

Differenzial ist Ableitung [Eigene Überlegung]

Beispiel 1. Sei k ein Körper, somit entspricht $d_{k[x]} : k[x] \longrightarrow \Omega_{k[x]/k}$, $f \longmapsto f' d_{k[x]}(x)$ der analytischen Ableitung.

Teste dies an $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$d(f(x)) = a \cdot d(x^2) + b \cdot d(x) = (2ax + b)d(x) = f'(x)d(x)$$

Definition der Differenzialbasis [vgl. Chapter 16.5 Kommutativ Algebra with a view Towards Algebraic Geometrie [David Eisenbud 1994]]

Definition 2. Sei $K \supset k$ eine Körpererweiterung. Dann nennen wir eine Teilmenge $\{b_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq T$ eine Differenzialbasis von K über k , falls $\{d_K(b_i)\}_{i \in \Lambda} \subseteq T$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/R}$ über T ist.

Differentialbasis des Quotientenkoerpers von Polynomalgebren [vgl. Chapter 16.5 Kommutativ Algebra with a view Towards Algebraic Geometrie [David Eisenbud 1994]]

Beispiel 3. Sei k ein Körper und $K = k(\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in n Variablen über k .

Dann ist $\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ eine Differenzialbasis von $\Omega_{K/k}$.

Beweis. Sehe $K = k[x_1, \dots, x_n][k[x_1, \dots, x_n]^{-1}]$ als Lokalisierung. Nach LOKALISIERUNG und POLYNOMRINGEN gilt:

$$\begin{aligned} \Omega_{K/k} &\simeq K \otimes \Omega_{k[x_1, \dots, x_n]/k} \\ &\simeq K \otimes \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} k[x_1, \dots, x_n] \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \\ &\simeq K \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \end{aligned}$$

Damit ist $\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ ein Erzeugenden-System von $\Omega_{K/k}$. □

Aufbaulemma Koerperdifferenzial [vgl. Lemma 16.15 Kommutativ Algebra with a view Towards Algebraic Geometrie [David Eisenbud 1994]]

Lemma 4. Sei $R \longrightarrow S \subset T$ ein Ringhomomorphismus und $S \subset T$ eine separabel und algebraische Körpererweiterung. Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} = T \otimes_S \Omega_{S/R}$$

Beweis. Wähle $\alpha \in T$ mit $S[\alpha] = T$. Sei weiter $f(x)$ das Minimalpolynom von α . Betrachte dazu die conormale Sequenz von $\pi : S[x] \longrightarrow S[x]/(f) \simeq T$ aus

Proposition 16.3:

$$(f)/(f^2) \xrightarrow{1 \otimes d_{S[x]}} T \otimes_{S[x]} \Omega_{S[x]/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

Wende nun 16.6 auf $\Omega_{S[x]/R}$ an und tensoriere mit T , somit gilt:

$$T \otimes_{S[x]} \Omega_{S[x]/R} \simeq T \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus T \langle d_{S[x]}(x) \rangle$$

Zusammen mit der conormalen Sequenz bedeutet dies:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus T \langle d_{S[x]}(x) \rangle) / (d_{S[x]}(f))$$

Wenn wir $d_{S[x]} : (f) \longrightarrow T \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus T \langle d_{S[x]}(x) \rangle$ wie in ?? betrachten, sehen wir:

$$d_{S[x]}((f)) = J \oplus (f'(\alpha) d_{S[x]}) = J \oplus T \langle d_{S[x]}(x) \rangle$$

, wobei $J \subseteq T \otimes_S \Omega_{S/R}$ ein Ideal ist.

Für die letzte Gleichheit nutze, dass $T \supset S$ separabel und somit $f'(\alpha) \neq 0$ ist und nach obiger Wahl $T = S[\alpha]$ gilt.

Damit erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} \Omega_{T/R} &\simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) / J \\ &\Rightarrow T \otimes_S \Omega_{S/R} \hookrightarrow \Omega_{T/R} \text{ ist surjektiv.} \end{aligned}$$

Somit muss $J = 0$ gelten und es folgt $T \otimes_S \Omega_{S/R} \simeq \Omega_{T/R}$. □

Differenzialbasis eines Koerpers [vgl. Theorem 16.4 Kommutativ Algebra with a view Towards Algebraic Geometry [David Eisenbud 1994]]

Theorem 5. Sei $T \supset k$ eine separabel generierte Körpererweiterung und $B = \{b_i\}_{i \in \Lambda}$. Dann ist B genau dann eine Differenzialbasis von T über k , falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. $\text{char}(k) = 0$ und B ist eine Transzendenzbasis von T über k .
2. $\text{char}(k) = p$ und B ist eine p -Basis von T über k .

Beweis.

1. "⇐": Sei B eine Transzendenzbasis von T über k .

Somit ist die Körpererweiterung $K \supset S := k(B)$ algebraisch und separabel. Mit lemma 4 folgt:

$$\Omega_{T/k} = T \otimes_S \Omega_{S/k}$$

Betrachte S als Lokalisierung von $K[B]$ und wende **Lokalisierung des Kähler-Differenzials** auf $\Omega_{S/k}$ an, somit gilt:

$$\Omega_{S/k} = S \otimes_{K[B]} \Omega_{K[B]/k}$$

In **Differenzial von Polynomalgebren 1** haben wir gesehen, dass $\Omega_{k[B]/k}$ ein freies Modul über $k[B]$ mit $\{b_i\}_{i \in \Lambda}$ als Basis ist. Dies liefert uns letztendlich die gewünschte Darstellung

$$\Omega_{T/k} = \bigoplus_{i \in \Lambda} T\langle d_T(x_i) \rangle.$$

1." \Rightarrow ": Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.

Zeige zunächst, dass T algebraisch über S ist.

Betrachte dazu die COTANGENT SEQUENZ von $K \hookrightarrow S \hookrightarrow T$.

$$T \otimes_S \Omega_{S/k} \longrightarrow \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/S} \longrightarrow 0$$

Diese besagt $\Omega_{T/S} = \Omega_{T/k} / \text{im}(T \otimes_S \Omega_{S/k} \longrightarrow \Omega_{T/k})$.

Nach Voraussetzung gilt $\Omega_{T/k} = T\langle d_T(B) \rangle$.

$$\Rightarrow \text{im}(T \otimes_S \Omega_{S/k} \longrightarrow \Omega_{T/k}) = T\langle d_S(B) \rangle \simeq \Omega_{T/k}$$

Zusammen zeigt und dies, dass $\Omega_{T/S} = 0$ gilt.

Da, wie wir in " \Leftarrow_1 ." gezeigt haben, jede Transzendenzbasis B' von T über S auch eine Differenzialbasis $\Omega_{T/S} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Da dies sonst der existens von Transzendenzbasen [vgl. PROPOSITION] widersprechen würde, muss somit T algebraisch über S sein.

Zeige noch, dass B auch algebraisch unabhängig über S ist.

Sei dazu τ die minimale Teilmenge von Λ , für welche T noch algebraisch über $k(\{b_i\}_{i \in \tau})$ ist. Für diese ist $\{b_i\}_{i \in \tau}$ algebraisch unabhängig über K . Damit ist $\{b_i\}_{i \in \tau}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von T über k . Also muss schon $\tau = \Lambda$ gegolten haben und B ist eine Transzendenzbasis von T über k .

1." \Leftarrow ": Sei B eine p -Basis von T über k .

Somit wird nach PROPOSITION T von B als Algebra über $(k * K^p)$ und $\Omega_{T/(k * K^p)}$ von $d_T(B)$ als Vektorraum über T [vgl. PROPOSITION] erzeugt. Zeige also $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p * k)}$:

Betrachte dazu die COTANGENT SEQUENZ von $K \hookrightarrow (k * K^p) \hookrightarrow T$.

$$T \otimes_{(k * K^p)} \Omega_{(k * K^p)/k} \longrightarrow \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/(k * K^p)} \longrightarrow 0$$

□