Exersize A6.7

Lemma 1. *Seit S eine $R-Algebra$ und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$S[U^{-1}] = \varinjlim(\mathcal{F} : \mathcal{B} \hookrightarrow (R-Algebren))$$

Wobei $\mathcal{B}$ aus den Objekten $\{S[t^{-1}] | t \in U\}$ und den Morphismen
$S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}], (s, t^n)_{mod \sim_t} \longmapsto (st'^n, t^n t'^n)_{mod \sim_{(tt')}}\ \forall t, t' \in U$ besteht.

Beweis. Sei $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$ der Colimes von $\mathcal{F}$. Zeige $S[U^{-1}] \simeq A$, definiere dazu:

$$\psi' : \mathcal{F} \longrightarrow S[U^{-1}]$$
$$\psi'_{S[t^{-1}]} : S[t^{-1}] \longrightarrow S[t^{-1}]\,,\ (s, t^n)_{mod \sim_t} \longmapsto (s, t^n)_{mod \sim_U}$$

ψ' ist ein Morphismus, da für beliebige $t, t' \in U$ und $s \in S$ gilt:

$$(s, t^n)_{mod \sim_U} = (st'^n, t^n t'^n)_{mod \sim_U}$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Colimes, erhalten wir den Homomorphismus $\varphi : A \longrightarrow S[U^{-1}]$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F} \arrow[dl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
S[U^{-1}] & & A \arrow[ll, dashed, "\exists! \varphi"']
\end{tikzcd}$$

Für $\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow A$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen.
Zunächst können wir jedes Element $(s, u)_{mod \sim_U} \in S[U^{-1}]$ als $\psi_{S[t^{-1}]}((s, t)_{mod \sim_t})$ schreiben.
Weiter gilt für alle $s_1, s_2 \in S,\ t_1, t_2 \in U$:

$$\begin{aligned}
\psi'_{S[t^{-1}]}((s_1, t_1)_{mod \sim_t}) &= \psi'_{S[t^{-1}]}((s_2, t_2)_{mod \sim_t}) \\
\Rightarrow \exists u \in U : (s_1 t_1 &- s_2 t_2) \cdot u = 0 \\
\Rightarrow (s_1 u, t_1 u)_{mod \sim_{tu}} &= (s_2 u, t_2 u)_{mod \sim_{tu}} \\
\Rightarrow \psi_{S[t^{-1}]}((s_1, t_1)_{mod \sim_t}) &= \psi_{S[t^{-1}]}((s_2, t_2)_{mod \sim_t})
\end{aligned}$$

Mit diesem Wissen können wir den R-Algebra-Homomorphismus $\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow A$ definieren:

$$\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow A\,,\ \psi'_{S[t^{-1}]}((s, t)_{mod \sim_t}) \longmapsto \psi_{S[t^{-1}]}((s, t)_{mod \sim_t})$$

$\phi \circ \varphi = id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Colimes:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F} \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
A & & A \arrow[ll, dashed, "\exists! id_A = \phi \circ \varphi"']
\end{tikzcd}$$

Für $\varphi \circ \phi = id_{S[U^{-1}]}$ wähle beliebige $s \in S, t \in U$, für diese gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi((s,t)_{mod \sim_t})) = \varphi(\psi'((s,t)_{mod \sim_t}) = \psi((s,t)_{mod \sim_t})$$

Damit haben wir gezeigt, dass φ, ϕ Isomorphismen sind und somit $A \simeq S[U^{-1}]$ gilt.
Da der Colimes bis auf Isomorphie eindeutig ist, definiere ab sofort $S[U^{-1}]$ als den eindeutigen Colimes von $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow (R - Algebren)$. $\square$