

# Kapitel 1

## Einführung des Kähler-Differentials

### Definition Leibnizregel

**Definition 1.** [Kapitel 16 David Eisenbud 1994]

Sei  $S$  ein Ring und  $M$  ein  $S$ -Modul

Ein Homomorphismus abelscher Gruppen  $d : S \rightarrow M$  ist eine Ableitung, falls gilt:

$$\forall s_1, s_2 \in S : d(s_1 \cdot s_2) = s_1 d(s_2) + s_2 d(s_1) \quad (\text{Leibnizregel})$$

Sei  $S$  eine  $R$ -Algebra, dann nennen wir eine Ableitung  $d : S \rightarrow M$   $R$ -linear, falls sie zusätzlich ein  $R$ -Modulhomomorphismus ist, also falls gilt:

$$\forall r_1, r_2 \in R \forall s_1, s_2 \in S : d(r_1 s_1 + r_2 s_2) = r_1 d(s_1) + r_2 d(s_2)$$

### Differenzial idempotenter Elemente

**Lemma 2.** [Aufgabe 16.1 David Eisenbud 1994]

Sei  $S$  ein Ring,  $M$  ein  $S$ -Modul und  $d : S \rightarrow M$  eine Ableitung. Sei weiter  $a \in S$  ein idempotentes Element ( $a^2 = a$ ).

$$\text{Dann gilt } d(a) = 0.$$

Insbesondere gilt somit auch  $d(1) = 0$ .

*Beweis.* Nutze hierfür allein die Leibnizregel ([crefDefinition Leibnizregel](#))

$$\text{Schritt 1: } d_S(a) = d_S(a^2) = a d_S(a) + a d_S(a)$$

$$\text{Schritt 2: } a d_S(a) = a d_S(a^2) = a^2 d_S(a) + a^2 d_S(a) = a d_S(a) + a d_S(a)$$

$$\Rightarrow d_S(a) = a d_S(a) = 0$$

□

**Definition 3.** Sei  $S$  eine  $R$ -Algebra.

Das  $S$ -Modul  $\Omega_{S/R}$  der Kähler-Differenziale von  $S$  über  $R$  und die dazugehörige universelle  $R$ -lineare Ableitung  $d_S : S \rightarrow \Omega_{S/R}$  mit  $\text{im}(d_S) = \Omega_{S/R}$  sind durch die folgende universelle Eigenschaft definiert:

Für alle  $R$ -linearen Ableitungen  $e : S \rightarrow M$  von  $S$  in ein  $S$ -Modul  $M$  existiert genau ein  $S$ -Modulhomomorphismus  $e' : \Omega_{S/R} \rightarrow M$ , sodass folgendes

Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{d_S} & \Omega_{S/R} \\ & \searrow e & \downarrow \exists! e' \\ & & M \end{array}$$

### Eindeutigkeit des Kähler-Differentials

**Lemma 4.** (Das Kähler-Differentials ist eindeutig)

Sei  $S$  eine  $R$ -Algebra.

Dann ist das  $S$ -Modul  $\Omega_{S/R}$  der Kähler-Differenziale von  $S$  über  $R$  und die dazugehörige universelle  $R$ -lineare Ableitung  $d_S$  bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Seien  $d_S : S \rightarrow \Omega_{S/R}$  und  $d'_S : S \rightarrow \Omega'_{S/R}$  beide eine universelle  $R$ -lineare Ableitung.

Durch die universelle Eigenschaft der universellen Ableitung erhalten wir eindeutig bestimmte Funktionen  $\varphi : \Omega_{S/R} \rightarrow \Omega'_{S/R}$  und  $\varphi' : \Omega'_{S/R} \rightarrow \Omega_{S/R}$ , für welche die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{d_S} & \Omega_{S/R} \\ & \searrow d'_S & \downarrow \exists! \varphi \\ & & \Omega'_{S/R} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{d'_S} & \Omega'_{S/R} \\ & \searrow d_S & \downarrow \exists! \varphi' \\ & & \Omega_{S/R} \end{array}$$

Wende nun die Universelle Eigenschaft von  $d_S$  auf  $d_S$  selbst an und erhalte  $\text{id}_{\Omega_{S/R}} = \varphi' \circ \varphi$ .

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{d_S} & \Omega_{S/R} \\ & \searrow d_S & \downarrow \exists! \text{id}_{\Omega_{S/R}} = \varphi' \circ \varphi \\ & & \Omega_{S/R} \end{array}$$

Analog erhalte auch  $\text{id}_{\Omega'_{S/R}} = \varphi \circ \varphi'$ . Damit existiert genau ein Isomorphismus  $\varphi' \circ \varphi : \Omega_{S/R} \rightarrow \Omega'_{S/R}$  mit  $d'_S = d_S \circ (\varphi' \circ \varphi)$ .  $\square$

### Differenzial ist Ableitung [Eigene Überlegung]

**Proposition 5.** Sei  $R$  ein Körper, somit entspricht die universellen Ableitung des Polynomrings  $R[x]$  der analytischen Ableitung von Polynomfunktionen:

$$d_{R[x]} : R[x] \longrightarrow \Omega_{R[x]/k}, P(x) \longmapsto P'(x)d_{R[x]}(x)$$

*Beweis.* Da  $d_{R[x]}$   $R$ -linear ist, genügt es die Behauptung für Monome  $P(x) \in k[x]$  zu zeigen, führe dazu eine Induktion über den Grad  $n$  von  $P(x) = ax^n$ :

$$\text{IA: } d_{R[x]}(ax) = ad_{R[x]}(x) + xd_{R[x]}(a) = ad_{R[x]}(x)$$

$$\text{IV: Für } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } d_S(ax^n) = nax^{n-1}d_S(x)$$

$$\begin{aligned} \text{IS: } d_S(ax^{n+1}) &= ax^n d_{R[x]}(x) + x d_{R[x]}(ax^n) = ax^n d_{R[x]}(x) + x \cdot (nax^{n-1}d_{R[x]}(x)) \\ &= (n+1)ax^n d_{R[x]}(x) \end{aligned}$$

□

### Propositon 11 delta

**Lemma 6.** [Lemma 16.11 David Eisenbud 1994]

Seien  $S, S'$  zwei  $R$ -Algebren. Sei weiter  $f : S \longrightarrow S'$  ein  $R$ -Algebrenhomomorphismus und  $\delta : S \longrightarrow S'$  ein Homomorphismus abelscher Gruppen mit  $\delta(S)^2 = 0$ . Dann gilt:

$$f + \delta \text{ ist ein } R\text{-Algebrenhomomorphismus}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\delta \text{ ist eine } R\text{-linear und } \forall s_1, s_2 \in S : \delta(s_1 \cdot s_2) = f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1).$$

*Beweis.*

„ $\Rightarrow$ “: Da  $f$  und  $f + \delta$   $R$ -linear sind, ist auch  $\delta = (f + \delta) - f$   $R$ -linear.

Seien nun  $s_1, s_2 \in S$  beliebig, somit gilt:

$$\begin{aligned} (f + \delta)(s_1 \cdot s_2) &= (f + \delta)(s_1) \cdot (f + \delta)(s_2) \\ \Rightarrow f(s_1 \cdot s_2) + \delta(s_1 \cdot s_2) &= f(s_1)f(s_2) + f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1) + \delta(s_1)\delta(s_2) \\ \Rightarrow \delta(s_1 \cdot s_2) &= f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1) + \delta(s_1)\delta(s_2) \text{ mit } \delta(s_1)\delta(s_2) \in \delta(S)^2 = 0 \\ \Rightarrow \delta(s_1 \cdot s_2) &= f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1) + \delta(s_1)\delta(s_2) \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “: Da  $f$  und  $\delta$  beide  $R$ -lineare Homomorphismen abelscher Gruppen sind, trifft die auch für  $f + \delta$  zu.

Wähle nun also  $s_1, s_2 \in S$  beliebig, somit gilt:

$$\begin{aligned} &(f + \delta)(s_1) \cdot (f + \delta)(s_2) \\ &= f(s_1)f(s_2) + f(s_1)\delta(s_2) + f(s_2)\delta(s_1) + \delta(s_1)\delta(s_2) \\ &= f(s_1 \cdot s_2) + \delta(s_1 \cdot s_2) \\ &= (f + \delta)(s_1 \cdot s_2) \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass  $f + \delta$  ein  $R$ -Algebrenhomomorphismus ist.

□

### Konstruktion Kaehler-Differential

**Theorem 7.** (Konstruktion des Kähler-Differentials [Theorem 16.21 David Eisenbud 1994])

Sei  $S$  ein  $R$ -Algebra. Definiere eine  $S$ -Modulstruktur auf  $S \otimes_R S$  durch:

$$S \oplus (S \otimes_R S) \longrightarrow S \otimes_R S, (s, s_1 \otimes s_2) \longmapsto ss_1 \otimes s_2$$

Betrachte  $\mu : S \otimes_R S \longrightarrow S, s_1 \otimes s_2 \longmapsto s_1 \cdot s_2$  mit  $I := \ker(\mu)$ .

Dann ist durch  $e : S \longrightarrow I/I^2, s \longmapsto [s \otimes 1 - 1 \otimes s]$  die universelle  $R$ -lineare Ableitung auf  $S$  definiert.

*Beweis.* Zeige zunächst, dass  $e$  eine  $R$ -lineare Ableitung ist. Betrachte dazu:

$$f_1 : S \longrightarrow S \otimes_R S, s \longmapsto s \otimes 1, f_2 : S \longrightarrow S \otimes_R S, s \longmapsto 1 \otimes s$$

Damit ist die Wirkung von  $S$  auf  $S \otimes_R S$  durch

$$S \oplus (S \otimes_R S) \longrightarrow S \otimes_R S, (s, s_1 \otimes s_2) \longmapsto f_1(s)(s_1 \otimes s_2) \text{ gegeben.}$$

Setze nun in der Notation von lemma 6  $f = f_1$  und  $\delta = e$ .

Damit ist  $f + \delta = f_1 + \delta = f_2$  ein  $R$ -Algebrenhomomorphismus und es folgt aus lemma 6 und unserer Definition der Wirkung von  $S$  auf  $S \otimes_R S$ , dass  $e$  eine  $R$ -lineare Ableitung ist. Durch die Universelle Eigenschaft von  $d_S$  existiert also genau ein  $R$ -Algebrenhomomorphismus  $e' : \Omega_{S/R} \longrightarrow I/I^2$  mit  $e = d_S \circ e'$ .

Betrachte nun folgende Umkehrabbildung  $\phi$  zu  $e'$ :

$$\phi : I/I^2 \longrightarrow \Omega_{S/R}, [s_1 \otimes s_2] \longmapsto s_1 d_S(s_2)$$

Um zu prüfen, dass  $\phi$  die Umkehrabbildung von  $e$  ist, wähle  $s, s_1, s_2 \in S$  beliebig, somit gilt:

$$\begin{aligned} (\phi \circ e')(d_S(s)) &= (\phi \circ e)(s) = \phi([s \otimes 1 - 1 \otimes s]) = s d_S(1) + 1 d_S(s) = d_S(s) \\ (e' \circ \phi)([s_1 \otimes s_2]) &= e'(s_1 d_{s_2}) = s_1 e(s_2) = [s_1 1 \otimes s_2 - s_1 s_2 \otimes 1] = [s_1 \otimes s_2 - s_1 s_2 \otimes 1] = [s_1 \otimes s_2] \end{aligned}$$

□

### Differenzial des Produktes von Algebren [Proposition 16.10 David Eisenbud 1994]

**Proposition 8.** Seien  $S_1, \dots, S_n$   $R$ -Algebren. Sei dazu  $S := \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} S_i$  deren direktes Produkt. Dann gilt:

$$\Omega_{S/R} = \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} \Omega_{S_i/R}$$

*Beweis.* Sei für  $i \in \{1, \dots, n\}$  jeweils  $e_i \in S$  die Einbettung es Einselement's von  $S_i$  in  $S$ , somit ist  $p_i : e_i S \rightarrow S_i$  ein Isomorphismus.

Nutze weiter, dass  $e_i$  jeweils ein idempotentes Element von ( $e_i^2 = e_i$ ) von  $S$  ist:

$$\begin{aligned} & \text{Nach lemma 2 gilt } d_S(e_i) = 0 \\ \Rightarrow \forall s \in S : d_S(e_i s) &= d_S(e_i^2 s) = e_i d_S(e_i s) + e_i s d_S(e_i) = e_i d_S(e_i s) \end{aligned}$$

Mit diesem Wissen können wir einen Isomorphismus  $\Phi : \Omega_{S/R} \rightarrow \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} \Omega_{S_i/R}$  definieren:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{S/R} & & d_S(s) = \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} d_S(e_i s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} e_i d_S(e_i s) & & (e_1 d_S(e_1 s), \dots, e_n d_S(e_n s)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} \Omega_{S_i/R} & & ((d_{S_1} \circ p_1)(s), \dots, (d_{S_n} \circ p_n)(s)) \end{array}$$

Da der Differenzialraum  $\Omega_{S/R}$  bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig ist (lemma 4), definiere diesen ab jetzt als  $\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} \Omega_{S_i/R}$ .  $\square$

## Relativ Cotangent Sequenz

**Satz 9. (Relativ Cotangent Sequenz)** [vgl. Proposition 16.2 David Eisenbud 1994]

Seien  $\alpha : R \rightarrow S$  und  $\beta : S \rightarrow T$  zwei Ringhomomorphismen. Dann existiert folgende exakte Sequenz:

$$\begin{aligned} T \otimes_S \Omega_{S/R} &\xrightarrow{D_\beta} \Omega_{T/R} \xrightarrow{d_{T_R}(t) \mapsto d_{T_S}(t)} \Omega_{T/S} \longrightarrow 0 \\ \text{mit: } D_\beta : T \otimes_S \Omega_{S/R} &\longrightarrow \Omega_{T/R}, t \otimes d_S(s) \mapsto t(d_{T_R} \circ \beta)(s) \end{aligned}$$

Im Besonderen gilt für die Differenzialräume von  $T$  über  $R$  und  $S$ :

$$\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R} / T \langle (d_{T_R} \circ \beta)(S) \rangle$$

*Beweis.* Durch  $st := \beta(S) \cdot t$  und  $rt := (\beta \circ \alpha)(r) \cdot t$  können wir  $T$  als  $S$ - bzw.  $R$ -Algebra betrachten.

Zeige zunächst, dass  $g : \Omega_{T/R} \rightarrow \Omega_{T/S}, d_{T_R}(t) \mapsto d_{T_S}(t)$  surjektiv ist:

$d_{T_S}$  ist  $R$ -Linear, da  $R$  durch  $(\beta \circ \alpha)$  auf  $T$  wirkt, es lässt sich also die universelle Eigenschaft von  $d_{T_R}$  auf  $d_{T_S}$  anwenden:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{d_{T_R}} & \Omega_{T/R} \\ & \searrow d_{T_S} & \downarrow \exists! g \\ & & \Omega_{T/S} \end{array}$$

Wir können also alle Elemente  $d_{T_S}(s) \in \Omega_{T/S}$  als  $g(d_{T_R}(s))$  darstellen. Dies zeigt, dass  $g : \Omega_{T/R} \rightarrow \Omega_{T/S}$ ,  $d_{T_R}(t) \mapsto d_{T_S}(t)$  surjektiv ist.

Zeige nun, dass  $\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R}/T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle$  gilt:

Definiere zunächst folgende  $S$ -lineare Ableitung:

$$e : T \rightarrow \Omega_{T/R}/T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle, t \mapsto [d_{T_R}(t)]_{T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle}$$

Wir sehen, dass  $e$  auch  $S$ -linear ist:

$$\begin{aligned} \text{Seien dazu } s \in S \text{ und } t \in T \text{ beliebig, somit gilt:} \\ e(st) &= [d_{T_R}(st)]_{T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle} \\ &= [\beta(s)d_{T_R}(t)]_{T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle} + [td_T(\beta(s))]_{T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle} \\ &= [\beta(s)d_T(t)]_{T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle} + 0 = se(t) \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass wir die universelle Eigenschaft von  $d_{T_S}$  anwenden können:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{d_{T_S}} & \Omega_{T/S} \\ & \searrow e & \downarrow \exists! e' \\ & & \Omega_{T/R}/T\Omega_{S/R} \end{array}$$

Dadurch erhalten wir  $e' : \Omega_{T/S} \rightarrow \Omega_{T/R}/T\Omega_{S/R}$ .

Für die Umkehrfunktion  $\phi$  nutze  $g : \Omega_{T/R} \rightarrow \Omega_{T/S}$ ,  $d_{T_R}(t) \mapsto d_{T_S}(t)$  vom Beginn des Beweises:

Für alle  $s \in S$  gilt  $d_{T_S}(s) = 0$ .

Somit gilt  $T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle \subseteq \ker(g)$ .

Also ist die Umkehrfunktion  $\phi$  von  $e'$  wohldefiniert:

$$\phi : \Omega_{T/R}/T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle \rightarrow \Omega_{T/S}, [d_{T_R}(t)]_{T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle} \mapsto d_{T_S}(t).$$

Damit gilt  $\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R}/T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle$ .

Auf unsere Sequenz bezogen bedeutet dies:

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } \operatorname{im}(\Omega_{T/R} \rightarrow \Omega_{T/S}) &\simeq \Omega_{T/R}/\operatorname{im}(D_\beta). \\ \text{Somit gilt auch } \operatorname{im}(D_\beta) &= \ker(\Omega_{T/R} \rightarrow \Omega_{T/S}). \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die **Relative Cotangent Sequenz** exakt ist.

□

**Konormale Sequenz** [vgl. Proposition 16.3 David Eisenbud 1994]

**Satz 10.** Sei  $\pi : S \longrightarrow T$  ein  $R$ -Algebrenepimorphismus mit  $\text{Kern}(\pi) := I$ . Dann ist folgende Sequenz rechtsexakt:

$$\begin{aligned} I/I^2 &\xrightarrow{1 \otimes d_S} T \otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0 \\ \text{mit: } 1 \otimes d_S : I/I^2 &\longrightarrow T \otimes_S \Omega_{S/R}, [s] \longmapsto 1 \otimes d_S(s) \\ D\pi : T \otimes_S \Omega_{S/R} &\longrightarrow \Omega_{T/R}, t \otimes d_S(s) \longmapsto t \cdot (d_S \circ \pi)(s) \end{aligned}$$

*Beweis.*

Zeigen zunächst, dass  $1 \otimes d_S$  wohldefiniert ist. Seien dazu  $s, s' \in I$  beliebig, somit gilt:

$$(1 \otimes d_S)(s \cdot s') = 1 \otimes s d_S(s') + 1 \otimes s' d_S(s) = \pi(s) \otimes d_S(s') + \pi(s') \otimes d_S(s) = 0$$

$D\pi$  ist surjektiv, da  $\Omega_{S/R}$  und  $\Omega_{T/S}$  jeweils von  $d_S$  und  $d_T$  erzeugt werden und sich somit die Surjektivität von  $\pi$  auf  $D\pi$  vererbt:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{S/R} & \xrightarrow{D\pi} & \Omega_{T/R} \\ d_S \uparrow & & d_T \uparrow \\ S & \xrightarrow{\pi} & T \end{array}$$

Für  $\text{im}(1 \otimes d_S) \stackrel{!}{=} \text{kern}(D\pi)$  zeige  $(T \otimes_S \Omega_{S/R})/\text{Im}(f) \simeq \Omega_{T/R}$ :

$$(T \otimes_S \Omega_{S/R})/(T \otimes_S d_S(I)) = T \otimes_S (\Omega_{S/R}/d_S(I)) \simeq T \otimes_S d_S(S/I) \simeq T \otimes_S d_T(T)$$

□

# Kapitel 2

## Kolimes

### 2.1 Einführung in den Kolimes

**Definition des Kolimes** [vgl. Anhang A6 David Eisenbud 1994]

**Definition 1.** Sei  $\mathcal{A}$  eine Kategorie und  $C \in \mathcal{A}$  ein Objekt

- Ein Diagramm über  $\mathcal{A}$  ist eine Kategorie  $\mathcal{B}$  zusammen mit einem Funktor  $\mathcal{F} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ .
- Ein Morphismus  $\psi : \mathcal{F} \rightarrow C$  ist eine Menge von Funktionen  $\{\psi_B \in \text{Hom}(\mathcal{F}(B), C) | B \in \mathcal{B}\}$ , wobei für alle  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  und  $\varphi \in \text{Hom}(B_1, B_2)$  folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(B_1) & & \\ \downarrow \mathcal{F}(\varphi) & \searrow \psi_{B_1} & \\ & & C \\ \uparrow \psi_{B_2} & \nearrow & \\ \mathcal{F}(B_2) & & \end{array}$$

- Der Kolimes  $\varinjlim \mathcal{F}$  eines Diagramms  $\mathcal{F} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  ist ein Objekt  $A \in \mathcal{A}$  zusammen mit einem Morphismus  $\psi : \mathcal{F} \rightarrow A$  und folgender universellen Eigenschaft:

Für alle Morphismen  $\psi' : \mathcal{F} \rightarrow A'$  existiert genau eine Funktion  $\varphi \in \text{Hom}(A, A')$ , sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \psi' \swarrow & & \searrow \psi \\ A' & \xleftarrow{\exists! \varphi} & A \end{array}$$

**Eindeutigkeit des Kolimes** [vgl. A6 David Eisenbud 1994]



**Lemma 2.** Seien  $\mathcal{B}, \mathcal{A}$  zwei Kategorien und  $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$  ein Funktor, so gilt:  
Im Falle der Existenz sind  $\varinjlim \mathcal{F}$  und der dazugehörige Morphismus  $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$   
bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Seien  $A_1 \in \mathcal{A}, (\psi_1 : \mathcal{F} \longrightarrow A_1)$  und  $A_2 \in \mathcal{A}, (\psi_2 : \mathcal{F} \longrightarrow A_2)$  beide  
gleich  $\varinjlim \mathcal{F}$ .

Erhalte durch die universelle Eigenschaft des Kolimes die eindeutig bestimmten Funktionen  $\varphi_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$  und  $\varphi_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_2, A_1)$ , für welche die folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \psi_2 \swarrow & & \searrow \psi_1 \\ A_2 & \xleftarrow{\exists! \varphi_1} & A_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \psi_1 \swarrow & & \searrow \psi_2 \\ A_1 & \xleftarrow{\exists! \varphi_2} & A_2 \end{array}$$

Wende nun die Universelle Eigenschaft von  $\psi_1$  auf  $\psi_1$  selbst an und erhalte  
 $id_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1$ . Analog erhalte auch  $id_{A_2} = \varphi_1 \circ \varphi_2$ .

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \psi_1 \swarrow & & \searrow \psi_1 \\ A_1 & \xleftarrow{\exists! id_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1} & A_1 \end{array}$$

Somit existiert genau eine Isomorphie  $\varphi_1 : A_1 \longrightarrow A_2$ . □

Im folgenden beschäftigen wir uns mit dem Fall des  $\varinjlim \mathcal{F} : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$ , bei welchem  
 $\mathcal{B}$  eine Unterkategorie von  $\mathcal{A}$  ist. Zur Vereinfachung unterschlagen dabei die tri-  
viale Existenz des Funktors  $\varinjlim \mathcal{F} : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$ . Wir werden also im folgenden von  
dem Diagramm  $\mathcal{B}$  und dem entsprechenden Kolimes  $\varinjlim \mathcal{B}$ , sowie dem Morphis-  
mus  $\phi : \mathcal{B} \longrightarrow A$  sprechen.

**Vereinfachung des Kolimes** [Eigene Überlegung (Beweis fehlt noch)]

**Bemerkung 3.** Seien  $\mathcal{B} \not\subseteq \mathcal{A}$  zwei Kategorien und  $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$  ein Diagramm.  
Dann gilt im Falle der Existenz  $\varinjlim \mathcal{F} = \varinjlim \mathcal{F}(\mathcal{B})$

**DifferenzkokernUndKoproduktDef** [vgl. A6 David Eisenbud 1994]

**Definition 4.** Sei  $\mathcal{A}$  eine Kategorie.

- Das Koprodukt von  $\{B_i\} \subseteq \mathcal{A}$  wird durch  $\coprod_i \{B_i\} := \varinjlim \mathcal{B}$  definiert, wo-  
bei  $\mathcal{B} \{B_i\}$  als Objekte und die Identitätsabbildungen  $id_{B_i} : B_i \longrightarrow B_i$  als  
Morphismen enthält.
- Der Differenzkokern (oder auch Coequalizer) von  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$   
wird durch  $\varinjlim \mathcal{C}$  definiert, wobei  $\mathcal{C} \{C_1, C_2\}$  als Objekte und  $\{f, g\} :=$   
 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$  als Morphismen enthält.

**NeuDifferenzkokernDef** [vgl. Wikipedia aber eigener Beweis]

**Lemma 5.** Sei  $\mathcal{A}$  eine Kategorie mit  $C_1, C_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$ , so sind folgende Formulierungen äquivalent zur Definition des Differenzkokern's  $T := \varinjlim C$

1. Es existiert ein Morphismus  $\psi : C \longrightarrow T$ , mit der Eigenschaft, dass für alle Morphismen  $\psi' : C \longrightarrow T'$  genau ein  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, T')$  mit  $\varphi \circ \psi = \psi'$  existiert.
2. Es existiert ein  $q \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_2, T)$  mit  $q \circ f = q \circ g$  und der Eigenschaft, dass für alle Morphismen  $q' \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_2, Z)$  mit  $q' \circ f = q' \circ g$  genau ein  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, T')$  mit  $\varphi \circ q = q'$  existiert.

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{f, g} & C_2 & \xrightarrow{q} & T \\ & & \searrow q' & & \downarrow \exists! \varphi \\ & & & & T' \end{array}$$

*Beweis.* 1. ist offensichtlich eine Ausformulierung der Einführung des Kolimes aus ??, zeige also im folgenden noch die Äquivalenz von 1. und 2.

• 1  $\Rightarrow$  2:

Da  $\psi : C \longrightarrow T$  ein Morphismus ist, gilt für  $\{f, g\} = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$ :  
 $\psi_{C_1} = \psi_{C_2} \circ f = \psi_{C_2} \circ \psi_{C_1}$ , setze also  $q := \psi_{C_2}$ .

Sei nun  $q' \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_2, T)$  mit der Eigenschaft  $q' \circ f = q' \circ g$  gegeben:  
 Definiere den Morphismus  $\psi' : C \longrightarrow T$  als  $\{\psi_1 = q' \circ f, \psi_2 = q'\}$ ,  
 somit folgt direkt aus der Universellen Eigenschaft von  $\psi$ , dass genau ein  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_2, T)$  existiert, mit  $\varphi \circ q = q'$ .

• 2  $\Rightarrow$  1:

Definiere  $\psi : C \longrightarrow T$  als  $\{\psi_1 = q \circ f, \psi_2 = q\}$ . Durch die Eigenschaft von  $q$  gilt  $\psi_{C_1} = \psi_{C_2} \circ f = \psi_{C_2} \circ g$ .

Sei nun  $\psi' : C \longrightarrow \mathcal{A}$  ein beliebiger Morphismus.

Definiere  $d' := \psi'$ , somit existiert durch die Eigenschaft von  $d$  genau ein  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_2, T)$  mit  $\varphi \circ q = q'$ .

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \varphi \circ \psi_2 = \psi'_2 \\ \text{und } \varphi \circ \psi_1 &= \varphi \circ \psi_2 \circ f = \varphi \circ \psi'_2 \circ f = \varphi \circ \psi'_1 \end{aligned}$$

□

Wenn im weiteren Verlauf von dem Differenzkokern zweier Homomorphismen  $f, g : C_1 \longrightarrow C_2$  gesprochen wird, meinen wir damit den Homomorphismus  $q : C_2 \longrightarrow T$  aus lemma 5.

**Tensorprodukt des Differenzkokerns** *[Eigene Bemerkung]*

**Bemerkung 6.** Seien  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(S_1, S_2)$   $R$ -Algebra-Homomorphismen, so können wir für den Differenzkern  $q : S_2 \longrightarrow T$  für ein beliebiges  $S_1$ -Modul das Tensorprodukt  $T \otimes_{C_1} M$  definieren.

für  $s_1 \in S_1$  und  $t \otimes m \in T \otimes_{C_1} M$  gilt:

$$s_1 \cdot (t \otimes m) = ((q \circ f)(s_1)) \cdot t \otimes m = ((q \circ g)) \cdot (s_1) t \otimes m$$

**R-Algebra-Kolimiten** [vgl. Proposition A6.7 David Eisenbud 1994]

**Proposition 7.** in der Kategorie der  $R$ -Algebren existieren Koprodukte und Differenzkerne, wobei:

1. Das Koprodukt einer endlichen Familie von  $R$ -Algebren  $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$  entspricht deren Tensorprodukt  $\bigotimes_{i \in \Lambda} S_i$ .
2. Der Differenzkern zweier  $R$ -Algebra-Homomorphismen  $f, g : S_1 \longrightarrow S_2$  entspricht dem Homomorphismus  $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ ,  $y \mapsto [y]$ , wobei  $Q := \{f(x) - g(x) \mid x \in S_2\}$  das Bild der Differenz von  $f$  und  $g$  ist.

*Beweis.* Zu 1.:

Sei  $\mathcal{B}$  die Unterkategorie der  $R$ -Algebren, welche  $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$  zusammen mit den Identitätsabbildungen enthält. Wir wollen die universellen Eigenschaften des Tensorproduktes und des Kähler-Differenzials nutzen, um einen Isomorphismus zwischen  $\varinjlim \mathcal{B}$  und  $\bigotimes_{i \in \Lambda} B_i$  zu finden.

Es sind der Morphismus  $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \varinjlim \mathcal{B}$  und die bilineare Abbildung  $g : \bigoplus_i S_i \longrightarrow \bigotimes_i S_i$  gegeben.

Konstruiere den Morphismus  $\psi' : \mathcal{B} \longrightarrow \bigotimes_i S_i$  durch  $\psi'_i : S_i \longrightarrow \bigotimes_i S_i$ ,  $s_i \mapsto g(1, \dots, 1, s_i, 1, \dots, 1)$  für  $i \in \Lambda$  und die bilineare Abbildung  $f : \bigoplus_i S_i \longrightarrow \varinjlim \mathcal{B}$ ,  $s \mapsto \prod_i \psi_i(s_i)$ .

Somit liefern uns die universellen Eigenschaften folgende zwei  $R$ -Algebra-Homomorphismen:

$$\varphi : \varinjlim \mathcal{B} \longrightarrow \bigotimes_i S_i$$

$$\phi : \bigotimes_i S_i \longrightarrow \varinjlim \mathcal{B}.$$

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{B} & \\ \psi' \swarrow & & \searrow \psi \\ \bigotimes_i S_i & \xleftarrow{\exists! \varphi} & \varinjlim \mathcal{B} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \bigoplus_i S_i & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ \varinjlim \mathcal{B} & \xleftarrow{\exists! \phi} & \bigotimes_i S_i \end{array}$$

Die Eindeutigkeit der universellen Eigenschaften liefert uns, dass  $\varphi$  und  $\phi$  zueinander Inverse sind und somit haben wir unsere gesuchten Isomorphismen zwischen  $\varinjlim \mathcal{B}$  und  $\bigotimes_i S_i$  gefunden.

$$\begin{array}{ccc}
& \mathcal{B} & \\
\psi \swarrow & & \searrow \psi \\
\varinjlim \mathcal{B} & \xleftarrow{\exists! \text{id}_{\varinjlim \mathcal{B}} = \phi \circ \varphi} & \varinjlim \mathcal{F}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
& \bigoplus_i S_i & \\
g \swarrow & & \searrow g \\
\bigotimes_i S_i & \xleftarrow{\exists! \text{id}_{\bigotimes_i S_i} = \varphi \circ \phi} & \bigotimes_i S_i
\end{array}$$

Zu 2.:

Zeige, dass  $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$  die in lemma 5 eingeführten Eigenschaften des Differenzkern's besitzt.

$$q \circ f = q \circ g \text{ gilt, da } \ker(q) = Q = \{f(x) - g(x) \mid x \in C_2\}.$$

Sei nun eine Funktion  $q' \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(S_2, T')$  mit  $q' \circ f = q' \circ g$  gegeben.

Somit gilt  $q' \circ (f - g) = 0$ , wodurch  $Q$  ein Untermodul von  $Q' := \ker(q')$  ist.

Mit dem Isomorphiesatz für R-Algebren erhalten wir:

$$S_2/Q' \simeq (S_2/Q)/(Q'/Q).$$

Somit ist  $q' : S_2 \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q)$ ,  $y \longmapsto [y]'$  eine isomorphe Darstellung von  $q' : S_2 \longrightarrow T'$ .

$$\Rightarrow \exists! \varphi : S_2/Q \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q), [y] \longmapsto [y]' \text{ mit } (\varphi \circ q) = q'.$$

Also ist  $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$  der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Differenzkern von  $f$  und  $g$ . □

### Darstellung der Polynomialgebra als Tensorprodukt *[Eigene Überlegung]*

**Bemerkung 8.** Die Polynomialgebra  $R[x_1, \dots, x_d]$  über  $R$  lässt sich wie folgt als Tensorprodukt darstellen:

$$R[x_1, \dots, x_n] = \bigotimes_{i \in \{1, \dots, n\}} R[x_i]$$

Genauer gilt für zwei Polynomialgebren  $A = R[x_1, \dots, x_{n_A}]$ ,  $B = R[y_1, \dots, y_{n_B}]$  über  $R$ :

$$A \otimes_R B = R[x_1, \dots, x_{n_A}, y_1, \dots, y_{n_B}]$$

Skizziere den Beweis.

*Beweis.* Zeige, dass für  $g : A \oplus B \longrightarrow R[x_1, \dots, x_{n_A}, y_1, \dots, y_{n_B}]$ ,  $(a, b) \longmapsto a \cdot b$  die Universelle Eigenschaft des Tensorproduktes gilt:

$$\begin{array}{ccc}
A \oplus B & \xrightarrow{g} & R[x_1, \dots, x_{n_A}, y_1, \dots, y_{n_B}] \\
& \searrow f & \downarrow \exists! \varphi \\
& & M
\end{array}$$

Es ist leicht nachzurechnen, dass es sich bei  $\varphi$  um folgende Funktion handeln muss:

$$\varphi : R[x_1, \dots, x_{n_A}, y_1, \dots, y_{n_B}] \longrightarrow M, (x_i \cdot y_j) \longmapsto f(x_i, 1) \cdot f(1, y_j)$$

□

### R-Modul-Kolimiten [Proposition A6.2 David Eisenbud 1994]

**Proposition 9.** In Der Kategorie der  $R$ -Module existieren Koprodukte und Differenzkokerne, wobei:

1. das Koprodukt  $\lim_{\longrightarrow} \mathcal{B}$  von  $R$ -Modulen  $M_i \in (R - \text{Module})$  entspricht der direkten Summe  $\sum_i M_i$ .
2. der Differenzkern zweier Homomorphismen  $f, g : M_1 \longrightarrow M_2$  entspricht dem Kokern  $M_2 / \text{im}(f - g)$  der Differenzenabbildung.

*Beweis.* für 1. Sei  $\phi : \{M_i\} \longrightarrow \mathcal{B}$  ein beliebiger Morphismus. Zeige:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{B} & \\ \psi_i \swarrow & & \searrow \psi_i \\ M' & \xleftarrow{\exists! \varphi} & \bigoplus_i M_i \end{array}$$

Für ein beliebiges  $i$  existiert genau ein  $\varphi_i : M_i \oplus 0 \longrightarrow M'$ ,  $(0, \dots, 0, m_i, 0, \dots, 0) \longmapsto \psi'_i(m_i)$  mit  $\psi'_i = \psi_i \circ \varphi_i$   
 $\Rightarrow \exists! \varphi : \bigoplus_i M_i \longrightarrow M', (m_1, \dots, m_n) \longmapsto \sum_i \psi_i(m_i)$

2. ist Analog zu proposition 7

□

Die in proposition 9 gezeigten Darstellungen gelten mit kurzen Überlegungen auch für  $S$ -Module, wobei  $S$  eine  $R$ -Algebra ist.

### Lokalisierung von Algebren als Kolimes [vgl. Aufgabe A6.7 David Eisenbud 1994]

**Lemma 10.** Sei  $S$  eine  $R$ -Algebra und  $U \subseteq S$  multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$S[U^{-1}] = \lim_{\longrightarrow} \mathcal{B}$$

Wobei  $\mathcal{B}$  aus den Objekten  $\{S[t^{-1}] | t \in U\}$  und den Morphismen  $S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}], (\frac{s}{t^n})_t \longmapsto (\frac{st'^n}{(tt')^n})_{(tt')}, \forall t, t' \in U$  besteht.

*Beweis.* Sei  $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow A$  der Kolimes von  $\mathcal{B}$ . Zeige  $S[U^{-1}] \simeq A$ , definiere dazu:

$$\begin{aligned} \psi' : \mathcal{B} &\longrightarrow S[U^{-1}] \\ \psi'_{S[t^{-1}]} : S[t^{-1}] &\longrightarrow S[t^{-1}], \left(\frac{s}{t^n}\right)_t \longmapsto \left(\frac{s}{t^n}\right)_U \end{aligned}$$

$\psi'$  ist ein Morphismus, da für beliebige  $t, t' \in U$  und  $s \in S$  gilt:

$$\left(\frac{s}{t^n}\right)_U = \left(\frac{st'^n}{(tt')^n}\right)_U$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir den eindeutigen Homomorphismus  $\varphi : A \longrightarrow S[U^{-1}]$ .

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{B} & \\ \psi' \swarrow & & \searrow \psi \\ S[U^{-1}] & \xleftarrow{\exists! \varphi} & A \end{array}$$

Für  $\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow A$  benötigen wir kleinere Vorüberlegungen.

Zunächst können wir jedes Element  $\left(\frac{s}{u}\right)_U \in S[U^{-1}]$  als  $\psi_{S[t^{-1}]}(\left(\frac{s}{t}\right)_t)$  schreiben.

Weiter gilt für alle  $s_1, s_2 \in S$ ,  $t_1, t_2 \in U$ :

$$\begin{aligned} \text{Sei } \psi'_{S[t^{-1}]}(\left(\frac{s_1}{t_1}\right)_t) &= \psi'_{S[t^{-1}]}(\left(\frac{s_2}{t_2}\right)_t) \\ \Rightarrow \exists u \in U : (s_1 t_1 - s_2 t_2) \cdot u &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{s_1 u}{t_1 u}\right)_{tu} &= \left(\frac{s_2 u}{t_2 u}\right)_{tu} \\ \Rightarrow \psi_{S[t^{-1}]}(\left(\frac{s_1}{t_1}\right)_t) &= \psi_{S[t^{-1}]}(\left(\frac{s_2}{t_2}\right)_t) \end{aligned}$$

Mit diesem Wissen können wir den R-Algebra-Homomorphismus  $\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow A$  definieren:

$$\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow A, \psi'_{S[t^{-1}]}(\left(\frac{s}{t}\right)_t) \longmapsto \psi_{S[t^{-1}]}(\left(\frac{s}{t}\right)_t)$$

$\phi \circ \varphi = id_A$  ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{B} & \\ \psi \swarrow & & \searrow \psi \\ A & \xleftarrow{\exists! id_A = \phi \circ \varphi} & A \end{array}$$

Für  $\varphi \circ \phi \stackrel{!}{=} id_{S[U^{-1}]}$  wähle beliebige  $s \in S, t \in U$ , für diese gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi'(\left(\frac{s}{t}\right)_t)) = \varphi(\psi(\left(\frac{s}{t}\right)_t)) = \psi'(\left(\frac{s}{t}\right)_t)$$

Damit haben wir gezeigt, dass  $\varphi, \phi$  Isomorphismen sind und somit  $A \simeq S[U^{-1}]$  gilt.

Da der Kolimes bis auf Isomorphie eindeutig ist, definiere ab sofort  $S[U^{-1}]$  als den eindeutigen Kolimes von  $\mathcal{B}$ .  $\square$

**Lokalisierung von Moduln als Kolimes** [*Beweis von Proposition 16.9 David Eisenbud 1994*]

**Korrolar 11.** Sei  $M$  ein  $S$ -Modul, wobei  $S$  eine  $R$ -Algebra ist. Sei weiter  $U \subseteq S$  multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$M[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{C}$$

Wobei  $\mathcal{C}$  aus den Objekten  $\{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] | t \in U\}$  und folgenden Morphismen besteht:

$$\begin{aligned} S[U^{-1}] \otimes M[t^{-1}] &\longrightarrow S[U^{-1}] \otimes M[(tt')^{-1}], \\ \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{t^n}\right)_t &\longmapsto \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{t'^n m}{(tt')^n}\right)_t \end{aligned}$$

Auch wenn sich lemma 10 hier nicht direkt anwenden lässt, so können wir doch im Beweis gleich vorgehen.

*Beweis.* Schließe zunächst den trivialen Fall  $0 \in U$  aus.

Sei  $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow A$  der Colimes von  $\mathcal{C}$ . Zeige  $S[U^{-1}] \simeq A$ , definiere dazu folgenden Morphismus :

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{C} &\longrightarrow M[U^{-1}] \\ \psi_t : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] &\longrightarrow M[U^{-1}], \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{t^n}\right)_t \longmapsto \left(\frac{sm}{ut^n}\right)_U \end{aligned}$$

Die Wohldefiniertheit von  $\psi'_t$  für ein beliebiges  $t \in U$  folgt direkt aus der Universellen Eigenschaft des Tensorprodukt's. Denn für die bilineare Abbildung  $f : S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \longrightarrow M[t^{-1}], \left(\left(\frac{s}{u}\right)_U, \left(\frac{m}{t^n}\right)_t\right) \longmapsto \left(\frac{sm}{ut^n}\right)_U$  gilt:

$$\begin{array}{ccc} S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] & \xrightarrow{g} & S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \psi'_t \\ & & M[U^{-1}] \end{array}$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir nun den eindeutigen Homomorphismus  $\varphi : A \longrightarrow M[U^{-1}]$ .

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C} & \\ \psi' \swarrow & & \searrow \psi \\ M[U^{-1}] & \xleftarrow{\exists! \varphi} & A \end{array}$$

Für  $\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow A$  benötigen wir kleinere Vorüberlegungen.

Zunächst können wir jedes Element  $\left(\frac{m}{u}\right)_U \in M[U^{-1}]$  als  $\psi\left(\left(\frac{1}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{1}\right)_t\right)$  schreiben. Wobei mit  $\psi$  gemeint ist, dass wir ein beliebiges  $t \in U$  wählen und dann  $\psi_t$

betrachten. Diese Verallgemeinerung ist möglich, da für beliebige  $t_1, t_2, u \in U$  und  $m \in M$  gilt:

$$\psi_{t_1}((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_{t_1}) = (\frac{m}{u})_U = \psi_{t_2}((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_{t_2})$$

Definiere nun mit diesem Wissen folgenden Homomorphismus:

$$\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow A, \psi((\frac{1}{u})_U \otimes t) \longmapsto \psi'((\frac{1}{u})_U \otimes t)$$

$\phi \circ \varphi = id_A$  ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes.

Für  $\varphi \circ \phi \stackrel{!}{=} id_{M[U^{-1}]}$  wähle  $(\frac{m}{u})_U \in M[U^{-1}]$  beliebig, für dieses gilt:

$$\begin{aligned} & (\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)) \\ &= \varphi(\psi((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)) \\ &= \psi'((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t) \end{aligned}$$

Damit haben wir  $A \simeq M[U^{-1}]$  gezeigt, definiere also ab sofort  $M[U^{-1}]$  als den eindeutigen Kolimes von  $\mathcal{C}$ .  $\square$

## 2.2 Kähler-Differenzial von Kolimiten

**Differenzial des Kolimes von R-Algebren** [vgl. Korollar 16.7 David Eisenbud 1994]

**Proposition 12.**

1. Sei  $T = \otimes_{i \in \Lambda} S_i$  das Koprodukt der  $R$ -Algebren  $S_i$ .  
Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} \simeq \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$$

2. Seien  $S_1, S_2$   $R$ -Algebren und  $\varphi, \varphi' : S_1 \longrightarrow S_2$   $R$ -Algebra-Homomorphismen. Sei weiter  $q : S_2 \longrightarrow T$  der Differenzkokern von  $\varphi, \varphi'$ . Dann ist folgende Sequenz rechtsexakt:

$$T \otimes_{S_1} \Omega_{S_1/R} \xrightarrow{f} T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R} \xrightarrow{g} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{mit: } f : T \otimes \Omega_{S_1/R} &\longrightarrow T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R}, t \otimes d_{S_1}(x_1) \longmapsto t \otimes d_{S_2}(\varphi(x_1) - \varphi(x_2)) \\ g : T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R} &\longrightarrow \Omega_{T/R}, t \otimes d_{S_2}(x_2) \longmapsto (d_T \circ q)(x_2) \end{aligned}$$

*Beweis.*

Für **1.** finde durch die Universelle Eigenschaft des Kähler-Differenzials Isomor-



phismen  $\Omega_{T/R} \longleftrightarrow \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$ .

Definiere das Differenzial  $e : T \longrightarrow \bigoplus_{i \in \Lambda} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}$ ,  $(s_i \otimes \dots) \longmapsto (1 \otimes d_{S_1}, \dots)$  und erhalte dadurch

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{d_T} & \Omega_{T/R} \\ & \searrow e & \downarrow \exists! \varphi \\ & & \bigoplus_{i \in \Lambda} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \end{array} \quad \varphi : \Omega_{T/R} \longrightarrow \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}).$$

Definiere nun das Differenzial  $k : S_i \hookrightarrow T \longrightarrow \Omega_{T/R}$  und erhalte dadurch:

$$\begin{array}{ccc} S_i & \xrightarrow{d_{S_i}} & \Omega_{S_i/R} \xrightarrow{a} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \\ & \searrow k & \downarrow \exists! k' \swarrow \phi_i \\ & & \Omega_{T/R} \end{array} \quad \phi_i : \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \longrightarrow \Omega_{T/R}$$

$$\phi : \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \longrightarrow \Omega_{T/R}, \quad (\dots, t_i \otimes d_{S_i}(s_i), \dots) \longmapsto \prod_{i \in \Lambda} t_i \cdot \phi_i(d_{S_i}(s_i))$$

Damit haben wir zwei zueinander inverse Funktionen  $\varphi, \phi$  gefunden.

$$\Rightarrow \Omega_{T/R} \simeq \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$$

Für 2. Wende Satz 10 auf den Differenzialkokern  $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$  (vgl. Proposition 7) an und erhalte dadurch eine exakte Sequenz, welche ähnlich zu der gesuchten ist:

$$Q/Q^2 \xrightarrow{f'} T \otimes_{S_2/R} \Omega_{S_2/R} \xrightarrow{g} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

mit  $f' : Q/Q^2 \longrightarrow T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R}$ ,  $[s_2]_{Q^2} \longmapsto 1 \otimes d_{S_2}(s_2)$ .

Somit gilt  $\text{im}(f) = T \otimes_{S_2} d_{S_2}(Q) = \text{im}(f')$ .

$\Rightarrow$  die gesuchte Sequenz ist exakt.  $\square$

s

**Differenzial von Polynomalgebren 1** [vgl. Proposition 16.1 David Eisenbud 1994]

**Korollar 13.** Sei  $S = R[x_1, \dots, x_n]$  eine Polynomalgebra über  $R$ . Dann gilt:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} S \langle d_S(x_i) \rangle$$

Wobei  $S \langle d_S(x_i) \rangle$  das von  $d_S(x_i)$  erzeugte Modul über  $S$  ist.

*Beweis.* Wie in Bemerkung 8 gezeigt, können wir  $S$  als  $\bigotimes_{i \in \{1, \dots, n\}} R[x_i]$  schreiben. In Proposition 12 haben wir gezeigt, wie das Differenzial eines solchen Tensorproduktes aussieht:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} (S \otimes_{R[x_i]} \Omega_{R[x_i]/R})$$

Da  $R[x_i]$  die aus dem Element  $x_i$  erzeugte Algebra über  $R$  ist, folgt [vgl. *BE-MERKUNG ZU ENDLICH ERZEUGTEN ALGEBREN*]:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} (S \otimes_{R[x_i]} R[x_i] \langle d_{S[x_i]}(x_i) \rangle) \simeq \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} S \langle d_S(x_i) \rangle$$

Für die letzte Isomorphie nutze, dass wegen  $R[x_i] \subseteq S$  zum Einen  $d_{R[x_i]}$  als Einschränkung von  $d_S$  gesehen werden kann und zum Anderen  $S \otimes_{R[x_i]} R[x_i] \simeq S$  gilt.  $\square$

## Differenzial von Polynomialgebren 2 [vgl. Korollar 16.6 David Eisenbud 1994]

**Korollar 14.** Sei  $S$  eine  $R$ -Algebra und  $T := S[x_1, \dots, x_n]$  eine Polynomialgebra über  $S$ . Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$

*Beweis.* Betrachte  $T$  als Tensorprodukt über  $R$ -Algebren und wende anschließend proposition 12 an:

$$\begin{aligned} T &\simeq S \otimes_R R[x_1, \dots, x_n] \\ \Rightarrow \Omega_{T/R} &\simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus (T \otimes_{R[x_1, \dots, x_n]} \Omega_{R[x_1, \dots, x_n]/R}) \end{aligned}$$

Zuletzt wende den soeben gezeigten korollar 13 an und nutze schließlich  $R[x_1, \dots, x_n] \subseteq T$  um das Tensorprodukt zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} &T \otimes_{R[x_1, \dots, x_n]} \Omega_{R[x_1, \dots, x_n]/R} \\ &\simeq T \otimes_{R[x_1, \dots, x_n]} \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} R[x_1, \dots, x_n] \langle d_{R[x_i]}(x_i) \rangle \\ &\simeq \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_R(x_i) \rangle \end{aligned}$$

$\square$

## Differenzial der Lokalisierung [vgl. Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]

**Theorem 15.** Sei  $S$  eine  $R$ -Algebra und  $U \subseteq S$  multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Omega_{S[U^{-1}]/R} &\simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}, \text{ Wobei:} \\ d_{S[U^{-1}]}((\frac{1}{u})_U) &\longmapsto -(\frac{1}{u^2})_U \otimes d_S(u) \end{aligned}$$

*Beweis.* Wir wollen THEOREM16.8 auf  $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$  aus lemma 10 anwenden.

Zeige also zunächst den einfacheren Fall  $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$  für ein beliebiges  $t \in U$ :

Nutze hierfür die Isomorphe Darstellung  $S[t^{-1}] \simeq S[x]/(tx - 1)$ , sowie die Isomorphie  $\Omega_{S[x]/R} \simeq S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x)$ . aus korrolar 14  
Daraus erhalten wir folgende Isomorphismen:

$$\begin{aligned}\alpha : S[t^{-1}] &\longrightarrow S[x]/(tx - 1) \\ \beta : S[x]/(tx - 1) &\longrightarrow S[t^{-1}] \\ \gamma : \Omega_{S[x]/R} &\longrightarrow S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x)\end{aligned}$$

Nutze diese nun, um  $\Omega_{S[t^{-1}]/R}$  isomorph zu  $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$  umzuformen:

$$\begin{array}{ccc}\Omega_{S[t^{-1}]/R} & & d_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t) \\ \downarrow D\alpha & & \downarrow D\alpha \\ \Omega_{S[x]/R}/d_{S[x]}(tx - 1) & & [d_{S[x]}(sx)] = [xd_{S[x]}(s) + sd_{S[x]}(x)] \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \\ (S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x))/((tx - 1)d_{S[x]}(tx - 1)) & & [x \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \\ \downarrow \beta & & \downarrow \beta \\ (S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus S[t^{-1}]d_{S[x]}(x)/d_{S[x]}(tx - 1) =: M & & [(\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} & & ((\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s)) - ((\frac{s}{t^2})_t \otimes d_S(t))\end{array}$$

Die ersten drei Schritte ergeben sich aus den oben angegebenen Isomorphismen. Für den letzten Schritt definiere:

$$f : M \longrightarrow S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}, [(\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \longmapsto ((\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s)) - ((\frac{s}{t^2})_t \otimes d_S(t))$$

Damit  $f$  ein Isomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass  $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$  ein eindeutiges Repräsentantensystem von  $M$  ist.

Sei dazu  $[m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]$  ein beliebiger Erzeuger von  $M$ . Somit gilt:

$$\begin{aligned}d_{S[x]}(tx - 1) &= td_{S[x]}(x) + \beta(x)d_{S[x]}(s) \\ \Rightarrow [0, d_{S[x]}(x)] &= [-(\frac{1}{t^2})_t d_S(t), 0] \\ \Rightarrow [m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)] &= [m_1 - (\frac{s}{t^{n+2}})_t d_S(t), 0] = [f([m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]), 0]\end{aligned}$$

$f$  ist also wie vermutet ein Isomorphismus und aus obigen Umformungen folgt  $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} = \Omega_{S/R}[t^{-1}]$ .

Definiere für beliebige  $t \in U$  folgenden Isomorphismus:

$$f \circ \beta \circ \gamma \circ D\alpha =: \delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}], d_{S[t^{-1}]}((\frac{1}{t})_t) \longmapsto -(\frac{d_S(t)}{t^2})_t$$

Zeige nun den Allgemeinen Fall  $\Omega_{S[U^{-1}]/R} \simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ :

Wähle  $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$  wie in lemma 10, sodass  $\varinjlim \mathcal{B} = S[U^{-1}]$  gilt.

Mit THEOREM16.8 folgt somit:

$$\begin{aligned} \Omega_{S[U^{-1}]/R} &= \varinjlim \mathcal{F} \text{ mit:} \\ \mathcal{F} : \mathcal{B} &\longrightarrow (S[U^{-1}] - \text{Module}), S[t^{-1}] \longmapsto S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]/R} \\ &\quad (\varphi : S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}]) \\ &\longmapsto (1 \otimes D\varphi : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R})) \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Morphismen in  $\mathcal{F}(\mathcal{B})$  definiere folgenden Isomorphismus:

$$\begin{aligned} g : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) &\longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R} \\ \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \left(\left(\frac{s'}{t}\right)_t \otimes d_{S[tt'^{-1}]}(x)\right) &\longmapsto \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \varphi\left(\left(\frac{s'}{t}\right)_t\right) d_{S[tt'^{-1}]}(x) \end{aligned}$$

Als letzten Schritt wollen wir ?? anwenden. Nutze dazu  $\delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}]$  um den zu  $\mathcal{F}$  isomorphen Funktor  $\mathcal{F}' := \delta \circ \mathcal{F}$  zu erhalten. Um ein genaueres Bild von  $\mathcal{F}'$  zu erlangen, betrachte folgendes Kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} S[t^{-1}] & \xrightarrow{\varphi} & S[tt'^{-1}] \\ \downarrow \mathcal{F} & & \downarrow \mathcal{F} \\ S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[t^{-1}]/R} & \xrightarrow{1 \otimes D\varphi} & S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) \\ \downarrow \delta_t & & \downarrow g \\ S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] & \xrightarrow{1 \otimes \varphi} & S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R} \\ & & \downarrow \delta_{tt'} \\ & & S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S/R}[tt'^{-1}] \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc} \left(\frac{s}{t}\right)_t & \xrightarrow{\varphi} & \left(\frac{st'}{tt'}\right)_{tt'} \\ \downarrow d_{S[t^{-1}]} & & \downarrow d_{S[tt'^{-1}]} \\ 1 \otimes \left(\left(\frac{1}{t}\right)_t d_{S[t^{-1}]} \left(\left(\frac{s}{1}\right)_t\right) + \left(\frac{s}{1}\right)_t d_{S[t^{-1}]} \left(\left(\frac{1}{t}\right)_t\right)\right) & \xrightarrow{g \circ (1 \otimes D\varphi)} & 1 \otimes \left(\left(\frac{1}{tt'}\right)_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]} \left(\left(\frac{st'}{1}\right)_{tt'}\right) + \left(\frac{st'}{1}\right)_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]} \left(\left(\frac{1}{tt'}\right)_{tt'}\right)\right) \\ \downarrow \delta_t & & \downarrow \delta_{tt'} \\ 1 \otimes \left(\left(\frac{d_S(s)}{t}\right)_t - \left(\frac{sd_S(t)}{t^2}\right)_t\right) & \xrightarrow{1 \otimes \varphi} & 1 \otimes \left(\left(\frac{t'd_S(s)}{tt'}\right)_{tt'} - \left(\frac{st'd_S(t)}{(tt')^2}\right)_{tt'}\right) (*) \end{array}$$

Dass das Diagramm in dieser Form kommutiert, ergibt sich in fast allen Fällen direkt aus dem Einsetzen in die entsprechenden Homomorphismen. Der einzige

Fall, welcher nicht direkt klar ist, ist (\*). Rechne diesen also nochmal nach:

$$\begin{aligned}
& \delta_{tt'}(1 \otimes ((\frac{1}{tt'})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{st'}{1})_{tt'}) + (\frac{st'}{1})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{1}{tt'})_{tt'}))) \\
&= 1 \otimes ((\frac{d_S(st')}{tt'})_{tt'} - (\frac{t' sd_S(tt')}{(tt')^2})_{tt'}) \\
&= 1 \otimes ((\frac{t' d_S(s')}{tt'})_{tt'} + (\frac{sd_S(t')}{tt'})_{tt'} - (\frac{tt' d_S(t')}{(tt')^2})_{tt'} - (\frac{t'^2 sd_S(t)}{(tt')^2})_{tt'}) \\
&= 1 \otimes ((\frac{t' d_S(s)}{tt'})_{tt'} - (\frac{t'^2 sd_S(t)}{(tt')^2})_{tt'}) \\
&= (1 \otimes \varphi)(1 \otimes ((\frac{d_S(s)}{t})_t - (\frac{sd_S(t)}{t^2})_t))
\end{aligned}$$

Damit ist  $\mathcal{F}'$  zu  $\mathcal{F}$  isomorph und für  $\mathcal{C} := \mathcal{F}'(\mathcal{B})$  gilt  $\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \varinjlim \mathcal{F}' = \varinjlim \mathcal{C}$  [vgl. bemerkung 3]. Wobei die Form von  $\mathcal{C}$  genau dem Fall aus ?? entspricht:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] | t \in U\} \text{ mit den Morphismen} \\
1 \otimes \varphi : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] &\longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S/R}[tt'^{-1}] \\
(\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{d_S(x)}{t^n})_t &\longmapsto (\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{t'^n d_S(x)}{(tt')^n})_{tt'}
\end{aligned}$$

Somit folgt  $\varinjlim \mathcal{C} = \Omega_{S/R}[U^{-1}]$  und wir haben  $\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \Omega_{S/R}[U^{-1}]$  gezeigt.  $\square$

## Kapitel 3

# Körpererweiterungen

### 3.1 Einführung in transzendente Körpererweiterungen

Sei im folgenden  $k$  ein Körper.

Wir haben in BEISPIEL gesehen, dass das Kähler-Differenzial algebraischer Körpererweiterungen über  $k$  der Null-Vektorraum über  $k$  ist. Dies liegt daran, dass im Falle einer algebraischen Körpererweiterung  $k(\alpha)/k$  ein irreduzibles Polynom  $f(x) \in k[x]$  existiert, mit  $f(\alpha) = 0$  und  $k[\alpha] \simeq k[x]/(f(x))$ .

Im Falle einer transzendenten Körpererweiterung  $k(\beta)$  existiert kein solches Polynom in  $k[x]$  und es gilt  $k(\beta) \simeq k(x)$ . In KORROLAR haben wir gesehen, dass in diesem Falle  $\Omega_{k(x)/k} \simeq ???$  gilt. Dies motiviert dazu Transzendente Körpererweiterungen und deren Differenzial näher zu untersuchen. Dazu wird hier elementares Wissen über algebraische Körpererweiterungen vorausgesetzt [eventuell nach zu lesen in Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009].

In diesem Kapitel führen wir Transzendenzbasen ein und untersuchen diese näher.

**Definition 1.** [vgl. Anhang A1 David Eisenbud 1994 sowie Kapitel 22 Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009]

Sei  $L/k$  eine Körpererweiterung. Dann definieren wir:

- Eine endliche Teilmengen  $\{l_1, \dots, l_n\} \subseteq L$  heißt algebraisch unabhängig über  $k$ , falls gilt:

$$\forall P(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n] : P(l_1, \dots, l_n) \neq 0$$

- Eine Teilmenge  $B \subseteq L$  heißt transzendent über  $k$ , falls jede ihrer endlichen Teilmengen  $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq B$  algebraisch unabhängig über  $k$  ist.
- Eine Teilmenge  $B \subseteq L$  ist eine Transzendenzbasis von  $L/k$ , falls sie transzendent über  $k$  und die Körpererweiterung  $L/k(B)$  algebraisch ist.

- Falls eine Transzendenzbasis von  $B$  von  $L/k$  existiert, sodass  $k(B) = L$  gilt, so ist  $L/k$  eine pur transzendente Körpererweiterung.

### pur transzendente Erweiterung

**Korrolar 2.** [Eigene Überlegung]

Sei  $L/k$  eine pur transzendente Körpererweiterung mit Transzendenzbasis  $B$ . Dann gilt:

$$L \simeq k(\{x_b\}_{b \in B})$$

Insbesondere ist  $\{x_b\}_{b \in B}$  eine Transzendenzbasis der Körpererweiterung der rationalen Funktionen  $k(\{x_b\}_{b \in B})$  über  $k$ .

*Beweis.* Betrachte folgenden Körpermorphismus und zeige, dass es sich dabei um einen Isomorphismus handelt:

$$\Phi : k(\{x_b\}_{b \in B}) \longrightarrow k(B), \quad \frac{P(x_{b_1}, \dots, x_{b_n})}{Q(x_{b_1}, \dots, x_{b_n})} \longmapsto \frac{P(b_1, \dots, b_n)}{Q(b_1, \dots, b_n)}$$

Da  $B$  als Transzendenzbasis insbesondere transzendent über  $k$  ist, ist jede endliche Teilmenge von algebraisch unabhängig über  $k$ . Dies bedeutet:

$$\begin{aligned} \forall \{b_1, \dots, b_n\} \in B \quad \forall P(x_{b_1}, \dots, x_{b_n}) \in k[x_{b_1}, \dots, x_{b_n}] : \\ P(x_{b_1}, \dots, x_{b_n}) \Rightarrow P(b_1, \dots, b_n) \neq 0 \end{aligned}$$

Folglich ist  $\Phi$  wohldefiniert und insbesondere injektiv.

Dass  $\Phi$  surjektiv ist, folgt direkt aus der Definition von  $L = k(B)$  als Quotientenkörper über  $k[x]$ .

Dass  $\{x_b\}_{b \in B}$  Transzendenzbasis von  $k(\{x_i\}_{i \in B})$  ist folgt direkt aus ???. Denn jede endliche Teilmenge  $\{x_{b_1}, \dots, x_{b_n}\} \subseteq \{x_b\}_{b \in B}$  ist transzendent, da  $k[x_1, \dots, x_n]$  und  $k[x_{b_1}, \dots, x_{b_n}]$  isomorph zueinander sind. Außerdem ist die triviale Körpererweiterung  $k(x_{b_1}, \dots, x_{b_n})/k(x_{b_1}, \dots, x_{b_n})$  algebraisch.  $\square$

### Transzendenzbasis ist maximale transzendente Menge

**Lemma 3.** [Lemma 22.1 Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009]

Sei  $L/k$  ein Körpererweiterung und  $B \subseteq L$  eine über  $k$  transzendente Teilmenge. Dann gilt:

$B$  ist genau dann eine Transzendenzbasis von  $L/k$ , wenn  $B$  bezüglich der Inklusion ein maximales Element der Menge aller über  $k$  transzenten Elemente aus  $L$  ist.

*Beweis.*

„ $\Rightarrow$ :“ Sei  $B$  eine Transzendenzbasis über  $k$ . Zeige, dass für ein beliebiges Element  $a \in L \setminus B$  die Menge  $B \cup \{a\} \subseteq L$  nicht transzendent über  $k$  ist:

Da die Körpererweiterung  $L/k(B)$  algebraisch ist, existiert

$$0 \neq P(x) \in k(B)[x] \text{ mit } P(a) = 0.$$

Aus der Definition von  $k(B)$  geht hervor, dass  $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq B$  existiert, mit  $P(x) \in k(\{b_1, \dots, b_n\})[x]$ .

Wir können ohne weitere Einschränkung annehmen, dass  $P(x) \in k[\{b_1, \dots, b_n\}][x]$  gilt, denn falls dies nicht der Fall sein sollte, wähle  $m \in \mathbb{N}$  groß genug, so dass  $(P(x) \cdot (\prod_i b_i)^m) \in k[\{b_1, \dots, b_n\}]$  gilt.

Wähle nun  $P'(x_1, \dots, x_n, x) \in k[x_1, \dots, x_n, x]$  mit  $P'(b_1, \dots, b_n, x) = P(x)$ .

$$\text{Dies erfüllt } P'(b_1, \dots, b_n, a) = 0.$$

Folglich ist  $B \cup \{b_1, \dots, b_n, a\}$  algebraisch abhängig und insbesondere  $B \cup \{a\}$  nicht transzendent über  $k$ .

„ $\Leftarrow$ :“ Sei  $B$  bezüglich der Inklusion ein maximales Element der Menge aller über  $k$  transzendenten Elemente aus  $L$ . Zeige für ein beliebiges Element  $a \in L \setminus k(B)$ , dass dieses algebraisch über  $k(B)$  ist:

Nach Voraussetzung existiert eine endliche Teilmenge  $\{b_1, \dots, b_n, a\} \subseteq B \cup \{a\}$ , welche algebraisch abhängig über  $k$  ist.

Also existiert  $P(x_1, \dots, x_{n+1}) \in k[x_1, \dots, x_{n+1}]$  mit  $P(b_1, \dots, b_n, a) = 0$ .

$$\text{Für } P'(x) := P(b_1, \dots, b_n, x) \in k(B)[x] \text{ gilt somit } P'(a) = 0$$

Die Existenz eines solchen Polynoms  $P'(x)$  zeigt uns, dass  $a$  algebraisch über  $k(B)$  ist.

Damit haben wir gezeigt, dass jedes  $a \in L$  algebraisch über  $k(B)$  ist. Folglich ist  $L/k(B)$  algebraisch und  $B$  eine Transzendenzbasis von  $L$  über  $k$ .

□

## Existenz von Transzendenzbasen

**Proposition 4.** [Kapitel 22.1.3 Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009]  
Jede Körpererweiterung  $L \subseteq k$  besitzt eine Transzendenzbasis  $B \subseteq L$ .

*Beweis.* Verwende hierzu das Lemma von Zorn:

lemma 3 besagt, dass die Transzendenzbasen von  $L/k$  gerade die maximalen Elemente der Menge aller über  $k$  transzendenten Elemente aus  $L$  sind.

Das Lemma von Zorn besagt, dass jede partiell geordnete Menge, in der jede total geordneten Untermenge (auch Kette genannt) eine obere Schranke besitzt, ein Maximales Element besitzt [vgl. Kapitel A2.3 Christian Karpfinger, Kurt



Meyberg 2009].

Sei also  $\mathbb{B}$  eine Kette von Transzendenten Mengen.

Offensichtlich ist  $\tilde{B} := \bigcup_{B \in \mathbb{B}} B \in L$  eine obere Schranke von  $\mathbb{B}$ . Zeige also noch, dass  $\tilde{B}$  auch transzendent ist.

Annahme:  $\tilde{B}$  ist nicht transzendent:

Also existiert  $\{b_1, \dots, b_n\} \in \tilde{B}$  mit:  $\{b_1, \dots, b_n\}$  ist algebraisch abhängig über  $k$ . Da  $\mathbb{B}$  bezüglich der Inklusion total geordnet ist, existiert ein  $B \in \mathbb{B}$  mit  $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq B$ . Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass  $B \in \mathbb{B}$  transzendent über  $k$  ist.

Damit war unsere Annahme falsch und wir haben gezeigt, dass die Menge der über  $k$  transzendenten Teilmengen von  $L$  mindestens ein maximales Element und damit  $L/k$  eine Transzendenzbasis besitzt.  $\square$

### Transzendent ist pur transzendent plus algebraisch 1

**Korollar 5.** [Eigene Überlegung] Für jede Körpererweiterung  $L/k$  existiert ein Zwischenkörper  $K \subseteq L$ , sodass  $K/k$  eine pur transzendente und  $L/K$  eine algebraische Körpererweiterung ist.

*Beweis.* Nach proposition 4 existiert eine Transzendenzbasis  $B$  von  $L/k$ .

Wie in definition 1 beschrieben ist somit  $k(B)/k$  pur transzendent und  $L/k(B)$  algebraisch.

Wähle also  $K := k(B)$ .  $\square$

### Transzendenzbasen sind immer gleich lang [Theorem A1.1 David Eisenbud 1994]

**Proposition 6.** Sei  $L/k$  eine Körpererweiterung. Seien weiter  $A, B$  zwei Transzendenzbasen von  $L$  über  $k$ . Dann gilt:

$$|A| = |B|$$

Wir nennen  $|B|$  den Transzendenzgrad von  $L/k$ .

*Beweis.* Im Fall von  $|A| = |B| = \infty$  sind wir schon fertig, Sei also ohne Einschränkung  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  und  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  mit  $\min(m, n) = n < \infty$ .

Wir wollen zunächst in  $n$  Schritten die Elemente aus  $B$  durch Elemente aus  $A$  ersetzen und damit zeigen, dass  $\{a_1, \dots, a_n\}$  eine Transzendenzbasis von  $L$  über  $k$  ist:

Für den  $i$ -ten Schritt definiere  $A_i := \{a_1, \dots, a_{i-1}\} \subseteq A$ ,  $B_i := \{b_i, \dots, b_n\} \subseteq B$  und gehe davon aus, dass  $A_i \cup B_i$  eine Transzendenzbasis ist:

Nach lemma 3 ist  $\{a_i\} \cup A_i \cup B_i = A_{i+1} \cup B_i$  nicht transzendent und somit

algebraisch abhängig.

Also existiert  $P \in k[x_1, \dots, x_n]$  mit  $P(a_i, a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, \dots, b_n) = 0$ .

Definiere  $P'(x) := P(a_i, a_1, \dots, a_{i-1}, x, b_{i+1}, \dots, b_n) \in k(A_{i+1} \cup B_{i+1})[x]$ .

Dieses erfüllt  $P'(b_i) = 0$ .

Da  $A_i \subseteq A$  algebraisch unabhängig ist, gilt  $P(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, \dots, x_n) \neq 0$ . Nummeriere also gegebenenfalls  $B$  vor der Bildung von  $P'(x)$  so um, dass auch  $P'(x) \neq 0$  gilt.

Die Existenz eines solchen  $P'(x)$  zeigt uns, dass die Körpererweiterungen  $L \subset k(A_{i+1} \cup B_i) = k(A_{i+1} \cup B_{i+1})(\{b_i\}) \subset k(A_{i+1} \cup B_{i+1})$  algebraisch sind und legt nahe, dass  $A_{i+1} \cup B_{i+1}$  wieder eine Transzendenzbasis ist.

Um dies zu zeigen nehme zunächst an  $A_{i+1} \cup B_{i+1}$  wäre algebraisch abhängig.

Also existiert  $Q \in k[x_1, \dots, x_n]$  mit  $Q(a_1, \dots, a_i, b_{i+1}, \dots, b_n) = 0$ .

Definiere  $Q'(x) := Q(a_1, \dots, a_{i-1}, x, b_{i+1}, b_n) \in k(a_1, \dots, a_{i-1}, b_{i+1}, b_n)[x]$ .

Dieses erfüllt  $Q'(a_i) = 0$ .

Da  $(A_{i+1} \cup B_{i+1}) \setminus \{a_i\} \subseteq A_i \cup B_i$  algebraisch unabhängig ist gilt  $Q'(x) \neq 0$ .

Die Existenz eines solchen  $Q'(x)$  zeigt uns, dass die Körpererweiterung  $L \subset k(A_{i+1} \cup B_{i+1}) \subset k((A_{i+1} \cup B_{i+1}) \setminus \{a_i\}) = k((A_i \cup B_i) \setminus \{b_i\})$  algebraisch ist. Damit ist  $(A_i \cup B_i) \setminus \{b_i\}$  eine Transzendenzbasis, was nach lemma 3 im Widerspruch dazu steht, dass  $A_i \cup B_i$  eine Transzendenzbasis ist.

Folglich ist  $A_{i+1} \cup B_{i+1}$  transzendent und somit eine Transzendenzbasis von  $L$  über  $k$ .

Dieses Verfahren zeigt uns, dass  $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$  eine Transzendenzbasis von  $L$  über  $k$  ist. Nach lemma 3 muss somit  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  und  $m = n$  gelten.  $\square$

## Unterschiedliche Transzendenzbasen bsp

**Beispiel 7.** [Eigene Überlegung] Sei dazu  $L = k(y)$  der Körper der rationalen Funktionen über  $k$ . Betrachte zwei unterschiedliche Transzendenzbasen von  $L/k$ :

1.  $B = \{y\}$  ist eine Transzendenzbasis von  $L/k$  mit  $\deg(L/k(B)) = 1$ .
2. Für  $n \in \mathbb{N}$  ist  $B' = \{y^n\}$  eine Transzendenzbasis von  $L/k$  mit  $\deg(L/k(B')) = n$ .

$f(x) = x^n - y^n \in k(y^n)[x]$  ist Minimalpolynom von  $x$  über  $k(y^n)$ .  
 $\Rightarrow k(y)/k(y^n)$  ist eine algebraische Körpererweiterung vom Grad  $n$

Dies zeigt, dass die Form des Körpers  $k(B)$  und insbesondere der Grad der Körpererweiterung  $L/k(B)$  sehr von der Wahl der Transzendenzbasis  $B$  abhängt.

## 3.2 Kähler-Differenzial von Körpererweiterungen

**Definition der Differenzialbasis** [vgl. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]

**Definition 8.** Sei  $L \supset k$  eine Körpererweiterung. Dann nennen wir eine Teilmenge  $\{b_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq L$  eine Differenzialbasis von  $L$  über  $k$ , falls  $\{d_K(b_i)\}_{i \in \Lambda}$  eine Vektorraumbasis von  $\Omega_{L/R}$  über  $L$  ist.

**Differential von rationalen Funktionen 1** [vgl. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]

**Beispiel 9.** Sei  $k$  ein Körper und  $L = k(\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}})$  der Körper der rationalen Funktionen in  $n$  Variablen über  $k$ .

Dann gilt:

$$\Omega_{L/k} \simeq L \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle$$

Insbesondere ist  $\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  eine Differenzialbasis von  $\Omega_{L/k}$ .

*Beweis.* Betrachte  $L = k[x_1, \dots, x_n][k[x_1, \dots, x_n]^{-1}]$  als Lokalisierung um theorem 15 anwenden zu können. Anschließend forme noch  $\Omega_{k[x_1, \dots, x_n]/k}$  mithilfe von korrolar 13 isomorph um:

$$\begin{aligned} \Omega_{L/k} &\simeq L \otimes \Omega_{k[x_1, \dots, x_n]/k} \\ &\simeq L \otimes \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} k[x_1, \dots, x_n] \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \\ &\simeq L \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \end{aligned}$$

Damit ist  $\{d_L(x_i)\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  eine Vektorraumbasis von  $\Omega_{L/k}$ . □

**Differential von rationalen Funktionen 2** [Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]

**Korrolar 10.** Sei  $k$  ein Körper und  $L \supset k$  eine Körpererweiterung und  $T = L(\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}})$  der Körper der rationalen Funktionen in  $n$  Variablen über  $L$ . Dann gilt:

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$

*Beweis.* Betrachten  $T$  als Lokalisierung von  $L[x_1, \dots, x_n]$  und gehen dann analog zu beispiel 9 vor:

$$\begin{aligned} \Omega_{T/k} &\simeq T \otimes_{L[x_1, \dots, x_n]} \Omega_{L[x_1, \dots, x_n]/k} \text{ (theorem 15)} \\ \Omega_{L[x_1, \dots, x_n]/R} &\simeq (L[x_1, \dots, x_n] \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} L[x_1, \dots, x_n] \langle d_{L[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \text{ (korrolar 14)} \\ &\Rightarrow \Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle \end{aligned}$$

□

**Cotangent Sequenz von Koerpern 1** [Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]

**Bemerkung 11.** Sei  $L \supset k$  eine Körpererweiterung und  $T = L(x_1, \dots, x_n)$  der Körper der rationalen Funktionen in  $n$  Variablen über  $L$ . Dann ist die COTANGENT SEQUENZ (satz 9) von  $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$  eine kurze Exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Im Genauen ist  $\varphi : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k}$ ,  $t \otimes d_L(l) \mapsto t \cdot d_T(l)$  injektiv.

*Beweis.* Die Injektivität von  $\varphi$  folgt direkt aus der isomorphen Darstellung von  $\Omega_{T/k}$ , die wir uns in korollar 10 erarbeitet haben.

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$

Um sicher zu gehen definiere  $\varphi' \simeq \varphi$  und durchlaufe die in korollar 10 genutzten Isomorphismen noch einmal Schritt für Schritt:

$$\varphi' : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$

$$\begin{array}{ccc} T \otimes_L \Omega_{L/k} & & t \otimes d_L(l) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_{T/k} & & td_T(l) \\ \downarrow \text{theorem 15} & & \downarrow \\ T \otimes_S \Omega_{L[x_1, \dots, x_n]/k} & & t \otimes d_S(l) \\ \downarrow \text{korollar 14} & & \downarrow \\ T \otimes_S ((S \otimes_L \Omega_{L/k}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} S \langle d_S(x_i) \rangle) & & t \otimes (d_L(l), 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle & & (t \otimes d_L(l), 0) \end{array}$$

Damit ist  $\varphi$  eine injektive Einbettung von  $T \otimes_L \Omega_{L/k}$  in  $\Omega_{T/k}$ .  $\square$

**Aufbaulemma Koerperdifferenzial** [vgl. Lemma 16.15 David Eisenbud 1994]

**Lemma 12.** Sei  $L \subset T$  eine seperable und algebraische Körpererweiterung und  $R \longrightarrow L$  ein Ringhomomorphismus. Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} = T \otimes_L \Omega_{L/R}$$

Insbesondere ist in diesem Fall die COTANGENT SEQUENZ (satz 9) von  $R \rightarrow L \hookrightarrow T$  eine kurze Exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \longrightarrow \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

*Beweis.* Wähle  $\alpha \in T$  mit  $L[\alpha] = T$ . Sei weiter  $f(x)$  das Minimalpolynom von  $\alpha$ . Betrachte dazu die conormale Sequenz von  $\pi : L[x] \rightarrow L[x]/(f) \simeq T$  (satz 10):

$$(f)/(f^2) \xrightarrow{1 \otimes d_{L[x]}} T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

Wende nun Proposition 16.6 auf  $\Omega_{L[x]/R}$  an und tensoriere mit  $T$ , somit gilt:

$$T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \simeq T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle$$

Zusammen mit der conormalen Sequenz bedeutet dies:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle) / (d_{L[x]}(f))$$

Wenn wir  $d_{L[x]} : (f) \rightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle$  wie in proposition 5 betrachten, sehen wir:

$$d_{L[x]}((f)) = J \oplus (f'(\alpha)d_{L[x]}) = J \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle$$

, wobei  $J \subseteq T \otimes_L \Omega_{L/R}$  ein Ideal ist.

Für die letzte Gleichheit nutze, dass  $T \supset L$  separabel und somit  $f'(\alpha) \neq 0$  ist und nach obiger Wahl  $T = L[\alpha]$  gilt.

Damit erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} \Omega_{T/R} &\simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) / J \\ &\Rightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \hookrightarrow \Omega_{T/R} \text{ ist surjektiv.} \end{aligned}$$

Somit muss  $J = 0$  gelten und es folgt  $T \otimes_L \Omega_{L/R} \simeq \Omega_{T/R}$ .

Damit haben wir insbesondere auch gezeigt, dass  $T \otimes_L \Omega_{L/R} \rightarrow \Omega_{T/R}$  injektiv und somit die COTANGENT SEQUENZ von  $R \rightarrow L \hookrightarrow T$  eine kurze exakte Sequenz ist.  $\square$

**Transzendenzbasis ist Differenzialbasis** [vgl. Theorem 16.4 David Eisenbud 1994]

**Theorem 13.** Sei  $T \supset k$  eine separabel generierte Körpererweiterung und  $B = \{b_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq T$ . Dann ist  $B$  genau dann eine Differenzialbasis von  $T$  über  $k$ , falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1.  $\text{char}(k) = 0$  und  $B$  ist eine Transzendenzbasis von  $T$  über  $k$ .
2.  $\text{char}(k) = p$  und  $B$  ist eine  $p$ -Basis von  $T$  über  $k$ .

*Beweis.*

1. „ $\Leftarrow$ “: Sei  $B$  eine Transzendenzbasis von  $T$  über  $k$ .

Damit ist die Körpererweiterung  $L := k(B) \supset k$  algebraisch und separabel.

Mit lemma 12 folgt:

$$\Omega_{T/k} = T \otimes_L \Omega_{L/k}$$

Betrachte  $L = k[B][k[B] \setminus 0^{-1}]$  als Lokalisierung und wende theorem 15 auf  $\Omega_{L/k}$  an, somit gilt:

$$\Omega_{L/k} = L \otimes_{k[B]} \Omega_{k[B]/k}$$

In korollar 13 haben wir gesehen, dass  $\Omega_{k[B]/k}$  ein freies Modul über  $k[B]$  mit  $\{b_i\}_{i \in \Lambda}$  als Basis ist. Dies liefert uns letztendlich die gewünschte Darstellung

$$\Omega_{T/k} = \bigoplus_{\{i \in \Lambda\}} T \langle d_T(b_i) \rangle.$$

1., „ $\Rightarrow$ “: Sei  $d_T(B)$  eine Vektorraumbasis von  $\Omega_{T/k}$ .

Zeige zunächst, dass  $T$  algebraisch über  $L := k(B)$  ist:

Die COTANGENT SEQUENZ (satz 9) von  $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$  besagt

$$\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T \langle d_T(S) \rangle \text{ und nach Voraussetzung gilt } \Omega_{T/k} = T \langle d_T(B) \rangle.$$

$$\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T \langle d_T(L) \rangle = \Omega_{T/k}/T \langle d_T(B) \rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$$

Da, wie wir in „ $\Leftarrow_1$ “ gezeigt haben, jede Transzendenzbasis  $B'$  von  $T$  über  $L$  auch eine Differenzialbasis von  $\Omega_{T/L} = 0$  ist, gilt für diese  $B' = \emptyset$ . Somit ist  $T$  schon algebraisch über  $L$ .

Zeige noch, dass  $B$  auch algebraisch unabhängig über  $L$  ist:

Sei dazu  $\Gamma$  eine minimale Teilmenge von  $\Lambda$ , für welche  $T$  noch algebraisch über  $k(\{b_i\}_{i \in \Gamma})$  ist. Für diese ist  $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$  algebraisch unabhängig über  $K$ . Damit ist nach „ $\Leftarrow_1$ “  $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$  ebenfalls eine Differenzialbasis von  $T$  über  $k$ . Also muss schon  $\Gamma = \Lambda$  gegolten haben und  $B$  ist eine Transzendenzbasis von  $T$  über  $k$ .

2., „ $\Leftarrow$ “: Sei  $B$  eine  $p$ -Basis von  $T$  über  $k$ .

Somit wird nach DEFINITION-PROPOSITION  $T$  von  $B$  als Algebra über  $(k * T^p)$  und  $\Omega_{T/(k * T^p)}$  von  $d_T(B)$  als Vektorraum über  $T$  (PROPOSITION) erzeugt. Zeige also  $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p * k)}$ :

Die Cotangent Sequenz (satz 9) von  $K \hookrightarrow (k * T^p) \hookrightarrow T$  besagt:

$$\Omega_{T/(T^p * k)} \simeq \Omega_{T/k}/d_T(T^p * k)$$

Für beliege  $t^p \in T^p$  gilt  $d_T(t^p) = pt^{p-1}d_T(t) = 0$ , da  $\text{char}(T) = p$ .

$$\Rightarrow d_T(T^p * k) = d_T(k(T^p)) = 0$$

Damit ist  $d_T : T \longrightarrow \Omega_{T/k}$  auch  $(T^p * k)$ -linear und es gilt  $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p * k)}$ .

2. „ $\Rightarrow$ “: Sei  $d_T(B)$  eine Vektorraumbasis von  $\Omega_{T/k}$ .

Zeige zunächst, dass  $T$  von  $B$  als Algebra über  $k$  erzeugt wird:

Die COTANGENT SEQUENZ (satz 9) von  $k \hookrightarrow L := k(B) \hookrightarrow T$  besagt  $\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L) \rangle$  und nach Voraussetzung gilt  $\Omega_{T/k} = T\langle d_T(B) \rangle$ .  
 $\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L) \rangle = \Omega_{T/k}/T\langle d_T(B) \rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$

Da, wie wir in „ $\Leftarrow$ “ gezeigt haben, jede p-Basis  $B'$  von  $T$  über  $L$  auch eine Differenzialbasis von  $\Omega_{T/L} = 0$  ist, gilt für diese  $B' = \emptyset$ . Somit wird  $T$  schon von  $B$  als Algebra über  $k$  erzeugt.

Zeige noch, dass  $B$  auch minimal als Erzeugendensystem von  $T$  als Algebra über  $k$  ist:

Sei dazu  $\Gamma$  die minimale Teilmenge von  $\Lambda$ , für welche  $T$  noch von  $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$  als Algebra über  $k$  erzeugt wird. Dann ist  $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$  eine p-Basis von  $T$  über  $k$ . Somit ist nach „ $\Leftarrow$ “  $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$  ebenfalls eine Differenzialbasis von  $T$  über  $k$ . Es muss also schon  $\Gamma = \Lambda$  gegolten haben und  $B$  ist eine p-Basis von  $T$  über  $k$ .

□

# Kapitel 4

## Aufgaben

- Aufgabe 6.7 aus David Eisenbud 1994 ist lemma 10.
- Aufgabe 16.6 a) aus David Eisenbud 1994 ist bemerkung 11.

**Cotangent Sequenz von Körpern 3** [Aufgabe 16.6 b) David Eisenbud 1994]

Wir nennen eine Körpererweiterung  $T \supset L$  pur inseperabel, falls gilt:

$$\text{char}(L) = p > 0 \text{ und } \forall t \in T \exists l \in L \exists n \in \mathbb{N} : t^{p^n} = l$$

**Proposition 1.** Seien  $T \supset L \supset k$  endliche Körpererweiterungen. Betrachte die COTANGENT SEQUENZ (satz 9) von  $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ :

$$T \otimes_L \Omega_{L/k} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Sei weiter die Körpererweiterung  $T \supset L$  algebraisch und pur inseperabel und existiere ein  $\alpha \in T$  mit  $L(\alpha) = T$  und  $\text{Mipo}(\alpha) = f(x) = x^p - a$ . Dann gilt:

$$\varphi \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow d_L(a) = 0$$

*Beweis.* Lege zunächst  $T = L[x]/(f(x))$  fest und betrachte den kanonischen Epimorphismus  $\pi : L[x] \rightarrow T$ , sowie die dazugehörige Konormale Sequenz (satz 10). Forme diese leicht um (2), sodass wir sie mit der COTANGENT SEQUENZ von  $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$  (3) vergleichen können:

$$(f(x))/(f(x)^2) \xrightarrow{1 \otimes d_{L[x]}} T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/k} \longrightarrow 0 \quad (1)$$

$$T \langle d_{L[x]}(f(x)) \rangle \hookrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/k} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle \xrightarrow{\widetilde{D\pi}} \Omega_{T/k} \longrightarrow 0 \quad (2)$$

$$T \otimes_L \Omega_{L/k} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0 \quad (3)$$



Zeige, dass **(2)** auch wirklich exakt ist:

$$\begin{aligned} (1 \otimes d_{L[x]})(f(x)) &= T \otimes_{L[x]} L[x] \langle d_{L[x]}(f(x)) \rangle \simeq T \langle d_{L[x]}(f(x)) \rangle \\ \Rightarrow \text{Ersetze } 1 \otimes d_{L[x]} : (f(x))/(f(x)^2) &\longrightarrow T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k} \\ &\text{durch } T \langle d_{L[x]}(f(x)) \rangle \hookrightarrow T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k}. \end{aligned}$$

nach korollar 14 gilt  $\Omega_{L[x]/k} \simeq L[x] \otimes_L \Omega_{L/k} \oplus L[x] \langle d_{L[x]}(x) \rangle$   
und tensorieren mit  $T$  ergibt  $T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k} \simeq T \otimes_L \Omega_{L/k} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle$ .

„ $\Rightarrow$ “: Wenn wir nun unsere zwei exakten Sequenzen betrachten sehen wir, dass  $\varphi$  eine Einschränkung von  $D\pi$  auf einen kleineren Definitionsbereich ist. Zeige also, dass  $D\pi$  injektiv ist:

$$\begin{aligned} \text{Nach Voraussetzung gilt } d_L(a) &= 0 \text{ also auch } d_{L[x]}(a) = 0 \\ \Rightarrow d_{L[x]}(f) &= d_{L[x]}(x^p) - d_{L[x]}(a) = px^{p-1}d_{L[x]}(x) - d_{L[x]}(a) = 0 - 0 \\ &\Rightarrow T \langle d_{L[x]}(f(x)) \rangle = 0 \end{aligned}$$

Bezogen auf die exakte Sequenz **(2)** bedeutet dies, dass  $D\pi$  injektiv ist.

„ $\Leftarrow$ “: Da  $\varphi$  nach Voraussetzung injektiv ist, genügt es  $\varphi 1 \otimes a = 0$  zu zeigen:

$$\begin{aligned} \text{In } T \text{ gilt } [f(x)]_T &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= d_T([f(x)]_T) = d_T([x^p]_T) - d_T([a]_T) = d_T([a]_T) \\ &\Rightarrow \varphi(1 \otimes d_L(a)) = d_T([a]_T) = 0 \end{aligned}$$

Da  $\varphi$  nach Voraussetzung injektiv ist, gilt  $1 \otimes d_{L[x]}(a) = 0$  und somit auch  $d_L(a) = 0$ .

□

**Cotangent Sequenz von Körpern 3 Beispiel** [Aufgabe 16.6 b) David Eisenbud 1994]

**Beispiel 2.** Betrachte das in proposition 1 gegebenen Szenario und wähle:

$$k = \mathbb{F}_3, L = k[y]/(y^2 + 1), T = L(\sqrt[3]{y}) \simeq L[x]/(x^3 - y).$$

Hierbei gilt  $d_L(x) \neq 0$  und somit ist  $\varphi : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{L/k}$  nicht injektiv.

**seperabel generierte Körpererweiterung mit  $\text{DifR}(\mathbf{T})(\mathbf{R})$  ist 0** [Aufgabe 16.10 David Eisenbud 1994 (steht im Bezug zu Korollar 16.17)]

**Beispiel 3.** Sei  $k$  ein Körper mit  $\text{char}(k) = p > 0$  und sei weiter  $K(x)$  der

Raum der Rationalen Funktionen über  $k$ .

$$\text{Definiere: } L := k(x^{1/p^\infty}) = \varinjlim \{k(x^{1/p^n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Dann gilt :  $\Omega_{L/k} = 0$

*Prüfe noch, ob  $L \supset k$  eine separabel generierte Körpererweiterung ist.*

*Beweis.* Es gilt:

$$d_L(x^{1/p^n}) = d_L \left( \prod_{i \in \{1, \dots, p\}} x^{1/p^{n+1}} \right) = p \cdot \left( \prod_{i \in \{1, \dots, p-1\}} x^{1/p^{n+1}} \right) \cdot d_L(x^{1/p^{n+1}}) = 0$$

Nutze noch proposition 12 und beispiel 9 um zu folgern, dass  $\Omega_{L/k}$  von  $\{d_L(x^{1/p^n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$  erzeugt wird.  $\square$

**Differenzial algebraischer Algebren ist Null** [Aufgabe 16.11 David Eisenbud 1994]

**Beispiel 4.** Sei  $K$  ein Körper mit  $\text{char}(K) = 0$  und  $T$  eine noethersche  $K$ -Algebra. Dann gilt:

$$\Omega_{T/K} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$T = \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} K(\alpha_i) \text{ ist ein endliches Produkt algebraischer Körpererweiterungen.}$$

*Beweis.*

„ $\Rightarrow$ “: Da  $T$  noethersch ist, ist  $T$  als Algebra über  $K$  endlich erzeugt und es gilt:

$$T = \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} K[\alpha_i]/I_i$$

Wobei  $I_i \subseteq K[\alpha_i]$  ein Ideal ist. ( $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ )

Zur Vereinfachung definiere  $T' := \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} K[\alpha_i]$ . Betrachte nun den Differentialraum von  $T$  genauer:

$$\begin{aligned} \Omega_{T/K} &= d_{T'} \left( \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} K[\alpha_i]/I_i \right) \\ &= \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} d_{K[\alpha]}(K[\alpha_i]/I_i) \quad (\text{proposition 8}) \end{aligned}$$

Betrachte also jeweils für  $i \in \{1, \dots, n\}$  die  $K$ -Algebra  $K[\alpha_i]/I_i$ .

Sei  $I_i \neq K[\alpha_i]$ , da andernfalls  $K[\alpha_i]/I_i = 0$  und somit  $\alpha_i$  kein Erzeuger

vor T wäre.

Unterscheide nun zwischen den zwei möglichen Fällen  $\underline{I_i = 0}$  und  $\underline{I_i \neq 0}$ :

- 1.  $\underline{I_i = 0}$ :** Da  $\Omega_{T/K} = 0$  gilt, muss  $K[\alpha_i] = 0$  gelten.  
Annahme:  $\alpha_i$  ist transzendent über K.

$$\begin{aligned} &\text{Dies bedeutet } K[\alpha_i] \simeq K[x] \\ \Rightarrow \Omega_{K[\alpha_i]/K} &\simeq K[x]\langle d_{K[x]}(x) \rangle \neq 0 \text{ (korollar 13)} \end{aligned}$$

Dies steht allerdings im Widerspruch zu  $K[\alpha_i] = 0$ . Folglich war unsere Annahme falsch und  $\alpha_i$  ist algebraisch über K.

Folglich ist  $K[\alpha_i] = K(\alpha_i)$  eine algebraische Körpererweiterung.

- 2.  $\underline{I_i \neq 0}$ :** Zunächst sehen wir, dass  $\alpha_i$  transzendent sein muss, da sonst  $K[\alpha_i] = K(\alpha_i)$  ein Körper wäre und somit  $I_i = K(\alpha_i)$  gelten würde.  
Also ist  $\alpha_i$  transzendent und es gilt:

$$\begin{aligned} &K[\alpha_i] \simeq K[x] \text{ und } I \simeq (f(x)) \text{ mit } f(x) \in K[x] \\ \Rightarrow K[\alpha_i] &\simeq K[\beta_1, \dots, \beta_n] = K(\beta_1, \dots, \beta_n), \text{ wobei } \beta_1, \dots, \beta_n \text{ die Nullstellen von } f \text{ sind.} \end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass auch in diesem Fall  $K[\alpha_i]/I_i$  eine Algebraische Körpererweiterung ist.

„ $\Leftarrow$ “: proposition 8 besagt, dass das direkte Produkt unter Bildung des Differenzials erhalten bleibt, also gilt in diesem Fall:

$$\Omega_{T/K} = \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} \Omega_{K(\alpha_i)/K}$$

Nach Voraussetzung sind alle Körpererweiterungen  $K\alpha_i \supset K$  algebraisch. Wir haben schon in BSP gesehen, dass somit deren Differentiale gleich 0 sind. Folglich ist auch das direkte Produkt der einzelnen Differenziale und somit  $\Omega_{T/K}$  gleich 0.

□