Kapitel 1

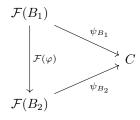
Kolimes

1.1 Einführung in den Kolimes

Definition des Kolimes

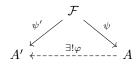
Definition 1. [vgl. Anhang A6 David Eisenbud 1994] Sei A eine Kategorie.

- Ein <u>Diagramm</u> über A ist eine Kategorie B zusammen mit einem Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow A$.
- Sei $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Diagramm und $A \in \mathcal{A}$ ein Objekt. Dann definieren wir einen Morphismus $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$ als eine Menge von Funktionen $\{\psi_B \in Hom(F(B), A) | B \in \mathcal{B}\}$, wobei für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $\varphi \in Hom(B_1, B_2)$ folgendes Diagramm kommutiert:



• Der <u>Kolimes</u> $\varinjlim \mathcal{F}$ eines Diagramms $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ist ein Paar aus einem Objekt $A \in \mathcal{A}$ zusammen mit einem Morphismus $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$, welche folgende universelle Eingenschaft erfüllen:

Für Objekte $A' \in \mathcal{A}$ und alle Morphismen $\psi' : \mathcal{F} \longrightarrow A'$ existiert genau eine Funktion $\varphi \in Hom(A, A')$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:



Eindeutigkeit des Kolimes [vgl. A6 David Eisenbud 1994]

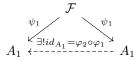
Lemma 2. Seien \mathcal{B} , \mathcal{A} zwei Kategorien und $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor. Dann ist im Falle der Existenz $\lim \mathcal{F}$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien $A_1 \in \mathcal{A}, (\psi_1 : \mathcal{F} \longrightarrow A_1)$ und $A_2 \in \mathcal{A}, (\psi_2 : \mathcal{F} \longrightarrow A_2)$ beide gleich $\lim \mathcal{F}$.

Erhalte durch die universelle Eigenschaft des Kolimes die eindeutig bestimmten Funktionen $\varphi_1 \in Hom_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$ und $\varphi_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(A_2, A_1)$, für welche die folgende Diagramme kommutieren:



Wende nun die Universelle Eigenschaft von ψ_1 auf ψ_1 selbst an und erhalte $id_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1$. Analog erhalte auch $id_{A_2} = \varphi_1 \circ \varphi_2$.



Somit existiert genau eine Isomorphie $\varphi_1: A_1 \longrightarrow A_2$

Vereinfachung des Kolimes

Korrolar 3. [Eigene Überlegung]

Sei \mathcal{A} eine Kategorie und $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$ ein Diagramm. Betrachte die Unterkategorie $\mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{A}$ zusammen mit dem Inklusionsfunktor $\mathcal{F}(B) \hookrightarrow \mathcal{A}$ ebenfalls als Diagramm. Dann gilt:

$$\varinjlim \mathcal{F} \ existiert \ genau \ dann, \ wenn \ \varinjlim (\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \ existiert.$$
$$Mit \ \varinjlim \mathcal{F} = \varinjlim (\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}).$$

Beweis. Dies folgt direkt aus unserer Definition von Morphismen:

In definition 1 haben wir einen Morphismus $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$ als eine Menge von Funktionen $\psi_{\mathcal{B}} \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(B), A)$ definiert. Dies zeigt, dass es keinen Unterschied macht, ob wir von Morphismen $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$ oder von Morphismen $\psi: (\mathcal{F}(B) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$ reden.

Wenn wir nun die universelle Eigenschaft des Kolimes genauer betrachten, sehen wir, dass diese sich nur auf Morphismen $\mathcal{F} \longrightarrow A$ bzw. $(\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$ und auf die Kategorie \mathcal{A} bezieht. Es macht also keinen Unterschied, ob wir vom Kolimes des Diagramms $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$ oder vom Kolimes des Diagramms $(\mathcal{F}(\mathcal{B}), \mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A})$ sprechen.

Es genügt also im Fall von Kolimtenn Diagramme $(\mathcal{B}, \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$ mit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ zu betrachten. Zur Vereinfachung schreibe für $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ in Zukunft $\varinjlim \mathcal{B}$ anstatt von $\varinjlim (\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$.

DifferenzkokernUndKoproduktDef

Definition 4. [vlg. A6 David Eisenbud 1994] Sei A eine Kategorie.

- Das Koprodukt von {B_i}_{i∈Λ} ⊆ A wird durch ∐_{i∈Λ}{B_i} := lim B definiert, wobei {B_i}_{i∈Λ} die Objekte und die Identitätsabbildungen {id_{Bi} : B_i → B_i}_{i∈Λ} die einzigen Morphismen von B sind.
- Der Differenzkokern von $f,g \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1,C_2)$ wird durch $\varinjlim_{\longrightarrow} \mathcal{C}$ definiert, wobei $\{C_1,C_2\}$ die Objekte und $\{f,g\}$ zusammen mit den Identitätsabbildungen die Morphismen von \mathcal{C} sind.

NeuDifferenzenkokerndef

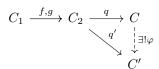
Bemerkung 5. [Wikipedia]

Sei A eine Kategorie. Sei weiter $C_1, C_2 \in Obj_A$ und $f, g \in Hom_A(C_1, C_2)$. Im Falle der Existenz ist der Differnenzenkokern von f, g nach definition 4 durch ein Objekt $C \in Obj_A$ und einen Morphismus $\psi = \{\psi_{C_1}, \psi_{C_2}\}$ gegeben, wobei gilt:

$$\psi_{C_2} = f \circ \psi_1 = g \circ \psi_2$$

Wir sehen, dass ψ eindeutig durch $q := \psi_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$ gegeben ist. Der Differnzenkokern ist also eindeutig durch $(C \in obj_{\mathcal{A}}, q \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2))$ gegeben, wobei q folgenden Eigenschaften besitzt:

Es gilt $f \circ q = g \circ g$ und für alle $C \in Obj_A$ und $q' \in Hom_A$ mit $f \circ q' = g \circ q'$ existiert genau ein $\varphi \in Hom_A$, mit $g \circ \varphi = q'$:



Wenn wir fortan vom Differenzkokern sprechen meinen wir damit das Paar (C,q).

Kolimes durch Koprodukt und Differenzkokern

Theorem 6. [Proposition A6.1 David Eisenbud 1994]

Sei \mathcal{A} eine Kategorie, in der Koprodukte beliebiger Mengen von Objekten und Differenzkokerne von je zwei Morphismen existieren. Dann existiert für jedes Diagramm $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ dessen Kolimes $\lim \mathcal{F}$.

Beweis. In korrolar 3 haben wir gesehen, dass es genügt den Fall $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ zu betrachten. Konstruiere also für eine beliebige Unterkategorie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ deren Kolimes $\lim(\mathcal{F})$:

Bezeichne für jeden Morphismus $\gamma \in Morph_{\mathcal{C}}$ dessen Definitionsbreich mit $B_{\gamma} \in \mathcal{B}$. Definiere nun:

- $C_1 := \coprod_{\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}} B_{\gamma}$ ist das Koprodukt aller Objekte von \mathcal{B} , in dem jedes Objekt so oft vorkommt, wie es Definitionsbereich eines $\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}$ ist. Sei $\psi^1 : \{B_{\gamma} | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_1$ der dazugehörige Morphismus.
- $C_2 := \coprod_{B \in Obj_{\mathcal{B}}}$ ist das Koprodukt aller Objekte von \mathcal{B} . Sei $\psi^2 : \{B | B \in Obj_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_2$ der dazugehörige Morphismus.

Konstruiere nun $f, g \in Hom_{\mathcal{B}}C_1, C_2$ so, dass der Differenzkokern von f und g gleich dem Kolimes von \mathcal{B} ist:

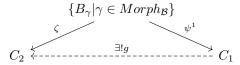
Für g betrachte den Morphismus $\zeta:\{B_{\gamma}|\gamma\in Morph_{\mathcal{B}}\}\longrightarrow C_2,$ mit $\zeta_{B_{\gamma}}=\psi^2_{\gamma(B_{\gamma})}$ für $B_{\gamma}\in\{B_{\gamma}|\gamma\in Morph_{\mathcal{B}}\}.$ Wende die universelle Eigenschaft von $(C_1,\psi^1)=\lim_{\longrightarrow}\{B_{\gamma}|\gamma\in Morph_{\mathcal{B}}\}$ an:

$$\{B_{\gamma}|\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\}$$

$$C_{2} \stackrel{\forall^{1}}{\longleftarrow} C_{1}$$

Wähle $f \in Hom_{\mathcal{B}}(C_1, C_2)$ als die eindeutige Funktion, für die $\zeta = \psi^1 \circ f$ gilt.

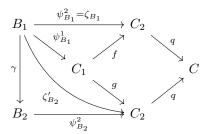
Für g betrachte den Morphismus $\zeta':\{B_\gamma|\gamma\in Morph_\mathcal{B}\}\longrightarrow C_2,$ mit $\zeta'_{B_\gamma}=\psi^2_{\gamma(B_\gamma)}\circ\gamma$ für $B_\gamma\in\{B_\gamma|\gamma\in Morph_\mathcal{B}\}.$ Wende die universelle Eigenschaft von $C_1=\lim_{\longrightarrow}\{B_\gamma|\gamma\in Morph_\mathcal{B}\}$ an:



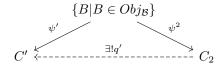
Wähle $g \in Hom_{\mathcal{B}}(C_1, C_2)$ als die eindeutige Funktion, für die $\zeta' = \psi^1 \circ g$ gilt.

Sei nun also $C \in Obj_{\mathcal{B}}$ zusammen mit $q \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, C)$ der Differenzkokern von f, q.

Zeige Abschließend, dass $(C, \psi : \mathcal{B} \longrightarrow q \circ \psi^2$ Der Kolimes von $\mathcal{B})$ ist: Um zu sehen, dass ψ ein Morphismus ist, wähle $B_1, B_2 \in Obj_{\mathcal{B}}$ beliebig und betrachte folgendes kommutatives Diagramm:



Zeige nun, dass (C, ψ) die Universelle Eigenschaft des Kolimes besitzt: Nutze dazu zunächst, dass (C_2, ψ^2) der Kolimes von $\{B|B \in Obj_{\mathcal{B}}\} \subseteq \mathcal{B}$ ist und somit dessen universelle Eigenschaft besitzt: Da ψ' ein Morphismus von \mathcal{B} nach C' ist, ist ψ' insbesondere auch ein Morphismus von $\{B|B\in Obj_{\mathcal{B}}\}$ nach C. Somit existiert genau ein $q'\in Hom_{\mathcal{B}}(C_2,C')$ mit $\psi^2\circ q'=\psi'$:

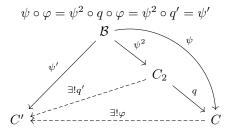


Um die universelle Eigenschaft von q nutzen zu können zeige nun, dass $q' \circ f = q' \circ g$ gilt. Sei dazu $c \in C_1$ beliebig und wähle $\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}$ und $b \in B_{\gamma}$ mit $\psi_{B_{\gamma}}^1(b) = c$, dann gilt:

$$(q'\circ f)(c) = (q'\circ f\circ \psi_{B_{\gamma}}^{1})(b) = (q'\circ \zeta_{B_{\gamma}})(b) = (q'\circ \psi_{B_{\gamma}}^{2})(b) = \psi_{B_{\gamma}}'(b)$$

$$(q'\circ g)(c) = (q'\circ g\circ \psi_{B_{\gamma}}^{1})(b) = (q'\circ \zeta_{B_{\gamma}}')(b) = (q'\circ \psi_{\gamma(B_{\gamma})}^{2}\circ \gamma)(b) = (\psi_{\gamma(B_{\gamma})}'\circ \gamma)(b) = \psi_{B_{\gamma}}'(b)$$

Folglich können wir die universelle Eigenschaft von q auf q' anwenden und erhalten ein eindeutiges $\varphi \in Hom(C,C')$ mit $q'=q\circ \varphi$. Dieses erfüllt somit auch:



Damit haben wir gezeigt, dass $\lim \mathcal{B} = (C, \psi)$ existiert.

Tensorprodukt des Differenzenkokerns [Eigene Bemerkung]

Bemerkung 7. Seien $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(S_1, S_2)$ R-Algebra-Homomorphismen, so können wir für den Differenzenkokern $q: S_2 \longrightarrow T$ für ein beliebiges S_1 -Modul das Tensorprodukt $T \otimes_{C_1} M$ definieren.

$$f\ddot{u}r \ s_1 \in S_1 \ und \ t \otimes m) \in T \otimes_{C_1} M \ gilt:$$
$$s_1 \cdot (t \otimes m) = ((q \circ f)(s_1)) \cdot t \otimes m = ((q \circ g)) \cdot (s_1)t \otimes m$$

R-Algebra-Kolimiten [vlg. Proposition A6.7 David Eisenbud 1994]

Proposition 8. in der Kategorie der R-Algebren existieren Koprodukte und Differenzkokerne, wobei:

1. Das Koprodukt einer endlichen Familie von $R-Algebren \{S_i\}_{i\in\Lambda}$ entspricht deren Tesorprodukt $\bigotimes_{i\in\Lambda} S_i$.

2. Der Differenzkokern zweier R-Algebra-Homomorphismen $f, g: S_1 \longrightarrow S_2$ einspricht dem Homomorphismus $q: S_2 \longrightarrow S_2/Q$, $y \longmapsto [y]$, wobei $Q:=\{f(x)-g(x)\mid x\in S_2\}$ das Bild der Differenz von f und g ist.

Beweis. Zu 1.:

Sei \mathcal{B} die Unterkategorie der R-Algebren, welche $\{S_i\}_{i\in\Lambda}$ zusammen mit den Identitätsabbildungen enthält. Wir wollen die universellen Eigenschaften des Tensorproduktes und des Kähler-Differenzials nutzen, um einen Isomorphismus zwischen $\lim_{i \in \Lambda} \mathcal{F}$ und $\bigotimes_{i \in \Lambda} B_i$ zu finden.

Es sind der Morphismus $\psi: \mathcal{B} \longrightarrow \varinjlim \mathcal{B}$ und die bilineare Abbildung $g: \oplus_i S_i \longrightarrow \otimes_i S_i$ gegeben.

Konstruiere den Morphismus $\psi': \mathcal{B} \longrightarrow \otimes_i S_i$ durch $\psi'_i: S_i \longrightarrow \otimes_i S_i$, $s_i \longmapsto g(1, ..., 1, s_i, 1, ..., 1)$ für $i \in \lambda$ und die bilineare Abbildung $f: \oplus_i S_i \longrightarrow \lim_i \mathcal{B}$, $s \longmapsto \prod_i \psi_i(s_i)$.

Somit liefern uns die universellen Eigenschaften folgende zwei R-Algebra-Homomorphismen:

$$\varphi: \varinjlim \mathcal{B} \longrightarrow \bigotimes_{i} S_{i}$$
$$\phi: \bigotimes_{i} S_{i} \longrightarrow \varinjlim \mathcal{B}.$$



Die Eindeutigkeit der universellen Eigenschaften liefert uns, das φ und ϕ zueinander Inverse sind und somit haben wir unsere gesuchten Isomorphismen zwischen $\lim \mathcal{B}$ und $\bigotimes_i S_i$ gefunden.



Zu 2.

Zeige, dass $q:S_2\longrightarrow S_2/Q$ die in bemerkung 5 eingeführten Eigenschaften des Differenzkokern's besitzt.

$$q \circ f = q \circ g$$
 gilt, da $kern(q) = Q = \{f(x) - g(x) \mid x \in C_2\}.$

Sei nun eine Funktion $q' \in Hom_{\mathcal{A}}(S_2, T')$ mit $q' \circ f = q' \circ$ gegeben. Somit gilt $q' \circ (f - g) = 0$, wodurch Q ein Untermodul von Q' := kern(q') ist. Mit dem Isomorphiesatz für R-Algebren erhalten wir:

$$S_2/Q' \simeq (S_2/Q)/(Q'/Q).$$

Somit ist $q': S_2 \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q)$, $y \longmapsto [y]'$ eine isomorphe Darstellung von $q': S_2 \longrightarrow T'$.

$$\Rightarrow \exists ! \varphi : S_2/Q \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q), [y] \longmapsto [y]' \ mit \ (\varphi \circ q) = q'.$$

Also ist $q: S_2 \longrightarrow S_2/Q$ der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Differenzkokern von f und g.

Darstellung der Polynomalgebra als Tensorprodukt [Eigene Überlegung]

Bemerkung 9. Die Polynomalgebra $R[x_1,...,x_d]$ über R lässt sich wie folgt als Tensorprodukt darstellen:

$$R[x_1,...,x_n] = \bigotimes_{i \in \{1,...,n\}} R[x_i]$$

Genauer gilt für zwei Polynomalgebren $A=R[x_1,...,x_{n_A}],\,B=R[y_1,...,y_{n_B}]$ über R:

$$A \otimes_R B = R[x_1, ..., x_{n_A}, y_1, ..., y_{n_B}]$$

Skizziere den Beweis.

Beweis. Zeige, dass für $g: A \oplus B \longrightarrow R[x_1, ..., x_{n_A}, y_1, ..., y_{n_B}], (a, b) \longmapsto a \cdot b$ die Universelle Eigenschaft des Tensorproduktes gilt:

$$A \oplus B \xrightarrow{g} R[x_1, ..., x_{n_A}, y_1, ..., y_{n_B}]$$

$$\downarrow f \qquad \qquad \downarrow \exists ! \varphi \qquad \qquad \downarrow M$$

Es ist leicht nachzurechnen, dass es sich bei φ um folgende Funktion handeln muss:

$$\varphi: R[x_1,...,x_{n_A},y_1,...,y_{n_B}] \longrightarrow M, (x_i \cdot y_i) \longmapsto f(x_i,1) \cdot f(1,y_i)$$

R-Modul-Kolimiten [Proposition A6.2 David Eisenbud 1994]

Proposition 10. In Der Kategorie der R-Module existieren Koprodukte und Differenzkokerne, wobei:

- 1. das Koprodukt $\lim_{\longrightarrow} \mathcal{B}$ von R-Modulen $M_i \in (R Module)$ entspricht der direkten Summe $\sum_i M_i$.
- 2. der Differenzenkokern zweier Homomorphismen $f, g: M_1 \longrightarrow M_2$ entspricht dem Kokern $M_2/im(f-g)$ der Differenzenabbildung.

Beweis. für 1. Sei $\phi:\{M_i\}\longrightarrow \mathcal{B}$ ein beliebiger Morphismus. Zeige:

Für ein beliebiges i existiert genau ein $\varphi_i: M_i \oplus 0 \longrightarrow M'$, $(0,...,0,m_i,0,...,0 \longmapsto \psi_i'(m_i)$ mit $\psi_i' = \psi_i \circ \varphi_i$

$$\Rightarrow \exists! \varphi : \bigoplus_i M_i \longrightarrow M', (m_1, ..., m_n) \longmapsto \sum_i \psi_i(m_i)$$

2. ist Analog zu proposition 8

Die in proposition 10 gezeigten Darstellungen gelten mit kurzen Überlegungen auch für S-Module, wobei S eine R-Algebra ist.

1.2 Darstellung von Lokalisierung als Kolimes

Lokalisierung von Algebren als Kolimes [vlg. Aufgabe A6.7 David Eisenbud 1994]

Lemma 11. Sei S eine R-Algebra und $U\subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$S[U^{-1}] = \lim_{\longrightarrow} \mathcal{B}$$

Wobei \mathcal{B} aus den Objekten $\{S[t^{-1}]|t \in U\}$ und den Morphismen $S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}], (\frac{s}{t^n})_t \longmapsto (\frac{st'^n}{(tt')^n})_{(tt')} \ \forall t,t' \in U$ besteht.

Beweis. Sei $\psi: \mathcal{B} \longrightarrow A$ der Kolimes von \mathcal{B} . Zeige $S[U^{-1}] \simeq A$, definiere dazu:

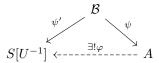
$$\psi': \mathcal{B} \longrightarrow S[U^{-1}]$$

$$\psi'_{S[t^{-1}]}: S[t^{-1}] \longrightarrow S[t^{-1}], \left(\frac{s}{t^n}\right)_t \longmapsto \left(\frac{s}{t^n}\right)_U$$

 ψ' ist ein Morphismus, da für beliebige $t,t'\in U$ und $s\in S$ gilt:

$$(\frac{s}{t^n})_{\scriptscriptstyle U} = (\frac{st'^n}{(tt')^n})_{\scriptscriptstyle U}$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir den eindeutigen Homomorphismus $\varphi:A\longrightarrow S[U^{-1}].$



Für $\phi: S[U^{-1}] \longrightarrow A$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen. Zunächst können wir jedes Element $(\frac{s}{u})_{\scriptscriptstyle U} \in S[U^{-1}]$ als $\psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_{\scriptscriptstyle t})$ schreiben. Weiter gilt für alle $s_1, s_2 \in S, \, t_1, t_2 \in U$:

$$\begin{split} Sei \; \psi_{S[t^{-1}]}'((\frac{s_1}{t_1})_t) &= \psi_{S[t^{-1}]}'((\frac{s_2}{t_2})_t) \\ \Rightarrow \exists u \in U : (s_1t_1 - s_2t_2) \cdot u &= 0 \\ \Rightarrow (\frac{s_1u}{t_1u})_{tu} &= (\frac{s_2u}{t_2u})_{tu} \\ \Rightarrow \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_t) &= \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_t) \end{split}$$

Mit diesem Wissen können wir den R-Algebra-Homomorphismus $\phi:S[U^{-1}]\longrightarrow A$ definieren:

$$\phi: S[U^{-1}] \longrightarrow A\,,\, \psi_{S[t^{-1}]}'((\frac{s}{t})_t) \longmapsto \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t)$$

 $\phi\circ\varphi=id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes:

$$\beta$$

$$\psi$$

$$A \leftarrow \exists ! id_A = \phi \circ \varphi$$

$$A$$

Für $\varphi\circ\phi\stackrel{!}{=}id_{S[U^{-1}]}$ wähle beliebige $s\in S, t\in U,$ für diese gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{s}{t})_t)) = \varphi(\psi((\frac{s}{t})_t)) = \psi'((\frac{s}{t})_t)$$

Damit haben wir gezeigt, dass φ, ϕ Isomorphismen sind und somit $A \simeq S[U^{-1}]$ gilt.

Da der Kolimes bis auf Isomorphie eindeutig ist, definiere ab sofort $S[U^{-1}]$ als den eindeutigen Kolimes von \mathcal{B} .

Lokalisierung von Moduln als Kolimes [Beweis von Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]

Korrolar 12. Sei M ein S-Modul, wobei S eine R-Algebra ist. Sei weiter $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$M[U^{-1}] = \lim_{\longrightarrow} \mathcal{C}$$

Wobei \mathcal{C} aus den Objekten $\{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] | t \in U\}$ und folgenden Morphismen besteht:

$$S[U^{-1}] \otimes M[t^{-1}] \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes M[(tt')^{-1}],$$
$$(\frac{s}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{t^{n}})_{t} \longmapsto (\frac{s}{u})_{U} \otimes (\frac{t'^{n}m}{(tt')^{n}})_{t}$$

Auch wenn sich lemma 11 hier nicht direkt anwenden lässt, so können wir doch im Beweis gleich vorgehen.

Beweis. Schließe zunächst den trivialen Fall $0 \in U$ aus.

Sei $\psi: \mathcal{C} \longrightarrow A$ der Colimes von \mathcal{C} . Zeige $S[U^{-1}] \simeq A$, definiere dazu folgenden Morphismus :

$$\psi: \mathcal{C} \longrightarrow M[U^{-1}]$$

$$\psi_t: S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \longrightarrow M[U^{-1}], \left(\frac{s}{u}\right)_{\scriptscriptstyle U} \otimes \left(\frac{m}{t^n}\right)_{\scriptscriptstyle t} \longmapsto \left(\frac{sm}{ut^n}\right)_{\scriptscriptstyle U}$$

Die Wohldefiniertheit von ψ'_t für ein beliebiges $t \in U$ folgt direkt aus der Universellen Eigenschaft des Tensorprodukt's. Denn für die bilineare Abbildung $f: S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \longrightarrow M[t^{-1}]$, $((\frac{s}{u})_U, (\frac{m}{t^n})_t) \longmapsto (\frac{sm}{ut^n})_U$ gilt:

$$S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \xrightarrow{g} S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}]$$

$$\downarrow \exists ! \psi'_t$$

$$M[U^{-1}]$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir nun den eindeutigen Homomorphismus $\varphi:A\longrightarrow M[U^{-1}].$

$$M[U^{-1}] \leftarrow \cdots \xrightarrow{\exists ! \varphi} A$$

Für $\phi: M[U^{-1}] \longrightarrow A$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen.

Zunächst können wir jedes Element $(\frac{m}{u})_U \in M[U^{-1}]$ als $\psi((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)$ schreiben. Wobei mit ψ gemeint ist, dass wir ein beliebiges $t \in U$ wählen und dann ψ_t betrachten. Diese Verallgemeinerung ist möglich, da für beliebige $t_1, t_2, u \in U$ und $m \in M$ gilt:

$$\psi_{t_1}((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t_1}) = (\frac{m}{u})_{U} = \psi_{t_2}((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t_2})$$

Definiere nun mit diesem Wissen folgenden Homomorphismus:

$$\phi: M[U^{-1}] \longrightarrow A, \ \psi((\frac{1}{u})_{U} \otimes t) \longmapsto \psi'((\frac{1}{u})_{U} \otimes t)$$

 $\phi\circ\varphi=id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes. Für $\varphi\circ\phi\stackrel{!}{=}id_{M[U^{-1}]}$ wähle $(\frac{m}{u})_U\in M[U^{-1}]$ beliebig, für dieses gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t}))$$

$$= \varphi(\psi((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t}))$$

$$= \psi'((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t})$$

Damit haben wir $A\simeq M[U^{-1}]$ gezeigt, definiere also ab sofort $M[U^{-1}]$ als den eindeutigen Kolimes von \mathcal{C} .