Satz 1. *Differenzial von Polynomalgebren 1*

Differenzial indempotenter Elemente *[Aufgabe 16.1 David Eisenbud 1994]*

Lemma 2. *Sei S eine R-Algebra und $d : S \longrightarrow M$ ein beliebige Ableitung von S in ein S-Modul M. Sei weiter $a \in S$ ein indempotentes Element $(a^2 = a)$.*

$$\text{Dann gilt } d(a) = 0.$$

Beweis. Nutze hierfür allein die Leibnizregel *(DEFINITION)*:

$$\begin{gathered}\text{Schritt 1: } d_S(a) = d_S(a^2) = ad_S(a) + ad_S(a) \\ \text{Schritt 2: } ad_S(a) = ad_S(a^2) = a^2 d_S(a) + a^2 d_S(a) = ad_S(a) + ad_S(a) \\ \Rightarrow d_S(a) = ad_S(a) = 0\end{gathered}$$

□

Differenzial des Produktes von Algebren *[Proposition 16.10 David Eisenbud 1994]*

Proposition 3. *Seien $S_1, \ldots, S_n$ R-Algebren. Sei dazu $S := \prod_{i\in\{1,\ldots,n\}} S_i$ die direkte Summe. Dann gilt:*

$$\Omega_{S/R} = \prod_{i\in\{1,\ldots,n\}} \Omega_{S_i/R}$$

Beweis. Sei für $i \in \{1, \ldots, n\}$ jeweils $e_i \in S$ die Einbettung es Einselement's von S_i in S, somit ist $p_i : e_i S \longrightarrow S_i$ ein Isomorphismus.
Nutze weiter, dass e_i ein indempotentes Element $({e_i}^2 = e_i)$ von S ist:

$$\begin{gathered}\text{Nach lemma 2 gilt } d_S(e_i) = 0 \\ \Rightarrow \forall s \in s : d_S(e_i s) = d_S({e_i}^2 s) = e_i d_S(e_i s) + e_i s d_S(e_i) = e_i d_S(e_i s)\end{gathered}$$

Mit diesem Wissen können wir einen Isomorphismus $\Phi : \Omega_{S/R} \longrightarrow \prod_{i\in\{1,\ldots,n\}} \Omega_{S_i/R}$ definieren:

$$\Phi:\ \Omega_{S/R} \longrightarrow \prod_{i\in\{1,\ldots,n\}} e_i d_S(e_i S) \longrightarrow \prod_{i\in\{1,\ldots,n\}} \Omega_{S_i/R}$$

$$d_S(s) = \sum_{i\in\{1,\ldots,n\}} d_S(e_i s) \longmapsto (e_1 d_S(e_1 s), \ldots, e_n d_S(e_n s)) \longmapsto ((d_{S_1} \circ p_1)(s), \ldots, (d_{S_n} \circ p_n)(s))$$

Da der Differenzialraum $\Omega_{S/R}$ bis auf eine eindeutige Isomophie eindeutig ist *(PROPOSITION)*, definiere diesen ab jetzt als $\prod_{i\in\{1,\ldots,n\}} \Omega_{S_i/R}$. □

Differenzial algebraischer Algebren ist Null *[Aufgabe 16.11 David Eisenbud 1994]*

Beispiel 4. *Sei K ein Körper mit $char(K) = 0$ und T eine noethersche K-Algebra. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/K} = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$T = \prod_{i \in \{1,\dots,n\}} K(\alpha_i) \text{ ist ein endliches Produkt algebraischer Körpererweiterungen.}$$

Beweis.

„$\Rightarrow$ “: Da T noethersch ist, ist T als Algebra über K endlich erzeugt und es gilt:

$$T = \prod_{i \in \{1,\dots,n\}} K[\alpha_i]/I_i$$

Wobei $I_i \subseteq K[\alpha_i]$ ein Ideal ist.$(\forall i \in \{1,\dots,n\})$

Zur Vereinfachung definiere $T' := \prod_{i \in \{1,\dots,n\}} K[\alpha_i]$. Betrachte nun den Differentialraum von T genauer:

$$\Omega_{T/K} = d_{T'}\left(\prod_{i \in \{1,\dots,n\}} K[\alpha_i]/I_i\right)$$
$$= \prod_{i \in \{1,\dots,n\}} d_{K[\alpha]}\left(K[\alpha_i]/I_i\right) \text{ (proposition 3)}$$

Betrachte also jeweils für $i \in \{1,\dots,n\}$ die K-Algebra $K[\alpha_i]/I_i$.
Sei $I_i \neq K[\alpha_i]$, da andernfalls $K[\alpha_i]/I_i = 0$ und somit α_i kein Erzeuger vor T wäre.
Unterscheide nun zwischen den zwei möglichen Fällen $\underline{I_i = 0}$ und $\underline{I_i \neq 0}$:

1. $I_i = 0$: Da $\Omega_{T/K} = 0$ gilt, muss $K[\alpha_i] = 0$ gelten.
Annhame: α_i ist transzendent über K.

$$\text{Dies bedeutet } K[\alpha_i] \simeq K[x]$$
$$\Rightarrow \Omega_{K[\alpha_i]/K} \simeq K[x]\langle d_{K[x]}(x)\rangle \neq 0 \text{ (satz 1)}$$

Dies steht allerdings im Widerspruch zu $K[\alpha_i] = 0$. Folglich war unsere Annahme falsch und α_i ist algebraisch über K.
Folglich ist $K[\alpha_i] = K(\alpha_i)$ eine algebraische Körpererweiterung.

2. $I_i \neq 0$: Zunächst sehen wir, dass α_i transzendent sein muss, da sonst $K[\alpha_i] = K(\alpha_i)$ ein Körper wäre und somit $I_i = K(\alpha_i)$ gelten würde.

Also ist α_i transzendent und es gilt:

$$K[\alpha_i] \simeq K[x] \text{ und } I \simeq (f(x)) \text{ mit } f(x) \in K[x]$$
$\Rightarrow K[\alpha_i] \simeq K[\beta_1, \dots \beta_n] = K(\beta_1, \dots \beta_n)$, wobei $\beta_1, \dots \beta_n$ die Nullstellen von f sind.

Somit haben wir gezeigt, dass auch in diesem Fall $K[\alpha_i]/I_i$ eine Algebraische Körpererweiterung ist.

„$\Leftarrow$ “: proposition 3 besagt, dass das direkte Produkt unter Bildung des Differenzials erhalten bleibt, also gilt in diesem Fall:

$$\Omega_{T/K} = \prod_{i \in \{1,\dots,n\}} \Omega_{K(\alpha_i)/K}$$

Nach Voraussetzung sind alle Körpererweiterungen $K\alpha_i \supset K$ algebraisch. Wir haben schon in BSP gesehen, dass somit deren Differentiale gleich 0 sind. Folglich ist auch das direkte Produkt der einzelnen Differenziale und somit $\Omega_{T/K}$ gleich 0.

□