Definition 1. *Definition Leibnizregel*

Lemma 2. *Summe von Derivationen*

Bemerkung 3. *Derivation ist Ableitung*

Bemerkung 4. *Unendliche Indexmengen*

Bemerkung 5. *Darstellung der Polynomalgebra als Tensorprodukt*

Proposition 6. *R-Algebra-Kolimiten*

Satz 7. *Konormale Sequenz*

Bemerkung 8. *NeuDifferenzenkokerndef*

Kapitel 1

Kolimes

1.1 Ableiten von Polynomen

Korrolar 1. *[Eigene Überlegung]*
Für Differentialraum des Plynomrings $R[x]$ gilt:

$$\Omega_{R[x]/R} = R[x]\langle \div R[x](x) \rangle$$

Wobei $R[x]\langle d_{R[x]}(x)\rangle$ das von $d_{R[x]}(x)$ erzeugt Modul über $R[x]$ ist.
Genauer gesagt entspricht die universellen Derivation des Polynomrings $R[x]$ der formalen Ableitung von Polynomfunktionen, wie wir sie aus der Analysis kennen. Für $P(x) \in R[x]$ gilt also:

$$d_{R[x]}(P(x)) = P'(x) d_{R[x]}(x)$$

Proposition 2. *Seien $S_1, \ldots, S_n$ R-Algebren. Sei dazu $S := \prod_{i \in \{1,\ldots,n\}} S_i$ deren direktes Produkt. Dann gilt:*

$$\Omega_{S/R} = \prod_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Omega_{S_i/R}$$

Darstellung der Polynomalgebra als Tensorprodukt

Bemerkung 3. *[Eigene Überlegung]*
Die Polynomalgebra $R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]$ über R lässt sich wie folgt als Tensorprodukt darstellen:

$$R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}] \simeq \bigotimes_{i\in\Lambda} R[x_i]$$

Beweis. Im Falle einer endlichen Indexmenge Λ wollen wir induktiv vorgehen. Seien für den Induktionsschritt $n, m \in \mathbb{N}$ und $S_x := R[x_1, \ldots x_n]$, $S_y := R[y_1, \ldots, y_m]$

zwei Polynomalgebren über R, zeige:

$$S_{xy} := R[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m] \simeq S_x \otimes_R S_y$$

Dazu betrachten wir folgende bilineare Funktion:

$$g' : S_x \oplus S_y \longrightarrow S \, , \, (P, Q) \longmapsto P \cdot Q$$

Erhalte nun eine Funktion $\varphi : S_x \otimes_R S_y \longrightarrow S_{xy}$ aus der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes:

$$\begin{tikzcd} S_x \oplus S_y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & S_x \otimes_R S_y \arrow[d, dashed, "\exists ! \varphi"] \\ & S_{xy} \end{tikzcd}$$

$$\varphi : S_x \otimes_R S_y \longrightarrow S_{xy} \, , \, P \otimes Q \longmapsto P \cdot Q$$

Der Homomorphismus φ ist surjektiv und bildet die Erzeuger $\{x_i \otimes 1\} \cup \{1 \otimes y_j\}$ von $S_x \otimes_R S_y$ eindeutig auf die Erzeuger $\{x_i\} \cup \{y_j\}$ von S_{xy} ab. Folglich ist φ ein Isomorphismus.
Indunktiv erhalten wir daraus für den Fall $|\Lambda| < \infty$ folgenden Isomorphismus:

$$\Phi : \bigotimes_{i \in \Lambda} R[x_i] \longrightarrow R[\{x_i\}_{i \in \Lambda}] \, , \, (P_1(x_1), \dots P_n(x_n)) \longmapsto \prod_{i=1}^{n} P_i(x_i)$$

Dies ist auch im Fall $\Lambda = \infty$ ein Isomorphismus, da wir auch in diesem Fall nur Tensorprodukte endlich vieler Polynome bzw. Polynome in endlich vielen Variablen betrachten *(siehe bemerkung 4)*.
Bedenke zuletzt noch, dass das Tensorprodukt $\bigotimes_{i \in \Lambda} R[x_i]$ bis auf eine Eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist. $\square$

Differenzial des Koproduktes

Proposition 4. *[vlg. Korolar 16.5 David Eisenbud 1994]*
Seien $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$ R-Algebren und $T = \bigotimes_{i \in \Lambda} S_i$ deren Koprodukt.
Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} = \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$$

mit: $d_T : R \longrightarrow \Omega_{T/R} \, , \, (\otimes_{i=1}^{n} s_i) \longmapsto \left((\otimes_{i=2}^{n} s_i) \otimes d_{R[x_1]}(s_1), \dots, \left(\otimes_{i=1}^{n-1} s_i\right) \otimes d_{R[x_n]}(s_n) \right)$

Beweis. Zeige, dass $\bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \simeq \Omega_{T/R}$ gilt.
Für $i \in \Lambda$ lässt sich T als $\left(\bigotimes_{j \in \Lambda \setminus \{i\}} S_i \right) \otimes_R S_i$ betrachten, nutze dies um

folgende R-lineare Derivationen zu definieren:

$$e_i : T \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}\,,\ (\otimes_{j\neq i} s_j)\otimes s_i \longmapsto (0,\dots,0,(\otimes_{j\neq i}s_j)\otimes d_{S_i}(s_i),0,\dots,0)$$

$$e : T \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda} T\otimes_{S_i}\Omega_{S_i/R}\,,\ t \longmapsto \sum_{i=1}^{n} e_i(t)$$

Da d_{S_i} eine Derivation ist, ist e_i und somit nach lemma 2 und bemerkung 4 auch e eine Derivation. Mithilfe der universellen Eigenschaft von d_T erhalten wir einen eindeutigen Homomorphismus φ mit $\varphi\circ d_T = e$:

$$\varphi : \Omega_{T/R} \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda}(T\otimes_{S_i}\Omega_{S_i/R})\,,\ d_T(s_1\otimes\cdots\otimes s_n)\longmapsto \sum_{i=1}^{n} e_i((\otimes_{j\neq i}s_j)\otimes s_i)$$

$$\varphi : d_T(1\otimes s_i\otimes 1)\longmapsto (0,1\otimes d_{S_i}(s_i),0)$$

Suche nun eine Umkehrfunktion ϕ zu φ. Definiere dazu für $i\in\Lambda$ folgendes R-lineares Differential:

$$h_i : S_i \longrightarrow \Omega_{T/R}\,,\ s_i \longmapsto d_T((\otimes_{j\neq i}1)\otimes s_i)$$

Mithilfe der universellen Eigenschaft von d_{S_i} erhalten wir dadurch einen eindeutigen Homomorphismus h_i' mit $h_i'\circ d_T = h_i$. Nutze diesen um einen weiteren Homomorphismus zu definieren:

$$\phi_i : T\otimes_{S_i}\Omega_{S_i/R}\longrightarrow \Omega_{T/R}\,,\ t\otimes d_{S_i}(s_i)\longmapsto t\cdot(h'\circ d_{S_i})(s_i) = t\cdot h_i(s_i)$$

Damit erhalten wir folgenden kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
S_i \arrow[r, "d_{S_i}"] \arrow[dr, "h_i"'] & \Omega_{S_i/R} \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "\exists! k'"] & T\otimes_{S_i}\Omega_{S_i/R} \arrow[dl, "\phi_i"] \\
 & \Omega_{T/R} &
\end{tikzcd}$$

Zuletzt bilden wir die Summe $\phi := \sum_{i\in\Lambda}\phi_i$ und erhalten damit eine Umkehrfunktion von φ:

$$\phi : \bigoplus_{i\in\Lambda}(T\otimes_{S_i}\Omega_{S_i/R})\longrightarrow \Omega_{T/R}\,,\ (t_i\otimes d_{S_1}(s_1),\dots,t_n\otimes d_{S_n}(s_n))\longmapsto \sum_{i=1}^{n} t_i\cdot h_i(s_i)$$

$$\phi : (0,1\otimes d_{S_i}(s_i),0)\longmapsto d_T(1\otimes s_i\otimes 1)$$

Somit gilt $\bigoplus_{i\in\Lambda}(T\otimes_{S_i}\Omega_{S_i/R})\simeq\Omega_{T/R}$.
Definiere also ab jetzt $\bigoplus_{i\in\Lambda}(T\otimes_{S_i}\Omega_{S_i/R})$ als des Differentialraum von T über R. Damit gilt $d_T = e$.

$\square$

Mehrdimmensionales Algebraisches Differentieren

Bemerkung 5. *[Eigene Bemerkung]*
Sei $R(\{x_i\}_{i\in\Lambda})$ ein Polynomring über R. Bezeichne mit δ_j die formale Ableitung in Richtung x_j, wie wir sie aus der Analysis für Polynomfunktionen über $\mathbb{R}^n$ kennen:

$$\delta_j : R(\{x_i\}_{i\in\Lambda}) \longrightarrow R(\{x_i\}_{i\in\Lambda})$$
$$\sum_k \left(a_k \cdot x_j^{n_{j,k}} \prod_{i\neq j} x_i^{n_{i,k}} \right) \longmapsto \sum_{k, n_{j,k}>0} \left(a_k \cdot n_{j,k} \cdot x_j^{n_{j,k}-1} \prod_{i\neq j} x_i^{n_{i,k}} \right)$$

Betrachte den Differentialraum von $R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]$ über $R[\{x_i\}_{i\in\Lambda\setminus\{j\}}]$:

$$d_j : R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}] \longrightarrow \Omega_{R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]/R[\{x_i\}_{i\in\Lambda\setminus\{j\}}]}$$

Nach bemerkung 3 entspricht d_j der formalen Ableitung δ_j. Für $P_j(x_j), P(x_1, \cdots, x_n) \in R\{x_i\}_{i\in\Lambda}$ gilt also:

$$\delta_j(P_j(x_j)) = P'(x_j) \tag{1.1}$$
$$d_j(P(x_1, \cdots, x_n)) = \delta_j(P(x_1, \cdots, x_n))d_j(x_j) \tag{1.2}$$

Differenzial von Polynomalgebren 1 *[vlg. Proposition 16.1 David Eisenbud 1994]*

Korrolar 6. *Sei $S = R[x_1, ..., x_n]$ eine Polynomalgebra über R. Dann gilt:*

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i=1}^{n} S\langle d_S(x_i)\rangle$$

Für die universelle Derivation d_S gilt hierbei mit der Notation von bemerkung 5:

$$d_S : S \longrightarrow \Omega_{S/R}\,,\ P(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto (\delta_1(P)d_S(x_1), \cdots, \delta_n(P)d_S(x_n))$$

Beweis. Wie in bemerkung 3 gezeigt, ist S isomorph zu $S' := \bigotimes_{i=1}^n R[x_i]$. In proposition 4 haben wir gezeigt, wie das Differenzial eines solchen Tensorproduktes aussieht:

$$\Omega_{S'/R} = \bigoplus_{i\in\Lambda} (S' \otimes_{R[x_i]} \Omega_{R[x_i]/R})$$

Mithilfe von bemerkung 3 können wir $\Omega_{R[x_i]/R}$ für $i \in \Lambda$ weiter umformen:

$$\Omega_{S'/R} = \bigoplus_{i=1}^{n} (S' \otimes_{R[x_i]} R[x_i]\langle d_{R[x_i]}(x_i)\rangle) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} S'\langle d_{R[x_i]}(x_i)\rangle$$

Nutze nun $S' \simeq S$ und betrachte $d_{R[x_i]}$ als Einschränkung von d_S. Dadurch erhalten wir die gewünschte Darstellung von $\Omega_{S/R}$.
Definiere ab nun also $\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i=1}^n S\langle d_S(x_i)\rangle$.

Um zu zeigen, dass hierbei die universelle Derivation die gewünschte Form annimmt gehe zunächst die bisher genutzten Derivationen und Isomorphismen durch:

$$d_S : S \longrightarrow \Omega_{S/R}$$

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[d] & \prod_{i=1}^n P_i(x_i) \arrow[d, mapsto] \\
S' \arrow[d] & \otimes_{i=1}^n P_i(x_i) \arrow[d, mapsto] \\
\bigoplus_{i=1}^n (S' \otimes_{R[x_i]} R[x_i]\langle d_{R[x_i]}(x_i)\rangle) \arrow[d] & (\dots, (\otimes_{k\neq i} P_k(x_k) \otimes d_{Rx_i}(P(x_i))), \dots) \arrow[d, mapsto] \\
\bigoplus_{i\in\Lambda} S\langle d_S(x_i)\rangle & (\dots, \left(\prod_{k\neq i} P_k(x_k)\right) P'(x_i) d_S(x_i), \dots)
\end{tikzcd}$$

Betrachte nun bemerkung 5. Dabei stellen wir fest, dass wir für $j \in \Lambda$ von $d_S(x_j) = d_j(x_j)$ ausgehen können, da $\{d_S(x_i)\}_{i\in\Lambda}$ linear unabhängig ist.
Rechne also für $\prod_{i=1}^n P_i(x_i) \in R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]$ und $j \in \{1, \cdots, n\}$ nach, ob unsere gewünschte Darstellung von d_S zutrifft:

$$\delta_j\left(\prod_{i=1}^n P(x_i)\right) d_S(x_j) = d_j\left(\prod_{i=1}^n P(x_i)\right) \quad \textit{(bemerkung 5)}$$

$$= P_j(x_j) d_j\left(\prod_{i\neq j} P_i(x_i)\right) + \left(\prod_{i\neq j} P_i(x_i)\right) d_j(P_j(x_j)) \quad \textit{(Leibnizregel)}$$

$$= 0 + \left(\prod_{i\neq j} P_i(x_i)\right) \delta_j(P(x_j)) d_j(x_j) = \left(\prod_{i\neq j} P_i(x_i)\right) P'(x_j) d_j(x_j)$$

□

Differenzial von Polynomalgebren 2 *[vgl. Korrolar 16.6 David Eisenbud 1994]*

Korrolar 7. *Sei S eine R-Algebra und $T := S[x_1, ..., x_n]$ eine Polynomalgebra über S. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus \bigoplus_{i=1}^n T\langle d_T(x_i)\rangle$$

Beweis. Betrachte T als Tensorprodukt über R-Algebren und wende anschließend proposition 4 an:

$$T \simeq S \otimes_R R[x_1, ..., x_n]$$
$$\Rightarrow \Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus (T \otimes_{R[x_1,...,x_n]} \Omega_{R[x_1,...,x_n]/R})$$

Zuletzt wende den soeben gezeigten korrolar 6 an und nutze schließlich $R[x_1, ..., x_n] \subseteq T$ um das Tensorprodukt zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} &T \otimes_{R[x_1,\ldots,x_n]} \Omega_{R[x_1,\ldots,x_n]/R} \\ \simeq\ &T \otimes_{R[x_1,\ldots,x_n]} \bigoplus_{i=1}^{n} R[x_1, ..., x_n]\langle d_{R[x_i]}(x_i)\rangle \\ \simeq\ &\bigoplus_{i=1}^{n} T\langle d_R(x_i)\rangle \end{aligned}$$

Damit haben wir Isomorphie gezeigt. Definiere also $(T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} T\langle d_T(x_i)\rangle$ als den Differentialraum von T über R.
Abschließend wollen wir noch d_T betrachten, sei dazu $s \prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i} \in T$ ein beliebiges Monom:

$$\begin{aligned} &d_T\left(s \prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i}\right) \\ =&\left(\prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i} \otimes d_S(s), s \otimes d_{R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]}\left(\prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i}\right)\right) \\ =&\left(\prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i} \otimes d_S(s), s \cdot \delta_1\left(\prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i}\right) d_{R[x_1](x_1)}, \ldots, s \cdot \delta_n\left(\prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i}\right) d_{R[x_n](x_n)}\right) \end{aligned}$$

□

Proposition 8. *Seien $S_1, \ldots, S_n$ R-Algebren. Sei dazu $S := \prod_{i\in\{1,\ldots,n\}} S_i$ deren direktes Produkt. Dann gilt:*

$$\Omega_{S/R} = \prod_{i\in\{1,\ldots,n\}} \Omega_{S_i/R}$$

Wobei die universelle Derivation folgende Form hat:

$$d_S : S \longrightarrow \prod_{i\in\{1,\ldots,n\}} \Omega_{S_i/R}\,,\ s \longmapsto ((d_{S_1} \circ p_1)(s), \ldots, (d_{S_1} \circ p_1)(s))$$

Korrolar 9. *[Eigene Überlegung]*
Sei $S = R[x_1 \cdots, x_m]$ der Polynomring in m Variablen über R und $S^n = \bigoplus_{k=1}^{n} S$ der n-fache Produktraum von S.
Somit entspricht mit der Notation von bemerkung 5 der Differentialraum von

S^n über R den Jakobimatrizen, wie wir sie aus Analysis kennen:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\bigoplus_{j=1}^{m} S\langle d_S(x_i) \rangle \right)$$

$$\text{mit: } d_{S^n} : S^n \longrightarrow \Omega_{S^n/R}\,,\ P \longmapsto (\delta_j(P_i))_{i\in\{1,\dots,n\},j\in\{1,\dots,m\}}$$

Wobei wir $J_{(P_1,\dots,P_n)} := (\delta_j(P_i))_{i\in\{1,\dots,n\},j\in\{1,\dots,m\}}$ die Jakobimatrix von P nennen.

Beweis. Zunächst erinnern wir uns daran, dass bei Algebren und Moduln die endlichen Summen den endlichen Produkten entsprechen. In proposition 8 haben wir den Differentialraum endlicher Produkte beschrieben:

$$\Omega_{S^n/R} = \bigoplus_{i=1}^{n} \Omega_{S/R}$$

In korrolar 6 haben wir gesehen, dass $\Omega_{S/R}$ dem gewünschten Produktraum entspricht:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{j=1}^{m} S\langle d_S(x_i) \rangle$$

Betrachte also noch genauer, wie die universelle Ableitung in diesem beiden Fällen beschrieben wird. Für ein beliebiges $P = (P_1, \dots, P_n) \in S^n$ gilt:

$$d_{S^n} \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_S(P_1) \\ \vdots \\ d_S(P_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1(P_1)d_S(x_1) & \dots & \delta_n(P_1)d_S(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_1(P_n)d_S(x_1) & \dots & \delta_n(P_1)d_S(x_n) \end{pmatrix}$$

Es gilt also $d_{S^n}(P) = (\delta_j(P_i)d_S(x_j))_{i\in\{1,\dots,n\},j\in\{1,\dots,m\}}$, was genau der Bildung der Jakobimatrix entspricht. $\square$

Korrolar 10. *[Kapitel 16.1 David Eisenbud 1994]*
Sei $S = R[x_1, \ldots, x_m]$ ein Polynomring über R und $I = (P_1, \ldots, P_n) \subseteq S$ ein Ideal. Betrachte $T = S/I$. Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} = \left(\bigoplus_{i=1}^{m} S\langle d_S(x_i)\rangle\right) / \left\{(t_1, \cdots, t_n)J_{(P_1,\ldots,P_n)} \,|(t_1, \ldots t_n) \in T^n\right\}$$

mit: $d_T : T \longrightarrow \Omega_{T/R}\,,\ [Q(x_1, \cdots, x_m)]_T \longmapsto [\delta_1(Q)d_S(x_1), \cdots, \delta_m(Q)d_S(x_m)]_{J_{(P_1,\ldots,P_n)}}$

Beweis. Betrachte zunächst die Conormale Sequenz *(satz 7)* von $\pi : S \longrightarrow T\ ,\ s \longmapsto [s]_T$:

$$I/I^2 \xrightarrow{1\otimes d_S} T \otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

Nach dieser gilt $\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R})/(1 \otimes d_S)(I)$.

Nach korrolar 6 und da $T = S/I$ ein Faktorring von S ist, ist die folgende Funktion Φ eine Isomorphie:

$$\Phi : T \otimes_S \Omega_{S/R} \longrightarrow T \otimes_S \bigoplus_{i=1}^{m} S\langle d_S(x_i)\rangle \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{m} T\langle d_S(x_i)\rangle$$
$$\Phi : [s]_T \otimes d_S(Q) \longmapsto ([s \cdot \delta_1(P)]_T d_S(x_1), \ldots, [s \cdot \delta_m(P)]_T d_S(x_m))$$

Betrachte nun also noch $(\Phi \circ (1 \otimes d_S))(I)$ näher. Sei dazu $P = \sum_{i=1}^{n} s_i P_i \in I$ beliebig, somit gilt:

Wir können eine solche Summe als $P = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i P_i = (s_1, \cdots s_n) \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}$ schreiben. Also:

$$(\Phi \circ (1 \otimes d_S))(P) = \sum_{i=1}^{n} d_S(s_i P_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [s_i]_T \cdot d_S(P_i) + [P_i]_T \cdot d_S(s_i) \qquad \textit{(Leibnizregel)}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [s_i]_T \cdot d_S(P_i) + 0 \qquad ([P_i]_T = 0,\ \textit{da}\ T = S/I)$$
$$= ([s_1]_T, \cdots, [s_n]_T) \begin{pmatrix} d_S(P_1) \\ \vdots \\ d_S(P_n) \end{pmatrix}$$
$$= ([s_1]_T, \cdots, [s_n]_T) \begin{pmatrix} \delta_1(P_1)d_S(x_1) & \ldots & \delta_n(P_1)d_S(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_1(P_n)d_S(x_1) & \ldots & \delta_n(P_1)d_S(x_n) \end{pmatrix}$$

Mit der Notation aus korrolar 9 gilt somit:

$$(\Phi \circ (1 \otimes d_S))(I) = \left\{(t_1, \cdots, t_n)J_{(P_1,\ldots,P_n)} \,|(t_1, \ldots t_n) \in T^n\right\}$$

Damit haben wir folgende Isomorphie gezeigt:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R})/(1 \otimes d_S)(I) \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^{m} S\langle d_S(x_i) \rangle \right) / \left\{ (t) J_{(P_1,\dots,P_n)} \,|t \in T^n \right\}$$

Da der Differentialraum von T über R bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig ist, definiere diesen ab nun über diese Isomorphie. Anhand von Φ sehen wir, dass somit auch d_T die geforderte Form annimmt. □

Beispiel 11. *[Eigene Überlegungen]*
Kürze $d_S(s)$ durch dx ab.

- *Betrachte dem Ring $S = \mathbb{Z}[x]/(3x) = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x i |\, a_0 \in \mathbb{Z} \wedge a_i \in \mathbb{Z}_3$ für $i \geq 1\}$ als $\mathbb{Z}$-Algebra. Dann gilt:*

$$\Omega_{S/\mathbb{Z}} = (S d_S d(x)) / \{s \cdot 3dx | s \in S\} = S/(3\mathbb{Z})dx = \mathbb{Z}_3[x]dx$$

- *Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ist $S = \mathbb{Z}[x]/(nx)$ eine $\mathbb{Z}$-Algebra. Hierbei gilt:*

$$\Omega_{S/\mathbb{Z}} = S/(n)dx = \mathbb{Z}_n[x]dx$$

- *Betrachte für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die $\mathbb{Z}$-Algebra $S = \mathbb{Z}[x, y]/(nxy)$. Für diese gilt:*

$$\begin{aligned} \Omega_{S/\mathbb{Z}} &= (Sdx \oplus Sdy)/(Sny \cdot dx \oplus Snx \cdot dy) \\ &= S/(ny)dx \oplus S/(nx)dy \\ &= \mathbb{Z}/(ny)dx \oplus \mathbb{Z}/(nx)dy \end{aligned}$$

- *Betrachte für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq 2$ die $\mathbb{Z}$-Algebra $S = \mathbb{Z}[x, y]/(nx, ny)$. Für diese gilt:*

$$\begin{aligned} \Omega_{S/\mathbb{Z}} &= (Sdx)/\{(s_1, s_2) \begin{pmatrix} ndx \\ mdx \end{pmatrix} \cdot dx | (s_1, s_2) \in S^2\} \\ &= \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z})[x]dx = \mathbb{Z}_{ggT(n,m)}[x]dx \end{aligned}$$

- *Betrachte für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq 2$ die $\mathbb{Z}$-Algebra $S = \mathbb{Z}[x, y, z]/(nx + ny, mx + mz, mz^2)$*