Kapitel 1

Körpererweiterungen

1.1 Differential von Körpererweiterungen

Definition der Differenzialbasis *[vlg. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]*

Definition 1. *Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung. Dann nennen wir eine Teilmenge $\{b_i\}_{i\in\Lambda} \subseteq L$ eine Differenzialbasis von L über k, falls $\{d_K(b_i)\}_{i\in\Lambda}$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{L/R}$ über L ist.*

Differential von rationalen Funktionen 1 *[vlg. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]*

Beispiel 2. *Sei k ein Körper und $L = k(\{x_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in n Varablen über k.*
Dann gilt:

$$\Omega_{L/k} \simeq L\langle d_{k[x_1,\ldots x_n]}(x_i)\rangle$$

Insbesondere ist $\{x_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ eine Differenzialbasis von $\Omega_{L/k}$.

Beweis. Betrachte $L = k[x_1,\ldots,x_n][k[x_1,\ldots,x_n]^{-1}]$ als Lokalisierung um **??** anwenden zu können. Anschließend forme noch $\Omega_{k[x_1,\ldots,x_n]/k}$ mithilfe von **??** isomorph um:

$$\begin{aligned}\Omega_{L/k} &\simeq L \otimes \Omega_{k[x_1,\ldots,x_n]/k} \\ &\simeq L \otimes \oplus_{i\in\{1,\ldots,n\}} k[x_1,\ldots,x_n]\langle d_{k[x_1,\ldots x_n]}(x_i)\rangle \\ &\simeq L\langle d_{k[x_1,\ldots x_n]}(x_i)\rangle\end{aligned}$$

Damit ist $\{d_L(x_i)\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{L/k}$. $\square$

Differential von rationalen Funktionen 2 *[Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]*

Korrolar 3. *Sei k ein Körper und $L \supset k$ eine Körpererweiterung und $T = L(\{x_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in n Varablen über L. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i\in\{1,\ldots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

Beweis. Betrachten T als Lokalisierung von $L[x_1, \ldots, x_n]$ und gehen dann analog zu beispiel 2 vor:

$$\begin{aligned} \Omega_{T/k} &\simeq T \otimes_{L[x_1,\ldots,x_n]} \Omega_{L[x_1,\ldots,x_n]/k} \text{ (??)} \\ \Omega_{L[x_1,\ldots,x_n]/R} &\simeq (L[x_1, \ldots, x_n] \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i\in\{1,\ldots,n\}} L[x_1, \ldots, x_n]\langle d_{L[x_1,\ldots,x_n]}(x_i)\rangle \text{ (??)} \\ \Rightarrow \Omega_{T/k} &\simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i\in\{1,\ldots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle \end{aligned}$$

□

Cotangent Sequenz von Koerpern 1 *[Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]*

Bemerkung 4. *Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung und $T = L(x_1, \ldots, x_n)$ der Körper der rationalen Funktionen in n Variablen über L. Dann ist die COTANGENT SEQUENZ (??) von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ eine kurze Exakte Sequenz:*

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Im Genauen ist $\varphi : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k}$, $t \otimes d_L(l) \longmapsto t \cdot d_T(l)$ injektiv.

Beweis. Die Injektivität von φ folgt direkt aus der isomorphen Darstellung von $\Omega_{T/k}$, die wir uns in korrolar 3 erarbeitet haben.

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i\in\{1,\ldots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

Um sicher zu gehen definiere $\varphi' \simeq \varphi$ und durchlaufe die in korrolar 3 genutzten Isomorphismen noch einmal Schritt für Schritt:

$$\varphi' : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus \bigoplus\nolimits_{i\in\{1,\ldots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

$$\begin{array}{ccc}
T \otimes_L \Omega_{L/k} & & t \otimes d_L(l) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\Omega_{T/k} & & td_T(l) \\
\big\downarrow ?? & & \big\downarrow \\
T \otimes_S \Omega_{L[x_1,\dots,x_n]/k} & & t \otimes d_S(l) \\
\big\downarrow ?? & & \big\downarrow \\
T \otimes_S ((S \otimes_L \Omega_{L/k}) \oplus \bigoplus_{i\in\{1,\dots,n\}} S\langle d_S(x_i)\rangle) & & t \otimes (d_L(l), 0) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
(T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i\in\{1,\dots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle & & (t \otimes d_L(l), 0)
\end{array}$$

Damit ist φ eine injektive Einbettung von $T \otimes_L \Omega_{L/k}$ in $\Omega_{T/k}$. □

Aufbaulemma Koerperdifferenzial *[vlg. Lemma 16.15 David Eisenbud 1994]*

Lemma 5. *Sei $L \subset T$ eine seperable und algebraische Körpererweiterung und $R \longrightarrow L$ ein Ringhomomorphismus. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/R} = T \otimes_L \Omega_{L/R}$$

*Insbesondere ist in diesem Fall die COTANGENT SEQUENZ (**??**) von $R \to L \hookrightarrow T$ eine kurze Exakte Sequenz:*

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \longrightarrow \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Beweis. Wähle $\alpha \in T$ mit $L[\alpha] = T$. Sei weiter f(x) das Minimalpolynom von α. Betrachte dazu die conormale Sequenz von $\pi : L[x] \longrightarrow L[x]/(f) \simeq T$ *(**??**)*:

$$(f)/(f^2) \xrightarrow{1\otimes d_{L[x]}} T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

Wende nun Proposition 16.6 auf $\Omega_{L[x]/R}$ an und tensoriere mit T, somit gilt:

$$T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \simeq T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T\langle d_{L[x]}(x)\rangle$$

Zusammen mit der conormalen Sequenz bedeutet dies:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T\langle d_{L[x]}(x)\rangle)/(d_{L[x]}(f))$$

Wenn wir $d_{L[x]} : (f) \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T\langle d_{L[x](x)}\rangle$ wie in **??** betrachten , sehen wir:

$$d_{L[x]}((f)) = J \oplus (f'(\alpha)d_{L[x]}) = J \oplus T\langle d_{S[x]}(x)\rangle$$

,wobei $J \subseteq T \otimes_L \Omega_{L/R}$ ein Ideal ist.

Für die letzte Gleichheit nutze, dass $T \supset L$ seperabel und somit $f'(\alpha) \neq 0$ ist und nach obiger Wahl $T = L[\alpha]$ gilt.
Damit erhalten wir nun:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R})/J$$
$$\Rightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \hookrightarrow \Omega_{T/R} \textit{ ist surjektiv.}$$

Somit muss J $= 0$ gelten und es folgt $T \otimes_L \Omega_{L/R} \simeq \Omega_{T/R}$.
Damit haben wir insbesondere auch gezeigt, dass $T \otimes_L \Omega_{L/R} \to \Omega_{T/R}$ injektiv und somit die COTANGENT SEQUENZ von $R \to L \hookrightarrow T$ eine kurze exakte Sequenz ist. □

Transzendenzbasis ist Differenzialbasis *[vlg. Theorem 16.4 David Eisenbud 1994]*

Theorem 6. *Sei $T \supset k$ eine seperabel generierte Körpererweiterung und $B = \{b_i\}_{i\in\Lambda} \subseteq T$. Dann ist B genau dann eine Differenzialbasis von T über k, falls eine der folgedenen Bedingungen erfüllt ist:*

1. *char(k) $= 0$ und B ist eine Transzendenzbasis von T über k.*

2. *char(k) $= p$ und B ist eine p-Basis von T über k.*

Beweis.

1.„⇐“: Sei B eine Transzendenzbasis von T über k.
Damit ist die Körpererweiterung $L := k(B) \supset k$ algebraisch und seperabel.
Mit lemma 5 folgt:

$$\Omega_{T/k} = T \otimes_L \Omega_{L/k}$$

Betrachte $L = k[B][k[B] \setminus 0^{-1}]$ als Lokalisierung und wende **??** auf $\Omega_{L/k}$ an, somit gilt:

$$\Omega_{L/k} = L \otimes_{k[B]} \Omega_{k[B]/k}$$

In **??** haben wir gesehen, dass $\Omega_{k[B]/k}$ ein freis Modul über $k[B]$ mit $\{b_i\}_{i\in\Lambda}$ als Basis ist. Dies liefert uns letztendlich die gewünschte Darstellung

$$\Omega_{T/k} = \bigoplus_{\{i\in\Lambda\}} T\langle d_T(b_i)\rangle.$$

1.„⇒“: Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.

Zeige zunächst, dass T algebraisch über $L := k(B)$ ist:

$$\text{Die COTANGENT SEQUENZ } \textit{(??)} \text{ von } k \hookrightarrow L \hookrightarrow T \text{ besagt}$$
$$\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(S)\rangle \text{ und nach Vorraussetzung gilt } \Omega_{T/k} = T\langle d_T(B)\rangle.$$
$$\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L)\rangle = \Omega_{T/k}/T\langle d_T(B)\rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$$

Da, wie wir in „$\Leftarrow_{1.}$“gezeigt haben, jede Transzendenzbasis B' von T über L auch eine Differenzialbasis von $\Omega_{T/L} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Somit ist T schon algebraisch über L.

Zeige noch, dass B auch algebraisch unabhängig über L ist:
Sei dazu Γ eine minimale Teilmenge von Λ, für welche T noch algebraisch über $k(\{b_i\}_{i\in\Gamma})$ ist. Für diese ist $\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ algebraisch unabhängig über K. Damit ist nach „$\Leftarrow_{1.}$“$\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von T über k. Also muss schon $\Gamma = \Lambda$ gegolten haben und B ist eine Transzendenzbasis von T über k.

2.„$\Leftarrow$“: Sei B eine p-Basis von T über k.
Somit wird nach DEFINITION-PROPOSITION T von B als Algebra über $(k * T^p)$ und $\Omega_{T/(k*T^p)}$ von $d_T(B)$ als Vektorraum über T *(PROPOSITION)* erzeugt. Zeige also $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p*k)}$:
Die Cotangent Sequenz *(??)* von $K \hookrightarrow (k * T^p) \hookrightarrow T$ besagt:

$$\Omega_{T/(T^p*k)} \simeq \Omega_{T/k}/d_T(T^p * k)$$

$$\text{Für beliege } t^p \in T^p \text{ gilt } d_T(t^p) = pt^{p-1}d_T(t) = 0, \text{ da } char(T) = p.$$
$$\Rightarrow d_T(T^p * k) = d_T(k(T^p)) = 0$$

Damit ist $d_T : T \longrightarrow \Omega_{T/k}$ auch (T^p*k)-linear und es gilt $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p*k)}$.

2.„$\Rightarrow$“: Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.
Zeige zunächst, dass T von B als Algebra über k erzeugt wird:

$$\text{Die COTANGENT SEQUENZ (??) von } k \hookrightarrow L := k(B) \hookrightarrow T \text{ besagt}$$
$$\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L)\rangle \text{ und nach Vorraussetzung gilt } \Omega_{T/k} = T\langle d_T(B)\rangle.$$
$$\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L)\rangle = \Omega_{T/k}/T\langle d_T(B)\rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$$

Da, wie wir in „$\Leftarrow_{2.}$“gezeigt haben, jede p-Basis B' von T über L auch eine Differenzialbasis von $\Omega_{T/L} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Somit wird T schon von B als Algebra über k erzeugt.

Zeige noch, dass B auch minimal als Erzeugendensystem von T als Algebra über k ist:
Sei dazu Γ die minimale Teilmenge von Λ, für welche T noch von $\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ als Algebra über k erzeugt wird. Dann ist $\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ eine p-Basis von T über

k. Somit ist nach „$\Leftarrow_{2.}$“$\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von T über k. Es muss also schon $\Gamma = \Lambda$ gegolten haben und B ist eine p-Basis von T über k.

$\square$