## Kapitel 1

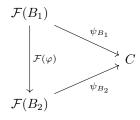
# **Kolimes**

### 1.1 Einführung in den Kolimes

#### Definition des Kolimes

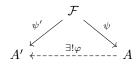
**Definition 1.** [vgl. Anhang A6 David Eisenbud 1994] Sei A eine Kategorie.

- Ein <u>Diagramm</u> über A ist eine Kategorie B zusammen mit einem Funktor  $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow A$ .
- Sei  $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$  ein Diagramm und  $A \in \mathcal{A}$  ein Objekt. Dann definieren wir einen Morphismus  $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$  als eine Menge von Funktionen  $\{\psi_B \in Hom(F(B), A) | B \in \mathcal{B}\}$ , wobei für alle  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  und  $\varphi \in Hom(B_1, B_2)$  folgendes Diagramm kommutiert:



• Der <u>Kolimes</u>  $\varinjlim \mathcal{F}$  eines Diagramms  $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$  ist ein Paar aus einem Objekt  $A \in \mathcal{A}$  zusammen mit einem Morphismus  $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$ , welche folgende universelle Eingenschaft erfüllen:

Für Objekte  $A' \in \mathcal{A}$  und alle Morphismen  $\psi' : \mathcal{F} \longrightarrow A'$  existiert genau eine Funktion  $\varphi \in Hom(A, A')$ , sodass folgendes Diagramm kommutiert:



Eindeutigkeit des Kolimes [vgl. A6 David Eisenbud 1994]

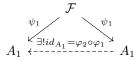
**Lemma 2.** Seien  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A}$  zwei Kategorien und  $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$  ein Funktor. Dann ist im Falle der Existenz  $\lim \mathcal{F}$  eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien  $A_1 \in \mathcal{A}, (\psi_1 : \mathcal{F} \longrightarrow A_1)$  und  $A_2 \in \mathcal{A}, (\psi_2 : \mathcal{F} \longrightarrow A_2)$  beide gleich  $\lim \mathcal{F}$ .

Erhalte durch die universelle Eigenschaft des Kolimes die eindeutig bestimmten Funktionen  $\varphi_1 \in Hom_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$  und  $\varphi_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(A_2, A_1)$ , für welche die folgende Diagramme kommutieren:



Wende nun die Universelle Eigenschaft von  $\psi_1$  auf  $\psi_1$  selbst an und erhalte  $id_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1$ . Analog erhalte auch  $id_{A_2} = \varphi_1 \circ \varphi_2$ .



Somit existiert genau eine Isomorphie  $\varphi_1: A_1 \longrightarrow A_2$ .

#### Vereinfachung des Kolimes

Korrolar 3. [Eigene Überlegung ]

Sei  $\mathcal{A}$  eine Kategorie und  $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$  ein Diagramm. Betrachte die Unterkategorie  $\mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{A}$  zusammen mit dem Inklusionsfunktor  $\mathcal{F}(B) \hookrightarrow \mathcal{A}$  ebenfalls als Diagramm. Dann gilt:

$$\varinjlim \mathcal{F} \ existiert \ genau \ dann, \ wenn \ \varinjlim (\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \ existiert.$$
$$Mit \ \varinjlim \mathcal{F} = \varinjlim (\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}).$$

Beweis. Dies folgt direkt aus unserer Definition von Morphismen:

In definition 1 haben wir einen Morphismus  $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$  als eine Menge von Funktionen  $\psi_{\mathcal{B}} \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(B), A)$  definiert. Dies zeigt, dass es keinen Unterschied macht, ob wir von Morphismen  $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$  oder von Morphismen  $\psi: (\mathcal{F}(B) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$  reden.

Wenn wir nun die universelle Eigenschaft des Kolimes genauer betrachten, sehen wir, dass diese sich nur auf Morphismen  $\mathcal{F} \longrightarrow A$  bzw.  $(\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$  und auf die Kategorie  $\mathcal{A}$  bezieht. Es macht also keinen Unterschied, ob wir vom Kolimes des Diagramms  $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$  oder vom Kolimes des Diagramms  $(\mathcal{F}(\mathcal{B}), \mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A})$  sprechen.

Es genügt also im Fall von Kolimtenn Diagramme  $(\mathcal{B}, \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$  mit  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  zu betrachten. Zur Vereinfachung schreibe für  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  in Zukunft  $\varinjlim \mathcal{B}$  anstatt von  $\varinjlim (\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$ .

#### DifferenzkokernUndKoproduktDef

**Definition 4.** [vlg. A6 David Eisenbud 1994] Sei A eine Kategorie.

- Das Koprodukt von  $\{B_i\}_{i\in\Lambda}\subseteq\mathcal{A}$  wird durch  $\coprod_{i\in\Lambda}\{B_i\}:=\varinjlim_{\longrightarrow}\mathcal{B}$  definiert, wobei  $\{B_i\}_{i\in\Lambda}$  die Objekte und die Identitätsabbildungen  $\{id_{B_i}:B_i\longrightarrow B_i\}_{i\in\Lambda}$  die einzigen Morphismen von  $\mathcal{B}$  sind.
- Der Differenzkokern von  $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$  wird durch  $\varinjlim \mathcal{C}$  definiert, wobei  $\{C_1, C_2\}$  die Objekte und  $\{f, g\}$  zusammen mit den Identitätsabbildungen die Morphismen von  $\mathcal{C}$  sind.

#### NeuDifferenzenkokerndef

#### Bemerkung 5. | Wikipedia |

Sei A eine Kategorie. Sei weiter  $C_1, C_2 \in Obj_A$  und  $f, g \in Hom_A(C_1, C_2)$ . Im Falle der Existenz ist der Differnenzenkokern von f, g nach definition 4 durch ein Objekt  $C \in Obj_A$  und einen Morphismus  $\psi = \{\psi_{C_1}, \psi_{C_2}\}$  gegeben, wobei gilt:

$$\psi_{C_2} = f \circ \psi_1 = g \circ \psi_2$$

Wir sehen, dass  $\psi$  eindeutig durch  $q := \psi_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$  gegeben ist. Der Differnzenkokern ist also eindeutig durch  $(C \in obj_{\mathcal{A}}, q \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2))$  gegeben, wobei q folgenden Eigenschaften besitzt:

Es gilt  $f \circ q = g \circ g$  und für alle  $C \in Obj_A$  und  $q' \in Hom_A$  mit  $f \circ q' = g \circ q'$  existiert genau ein  $\varphi \in Hom_A$ , mit  $q \circ \varphi = q'$ :

$$C_1 \xrightarrow{f,g} C_2 \xrightarrow{q} C$$

$$\downarrow^{q'} \qquad \downarrow^{\exists ! \varphi}$$

$$C'$$

Wenn wir fortan vom Differenzkokern sprechen meinen wir damit das Paar (C,q).

#### Kolimes durch Koprodukt und Differenzkokern

**Theorem 6.** [Proposition A6.1 David Eisenbud 1994]

Sei  $\mathcal{A}$  eine Kategorie, in der Koprodukte beliebiger Mengen von Objekten und Differenzkokerne von je zwei Morphismen existieren. Dann existiert für jedes Diagramm  $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$  dessen Kolimes  $\lim \mathcal{F}$ .

Beweis. In korrolar 3 haben wir gesehen, dass es genügt den Fall  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  zu betrachten. Konstruiere also für eine beliebige Unterkategorie  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  deren Kolimes  $\lim \mathcal{B}$ :

Bezeichne für jeden Morphismus  $\gamma \in Morph_{\mathcal{C}}$  dessen Definitionsbreich mit  $B_{\gamma} \in$ 

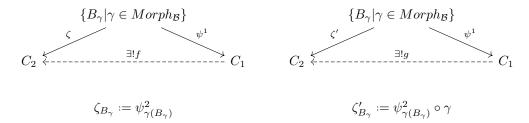
 $\mathcal{B}$ . Weiter, wenn wir einen Morphismus  $\psi$  gegeben haben und  $\psi_{\gamma(B_{\gamma})}$  betrachten, ist damit  $\psi_B$  gemeint, wobei B die Zielmenge von  $\gamma$  ist. Definiere nun:

- $C_1 := \coprod_{\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}} B_{\gamma}$  ist das Koprodukt aller Objekte von  $\mathcal{B}$ , in dem jedes Objekt so oft vorkommt, wie es Definitionsbereich eines  $\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}$  ist. Sei  $\psi^1 : \{B_{\gamma} | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_1$  der dazugehörige Morphismus.
- $C_2 := \coprod_{B \in Obj_{\mathcal{B}}}$  ist das Koprodukt aller Objekte von  $\mathcal{B}$ . Sei  $\psi^2 : \{B|B \in Obj_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_2$  der dazugehörige Morphismus.

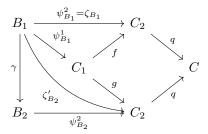
Konstruiere nun  $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$  so, dass der Differenzkokern von f und g dem Kolimes von  $\mathcal{B}$  entspricht. Nutze dazu die universelle Eigenschaft von  $(C_1, \psi^1) = \lim \{B_{\gamma} | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\}:$ 

Für f betrachte den Morphismus  $\zeta: \{B_{\gamma}|\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_2$ , mit  $\zeta_{B_{\gamma}} := \psi_{\gamma(B_{\gamma})}^2$  für  $B_{\gamma} \in \{B_{\gamma}|\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\}$ . Wähle  $f \in Hom_{\mathcal{B}}(C_1, C_2)$  als die eindeutige Funktion, mit  $\zeta = f \circ \psi^1$ .

Für g betrachte den Morphismus  $\zeta':\{B_{\gamma}|\gamma\in Morph_{\mathcal{B}}\}\longrightarrow C_2,$  mit  $\zeta'_{B_{\gamma}}:=\psi^2_{\gamma(B_{\gamma})}\circ\gamma$  für  $B_{\gamma}\in\{B_{\gamma}|\gamma\in Morph_{\mathcal{B}}\}.$  Wähle  $g\in Hom_{\mathcal{B}}(C_1,C_2)$  als die eindeutige Funktion, mit  $\zeta'=g\circ\psi^1.$ 



Sei  $C \in Obj_{\mathcal{B}}$  zusammen mit  $q \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, C)$  der Differenzkokern von f, g. Betrachte abschließend  $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow C$ , mit  $\psi_B = q \circ \psi_B^2$  für  $B \in Obj_{\mathcal{B}}$ . Um zu sehen, dass  $\psi$  ein Morphismus ist, wähle  $B_1, B_2 \in Obj_{\mathcal{B}}$  beliebig und betrachte folgendes kommutatives Diagramm:



Zeige nun, dass  $(C, \psi)$  die Universelle Eigenschaft des Kolimes besitzt. Nutze dazu nacheinander die universellen Eigenschaften von  $(C_2, \psi^2)$  und (q, C):

Da  $\psi'$  ein Morphismus von  $\mathcal{B}$  nach C' ist, ist  $\psi'$  insbesondere auch ein Morphismus von  $\{B|B\in Obj_{\mathcal{B}}\}$  nach C. Somit existiert genau ein  $q'\in Hom_{\mathcal{B}}(C_2,C')$  mit  $\psi^2\circ q'=\psi'$ .

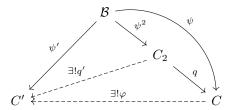
Zeige nun  $q' \circ f \stackrel{!}{=} q' \circ g$ . Sei dazu  $c \in C_1$  beliebig und  $\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}, b \in B_{\gamma}$  mit  $\psi_{B_{\gamma}}^{1}(b) = c$ , dann gilt:

$$(q' \circ f)(c) = (q' \circ f \circ \psi_{B_{\gamma}}^{1})(b) = (q' \circ \zeta_{B_{\gamma}})(b) = (q' \circ \psi_{B_{\gamma}}^{2})(b) = \psi'_{B_{\gamma}}(b)$$

$$(q' \circ g)(c) = (q' \circ g \circ \psi_{B_{\gamma}}^{1})(b) = (q' \circ \zeta'_{B_{\gamma}})(b)$$

$$= (q' \circ \psi_{\gamma(B_{\gamma})}^{2} \circ \gamma)(b) = (\psi'_{\gamma(B_{\gamma})} \circ \gamma)(b) = \psi'_{B_{\gamma}}(b)$$

Somit können wir die universelle Eigenschaft von q auf q' anwenden und erhalten ein eindeutiges  $\varphi \in Hom(C, C')$  mit  $q' = q \circ \varphi$ .



Dieses  $\varphi \in Hom(C,C')$  erfüllt auch  $\psi \circ \varphi = \psi^2 \circ q \circ \varphi = \psi^2 \circ q' = \psi'$  und ist nach Konstruktion eindeutig. Damit gilt  $\lim_{\longrightarrow} \mathcal{B} = (C,\psi)$ .

#### Tensorprodukt des Differenzenkokerns [Eigene Bemerkung]

**Bemerkung 7.** Seien  $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(S_1, S_2)$  R-Algebra-Homomorphismen, so können wir für den Differenzenkokern  $q: S_2 \longrightarrow T$  für ein beliebiges  $S_1$ -Modul das Tensorprodukt  $T \otimes_{C_1} M$  definieren.

$$f\ddot{u}r \ s_1 \in S_1 \ und \ t \otimes m) \in T \otimes_{C_1} M \ gilt:$$
$$s_1 \cdot (t \otimes m) = ((q \circ f)(s_1)) \cdot t \otimes m = ((q \circ g)) \cdot (s_1)t \otimes m$$

#### R-Algebra-Kolimiten [vlg. Proposition A6.7 David Eisenbud 1994]

**Proposition 8.** in der Kategorie der R-Algebren existieren Koprodukte und Differenzkokerne, wobei:

- 1. Das Koprodukt einer endlichen Familie von R Algebren  $\{S_i\}_{i\in\Lambda}$  entspricht deren Tesorprodukt  $\bigotimes_{i\in\Lambda} S_i$ .
- 2. Der Differenzkokern zweier R-Algebra-Homomorphismen  $f,g:S_1\longrightarrow S_2$  einspricht dem Homomorphismus  $q:S_2\longrightarrow S_2/Q$ ,  $y\longmapsto [y]$ , wobei  $Q:=\{f(x)-g(x)\mid x\in S_2\}$  das Bild der Differenz von f und g ist.

#### Beweis. Zu 1.:

Sei  $\mathcal{B}$  die Unterkategorie der R-Algebren, welche  $\{S_i\}_{i\in\Lambda}$  zusammen mit den Identitätsabbildungen enthält. Wir wollen die universellen Eigenschaften des Tensorproduktes und des Kähler-Differenzials nutzen, um einen Isomorphismus

zwischen  $\lim \mathcal{F}$  und  $\bigotimes_{i \in \Lambda} B_i$  zu finden.

Es sind der Morphismus  $\psi: \mathcal{B} \longrightarrow \varinjlim \mathcal{B}$  und die bilineare Abbildung  $g: \oplus_i S_i \longrightarrow \otimes_i S_i$  gegeben.

Konstruiere den Morphismus  $\psi': \mathcal{B} \longrightarrow \otimes_i S_i$  durch  $\psi'_i: S_i \longrightarrow \otimes_i S_i$ ,  $s_i \longmapsto g(1,..,1,s_i,1,..,1)$  für  $i \in \lambda$  und die bilineare Abbildung  $f: \oplus_i S_i \longrightarrow \varinjlim \mathcal{B}$ ,  $s \longmapsto \prod_i \psi_i(s_i)$ .

Somit liefern uns die universellen Eigenschaften folgende zwei R-Algebra-Homomorphismen:

$$\varphi: \varinjlim_{i} \mathcal{B} \longrightarrow \bigotimes_{i} S_{i}$$
$$\phi: \bigotimes_{i} S_{i} \longrightarrow \varinjlim_{i} \mathcal{B}.$$



Die Eindeutigkeit der universellen Eigenschaften liefert uns, das  $\varphi$  und  $\phi$  zueinander Inverse sind und somit haben wir unsere gesuchten Isomorphismen zwischen lim  $\mathcal{B}$  und  $\bigotimes_i S_i$  gefunden.



#### Zu 2.:

Zeige, dass  $q:S_2\longrightarrow S_2/Q$  die in bemerkung 5 eingeführten Eigenschaften des Differenzkokern's besitzt.

$$q \circ f = q \circ g$$
 gilt, da  $kern(q) = Q = \{f(x) - g(x) \mid x \in C_2\}.$ 

Sei nun eine Funktion  $q' \in Hom_{\mathcal{A}}(S_2, T')$  mit  $q' \circ f = q' \circ$  gegeben. Somit gilt  $q' \circ (f - g) = 0$ , wodurch Q ein Untermodul von Q' := kern(q') ist. Mit dem Isomorphiesatz für R-Algebren erhalten wir:

$$S_2/Q' \simeq (S_2/Q)/(Q'/Q).$$

Somit ist  $q': S_2 \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q)$ ,  $y \longmapsto [y]'$  eine isomorphe Darstellung von  $q': S_2 \longrightarrow T'$ .

$$\Rightarrow \exists ! \varphi : S_2/Q \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q), [y] \longmapsto [y]' \ mit \ (\varphi \circ q) = q'.$$

Also ist  $q: S_2 \longrightarrow S_2/Q$  der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Differenzkokern von f und g.

#### Darstellung der Polynomalgebra als Tensorprodukt [Eigene Überlegung]

**Bemerkung 9.** Die Polynomalgebra  $R[x_1,...,x_d]$  über R lässt sich wie folgt als Tensorprodukt darstellen:

$$R[x_1,...,x_n] = \bigotimes_{i \in \{1,...,n\}} R[x_i]$$

Genauer gilt für zwei Polynomalgebren  $A = R[x_1,...,x_{n_A}], B = R[y_1,...,y_{n_B}]$  über R:

$$A \otimes_R B = R[x_1, ..., x_{n_A}, y_1, ..., y_{n_B}]$$

Skizziere den Beweis.

Beweis. Zeige, dass für  $g: A \oplus B \longrightarrow R[x_1, ..., x_{n_A}, y_1, ..., y_{n_B}], (a, b) \longmapsto a \cdot b$  die Universelle Eigenschaft des Tensorproduktes gilt:

$$A \oplus B \xrightarrow{g} R[x_1, ..., x_{n_A}, y_1, ..., y_{n_B}]$$

$$\downarrow f \qquad \qquad \downarrow \exists ! \varphi \qquad \qquad \downarrow M$$

Es ist leicht nachzurechnen, dass es sich bei  $\varphi$  um folgende Funktion handeln muss:

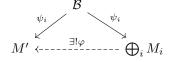
$$\varphi: R[x_1, ..., x_{n_A}, y_1, ..., y_{n_B}] \longrightarrow M, (x_i \cdot y_i) \longmapsto f(x_i, 1) \cdot f(1, y_i)$$

#### R-Modul-Kolimiten [Proposition A6.2 David Eisenbud 1994]

**Proposition 10.** In Der Kategorie der R-Module existieren Koprodukte und Differenzkokerne, wobei:

- 1. das Koprodukt  $\lim_{\longrightarrow} \mathcal{B}$  von R-Modulen  $M_i \in (R-Module)$ entspricht der direkten Summe  $\sum_i M_i$ .
- 2. der Differenzenkokern zweier Homomorphismen  $f, g: M_1 \longrightarrow M_2$  entspricht dem Kokern  $M_2/im(f-g)$  der Differenzenabbildung.

Beweis. für 1. Sei  $\phi:\{M_i\}\longrightarrow \mathcal{B}$ ein beliebiger Morphismus. Zeige:



Für ein beliebiges i existiert genau ein  $\varphi_i: M_i \oplus 0 \longrightarrow M'$ ,  $(0,...,0,m_i,0,...,0 \longmapsto \psi_i'(m_i)$  mit  $\psi_i' = \psi_i \circ \varphi_i$   $\Rightarrow \exists ! \varphi: \bigoplus_i M_i \longrightarrow M'$ ,  $(m_1,...,m_n) \longmapsto \sum_i \psi_i(m_i)$ 

2. ist Analog zu proposition 8

Die in proposition 10 gezeigten Darstellungen gelten mit kurzen Überlegungen auch für S-Module, wobei S eine R-Algebra ist.

## 1.2 Darstellung von Lokalisierung als Kolimes

Lokalisierung von Algebren als Kolimes [vlg. Aufgabe A6.7 David Eisenbud 1994]

**Lemma 11.** Sei S eine R – Algebra und  $U \subseteq S$  multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$S[U^{-1}] = \lim_{\longrightarrow} \mathcal{B}$$

Wobei  $\mathcal{B}$  aus den Objekten  $\{S[t^{-1}]|t \in U\}$  und den Morphismen  $S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}], (\frac{s}{t^n})_t \longmapsto (\frac{st'^n}{(tt')^n})_{(tt')} \ \forall t, t' \in U$  besteht.

Beweis. Sei  $\psi: \mathcal{B} \longrightarrow A$  der Kolimes von  $\mathcal{B}$ . Zeige  $S[U^{-1}] \simeq A$ , definiere dazu:

$$\psi': \mathcal{B} \longrightarrow S[U^{-1}]$$

$$\psi'_{S[t^{-1}]}: S[t^{-1}] \longrightarrow S[t^{-1}], (\frac{s}{t^n})_t \longmapsto (\frac{s}{t^n})_U$$

 $\psi'$  ist ein Morphismus, da für beliebige  $t,t'\in U$  und  $s\in S$  gilt:

$$\left(\frac{s}{t^n}\right)_{\scriptscriptstyle U} = \left(\frac{st'^n}{(tt')^n}\right)_{\scriptscriptstyle U}$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir den eindeutigen Homomorphismus  $\varphi:A\longrightarrow S[U^{-1}].$ 

$$S[U^{-1}] \longleftarrow A$$

Für  $\phi: S[U^{-1}] \longrightarrow A$  benötigen wir kleinere Vorüberlegungen. Zunächst können wir jedes Element  $(\frac{s}{u})_{\scriptscriptstyle U} \in S[U^{-1}]$  als  $\psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_{\scriptscriptstyle t})$  schreiben.

Weiter gilt für alle  $s_1, s_2 \in S, t_1, t_2 \in U$ :

$$Sei \ \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_t) = \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_t)$$

$$\Rightarrow \exists u \in U : (s_1t_1 - s_2t_2) \cdot u = 0$$

$$\Rightarrow (\frac{s_1u}{t_1u})_{tu} = (\frac{s_2u}{t_2u})_{tu}$$

$$\Rightarrow \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_t) = \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_t)$$

Mit diesem Wissen können wir den R-Algebra-Homomorphismus  $\phi:S[U^{-1}]\longrightarrow A$  definieren:

$$\phi: S[U^{-1}] \longrightarrow A\,,\, \psi_{S[t^{-1}]}'((\frac{s}{t})_t) \longmapsto \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t)$$

 $\phi\circ\varphi=id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes:

$$\mathcal{B}$$

$$\psi$$

$$A \leftarrow \exists ! id_A = \phi \circ \varphi$$

$$A \leftarrow A \leftarrow A$$

Für  $\varphi \circ \phi \stackrel{!}{=} id_{S[U^{-1}]}$  wähle beliebige  $s \in S, t \in U$ , für diese gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{s}{t})_{\scriptscriptstyle t})) = \varphi(\psi((\frac{s}{t})_{\scriptscriptstyle t}) = \psi'((\frac{s}{t})_{\scriptscriptstyle t})$$

Damit haben wir gezeigt, dass  $\varphi, \phi$  Isomorphismen sind und somit  $A \simeq S[U^{-1}]$  gilt.

Da der Kolimes bis auf Isomorphie eindeutig ist, definiere ab sofort  $S[U^{-1}]$  als den eindeutigen Kolimes von  $\mathcal{B}$ .

# Lokalisierung von Moduln als Kolimes [Beweis von Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]

**Korrolar 12.** Sei M ein S-Modul, wobei S eine R-Algebra ist. Sei weiter  $U \subseteq S$  multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$M[U^{-1}] = \lim_{\longrightarrow} \mathcal{C}$$

Wobei  $\mathcal C$  aus den Objekten  $\{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] | t \in U\}$  und folgenden Morphismen besteht:

$$S[U^{-1}] \otimes M[t^{-1}] \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes M[(tt')^{-1}],$$
$$(\frac{s}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{t^{n}})_{t} \longmapsto (\frac{s}{u})_{U} \otimes (\frac{t'^{n}m}{(tt')^{n}})_{t}$$

Auch wenn sich lemma 11 hier nicht direkt anwenden lässt, so können wir doch im Beweis gleich vorgehen.

Beweis. Schließe zunächst den trivialen Fall  $0 \in U$  aus.

Sei  $\psi:\mathcal{C}\longrightarrow A$  der Colimes von  $\mathcal{C}.$  Zeige  $S[U^{-1}]\simeq A,$  definiere dazu folgenden Morphismus :

$$\psi: \mathcal{C} \longrightarrow M[U^{-1}]$$

$$\psi_t: S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \longrightarrow M[U^{-1}], \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{t^n}\right)_t \longmapsto \left(\frac{sm}{ut^n}\right)_U$$

Die Wohldefiniertheit von  $\psi'_t$  für ein beliebiges  $t \in U$  folgt direkt aus der Universellen Eigenschaft des Tensorprodukt's. Denn für die bilineare Abbildung  $f: S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \longrightarrow M[t^{-1}], \, ((\frac{s}{u})_U, (\frac{m}{t^n})_t) \longmapsto (\frac{sm}{ut^n})_U$  gilt:

$$S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \xrightarrow{g} S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}]$$

$$\downarrow \exists ! \psi'_t$$

$$M[U^{-1}]$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir nun den eindeutigen Homomorphismus  $\varphi: A \longrightarrow M[U^{-1}]$ .

$$M[U^{-1}] \leftarrow A$$

Für  $\phi: M[U^{-1}] \longrightarrow A$  benötigen wir kleinere Vorüberlegungen.

Zunächst können wir jedes Element  $(\frac{m}{u})_U \in M[U^{-1}]$  als  $\psi((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)$  schreiben. Wobei mit  $\psi$  gemeint ist, dass wir ein beliebiges  $t \in U$  wählen und dann  $\psi_t$  betrachten. Diese Verallgemeinerung ist möglich, da für beliebige  $t_1, t_2, u \in U$  und  $m \in M$  gilt:

$$\psi_{t_1}((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_{t_1}) = (\frac{m}{u})_U = \psi_{t_2}((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_{t_2})$$

Definiere nun mit diesem Wissen folgenden Homomorphismus:

$$\phi: M[U^{-1}] \longrightarrow A, \ \psi((\frac{1}{u})_{\scriptscriptstyle U} \otimes t) \longmapsto \psi'((\frac{1}{u})_{\scriptscriptstyle U} \otimes t)$$

 $\phi\circ\varphi=id_A$  ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes. Für  $\varphi\circ\phi\stackrel{!}{=}id_{M[U^{-1}]}$  wähle  $(\frac{m}{u})_U\in M[U^{-1}]$  beliebig, für dieses gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t}))$$

$$= \varphi(\psi((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t}))$$

$$= \psi'((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t})$$

Damit haben wir  $A \simeq M[U^{-1}]$  gezeigt, definiere also ab sofort  $M[U^{-1}]$  als den eindeutigen Kolimes von  $\mathcal{C}$ .