Satz 1. Cotangent Sequenz

Satz 2. Differenzial von Polynomalgebren 2

Satz 3. Differenzial der Lokalisierung

Satz 4. Differential von rationalen Funktionen 1

## Differential von rationalen Funktionen 2 [Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]

**Korrolar 5.** Sei k ein Körper und  $L \supset k$  eine Körpererweiterung und  $T = L(\{x_i\}_{i \in \{1,...,n\}})$  der Körper der rationalen Funktionen in n Varablen über L. Dann gilt:

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$

Beweis. Betrachten T als Lokalisierung von  $L[x_1, \ldots, x_n]$  und gehen dann analog zu satz 4 vor:

$$\Omega_{T/k} \simeq T \otimes_{L[x_1, \dots, x_n]} \Omega_{L[x_1, \dots, x_n]/k} \quad (satz \ 3)$$

$$\Omega_{L[x_1, \dots, x_n]/R} \simeq (L[x_1, \dots, x_n] \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i \in \{1, \dots, n\}} L[x_1, \dots, x_n] \langle d_{L[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \quad (satz \ 2)$$

$$\Rightarrow \Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$

## Cotangent Sequenz von Körpern 1 [Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]

**Bemerkung 6.** Sei  $L \supset k$  eine Körpererweiterung und  $T = L(x_1, ..., x_n)$  der Körper der rationalen Funktionen in n Variablen über L. Dann ist die COTAN-GENT SEQUENZ (satz 1) von  $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$  eine kurze Exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

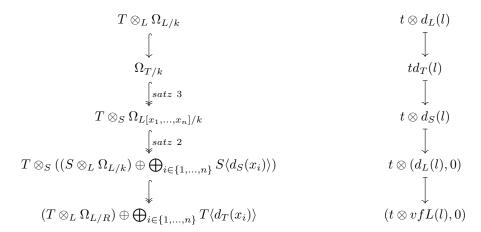
Im Genauen ist  $\varphi: T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k}$ ,  $t \otimes d_L(l) \longmapsto t \cdot d_T(l)$  injektiv.

Beweis. Die Injektivität von  $\varphi$  folgt direkt aus der isomorphen Darstellung von  $\Omega_{T/k}$ , die wir uns in korrolar 5 erarbeitet haben.

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$

Um sicher zu gehen definiere  $\varphi' \simeq \varphi$  und durchlaufe die in korrolar 5 genutzten Isomorphismen noch einmal Schritt für Schritt:

$$\varphi': T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$



Damit ist  $\varphi$  eine injektive Einbettung von  $T \otimes_L \Omega_{L/k}$  in  $\Omega_{T/k}$ .