Proposition 16.3 aus Moduls of Differenzials

Satz 1. *Sei $\pi : S \longrightarrow T$ ein R-Algebrenephimorphismus mit Kern(π):= I*
Dann ist folgende Sequenz rechtsexakt:

$$I/I^2 \xrightarrow{\ f\ } T \otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{\ g\ } \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

mit: $f : I/I^2 \longrightarrow T \otimes_S \Omega_{S/R}\,,\ [a]_{I^2} \longmapsto 1 \otimes_S d_S(a)$

$g : T \otimes_S \Omega_{S/R} \longrightarrow \Omega_{T/R}\,,\ b \otimes_S d_S(c) \longmapsto b \cdot (d \circ \pi)(c)$

Beweis.
<u>f ist wohldefiniert:</u> Seien $a, b \in I^2$. Zeige $f(a \cdot b) = 0$:

$$f(a \cdot b) = 1 \otimes_S (d_S \circ \pi)(a \cdot b) = 1 \otimes_S \pi(a) \cdot (d_S \circ \pi)(b) + \pi(b) \cdot (d_S \circ \pi)(a) = 0$$

<u>$D\pi$ ist surjektiv:</u>

$$\begin{tikzcd} \Omega_{S/R} \arrow[r, "D\pi"] & \Omega_{T/R} \\ S \arrow[u, "d_S"] \arrow[r, "\pi"] & T \arrow[u, "d_T"'] \end{tikzcd}$$

Da $\Omega_{S/R}$ und $\Omega_{T/S}$ jeweils von d_S und d_T erzeugt werden, vererbt sich die Surjektivität von π auf $D\pi$. Somit ist auch $1 \otimes_S D\pi$ surjektiv.
<u>$Im(f) = kern(1 \otimes_S d\pi)$:</u>
Dies folgt direkt aus der Isomorphie von $(T \otimes_S \Omega_{S/R})/Im(f)$ und $\Omega_{T/R}$:

$$(T \otimes_S \Omega_{S/R})/Im(f) = (T \otimes_S \Omega_{S/R})/(T \otimes_S d_S(I)) = T \otimes_S (\Omega_{S/R}/d_S(I)) \simeq T \otimes_S d_S(S/I) \simeq T \otimes_S d_T(T)$$

□