$

Dies ist auch im Fall $\Lambda = \infty$ ein Isomorphismus, da wir auch in diesem Fall nur Tensorprodukte endlich vieler Polynome bzw. Polynome in endlich vielen Variablen betrachten (*siehe bemerkung 7*).

Da das Tensorprodukt $\bigotimes_{i \in \Lambda} R[x_i]$ bis auf eine Eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist, definiere dies ab jetzt als $R[\{x_i\}_{i \in \Lambda}]$. \square

R-Algebra-Kolimiten

Proposition 9. *[vgl. Proposition A6.7 David Eisenbud 1994]*

In der Kategorie der R -Algebren existieren Kolimiten beliebiger Diagramme, wobei gilt:

1. Das Koprodukt einer Familie von R -Algebren $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$ entspricht deren Tensorprodukt $\bigotimes_{i \in \Lambda} S_i$.

2. Der Differenzkokern zweier R -Algebrenhomomorphismen $f, g : S_1 \longrightarrow S_2$ entspricht dem Homomorphismus $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$, $y \longmapsto [y]$, wobei $Q := \{f(x) - g(x) \mid x \in S_1\}$ das Bild der Differenz von f und g ist.

Beweis.

Zu 1.: Sei $\mathcal{B} = \{S_i\}_{i \in \Lambda}$ die Unterkategorie der R -Algebren, welche $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$ zusammen mit den Identitätsabbildungen enthält. Somit gilt nach definition 4 $\coprod_{i \in \Lambda} S_i = \lim_{\rightarrow} \mathcal{B}$. Seien weiter:

$\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \coprod_{i \in \Lambda} S_i$ der Morphismus des Koproducts und

$g : \bigoplus_{i \in \Lambda} S_i \longrightarrow \bigotimes_{i \in \Lambda} S_i$ die multilineare Abbildung des Tensorprodukts.

Konstruiere daraus einen Morphismus ψ' und eine multilineare Abbildung g' :

$$\begin{aligned} \psi' : \mathcal{B} &\longrightarrow \bigotimes_{i \in \Lambda} S_i, \text{ mit } \psi'_{S_i} : S_i \longrightarrow \bigotimes_{i \in \Lambda} S_i, s_i \longmapsto g(1, \dots, 1, s_i, 1, \dots, 1) \text{ f\"ur } i \in \Lambda \\ g' : \bigoplus_{i \in \Lambda} S_i &\longrightarrow \prod_{i \in \Lambda} S_i, s \longmapsto \prod_{i \in \{i \in \Lambda \mid s_i \neq 0\}} \psi_i(s_i) \end{aligned}$$

Somit liefern uns die universellen Eigenschaften folgende zwei R -Algebra-Homomorphismen:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & & \bigoplus_i S_i \\ \psi' \swarrow & & \searrow g' \\ \bigotimes_{i \in \Lambda} S_i & \xleftarrow{\exists! \varphi} & \prod_{i \in \Lambda} S_i \\ \varphi : \prod_{i \in \Lambda} S_i & \longrightarrow & \bigotimes_{i \in \Lambda} S_i \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bigoplus_i S_i & & \bigotimes_{i \in \Lambda} S_i \\ g' \swarrow & & \searrow g \\ \prod_{i \in \Lambda} S_i & \xleftarrow{\exists! \phi} & \bigotimes_{i \in \Lambda} S_i \\ \phi : \bigotimes_{i \in \Lambda} S_i & \longrightarrow & \prod_{i \in \Lambda} S_i \end{array}$$

Wende nun die Universelle Eigenschaft von ψ auf ψ selbst an und erhalte $id_{\prod_{i \in \Lambda} S_i} = \phi \circ \varphi$. Analog erhalte auch durch die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes $id_{\bigotimes_i S_i} = \varphi \circ \phi$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & & \bigoplus_i S_i \\ \psi \swarrow & & \searrow g \\ \prod_{i \in \Lambda} S_i & \xleftarrow{\exists! id_{\prod_{i \in \Lambda} S_i} = \phi \circ \varphi} & \prod_{i \in \Lambda} S_i \\ \psi & & g \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bigoplus_i S_i & & \bigotimes_i S_i \\ g \swarrow & & \searrow g \\ \prod_{i \in \Lambda} S_i & \xleftarrow{\exists! id_{\bigotimes_i S_i} = \varphi \circ \phi} & \bigotimes_i S_i \\ g & & \psi \end{array}$$

Damit haben wir Isomorphismen zwischen $\prod_{i \in \Lambda} S_i$ und $\bigotimes_i S_i$ gefunden.

Da das Koproduct $\prod_{i \in \Lambda} S_i = \lim_{\rightarrow} \mathcal{B}$ bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist (lemma 2), definiere dies ab jetzt als $\bigotimes_{i \in \Lambda} S_i$.

Zu 2.: Zeige, dass $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ die in bemerkung 5 eingeführten Eigenschaften des Differenzkokern's besitzt:

$$q \circ f = q \circ g \text{ gilt, da } \text{kern}(q) = Q = \{f(x) - g(x) \mid x \in C_2\}.$$

Sei nun ein R -Algebrahomomorphismus $q' : S_2 \longrightarrow T'$ mit $q' \circ f = q' \circ g$ gegeben. Somit gilt $q' \circ (f - g) = 0$, wodurch Q ein Untermodul von $Q' := \ker(q')$ ist. Mit dem Isomorphiesatz für R -Algebren erhalten wir:

$$S_2/Q' \simeq (S_2/Q)/(Q'/Q).$$

Somit ist $q' : S_2 \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q)$, $y \longmapsto [y]'$ eine isomorphe Darstellung von $q' : S_2 \longrightarrow T'$.

$$\Rightarrow \exists! \varphi : S_2/Q \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q), [y] \longmapsto [y]' \text{ mit } (\varphi \circ q) = q'.$$

Also ist S_2/Q zusammen mit $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ der bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmte Differenzkokern von f und g .

Damit haben wir gezeigt, dass Koprodukte beliebiger Mengen von R -Algebren und Differenzkokerne von je zwei R -Algebrahomomorphismen existieren. Nach Theorem 6 existieren somit in der Kategorie der R -Algebren Kolimiten beliebiger Diagramme. \square

R-Modul-Kolimiten

Proposition 10. [Proposition A6.2 David Eisenbud 1994]

In der Kategorie der R -Moduln existieren Kolimiten beliebiger Diagramme, wobei gilt:

1. Das Koprodukt einer Familie von R -Moduln $\{M_i\}_{i \in \Lambda}$ entspricht deren direkter Summe $\bigoplus_{i \in \Lambda} M_i$.
2. Der Differenzkokern zweier R -Modulhomomorphismen $f, g : M_1 \longrightarrow M_2$ entspricht dem Homomorphismus $q : M_2 \longrightarrow M_2/Q$, $y \longmapsto [y]$, wobei $Q := \{f(x) - g(x) \mid x \in M_1\}$ das Bild der Differenz von f und g ist.

Beweis.

Zu 1.: Sei $\mathcal{B} = \{M_i\}_{i \in \Lambda}$ die Unterkategorie der R -Moduln, welche $\{M_i\}_{i \in \Lambda}$ zusammen mit den Identitätsabbildungen enthält. Betrachte als Morphismus ψ die jeweilige Einbettung von M_i in $\bigoplus_{i \in \Lambda} M_i$:

$$\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \bigoplus_{i \in \Lambda} M_i \text{ mit } \psi_{M_i} : M_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in \Lambda} M_i, m_i \longmapsto (0, \dots, 0, m_i, 0, \dots, 0) \text{ für } i \in \Lambda$$

Somit lässt sich jedes $(m_1, \dots, m_n) \in \bigoplus_{i \in \Lambda} M_i$ (im Fall von $|\Lambda| = \infty$ siehe Bemerkung 7) eindeutig durch die Elemente $m_i \in M_i$ (für $i \in \{1, \dots, n\}$) darstellen:

$$(m_1, \dots, m_n) = \sum_{i=1}^n \psi_{M_i}(m_i)$$

Damit erfüllt ψ die universelle Eigenschaft von $\varinjlim \mathcal{B}$, denn sei $\psi' : \mathcal{B} \longrightarrow M'$ ein beliebiger Morphismus, so existiert genau ein R -Modulhomomorphismus:

$$\varphi : \bigoplus_{i \in \Lambda} M_i \longrightarrow M', (m_1, \dots, m_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \psi'_{M_i}(m_i)$$

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{B} & \\ \psi' \swarrow & & \searrow \psi \\ M' & \xleftarrow{\exists! \varphi} & \bigoplus_i M_i \end{array}$$

Also ist $\bigoplus_{i \in \Lambda} M_i$ zusammen mit den Einbettungen $\psi_{M_i} : M_i \hookrightarrow \bigoplus_{i \in \Lambda} M_i$ das bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmte Koprodukt von $\{M_i\}_{i \in \Lambda}$.

2. Gehe hier vor wie bei proposition 9. Dort haben wir schon gezeigt, dass der Differenzkern von zwei R-Algebra-Homomorphismen dem Kokern, von deren Differenz entspricht.

Damit haben wir gezeigt, dass Koprodukte beliebiger Mengen von R-Moduln und Differenzkokerne von je zwei R-Modulhomomorphismen existieren. Nach theorem 6 existieren somit in der Kategorie der R-Moduln Kolimiten beliebiger Diagramme. \square

2.2 Darstellung von Lokalisierung als Kolimes

Lokalisierung von Algebren als Kolimes

Proposition 11. [vgl. Aufgabe A6.7 David Eisenbud 1994]

Sei S eine R -Algebra und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$S[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{B}$$

Wobei \mathcal{B} aus den Objekten $\{S[t^{-1}] \mid t \in U\}$ und den Morphismen $S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}], (\frac{s}{t^n})_t \mapsto (\frac{st'^n}{(tt')^n})_{(tt')}$ (für $t, t' \in U$) besteht.

Beweis. Sei $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow T$ der Kolimes von \mathcal{B} . Zeige $S[U^{-1}] \simeq T$, definiere dazu:

$$\begin{aligned} \psi' : \mathcal{B} &\longrightarrow S[U^{-1}] \\ \psi'_{S[t^{-1}]} : S[t^{-1}] &\longrightarrow S[U^{-1}], (\frac{s}{t^n})_t \mapsto (\frac{s}{t^n})_U \end{aligned}$$

ψ' ist ein Morphismus, da für beliebige $t, t' \in U$ und $s \in S$ gilt:

$$(\frac{s}{t^n})_U = (\frac{st'^n}{(tt')^n})_U$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir einen eindeutigen Homomorphismus φ mit:

$$\varphi \circ \psi_{S[t^{-1}]} = \psi'_{S[t^{-1}]} \text{ für alle } S[t^{-1}] \in \mathcal{B}.$$

Für die Umkehrabbildung $\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow T$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen:

Zunächst stellen wir fest, dass ψ' ganz $S[U^{-1}]$ abdeckt, also:

Jedes $(\frac{s}{u})_U \in S[U^{-1}]$ lässt sich in der Form $(\frac{s}{u})_U = \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t)$ schreiben (für $t = u$).

Allerdings ist diese Darstellung nicht eindeutig. Zeige also noch, dass ϕ unabhängig von der Wahl von eines Repräsentanten ist. Seien dazu $s_1, s_2 \in S$, $t_1, t_2 \in U$ beliebig, somit gilt:

$$\begin{aligned} \text{Sei } \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_t) &= \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_t) \\ \Rightarrow \exists u \in U : (s_1 t_1 - s_2 t_2) \cdot u &= 0 \\ \Rightarrow (\frac{s_1 u}{t_1 u})_{tu} &= (\frac{s_2 u}{t_2 u})_{tu} \\ \Rightarrow \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_t) &= \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_t) \end{aligned}$$

Mit diesem Wissen können wir den R-Algebra-Homomorphismus $\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow T$ definieren:

$$\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow T, \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t) \longmapsto \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t)$$

$\phi \circ \varphi = id_T$ ergibt sich direkt aus der universellen Eigenschaft des Kolimes:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{B} & \\ \psi \swarrow & & \searrow \psi \\ T & \xleftarrow{\exists! id_T = \phi \circ \varphi} & T \end{array}$$

Für $\varphi \circ \phi \stackrel{!}{=} id_{S[U^{-1}]}$ wähle $s \in S, t \in U$ beliebig. Für diese gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{s}{t})_t)) = \varphi(\psi((\frac{s}{t})_t)) = \psi'((\frac{s}{t})_t)$$

Damit haben wir gezeigt, dass φ, ϕ Isomorphismen sind und somit $T \simeq S[U^{-1}]$ gilt. Da der Kolimes bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig ist (siehe lemma 2), definiere ab sofort $\lim_{\rightarrow} \mathcal{B}$ als $S[U^{-1}]$. \square

Lokalisierung von Moduln als Kolimes [Beweis von Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]

Korrolar 12. Sei M ein S -Modul, wobei S eine R -Algebra ist. Sei weiter $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$M[U^{-1}] = \lim_{\rightarrow} \mathcal{C}$$

Wobei \mathcal{C} aus den Objekten $\{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] | t \in U\}$ und folgenden Mor-

phismen besteht:

$$\begin{aligned} S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] &\longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[(tt')^{-1}]} M[(tt')^{-1}], \\ \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{t^n}\right)_t &\longmapsto \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{t'^n m}{(tt')^n}\right)_t \end{aligned}$$

Auch wenn sich proposition 11 hier nicht direkt anwenden lässt, so können wir doch im Beweis gleich vorgehen.

Beweis. Sei $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow T$ der Colimes von \mathcal{C} . Zeige $M[U^{-1}] \simeq T$, definiere dazu folgenden Morphismus:

$$\begin{aligned} \psi' : \mathcal{C} &\longrightarrow M[U^{-1}] \\ \psi'_t : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] &\longrightarrow M[U^{-1}], \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{t^n}\right)_t \longmapsto \left(\frac{sm}{ut^n}\right)_U \end{aligned}$$

Die Wohldefiniertheit von ψ'_t für ein beliebiges $t \in U$ folgt direkt aus der Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts. Denn für die bilineare Abbildung $f : S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \longrightarrow M[t^{-1}], \left(\left(\frac{s}{u}\right)_U, \left(\frac{m}{t^n}\right)_t\right) \longmapsto \left(\frac{sm}{ut^n}\right)_U$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] & \xrightarrow{g} & S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \psi'_t \\ & & M[U^{-1}] \end{array}$$

Durch die Universalitätseigenschaft des Kolimes erhalten wir nun einen eindeutigen Homomorphismus $\varphi : T \longrightarrow M[U^{-1}]$ mit:

$$\varphi \circ \psi_t = \psi'_t \text{ für alle } t \in U.$$

Für die Umkehrabbildung $\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow T$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen: Wir stellen fest, dass für jedes $t \in U$ gilt:

Jedes $\left(\frac{m}{u}\right)_U \in M[U^{-1}]$ lässt sich in der Form $\left(\frac{m}{u}\right)_U = \psi_t\left(\left(\frac{1}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{1}\right)_t\right)$ schreiben.

Diese Darstellung ist unabhängig von der Wahl von $t \in U$, denn für beliebige $t_1, t_2, u \in U$ und $m \in M$ gilt:

$$\psi'_{t_1}\left(\left(\frac{1}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{1}\right)_{t_1}\right) = \left(\frac{m}{u}\right)_U = \psi'_{t_2}\left(\left(\frac{1}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{1}\right)_{t_2}\right)$$

Für ψ gilt in diesem Fall:

$$\psi_{t_1}\left(\left(\frac{1}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{1}\right)_{t_1}\right) = \psi_{t_1 t_2}\left(\left(\frac{1}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{1}\right)_{t_1 t_2}\right) = \psi_{t_2}\left(\left(\frac{1}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{1}\right)_{t_2}\right)$$

Definiere nun mit diesem Wissen folgenden Homomorphismus:

$$\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow T, \psi_t\left(\left(\frac{1}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{1}\right)_t\right) \longmapsto \psi'_t\left(\left(\frac{1}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{1}\right)_t\right)$$

$\phi \circ \varphi = id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes.
Für $\varphi \circ \phi \stackrel{!}{=} id_{M[U^{-1}]}$ wähle $(\frac{m}{u})_U \in M[U^{-1}]$ beliebig, für dieses gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi'_t((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)) = \varphi(\psi_t((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)) = \psi'_t((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)$$

Damit haben wir $T \simeq M[U^{-1}]$ gezeigt, definiere also ab sofort $M[U^{-1}]$ als den Kolimes von \mathcal{C} . \square

2.3 Kähler-Differenzial von Kolimiten

Differenzial des Kolimes von R-Algebren [vgl. Korollar 16.7 David Eisenbud 1994]

Proposition 13.

1. Sei $T = \otimes_{i \in \Lambda} S_i$ das Koprodukt der R -Algebren S_i .
Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} \simeq \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$$

2. Seien S_1, S_2 R -Algebren und $\varphi, \varphi' : S_1 \rightarrow S_2$ R -Algebra-Homomorphismen.
Sei weiter $q : S_2 \rightarrow T$ der Differenzkokern von φ, φ' . Dann ist folgende Sequenz rechtsexakt:

$$T \otimes_{S_1} \Omega_{S_1/R} \xrightarrow{f} T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R} \xrightarrow{g} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

$$\text{mit: } f : T \otimes \Omega_{S_1/R} \rightarrow T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R}, t \otimes d_{S_1}(x_1) \mapsto t \otimes d_{S_2}(\varphi(x_1) - \varphi(x_2))$$

$$g : T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R} \rightarrow \Omega_{T/R}, t \otimes d_{S_2}(x_2) \mapsto (d_T \circ q)(x_2)$$

Beweis.

Für **1.** finde durch die Universelle Eigenschaft des Kähler-Differenzials Isomorphismen $\Omega_{T/R} \hookrightarrow \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$.

Definiere das Differenzial $e : T \rightarrow \bigoplus_{i \in \Lambda} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}, (s_i \otimes \dots) \mapsto (1 \otimes d_{S_1}, \dots)$ und erhalte dadurch

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{d_T} & \Omega_{T/R} \\ & \searrow e & \downarrow \exists! \varphi \\ & & \bigoplus_{i \in \Lambda} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \end{array} \quad \varphi : \Omega_{T/R} \rightarrow \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}).$$

Definiere nun das Differenzial $k : S_i \hookrightarrow T \rightarrow \Omega_{T/R}$ und erhalte dadurch:

$$\begin{array}{ccc}
S_i & \xrightarrow{d_{S_i}} & \Omega_{S_i/R} \xrightarrow{a} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \\
& \searrow k & \downarrow \exists! k' \swarrow \phi_i \\
& & \Omega_{T/R}
\end{array}
\quad \phi_i : \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \longrightarrow \Omega_{T/R}$$

$$\phi : \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \longrightarrow \Omega_{T/R}, \quad (... , t_i \otimes d_{S_i}(s_i), ...) \longmapsto \prod_{i \in \Lambda} t_i \cdot \phi_i(d_{S_i}(s_i))$$

Damit haben wir zwei zueinander inverse Funktionen φ, ϕ gefunden.

$$\Rightarrow \Omega_{T/R} \simeq \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$$

Für 2. Wende Satz 10 auf den Differenzkokern $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ (vgl. Proposition 9) an und erhalte dadurch eine exakte Sequenz, welche ähnlich zu der gesuchten ist:

$$Q/Q^2 \xrightarrow{f'} T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R} \xrightarrow{g} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

mit $f' : Q/Q^2 \longrightarrow T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R}, [s_2]_{Q^2} \longmapsto 1 \otimes d_{S_2}(s_2)$.

Somit gilt $\text{im}(f) = T \otimes_{S_2} d_{S_2}(Q) = \text{im}(f')$.

\Rightarrow die gesuchte Sequenz ist exakt. \square

s

Differenzial von Polynomalgebren 1 [vgl. Proposition 16.1 David Eisenbud 1994]

Korollar 14. Sei $S = R[x_1, \dots, x_n]$ eine Polynomalgebra über R . Dann gilt:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} S \langle d_S(x_i) \rangle$$

Wobei $S \langle d_S(x_i) \rangle$ das von $d_S(x_i)$ erzeugte Modul über S ist.

Beweis. Wie in Bemerkung 8 gezeigt, können wir S als $\bigotimes_{i \in \{1, \dots, n\}} R[x_i]$ schreiben. In Proposition 13 haben wir gezeigt, wie das Differenzial eines solchen Tensorproduktes aussieht:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} (S \otimes_{R[x_i]} \Omega_{R[x_i]/R})$$

Da $R[x_i]$ die aus dem Element x_i erzeugte Algebra über R ist, folgt [vgl. BE-MERKUNG ZU ENDLICH ERZEUGTEN ALGEBREN]:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} (S \otimes_{R[x_i]} R[x_i] \langle d_{S[x_i]}(x_i) \rangle) \simeq \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} S \langle d_S(x_i) \rangle$$

Für die letzte Isomorphie nutze, dass wegen $R[x_i] \subseteq S$ zum Einen $d_{R[x_i]}$ als Einschränkung von d_S gesehen werden kann und zum Anderen $S \otimes_{R[x_i]} R[x_i] \simeq S$ gilt. \square

Differenzial von Polynomalgebren 2 [vgl. Korrolar 16.6 David Eisenbud 1994]

Korrolar 15. Sei S eine R -Algebra und $T := S[x_1, \dots, x_n]$ eine Polynomalgebra über S . Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$

Beweis. Betrachte T als Tensorprodukt über R -Algebren und wende anschließend proposition 13 an:

$$\begin{aligned} T &\simeq S \otimes_R R[x_1, \dots, x_n] \\ \Rightarrow \Omega_{T/R} &\simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus (T \otimes_{R[x_1, \dots, x_n]} \Omega_{R[x_1, \dots, x_n]/R}) \end{aligned}$$

Zuletzt wende den soeben gezeigten korrolar 14 an und nutze schließlich $R[x_1, \dots, x_n] \subseteq T$ um das Tensorprodukt zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} &T \otimes_{R[x_1, \dots, x_n]} \Omega_{R[x_1, \dots, x_n]/R} \\ &\simeq T \otimes_{R[x_1, \dots, x_n]} \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} R[x_1, \dots, x_n] \langle d_{R[x_i]}(x_i) \rangle \\ &\simeq \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_R(x_i) \rangle \end{aligned}$$

□

Differenzial der Lokalisierung [vgl. Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]

Theorem 16. Sei S eine R -Algebra und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Omega_{S[U^{-1}]/R} &\simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}, \text{ Wobei:} \\ d_{S[U^{-1}]}((\frac{1}{u})_u) &\longmapsto -(\frac{1}{u^2})_u \otimes d_S(u) \end{aligned}$$

Beweis. Wir wollen THEOREM16.8 auf $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$ aus proposition 11 anwenden.

Zeige also zunächst den einfacheren Fall $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ für ein beliebiges $t \in U$:

Nutze hierfür die Isomorphe Darstellung $S[t^{-1}] \simeq S[x]/(tx - 1)$, sowie die Isomorphie $\Omega_{S[x]/R} \simeq S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x] d_{S[x]}(x)$. aus korrolar 15

Daraus erhalten wir folgende Isomorphismen:

$$\begin{aligned}\alpha &: S[t^{-1}] \longrightarrow S[x]/(tx - 1) \\ \beta &: S[x]/(tx - 1) \longrightarrow S[t^{-1}] \\ \gamma &: \Omega_{S[x]/R} \longrightarrow S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x)\end{aligned}$$

Nutze diese nun, um $\Omega_{S[t^{-1}]/R}$ isomorph zu $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ umzuformen:

$$\begin{array}{ccc}\Omega_{S[t^{-1}]/R} & & d_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t) \\ \downarrow D\alpha & & \downarrow D\alpha \\ \Omega_{S[x]/R}/d_{S[x]}(tx - 1) & & [d_{S[x]}(sx)] = [xd_{S[x]}(s) + sd_{S[x]}(x)] \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \\ (S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x))/((tx - 1)d_{S[x]}(tx - 1)) & & [x \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \\ \downarrow \beta & & \downarrow \beta \\ (S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus S[t^{-1}]d_{S[x]}(x)/d_{S[x]}(tx - 1) =: M & & [(\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} & & ((\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s)) - ((\frac{s}{t^2})_t \otimes d_S(t))\end{array}$$

Die ersten drei Schritte ergeben sich aus den oben angegebenen Isomorphismen. Für den letzten Schritt definiere:

$$f : M \longrightarrow S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}, [(\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \longmapsto ((\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s)) - ((\frac{s}{t^2})_t \otimes d_S(t))$$

Damit f ein Isomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ ein eindeutiges Repräsentantensystem von M ist.

Sei dazu $[m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]$ ein beliebiger Erzeuger von M . Somit gilt:

$$\begin{aligned}d_{S[x]}(tx - 1) &= td_{S[x]}(x) + \beta(x)d_{S[x]}(s) \\ \Rightarrow [0, d_{S[x]}(x)] &= [-(\frac{1}{t^2})_t d_S(t), 0] \\ \Rightarrow [m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)] &= [m_1 - (\frac{s}{t^{n+2}})_t d_S(t), 0] = [f([m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]), 0]\end{aligned}$$

f ist also wie vermutet ein Isomorphismus und aus obigen Umformungen folgt $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} = \Omega_{S/R}[t^{-1}]$.

Definiere für beliebige $t \in U$ folgenden Isomorphismus:

$$f \circ \beta \circ \gamma \circ D\alpha =: \delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}], d_{S[t^{-1}]}((\frac{1}{t})_t) \longmapsto -(\frac{d_S(t)}{t^2})_t$$

Zeige nun den Allgemeinen Fall $\Omega_{S[U^{-1}]/R} \simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$:

Wähle $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$ wie in proposition 11, sodass $\varinjlim \mathcal{B} = S[U^{-1}]$ gilt.

Mit THEOREM16.8 folgt somit:

$$\begin{aligned} \Omega_{S[U^{-1}]/R} &= \varinjlim \mathcal{F} \text{ mit:} \\ \mathcal{F} : \mathcal{B} &\longrightarrow (S[U^{-1}] - \text{Module}), S[t^{-1}] \longmapsto S[U^{-1}] \otimes \Omega_{S[t^{-1}]/R} \\ &(\varphi : S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}]) \\ &\longmapsto (1 \otimes D\varphi : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R})) \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Morphismen in $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ definiere folgenden Isomorphismus:

$$\begin{aligned} g : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) &\longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R} \\ \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \left(\left(\frac{s'}{t}\right)_t \otimes d_{S[tt'^{-1}]}(x)\right) &\longmapsto \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \varphi\left(\left(\frac{s'}{t}\right)_t\right) d_{S[tt'^{-1}]}(x) \end{aligned}$$

Als letzten Schritt wollen wir ?? anwenden. Nutze dazu $\delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}]$ um den zu \mathcal{F} isomorphen Funktor $\mathcal{F}' := \delta \circ \mathcal{F}$ zu erhalten. Um ein genaueres Bild von \mathcal{F}' zu erlangen, betrachte folgendes Kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} S[t^{-1}] & \xrightarrow{\varphi} & S[tt'^{-1}] \\ \downarrow \mathcal{F} & & \downarrow \mathcal{F} \\ S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[t^{-1}]/R} & \xrightarrow{1 \otimes D\varphi} & S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) \\ & & \downarrow g \\ & & S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R} \\ \downarrow \delta_t & & \downarrow \delta_{tt'} \\ S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] & \xrightarrow{1 \otimes \varphi} & S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S/R}[tt'^{-1}] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \left(\frac{s}{t}\right)_t & \xrightarrow{\varphi} & \left(\frac{st'}{tt'}\right)_{tt'} \\ \downarrow d_{S[t^{-1}]} & & \downarrow d_{S[tt'^{-1}]} \\ 1 \otimes \left(\left(\frac{1}{t}\right)_t d_{S[t^{-1}]} \left(\left(\frac{s}{1}\right)_t\right) + \left(\frac{s}{1}\right)_t d_{S[t^{-1}]} \left(\left(\frac{1}{t}\right)_t\right)\right) & \xrightarrow{g \circ (1 \otimes D\varphi)} & 1 \otimes \left(\left(\frac{1}{tt'}\right)_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]} \left(\left(\frac{st'}{1}\right)_{tt'}\right) + \left(\frac{st'}{1}\right)_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]} \left(\left(\frac{1}{tt'}\right)_{tt'}\right)\right) \\ \downarrow \delta_t & & \downarrow \delta_{tt'} \\ 1 \otimes \left(\left(\frac{d_S(s)}{t}\right)_t - \left(\frac{sd_S(t)}{t^2}\right)_t\right) & \xrightarrow{1 \otimes \varphi} & 1 \otimes \left(\left(\frac{t' d_S(s)}{tt'}\right)_{tt'} - \left(\frac{st' d_S(t)}{(tt')^2}\right)_{tt'}\right) (*) \end{array}$$

Dass das Diagramm in dieser Form kommutiert, ergibt sich in fast allen Fällen direkt aus dem Einsetzen in die entsprechenden Homomorphismen. Der einzige

Fall, welcher nicht direkt klar ist, ist (*). Rechne diesen also nochmal nach:

$$\begin{aligned}
& \delta_{tt'}(1 \otimes ((\frac{1}{tt'})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{st'}{1})_{tt'}) + (\frac{st'}{1})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{1}{tt'})_{tt'}))) \\
&= 1 \otimes ((\frac{d_S(st')}{tt'})_{tt'} - (\frac{t' sd_S(tt')}{(tt')^2})_{tt'}) \\
&= 1 \otimes ((\frac{t' d_S(s')}{tt'})_{tt'} + (\frac{sd_S(t')}{tt'})_{tt'} - (\frac{tt' d_S(t')}{(tt')^2})_{tt'} - (\frac{t'^2 sd_S(t)}{(tt')^2})_{tt'}) \\
&= 1 \otimes ((\frac{t' d_S(s)}{tt'})_{tt'} - (\frac{t'^2 sd_S(t)}{(tt')^2})_{tt'}) \\
&= (1 \otimes \varphi)(1 \otimes ((\frac{d_S(s)}{t})_t - (\frac{sd_S(t)}{t^2})_t))
\end{aligned}$$

Damit ist \mathcal{F}' zu \mathcal{F} isomorph und für $\mathcal{C} := \mathcal{F}'(\mathcal{B})$ gilt $\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \varinjlim \mathcal{F}' = \varinjlim \mathcal{C}$ [vgl. korrolar 3]. Wobei die Form von \mathcal{C} genau dem Fall aus ?? entspricht:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] | t \in U\} \text{ mit den Morphismen} \\
1 \otimes \varphi : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] &\longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S/R}[tt'^{-1}] \\
(\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{d_S(x)}{t^n})_t &\longmapsto (\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{t'^n d_S(x)}{(tt')^n})_{tt'}
\end{aligned}$$

Somit folgt $\varinjlim \mathcal{C} = \Omega_{S/R}[U^{-1}]$ und wir haben $\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \Omega_{S/R}[U^{-1}]$ gezeigt. \square

Kapitel 3

Körpererweiterungen

3.1 Einführung in transzendente Körpererweiterungen

Sei im folgenden k ein Körper.

Wir haben in BEISPIEL gesehen, dass das Kähler-Differenzial algebraischer Körpererweiterungen über k der Null-Vektorraum über k ist. Dies liegt daran, dass im Falle einer algebraischen Körpererweiterung $k(\alpha)/k$ ein irreduzibles Polynom $f(x) \in k[x]$ existiert, mit $f(\alpha) = 0$ und $k[\alpha] \simeq k[x]/(f(x))$.

Im Falle einer transzendenten Körpererweiterung $k(\beta)$ existiert kein solches Polynom in $k[x]$ und es gilt $k(\beta) \simeq k(x)$. In KORROLAR haben wir gesehen, dass in diesem Falle $\Omega_{k(x)/k} \simeq ???$ gilt. Dies motiviert dazu Transzendente Körpererweiterungen und deren Differenzial näher zu untersuchen. Dazu wird hier elementares Wissen über algebraische Körpererweiterungen vorausgesetzt [eventuell nach zu lesen in Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009].

In diesem Kapitel führen wir Transzendenzbasen ein und untersuchen diese näher.

Definition 1. [vgl. Anhang A1 David Eisenbud 1994 sowie Kapitel 22 Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009]

Sei L/k eine Körpererweiterung. Dann definieren wir:

- Eine endliche Teilmengen $\{l_1, \dots, l_n\} \subseteq L$ heißt algebraisch unabhängig über k , falls gilt:

$$\forall P(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n] : P(l_1, \dots, l_n) \neq 0$$

- Eine Teilmenge $B \subseteq L$ heißt transzendent über k , falls jede ihrer endlichen Teilmengen $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq B$ algebraisch unabhängig über k ist.
- Eine Teilmenge $B \subseteq L$ ist eine Transzendenzbasis von L/k , falls sie transzendent über k und die Körpererweiterung $L/k(B)$ algebraisch ist.

- Falls eine Transzendenzbasis von B von L/k existiert, sodass $k(B) = L$ gilt, so ist L/k eine pur transzendente Körpererweiterung.

pur transzendente Erweiterung

Korrolar 2. [Eigene Überlegung]

Sei L/k eine pur transzendente Körpererweiterung mit Transzendenzbasis B . Dann gilt:

$$L \simeq k(\{x_b\}_{b \in B})$$

Insbesondere ist $\{x_b\}_{b \in B}$ eine Transzendenzbasis der Körpererweiterung der rationalen Funktionen $k(\{x_b\}_{b \in B})$ über k .

Beweis. Betrachte folgenden Körpermorphismus und zeige, dass es sich dabei um einen Isomorphismus handelt:

$$\Phi : k(\{x_b\}_{b \in B}) \longrightarrow k(B), \quad \frac{P(x_{b_1}, \dots, x_{b_n})}{Q(x_{b_1}, \dots, x_{b_n})} \longmapsto \frac{P(b_1, \dots, b_n)}{Q(b_1, \dots, b_n)}$$

Da B als Transzendenzbasis insbesondere transzendent über k ist, ist jede endliche Teilmenge von algebraisch unabhängig über k . Dies bedeutet:

$$\begin{aligned} \forall \{b_1, \dots, b_n\} \in B \quad \forall P(x_{b_1}, \dots, x_{b_n}) \in k[x_{b_1}, \dots, x_{b_n}] : \\ P(x_{b_1}, \dots, x_{b_n}) \Rightarrow P(b_1, \dots, b_n) \neq 0 \end{aligned}$$

Folglich ist Φ wohldefiniert und insbesondere injektiv.

Dass Φ surjektiv ist, folgt direkt aus der Definition von $L = k(B)$ als Quotientenkörper über $k[x]$.

Dass $\{x_b\}_{b \in B}$ Transzendenzbasis von $k(\{x_i\}_{i \in B})$ ist folgt direkt aus ???. Denn jede endliche Teilmenge $\{x_{b_1}, \dots, x_{b_n}\} \subseteq \{x_b\}_{b \in B}$ ist transzendent, da $k[x_1, \dots, x_n]$ und $k[x_{b_1}, \dots, x_{b_n}]$ isomorph zueinander sind. Außerdem ist die triviale Körpererweiterung $k(x_{b_1}, \dots, x_{b_n})/k(x_{b_1}, \dots, x_{b_n})$ algebraisch. \square

Transzendenzbasis ist maximale transzendente Menge

Lemma 3. [Lemma 22.1 Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009]

Sei L/k ein Körpererweiterung und $B \subseteq L$ eine über k transzendente Teilmenge. Dann gilt:

B ist genau dann eine Transzendenzbasis von L/k , wenn B bezüglich der Inklusion ein maximales Element der Menge aller über k transzenten Elemente aus L ist.

Beweis.

„ \Rightarrow :“ Sei B eine Transzendenzbasis über k . Zeige, dass für ein beliebiges Element $a \in L \setminus B$ die Menge $B \cup \{a\} \subseteq L$ nicht transzendent über k ist:

Da die Körpererweiterung $L/k(B)$ algebraisch ist, existiert

$$0 \neq P(x) \in k(B)[x] \text{ mit } P(a) = 0.$$

Aus der Definition von $k(B)$ geht hervor, dass $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq B$ existiert, mit $P(x) \in k(\{b_1, \dots, b_n\})[x]$.

Wir können ohne weitere Einschränkung annehmen, dass $P(x) \in k[\{b_1, \dots, b_n\}][x]$ gilt, denn falls dies nicht der Fall sein sollte, wähle $m \in \mathbb{N}$ groß genug, so dass $(P(x) \cdot (\prod_i b_i)^m) \in k[\{b_1, \dots, b_n\}]$ gilt.

Wähle nun $P'(x_1, \dots, x_n, x) \in k[x_1, \dots, x_n, x]$ mit $P'(b_1, \dots, b_n, x) = P(x)$.

$$\text{Dies erfüllt } P'(b_1, \dots, b_n, a) = 0.$$

Folglich ist $B \cup \{b_1, \dots, b_n, a\}$ algebraisch abhängig und insbesondere $B \cup \{a\}$ nicht transzendent über k .

„ \Leftarrow :“ Sei B bezüglich der Inklusion ein maximales Element der Menge aller über k transzendenten Elemente aus L . Zeige für ein beliebiges Element $a \in L \setminus k(B)$, dass dieses algebraisch über $k(B)$ ist:

Nach Voraussetzung existiert eine endliche Teilmenge $\{b_1, \dots, b_n, a\} \subseteq B \cup \{a\}$, welche algebraisch abhängig über k ist.

Also existiert $P(x_1, \dots, x_{n+1}) \in k[x_1, \dots, x_{n+1}]$ mit $P(b_1, \dots, b_n, a) = 0$.

Für $P'(x) := P(b_1, \dots, b_n, x) \in k(B)[x]$ gilt somit $P'(a) = 0$

Die Existenz eines solchen Polynoms $P'(x)$ zeigt uns, dass a algebraisch über $k(B)$ ist.

Damit haben wir gezeigt, dass jedes $a \in L$ algebraisch über $k(B)$ ist. Folglich ist $L/k(B)$ algebraisch und B eine Transzendenzbasis von L über k .

□

Existenz von Transzendenzbasen

Proposition 4. [Kapitel 22.1.3 Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009]
Jede Körpererweiterung $L \subseteq k$ besitzt eine Transzendenzbasis $B \subseteq L$.

Beweis. Verwende hierzu das Lemma von Zorn:

lemma 3 besagt, dass die Transzendenzbasen von L/k gerade die maximalen Elemente der Menge aller über k transzendenten Elemente aus L sind.

Das Lemma von Zorn besagt, dass jede partiell geordnete Menge, in der jede total geordneten Untermenge (auch Kette genannt) eine obere Schranke besitzt, ein Maximales Element besitzt [vgl. Kapitel A2.3 Christian Karpfinger, Kurt

Meyberg 2009].

Sei also \mathbb{B} eine Kette von Transzendenten Mengen.

Offensichtlich ist $\tilde{B} := \bigcup_{B \in \mathbb{B}} B \in L$ eine obere Schranke von \mathbb{B} . Zeige also noch, dass \tilde{B} auch transzendent ist.

Annahme: \tilde{B} ist nicht transzendent:

Also existiert $\{b_1, \dots, b_n\} \in \tilde{B}$ mit: $\{b_1, \dots, b_n\}$ ist algebraisch abhängig über k . Da \mathbb{B} bezüglich der Inklusion total geordnet ist, existiert ein $B \in \mathbb{B}$ mit $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq B$. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass $B \in \mathbb{B}$ transzendent über k ist.

Damit war unsere Annahme falsch und wir haben gezeigt, dass die Menge der über k transzendenten Teilmengen von L mindestens ein maximales Element und damit L/k eine Transzendenzbasis besitzt. \square

Transzendent ist pur transzendent plus algebraisch 1

Korrolar 5. *[Eigene Überlegung] Für jede Körpererweiterung L/k existiert ein Zwischenkörper $K \subseteq L$, sodass K/k eine pur transzendente und L/K eine algebraische Körpererweiterung ist.*

Beweis. Nach proposition 4 existiert eine Transzendenzbasis B von L/k .

Wie in definition 1 beschrieben ist somit $k(B)/k$ pur transzendent und $L/k(B)$ algebraisch.

Wähle also $K := k(B)$. \square

Transzendenzbasen sind immer gleich lang [Theorem A1.1 David Eisenbud 1994]

Proposition 6. *Sei L/k eine Körpererweiterung. Seien weiter A, B zwei Transzendenzbasen von L über k . Dann gilt:*

$$|A| = |B|$$

Wir nennen $|B|$ den Transzendenzgrad von L/k .

Beweis. Im Fall von $|A| = |B| = \infty$ sind wir schon fertig, Sei also ohne Einschränkung $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ mit $\min(m, n) = n < \infty$.

Wir wollen zunächst in n Schritten die Elemente aus B durch Elemente aus A ersetzen und damit zeigen, dass $\{a_1, \dots, a_n\}$ eine Transzendenzbasis von L über k ist:

Für den i -ten Schritt definiere $A_i := \{a_1, \dots, a_{i-1}\} \subseteq A$, $B_i := \{b_i, \dots, b_n\} \subseteq B$ und gehe davon aus, dass $A_i \cup B_i$ eine Transzendenzbasis ist:

Nach lemma 3 ist $\{a_i\} \cup A_i \cup B_i = A_{i+1} \cup B_i$ nicht transzendent und somit

algebraisch abhängig.

Also existiert $P \in k[x_1, \dots, x_n]$ mit $P(a_i, a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, \dots, b_n) = 0$.

Definiere $P'(x) := P(a_i, a_1, \dots, a_{i-1}, x, b_{i+1}, \dots, b_n) \in k(A_{i+1} \cup B_{i+1})[x]$.

Dieses erfüllt $P'(b_i) = 0$.

Da $A_i \subseteq A$ algebraisch unabhängig ist, gilt $P(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, \dots, x_n) \neq 0$. Nummeriere also gegebenenfalls B vor der Bildung von $P'(x)$ so um, dass auch $P'(x) \neq 0$ gilt.

Die Existenz eines solchen $P'(x)$ zeigt uns, dass die Körpererweiterungen $L \subset k(A_{i+1} \cup B_i) = k(A_{i+1} \cup B_{i+1})(\{b_i\}) \subset k(A_{i+1} \cup B_{i+1})$ algebraisch sind und legt nahe, dass $A_{i+1} \cup B_{i+1}$ wieder eine Transzendenzbasis ist.

Um dies zu zeigen nehme zunächst an $A_{i+1} \cup B_{i+1}$ wäre algebraisch abhängig.

Also existiert $Q \in k[x_1, \dots, x_n]$ mit $Q(a_1, \dots, a_i, b_{i+1}, \dots, b_n) = 0$.

Definiere $Q'(x) := Q(a_1, \dots, a_{i-1}, x, b_{i+1}, b_n) \in k(a_1, \dots, a_{i-1}, b_{i+1}, b_n)[x]$.

Dieses erfüllt $Q'(a_i) = 0$.

Da $(A_{i+1} \cup B_{i+1}) \setminus \{a_i\} \subseteq A_i \cup B_i$ algebraisch unabhängig ist gilt $Q'(x) \neq 0$.

Die Existenz eines solchen $Q'(x)$ zeigt uns, dass die Körpererweiterung $L \subset k(A_{i+1} \cup B_{i+1}) \subset k((A_{i+1} \cup B_{i+1}) \setminus \{a_i\}) = k((A_i \cup B_i) \setminus \{b_i\})$ algebraisch ist. Damit ist $(A_i \cup B_i) \setminus \{b_i\}$ eine Transzendenzbasis, was nach lemma 3 im Widerspruch dazu steht, dass $A_i \cup B_i$ eine Transzendenzbasis ist.

Folglich ist $A_{i+1} \cup B_{i+1}$ transzendent und somit eine Transzendenzbasis von L über k .

Dieses Verfahren zeigt uns, dass $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$ eine Transzendenzbasis von L über k ist. Nach lemma 3 muss somit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $m = n$ gelten. \square

Unterschiedliche Transzendenzbasen bsp

Beispiel 7. [Eigene Überlegung] Sei dazu $L = k(y)$ der Körper der rationalen Funktionen über k . Betrachte zwei unterschiedliche Transzendenzbasen von L/k :

1. $B = \{y\}$ ist eine Transzendenzbasis von L/k mit $\deg(L/k(B)) = 1$.
2. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $B' = \{y^n\}$ eine Transzendenzbasis von L/k mit $\deg(L/k(B')) = n$.

$f(x) = x^n - y^n \in k(y^n)[x]$ ist Minimalpolynom von x über $k(y^n)$.
 $\Rightarrow k(y)/k(y^n)$ ist eine algebraische Körpererweiterung vom Grad n

Dies zeigt, dass die Form des Körpers $k(B)$ und insbesondere der Grad der Körpererweiterung $L/k(B)$ sehr von der Wahl der Transzendenzbasis B abhängt.

3.2 Kähler-Differenzial von Körpererweiterungen

Definition der Differenzialbasis [vgl. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]

Definition 8. Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung. Dann nennen wir eine Teilmenge $\{b_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq L$ eine Differenzialbasis von L über k , falls $\{d_K(b_i)\}_{i \in \Lambda}$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{L/R}$ über L ist.

Differential von rationalen Funktionen 1 [vgl. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]

Beispiel 9. Sei k ein Körper und $L = k(\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in n Variablen über k .

Dann gilt:

$$\Omega_{L/k} \simeq L \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle$$

Insbesondere ist $\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ eine Differenzialbasis von $\Omega_{L/k}$.

Beweis. Betrachte $L = k[x_1, \dots, x_n][k[x_1, \dots, x_n]^{-1}]$ als Lokalisierung um theorem 16 anwenden zu können. Anschließend forme noch $\Omega_{k[x_1, \dots, x_n]/k}$ mithilfe von korrolar 14 isomorph um:

$$\begin{aligned} \Omega_{L/k} &\simeq L \otimes \Omega_{k[x_1, \dots, x_n]/k} \\ &\simeq L \otimes \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} k[x_1, \dots, x_n] \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \\ &\simeq L \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \end{aligned}$$

Damit ist $\{d_L(x_i)\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{L/k}$. □

Differential von rationalen Funktionen 2 [Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]

Korrolar 10. Sei k ein Körper und $L \supset k$ eine Körpererweiterung und $T = L(\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in n Variablen über L . Dann gilt:

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$

Beweis. Betrachten T als Lokalisierung von $L[x_1, \dots, x_n]$ und gehen dann analog zu beispiel 9 vor:

$$\begin{aligned} \Omega_{T/k} &\simeq T \otimes_{L[x_1, \dots, x_n]} \Omega_{L[x_1, \dots, x_n]/k} \text{ (theorem 16)} \\ \Omega_{L[x_1, \dots, x_n]/R} &\simeq (L[x_1, \dots, x_n] \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} L[x_1, \dots, x_n] \langle d_{L[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \text{ (korrolar 15)} \\ &\Rightarrow \Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle \end{aligned}$$

□

Cotangent Sequenz von Koerpern 1 [Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]

Bemerkung 11. Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung und $T = L(x_1, \dots, x_n)$ der Körper der rationalen Funktionen in n Variablen über L . Dann ist die COTANGENT SEQUENZ (satz 9) von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ eine kurze Exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Im Genauen ist $\varphi : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k}$, $t \otimes d_L(l) \mapsto t \cdot d_T(l)$ injektiv.

Beweis. Die Injektivität von φ folgt direkt aus der isomorphen Darstellung von $\Omega_{T/k}$, die wir uns in korollar 10 erarbeitet haben.

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$

Um sicher zu gehen definiere $\varphi' \simeq \varphi$ und durchlaufe die in korollar 10 genutzten Isomorphismen noch einmal Schritt für Schritt:

$$\varphi' : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$

$$\begin{array}{ccc} T \otimes_L \Omega_{L/k} & & t \otimes d_L(l) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_{T/k} & & td_T(l) \\ \downarrow \text{theorem 16} & & \downarrow \\ T \otimes_S \Omega_{L[x_1, \dots, x_n]/k} & & t \otimes d_S(l) \\ \downarrow \text{korollar 15} & & \downarrow \\ T \otimes_S ((S \otimes_L \Omega_{L/k}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} S \langle d_S(x_i) \rangle) & & t \otimes (d_L(l), 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle & & (t \otimes d_L(l), 0) \end{array}$$

Damit ist φ eine injektive Einbettung von $T \otimes_L \Omega_{L/k}$ in $\Omega_{T/k}$. \square

Aufbaulemma Koerperdifferenzial [vgl. Lemma 16.15 David Eisenbud 1994]

Lemma 12. Sei $L \subset T$ eine seperable und algebraische Körpererweiterung und $R \longrightarrow L$ ein Ringhomomorphismus. Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} = T \otimes_L \Omega_{L/R}$$

Insbesondere ist in diesem Fall die COTANGENT SEQUENZ (satz 9) von $R \rightarrow L \hookrightarrow T$ eine kurze Exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \longrightarrow \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Beweis. Wähle $\alpha \in T$ mit $L[\alpha] = T$. Sei weiter $f(x)$ das Minimalpolynom von α . Betrachte dazu die conormale Sequenz von $\pi : L[x] \rightarrow L[x]/(f) \simeq T$ (satz 10):

$$(f)/(f^2) \xrightarrow{1 \otimes d_{L[x]}} T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

Wende nun Proposition 16.6 auf $\Omega_{L[x]/R}$ an und tensoriere mit T , somit gilt:

$$T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \simeq T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle$$

Zusammen mit der conormalen Sequenz bedeutet dies:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle) / (d_{L[x]}(f))$$

Wenn wir $d_{L[x]} : (f) \rightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle$ wie in proposition 5 betrachten, sehen wir:

$$d_{L[x]}((f)) = J \oplus (f'(\alpha)d_{L[x]}) = J \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle$$

, wobei $J \subseteq T \otimes_L \Omega_{L/R}$ ein Ideal ist.

Für die letzte Gleichheit nutze, dass $T \supset L$ separabel und somit $f'(\alpha) \neq 0$ ist und nach obiger Wahl $T = L[\alpha]$ gilt.

Damit erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} \Omega_{T/R} &\simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) / J \\ &\Rightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \hookrightarrow \Omega_{T/R} \text{ ist surjektiv.} \end{aligned}$$

Somit muss $J = 0$ gelten und es folgt $T \otimes_L \Omega_{L/R} \simeq \Omega_{T/R}$.

Damit haben wir insbesondere auch gezeigt, dass $T \otimes_L \Omega_{L/R} \rightarrow \Omega_{T/R}$ injektiv und somit die COTANGENT SEQUENZ von $R \rightarrow L \hookrightarrow T$ eine kurze exakte Sequenz ist. \square

Transzendenzbasis ist Differenzialbasis [vgl. Theorem 16.4 David Eisenbud 1994]

Theorem 13. Sei $T \supset k$ eine separabel generierte Körpererweiterung und $B = \{b_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq T$. Dann ist B genau dann eine Differenzialbasis von T über k , falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. $\text{char}(k) = 0$ und B ist eine Transzendenzbasis von T über k .
2. $\text{char}(k) = p$ und B ist eine p -Basis von T über k .

Beweis.

1. „ \Leftarrow “: Sei B eine Transzendenzbasis von T über k .

Damit ist die Körpererweiterung $L := k(B) \supset k$ algebraisch und separabel.

Mit lemma 12 folgt:

$$\Omega_{T/k} = T \otimes_L \Omega_{L/k}$$

Betrachte $L = k[B][k[B] \setminus 0^{-1}]$ als Lokalisierung und wende theorem 16 auf $\Omega_{L/k}$ an, somit gilt:

$$\Omega_{L/k} = L \otimes_{k[B]} \Omega_{k[B]/k}$$

In korollar 14 haben wir gesehen, dass $\Omega_{k[B]/k}$ ein freies Modul über $k[B]$ mit $\{b_i\}_{i \in \Lambda}$ als Basis ist. Dies liefert uns letztendlich die gewünschte Darstellung

$$\Omega_{T/k} = \bigoplus_{\{i \in \Lambda\}} T \langle d_T(b_i) \rangle.$$

1., „ \Rightarrow “: Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.

Zeige zunächst, dass T algebraisch über $L := k(B)$ ist:

Die COTANGENT SEQUENZ (*satz 9*) von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ besagt

$$\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T \langle d_T(S) \rangle \text{ und nach Voraussetzung gilt } \Omega_{T/k} = T \langle d_T(B) \rangle.$$

$$\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T \langle d_T(L) \rangle = \Omega_{T/k}/T \langle d_T(B) \rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$$

Da, wie wir in „ \Leftarrow_1 “ gezeigt haben, jede Transzendenzbasis B' von T über L auch eine Differenzialbasis von $\Omega_{T/L} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Somit ist T schon algebraisch über L .

Zeige noch, dass B auch algebraisch unabhängig über L ist:

Sei dazu Γ eine minimale Teilmenge von Λ , für welche T noch algebraisch über $k(\{b_i\}_{i \in \Gamma})$ ist. Für diese ist $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ algebraisch unabhängig über K . Damit ist nach „ \Leftarrow_1 “ $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von T über k . Also muss schon $\Gamma = \Lambda$ gegolten haben und B ist eine Transzendenzbasis von T über k .

2., „ \Leftarrow “: Sei B eine p -Basis von T über k .

Somit wird nach DEFINITION-PROPOSITION T von B als Algebra über $(k * T^p)$ und $\Omega_{T/(k * T^p)}$ von $d_T(B)$ als Vektorraum über T (*PROPOSITION*) erzeugt. Zeige also $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p * k)}$:

Die Cotangent Sequenz (*satz 9*) von $K \hookrightarrow (k * T^p) \hookrightarrow T$ besagt:

$$\Omega_{T/(T^p * k)} \simeq \Omega_{T/k}/d_T(T^p * k)$$

Für beliege $t^p \in T^p$ gilt $d_T(t^p) = pt^{p-1}d_T(t) = 0$, da $\text{char}(T) = p$.

$$\Rightarrow d_T(T^p * k) = d_T(k(T^p)) = 0$$

Damit ist $d_T : T \longrightarrow \Omega_{T/k}$ auch $(T^p * k)$ -linear und es gilt $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p * k)}$.

2. „ \Rightarrow “: Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.

Zeige zunächst, dass T von B als Algebra über k erzeugt wird:

Die COTANGENT SEQUENZ (satz 9) von $k \hookrightarrow L := k(B) \hookrightarrow T$ besagt $\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L) \rangle$ und nach Voraussetzung gilt $\Omega_{T/k} = T\langle d_T(B) \rangle$.
 $\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L) \rangle = \Omega_{T/k}/T\langle d_T(B) \rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$

Da, wie wir in „ \Leftarrow “ gezeigt haben, jede p-Basis B' von T über L auch eine Differenzialbasis von $\Omega_{T/L} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Somit wird T schon von B als Algebra über k erzeugt.

Zeige noch, dass B auch minimal als Erzeugendensystem von T als Algebra über k ist:

Sei dazu Γ die minimale Teilmenge von Λ , für welche T noch von $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ als Algebra über k erzeugt wird. Dann ist $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ eine p-Basis von T über k . Somit ist nach „ \Leftarrow “ $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von T über k . Es muss also schon $\Gamma = \Lambda$ gegolten haben und B ist eine p-Basis von T über k .

□

Kapitel 4

Aufgaben

- Aufgabe 6.7 aus David Eisenbud 1994 ist proposition 11.
- Aufgabe 16.6 a) aus David Eisenbud 1994 ist bemerkung 11.

Cotangent Sequenz von Koerpern 3 [Aufgabe 16.6 b) David Eisenbud 1994]

Wir nennen eine Körpererweiterung $T \supset L$ pur inseperabel, falls gilt:

$$\text{char}(L) = p > 0 \text{ und } \forall t \in T \exists l \in L \exists n \in \mathbb{N} : t^{p^n} = l$$

Proposition 1. Seien $T \supset L \supset k$ endliche Körpererweiterungen. Betrachte die COTANGENT SEQUENZ (satz 9) von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$:

$$T \otimes_L \Omega_{L/k} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Sei weiter die Körpererweiterung $T \supset L$ algebraisch und pur inseperabel und existiere ein $\alpha \in T$ mit $L(\alpha) = T$ und $\text{Mipo}(\alpha) = f(x) = x^p - a$. Dann gilt:

$$\varphi \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow d_L(a) = 0$$

Beweis. Lege zunächst $T = L[x]/(f(x))$ fest und betrachte den kanonischen Epimorphismus $\pi : L[x] \rightarrow T$, sowie die dazugehörige Konormale Sequenz (satz 10). Forme diese leicht um (2), sodass wir sie mit der COTANGENT SEQUENZ von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ (3) vergleichen können:

$$(f(x))/(f(x)^2) \xrightarrow{1 \otimes d_{L[x]}} T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/k} \longrightarrow 0 \quad (1)$$

$$T \langle d_{L[x]}(f(x)) \rangle \hookrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/k} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle \xrightarrow{\widetilde{D\pi}} \Omega_{T/k} \longrightarrow 0 \quad (2)$$

$$T \otimes_L \Omega_{L/k} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0 \quad (3)$$

Zeige, dass **(2)** auch wirklich exakt ist:

$$\begin{aligned} (1 \otimes d_{L[x]})(f(x)) &= T \otimes_{L[x]} L[x] \langle d_{L[x]}(f(x)) \rangle \simeq T \langle d_{L[x]}(f(x)) \rangle \\ \Rightarrow \text{Ersetze } 1 \otimes d_{L[x]} : (f(x))/(f(x)^2) &\longrightarrow T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k} \\ &\text{durch } T \langle d_{L[x]}(f(x)) \rangle \hookrightarrow T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k}. \end{aligned}$$

nach korollar 15 gilt $\Omega_{L[x]/k} \simeq L[x] \otimes_L \Omega_{L/k} \oplus L[x] \langle d_{L[x]}(x) \rangle$
und tensorieren mit T ergibt $T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k} \simeq T \otimes_L \Omega_{L/k} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle$.

„ \Rightarrow “: Wenn wir nun unsere zwei exakten Sequenzen betrachten sehen wir, dass φ eine Einschränkung von $D\pi$ auf einen kleineren Definitionsbereich ist. Zeige also, dass $D\pi$ injektiv ist:

$$\begin{aligned} \text{Nach Voraussetzung gilt } d_L(a) &= 0 \text{ also auch } d_{L[x]}(a) = 0 \\ \Rightarrow d_{L[x]}(f) &= d_{L[x]}(x^p) - d_{L[x]}(a) = px^{p-1}d_{L[x]}(x) - d_{L[x]}(a) = 0 - 0 \\ &\Rightarrow T \langle d_{L[x]}(f(x)) \rangle = 0 \end{aligned}$$

Bezogen auf die exakte Sequenz **(2)** bedeutet dies, dass $D\pi$ injektiv ist.

„ \Leftarrow “: Da φ nach Voraussetzung injektiv ist, genügt es $\varphi 1 \otimes a = 0$ zu zeigen:

$$\begin{aligned} \text{In } T \text{ gilt } [f(x)]_T &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= d_T([f(x)]_T) = d_T([x^p]_T) - d_T([a]_T) = d_T([a]_T) \\ &\Rightarrow \varphi(1 \otimes d_L(a)) = d_T([a]_T) = 0 \end{aligned}$$

Da φ nach Voraussetzung injektiv ist, gilt $1 \otimes d_{L[x]}(a) = 0$ und somit auch $d_L(a) = 0$.

□

Cotangent Sequenz von Körpern 3 Beispiel [Aufgabe 16.6 b) David Eisenbud 1994]

Beispiel 2. Betrachte das in proposition 1 gegebenen Szenario und wähle:

$$k = \mathbb{F}_3, L = k[y]/(y^2 + 1), T = L(\sqrt[3]{y}) \simeq L[x]/(x^3 - y).$$

Hierbei gilt $d_L(x) \neq 0$ und somit ist $\varphi : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{L/k}$ nicht injektiv.

seperabel generierte Körpererweiterung mit $\text{DifR}(\mathbf{T})(\mathbf{R})$ ist 0 [Aufgabe 16.10 David Eisenbud 1994 (steht im Bezug zu Korollar 16.17)]

Beispiel 3. Sei k ein Körper mit $\text{char}(k) = p > 0$ und sei weiter $K(x)$ der

Raum der Rationalen Funktionen über k .

$$\text{Definiere: } L := k(x^{1/p^\infty}) = \varinjlim \{k(x^{1/p^n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Dann gilt : $\Omega_{L/k} = 0$

Prüfe noch, ob $L \supset k$ eine separabel generierte Körpererweiterung ist.

Beweis. Es gilt:

$$d_L(x^{1/p^n}) = d_L \left(\prod_{i \in \{1, \dots, p\}} x^{1/p^{n+1}} \right) = p \cdot \left(\prod_{i \in \{1, \dots, p-1\}} x^{1/p^{n+1}} \right) \cdot d_L(x^{1/p^{n+1}}) = 0$$

Nute noch proposition 13 und beispiel 9 um zu folgern, dass $\Omega_{L/k}$ von $\{d_L(x^{1/p^n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ erzeugt wird. \square

Differenzial algebraischer Algebren ist Null [Aufgabe 16.11 David Eisenbud 1994]

Beispiel 4. Sei K ein Körper mit $\text{char}(K) = 0$ und T eine noethersche K -Algebra. Dann gilt:

$$\Omega_{T/K} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$T = \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} K(\alpha_i) \text{ ist ein endliches Produkt algebraischer Körpererweiterungen.}$$

Beweis.

„ \Rightarrow “: Da T noethersch ist, ist T als Algebra über K endlich erzeugt und es gilt:

$$T = \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} K[\alpha_i]/I_i$$

Wobei $I_i \subseteq K[\alpha_i]$ ein Ideal ist. ($\forall i \in \{1, \dots, n\}$)

Zur Vereinfachung definiere $T' := \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} K[\alpha_i]$. Betrachte nun den Differentialraum von T genauer:

$$\begin{aligned} \Omega_{T/K} &= d_{T'} \left(\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} K[\alpha_i]/I_i \right) \\ &= \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} d_{K[\alpha_i]}(K[\alpha_i]/I_i) \quad (\text{proposition 8}) \end{aligned}$$

Betrachte also jeweils für $i \in \{1, \dots, n\}$ die K -Algebra $K[\alpha_i]/I_i$.

Sei $I_i \neq K[\alpha_i]$, da andernfalls $K[\alpha_i]/I_i = 0$ und somit α_i kein Erzeuger

vor T wäre.

Unterscheide nun zwischen den zwei möglichen Fällen $\underline{I_i = 0}$ und $\underline{I_i \neq 0}$:

- 1. $\underline{I_i = 0}$:** Da $\Omega_{T/K} = 0$ gilt, muss $K[\alpha_i] = 0$ gelten.
Annahme: α_i ist transzendent über K.

$$\begin{aligned} \text{Dies bedeutet } K[\alpha_i] &\simeq K[x] \\ \Rightarrow \Omega_{K[\alpha_i]/K} &\simeq K[x]\langle d_{K[x]}(x) \rangle \neq 0 \text{ (korollar 14)} \end{aligned}$$

Dies steht allerdings im Widerspruch zu $K[\alpha_i] = 0$. Folglich war unsere Annahme falsch und α_i ist algebraisch über K.

Folglich ist $K[\alpha_i] = K(\alpha_i)$ eine algebraische Körpererweiterung.

- 2. $\underline{I_i \neq 0}$:** Zunächst sehen wir, dass α_i transzendent sein muss, da sonst $K[\alpha_i] = K(\alpha_i)$ ein Körper wäre und somit $I_i = K(\alpha_i)$ gelten würde.
Also ist α_i transzendent und es gilt:

$$\begin{aligned} K[\alpha_i] &\simeq K[x] \text{ und } I \simeq (f(x)) \text{ mit } f(x) \in K[x] \\ \Rightarrow K[\alpha_i] &\simeq K[\beta_1, \dots, \beta_n] = K(\beta_1, \dots, \beta_n), \text{ wobei } \beta_1, \dots, \beta_n \text{ die Nullstellen von } f \text{ sind.} \end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass auch in diesem Fall $K[\alpha_i]/I_i$ eine Algebraische Körpererweiterung ist.

„ \Leftarrow “: proposition 8 besagt, dass das direkte Produkt unter Bildung des Differenzials erhalten bleibt, also gilt in diesem Fall:

$$\Omega_{T/K} = \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} \Omega_{K(\alpha_i)/K}$$

Nach Voraussetzung sind alle Körpererweiterungen $K\alpha_i \supset K$ algebraisch. Wir haben schon in BSP gesehen, dass somit deren Differentiale gleich 0 sind. Folglich ist auch das direkte Produkt der einzelnen Differenziale und somit $\Omega_{T/K}$ gleich 0.

□