Kapitel 1

Kolimes

1.1 Einführung in den Kolimes

Definition des Kolimes

Definition 1. *[vgl. Anhang A6 David Eisenbud 1994] Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie.*

- *Ein Diagramm über $\mathcal{A}$ ist eine Kategorie $\mathcal{B}$ zusammen mit einem Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$.*

- *Sei $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Diagramm und $A \in \mathcal{A}$ ein Objekt. Dann definieren wir einen Morphismus $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$ als eine Menge von Funktionen $\{\psi_B \in Hom(F(B), A) | B \in \mathcal{B}\}$, wobei für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $\varphi \in Hom(B_1, B_2)$ folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(B_1) \arrow[dd, "\mathcal{F}(\varphi)"] \arrow[dr, "\psi_{B_1}"] & \\
& C \\
\mathcal{F}(B_2) \arrow[ur, "\psi_{B_2}"'] &
\end{tikzcd}$$

- *Der Kolimes $\varinjlim \mathcal{F}$ eines Diagramms $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ist ein Paar aus einem Objekt $A \in \mathcal{A}$ zusammen mit einem Morphismus $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$, welche folgende universelle Eingenschaft erfüllen:*

  Für Objekte $A' \in \mathcal{A}$ und alle Morphismen $\psi' : \mathcal{F} \longrightarrow A'$ existiert genau eine Funktion $\varphi \in Hom(A, A')$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{F} \arrow[dl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
A' & & A \arrow[ll, dashed, "\exists! \varphi"']
\end{tikzcd}$$

Eindeutigkeit des Kolimes *[vgl. A6 David Eisenbud 1994]*

Lemma 2. *Seien $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ zwei Kategorien und $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor. Dann ist im Falle der Existenz $\varinjlim \mathcal{F}$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien $A_1 \in \mathcal{A}, (\psi_1 : \mathcal{F} \longrightarrow A_1)$ und $A_2 \in \mathcal{A}, (\psi_2 : \mathcal{F} \longrightarrow A_2)$ beide gleich $\varinjlim \mathcal{F}$.
Erhalte durch die universelle Eigenschaft des Kolimes die eindeutig bestimmten Funktionen $\varphi_1 \in Hom_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$ und $\varphi_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(A_2, A_1)$, für welche die folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F} \arrow[dl, "\psi_2"'] \arrow[dr, "\psi_1"] & \\ A_2 & & A_1 \arrow[ll, dashed, "\exists! \varphi_1"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathcal{F} \arrow[dl, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\psi_2"] & \\ A_1 & & A_2 \arrow[ll, dashed, "\exists! \varphi_2"'] \end{tikzcd}$$

Wende nun die Universelle Eigenschaft von ψ_1 auf ψ_1 selbst an und erhalte $id_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1$. Analog erhalte auch $id_{A_2} = \varphi_1 \circ \varphi_2$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F} \arrow[dl, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\psi_1"] & \\ A_1 & & A_1 \arrow[ll, dashed, "\exists! id_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1"'] \end{tikzcd}$$

Somit existiert genau eine Isomorphie $\varphi_1 : A_1 \longrightarrow A_2$. $\square$

Vereinfachung des Kolimes

Korrolar 3. *[Eigene Überlegung]*
Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie und $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$ ein Diagramm. Betrachte die Unterkategorie $\mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{A}$ zusammen mit dem Inklusionsfunktor $\mathcal{F}(B) \hookrightarrow \mathcal{A}$ ebenfalls als Diagramm. Dann gilt:

$$\varinjlim \mathcal{F} \textit{ existiert genau dann, wenn } \varinjlim(\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \textit{ existiert.}$$
$$\textit{Mit } \varinjlim \mathcal{F} = \varinjlim(\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}).$$

Beweis. Dies folgt direkt aus unserer Definition von Morphismen:
In definition 1 haben wir einen Morphismus $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$ als eine Menge von Funktionen $\psi_{\mathcal{B}} \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(B), A)$ definiert. Dies zeigt, dass es keinen Unterschied macht, ob wir von Morphismen $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$ oder von Morphismen $\psi : (\mathcal{F}(B) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$ reden.
Wenn wir nun die universelle Eigenschaft des Kolimes genauer betrachten, sehen wir, dass diese sich nur auf Morphismen $\mathcal{F} \longrightarrow A$ bzw. $(\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$ und auf die Kategorie $\mathcal{A}$ bezieht. Es macht also keinen Unterschied, ob wir vom Kolimes des Diagramms $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$ oder vom Kolimes des Diagramms $(\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(B) \hookrightarrow \mathcal{A})$ sprechen. $\square$

Es genügt also im Fall von Kolimtenn Diagramme $(\mathcal{B}, \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$ mit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ zu betrachten. Zur Vereinfachung schreibe für $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ in Zukunft $\varinjlim \mathcal{B}$ anstatt von $\varinjlim(\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$.

DifferenzkokernUndKoproduktDef

Definition 4. *[vlg. A6 David Eisenbud 1994]*
Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie.

- *Das Koprodukt von $\{B_i\}_{i\in\Lambda} \subseteq \mathcal{A}$ wird durch $\coprod_{i\in\Lambda}\{B_i\} := \varinjlim \mathcal{B}$ definiert, wobei $\{B_i\}_{i\in\Lambda}$ die Objekte und die Identitätsabbildungen $\{id_{B_i} : B_i \longrightarrow B_i\}_{i\in\Lambda}$ die einzigen Morphismen von $\mathcal{B}$ sind.*
- *Der Differenzkokern von $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$ wird durch $\varinjlim \mathcal{C}$ definiert, wobei $\{C_1, C_2\}$ die Objekte und $\{f, g\}$ zusammen mit den Identitätsabbildungen die Morphismen von $\mathcal{C}$ sind.*

NeuDifferenzenkokerndef

Bemerkung 5. *[Wikipedia]*
Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie. Sei weiter $C_1, C_2 \in Obj_{\mathcal{A}}$ und $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$.
Im Falle der Existenz ist der Differnenzenkokern von f, g nach definition 4 durch ein Objekt $C \in Obj_{\mathcal{A}}$ und einen Morphismus $\psi = \{\psi_{C_1}, \psi_{C_2}\}$ gegeben, wobei gilt:

$$\psi_{C_2} = f \circ \psi_1 = g \circ \psi_2$$

Wir sehen, dass ψ eindeutig durch $q := \psi_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$ gegeben ist. Der Differnzenkokern ist also eindeutig durch $(C \in obj_{\mathcal{A}}, q \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2))$ gegeben, wobei q folgenden Eigenschaften besitzt:

Es gilt $f \circ q = g \circ g$ und
für alle $C \in Obj_A$ und $q' \in Hom_{\mathcal{A}}$ mit $f \circ q' = g \circ q'$ existiert genau ein $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}$, mit $q \circ \varphi = q'$:

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "{f,g}"] & C_2 \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q'"'] & C \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & & C' \end{tikzcd}$$

Wenn wir fortan vom Differenzkokern sprechen meinen wir damit das Paar (C, q).

Kolimes durch Koprodukt und Differenzkokern

Theorem 6. *[Proposition A6.1 David Eisenbud 1994]*
Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie, in der Koprodukte beliebiger Mengen von Objekten und Differenzkokerne von je zwei Morphismen existieren. Dann existiert für jedes Diagramm $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ dessen Kolimes $\varinjlim \mathcal{F}$.

Beweis. In korrolar 3 haben wir gesehen, dass es genügt den Fall $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ zu betrachten. Konstruiere also für eine beliebige Unterkategorie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ deren Kolimes $\varinjlim \mathcal{B}$:
Bezeichne für jeden Morphismus $\gamma \in Morph_{\mathcal{C}}$ dessen Definitionsbreich mit $B_\gamma \in$

$\mathcal{B}$. Weiter, wenn wir einen Morphismus ψ gegeben haben und $\psi_{\gamma(B_\gamma)}$ betrachten, ist damit ψ_B gemeint, wobei B die Zielmenge von γ ist. Definiere nun:

- $C_1 := \coprod_{\gamma \in Morph_\mathcal{B}} B_\gamma$ ist das Koprodukt aller Objekte von $\mathcal{B}$, in dem jedes Objekt so oft vorkommt, wie es Definitionsbereich eines $\gamma \in Morph_\mathcal{B}$ ist. Sei $\psi^1 : \{B_\gamma | \gamma \in Morph_\mathcal{B}\} \longrightarrow C_1$ der dazugehörige Morphismus.
- $C_2 := \coprod_{B \in Obj_\mathcal{B}}$ ist das Koprodukt aller Objekte von $\mathcal{B}$. Sei $\psi^2 : \{B | B \in Obj_\mathcal{B}\} \longrightarrow C_2$ der dazugehörige Morphismus.

Konstruiere nun $f, g \in Hom_\mathcal{A}(C_1, C_2)$ so, dass der Differenzkokern von f und g dem Kolimes von $\mathcal{B}$ entspricht. Nutze dazu die universelle Eigenschaft von $(C_1, \psi^1) = \varinjlim \{B_\gamma | \gamma \in Morph_\mathcal{B}\}$:

> Für f betrachte den Morphismus $\zeta : \{B_\gamma | \gamma \in Morph_\mathcal{B}\} \longrightarrow C_2$, mit $\zeta_{B_\gamma} := \psi^2_{\gamma(B_\gamma)}$ für $B_\gamma \in \{B_\gamma | \gamma \in Morph_\mathcal{B}\}$. Wähle $f \in Hom_\mathcal{B}(C_1, C_2)$ als die eindeutige Funktion, mit $\zeta = f \circ \psi^1$.
>
> Für g betrachte den Morphismus $\zeta' : \{B_\gamma | \gamma \in Morph_\mathcal{B}\} \longrightarrow C_2$, mit $\zeta'_{B_\gamma} := \psi^2_{\gamma(B_\gamma)} \circ \gamma$ für $B_\gamma \in \{B_\gamma | \gamma \in Morph_\mathcal{B}\}$. Wähle $g \in Hom_\mathcal{B}(C_1, C_2)$ als die eindeutige Funktion, mit $\zeta' = g \circ \psi^1$.

$$\begin{tikzcd}
 & \{B_\gamma | \gamma \in Morph_\mathcal{B}\} \arrow[dl, "\zeta"'] \arrow[dr, "\psi^1"] & \\
C_2 & & C_1 \arrow[ll, dashed, "\exists! f"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \{B_\gamma | \gamma \in Morph_\mathcal{B}\} \arrow[dl, "\zeta'"'] \arrow[dr, "\psi^1"] & \\
C_2 & & C_1 \arrow[ll, dashed, "\exists! g"']
\end{tikzcd}$$

$$\zeta_{B_\gamma} := \psi^2_{\gamma(B_\gamma)} \qquad \zeta'_{B_\gamma} := \psi^2_{\gamma(B_\gamma)} \circ \gamma$$

Sei $C \in Obj_\mathcal{B}$ zusammen mit $q \in Hom_\mathcal{A}(C_2, C)$ der Differenzkokern von f,g.
Betrachte abschließend $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow C$, mit $\psi_B = q \circ \psi^2_B$ für $B \in Obj_\mathcal{B}$.
Um zu sehen, dass ψ ein Morphismus ist, wähle $B_1, B_2 \in Obj_\mathcal{B}$ beliebig und betrachte folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[rr, "\psi^2_{B_1} = \zeta_{B_1}"] \arrow[dr, "\psi^1_{B_1}"] \arrow[dd, "\gamma"'] \arrow[ddrr, bend right, "\zeta'_{B_2}"'] & & C_2 \arrow[dr, "q"] & \\
 & C_1 \arrow[ur, "f"'] \arrow[dr, "g"] & & C \\
B_2 \arrow[rr, "\psi^2_{B_2}"'] & & C_2 \arrow[ur, "q"'] &
\end{tikzcd}$$

Zeige nun, dass (C, ψ) die Universelle Eigenschaft des Kolimes besitzt. Nutze dazu nacheinander die universellen Eigenschaften von (C_2, ψ^2) und (q, C):

> Da ψ' ein Morphismus von $\mathcal{B}$ nach C' ist, ist ψ' insbesondere auch ein Morphismus von $\{B | B \in Obj_\mathcal{B}\}$ nach C. Somit existiert genau ein $q' \in Hom_\mathcal{B}(C_2, C')$ mit $\psi^2 \circ q' = \psi'$.

Zeige nun $q' \circ f \overset{!}{=} q' \circ g$. Sei dazu $c \in C_1$ beliebig und $\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}$, $b \in B_\gamma$ mit $\psi^1_{B_\gamma}(b) = c$, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
(q' \circ f)(c) = (q' \circ f \circ \psi^1_{B_\gamma})(b) = (q' \circ \zeta_{B_\gamma})(b) = (q' \circ \psi^2_{B_\gamma})(b) = \psi'_{B_\gamma}(b) \\
(q' \circ g)(c) = (q' \circ g \circ \psi^1_{B_\gamma})(b) = (q' \circ \zeta'_{B_\gamma})(b) \\
= (q' \circ \psi^2_{\gamma(B_\gamma)} \circ \gamma)(b) = (\psi'_{\gamma(B_\gamma)} \circ \gamma)(b) = \psi'_{B_\gamma}(b)
\end{aligned}
$$

Somit können wir die universelle Eigenschaft von q auf q' anwenden und erhalten ein eindeutiges $\varphi \in Hom(C, C')$ mit $q' = q \circ \varphi$.

$$
\begin{tikzcd}
& \mathcal{B} \arrow[ddl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi^2"] \arrow[ddrr, bend left, "\psi"] & & \\
& & C_2 \arrow[dll, dashed, "\exists! q'"'] \arrow[dr, "q"] & \\
C' & & & C \arrow[lll, dashed, "\exists! \varphi"']
\end{tikzcd}
$$

Dieses $\varphi \in Hom(C, C')$ erfüllt auch $\psi \circ \varphi = \psi^2 \circ q \circ \varphi = \psi^2 \circ q' = \psi'$ und ist nach Konstruktion eindeutig. Damit gilt $\varinjlim \mathcal{B} = (C, \psi)$. $\square$

Bemerkung 7. *(Unendliche Indexmengen)*
Wir wollen uns hier nochmal kurz in Erinnerung rufen, was es bedeutet, wenn wir eine unendlich große Indexmenge Λ vor uns haben:

1. *Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie und $\{B_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq Obj_{\mathcal{A}}$, dann gilt:*

$$\bigoplus_{i \in \Lambda} B_i = \bigcup_{\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \Lambda} \bigoplus_{k=1}^{n} B_{i_k} = \{(b_{i_1}, \dots, b_{i_n}) | n \in \mathbb{N} \wedge \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \Lambda\}$$

2. *Sei $\{M_i\}_{i \in \Lambda}$ eine Menge von R-Moduln (oder R-Algebren), dann gilt:*

$$\bigotimes_{i \in \Lambda} M_i = \bigcup_{\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \Lambda} \bigotimes_{k=1}^{n} M_{i_k} = \{(m_{i_1} \otimes \cdots \otimes m_{i_n}) | n \in \mathbb{N} \wedge \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \Lambda\}$$

3. *Für den Polynomring über R in unendlich vielen Variablen $\{x_i\}_{i \in \Lambda}$ gilt:*

$$P[\{x_i\}_{i \in \Lambda}] = \bigcup_{\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \Lambda} P[x_{i_1}, \dots, x_{i_n}] = \{P(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) | n \in \mathbb{N} \wedge \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \Lambda\}$$

Dies zeigt, dass sich diesen drei Fällen eine unendliche Indexmenge Λ immer auf endliche Indexmengen $\{1, \dots, n\}$ zurückführen lässt.

Darstellung der Polynomalgebra als Tensorprodukt

Bemerkung 8. *[Eigene Überlegung]*
Die Polynomalgebra $R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]$ über R lässt sich wie folgt als Tensorprodukt darstellen:

$$R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}] = \bigotimes_{i\in\Lambda} R[x_i]$$

Beweis. Im Falle einer endlichen Indexmenge Λ wollen wir induktiv vorgehen. Seien für den Induktionsschritt $S_x := R[x_1,\ldots x_n]$ und $S_y := R[y_1,\ldots,y_m]$ zwei Polynomalgebren über R, zeige:

$$S_{xy} := R[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m] \simeq S_x \otimes_R S_y$$

Dazu betrachten wir folgende bilineare Funktion:

$$g' : S_x \oplus S_y \longrightarrow S\,,\,(P,Q) \longmapsto P\cdot Q$$

Erhalte nun eine Funktion $\varphi : S_x \otimes_R S_y \longrightarrow S_{xy}$ aus der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes:

$$\begin{tikzcd} S_x \oplus S_y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & S_x \otimes_R S_y \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & S_{xy} \end{tikzcd}$$

$$\varphi : S_x \otimes_R S_y \longrightarrow S_{xy}\,,\, P\otimes Q \longmapsto P\cdot Q$$

Der Homomorphismus φ ist surjektiv und bildet die Erzeuger $\{x_i \otimes 1\} \cup \{1 \otimes y_j\}$ von $S_x \otimes_R S_y$ eindeutig auf die Erzeuger $\{x_i\} \cup \{y_j\}$ von S_{xy} ab. Folglich ist φ ein Isomorphismus.
Indunktiv erhalten wir daraus für den Fall $|\Lambda| < \infty$ folgenden Isomorphismus:

$$\Phi : \bigotimes_{i\in\Lambda} R[x_i] \longrightarrow R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]\,,\,(P_1(x_1),\ldots P_n(x_n)) \longmapsto \prod_{i=1}^{n} P_i(x_i)$$

Dies ist auch im Fall $\Lambda = \infty$ ein Isomorphismus, da wir auch in diesem Fall nur Tensorprodukte endlich vieler Polynome bzw. Polynome in endlich vielen Variablen betrachten *(siehe bemerkung 7)*.
Da das Tensorprodukt $\bigotimes_{i\in\Lambda} R[x_i]$ bis auf eine Eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist, definiere dies ab jetzt als $R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]$. □

R-Algebra-Kolimiten

Proposition 9. *[vlg. Proposition A6.7 David Eisenbud 1994]*
In der Kategorie der R-Algebren existieren Kolimiten beliebiger Diagramme, wobei gilt:

1. *Das Koprodukt einer Familie von $R-$Algebren $\{S_i\}_{i\in\Lambda}$ entspricht deren Tesorprodukt $\bigotimes_{i\in\Lambda} S_i$.*

2. *Der Differenzkokern zweier R-Algebrenhomomorphismen $f, g : S_1 \longrightarrow S_2$ einspricht dem Homomorphismus $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$, $y \longmapsto [y]$, wobei $Q := \{f(x) - g(x) \mid x \in S_1\}$ das Bild der Differenz von f und g ist.*

Beweis.
Zu ***1.***: Sei $\mathcal{B} = \{S_i\}_{i\in\Lambda}$ die Unterkategorie der R-Algebren, welche $\{S_i\}_{i\in\Lambda}$ zusammen mit den Identitätsabbildungen enthält. Somit gilt nach definition 4 $\coprod_{i\in\Lambda} S_i = \varinjlim \mathcal{B}$. Seien weiter:

$\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \coprod_{i\in\Lambda} S_i$ der Morphismus des Koprodukts und

$g : \bigoplus_{i\in\Lambda} S_i \longrightarrow \bigotimes_{i\in\Lambda} S_i$ die multilineare Abbildung des Tensorprodukts.

Konstruiere daraus einen Morphismus ψ' und eine multilineare Abbildung g':

$$\psi' : \mathcal{B} \longrightarrow \bigotimes_{i\in\Lambda} S_i, \text{ mit } \psi'_{S_i} : S_i \longrightarrow \bigotimes_{i\in\Lambda} S_i \text{ , } s_i \longmapsto g(1, .., 1, s_i, 1, .., 1) \text{ für } i \in \Lambda$$

$$g' : \bigoplus_{i\in\Lambda} S_i \longrightarrow \coprod_{i\in\Lambda} S_1 \text{ , } s \longmapsto \prod_{i\in\{i\in\Lambda \mid s_i \neq 0\}} \psi_i(s_i)$$

Somit liefern uns die universellen Eigenschaften folgende zwei R-Algebra-Homomorphismen:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ \bigotimes_{i\in\Lambda} S_i & & \coprod_{i\in\Lambda} S_1 \arrow[ll, dashed, "\exists!\varphi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \bigoplus_i S_i \arrow[dl, "g'"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \coprod_{i\in\Lambda} S_i & & \bigotimes_{i\in\Lambda} S_i \arrow[ll, dashed, "\exists!\phi"'] \end{tikzcd}$$

$$\varphi : \coprod_{i\in\Lambda} S_i \longrightarrow \bigotimes_{i\in\Lambda} S_i \qquad \phi : \bigotimes_{i\in\Lambda} S_i \longrightarrow \coprod_{i\in\Lambda} S_i$$

Wende nun die Universelle Eigenschaft von ψ auf ψ selbst an und erhalte $id_{\coprod_{i\in\Lambda} S_i} = \phi \circ \varphi$. Analog erhalte auch durch die universelle Eigenschschaft des Tensorpruduktes $id_{\bigotimes_i S_i} = \varphi \circ \phi$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ \coprod_{i\in\Lambda} S_i & & \coprod_{i\in\Lambda} S_i \arrow[ll, dashed, "\exists! id_{\coprod_{i\in\Lambda} S_i} = \phi\circ\varphi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \bigoplus_i S_i \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \bigotimes_{i\in\Lambda} S_i & & \bigotimes_i S_i \arrow[ll, dashed, "\exists! id_{\bigotimes_i S_i} = \varphi\circ\phi"'] \end{tikzcd}$$

Damit haben wir Isomorphismen zwischen $\coprod_{i\in\Lambda} S_i$ und $\bigotimes_i S_i$ gefunden.
Da das Koprodukt $\coprod_{i\in\Lambda} S_i = \varinjlim \mathcal{B}$ bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist *(lemma 2)*, definiere dies ab jetzt als $\bigotimes_{i\in\Lambda} S_i$.

Zu ***2.***: Zeige, dass $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ die in bemerkung 5 eingeführten Eigenschaften des Differenzkokern‘s besitzt:

$$q \circ f = q \circ g \text{ gilt, da } kern(q) = Q = \{f(x) - g(x) \mid x \in C_2\}.$$

Sei nun ein R-Algabrahomomorphismus $q' : S_2 \longrightarrow T'$ mit $q' \circ f = q' \circ g$ gegeben. Somit gilt $q' \circ (f - g) = 0$, wodurch Q ein Untermodul von $Q' := kern(q')$ ist. Mit dem Isomorphiesatz für R-Algebren erhalten wir:

$$S_2/Q' \simeq (S_2/Q)/(Q'/Q).$$

Somit ist $q' : S_2 \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q)\,,\, y \longmapsto [y]'$ eine isomorphe Darstellung von $q' : S_2 \longrightarrow T'$.

$$\Rightarrow \exists! \varphi : S_2/Q \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q)\,,\, [y] \longmapsto [y]' \;\mathit{mit}\; (\varphi \circ q) = q'.$$

Also ist S_2/Q zusammen mit $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ der bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmte Differenzkokern von f und g.
Damit haben wir gezeigt, dass Koprodukte beliebiger Mengen von R-Algebren und Differenzkokerne von je zwei R-Algebrenhomomorphismus existieren. Nach theorem 6 existieren somit in der Kategorie der R-Algebren Kolimiten beliebiger Diagramme. □

R-Modul-Kolimiten

Proposition 10. *[Proposition A6.2 David Eisenbud 1994]*
In der Kategorie der R-Moduln existieren Kolimiten beliebiger Diagramme, wobei gilt:

1. *Das Koprodukt einer Familie von $R-Moduln$ $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$ entspricht deren direkter Summe $\bigoplus_{i\in\Lambda} M_i$.*
2. *Der Differenzenkokern zweier R-Modulhomomorphismen $f, g : M_1 \longrightarrow M_2$ entspricht dem Homomorphismus $q : M_2 \longrightarrow M_2/Q\,,\, y \longmapsto [y]$, wobei $Q := \{f(x) - g(x) \mid x \in M_1\}$ das Bild der Differenz von f und g ist.*

Beweis.
Zu ***1.***: Sei $\mathcal{B} = \{M_i\}_{i\in\Lambda}$ die Unterkategorie der R-Moduln, welche $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$ zusammen mit den Identitätsabbildungen enthält. Betrachte als Morphismus ψ die jeweilige Einbettung von M_i in $\bigoplus_{i\in\Lambda} M_i$:

$$\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda} M_i \text{ mit } \psi_{M_i} : M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda} M_i\,,\, m_i \longmapsto (0, ... \cdots, 0, m_i, 0, \cdots, 0) \text{ für } i \in \Lambda$$

Somit lässt sich jedes $(m_1, \cdots m_n) \in \bigoplus_{i\in\Lambda} M_i$ *(im Fall von $|\lambda| = \infty$ siehe bemerkung 7)* eindeutig durch die Elemente $m_i \in M_i$ (für $i \in \{i, \cdots, n\}$) darstellen:

$$(m_1, \cdots, m_n) = \sum_{i=1}^{n} \psi_{M_i}(m_i)$$

Damit erfüllt ψ die universelle Eigenschaft von $\varinjlim \mathcal{B}$, denn sei $\psi' : \mathcal{B} \longrightarrow M'$ ein bieliebiger Morphismus, so existiert genau ein R-Modulhomomorphismus:

$$\varphi : \bigoplus_{i\in\Lambda} M_i \longrightarrow M' \,,\, (m_1, \cdots, m_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \psi'_{M_i}(m_i)$$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ M' & & \bigoplus_i M_i \arrow[ll, dashed, "\exists!\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Also ist $\oplus_{i\in\Lambda} M_i$ zusammen mit den Einbettungen $\psi_{M_i} : M_i \hookrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda} M_i$ das bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmte Koprodukt von $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$.
2. ist Analog zu proposition 9
Damit haben wir gezeigt, dass Koprodukte beliebiger Mengen von R-Moduln und Differenzkokerne von je zwei R-Modulhomomorphismen existieren. Nach theorem 6 existieren somit in der Kategorie der R-Moduln Kolimiten beliebiger Diagramme. □

1.2 Darstellung von Lokalisierung als Kolimes

Lokalisierung von Algebren als Kolimes *[vlg. Aufgabe A6.7 David Eisenbud 1994]*

Lemma 11. *Sei S eine $R-$Algebra und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$S[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{B}$$

Wobei $\mathcal{B}$ aus den Objekten $\{S[t^{-1}] | t \in U\}$ und den Morphismen $S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}], (\frac{s}{t^n})_t \longmapsto (\frac{st'^n}{(tt')^n})_{(tt')}\ \forall t, t' \in U$ besteht.

Beweis. Sei $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow A$ der Kolimes von $\mathcal{B}$. Zeige $S[U^{-1}] \simeq A$, definiere dazu:

$$\psi' : \mathcal{B} \longrightarrow S[U^{-1}]$$
$$\psi'_{S[t^{-1}]} : S[t^{-1}] \longrightarrow S[t^{-1}] \,,\, (\frac{s}{t^n})_t \longmapsto (\frac{s}{t^n})_U$$

ψ' ist ein Morphismus, da für beliebige $t, t' \in U$ und $s \in S$ gilt:

$$(\frac{s}{t^n})_U = (\frac{st'^n}{(tt')^n})_U$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir den eindeutigen Homomorphismus $\varphi : A \longrightarrow S[U^{-1}]$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ S[U^{-1}] & & A \arrow[ll, dashed, "\exists!\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Für $\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow A$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen.
Zunächst können wir jedes Element $(\frac{s}{u})_U \in S[U^{-1}]$ als $\psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t)$ schreiben.
Weiter gilt für alle $s_1, s_2 \in S$, $t_1, t_2 \in U$:

$$\begin{aligned}
\textit{Sei } \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_t) &= \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_t) \\
\Rightarrow \exists u \in U : (s_1 t_1 - s_2 t_2) \cdot u &= 0 \\
\Rightarrow (\frac{s_1 u}{t_1 u})_{tu} &= (\frac{s_2 u}{t_2 u})_{tu} \\
\Rightarrow \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_t) &= \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_t)
\end{aligned}$$

Mit diesem Wissen können wir den R-Algebra-Homomorphismus $\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow A$ definieren:

$$\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow A\,,\; \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t) \longmapsto \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t)$$

$\phi \circ \varphi = id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B} \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
A & & A \arrow[ll, dashed, "\exists! id_A = \phi\circ\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Für $\varphi \circ \phi \overset{!}{=} id_{S[U^{-1}]}$ wähle beliebige $s \in S, t \in U$, für diese gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{s}{t})_t)) = \varphi(\psi((\frac{s}{t})_t) = \psi'((\frac{s}{t})_t)$$

Damit haben wir gezeigt, dass φ, ϕ Isomorphismen sind und somit $A \simeq S[U^{-1}]$ gilt.
Da der Kolimes bis auf Isomorphie eindeutig ist, definiere ab sofort $S[U^{-1}]$ als den eindeutigen Kolimes von $\mathcal{B}$. $\square$

Lokalisierung von Moduln als Kolimes *[Beweis von Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]*

Korrolar 12. *Sei M ein S-Modul, wobei S eine R-Algebra ist. Sei weiter $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$M[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{C}$$

Wobei $\mathcal{C}$ aus den Objekten $\{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] | t \in U\}$ und folgenden Morphismen besteht:

$$S[U^{-1}] \otimes M[t^{-1}] \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes M[(tt')^{-1}],$$
$$(\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{m}{t^n})_t \longmapsto (\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{t'^n m}{(tt')^n})_t$$

Auch wenn sich lemma 11 hier nicht direkt anwenden lässt, so können wir doch im Beweis gleich vorgehen.

Beweis. Schließe zunächst den trivialen Fall $0 \in U$ aus.
Sei $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow A$ der Colimes von $\mathcal{C}$. Zeige $S[U^{-1}] \simeq A$, definiere dazu folgenden Morphismus :

$$\psi : \mathcal{C} \longrightarrow M[U^{-1}]$$
$$\psi_t : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \longrightarrow M[U^{-1}]\,,\ (\frac{s}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{t^n})_{t} \longmapsto (\frac{sm}{ut^n})_{U}$$

Die Wohldefiniertheit von ψ'_t für ein beliebiges $t \in U$ folgt direkt aus der Universellen Eigenschaft des Tensorprodukt's. Denn für die bilineare Abbildung $f : S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \longrightarrow M[t^{-1}]\,,\ ((\frac{s}{u})_U, (\frac{m}{t^n})_t) \longmapsto (\frac{sm}{ut^n})_U$ gilt:

$$\begin{tikzcd} S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \arrow[d, dashed, "\exists! \psi'_t"] \\ & M[U^{-1}] \end{tikzcd}$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir nun den eindeutigen Homomorphismus $\varphi : A \longrightarrow M[U^{-1}]$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[dl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ M[U^{-1}] & & A \arrow[ll, dashed, "\exists! \varphi"'] \end{tikzcd}$$

Für $\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow A$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen.
Zunächst können wir jedes Element $(\frac{m}{u})_U \in M[U^{-1}]$ als $\psi((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)$ schreiben. Wobei mit ψ gemeint ist, dass wir ein beliebiges $t \in U$ wählen und dann ψ_t betrachten. Diese Verallgemeinerung ist möglich, da für beliebige $t_1, t_2, u \in U$ und $m \in M$ gilt:

$$\psi_{t_1}((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_{t_1}) = (\frac{m}{u})_U = \psi_{t_2}((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_{t_2})$$

Definiere nun mit diesem Wissen folgenden Homomorphismus:

$$\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow A\,,\ \psi((\frac{1}{u})_U \otimes t) \longmapsto \psi'((\frac{1}{u})_U \otimes t)$$

$\phi \circ \varphi = id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes.
Für $\varphi \circ \phi \overset{!}{=} id_{M[U^{-1}]}$ wähle $(\frac{m}{u})_U \in M[U^{-1}]$ beliebig, für dieses gilt:

$$\begin{aligned} &(\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)) \\ &= \varphi(\psi((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)) \\ &= \psi'((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t) \end{aligned}$$

Damit haben wir $A \simeq M[U^{-1}]$ gezeigt, definiere also ab sofort $M[U^{-1}]$ als den eindeutigen Kolimes von $\mathcal{C}$. $\square$