Bemerkung 1. *Seien $\mathcal{B} \nsubseteq \mathcal{A}$ zwei Kategorien und $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor. Dann gilt im Falle der Existenz $\varinjlim \mathcal{F} = \varinjlim \mathcal{F}(\mathcal{A})$*

Theorem 2. *Sei S eine $R-$ Algebra und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$\Omega_{S[U^{-1}]/R} \simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}, \textit{ Wobei:}$$
$$d_{S[U^{-1}]}((\frac{1}{u})_U) \longmapsto -(\frac{1}{u^2})_U \otimes d_S(u)$$

Beweis. Wir wollen THEOREM16.8 auf $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$ aus **??** anwenden. Zeige also zunächsten den einfacheren Fall $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ für ein beliebiges $t \in U$:

Nutze hierfür die Isomorphe Darstellung $S[t^{-1}] \simeq S[x]/(tx-1)$, sowie die Isomorphie aus PROPOSITION16.6 $\Omega_{S[x]/R} \simeq S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x] d_{S[x]}(x)$. Daraus erhalten wir folgende Isomorphismen:

$$\alpha : S[t^{-1}] \longrightarrow S[x]/(tx-1)$$
$$\beta : S[x]/(tx-1) \longrightarrow S[t^{-1}]$$
$$\gamma : \Omega_{S[x]/R} \longrightarrow S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x] d_{S[x]}(x)$$

Zeige nun, dass folgende Umformungen Isomorph sind:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_{S[t^{-1}]/R} \arrow[d, "D\alpha"] \\
\Omega_{S[x]/R}/d_{S[x]}(tx-1) \arrow[d, "\gamma"] \\
(S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x] d_{S[x]} x)/((tx-1) d_{S[x]}(tx-1)) \arrow[d, "\beta"] \\
(S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus S[t^{-1}] d_{S[x]}(x)/d_{S[x]}(tx-1) =: M \arrow[d, "f"] \\
S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
d_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t) \arrow[d, mapsto, "D\alpha"] \\
[d_{S[x]}(sx)] = [x d_{S[x]}(s) + s d_{S[x]}(x)] \arrow[d, mapsto, "\gamma"] \\
[x \otimes d_S(s), s d_{S[x]}(x)] \arrow[d, mapsto, "\beta"] \\
[(\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s), s d_{S[x]}(x)] \arrow[d, mapsto, "f"] \\
((\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s)) - ((\frac{s}{t^2})_t \otimes d_S(t))
\end{tikzcd}$$

Die ersten drei Schritte ergeben sich aus den oben angegeben Isomorphismen. Damit f ein Isomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ ein Repräsentantenkammer von M ist.
Sei dazu $[m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]$ ein beliebiger Erzeuger von M. Somit gilt:

$$d_{S[x]}(tx-1) = t d_{S[x]}(x) + \beta(x) d_{S[x]}(s)$$
$$\Rightarrow d_{S[x]}(x) = (\frac{1}{t^2})_t d_S(t)$$
$$\Rightarrow [m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)] = [m_1 - (\frac{s}{t^{n+2}})_t d(t), 0] = [f([m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]), 0]$$

Damit ist f ein Isomorphismus. Wir haben also $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} = \Omega_{S/R}[t^{-1}]$.
Definiere dazu noch für beliebige $t \in U$ folgenden Isomorphismus:

$$f \circ \beta \circ \gamma \circ D\alpha =: \delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}] \, , \, d_{S[t^{-1}]}((\frac{1}{t})_t) \longmapsto -(\frac{d_S}{t^2})_t$$

Zeige nun den Allgemeinen Fall $\Omega_{S[U^{-1}]/R} \simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$: Wähle $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$ wie in **??**, sodass $\varinjlim \mathcal{B} = S[U^{-1}]$ gilt.
Mit THEOREM16.8 folgt somit:

$$\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \varinjlim \mathcal{F} \text{ mit:}$$
$$\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow (S[U^{-1}] - Module) \, , \, S[t^{-1}] \longmapsto S[U^{-1}] \otimes \Omega_{S[t^{-1}]/R}$$
$$(\varphi : S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}])$$
$$\longmapsto (1 \otimes D\varphi : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}))$$

Zur Vereinfachung der Morphismen in $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ definiere folgenden Isomorphismus:

$$g : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}$$
$$\frac{s}{u} \otimes (\frac{s'}{t} \otimes d_{S[tt'^{-1}]}(x)) = \frac{s}{u} \otimes (1 \otimes \varphi(\frac{s'}{t}) d_{S[tt'^{-1}]}(x)) \longmapsto \frac{s}{u} \otimes \varphi(\frac{s'}{t}) d_{S[tt'^{-1}]}(x)$$

Zusammen mit $\delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}]$ ergibt sich folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
S[t^{-1}] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dd, "\mathcal{F}"] & S[tt'^{-1}] \arrow[d, "\mathcal{F}"] \\
 & S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) \arrow[d, "g"] \\
S[U^{-1}] \otimes \Omega_{S[t^{-1}]/R} \arrow[ur, "1 \otimes D\varphi"] \arrow[d, "\delta_t"] & S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R} \arrow[d, "\delta_{tt'}"] \\
S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] \arrow[r, "\phi"] & S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S/R}[tt'^{-1}]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\frac{s}{t} \arrow[r, mapsto, "\varphi"] \arrow[d, mapsto, "d_{S[t^{-1}]}"] & \frac{s}{tt'} \arrow[d, mapsto, "d_{S[tt'^{-1}]}"] \\
\frac{1}{t} d_{S[t^{-1}]}(s) + s d_{S[t^{-1}]}(\frac{1}{t}) \arrow[r, mapsto, "f \circ (1 \otimes D\varphi)"] \arrow[d, mapsto, "\gamma_t"] & \frac{t'}{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}(s) + s d_{S[tt'^{-1}]}(\arrow[d, mapsto, "\gamma_{tt'}"] \\
\frac{1}{t} d_S(s) - \frac{s}{t^2} d_S(t) \arrow[r, mapsto, "\phi"] & \frac{t'}{tt'} d_S(s) - \frac{st'}{(tt')^2} d_S(tt') \mathbf{(3}
\end{tikzcd}$$

Erhalte daraus mithilfe von bemerkung 1:

$$\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \varinjlim \mathcal{C}, \text{ wobei:}$$
$$\mathcal{C} = \{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}) | t \in U\} \textit{ mit den Morphismen}$$
$$\phi : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S/R}[tt'^{-1}]$$
$$(\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{d_S(x)}{t^n})_t \longmapsto (\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{t'^n d_S(x)}{(tt')^n})_{tt'}$$

Somit entspricht $\mathcal{C}$ dem Fall aus **??** und es gilt $\varinjlim \mathcal{C} = \Omega_{S/R}[U^{-1}]$. □