Kapitel 1

Final countdown

Lokalisierung von Algebren als Kolimes

Proposition 1. *[vlg. Aufgabe A6.7 David Eisenbud 1994]*
Sei S eine $R-$ Algebra und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$S[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{B}$$

Wobei $\mathcal{B}$ aus den Objekten $\{S[t^{-1}] | t \in U\}$ und den Morphismen $S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}], (\frac{s}{t^n})_t \longmapsto (\frac{st'^n}{(tt')^n})_{(tt')}$ (für $t, t' \in U$) besteht.

HALLO

1.1 Kähler-Differenzial von Kolimiten

Differential des Differenzkokerns

Proposition 2. *[Korrolar 16.7 David Eisenbud 1994]*
*Sein S_1, S_2 R-Algebren und $f, g : S_1 \longrightarrow S_2$ zwei R-Algebren-Homomorphismen. Sei weiter $q : S_2 \longrightarrow T$ für $T := S_2/Q$ der Differenzkokern von f, g (siehe **??**). Betrachte dazu folgende T-Modulhomomorphismen:*

$$Df : S_2 \otimes_{S_1} \Omega_{S_1/R} \longrightarrow \Omega_{S_2/R}\,,\; s_2 \otimes d_{S_1}(s_1) \longmapsto s_2 \cdot (d_{S_1} \circ f)(s_1)$$
$$Dg : S_2 \otimes_{S_1} \Omega_{S_1/R} \longrightarrow \Omega_{S_2/R}\,,\; s_2 \otimes d_{S_1}(s_1) \longmapsto s_2 \cdot (d_{S_1} \circ g)(s_1)$$

Dann ist $Dq : T \otimes_R \Omega_{S_2/R} \longrightarrow \Omega_{T/R}$ der Differenzkokern von Df, Dg.

Beweis. Betrachte die Conormale Sequenz *(**??**)* des Differenzkokerns *(**??**)* $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$:

$$Q/Q^2 \xrightarrow{1 \otimes d_{S_2}} T \otimes \Omega_{S_2/R} \xrightarrow{Dq} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

Betrachte nun $DQ := im(Df - Dg)$. Für dieses gilt:

$$DQ = im(Df - Dg) = T \otimes_{S_2} (d_{S_2} \circ (f - g))(S_1) = T \otimes_{S_2} d_{S_2}(Q)$$

Somit ist auch folgende Sequenz exakt:

$$T \otimes_{S_1} \Omega_{S_1/R} \xrightarrow{Df-Dg} T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R} \xrightarrow{Dq} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

Somit gilt $\Omega_{T/R} \simeq T \otimes \Omega_{S_2/R}/DQ$ und $Dq : T \otimes_R \Omega_{S_2/R} \longrightarrow \Omega_{T/R}$ ist der Differenzkokern von Df, Dg. $\square$

Theorem 3. *[Proposition A6.1 David Eisenbud 1994]*
Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie, in der Koprodukte beliebiger Mengen von Objekten und Differenzkokerne von je zwei Morphismen existieren. Dann existiert für jedes Diagramm $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ dessen Kolimes $\varinjlim \mathcal{F}$.

Beweis. $\square$

Differential des Kolimes

Theorem 4. *[Theorem 16.8 David Eisenbud 1994]*
Sei $\mathcal{B} \hookrightarrow (R - Algebren)$ ein Diagramm. Nach **??** *existiert dessen Kolimes $T := \varinjlim \mathcal{B}$. Für den Differentialraum von T über R gilt:*

$$\varinjlim \mathcal{F} = \Omega_{T/R}$$

Wobei der Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow T - Module$ folgendermaßen definiert ist:

$$\mathcal{F} : Obj_{\mathcal{B}} \longrightarrow Obj_{(T-Module)} \,,\, S \longmapsto T \otimes_S \Omega_{S/R}$$
$$\mathcal{F} : Morp_{\mathcal{B}} \longrightarrow Morph_{(T-Module)} \,,\, \varphi \longmapsto D\varphi$$
$$\mathcal{F} : (\varphi : S_1 \longrightarrow S_2) \longmapsto (D\varphi : \Omega_{S_1/R} \longrightarrow \Omega_{S_2/R} \,,\, d_{S_1}(s_1) \longmapsto (d_{S_2} \circ \varphi)(s_1))$$

Differenzial der Lokalisierung *[vlg. Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]*

Theorem 5. *Sei S eine $R - Algebra$ und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$\Omega_{S[U^{-1}]/R} \simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}, \text{ Wobei:}$$
$$d_{S[U^{-1}]}((\frac{1}{u})_U) \longmapsto -(\frac{1}{u^2})_U \otimes d_S(u)$$

Beweis. Wir wollen THEOREM16.8 auf $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$ aus **??** anwenden. Zeige also zunächsten den einfacheren Fall $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ für ein beliebiges $t \in U$:

Nutze hierfür die Isomorphe Darstellung $S[t^{-1}] \simeq S[x]/(tx-1)$, sowie die Isomorphie $\Omega_{S[x]/R} \simeq S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x)$. aus **??**
Daraus erhalten wir folgende Isomorphismen:

$$\begin{aligned} \alpha : S[t^{-1}] &\longrightarrow S[x]/(tx-1) \\ \beta : S[x]/(tx-1) &\longrightarrow S[t^{-1}] \\ \gamma : \Omega_{S[x]/R} &\longrightarrow S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x) \end{aligned}$$

Nutze diese nun, um $\Omega_{S[t^{-1}]/R}$ isomorph zu $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ umzuformen:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{S[t^{-1}]/R} & & d_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t) \\ \big\downarrow D\alpha & & \big\downarrow D\alpha \\ \Omega_{S[x]/R}/d_{S[x]}(tx-1) & & [d_{S[x]}(sx)] = [xd_{S[x]}(s) + sd_{S[x]}(x)] \\ \big\downarrow \gamma & & \big\downarrow \gamma \\ (S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}x)/((tx-1)d_{S[x]}(tx-1)) & & [x \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \\ \big\downarrow \beta & & \big\downarrow \beta \\ (S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus S[t^{-1}]d_{S[x]}(x)/d_{S[x]}(tx-1) =: M & & [(\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \\ \big\downarrow f & & \big\downarrow f \\ S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} & & ((\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s)) - ((\frac{s}{t^2})_t \otimes d_S(t)) \end{array}$$

Die ersten drei Schritte ergeben sich aus den oben angegeben Isomorphismen. Für den letzten Schritt definiere:

$$f : M \longrightarrow S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}\,,\ [(\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \longmapsto ((\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s)) - ((\frac{s}{t^2})_t \otimes d_S(t))$$

Damit f ein Isomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ ein eindeutiges Repräsentantensystem von M ist.
Sei dazu $[m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]$ ein beliebiger Erzeuger von M. Somit gilt:

$$\begin{aligned} d_{S[x]}(tx-1) &= td_{S[x]}(x) + \beta(x)d_{S[x]}(s) \\ \Rightarrow [0, d_{S[x]}(x)] &= [-(\frac{1}{t^2})_t d_S(t), 0] \\ \Rightarrow [m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)] &= [m_1 - (\frac{s}{t^{n+2}})_t d_S(t), 0] = [f([m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]), 0] \end{aligned}$$

f ist also wie vermutet ein Isomorphismus und aus obigen Umformungen folgt $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} = \Omega_{S/R}[t^{-1}]$.
Definiere für beliebige $t \in U$ folgenden Isomorphismus:

$$f \circ \beta \circ \gamma \circ D\alpha =: \delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}]\,,\ d_{S[t^{-1}]}((\frac{1}{t})_t) \longmapsto -(\frac{d_S(t)}{t^2})_t$$

Zeige nun den Allgemeinen Fall $\Omega_{S[U^{-1}]/R} \simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$:

Wähle $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$ wie in **??**, sodass $\varinjlim \mathcal{B} = S[U^{-1}]$ gilt.
Mit THEOREM16.8 folgt somit:

$$\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \varinjlim \mathcal{F} \text{ mit:}$$
$$\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow (S[U^{-1}] - Module)\,,\ S[t^{-1}] \longmapsto S[U^{-1}] \otimes \Omega_{S[t^{-1}]/R}$$
$$(\varphi : S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}])$$
$$\longmapsto (1 \otimes D\varphi : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}))$$

Zur Vereinfachung der Morphismen in $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ definiere folgenden Isomorphismus:

$$g : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}$$
$$(\frac{s}{u})_{_U} \otimes ((\frac{s'}{t})_{_t} \otimes d_{S[tt'^{-1}]}(x)) \longmapsto (\frac{s}{u})_{_U} \otimes \varphi((\frac{s'}{t})_{_t}) d_{S[tt'^{-1}]}(x)$$

Als letzten Schritt wollen wir **??** anwenden. Nutze dazu $\delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}]$ um den zu $\mathcal{F}$ isomorphen Funktor $\mathcal{F}' \coloneqq \delta \circ \mathcal{F}$ zu erhalten. Um ein genaueres Bild von $\mathcal{F}'$ zu erlangen, betrachte folgendes Kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
S[t^{-1}] \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dd, "\mathcal{F}"] & & S[tt'^{-1}] \arrow[d, "\mathcal{F}"] \\
& & S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) \arrow[d, "g"] \\
S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[t^{-1}]/R} \arrow[urr, "1\otimes D\varphi"] \arrow[d, "\delta_t"] & & S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R} \arrow[d, "\delta_{tt'}"] \\
S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] \arrow[rr, "1\otimes\varphi"] & & S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S/R}[tt'^{-1}]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\frac{s}{t})_t \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "d_{S[t^{-1}]}"] & (\frac{st'}{tt'})_{tt'} \arrow[d, "d_{S[tt'^{-1}]}"] \\
1 \otimes ((\frac{1}{t})_t d_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{1})_t) + (\frac{s}{1})_t d_{S[t^{-1}]}((\frac{1}{t})_t)) \arrow[r, "g\circ(1\otimes D\varphi)"] \arrow[d, "\delta_t"] & 1 \otimes ((\frac{1}{tt'})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{st'}{1})_{tt'}) + (\frac{st'}{1})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{1}{tt'})_{tt'})) \arrow[d, "\delta_{tt'}"] \\
1 \otimes ((\frac{d_S(s)}{t})_t - (\frac{s d_S(t)}{t^2})_t) \arrow[r, "1\otimes\varphi"] & 1 \otimes ((\frac{t' d_S(s)}{tt'})_{tt'} - (\frac{st' d_S(t)}{(tt')^2})_{tt'}) \textbf{(*)}
\end{tikzcd}$$

Dass das Diagramm in dieser Form kommutiert, ergibt sich in fast allen Fällen direkt aus dem Einsetzen in die entsprechenden Homomorphismen. Der einzige

Fall, welcher nicht direkt klar ist, ist **(*)**. Rechne diesen also nochmal nach:

$$
\begin{aligned}
&\delta_{tt'}(1\otimes((\frac{1}{tt'})_{tt'}d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{st'}{1})_{tt'})+(\frac{st'}{1})_{tt'}d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{1}{tt'})_{tt'})))\\
&\qquad=1\otimes((\frac{d_S(st')}{tt'})_{tt'}-(\frac{t'sd_S(tt')}{(tt')^2})_{tt'})\\
&=1\otimes((\frac{t'd_S(s')}{tt'})_{tt'}+(\frac{sd_S(t')}{tt'})_{tt'}-(\frac{tt'd_S(t')}{(tt')^2})_{tt'}-(\frac{t'^2sd_S(t)}{(tt')^2})_{tt'})\\
&\qquad=1\otimes((\frac{t'd_S(s)}{tt'})_{tt'}-(\frac{t'^2sd_S(t)}{(tt')^2})_{tt'})\\
&\qquad=(1\otimes\varphi)(1\otimes((\frac{d_S(s)}{t})_t-(\frac{sd_S(t)}{t^2})_t))
\end{aligned}
$$

Damit ist $\mathcal{F}'$ zu $\mathcal{F}$ isomorph und für $\mathcal{C}:=\mathcal{F}'(\mathcal{B})$ gilt $\Omega_{S[U^{-1}]/R}=\varinjlim\mathcal{F}'=\varinjlim\mathcal{C}$ *[vlg.* **??***]*. Wobei die Form von $\mathcal{C}$ genau dem Fall aus **??** entspricht:

$$
\begin{gathered}
\mathcal{C}=\{S[U^{-1}]\otimes_{S[t^{-1}]}\Omega_{S/R}[t^{-1}]|t\in U\}\ \textit{mit den Morphismen}\\
1\otimes\varphi:S[U^{-1}]\otimes_{S[t^{-1}]}\Omega_{S/R}[t^{-1}]\longrightarrow S[U^{-1}]\otimes_{S[tt'^{-1}]}\Omega_{S/R}[tt'^{-1}]\\
(\frac{s}{u})_U\otimes(\frac{d_S(x)}{t^n})_t\longmapsto(\frac{s}{u})_U\otimes(\frac{t'^n d_S(x)}{(tt')^n})_{tt'}
\end{gathered}
$$

Somit folgt $\varinjlim\mathcal{C}=\Omega_{S/R}[U^{-1}]$ und wir haben $\Omega_{S[U^{-1}]/R}=\Omega_{S/R}[U^{-1}]$ gezeigt. □

Derivation erfuellt Quotientenregel

Bemerkung 6. *[Eigene Überlegung]*
Sei $R(x)$ die Algebra der Rationalen Funktionen über R. Dann erfüllt die universelle Derivation von $R(x)$ die Quotientenregel, wie wir sie von der analytischen Ableitung von rationalen Funktionen kennen. Für $P(x),Q(x)\in R[x]$ gilt also:

$$
d_{R(x)}\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)=\frac{Q(x)P'(x)-P(x)Q'(x)}{Q(x)^2}d_{R(x)}(x)
$$

Wobei $P'(x)$ der analytischen Ableitung von Polynomfunktionen entspricht (siehe **??***)*

Beweis. Wähle $P(x),Q(x)\in P[x]$ beliebig und nutze die Rechenregeln, die wir bisher für $d_{R(x)}$ kennen gelernt haben:

$$
\begin{aligned}
& d_{R(x)}\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) \\
&= \frac{1}{Q(x)} d_{R(x)}\left(P(x)\right) + P(x) d_{R(x)}\left(\frac{1}{Q(x)}\right) \quad \textit{(Leibnizregel)} \\
&= \frac{1}{Q(x)} d_{R(x)}\left(P(x)\right) - \frac{P(x)}{Q(x)^2} d_{R(x)}\left(Q(x)\right) \quad \textit{(theorem 7)} \\
&= \left(\frac{P'(x)}{Q(x)} - \frac{P(x)Q'(x)}{Q(x)^2}\right) d_{R(x)}(x) \quad \textit{(\textbf{??})} \\
&= \frac{Q(x)P'(x) - P(x)Q'(x)}{Q(x)^2} d_{R(x)}(x)
\end{aligned}
$$

□