Definition Leibnizregel

Definition 1. *[Kapitel 16 David Eisenbud 1994]*
Sei S ein Ring und M ein S-Modul

Ein Homomoprphismus abelscher Gruppen $d : S \longrightarrow M$ ist eine <u>Ableitung</u>, falls gilt:

$$\forall s_1, s_2 \in S : \; d(s_1 \cdot s_2) = s_1 d(s_2) + s_2 d(s_1) \;\; \textbf{\textit{(Leibnitzregel)}}$$

Sei S eine R-Algebra, dann nennen wir eine <u>Ableitung</u> $d : S \longrightarrow M$ <u>R-linear</u>, falls sie zusätzlich ein R-Modulhomomorphismus ist, also falls gilt:

$$\forall r_1, r_2 \in R \, \forall s_1, s_2 \in S : \; d(r_1 s_1 + r_2 s_2) = r_1 d(s_1) + r_2 d(s_2)$$

Differenzial indempotenter Elemente

Lemma 2. *[Aufgabe 16.1 David Eisenbud 1994]*
Sei S ein Ring, M ein S-Modul und $d : S \longrightarrow M$ eine Ableitung. Sei weiter $a \in S$ ein indempotentes Element ($a^2 = a$).

$$\text{Dann gilt } d(a) = 0.$$

Insbesondere gilt somit auch $d(1) = 0$.

Beweis. Nutze hierfür allein die Leibnizregel *(crefDefinition Leibnizregel)*

$$\begin{gathered}
\text{Schritt 1: } d_S(a) = d_S(a^2) = a d_S(a) + a d_S(a) \\
\text{Schritt 2: } a d_S(a) = a d_S(a^2) = a^2 d_S(a) + a^2 d_S(a) = a d_S(a) + a d_S(a) \\
\Rightarrow d_S(a) = a d_S(a) = 0
\end{gathered}$$

□

Definition 3. *Sei S eine R-Algebra.*
Das S-Modul $\Omega_{S/R}$ der Kähler-Differenziale von S über R und die dazugehörige universelle R-lineare Ableitung $d_S : S \longrightarrow \Omega_{S/R}$ mit $im(d_S) = \Omega_{S/R}$ sind durch die folgende universelle Eigenschaft definiert:

Für alle R-linearen Ableitungen $e : S \longrightarrow M$ von S in ein S-Modul M existiert genau ein S-Modulhomomorphismus $e' : \Omega_{S/R} \longrightarrow M$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "d_S"] \arrow[dr, "e"'] & \Omega_{S/R} \arrow[d, dashed, "\exists ! e'"] \\
 & M
\end{tikzcd}$$

Eindeutigkeit des Kaehler-Differentials

Lemma 4. *(Das Kähler-Differentials ist eindeutig)*
Sei S eine R-Algebra.
Dann ist das S-Modul $\Omega_{S/R}$ der Kähler-Differenziale von S über R und die dazugehörige universelle R-lineare Ableitung d_S bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien $d_S : S \longrightarrow \Omega_{S/R} und d'_S : S \longrightarrow \Omega'_{S/R}$ beide eine universelle R-lineare Ableitung.
Durch die universelle Eigenschaft der universellen Ableitung erhalten wir eindeutig bestimmte Funktionen $\varphi : \Omega_{S/R} \longrightarrow \Omega'_{S/R}$ und $\varphi' : \Omega'_{S/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}$, für welche die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "d_S"] \arrow[dr, "d'_S"'] & \Omega_{S/R} \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & \Omega'_{S/R} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[r, "d'_S"] \arrow[dr, "d_S"'] & \Omega'_{S/R} \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi'"] \\ & \Omega_{S/R} \end{tikzcd}$$

Wende nun die Universelle Eingenschaft von d_S auf d_S selbst an und erhalte $id_{\Omega_{S/R}} = \varphi' \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "d_S"] \arrow[dr, "d_S"'] & \Omega_{S/R} \arrow[d, dashed, "\exists! id_{\Omega_{S/R}} = \varphi' \circ \varphi"] \\ & \Omega_{S/R} \end{tikzcd}$$

Analog erhalte auch $id_{\Omega'_{S/R}} = \varphi \circ \varphi'$. Damit existiert genau ein Isomorphismus $\varphi' \circ \varphi : \Omega_{R/S} \longrightarrow \Omega'_{R/S}$ mit $d'_S = d_S \circ (\varphi' \circ \varphi)$. □

Propositon 11 delta

Lemma 5. *[Lemma 16.11 David Eisenbud 1994]*
Seien S, S' zwei R-Algebren. Sei weiter $f : S \longrightarrow S'$ ein R-Algebrenhomomorphismus und $\delta : S \longrightarrow S'$ ein Homomorphismus abelscher Gruppen mit $\delta(S)^2 = 0$. Dann gilt:

$$f + \delta \text{ ist ein } R\text{-Algebrenhomomorphismus}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\delta \text{ ist eine } R\text{-linear und } \forall s_1, s_2 \in S : \delta(s_1 \cdot s_2) = f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1).$$

Beweis.

„$\Rightarrow$ “: Da f und $f+\delta$ R-linear sind, ist auch $\delta = (f+\delta) - f$ R-linear.
Seien nun $s_1, s_2 \in S$ beliebig, somit gilt:

$$\begin{aligned}
(f+\delta)(s_1 \cdot s_2) &= (f+\delta)(s_1) \cdot (f+\delta)(s_2) \\
\Rightarrow f(s_1 \cdot s_2) + \delta(s_1 \cdot s_2) &= f(s_1)f(s_2) + f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1) + \delta(s_1)\delta(s_2) \\
\Rightarrow \delta(s_1 \cdot s_2) &= f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1) + \delta(s_1)\delta(s_2) \ \mathit{mit}\ \delta(s_1)\delta(s_2) \in \delta(S)^2 = 0 \\
\Rightarrow \delta(s_1 \cdot s_2) &= f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1) + \delta(s_1)\delta(s_2)
\end{aligned}$$

„$\Leftarrow$ “: Da f und δ beide R-lineare Homomorphismen abelscher Gruppen sind, trifft die auch für $f+\delta$ zu.
Wähle nun also $s_1, s_2 \in S$ beliebig, somit gilt:

$$\begin{aligned}
&(f+\delta)(s_1) \cdot (f+\delta)(s_2) \\
&= f(s_1)f(s_2) + f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1) + \delta(s_1)\delta(s_2) \\
&= f(s_1 \cdot s_2) + \delta(s_1 \cdot s_2) \\
&= (f+\delta)(s_1 \cdot s_2)
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass $f+\delta$ ein R-Algebrenhomomorphismus ist.

□

Kontruktion Kaehler-Differential

Theorem 6. *(Konstruktion des Kähler-Differentials[Theorem 16.21 David Eisenbud 1994]*
Sei S ein R-Algebra.
Betrachte die Multiplikationsabbildung $\mu : S \otimes_R S \longrightarrow S$, $s_1 \otimes s_2 \longmapsto s_1 \cdot s_2$ mit $I := kern(\mu)$.
Definiere durch $S \oplus (S \otimes_R S) \longrightarrow S \otimes_R S, (s, s_1 \otimes s_2) \longmapsto ss_1 \otimes s_2$ eine S-Modulstruktur auf $S \otimes_R S$.

Dann ist durch $e : S \longrightarrow I/I^2$, $s \longmapsto [s \otimes 1 - 1 \otimes s]$ die universelle R-lineare Ableitung auf S definiert.

Beweis. Zeige zunächst, dass e eine Abbildung ist. Betrachte dazu:

$$f_1 : S \longrightarrow S \otimes_R S\,,\ s \longmapsto s \otimes 1,\ f_2 : S \longrightarrow S \otimes_R S\,,\ s \longmapsto 1 \otimes s$$
$$\text{Damit ist die Wirkung von } S \text{ auf } S \otimes_R S \text{ durch}$$
$$S \oplus (S \otimes_R S) \longrightarrow S \otimes_R S, (s, s_1 \otimes s_2) \longmapsto f_1(s)(s_1 \otimes s_2) \ \mathit{gegeben.}$$

Setze nun in der Notation von lemma 5 $f = f_1$ und $\delta = e$.
Damit ist $f + \delta = f_1 + \delta = f_2$ ein R-Algebrenhomomorphismus und es folgt aus lemma 5 und unserer Definition der Wirkung von S auf $S \otimes_R S$, dass e eine R-lineare Ableitung ist.
Durch die Universelle Eigenschaft von d_S existiert also genau ein R-Algebrenhomomorphismus

$e' : \Omega_{S/\longrightarrow} I/I^2$ mit $e = d_S \circ e'$.
Betrachte nun folgende Umkehrabbildung ϕ zu e':

$$\phi : I/I^2 \longrightarrow \Omega_{S/R}\,,\ [s_1 \otimes s_2] \longmapsto s_1 d_S(s_2)$$

Um zu prüfen, dass ϕ die Umkehrabbildung von e ist, wähle $s, s_1, s_2 \in S$ beliebig, somit gilt:

$$(\phi \circ e')(d_S(s)) = (\phi \circ e)(s) = \phi([s \otimes 1 - 1 \otimes s]) = s d_S(1) + 1 d_S(b) = d_S(b)$$
$$(e' \circ \phi)([s_1 \otimes s_2]) = e'(s_1 d_{s_2}) = s_1 e(s_2) = [s_1 1 \otimes s_2 - s_1 s_2 \otimes 1] = [s_1 \otimes s_2 - s_1 s_2 \otimes 1] = [s_1 \otimes s_2]$$

□

Differenzial des Produktes von Algebren *[Proposition 16.10 David Eisenbud 1994]*

Proposition 7. *Seien $S_1, \ldots, S_n$ R-Algebren. Sei dazu $S := \prod_{i \in \{1,\ldots,n\}} S_i$ deren direktes Produkt. Dann gilt:*

$$\Omega_{S/R} = \prod_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Omega_{S_i/R}$$

Beweis. Sei für $i \in \{1, \ldots, n\}$ jeweils $e_i \in S$ die Einbettung es Einselement's von S_i in S, somit ist $p_i : e_i S \longrightarrow S_i$ ein Isomorphismus.
Nutze weiter, dass e_i jeweils ein indempotentes Element von (${e_i}^2 = e_i$) von S ist:

$$\text{Nach lemma 2 gilt } d_S(e_i) = 0$$
$$\Rightarrow \forall s \in s : d_S(e_i s) = d_S({e_i}^2 s) = e_i d_S(e_i s) + e_i s d_S(e_i) = e_i d_S(e_i s)$$

Mit diesem Wissen können wir einen Isomorphismus $\Phi : \Omega_{S/R} \longrightarrow \prod_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Omega_{S_i/R}$ definieren:

$$\begin{array}{cc}
\Omega_{S/R} & d_S(s) = \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} d_S(e_i s) \\
\downarrow & \downarrow \\
\prod_{i \in \{1,\ldots,n\}} e_i d_S(e_i S) & (e_1 d_S(e_1 s), \ldots, e_n d_S(e_n s)) \\
\downarrow & \downarrow \\
\prod_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Omega_{S_i/R} & ((d_{S_1} \circ p_1)(s), \ldots, (d_{S_n} \circ p_n)(s))
\end{array}$$

Da der Differenzialraum $\Omega_{S/R}$ bis auf eine eindeutige Isomophie eindeutig ist *(lemma 4)*, definiere diesen ab jetzt als $\prod_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Omega_{S_i/R}$. □

Cotangent Sequenz

Proposition 8. ***(Relativ Cotangent Sequenz)*** *[vgl. Proposition 16.2 David Eisenbud 1994]*
Seien $\alpha : R \longrightarrow S$ und $\beta : S \longrightarrow T$ zwei Ringhomomorphismen. Dann existiert folgende exakte Sequenz:

$$T \otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{t \otimes d_S(s) \mapsto t(d_{T_R} \circ \beta)(s)} \Omega_{T/R} \xrightarrow{d_{T_R}(t) \mapsto d_{T_S}(t)} \Omega_{T/S} \longrightarrow 0$$

Im Besonderen gilt für die Differenzialräume von T über R und S:

$$\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R}/T\langle (d_{T_R} \circ \beta)(S) \rangle$$

Beweis. Durch $st := \beta(S) \cdot t$ und $rt := (\beta \circ \alpha)(r) \cdot t$ können wir T als S- bzw. R-Algebra betrachten.
Zeige zunächst, dass $g : \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/S}$, $d_{T_R}(t) \longmapsto d_{T_S}(t)$ surjektiv ist:

d_{T_S} ist R - Linear, da R durch $(\beta \circ \alpha)$ auf T wirkt, es lässt sich also die universelle Eigenschaft von d_{T_R} auf d_{T_S} anwenden:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "d_{T_R}"] \arrow[dr, "d_{T_S}"'] & \Omega_{T/R} \arrow[d, dashed, "\exists! g"] \\ & \Omega_{T/S} \end{tikzcd}$$

Dies zeigt, dass $g : \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/S}$, $d_{T_R}(t) \longmapsto d_{T_S}(t)$ surjektiv ist.

Zeige nun, dass $\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R}/T\langle (d_{T_R} \circ \beta)(S) \rangle$ gilt:

Definiere zunächst folgende T-lineare Ableitung:

$$e : T \longrightarrow \Omega_{T/R}/T\langle (d_{T_R} \circ \beta)(S) \rangle \text{ , } t \longmapsto [d_{T_R}(t)]_{T\langle (d_{T_R} \circ \beta)(S) \rangle}$$

Wir sehen, dass e auch S-linear ist:

Seien dazu $s \in S$ und $t \in T$ beliebig, somit gilt:

$$\begin{gathered} e(st) = [d_{T_R}(st)]_{T\langle (d_{T_R} \circ \beta)(S) \rangle} \\ = [\beta(s) d_{T_R}(t)]_{T\langle (d_{T_R} \circ \beta)(S) \rangle} + [t d_T(\beta(s))]_{T\langle (d_T \circ \beta)(S) \rangle} \\ = [\beta(s) d_T(t)]_{T\langle (d_{T_R} \circ \beta)(S) \rangle} + 0 = se(t) \end{gathered}$$

Dies bedeutet, dass wir die universelle Eigenschaft von d_{T_S} anwenden können:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "d_{T_S}"] \arrow[dr, "e"'] & \Omega_{T/S} \arrow[d, dashed, "\exists! \varphi"] \\ & \Omega_{T/R}/T\Omega_{S/R} \end{tikzcd}$$

Dadurch erhalten wir $\varphi : \Omega_{T/S} \longrightarrow \Omega_{T/R}/T\Omega_{S/R}$.
Für die Umkehrfunktion ϕ nutze $g : \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/S}\,,\, d_{T_R}(t) \longmapsto d_{T_S}(t)$ von Beginn des Beweises:

$$\text{Für alle } s \in S \text{ gilt } d_{T_S}(s) = 0.$$
$$\text{Somit gilt } T\langle (d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle \subseteq kern(g).$$
$$\text{Also ist die Umkehrfunktion } \phi \text{ von } \varphi \text{ wohldefiniert:}$$
$$\phi : \Omega_{T/R}/T\langle (d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle \longrightarrow \Omega_{T/S}\,,\, [d_{T_R}(t)]_{T\langle (d_{T_R}\circ\beta)(S)\rangle} \longmapsto d_{T_S}(t).$$

Damit gilt $\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R}/T\langle (d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle$.
Auf unsere Sequenz bezogen bedeutet dies:

$$\text{Es gilt } im(\Omega_{T/R} \to \Omega_{T/S}) \simeq \Omega_{T/R}/im(T \otimes_S \Omega_{S/R} \to \Omega_{T/R}).$$
$$\text{Somit gilt auch } im(T \otimes_S \Omega_{S/R} \to \Omega_{T/R}) = kern(\Omega_{T/R} \to \Omega_{T/S}).$$

Damit haben wir gezeigt, dass die **Relative Cotangent Sequenz** exakt ist.

□

Konormale Sequenz *[vlg. Proposition 16.3 David Eisenbud 1994]*

Satz 9. *Sei $\pi : S \longrightarrow T$ ein R-Algebrenephimorphismus mit Kern(π):= I Dann ist folgende Sequenz rechtsexakt:*

$$I/I^2 \xrightarrow{f} T \otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{g} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

mit: $f : I/I^2 \longrightarrow T \otimes_S \Omega_{S/R}\,,\, [a]_{I^2} \longmapsto 1 \otimes d_S(a)$
$g : T \otimes_S \Omega_{S/R} \longrightarrow \Omega_{T/R}\,,\, b \otimes d_S(c) \longmapsto b \cdot (d_S \circ \pi)(c)$

Beweis.
<u>f ist wohldefiniert:</u> Seien $a, b \in I^2$. Zeige $f(a \cdot b) = 0$:

$$f(a \cdot b) = 1 \otimes (d_S \circ \pi)(a \cdot b) = 1 \otimes \pi(a) \cdot (d_S \circ \pi)(b) + \pi(b) \cdot (d_S \circ \pi)(a) = 0$$

<u>$D\pi$ ist surjektiv:</u>

$$\begin{tikzcd} \Omega_{S/R} \arrow[r, "D\pi"] & \Omega_{T/R} \\ S \arrow[u, "d_S"] \arrow[r, "\pi"] & T \arrow[u, "d_T"'] \end{tikzcd}$$

Da $\Omega_{S/R}$ und $\Omega_{T/S}$ jeweils von d_S und d_T erzeugt werden, vererbt sich die Surjektivität von π auf $D\pi$. Somit ist auch $1 \otimes_S D\pi$ surjektiv.

$\underline{im(f) = kern(g)}$:
Dies folgt direkt aus der Isomorphie $(T \otimes_S \Omega_{S/R})/Im(f) \simeq \Omega_{T/R}$:

$$\begin{aligned} &(T \otimes_S \Omega_{S/R})/Im(f) \\ &= (T \otimes_S \Omega_{S/R})/(T \otimes_S d_S(I)) \\ &= T \otimes_S (\Omega_{S/R}/d_S(I)) \\ &= T \otimes_S (d_S(S)/d_S(I)) \\ &\simeq T \otimes_S d_S(S/I) \\ &\simeq T \otimes_S d_T(T) \end{aligned}$$

□

Differenzial ist Ableitung *[Eigene Überlegung (Wichtig für Körpererweiterungen)]*

Beispiel 10. *Sei k ein Körper, somit entspricht $d_{k[x]} : k[x] \longrightarrow \Omega_{k[x]/k}$, $f \longmapsto f' d_{k[x]}(x)$ der analytischen Ableitung.*
Teste dies an $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$d(f(x)) = a \cdot d(x^2) + b \cdot d(x) = (2ax + b)d(x) = f'(x)d(x)$$