Satz 1. *Cotangent Sequenz*

Satz 2. *Konormale Sequenz*

Satz 3. *Differenzial von Polynomalgebren 2*

Satz 4. *Differenzial der Lokalisierung*

Satz 5. *Differential von rationalen Funktionen 1*

Cotangent Sequenz von Körpern 3 *[Aufgabe 16.6 b) David Eisenbud 1994]*

Beispiel 6. *Seien $T \supset L \supset k$ endliche Körpererweiterungen. Betrachte die COTANGENT SEQUENZ (satz 1) von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$:*

$$T \otimes_L \Omega_{L/k} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Sei weiter die Körpererweiterung $T \supset L$ algebraisch und pur inseperabel.

Eine Körpererweiterung heißt pur inseperabel, falls gilt:

$$char(L) = p > 0 \text{ und } \forall t \in T \exists l \in L \exists n \in \mathbb{N} : t^{p^n} = l$$

Existiere weiter ein $\alpha \in T$ mit $L(\alpha) = T$ und $Mipo(\alpha) = f(x) = x^p - a$.
Dann gilt:

$$\varphi \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow d_L(a) = 0$$

Beweis.
Betrachte die Konormale Sequenz *(satz 2)* von $\pi : L[x] \longrightarrow Lx/(f(x)) \simeq T$, $P(x) \longmapsto [P(x)]$ **(1)**. Forme diese leicht um **(2)**, sodass wir sie mit der COTANGENT SEQUENZ von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ **(3)** vergleichen können:

$$(f(x))/(f(x)^2) \xrightarrow{1 \otimes d_{L[x]}} T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/k} \longrightarrow 0 \tag{1}$$

$$T\langle d_{L[x]}(f(x))\rangle \hookrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/k} \oplus T\langle d_{L[x]}(x)\rangle \xrightarrow{\widetilde{D\pi}} \Omega_{T/k} \longrightarrow 0 \tag{2}$$

$$T \otimes_L \Omega_{L/k} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0 \tag{3}$$

Zeige zunächst, das **(2)** auch wirkliche exakt ist:

$$(1 \otimes d_{L[x]})(f(x)) = T \otimes_{L[x]} L[x]\langle d_{L[x]}(f(x))\rangle \simeq T\langle d_{L[x]}(f(x))\rangle$$
$$\Rightarrow \text{ Ersetze } 1 \otimes d_{L[x]} : (f(x))/(f(x)^2) \longrightarrow T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k}$$
$$\text{durch } T\langle d_{L[x]}(f(x))\rangle \hookrightarrow T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k}.$$

$$\text{Weiter gilt nach satz 3 } \Omega_{L[x]/k} \simeq L[x] \otimes_L \Omega_{L/k} \oplus L[x]\langle d_{L[x]}(x)\rangle,$$
$$\text{also auch } T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k} \simeq T \otimes_L \Omega_{L/k} \oplus T\langle d_{L[x]}(x)\rangle.$$

„$\Rightarrow$ “: Wenn wir nun unsere zwei exakten Sequenzen betrachten sehen wir, dass φ eine Einschränkung von $D\pi$ auf einen kleineren Definitionsbereich ist. Zeige also, dass $D\pi$ injektiv ist:

$$\text{Nach Vorraussetung gilt } d_T(a) = 0$$
$$\Rightarrow d_T(f) = d_T(x^p) - d_T(a) = px^{p-1}d_T(x) - d_T(a) = 0 - 0$$
$$\Rightarrow T\langle d_{L[x]}(f(x))\rangle = 0$$

Bezogen auf unser exakte Sequenz **(2)** bedeutet dies, dass $D\pi$ injektiv ist.

„$\Leftarrow$ “:

$$\text{In } T \text{ gilt f(x)} = 0$$
$$\Rightarrow 0 = d_T(f(x)) = d_T(x^p) - d_T(a) = d_T(a)$$
$$\Rightarrow \varphi(1 \otimes d_L(a)) = d_T(a) = 0$$

Da φ nach Voraussetzung injektiv ist, gilt $1 \otimes d_{L[x]}(a) = 0$ und somit auch $d_L(a) = 0$.

$\square$