

Proposition 16.3 aus Moduls of Differenzials

**Satz 1.** Sei  $\pi : S \longrightarrow T$  ein  $R$ -Algebrenepimorphismus mit  $\text{Kern}(\pi) := I$ .  
Dann ist folgende Sequenz rechtsexakt:

$$I/I^2 \xrightarrow{f} T \otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{g} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

mit:  $f : I/I^2 \longrightarrow T \otimes_S \Omega_{S/R}, [a]_{I^2} \longmapsto 1 \otimes_S d_S(a)$

$g : T \otimes_S \Omega_{S/R} \longrightarrow \Omega_{T/R}, b \otimes_S d_S(c) \longmapsto b \cdot (d \circ \pi)(c)$

*Beweis.*

$f$  ist wohldefiniert: Seien  $a, b \in I^2$ . Zeige  $f(a \cdot b) = 0$  :

$$f(a \cdot b) = 1 \otimes_S (d_S \circ \pi)(a \cdot b) = 1 \otimes_S \pi(a) \cdot (d_S \circ \pi)(b) + \pi(b) \cdot (d_S \circ \pi)(a) = 0$$

$D\pi$  ist surjektiv:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{S/R} & \xrightarrow{D\pi} & \Omega_{T/R} \\ d_S \uparrow & & d_T \uparrow \\ S & \xrightarrow{\pi} & T \end{array}$$

Da  $\Omega_{S/R}$  und  $\Omega_{T/R}$  jeweils von  $d_S$  und  $d_T$  erzeugt werden, vererbt sich die Surjektivität von  $\pi$  auf  $D\pi$ . Somit ist auch  $1 \otimes_S D\pi$  surjektiv.

$\text{image } f = \text{KERN}(g)$ :

Dies folgt direkt aus folgender Isomorphie:  $(T \otimes_S \Omega_{S/R})/\text{Im}(f) \simeq \Omega_{T/R} = \text{BILD}(g)$ .

$$(T \otimes_S \Omega_{S/R})/\text{Im}(f) = (T \otimes_S \Omega_{S/R})/(T \otimes_S d_S(I)) = T \otimes_S (\Omega_{S/R}/d_S(I)) \simeq T \otimes_S d_S(S/I) \simeq T \otimes_S d_T(T)$$

□