Kapitel 1

Körpererweiterungen

1.1 Einführung in transzendente Körpererweiterungen

Sei im folgenden k ein Körper.
Wir haben in BEISPIEL gesehen, dass das Kähler-Differenzial algebraischer Körpererweiterungen über k der Null-Vektorraum über k ist. Dies liegt daran, dass im Falle einer algebraischen Körpererweiterung $k(\alpha)/k$ ein irreduzibles Polynom $f(x) \in k[x]$ existiert, mit $f(\alpha) = 0$ und $k[\alpha] \simeq k[x]/(f(x))$.
Im Falle einer transzendenten Körpererweiterung $k(\beta)$ existiert kein solches Polynom in $k[x]$ und es gilt $k(\beta) \simeq k(x)$. In KORROLAR haben wir gesehen, dass in diesem Falle $\Omega_{k(x)/k} \simeq$??? gilt. Dies motiviert dazu Transzendente Körpererweiterungen und deren Differenzial näher zu untersuchen. Dazu wird hier elementares Wissen über algebraische Körpererweiterungen vorausgesetzt *[eventuell nach zu lesen in Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009]*.
In diesem Kapitel führen wir Transzendenzbasisen ein und untersuchen diese näher.

Definition 1. *[vlg. Anhang A1 David Eisenbud 1994sowie Kapitel 22 Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009]*
Sei L/k eine Körpererweiterung. Dann definieren wir:

- *Eine endliche Teilmengen $\{l_1, \ldots, l_n\} \subseteq L$ heißt algebraisch unabhängig über k, falls gilt:*

$$\forall P(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n] : P(l_1, \ldots, l_n) \neq 0$$

- *Eine Teilmenge $B \subseteq L$ heißt transzendent über k, falls jede ihrer endlichen Teilmengen $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq B$ algebraisch unabhängig über k ist.*

- *Eine Teilmenge $B \subseteq L$ ist eine Transzendenzbasis von L/k, falls sie transzendent über k und die Körpererweiterung $L/k(B)$ algebraisch ist.*

- *Falls eine Transzendenzbasis von B von L/k existiert, sodass $k(B) = L$ gilt, so ist L/k eine pur transzendente Körpererweiterung.*

pur transzendente Erweiterung

Korrolar 2. *[Eigene Überlegung]*
Sei L/k eine pur transzendente Körpererweiterung mit Transzendenzbasis B. Dann gilt:

$$L \simeq k(\{x_b\}_{b\in B})$$

Insbesondere ist $\{x_b\}_{b\in B}$ eine Transzendenzbasis der Körpererweiterung der rationalen Funktionen $k(\{x_b\}_{b\in B})$ über k.

Beweis. Betrachte folgenden Körpermorphismus und zeige, dass es sich dabei um einen Isomorphismus handelt:

$$\Phi : k(\{x_b\}_{b\in B}) \longrightarrow k(B)\,,\ \frac{P(x_{b_1},\ldots,x_{b_n})}{Q(x_{b_1},\ldots,x_{b_n})} \longmapsto \frac{P(b_1,\ldots,b_n)}{Q(b_1,\ldots b_n)}$$

Da B als Transzendenzbasis insbesondere transzendent über k ist, ist jede endliche Teilmenge von algebraisch unabhängig über k. Dies bedeutet:

$$\forall\{b_1,\ldots,b_n\} \in B\, \forall P(x_{b_1},\ldots,x_{b_n}) \in k[x_{b_1},\ldots,x_{b_n}] :$$
$$P(x_{b_1},\ldots,x_{b_n}) \Rightarrow P(b_1,\ldots,b_n) \neq 0$$

Folglich ist Φ wohldefiniert und insbesondere injektiv.
Dass Φ surjektiv ist, folgt direkt aus der Definition von $L = k(B)$ als Quotientenkörper über $k[x]$.

Dass $\{x_b\}_{b\in B}$ Transzendenzbasis von $k(\{x_i\}_{i\in B})$ ist folgt direkt aus **??**. Denn jede endliche Teilmenge $\{x_{b_1},\ldots x_{b_n}\} \subseteq \{x_b\}_{b\in B}$ ist transzendent, da $k[x_1,\ldots,x_n]$ und $k[x_{b_1},\ldots x_{b_n}]$ isomorph zueinander sind. Außerdem ist die triviale Körpererweiterung $k(x_{b_1},\ldots x_{b_n})/k(x_{b_1},\ldots x_{b_n})$ algebraisch. □

Transzendenzbasis ist maximale transzendente Menge

Lemma 3. *[Lemma 22.1 Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009]*
Sei L/k ein Körpererweiterung und $B \subseteq L$ eine über k transzendente Teilmenge. Dann gilt:
B ist genau dann eine Transzendenzbasis von L/k, wenn B bezüglich der Inklusion ein maximales Element der Menge aller über k transzendenten Elemente aus L ist.

Beweis.

„⇒:“ Sei B eine Transzendenzbasis über k. Zeige, dass für ein beliebiges Element $a \in L \setminus B$ die Menge $B \cup \{a\} \subseteq L$ nicht transzendent über k ist:

Da die Körpererweiterung $L/k(B)$ algebraisch ist, existiert
$$0 \neq P(x) \in k(B)[x] \text{ mit } P(a) = 0.$$

Aus der Definition von $k(B)$ geht hervor, dass $\{b_1, \dots b_n\} \subseteq B$ existiert, mit $P(x) \in k(\{b_1, \dots b_n\})[x]$.
Wir können ohne weitere Einschränkung annehmen, dass $P(x) \in k[\{b_1, \dots, b_n\}][x]$ gilt, denn falls dies nicht der Fall sein sollte, wähle $m \in \mathbb{N}$ groß genug, sodass $\left(P(x) \cdot (\prod_i^n b_i)^m\right) \in k[\{b_1, \dots, b_n\}]$ gilt.

Wähle nun $P'(x_1, \dots, x_n, x) \in k[x_1, \dots, x_n, x]$ mit $P'(b_1, \dots, b_n, x) = P(x)$.
Dies erfüllt $P'(b_1, \dots, b_n, a) = 0$.

Folglich ist $B \cup \{b_1, \dots, b_n, a\}$ algebraisch abhängig und insbesondere $B \cup \{a\}$ nicht transzendent über k.

„⇐:“ Sei B bezüglich der Inklusion ein maximales Element der Menge aller über k transzendenten Elemente aus L. Zeige für ein beliebiges Element $a \in L \setminus k(B)$, dass dieses algebraisch über $k(B)$ ist:

Nach Voraussetzung existiert eine endliche Teilmenge $\{b_1, \dots, b_n, a\} \subseteq B \cup \{a\}$, welche algebraisch abhängig über k ist.

Also existiert $P(x_1, \dots, x_{n+1}) \in k[x_1, \dots, x_{n+1}]$ mit $P(b_1, \dots, b_n, a) = 0$.
Für $P'(x) := P(b_1, \dots, b_n, x) \in k(B)[x]$ gilt somit $P'(a) = 0$

Die Existenz eines solchen Polynoms $P'(x)$ zeigt uns, dass a algebraisch über $k(B)$ ist.
Damit haben wir gezeigt, dass jedes $a \in L$ algebraisch über $k(B)$ ist. Folglich ist $L/k(B)$ algebraisch und B eine Transzendenzbasis von L über k.

□

Existenz von Transzendenzbasen

Proposition 4. *[Kapitel 22.1.3 Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009] Jede Körpererweiterung $L \subseteq k$ besitzt eine Transzendenzbasis $B \subseteq L$.*

Beweis. Verwende hierzu das Lemma von Zorn:
lemma 3 besagt, dass die Transzendenzbasen von L/k gerade die maximalen Elemente der Menge aller über k transzendenten Elemente aus L sind.
Das Lemma von Zorn besagt, dass jede partiell geordenete Menge, in der jede total geordneten Untermenge (auch Kette genannt) eine obere Schranke besitzt, ein Maximales Element besitzt *[vlg. Kapitel A2.3 Christian Karpfinger, Kurt*

Meyberg 2009].
Sei also $\mathbb{B}$ eine Kette von Transzendenten Mengen.
Offensichtlich ist $\tilde{B} := \bigcup_{B\in\mathbb{B}} \in L$ eine obere Schranke von $\mathbb{B}$. Zeige also noch, dass $\tilde{B}$ auch transzendent ist.
Annahme: $\tilde{B}$ ist nicht transzendent:
Also existiert $\{b_1, \ldots, b_n\} \in \tilde{B}$ mit: $\{b_1, \ldots, b_n\}$ ist algebraisch abhängig über k. Da $\mathbb{B}$ bezüglich der Inklusion total geordnet ist, existiert ein $B \in \mathbb{B}$ mit $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq B$. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass $B \in \mathbb{B}$ transzendent über k ist.
Damit war unsere Annahme falsch und wir haben gezeigt, dass die Menge der über k transzendente Teilmengen von L mindestens ein maximales Element und damit L/k eine Transzendenzbasis besitzt. □

Transzendent ist pur transzendent plus algebraisch 1

Korrolar 5. *[Eigene Überlegung] Für jede Körpererweiterung L/k existiert ein Zwischenkörper $K \subseteq L$, sodass K/k eine pur transzendente und L/K eine algebraische Körpererweiterung ist.*

Beweis. Nach proposition 4 existiert eine Transzendenzbasis B von L/k.
Wie in definition 1 beschrieben ist somit $k(B)/k$ pur transzendent und $L/k(B)$ algebraisch.
Wähle also $K := k(B)$. □

Transzendenzbasen sind immer gleich lang *[Theorem A1.1 David Eisenbud 1994]*

Proposition 6. *Sei L/k eine Körpererweiterung. Seinen weiter A, B zwei Transzendenzbasen von L über k. Dann gilt:*

$$|A| = |B|$$

Wir nennen $|B|$ den Transzendenzgrad von L über k.

Beweis. Im Fall von $|A| = |B| = \infty$ sind wir schon fertig, Sei also ohne Einschränkung $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ mit $min(m, n) = n < \infty$.
Wir wollen zunächst in n Schritten die Elemente aus B durch Elemente aus A ersetzten und damit zeigen, dass $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Transzendenzbasis von L über k ist:

Für den i-ten Schritt definiere $A_i := \{a_1, \ldots, a_{i-1}\} \subseteq A$, $B_i := \{b_i, \ldots, b_n\} \subseteq B$ und gehe davon aus, dass $A_i \cup B_i$ eine Transzendenzbasis ist:
Nach lemma 3 ist $\{a_i\} \cup A_i \cup B_i = A_{i+1} \cup B_i$ nicht transzendent und somit

algebraisch abhängig.

$$\text{Also existiert } P \in k[x, x_1, \dots, x_n] \text{ mit } P(a_i, a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, \dots, b_n) = 0.$$
$$\text{Definiere } P'(x) := P(a_i, a_1, \dots, a_{i-1}, x, b_{i+1}, \dots, b_n) \in k(A_{i+1} \cup B_{i+1})[x].$$
$$\text{Dieses erfüllt } P'(b_i) = 0.$$

Da $A_i \subseteq A$ algebraisch unabhängig ist, gilt $P(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, \dots, x_n) \neq 0$. Nummeriere also gegebenenfalls B vor der Bildung von $P'(x)$ so um, dass auch $P'(x) \neq 0$ gilt.
Die Existenz eines solchen $P'(x)$ zeigt uns, dass die Körpererweiterungen $L \subset k(A_{i+1} \cup B_i) = k(A_{i+1} \cup B_{i+1})(\{b_i\}) \subset k(A_{i+1} \cup B_{i+1})$ algebraisch sind und legt nahe, dass $A_{i+1} \cup B_{i+1}$ wieder eine Transzendenzbasis ist.
Um dies zu zeigen nehme zunächst an $A_{i+1} \cup B_{i+1}$ wäre algebraisch abhängig.

$$\text{Also existiert } Q \in k[x_1, \dots, x_n] \text{ mit } Q(a_1, \dots, a_i, b_{i+1}, \dots, b_n) = 0.$$
$$\text{Definiere } Q'(x) := Q(a_1, \dots, a_{i-1}, x, b_{i+1}, b_n) \in k(a_1, \dots, a_{i-1}, b_{i+1}, b_n)[x].$$
$$\text{Dieses erfüllt } Q'(a_i) = 0.$$

Da $(A_{i+1} \cup B_{i+1}) \setminus \{a_i\} \subseteq A_i \cup B_i$ algebraisch unabhängig ist gilt $Q'(x) \neq 0$.
Die Existenz eines solchen $Q'(x)$ zeigt uns, dass die Körpererweiterung $L \subset k(A_{i+1} \cup B_{i+1}) \subset k((A_{i+1} \cup B_{i+1}) \setminus \{a_i\}) = k((A_i \cup B_i) \setminus \{b_i\})$ algebraisch ist. Damit ist $(A_i \cup B_i) \setminus \{b_i\}$ eine Transzendenzbasis, was nach lemma 3 im Widerspruch dazu steht, dass $A_i \cup B_i$ eine Transzendenzbasis ist.
Folglich ist $A_{i+1} \cup B_{i+1}$ transzendent und somit eine Transzendenzbasis von L über k.

Dieses Verfahren zeigt uns, dass $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$ eine Transzendenbasis von L über k ist. Nach lemma 3 muss somit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $m = n$ gelten. □

Unterschiedliche Transzendenzbasen bsp

Beispiel 7. *[Eigene Überlegung] Sei dazu $L = k(y)$ der Körper der rationalen Funktionen über k. Betrachte zwei unterschiedliche Transzendenzbasen von L/k:*

1. *$B = \{y\}$ ist eine Transzendenzbasis von L/k mit $\deg(L/k(B)) = 1$.*
2. *Für $n \in \mathbb{N}$ ist $B' = \{y^n\}$ eine Transzendenzbasis von L/k mit $\deg(L/k(B)) = n$.*

   $f(x) = x^n - y^n \in k(y^n)[x]$ ist Minnimalpolynom von x über $k(y^n)$.
   $\Rightarrow k(y)/k(y^n)$ ist eine algebraische Körpererweiterung vom Grad n

Dies zeigt, dass die Form des Körpers $k(B)$ und insbesondere der Grad der Körpererweiterung $L/k(B)$ sehr von der Wahl der Transzendenzbasis B abhängt.

Erinnerung: Eine Algebraische Körpererweiterung $L \supset k$ heißt seperabel, falls für alle $\alpha \in L$ das Minimalpolynom $f(x) \in k[x]$ von α über $L[x]$ in Linearfaktoren zerfällt.

Definition 8. *Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung. Dann definieren wir:*

- *L ist seperabel generiert über k, falls eine Transzendenzbasis B von L über k existiert, sodass $L/k(B)$ eine seperable Körpererweiterung ist.*
- *k ist seperabel über k, falls jeder über k endlich genierte Teilkörper von L über k seperabel generiert ist.*

Definition 9. *Sei k ein Körper mit charakteristik p und sei weiter L/k eine Körpererweiterung. Dann definieren wir:*

- *Eine endliche Teilmenge $B \subseteq L$ heißt p-Basis von L über k, falls $W := \{\prod_{b \in B} b^i | i < p\}$ eine Vektorraumbasis von K über $k * K^p$ bildet.*

1.2 Differential von Körpererweiterungen

Definition der Differenzialbasis *[vlg. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]*

Definition 10. *Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung. Dann nennen wir eine Teilmenge $\{b_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq L$ eine Differenzialbasis von L über k, falls $\{d_K(b_i)\}_{i \in \Lambda}$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{L/R}$ über L ist.*

Differential von rationalen Funktionen 1 *[vlg. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]*

Beispiel 11. *Sei k ein Körper und $L = k(\{x_i\}_{i \in \{1,\dots,n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in n Varablen über k.*
Dann gilt:

$$\Omega_{L/k} \simeq L\langle d_{k[x_1,\dots x_n]}(x_i)\rangle$$

Insbesondere ist $\{x_i\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$ eine Differenzialbasis von $\Omega_{L/k}$.

Beweis. Betrachte $L = k[x_1, \dots, x_n][k[x_1, \dots, x_n]^{-1}]$ als Lokalisierung um **??** anwenden zu können. Anschließend forme noch $\Omega_{k[x_1,\dots,x_n]/k}$ mithilfe von **??** isomorph um:

$$\begin{aligned}\Omega_{L/k} &\simeq L \otimes \Omega_{k[x_1,\dots,x_n]/k} \\ &\simeq L \otimes \oplus_{i \in \{1,\dots,n\}} k[x_1, \dots, x_n]\langle d_{k[x_1,\dots x_n]}(x_i)\rangle \\ &\simeq L\langle d_{k[x_1,\dots x_n]}(x_i)\rangle\end{aligned}$$

Damit ist $\{d_L(x_i)\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{L/k}$. $\square$

Differential von rationalen Funktionen 2 *[Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]*

Korrolar 12. *Sei k ein Körper und $L \supset k$ eine Körpererweiterung und $T = L(\{x_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in n Varablen über L. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i\in\{1,\dots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

Beweis. Betrachten T als Lokalisierung von $L[x_1,\dots,x_n]$ und gehen dann analog zu beispiel 11 vor:

$$\Omega_{T/k} \simeq T \otimes_{L[x_1,\dots,x_n]} \Omega_{L[x_1,\dots,x_n]/k} \text{ (??)}$$
$$\Omega_{L[x_1,\dots,x_n]/R} \simeq (L[x_1,\dots,x_n] \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i\in\{1,\dots,n\}} L[x_1,\dots,x_n]\langle d_{L[x_1,\dots,x_n]}(x_i)\rangle \text{ (??)}$$
$$\Rightarrow \Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i\in\{1,\dots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

□

Cotangent Sequenz von Koerpern 1 *[Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]*

Bemerkung 13. *Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung und $T = L(x_1,\dots,x_n)$ der Körper der rationalen Funktionen in n Variablen über L. Dann ist die COTANGENT SEQUENZ (??) von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ eine kurze Exakte Sequenz:*

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Im Genauen ist $\varphi : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k}$, $t \otimes d_L(l) \longmapsto t \cdot d_T(l)$ injektiv.

Beweis. Die Injektivität von φ folgt direkt aus der isomorphen Darstellung von $\Omega_{T/k}$, die wir uns in korrolar 12 erarbeitet haben.

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i\in\{1,\dots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

Um sicher zu gehen definiere $\varphi' \simeq \varphi$ und durchlaufe die in korrolar 12 genutzten Isomorphismen noch einmal Schritt für Schritt:

$$\varphi' : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus \bigoplus_{i\in\{1,\dots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

$$\begin{array}{ccc}
T \otimes_L \Omega_{L/k} & & t \otimes d_L(l) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\Omega_{T/k} & & t d_T(l) \\
\big\downarrow ?? & & \big\downarrow \\
T \otimes_S \Omega_{L[x_1,\ldots,x_n]/k} & & t \otimes d_S(l) \\
\big\downarrow ?? & & \big\downarrow \\
T \otimes_S ((S \otimes_L \Omega_{L/k}) \oplus \bigoplus_{i\in\{1,\ldots,n\}} S\langle d_S(x_i)\rangle) & & t \otimes (d_L(l),0) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
(T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i\in\{1,\ldots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle & & (t \otimes d_L(l),0)
\end{array}$$

Damit ist φ eine injektive Einbettung von $T \otimes_L \Omega_{L/k}$ in $\Omega_{T/k}$. □

Aufbaulemma Koerperdifferenzial *[vlg. Lemma 16.15 David Eisenbud 1994]*

Lemma 14. *Sei $L \subset T$ eine seperable und algebraische Körpererweiterung und $R \longrightarrow L$ ein Ringhomomorphismus. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/R} = T \otimes_L \Omega_{L/R}$$

*Insbesondere ist in diesem Fall die COTANGENT SEQUENZ (**??**) von $R \to L \hookrightarrow T$ eine kurze Exakte Sequenz:*

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \longrightarrow \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Beweis. Wähle $\alpha \in T$ mit $L[\alpha] = T$. Sei weiter f(x) das Minimalpolynom von α. Betrachte dazu die conormale Sequenz von $\pi : L[x] \longrightarrow L[x]/(f) \simeq T$ *(**??**)*:

$$(f)/(f^2) \xrightarrow{1\otimes d_{L[x]}} T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

Wende nun Proposition 16.6 auf $\Omega_{L[x]/R}$ an und tensoriere mit T, somit gilt:

$$T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \simeq T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T\langle d_{L[x]}(x)\rangle$$

Zusammen mit der conormalen Sequenz bedeutet dies:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T\langle d_{L[x]}(x)\rangle)/(d_{L[x]}(f))$$

Wenn wir $d_{L[x]} : (f) \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T\langle d_{L[x](x)}\rangle$ wie in **??** betrachten , sehen wir:

$$d_{L[x]}((f)) = J \oplus (f'(\alpha) d_{L[x]}) = J \oplus T\langle d_{S[x]}(x)\rangle$$
,wobei $J \subseteq T \otimes_L \Omega_{L/R}$ ein Ideal ist.

Für die letzte Gleichheit nutze, dass $T \supset L$ seperabel und somit $f'(\alpha) \neq 0$ ist und nach obiger Wahl $T = L[\alpha]$ gilt.
Damit erhalten wir nun:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R})/J$$
$$\Rightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \hookrightarrow \Omega_{T/R} \textit{ ist surjektiv.}$$

Somit muss J = 0 gelten und es folgt $T \otimes_L \Omega_{L/R} \simeq \Omega_{T/R}$.
Damit haben wir insbesondere auch gezeigt, dass $T \otimes_L \Omega_{L/R} \to \Omega_{T/R}$ injektiv und somit die COTANGENT SEQUENZ von $R \to L \hookrightarrow T$ eine kurze exakte Sequenz ist. □

Transzendenzbasis ist Differenzialbasis *[vlg. Theorem 16.4 David Eisenbud 1994]*

Theorem 15. *Sei $T \supset k$ eine seperabel generierte Körpererweiterung und $B = \{b_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq T$. Dann ist B genau dann eine Differenzialbasis von T über k, falls eine der folgedenen Bedingungen erfüllt ist:*

1. *char(k) = 0 und B ist eine Transzendenzbasis von T über k.*
2. *char(k) = p und B ist eine p-Basis von T über k.*

Beweis.

1.„⇐“: Sei B eine Transzendenzbasis von T über k.
Damit ist die Körpererweiterung $L := k(B) \supset k$ algebraisch und seperabel.
Mit lemma 14 folgt:

$$\Omega_{T/k} = T \otimes_L \Omega_{L/k}$$

Betrachte $L = k[B][k[B] \setminus 0^{-1}]$ als Lokalisierung und wende **??** auf $\Omega_{L/k}$ an, somit gilt:

$$\Omega_{L/k} = L \otimes_{k[B]} \Omega_{k[B]/k}$$

In **??** haben wir gesehen, dass $\Omega_{k[B]/k}$ ein freis Modul über $k[B]$ mit $\{b_i\}_{i \in \Lambda}$ als Basis ist. Dies liefert uns letztendlich die gewünschte Darstellung

$$\Omega_{T/k} = \bigoplus_{\{i \in \Lambda\}} T\langle d_T(b_i)\rangle.$$

1.„⇒“: Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.

Zeige zunächst, dass T algebraisch über $L := k(B)$ ist:

Die COTANGENT SEQUENZ *(??)* von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ besagt
$\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(S)\rangle$ und nach Vorraussetzung gilt $\Omega_{T/k} = T\langle d_T(B)\rangle$.
$$\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L)\rangle = \Omega_{T/k}/T\langle d_T(B)\rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$$

Da, wie wir in „$\Leftarrow_{1.}$"gezeigt haben, jede Transzendenzbasis B' von T über L auch eine Differenzialbasis von $\Omega_{T/L} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Somit ist T schon algebraisch über L.

Zeige noch, dass B auch algebraisch unabhängig über L ist:
Sei dazu Γ eine minimale Teilmenge von Λ, für welche T noch algebraisch über $k(\{b_i\}_{i\in\Gamma})$ ist. Für diese ist $\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ algebraisch unabhängig über K. Damit ist nach „$\Leftarrow_{1.}$"$\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von T über k. Also muss schon $\Gamma = \Lambda$ gegolten haben und B ist eine Transzendenzbasis von T über k.

2.„$\Leftarrow$": Sei B eine p-Basis von T über k.
Somit wird nach DEFINITION-PROPOSITION T von B als Algebra über $(k * T^p)$ und $\Omega_{T/(k*T^p)}$ von $d_T(B)$ als Vektorraum über T *(PROPOSITION)* erzeugt. Zeige also $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p*k)}$:
Die Cotangent Sequenz *(??)* von $K \hookrightarrow (k * T^p) \hookrightarrow T$ besagt:

$$\Omega_{T/(T^p*k)} \simeq \Omega_{T/k}/d_T(T^p * k)$$

Für beliege $t^p \in T^p$ gilt $d_T(t^p) = pt^{p-1}d_T(t) = 0$, da $char(T) = p$.
$$\Rightarrow d_T(T^p * k) = d_T(k(T^p)) = 0$$

Damit ist $d_T : T \longrightarrow \Omega_{T/k}$ auch (T^p*k)-linear und es gilt $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p*k)}$.

2.„$\Rightarrow$": Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.
Zeige zunächst, dass T von B als Algebra über k erzeugt wird:

Die COTANGENT SEQUENZ (**??**) von $k \hookrightarrow L := k(B) \hookrightarrow T$ besagt
$\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L)\rangle$ und nach Vorraussetzung gilt $\Omega_{T/k} = T\langle d_T(B)\rangle$.
$$\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L)\rangle = \Omega_{T/k}/T\langle d_T(B)\rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$$

Da, wie wir in „$\Leftarrow_{2.}$"gezeigt haben, jede p-Basis B' von T über L auch eine Differenzialbasis von $\Omega_{T/L} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Somit wird T schon von B als Algebra über k erzeugt.

Zeige noch, dass B auch minimal als Erzeugendensystem von T als Algebra über k ist:
Sei dazu Γ die minimale Teilmenge von Λ, für welche T noch von $\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ als Algebra über k erzeugt wird. Dann ist $\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ eine p-Basis von T über

k. Somit ist nach „$\Leftarrow_{2.}$“$\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von T über k. Es muss also schon $\Gamma = \Lambda$ gegolten haben und B ist eine p-Basis von T über k.

$\square$