Kapitel 1

Kolimes

1.1 Ableiten von Polynomen

Darstellung der Polynomalgebra als Tensorprodukt

Bemerkung 1. *[Eigene Überlegung]*
Die Polynomalgebra $R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]$ über R lässt sich wie folgt als Tensorprodukt darstellen:

$$R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}] \simeq \bigotimes_{i\in\Lambda} R[x_i]$$

Beweis. Im Falle einer endlichen Indexmenge Λ wollen wir induktiv vorgehen. Seien für den Induktionsschritt $n, m \in \mathbb{N}$ und $S_x := R[x_1, \ldots x_n]$, $S_y := R[y_1, \ldots, y_m]$ zwei Polynomalgebren über R, zeige:

$$S_{xy} := R[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m] \simeq S_x \otimes_R S_y$$

Dazu betrachten wir folgende bilineare Funktion:

$$g' : S_x \oplus S_y \longrightarrow S\ ,\ (P, Q) \longmapsto P \cdot Q$$

Erhalte nun eine Funktion $\varphi : S_x \otimes_R S_y \longrightarrow S_{xy}$ aus der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes:

$$\begin{tikzcd}
S_x \oplus S_y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & S_x \otimes_R S_y \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\
& S_{xy}
\end{tikzcd}$$

$$\varphi : S_x \otimes_R S_y \longrightarrow S_{xy}\ ,\ P \otimes Q \longmapsto P \cdot Q$$

Der Homomorphismus φ ist surjektiv und bildet die Erzeuger $\{x_i \otimes 1\} \cup \{1 \otimes y_j\}$ von $S_x \otimes_R S_y$ eindeutig auf die Erzeuger $\{x_i\} \cup \{y_j\}$ von S_{xy} ab. Folglich ist φ ein Isomorphismus.

Induktiv erhalten wir daraus für den Fall $|\Lambda| < \infty$ folgenden Isomorphismus:

$$\Phi : \bigotimes_{i\in\Lambda} R[x_i] \longrightarrow R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]\,,\,(P_1(x_1),\dots P_n(x_n)) \longmapsto \prod_{i=1}^{n} P_i(x_i)$$

Dies ist auch im Fall $\Lambda = \infty$ ein Isomorphismus, da wir auch in diesem Fall nur Tensorprodukte endlich vieler Polynome bzw. Polynome in endlich vielen Variablen betrachten *(siehe* **??***)*.
Bedenke zuletzt noch, dass das Tensorprodukt $\bigotimes_{i\in\Lambda} R[x_i]$ bis auf eine Eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist. □

Differenzial des Koproduktes

Proposition 2. *[vlg. Korolar 16.5 David Eisenbud 1994]*
Seien $\{S_i\}_{i\in\Lambda}$ R-Algebren und $T = \bigotimes_{i\in\Lambda} S_i$ deren Koprodukt.
Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} = \bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$$

mit: $d_T : R \longrightarrow \Omega_{T/R}\,,\,(\otimes_{i=1}^{n} s_i) \longmapsto \left((\otimes_{i=2}^{n} s_i) \otimes d_{R[x_1]}(s_1), \dots, (\otimes_{i=1}^{n-1} s_i) \otimes d_{R[x_n]}(s_n)\right)$

Beweis. Zeige, dass $\bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \simeq \Omega_{T/R}$ gilt.
Für $i \in \Lambda$ lässt sich T als $\left(\bigotimes_{j\in\Lambda\setminus\{i\}} S_i\right) \otimes_R S_i$ betrachten, nutze dies um folgende R-lineare Derivationen zu definieren:

$$e_i : T \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}\,,\,(\otimes_{j\neq i} s_j) \otimes s_i \longmapsto (0,\dots,0,(\otimes_{j\neq i} s_j) \otimes d_{S_i}(s_i),0,\dots,0)$$

$$e : T \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}\,,\,t \longmapsto \sum_{i=1}^{n} e_i(t)$$

Da d_{S_i} eine Derivation ist, ist e_i und somit nach **??** und **??** auch e eine Derivation. Mithilfe der universellen Eigenschaft von d_T erhalten wir einen eindeutigen Homomorphismus φ mit $\varphi \circ d_T = e$:

$$\varphi : \Omega_{T/R} \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})\,,\,d_T(s_1 \otimes \dots \otimes s_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} e_i((\otimes_{j\neq i} s_j) \otimes s_i)$$
$$\varphi : d_T(1 \otimes s_i \otimes 1) \longmapsto (0, 1 \otimes d_{S_i}(s_i), 0)$$

Suche nun eine Umkehrfunktion ϕ zu φ. Definiere dazu für $i \in \Lambda$ folgendes R-lineares Differential:

$$h_i : S_i \longrightarrow \Omega_{T/R}\,,\,s_i \longmapsto d_T((\otimes_{j\neq i} 1) \otimes s_i)$$

Mithilfe der universellen Eigenschaft von d_{S_i} erhalten wir dadurch einen eindeutigen Homomorphismus h_i' mit $h_i' \circ d_T = h_i$. Nutze diesen um einen weiteren

Homomorphismus zu definieren:

$$\phi_i : T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \longrightarrow \Omega_{T/R} \,,\, t \otimes d_{S_i}(s_i) \longmapsto t \cdot (h' \circ d_{S_i})(s_i) = t \cdot h_i(s_i)$$

Damit erhalten wir folgenden kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
S_i \arrow[r, "d_{S_i}"] \arrow[dr, "h_i"'] & \Omega_{S_i/R} \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "\exists! k'"] & T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \arrow[dl, "\phi_i"] \\
& \Omega_{T/R} &
\end{tikzcd}$$

Zuletzt bilden wir die Summe $\phi \coloneqq \sum_{i\in\Lambda} \phi_i$ und erhalten damit eine Umkehrfunktion von φ:

$$\phi : \bigoplus_{i\in\Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \longrightarrow \Omega_{T/R} \,,\, (t_i \otimes d_{S_1}(s_1), \ldots, t_n \otimes d_{S_n}(s_n)) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot h_i(s_i)$$
$$\phi : (0, 1 \otimes d_{S_i}(s_i), 0) \longmapsto d_T(1 \otimes s_i \otimes 1)$$

Somit gilt $\bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \simeq \Omega_{T/R}$.
Definiere also ab jetzt $\bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$ als des Differentialraum von T über R. Damit gilt $d_T = e$.

□

Mehrdimmensionales Algebraisches Differentieren

Bemerkung 3. *[Eigene Bemerkung]*
Sei $R(\{x_i\}_{i\in\Lambda})$ ein Polynomring über R. Bezeichne mit δ_j die formale Ableitung in Richtung x_j, wie wir sie aus der Analysis für Polynomfunktionen über $\mathbb{R}^n$ kennen:

$$\delta_j : R(\{x_i\}_{i\in\Lambda}) \longrightarrow R(\{x_i\}_{i\in\Lambda})$$
$$\sum_k \left(a_k \cdot x_j^{n_{j,k}} \prod_{i\neq j} x_i^{n_{i,k}} \right) \longmapsto \sum_{k, n_{j,k}>0} \left(a_k \cdot n_{j,k} \cdot x_j^{n_{j,k}-1} \prod_{i\neq j} x_i^{n_{i,k}} \right)$$

Betrachte den Differentialraum von $R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]$ über $R[\{x_i\}_{i\in\Lambda\setminus\{j\}}]$:

$$d_j : R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}] \longrightarrow \Omega_{R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]/R[\{x_i\}_{i\in\Lambda\setminus\{j\}}]}$$

Nach **??** *entspricht d_j der formalen Ableitung δ_j. Für $P_j(x_j), P(x_1, \cdots, x_n) \in R\{x_i\}_{i\in\Lambda}$ gilt also:*

$$\delta_j(P_j(x_j)) = P'(x_j) \tag{1.1}$$
$$d_j(P(x_1, \cdots, x_n)) = \delta_j(P(x_1, \cdots, x_n)) d_j(x_j) \tag{1.2}$$

Differenzial von Polynomalgebren 1 *[vlg. Proposition 16.1 David Eisenbud*

1994]

Korrolar 4. *Sei $S = R[x_1, ..., x_n]$ eine Polynomalgebra über R. Dann gilt:*

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i=1}^{n} S\langle d_S(x_i)\rangle$$

Für die universelle Derivation d_S gilt hierbei mit der Notation von bemerkung 3:

$$d_S : S \longrightarrow \Omega_{S/R}\,,\; P(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto (\delta_1(P)d_S(x_1), \cdots, \delta_n(P)d_S(x_n))$$

Hierbei wird oft zur besserem Übersicht $d_S(x_i) = dx_i$ geschrieben.

Beweis. Wie in bemerkung 1 gezeigt, ist S isomorph zu $S' := \bigotimes_{i=1}^{n} R[x_i]$. In proposition 2 haben wir gezeigt, wie das Differenzial eines solchen Tensorproduktes aussieht:

$$\Omega_{S'/R} = \bigoplus_{i\in\Lambda}(S' \otimes_{R[x_i]} \Omega_{R[x_i]/R})$$

Mithilfe von **??** können wir $\Omega_{R[x_i]/R}$ für $i \in \Lambda$ weiter umformen:

$$\Omega_{S'/R} = \bigoplus_{i=1}^{n}(S' \otimes_{R[x_i]} R[x_i]\langle d_{R[x_i]}(x_i)\rangle) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} S'\langle d_{R[x_i]}(x_i)\rangle$$

Nutze nun $S' \simeq S$ und betrachte $d_{R[x_i]}$ als Einschränkung von d_S. Dadurch erhalten wir die gewünschte Darstellung von $\Omega_{S/R}$.
Definiere ab nun also $\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i=1}^{n} S\langle d_S(x_i)\rangle$.
Um zu zeigen, dass hierbei die universelle Derivation die gewünschte Form annimmt gehe zunächst die bisher genutzten Derivationen und Isomorphismen durch:

$$d_S : S \longrightarrow \Omega_{S/R}$$

$$\begin{array}{ccc}
S & & \prod_{i=1}^{n} P_i(x_i) \\
\downarrow & & \downarrow \\
S' & & \otimes_{i=1}^{n} P_i(x_i) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\bigoplus_{i=1}^{n}(S' \otimes_{R[x_i]} R[x_i]\langle d_{R[x_i]}(x_i)\rangle) & & (\dots, (\otimes_{k\neq i} P_k(x_k) \otimes d_{Rx_i}(P(x_i))), \dots) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\bigoplus_{i\in\Lambda} S\langle d_S(x_i)\rangle & & (\dots, \left(\prod_{k\neq i} P_k(x_k)\right) P'(x_i) d_S(x_i), \dots)
\end{array}$$

Betrachte nun bemerkung 3. Dabei stellen wir fest, dass wir für $j \in \Lambda$ von $d_S(x_j) = d_j(x_j)$ ausgehen können, da $\{d_S(x_i)\}_{i\in\Lambda}$ linear unabhängig ist.
Rechne also für $\prod_{i=1}^{n} P_i(x_i) \in R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]$ und $j \in \{1, \cdots, n\}$ nach, ob unsere

gewünschte Darstellung von d_S zutrifft:

$$\begin{aligned}
\delta_j\left(\prod_{i=1}^{n} P(x_i)\right) d_S(x_j) &= d_j\left(\prod_{i=1}^{n} P(x_i)\right) \textit{ (bemerkung 3)} \\
&= P_j(x_j) d_j\left(\prod_{i\neq j} P_i(x_i)\right) + \left(\prod_{i\neq j} P_i(x_i)\right) d_j(P_j(x_j)) \textit{ (Leibnizregel)} \\
&= 0 + \left(\prod_{i\neq j} P_i(x_i)\right) \delta_j(P(x_j)) d_j(x_j) = \left(\prod_{i\neq j} P_i(x_i)\right) P'(x_j) d_j(x_j)
\end{aligned}$$

□

Differenzial von Polynomalgebren 2 *[vgl. Korrolar 16.6 David Eisenbud 1994]*

Korrolar 5. *Sei S eine R-Algebra und $T := S[x_1, ..., x_n]$ eine Polynomalgebra über S. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

Beweis. Betrachte T als Tensorprodukt über R-Algebren und wende anschließend proposition 2 an:

$$\begin{gathered}
T \simeq S \otimes_R R[x_1, ..., x_n] \\
\Rightarrow \Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus (T \otimes_{R[x_1,...,x_n]} \Omega_{R[x_1,...,x_n]/R})
\end{gathered}$$

Zuletzt wende den soeben gezeigten korrolar 4 an und nutze schließlich $R[x_1, ..., x_n] \subseteq T$ um das Tensorprodukt zu vereinfachen:

$$\begin{gathered}
T \otimes_{R[x_1,...,x_n]} \Omega_{R[x_1,...,x_n]/R} \\
\simeq T \otimes_{R[x_1,...,x_n]} \bigoplus_{i=1}^{n} R[x_1, ..., x_n]\langle d_{R[x_i]}(x_i)\rangle \\
\simeq \bigoplus_{i=1}^{n} T\langle d_R(x_i)\rangle
\end{gathered}$$

Damit haben wir Isomorphie gezeigt. Definiere also $(T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} T\langle d_T(x_i)\rangle$ als den Differentialraum von T über R.
Abschließend wollen wir noch d_T betrachten, sei dazu $s \prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i} \in T$ ein belie-

biges Monom:

$$d_T\left(s\prod_{i=1}^{k}x_i^{n_i}\right)$$

$$=\left(\prod_{i=1}^{k}x_i^{n_i}\otimes d_S(s), s\otimes d_{R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]}\left(\prod_{i=1}^{k}x_i^{n_i}\right)\right)$$

$$=\left(\prod_{i=1}^{k}x_i^{n_i}\otimes d_S(s), s\cdot\delta_1\left(\prod_{i=1}^{k}x_i^{n_i}\right)d_{R[x_1](x_1)},\dots,s\cdot\delta_n\left(\prod_{i=1}^{k}x_i^{n_i}\right)d_{R[x_n](x_n)}\right)$$

Daran ist zu erkennen, dass auch d_T die geforderte Form annimmt. □

Jakobimatrizen

Korrolar 6. *[Eigene Überlegung]*
Sei $S = R[x_1\cdots,x_m]$ der Polynomring in m Variablen über R und $S^n=\bigoplus_{k=1}^{n}S$ der n-fache Produktraum von S.
Somit entspricht mit der Notation von bemerkung 3 der Differentialraum von S^n über R den Jakobimatrizen, wie wir sie aus Analysis kennen:

$$\Omega_{S/R}=\bigoplus_{i=1}^{n}\left(\bigoplus_{j=1}^{m}S\langle d_S(x_i)\rangle\right)$$

$$\text{mit: } d_{S^n}: S^n\longrightarrow\Omega_{S^n/R}\,,\ P\longmapsto(\delta_j(P_i))_{i\in\{1,\dots,n\},j\in\{1,\dots,m\}}$$

Wobei wir $J_{(P_1,\dots,P_n)}:=(\delta_j(P_i))_{i\in\{1,\dots,n\},j\in\{1,\dots,m\}}$ die Jakobimatrix von P nennen.

Beweis. Zunächst erinnern wir uns daran, dass bei Algebren und Moduln die endlichen Summen den endlichen Produkten entsprechen. In **??** haben wir den Differentialraum endlicher Produkte beschrieben:

$$\Omega_{S^n/R}=\bigoplus_{i=1}^{n}\Omega_{S/R}$$

In korrolar 4 haben wir gesehen, dass $\Omega_{S/R}$ dem gewünschten Produktraum entspricht:

$$\Omega_{S/R}=\bigoplus_{j=1}^{m}S\langle d_S(x_i)\rangle$$

Betrachte also noch genauer, wie die universelle Ableitung in diesem beiden

Fällen beschrieben wird. Für ein beliebiges $P = (P_1, \dots, P_n) \in S^n$ gilt:

$$d_{S^n} \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_S(P_1) \\ \vdots \\ d_S(P_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1(P_1)d_S(x_1) & \dots & \delta_m(P_1)d_S(x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_1(P_n)d_S(x_1) & \dots & \delta_m(P_n)d_S(x_m) \end{pmatrix}$$

Es gilt also $d_{S^n}(P) = (\delta_j(P_i)d_S(x_j))_{i\in\{1,\dots,n\},j\in\{1,\dots,m\}}$, was genau der Bildung der Jakobimatrix entspricht. $\square$

Bsp Jakobimatrix

Beispiel 7. *[Eigene Überlegung]*
Wir wollen einmal konkret mit korrolar 6 rechnen. Betrachte dazu die $\mathbb{Q}$-Algebra $S = \mathbb{Q}[x, y, z]^2 = \mathbb{Q}[x, y, z] \oplus \mathbb{Q}[x, y, z]$ und folgendes Polynom $P(x, y, z) \in S$:

$$P(x, y, z) = \begin{pmatrix} P_1(x, y, z) \\ P_2(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y \\ xz - yz \end{pmatrix}$$

Nach korrolar 6 ist $\Omega_{S/\mathbb{Q}}$ ein freies Modul vom Rang 3 über S:

$$\Omega_{S/\mathbb{Q}} = (Sdx \oplus Sdy \oplus Sdz) \oplus (Sdx \oplus Sdy \oplus Sdz)$$

Die universelle Deriavation verhält sich wie das formale Ableiten. Bilde also zunächst die formale Ableitung von P_1 und P_2 wie in korrolar 4 beschrieben:

$$\begin{gathered} d_{\mathbb{Q}[x,y,z]}(P_1) = d_{\mathbb{Q}[x,y,z]}(3x^2y) \\ = (\delta_1(3x^2y)dx\,,\ \delta_2(3x^2y)dy\,,\ \delta_3(3x^2y)dz) \\ = (6xy\,dx\,, 3x^2\,dy\,,\ 0) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} d_{\mathbb{Q}[x,y,z]}(P_1) = d_{\mathbb{Q}[x,y,z]}(xz - yz) \\ = (\delta_1(xz - yz)\,dx\,,\ \delta_2(xz - yz)\,dy\,,\ \delta_3(xz - yz)\,dz) \\ = (z\,dx\,,\ -z\,dy\,,\ (x - y)dz) \end{gathered}$$

Um die Jakobimatrix von zu P bilden schreibe nun diese beiden Tupel untereinander in eine Matrix:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{Q}[x,y,z]}(P) = d_{\mathbb{Q}[x,y,z]} \left(\begin{pmatrix} 3x^2y \\ xz - yz \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} d_{\mathbb{Q}[x,y,z]}(3x^2y) \\ d_{\mathbb{Q}[x,y,z]}(P_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6xy\,dx & 3x^2\,dy & 0 \\ z\,dx & -z\,dy & (x - y)\,dz \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir gehen also genauso vor, wie wir es vom Ableiten von Polynomfunktionen über $\mathbb{R}^2$ aus der Analysis kennen. Dabei ist zu beachten, dass wir Polynome über $\mathbb{Q}^2$ abgeleitet haben. Des Weiteren hätten wir auch die $\mathbb{Z}$-Algebra $\mathbb{Z}[x, y, z]^2$ mit $P \in \mathbb{Z}[x, y, z]^2$ betrachten können und wären dabei analog vorgegangen.

Derivtion mittels Jakobimatrizen

Korrolar 8. *[Kapitel 16.1 David Eisenbud 1994]*
Sei $S = R[x_1, \dots, x_m]$ ein Polynomring über R und $I = (P_1, \dots, P_n) \subseteq S$ ein Ideal. Betrachte $T = S/I$. Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} = \left(\bigoplus_{i=1}^{m} T\langle d_S(x_i)\rangle\right) / \left\{(t_1, \cdots, t_n) J_{(P_1,\dots,P_n)} \,|(t_1, \dots t_n) \in T^n\right\}$$

Beweis. Betrachte zunächst die Conormale Sequenz *(??)* von $\pi : S \longrightarrow T$, $s \longmapsto [s]_T$:

$$I/I^2 \xrightarrow{1 \otimes d_S} T \otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

Nach dieser gilt $\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R})/(1 \otimes d_S)(I)$.

Nach korrolar 4 und da $T = S/I$ ein Faktorring von S ist, ist die folgende Funktion Φ eine Isomorphie:

$$\Phi : T \otimes_S \Omega_{S/R} \longrightarrow T \otimes_S \bigoplus_{i=1}^{m} S\langle d_S(x_i)\rangle \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{m} T\langle d_S(x_i)\rangle$$
$$\Phi : [s]_T \otimes d_S(Q) \longmapsto ([s \cdot \delta_1(P)]_T d_S(x_1), \dots, [s \cdot \delta_m(P)]_T d_S(x_m))$$

Betrachte nun also noch $(\Phi \circ (1 \otimes d_S))(I)$ näher. Sei dazu $P = \sum_{i=1}^{n} s_i P_i \in I$ beliebig, somit gilt:

Wir können eine solche Summe als $P = \sum_{i=1}^{n} s_i P_i = (s_1, \cdots s_n) \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}$ schreiben. Also:

$$(\Phi \circ (1 \otimes d_S))(P) = \sum_{i=1}^{n} d_S(s_i P_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [s_i]_T \cdot d_S(P_i) + [P_i]_T \cdot d_S(s_i) \qquad \textit{(Leibnizregel)}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [s_i]_T \cdot d_S(P_i) + 0 \qquad ([P_i]_T = 0, \textit{ da } T = S/I)$$
$$= ([s_1]_T, \cdots, [s_n]_T) \begin{pmatrix} d_S(P_1) \\ \vdots \\ d_S(P_n) \end{pmatrix}$$
$$= ([s_1]_T, \cdots, [s_n]_T) \begin{pmatrix} \delta_1(P_1) d_S(x_1) & \dots & \delta_n(P_1) d_S(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_1(P_n) d_S(x_1) & \dots & \delta_n(P_1) d_S(x_n) \end{pmatrix}$$

Mit der Notation aus korrolar 6 gilt somit:

$$(\Phi \circ (1 \otimes d_S))(I) = \left\{(t_1, \cdots, t_n)J_{(P_1,\dots,P_n)} \,|(t_1, \dots t_n) \in T^n\right\}$$

Damit haben wir folgende Isomorphie gezeigt:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R})/(1 \otimes d_S)(I) \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^{m} S\langle d_S(x_i)\rangle\right) / \left\{(t)J_{(P_1,\dots,P_n)} \,|t \in T^n\right\}$$

Da der Differentialraum von T über R bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig ist, definiere diesen ab nun über diese Isomorphie. Anhand von Φ sehen wir, dass d_T die geforderte Form annimmt. $\square$

Bsp Derivation mittels Jakobimatrizen

Beispiel 9. *[Eigene Überlegungen]*
Durch korrolar 8 können wir nun für eine große Klasse von Algebren, deren Differentialraum bestimmen. Nutze dazu die Notation aus korrolar 4.

(1) *Nutze die Jakobimatrix, die wir in beispiel 7 ausgerechnet haben, um den Differentialraum von $\mathbb{Q}[x, y, z]^2/I$ über $\mathbb{Q}$ zu bestimmen, wobei $I \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ ein Ideal von folgender Form ist:*

$$I = (P_1(x, y, z), P_2(x, y, z)) = (3x^2y,\, zx - zy)$$
$$\text{mit } J_{(P_1,P_2)} = \begin{pmatrix} 6xy\,dx & 3x^2\,dy & 0 \\ z\,dx & -z\,dy & (x-y)\,dz \end{pmatrix}$$

In korrolar 8 ist angegeben, wie wir mittels J_{P_1,P_2} den Differentialraum von $\mathbb{Q}[x, y, z]^2/I$ über $\mathbb{Q}$ bestimmen können:

$$\Omega_{S/\mathbb{Q}} = (Sdx \oplus Sdy \oplus Sdz) \,/\, \left\{(s_1,\, s_2)J_{(P_1,\, P_2)} \,|(s_2, \in s_2) \in S^2\right\}$$

$$= (Sdx \oplus Sdy \oplus Sdz) \,/\, \left\{(s_1,\, s_2)\begin{pmatrix} 6xy\,dx & 3x^2\,dy & 0 \\ z\,dx & -z\,dy & (x-y)\,dz \end{pmatrix} |(s_2, \in s_2) \in S^2\right\}$$

Da wir im Differentialraum zusätzliche Polynome raus teilen, kann es auch vorkommen, dass dieser der Nullraum ist:

(2.1) *Sei R ein beliebiger Ring. Wähle $r \in R$ und setze $S = R[x]/(x-r)$. Somit gilt $\Omega_{S/R} = 0$. Rechne dies nach:*

$$\Omega_{S/R} = Sdx/\{sdx|s \in S\} = S/Sdx = 0$$

*Alternativ kann man auch direkt sehen, dass in diesem Fall durch $S \longrightarrow R$, $x \longmapsto r$ ein Isomorphismus gegeben ist. Da $d_S(1) = 0$ gilt (siehe **??**), gilt insbesondere $d_S(R) = 0$ und somit auch $\Omega_{S/R} = 0$.*

(2.2) Sei k ein beliebiger Körper. Wähle nun $a, b \in k$ und betrachte $L = k[x]/(ax - b)$ als k-Algebra. Dann gilt $\Omega_{L/k} = 0$:

$$L = k[x]/(ax - b) = k[x]/(x - a^{-1}b)$$
$$\Rightarrow^{(2.1)} \Omega_{L/k} = 0$$

Um erst mal ein besseres Gefühl für Kähler-Differential zu bekommen, betrachte die Differentialräume von $\mathbb{Z}$-Algebren. Dabei tasten wir uns langsam von den einfachen Fällen hin zu komplexeren Beispielen:

(3.1) Betrachte den Ring $S = \mathbb{Z}[x]/(3x) = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,|\, a_0 \in \mathbb{Z} \wedge a_i \in \mathbb{Z}_3 \text{ für } i \geq 1\right\}$ als $\mathbb{Z}$-Algebra. Der Differentialraum von S über $\mathbb{Z}$ ist das Modul der Polynome über $\mathbb{Z}_3$:

$$\Omega_{S/\mathbb{Z}} = \left(S d_S d(x)\right) / \{s \cdot 3dx | s \in S\} = S/3\mathbb{Z}[x]\, dx = \mathbb{Z}_3[x]dx$$

(3.2) Allgemeiner können wir auch $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $S = \mathbb{Z}[x]/(nx)$ als $\mathbb{Z}$-Algebra wählen. Gehe in diesem Fall analog zu (3.1) vor:

$$\Omega_{S/\mathbb{Z}} = S/n\mathbb{Z}\, dx = \mathbb{Z}_n[x]dx$$

(3.3) Für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq 2$ und $S = \mathbb{Z}[x, y]/(nx, mx)$ gilt:

$$\Omega_{S/\mathbb{Z}} = (Sdx)/\{(s_1, s_2)\begin{pmatrix} ndx \\ mdx \end{pmatrix} \cdot dx | (s_1, s_2) \in S^2\}$$
$$= \mathbb{Z}[x]/\left(n\mathbb{Z}[x] + m\mathbb{Z}[x]\right)\, dx = \mathbb{Z}_{ggT(n,m)}[x]dx$$

(3.4) Betrachte noch, welche Auswirkungen es hat, wenn wir auch Polynome hören Grades betrachten. Wähle als $\mathbb{Z}$-Algebra also $S = \mathbb{Z}[x]/(3x, x^2) = \{a_0 + a_1 x | a_0 \in \mathbb{Z}_3 \wedge a_1 \in \mathbb{Z}\}$. Für diese gilt:

$$\Omega_{S/\mathbb{Z}} = Sdx/\left\{(s_1, s_2)\begin{pmatrix} 3 \cdot dx \\ 2x \cdot dx \end{pmatrix} | (s_1, s_2) \in S^2\right\}$$
$$= \mathbb{Z}[x]/(3, 2x, 3x, 2x^2)\, dx = \mathbb{Z}[x]/(3, x)\, dx = \mathbb{Z}_3 dx$$

(3.5) Für $S = \mathbb{Z}[x]/(3x^3, x^4) = \left\{\sum_{i=1}^{3} a_i x^i \,|\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z} \wedge a_3 \in \mathbb{Z}_3\right\}$ gilt:

$$\Omega_{S/\mathbb{Z}} = Sdx/\left\{(s_1, s_2)\begin{pmatrix} 9x^2 \cdot dx \\ 4x^3 \cdot dx \end{pmatrix} | (s_1, s_2) \in S\right\}$$
$$= \mathbb{Z}[x]/(9x^2, 3x^3, 4x^3, x^4)\, dx$$
$$= \mathbb{Z}[x]/(9x^2, x^3)\, dx = \left\{\left(\sum_{i=0}^{2} a_i x^i\right) dx \,|\, a_0, a_1 \in \mathbb{Z} \wedge a_2 \in \mathbb{Z}_9\right\}$$

(3.6) Wir können mittlerweile auch Polynome in mehreren Variablen betrach-

ten. Wähle also $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und betrachte $S = \mathbb{Z}[x,y]/(nx, my)$, somit gilt:

$$\begin{aligned}
\Omega_{S/\mathbb{Z}} = (Sdx \oplus Sdy)/ &\left\{ (s_1, s_2) \begin{pmatrix} ndx & 0 \\ 0 & mdy \end{pmatrix} |(s_1, s_2) \in S^2 \right\} \\
&= \mathbb{Z}[x,y]/(nx, my, n)\, dx \,\oplus\, \mathbb{Z}[x,y]/(ny, my, m)\, dy \\
&= \mathbb{Z}[x,y]/(my, n)\, dx \,\oplus\, \mathbb{Z}[x,y]/(nx, m)\, dy \\
&= \mathbb{Z}_n[x,y]/(my)\, dx \,\oplus\, \mathbb{Z}_m[x,y]/(nx)\, dy \\
&= (\mathbb{Z}_n[x])[y]/(my)\, dy \,\oplus\, (\mathbb{Z}_m[y])[x]/(nx)\, dy \\
= &\left\{ \sum_{i=0}^{n} P_i(x) y_i | P_0(x) \in \mathbb{Z}_n[x] \,\wedge\, P_i(x) \in \mathbb{Z}_{ggt(n,m)}[x] \text{ für } i \geq 1 \right\} \\
\oplus &\left\{ \sum_{i=0}^{n} P_i(y) x_i | P_0(y) \in \mathbb{Z}_m[y] \,\wedge\, P_i(y) \in \mathbb{Z}_{ggt(n,m)}[y] \text{ für } i \geq 1 \right\}
\end{aligned}$$

Beachte, dass wir die von dx und dy erzeugten Module separat betrachten können liegt daran, dass die Jakobimatrix von (nx, my) eine Diagonalmatrix ist.

(3.7) *Rechne also noch ein Beispiel ohne Diagonalmatrix durch. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und betrachte $S = \mathbb{Z}[x,y]/(nxy)$, somit gilt:*

$$\begin{aligned}
\Omega_{S/\mathbb{Z}} &= (Sdx \oplus Sdy)/ \{ s(ny\, dx,\, nx\, dxy) | s \in S \} \\
&= (Sdx \,\oplus\, Sdy)/(S(ny\, dx \,+\, nx\, dy)) \\
&= (\mathbb{Z}[x,y]\, dx \oplus \mathbb{Z}[x,y]\, dy)/(nxy\, dx\,,\, nxy\, dy\,,\, ny\, dx \,+\, nx\, dy)
\end{aligned}$$

(3.8) *Berechne zuletzt noch ein Beispiel mit konkreten Zahlen. Betrachte dazu die $\mathbb{Z}$-Algebra $S = \mathbb{Z}[x,y]/(2xy, y^2)$:*

$$\begin{aligned}
\Omega_{S/\mathbb{Z}}[x,y] &= (Sdx \oplus Sdy)/ \left\{ (s_1, s_2) \begin{pmatrix} 2ydx & 2xdy \\ 0 & 2ydy \end{pmatrix} |(s_1, s_2) \in S^2 \right\} \\
&= (Sdx \oplus Sdy)/(2y\, dx + 2x\, dy\,,\, 2y\, dy) \\
&= (\mathbb{Z}[x]dx \oplus \mathbb{Z}[x]dy)/(2xy\, dx\,,\, y^2\, dx\,,\, 2y\, dx + 2x\, dy\,,\, 2xy\, dy\,,\, y^2\, dy\,,\, 2y\, dy) \\
&= (\mathbb{Z}[x]dx \oplus \mathbb{Z}[x]dy)/(2xy\, dx\,,\, y^2\, dx\,,\, 2y\, dx + 2x\, dy\,,\, y^2\, dy\,,\, 2y\, dy)
\end{aligned}$$

Für $(x^3y + x^2y) \in S$ gilt somit:

$$d_s(x^3y + x^2y) = ((3x^2y + xy)dx\,,\, (x^3 + y^2)dy) = (x^2y\, dx\,,\, (x^3 + y^2)dy)$$

Betrachte das Differential von Körpererweiterungen.

(4) Für die $\mathbb{R}$*-Algebra* $\mathbb{C} = R[x]/(x^2 - 1)$ *der Komplexen Zahlen gilt* $\Omega_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} = 0$*:*

$$\Omega_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} = \mathbb{C}dx/\mathbb{C}(2x\,dx) = \mathbb{R}/(x^2 - 1,\, 2x)\,dx = 0$$

$$\textit{da } (x^2 - 1) + \frac{1}{2}(2x) = 1, \textit{ also } (x^2 - 1,\, 2x) = (x^2 - 1,\, 2x, 1) = \mathbb{R}$$