Satz 1. *Cotangent Sequenz*

Satz 2. *Konormale Sequenz*

Satz 3. *Differenzial von Polynomalgebren 2*

Satz 4. *Differenzial der Lokalisierung*

Satz 5. *Differential von rationalen Funktionen 1*

Cotangent Sequenz von Koerpern 3 *[Aufgabe 16.6 b) David Eisenbud 1994]*
Wir nennen eine Körpererweiterung $T \supset L$ pur inseperabel, falls gilt:

$$char(L) = p > 0 \ und \ \forall t \in T \, \exists l \in L \, \exists n \in \mathbb{N} : t^{p^n} = l$$

Proposition 6. *Seien $T \supset L \supset k$ endliche Körpererweiterungen. Betrachte die COTANGENT SEQUENZ (satz 1) von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$:*

$$T \otimes_L \Omega_{L/k} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Sei weiter die Körpererweiterung $T \supset L$ algebraisch und pur inseperabel und existiere ein $\alpha \in T$ mit $L(\alpha) = T$ und $Mipo(\alpha) = f(x) = x^p - a$.
Dann gilt:

$$\varphi \ ist \ injektiv \Leftrightarrow d_L(a) = 0$$

Beweis. Lege zunächst $T = L[x]/(f(x))$ fest und betrachte den kanonischen Epimorphismus $\pi : L[x] \longrightarrow T$, sowie die dazugehörige Konormale Sequenz *(satz 2)*. Forme diese leicht um **(2)**, sodass wir sie mit der COTANGENT SEQUENZ von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ **(3)** vergleichen können:

$$(f(x))/(f(x)^2) \xrightarrow{1 \otimes d_{L[x]}} T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/k} \longrightarrow 0 \tag{1}$$

$$T\langle d_{L[x]}(f(x))\rangle \hookrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/k} \oplus T\langle d_{L[x]}(x)\rangle \xrightarrow{\widetilde{D\pi}} \Omega_{T/k} \longrightarrow 0 \tag{2}$$

$$T \otimes_L \Omega_{L/k} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0 \tag{3}$$

Zeige, dass **(2)** auch wirkliche exakt ist:

$$\begin{gathered}(1 \otimes d_{L[x]})(f(x)) = T \otimes_{L[x]} L[x]\langle d_{L[x]}(f(x))\rangle \simeq T\langle d_{L[x]}(f(x))\rangle \\ \Rightarrow \ \text{Ersetze } 1 \otimes d_{L[x]} : (f(x))/(f(x)^2) \longrightarrow T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k} \\ \text{durch } T\langle d_{L[x]}(f(x))\rangle \hookrightarrow T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k}.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\text{nach satz 3 gilt } \Omega_{L[x]/k} \simeq L[x] \otimes_L \Omega_{L/k} \oplus L[x]\langle d_{L[x]}(x)\rangle \\ \text{und tensorieren mit } T \text{ ergibt } T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k} \simeq T \otimes_L \Omega_{L/k} \oplus T\langle d_{L[x]}(x)\rangle.\end{gathered}$$

„$\Rightarrow$ “: Wenn wir nun unsere zwei exakten Sequenzen betrachten sehen wir, dass φ eine Einschränkung von $D\pi$ auf einen kleineren Definitionsbereich ist. Zeige also, dass $D\pi$ injektiv ist:

$$\text{Nach Vorraussetung gilt } d_L(a) = 0 \text{ also auch } d_{L[x]}(a) = 0$$
$$\Rightarrow d_{L[x]}(f) = d_{L[x]}(x^p) - d_{L[x]}(a) = px^{p-1}d_{L[x]}(x) - d_{L[x]}(a) = 0 - 0$$
$$\Rightarrow T\langle d_{L[x]}(f(x))\rangle = 0$$

Bezogen auf die exakte Sequenz **(2)** bedeutet dies, dass $D\pi$ injektiv ist.

„$\Leftarrow$ “: Da φ nach Vorrausetzung injektiv ist, genügt es $\varphi 1 \otimes a = 0$ zu zeigen:

$$\text{In } T \text{ gilt } [f(x)]_T = 0$$
$$\Rightarrow 0 = d_T([f(x)]_T) = d_T([x^p]_T) - d_T([a]_T) = d_T([a]_T)$$
$$\Rightarrow \varphi(1 \otimes d_L(a)) = d_T([a]_T) = 0$$

Da φ nach Voraussetzung injektiv ist, gilt $1 \otimes d_{L[x]}(a) = 0$ und somit auch $d_L(a) = 0$.

□

Cotangent Sequenz von Koerpern 3 Beispiel *[Aufgabe 16.6 b) David Eisenbud 1994]*

Beispiel 7. *Betrachte das in proposition 6 gegebenen Szenario und wähle:*

$$k = \mathbb{F}_3,\ L = k[y]/(y^2+1),\ T = L(\sqrt[3]{y}) \simeq L[x]/(x^3 - y).$$

Hierbei gilt $d_L(x) \neq 0$ *und somit ist* $\varphi : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{L/k}$ *nicht injektiv.*