Bemerkung 1. *Seien $\mathcal{B} \nsubseteq \mathcal{A}$ zwei Kategorien und $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor. Dann gilt im Falle der Existenz* $\varinjlim \mathcal{F} = \varinjlim \mathcal{F}(\mathcal{B})$

Theorem 2. *Sei S eine $R-$ Algebra und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$\Omega_{S[U^{-1}]/R} \simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R},\ \textit{Wobei:}$$
$$d_{S[U^{-1}]}((\frac{1}{u})_{_U}) \longmapsto -(\frac{1}{u^2})_{_U} \otimes d_S(u)$$

Beweis. Wir wollen THEOREM16.8 auf $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$ aus **??** anwenden. Zeige also zunächsten den einfacheren Fall $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ für ein beliebiges $t \in U$:

Nutze hierfür die Isomorphe Darstellung $S[t^{-1}] \simeq S[x]/(tx-1)$, sowie die Isomorphie $\Omega_{S[x]/R} \simeq S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x)$. aus KORROLAR16.6 Daraus erhalten wir folgende Isomorphismen:

$$\alpha : S[t^{-1}] \longrightarrow S[x]/(tx-1)$$
$$\beta : S[x]/(tx-1) \longrightarrow S[t^{-1}]$$
$$\gamma : \Omega_{S[x]/R} \longrightarrow S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x)$$

Nutze diese nun, um $\Omega_{S[t^{-1}]/R}$ isomorph zu $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ umzuformen:

$$\begin{array}{ccc}
\Omega_{S[t^{-1}]/R} & & d_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_{_t}) \\
\Big\downarrow D\alpha & & \Big\downarrow D\alpha \\
\Omega_{S[x]/R}/d_{S[x]}(tx-1) & & [d_{S[x]}(sx)] = [xd_{S[x]}(s) + sd_{S[x]}(x)] \\
\Big\downarrow \gamma & & \Big\downarrow \gamma \\
(S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}x)/((tx-1)d_{S[x]}(tx-1)) & & [x \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \\
\Big\downarrow \beta & & \Big\downarrow \beta \\
(S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus S[t^{-1}]d_{S[x]}(x)/d_{S[x]}(tx-1) =: M & & [(\frac{1}{t})_{_t} \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \\
\Big\downarrow f & & \Big\downarrow f \\
S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} & & ((\frac{1}{t})_{_t} \otimes d_S(s)) - ((\frac{s}{t^2})_{_t} \otimes d_S(t))
\end{array}$$

Die ersten drei Schritte ergeben sich aus den oben angegeben Isomorphismen. Für den letzten Schritt definiere:

$$f : M \longrightarrow S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}\,,\ [(\frac{1}{t})_{_t} \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \longmapsto ((\frac{1}{t})_{_t} \otimes d_S(s)) - ((\frac{s}{t^2})_{_t} \otimes d_S(t))$$

Damit f ein Isomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ ein eindeutiges Repräsentantensystem von M ist.

Sei dazu $[m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]$ ein beliebiger Erzeuger von M. Somit gilt:

$$\begin{aligned}
d_{S[x]}(tx-1) &= t d_{S[x]}(x) + \beta(x) d_{S[x]}(s) \\
\Rightarrow [0, d_{S[x]}(x)] &= [-(\frac{1}{t^2})_t d_S(t), 0]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow [m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)] = [m_1 - (\frac{s}{t^{n+2}})_t d_S(t), 0] = [f([m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]), 0]$$

f ist also wie vermutet ein Isomorphismus und aus obigen Umformungen folgt $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} = \Omega_{S/R}[t^{-1}]$.
Definiere für beliebige $t \in U$ folgenden Isomorphismus:

$$f \circ \beta \circ \gamma \circ D\alpha =: \delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}]\, ,\; d_{S[t^{-1}]}((\frac{1}{t})_t) \longmapsto -(\frac{d_S(t)}{t^2})_t$$

Zeige nun den Allgemeinen Fall $\Omega_{S[U^{-1}]/R} \simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$:
Wähle $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$ wie in **??**, sodass $\varinjlim \mathcal{B} = S[U^{-1}]$ gilt.
Mit THEOREM16.8 folgt somit:

$$\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \varinjlim \mathcal{F} \text{ mit:}$$

$$\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow (S[U^{-1}] - Module)\, ,\; S[t^{-1}] \longmapsto S[U^{-1}] \otimes \Omega_{S[t^{-1}]/R}$$

$$(\varphi : S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}])$$

$$\longmapsto (1 \otimes D\varphi : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}))$$

Zur Vereinfachung der Morphismen in $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ definiere folgenden Isomorphismus:

$$g : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}$$

$$(\frac{s}{u})_U \otimes ((\frac{s'}{t})_t \otimes d_{S[tt'^{-1}]}(x)) \longmapsto (\frac{s}{u})_U \otimes \varphi((\frac{s'}{t})_t) d_{S[tt'^{-1}]}(x)$$

Als letzten Schritt wollen wir **??** anwenden. Nutze dazu $\delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}]$ um den zu $\mathcal{F}$ isomorphen Funktor $\mathcal{F}' := \delta \circ \mathcal{F}$ zu erhalten. Um ein genaueres Bild von $\mathcal{F}'$ zu erlangen, betrachte folgendes Kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
S[t^{-1}] \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dd, "\mathcal{F}"] & & S[tt'^{-1}] \arrow[d, "\mathcal{F}"] \\
& & S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) \arrow[d, "g"] \\
S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[t^{-1}]/R} \arrow[urr, "1\otimes D\varphi"] \arrow[d, "\delta_t"] & & S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R} \arrow[d, "\delta_{tt'}"] \\
S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] \arrow[rr, "1\otimes\varphi"] & & S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S/R}[tt'^{-1}]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\frac{s}{t})_t \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "d_{S[t^{-1}]}"] & (\frac{st'}{tt'})_{tt'} \arrow[d, "d_{S[tt'^{-1}]}"] \\
1 \otimes ((\frac{1}{t})_t d_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{1})_t) + (\frac{s}{1})_t d_{S[t^{-1}]}((\frac{1}{t})_t)) \arrow[r, "g\circ(1\otimes D\varphi)"] \arrow[d, "\delta_t"] & 1 \otimes ((\frac{1}{tt'})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{st'}{1})_{tt'}) + (\frac{st'}{1})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{1}{tt'})_{tt'})) \arrow[d, "\delta_{tt'}"] \\
1 \otimes ((\frac{d_S(s)}{t})_t - (\frac{sd_S(t)}{t^2})_t) \arrow[r, "1\otimes\varphi"] & 1 \otimes ((\frac{t'd_S(s)}{tt'})_{tt'} - (\frac{st'd_S(t)}{(tt')^2})_{tt'})\textbf{(*)}
\end{tikzcd}$$

Dass das Diagramm in dieser Form kommutiert, ergibt sich in fast allen Fällen direkt aus dem Einsetzen in die entsprechenden Homomorphismen. Der einzige Fall, welcher nicht direkt klar ist, ist **(*)**. Rechne diesen also nochmal nach:

$$\begin{aligned}
&\delta_{tt'}(1 \otimes ((\frac{1}{tt'})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{st'}{1})_{tt'}) + (\frac{st'}{1})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{1}{tt'})_{tt'}))) \\
&= 1 \otimes ((\frac{d_S(st')}{tt'})_{tt'} - (\frac{t'sd_S(tt')}{(tt')^2})_{tt'}) \\
&= 1 \otimes ((\frac{t'd_S(s')}{tt'})_{tt'} + (\frac{sd_S(t')}{tt'})_{tt'} - (\frac{tt'd_S(t')}{(tt')^2})_{tt'} - (\frac{t'^2sd_S(t)}{(tt')^2})_{tt'}) \\
&= 1 \otimes ((\frac{t'd_S(s)}{tt'})_{tt'} - (\frac{t'^2sd_S(t)}{(tt')^2})_{tt'}) \\
&= (1 \otimes \varphi)(1 \otimes ((\frac{d_S(s)}{t})_t - (\frac{sd_S(t)}{t^2})_t))
\end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{F}'$ zu $\mathcal{F}$ isomorph und für $\mathcal{C} := \mathcal{F}'(\mathcal{B})$ gilt $\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \varinjlim \mathcal{F}' = \varinjlim \mathcal{C}$ *[vlg. bemerkung 1]*. Wobei die Form von $\mathcal{C}$ genau dem Fall aus **??** entspricht:

$$\begin{gathered}
\mathcal{C} = \{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] | t \in U\} \textit{ mit den Morphismen} \\
1 \otimes \varphi : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S/R}[tt'^{-1}] \\
(\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{d_S(x)}{t^n})_t \longmapsto (\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{t'^n d_S(x)}{(tt')^n})_{tt'}
\end{gathered}$$

Damit folgt $\varinjlim \mathcal{C} = \Omega_{S/R}[U^{-1}]$ und wir haben $\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \Omega_{S/R}[U^{-1}]$ gezeigt.

$\square$