Theorem 1. *Sei S eine $R-$ Algebra und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$\Omega_{S[U^{-1}]/R} \simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$$
$$\textit{Wobei } d_{S[U^{-1}]}((1,u)_{mod\sim_U}) \longmapsto -(1,u^2)_{mod\sim_U} \otimes d_S(u)$$

Beweis. Wir wollen THEOREM16.8 auf $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$ aus **??** anwenden. Sei zunächst $t \in U$ beliebig. Zeige $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq TensorS[t^{-1}]S\Omega_{S/R}$:

> Verwende die Existenz der Isomorphismen $\alpha : S[t^{-1}] \longrightarrow S[x]/(tx-1)$ und $\beta : S[x]/(tx-1) \longrightarrow S[t^{-1}]$. Weiter gilt nach PROPOSITION16.6 $\Omega_{S[x]/R} \simeq S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x)$. Somit folgt:
>
> $$\begin{aligned} &\Omega_{S[t^{-1}]/R} \\ &\simeq (S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]dx)/((tx-1) \cdot d_{S[x]}(tx-1)) \\ &\simeq (S[x]/(tx-1) \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus (S[x]/(tx-1))dx)/(td_{S[x]}(x) + xd_{S[x]}(t)) \\ &\simeq (S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus (S[t^{-1}])d_{S[x]}(x)/(td_{S[x]}(x) + xd_{S[x]}(t)) \end{aligned}$$
>
> Zeige, dass sich jedes Element aus $(S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus (S[t^{-1}])d_{S[x]}(x)/(td_{S[x]}(x) + xd_{S[x]}(t))$ eindeutig durch ein Element aus $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus 0$ darstellen lässt.
> Sei dazu $[((s,t^n)_{mod\sim_t} d_S(s''), (s',t^{n'})_{mod\sim_t} d_{S[x]}(x))]$ ein beliebiger Erzeuger von $(S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus (S[t^{-1}])dx)/(td_{S[x]}(x) + xd_{S[x]}(t))$. Somit gilt:
>
> $$\begin{aligned} \beta(x) = (1,t)_{mod\sim_t} \ &\textit{und } sd_S(x) + xd_S(t) = 0 \\ &\Rightarrow d_S(x) = -(1,t^2)_{mod\sim_t} \\ \Rightarrow [((s,t^n)_{mod\sim_t} &d_S(s''), (s',t^{n'})_{mod\sim_t} d_{S[x]}(x))] \\ = [((s,t^n)_{mod\sim_t} &d_S(s'') - (s',t^{n'+2})_{mod\sim_t} d_s(t), 0)] \end{aligned}$$
>
> Damit habe wir ein Repräsentantensystem gefunden und es folgt:
>
> $$\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$$

□