Kapitel 1

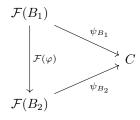
Kolimes

1.1 Einführung in den Kolimes

Definition des Kolimes

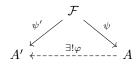
Definition 1. [vgl. Anhang A6 David Eisenbud 1994] Sei A eine Kategorie.

- Ein <u>Diagramm</u> über A ist eine Kategorie B zusammen mit einem Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow A$.
- Sei $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Diagramm und $A \in \mathcal{A}$ ein Objekt. Dann definieren wir einen Morphismus $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$ als eine Menge von Funktionen $\{\psi_B \in Hom(F(B), A) | B \in \mathcal{B}\}$, wobei für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $\varphi \in Hom(B_1, B_2)$ folgendes Diagramm kommutiert:



• Der <u>Kolimes</u> $\varinjlim \mathcal{F}$ eines Diagramms $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ist ein Paar aus einem Objekt $A \in \mathcal{A}$ zusammen mit einem Morphismus $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$, welche folgende universelle Eingenschaft erfüllen:

Für Objekte $A' \in \mathcal{A}$ und alle Morphismen $\psi' : \mathcal{F} \longrightarrow A'$ existiert genau eine Funktion $\varphi \in Hom(A, A')$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:



Eindeutigkeit des Kolimes [vgl. A6 David Eisenbud 1994]

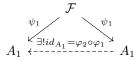
Lemma 2. Seien \mathcal{B} , \mathcal{A} zwei Kategorien und $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor. Dann ist im Falle der Existenz $\lim \mathcal{F}$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien $A_1 \in \mathcal{A}, (\psi_1 : \mathcal{F} \longrightarrow A_1)$ und $A_2 \in \mathcal{A}, (\psi_2 : \mathcal{F} \longrightarrow A_2)$ beide gleich $\lim \mathcal{F}$.

Erhalte durch die universelle Eigenschaft des Kolimes die eindeutig bestimmten Funktionen $\varphi_1 \in Hom_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$ und $\varphi_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(A_2, A_1)$, für welche die folgende Diagramme kommutieren:



Wende nun die Universelle Eigenschaft von ψ_1 auf ψ_1 selbst an und erhalte $id_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1$. Analog erhalte auch $id_{A_2} = \varphi_1 \circ \varphi_2$.



Somit existiert genau eine Isomorphie $\varphi_1: A_1 \longrightarrow A_2$

Vereinfachung des Kolimes

Korrolar 3. [Eigene Überlegung]

Sei \mathcal{A} eine Kategorie und $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$ ein Diagramm. Betrachte die Unterkategorie $\mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{A}$ zusammen mit dem Inklusionsfunktor $\mathcal{F}(B) \hookrightarrow \mathcal{A}$ ebenfalls als Diagramm. Dann gilt:

$$\varinjlim \mathcal{F} \ existiert \ genau \ dann, \ wenn \ \varinjlim (\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \ existiert.$$
$$Mit \ \varinjlim \mathcal{F} = \varinjlim (\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}).$$

Beweis. Dies folgt direkt aus unserer Definition von Morphismen:

In definition 1 haben wir einen Morphismus $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$ als eine Menge von Funktionen $\psi_{\mathcal{B}} \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(B), A)$ definiert. Dies zeigt, dass es keinen Unterschied macht, ob wir von Morphismen $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$ oder von Morphismen $\psi: (\mathcal{F}(B) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$ reden.

Wenn wir nun die universelle Eigenschaft des Kolimes genauer betrachten, sehen wir, dass diese sich nur auf Morphismen $\mathcal{F} \longrightarrow A$ bzw. $(\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$ und auf die Kategorie \mathcal{A} bezieht. Es macht also keinen Unterschied, ob wir vom Kolimes des Diagramms $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$ oder vom Kolimes des Diagramms $(\mathcal{F}(\mathcal{B}), \mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A})$ sprechen.

Es genügt also im Fall von Kolimtenn Diagramme $(\mathcal{B}, \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$ mit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ zu betrachten. Zur Vereinfachung schreibe für $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ in Zukunft $\varinjlim \mathcal{B}$ anstatt von $\varinjlim (\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$.

DifferenzkokernUndKoproduktDef

Definition 4. [vlg. A6 David Eisenbud 1994] Sei A eine Kategorie.

- Das Koprodukt von $\{B_i\}_{i\in\Lambda}\subseteq\mathcal{A}$ wird durch $\coprod_{i\in\Lambda}\{B_i\}:=\varinjlim_{\longrightarrow}\mathcal{B}$ definiert, wobei $\{B_i\}_{i\in\Lambda}$ die Objekte und die Identitätsabbildungen $\{id_{B_i}:B_i\longrightarrow B_i\}_{i\in\Lambda}$ die einzigen Morphismen von \mathcal{B} sind.
- Der Differenzkokern von $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$ wird durch $\varinjlim \mathcal{C}$ definiert, wobei $\{C_1, C_2\}$ die Objekte und $\{f, g\}$ zusammen mit den Identitätsabbildungen die Morphismen von \mathcal{C} sind.

NeuDifferenzenkokerndef

Bemerkung 5. | Wikipedia |

Sei A eine Kategorie. Sei weiter $C_1, C_2 \in Obj_A$ und $f, g \in Hom_A(C_1, C_2)$. Im Falle der Existenz ist der Differnenzenkokern von f, g nach definition 4 durch ein Objekt $C \in Obj_A$ und einen Morphismus $\psi = \{\psi_{C_1}, \psi_{C_2}\}$ gegeben, wobei gilt:

$$\psi_{C_2} = f \circ \psi_1 = g \circ \psi_2$$

Wir sehen, dass ψ eindeutig durch $q := \psi_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$ gegeben ist. Der Differnzenkokern ist also eindeutig durch $(C \in obj_{\mathcal{A}}, q \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2))$ gegeben, wobei q folgenden Eigenschaften besitzt:

Es gilt $f \circ q = g \circ g$ und für alle $C \in Obj_A$ und $q' \in Hom_A$ mit $f \circ q' = g \circ q'$ existiert genau ein $\varphi \in Hom_A$, mit $q \circ \varphi = q'$:

$$C_1 \xrightarrow{f,g} C_2 \xrightarrow{q} C$$

$$\downarrow^{q'} \qquad \downarrow^{\exists ! \varphi}$$

$$C'$$

Wenn wir fortan vom Differenzkokern sprechen meinen wir damit das Paar (C,q).

Kolimes durch Koprodukt und Differenzkokern

Theorem 6. [Proposition A6.1 David Eisenbud 1994]

Sei \mathcal{A} eine Kategorie, in der Koprodukte beliebiger Mengen von Objekten und Differenzkokerne von je zwei Morphismen existieren. Dann existiert für jedes Diagramm $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ dessen Kolimes $\lim \mathcal{F}$.

Beweis. In korrolar 3 haben wir gesehen, dass es genügt den Fall $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ zu betrachten. Konstruiere also für eine beliebige Unterkategorie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ deren Kolimes $\lim \mathcal{B}$:

Bezeichne für jeden Morphismus $\gamma \in Morph_{\mathcal{C}}$ dessen Definitionsbreich mit $B_{\gamma} \in$

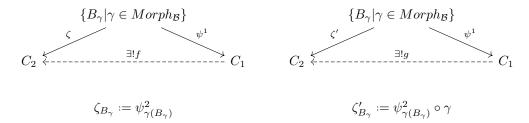
 \mathcal{B} . Weiter, wenn wir einen Morphismus ψ gegeben haben und $\psi_{\gamma(B_{\gamma})}$ betrachten, ist damit ψ_B gemeint, wobei B die Zielmenge von γ ist. Definiere nun:

- $C_1 := \coprod_{\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}} B_{\gamma}$ ist das Koprodukt aller Objekte von \mathcal{B} , in dem jedes Objekt so oft vorkommt, wie es Definitionsbereich eines $\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}$ ist. Sei $\psi^1 : \{B_{\gamma} | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_1$ der dazugehörige Morphismus.
- $C_2 := \coprod_{B \in Obj_{\mathcal{B}}}$ ist das Koprodukt aller Objekte von \mathcal{B} . Sei $\psi^2 : \{B|B \in Obj_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_2$ der dazugehörige Morphismus.

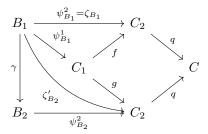
Konstruiere nun $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$ so, dass der Differenzkokern von f und g dem Kolimes von \mathcal{B} entspricht. Nutze dazu die universelle Eigenschaft von $(C_1, \psi^1) = \lim \{B_{\gamma} | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\}:$

Für f betrachte den Morphismus $\zeta: \{B_{\gamma}|\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_2$, mit $\zeta_{B_{\gamma}} := \psi_{\gamma(B_{\gamma})}^2$ für $B_{\gamma} \in \{B_{\gamma}|\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\}$. Wähle $f \in Hom_{\mathcal{B}}(C_1, C_2)$ als die eindeutige Funktion, mit $\zeta = f \circ \psi^1$.

Für g betrachte den Morphismus $\zeta':\{B_{\gamma}|\gamma\in Morph_{\mathcal{B}}\}\longrightarrow C_2,$ mit $\zeta'_{B_{\gamma}}:=\psi^2_{\gamma(B_{\gamma})}\circ\gamma$ für $B_{\gamma}\in\{B_{\gamma}|\gamma\in Morph_{\mathcal{B}}\}.$ Wähle $g\in Hom_{\mathcal{B}}(C_1,C_2)$ als die eindeutige Funktion, mit $\zeta'=g\circ\psi^1.$



Sei $C \in Obj_{\mathcal{B}}$ zusammen mit $q \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, C)$ der Differenzkokern von f, g. Betrachte abschließend $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow C$, mit $\psi_B = q \circ \psi_B^2$ für $B \in Obj_{\mathcal{B}}$. Um zu sehen, dass ψ ein Morphismus ist, wähle $B_1, B_2 \in Obj_{\mathcal{B}}$ beliebig und betrachte folgendes kommutatives Diagramm:



Zeige nun, dass (C, ψ) die Universelle Eigenschaft des Kolimes besitzt. Nutze dazu nacheinander die universellen Eigenschaften von (C_2, ψ^2) und (q, C):

Da ψ' ein Morphismus von \mathcal{B} nach C' ist, ist ψ' insbesondere auch ein Morphismus von $\{B|B\in Obj_{\mathcal{B}}\}$ nach C. Somit existiert genau ein $q'\in Hom_{\mathcal{B}}(C_2,C')$ mit $\psi^2\circ q'=\psi'$.

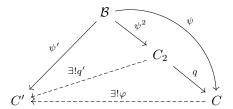
Zeige nun $q' \circ f \stackrel{!}{=} q' \circ g$. Sei dazu $c \in C_1$ beliebig und $\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}, b \in B_{\gamma}$ mit $\psi_{B_{\gamma}}^{1}(b) = c$, dann gilt:

$$(q' \circ f)(c) = (q' \circ f \circ \psi_{B_{\gamma}}^{1})(b) = (q' \circ \zeta_{B_{\gamma}})(b) = (q' \circ \psi_{B_{\gamma}}^{2})(b) = \psi'_{B_{\gamma}}(b)$$

$$(q' \circ g)(c) = (q' \circ g \circ \psi_{B_{\gamma}}^{1})(b) = (q' \circ \zeta'_{B_{\gamma}})(b)$$

$$= (q' \circ \psi_{\gamma(B_{\gamma})}^{2} \circ \gamma)(b) = (\psi'_{\gamma(B_{\gamma})} \circ \gamma)(b) = \psi'_{B_{\gamma}}(b)$$

Somit können wir die universelle Eigenschaft von q auf q' anwenden und erhalten ein eindeutiges $\varphi \in Hom(C, C')$ mit $q' = q \circ \varphi$.



Dieses $\varphi \in Hom(C,C')$ erfüllt auch $\psi \circ \varphi = \psi^2 \circ q \circ \varphi = \psi^2 \circ q' = \psi'$ und ist nach Konstruktion eindeutig. Damit gilt $\lim \mathcal{B} = (C,\psi)$.

Tensorprodukt des Differenzenkokerns [Eigene Bemerkung]

Bemerkung 7. Seien $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(S_1, S_2)$ R-Algebra-Homomorphismen, so können wir für den Differenzenkokern $q: S_2 \longrightarrow T$ für ein beliebiges S_1 -Modul das Tensorprodukt $T \otimes_{C_1} M$ definieren.

$$f\ddot{u}r \ s_1 \in S_1 \ und \ t \otimes m) \in T \otimes_{C_1} M \ gilt:$$
$$s_1 \cdot (t \otimes m) = ((q \circ f)(s_1)) \cdot t \otimes m = ((q \circ g)) \cdot (s_1)t \otimes m$$

R-Algebra-Kolimiten

Proposition 8. [vlg. Proposition A6.7 David Eisenbud 1994] In der Kategorie der R-Algebren existieren Kolimiten beliebiger Diagramme, wobei:

- 1. Das Koprodukt einer Familie von R Algebren $\{S_i\}_{i\in\Lambda}$ entspricht deren Tesorprodukt $\bigotimes_{i\in\Lambda} S_i$.
- 2. Der Differenzkokern zweier R-Algebra-Homomorphismen $f,g:S_1 \longrightarrow S_2$ einspricht dem Homomorphismus $q:S_2 \longrightarrow S_2/Q$, $y \longmapsto [y]$, wobei $Q:=\{f(x)-g(x)\mid x\in S_2\}$ das Bild der Differenz von f und g ist.

Beweis.

<u>Zu 1.</u>: Sei $\mathcal{B} = \{S_i\}_{i \in \Lambda}$ die Unterkategorie der R-Algebren, welche $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$ zusammen mit den Identitätsabbildungen enthält. Somit gilt nach definition 4 $\coprod_{i \in \Lambda} S_i = \lim_{n \to \infty} \mathcal{B}$. Seien weiter:

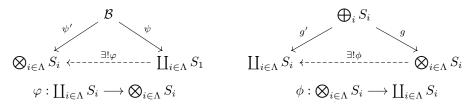
 $\psi: \mathcal{B} \longrightarrow \coprod_{i \in \Lambda} S_i$ der Morphismus des Koprodukts und

 $g: \bigoplus_{i \in \Lambda} S_i \longrightarrow \bigotimes_{i \in \Lambda} S_i$ die multilineare Abbildung des Tensorprodukts.

Konstruiere daraus einen Morphismus ψ' und eine multilineare Abbildung g':

$$\psi': \mathcal{B} \longrightarrow \otimes_{i \in \Lambda} S_i, \text{ mit } \psi'_{S_i}: S_i \longrightarrow \otimes_{i \in \Lambda} S_i, s_i \longmapsto g(1, .., 1, s_i, 1, .., 1) \text{ für } i \in \Lambda$$
$$g': \oplus_{i \in \Lambda} S_i \longrightarrow \coprod_{i \in \Lambda} S_1, s \longmapsto \prod_{i \in \{i \in \Lambda \mid s_i \neq 0\}} \psi_i(s_i)$$

Somit liefern uns die universellen Eigenschaften folgende zwei R-Algebra-Homomorphismen:



Wende nun die Universelle Eigenschaft von ψ auf ψ selbst an und erhalte $id_{\coprod_{i\in\Lambda}S_i}=\phi\circ\varphi$. Analog erhalte auch durch die universelle Eigenschschaft des Tensorpruduktes $id_{\bigotimes_i S_i}=\varphi\circ\phi$.



Damit haben wir Isomorphismen zwischen $\coprod_{i \in \Lambda} S_i$ und $\bigotimes_i S_i$ gefunden. Da das Koprodukt $\coprod_{i \in \Lambda} S_i = \varinjlim_{i \in \Lambda} \mathcal{B}$ bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist ??, definiere dies ab jetzt als $\bigotimes_{i \in \Lambda} S_i$.

<u>Zu 2.</u>: Zeige, dass $q: S_2 \longrightarrow S_2/Q$ die in bemerkung 5 eingeführten Eigenschaften des Differenzkokern's besitzt:

$$g \circ f = g \circ g$$
 gilt, da $kern(g) = Q = \{f(x) - g(x) \mid x \in C_2\}.$

Sei nun ein R-Algabrahomomorphismus $q': S_2 \longrightarrow T'$ mit $q' \circ f = q' \circ$ gegeben. Somit gilt $q' \circ (f - g) = 0$, wodurch Q ein Untermodul von Q' := kern(q') ist. Mit dem Isomorphiesatz für R-Algebren erhalten wir:

$$S_2/Q' \simeq (S_2/Q)/(Q'/Q).$$

Somit ist $q': S_2 \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q)$, $y \longmapsto [y]'$ eine isomorphe Darstellung von $q': S_2 \longrightarrow T'$.

$$\Rightarrow \exists ! \varphi : S_2/Q \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q), [y] \longmapsto [y]' \ mit \ (\varphi \circ q) = q'.$$

Also ist S_2/Q zusammen mit $q: S_2 \longrightarrow S_2/Q$ der bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmte Differenzkokern von f und g.

Darstellung der Polynomalgebra als Tensorprodukt [Eigene Überlegung]

Bemerkung 9. Die Polynomalgebra $R[x_1,...,x_d]$ über R lässt sich wie folgt als Tensorprodukt darstellen:

$$R[x_1,...,x_n] = \bigotimes_{i \in \{1,...,n\}} R[x_i]$$

Genauer gilt für zwei Polynomalgebren $A = R[x_1,...,x_{n_A}], B = R[y_1,...,y_{n_B}]$ über R:

$$A \otimes_R B = R[x_1, ..., x_{n_A}, y_1, ..., y_{n_R}]$$

Skizziere den Beweis.

Beweis. Zeige, dass für $g:A\oplus B\longrightarrow R[x_1,...,x_{n_A},y_1,...,y_{n_B}]$, $(a,b)\longmapsto a\cdot b$ die Universelle Eigenschaft des Tensorproduktes gilt:

$$A \oplus B \xrightarrow{g} R[x_1, ..., x_{n_A}, y_1, ..., y_{n_B}]$$

$$\downarrow \exists ! \varphi$$

$$\downarrow M$$

Es ist leicht nachzurechnen, dass es sich bei φ um folgende Funktion handeln muss:

$$\varphi: R[x_1,...,x_{n_A},y_1,...,y_{n_B}] \longrightarrow M, (x_i \cdot y_j) \longmapsto f(x_i,1) \cdot f(1,y_i)$$

R-Modul-Kolimiten [Proposition A6.2 David Eisenbud 1994]

Proposition 10. In Der Kategorie der R-Module existieren Koprodukte und Differenzkokerne, wobei:

- 1. das Koprodukt $\lim_{\longrightarrow} \mathcal{B}$ von R-Modulen $M_i \in (R Module)$ entspricht der direkten $Summe \sum_i M_i$.
- **2.** der Differenzenkokern zweier Homomorphismen $f, g: M_1 \longrightarrow M_2$ entspricht dem Kokern $M_2/im(f-g)$ der Differenzenabbildung.

Beweis. für 1. Sei $\phi:\{M_i\}\longrightarrow \mathcal{B}$ ein beliebiger Morphismus. Zeige:

7

Für ein beliebiges i existiert genau ein $\varphi_i: M_i \oplus 0 \longrightarrow M'$, $(0,...,0,m_i,0,...,0 \longmapsto \psi_i'(m_i)$ mit $\psi_i' = \psi_i \circ \varphi_i$ $\Rightarrow \exists ! \varphi: \bigoplus_i M_i \longrightarrow M'$, $(m_1,...,m_n) \longmapsto \sum_i \psi_i(m_i)$

2. ist Analog zu proposition 8

Die in proposition 10 gezeigten Darstellungen gelten mit kurzen Überlegungen auch für S-Module, wobei S eine R-Algebra ist.

1.2 Darstellung von Lokalisierung als Kolimes

Lokalisierung von Algebren als Kolimes [vlg. Aufgabe A6.7 David Eisenbud 1994]

Lemma 11. Sei S eine R – Algebra und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$S[U^{-1}] = \lim_{\longrightarrow} \mathcal{B}$$

Wobei \mathcal{B} aus den Objekten $\{S[t^{-1}]|t \in U\}$ und den Morphismen $S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}], (\frac{s}{t^n})_t \longmapsto (\frac{st'^n}{(tt')^n})_{(tt')} \ \forall t, t' \in U$ besteht.

Beweis. Sei $\psi: \mathcal{B} \longrightarrow A$ der Kolimes von \mathcal{B} . Zeige $S[U^{-1}] \simeq A$, definiere dazu:

$$\psi': \mathcal{B} \longrightarrow S[U^{-1}]$$

$$\psi'_{S[t^{-1}]}: S[t^{-1}] \longrightarrow S[t^{-1}], (\frac{s}{t^n})_t \longmapsto (\frac{s}{t^n})_U$$

 ψ' ist ein Morphismus, da für beliebige $t,t'\in U$ und $s\in S$ gilt:

$$\left(\frac{s}{t^n}\right)_{\scriptscriptstyle U} = \left(\frac{st'^n}{(tt')^n}\right)_{\scriptscriptstyle U}$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir den eindeutigen Homomorphismus $\varphi:A\longrightarrow S[U^{-1}].$

$$S[U^{-1}] \longleftarrow A$$

Für $\phi: S[U^{-1}] \longrightarrow A$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen. Zunächst können wir jedes Element $(\frac{s}{u})_{\scriptscriptstyle U} \in S[U^{-1}]$ als $\psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_{\scriptscriptstyle t})$ schreiben.

Weiter gilt für alle $s_1, s_2 \in S, t_1, t_2 \in U$:

$$Sei \ \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_t) = \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_t)$$

$$\Rightarrow \exists u \in U : (s_1t_1 - s_2t_2) \cdot u = 0$$

$$\Rightarrow (\frac{s_1u}{t_1u})_{tu} = (\frac{s_2u}{t_2u})_{tu}$$

$$\Rightarrow \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_t) = \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_t)$$

Mit diesem Wissen können wir den R-Algebra-Homomorphismus $\phi:S[U^{-1}]\longrightarrow A$ definieren:

$$\phi: S[U^{-1}] \longrightarrow A\,,\, \psi_{S[t^{-1}]}'((\frac{s}{t})_t) \longmapsto \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t)$$

 $\phi\circ\varphi=id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes:

$$\mathcal{B}$$

$$\psi$$

$$A \leftarrow \exists ! id_A = \phi \circ \varphi$$

$$A \leftarrow A \leftarrow A$$

Für $\varphi \circ \phi \stackrel{!}{=} id_{S[U^{-1}]}$ wähle beliebige $s \in S, t \in U$, für diese gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{s}{t})_{\scriptscriptstyle t})) = \varphi(\psi((\frac{s}{t})_{\scriptscriptstyle t}) = \psi'((\frac{s}{t})_{\scriptscriptstyle t})$$

Damit haben wir gezeigt, dass φ, ϕ Isomorphismen sind und somit $A \simeq S[U^{-1}]$ gilt.

Da der Kolimes bis auf Isomorphie eindeutig ist, definiere ab sofort $S[U^{-1}]$ als den eindeutigen Kolimes von \mathcal{B} .

Lokalisierung von Moduln als Kolimes [Beweis von Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]

Korrolar 12. Sei M ein S-Modul, wobei S eine R-Algebra ist. Sei weiter $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$M[U^{-1}] = \lim_{\longrightarrow} \mathcal{C}$$

Wobei $\mathcal C$ aus den Objekten $\{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] | t \in U\}$ und folgenden Morphismen besteht:

$$S[U^{-1}] \otimes M[t^{-1}] \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes M[(tt')^{-1}],$$
$$(\frac{s}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{t^{n}})_{t} \longmapsto (\frac{s}{u})_{U} \otimes (\frac{t'^{n}m}{(tt')^{n}})_{t}$$

Auch wenn sich lemma 11 hier nicht direkt anwenden lässt, so können wir doch im Beweis gleich vorgehen.

Beweis. Schließe zunächst den trivialen Fall $0 \in U$ aus.

Sei $\psi:\mathcal{C}\longrightarrow A$ der Colimes von $\mathcal{C}.$ Zeige $S[U^{-1}]\simeq A,$ definiere dazu folgenden Morphismus :

$$\psi: \mathcal{C} \longrightarrow M[U^{-1}]$$

$$\psi_t: S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \longrightarrow M[U^{-1}], \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{t^n}\right)_t \longmapsto \left(\frac{sm}{ut^n}\right)_U$$

Die Wohldefiniertheit von ψ'_t für ein beliebiges $t \in U$ folgt direkt aus der Universellen Eigenschaft des Tensorprodukt's. Denn für die bilineare Abbildung $f: S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \longrightarrow M[t^{-1}], \, ((\frac{s}{u})_U, (\frac{m}{t^n})_t) \longmapsto (\frac{sm}{ut^n})_U$ gilt:

$$S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \xrightarrow{g} S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}]$$

$$\downarrow \exists ! \psi'_t$$

$$M[U^{-1}]$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir nun den eindeutigen Homomorphismus $\varphi: A \longrightarrow M[U^{-1}]$.

$$M[U^{-1}] \leftarrow A$$

Für $\phi: M[U^{-1}] \longrightarrow A$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen.

Zunächst können wir jedes Element $(\frac{m}{u})_U \in M[U^{-1}]$ als $\psi((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)$ schreiben. Wobei mit ψ gemeint ist, dass wir ein beliebiges $t \in U$ wählen und dann ψ_t betrachten. Diese Verallgemeinerung ist möglich, da für beliebige $t_1, t_2, u \in U$ und $m \in M$ gilt:

$$\psi_{t_1}((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_{t_1}) = (\frac{m}{u})_U = \psi_{t_2}((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_{t_2})$$

Definiere nun mit diesem Wissen folgenden Homomorphismus:

$$\phi: M[U^{-1}] \longrightarrow A, \ \psi((\frac{1}{u})_{\scriptscriptstyle U} \otimes t) \longmapsto \psi'((\frac{1}{u})_{\scriptscriptstyle U} \otimes t)$$

 $\phi\circ\varphi=id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes. Für $\varphi\circ\phi\stackrel{!}{=}id_{M[U^{-1}]}$ wähle $(\frac{m}{u})_U\in M[U^{-1}]$ beliebig, für dieses gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t}))$$

$$= \varphi(\psi((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t}))$$

$$= \psi'((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t})$$

Damit haben wir $A \simeq M[U^{-1}]$ gezeigt, definiere also ab sofort $M[U^{-1}]$ als den eindeutigen Kolimes von \mathcal{C} .