Bemerkung 1. *Unendliche Indexmengen*

Proposition 2. *R-Algebra-Kolimiten*

Satz 3. *Konormale Sequenz*

Kapitel 1

Kolimes

1.1 Kähler-Differenzial von Kolimiten

Differenzial des Kolimes von R-Algebren

Proposition 1. *[vlg. Korolar 16.7 David Eisenbud 1994]*

1. *Seien $\{S_i\}_{i\in\Lambda}$ R-Algebren und $T = \bigotimes_{i\in\Lambda} S_i$ deren.*
   Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} \simeq \bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$$

2. *Seien S_1, S_2 R-Algebren und $\varphi, \varphi' : S_1 \longrightarrow S_2$ R-Algebra-Homomorphismen. Sei weiter $q : S_2 \longrightarrow T$ der Differenzkokern von φ,φ'. Dann ist folgende Sequenz rechtsexakt:*

$$T \otimes_{S_1} \Omega_{S_1/R} \xrightarrow{f} T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R} \xrightarrow{g} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

mit: $f : T \otimes \Omega_{S_1/R} \longrightarrow T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R}\,,\ t \otimes d_{S_1}(x_1) \longmapsto t \otimes d_{S_2}(\varphi(x_1) - \varphi(x_2))$
$g : T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R} \longrightarrow \Omega_{T/R}\,,\ t \otimes d_{S_2}(x_2) \longmapsto (d_T \circ q)(x_2)$

Beweis.
<u>Zu *1.*:</u> Zeige, dass $\bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \simeq \Omega_{T/R}$ gilt.
Für $i \in \Lambda$ lässt sich T als $\left(\bigotimes_{j\in\Lambda\setminus\{i\}} S_i\right) \otimes_R S_i$ betrachten, nutze dies um folgende R-lineare Differentiale zu definieren:

$$e_i : T \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}\,,\ (\otimes_{j\neq i} s_j) \otimes s_i \longmapsto (\otimes_{j\neq i} s_j) \otimes d_{S_i}(s_i)$$

$$e : T \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}\,,\ (\otimes_{j\neq i} s_j) \otimes s_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} (\otimes_{j\neq i} s_j) \otimes d_{S_i}(s_i)$$

Da d_{S_i} ein Differnetial ist, ist e' und somit nach BEM und bemerkung 1 auch e ein Differential. Mithilfe der universellen Eigenschaft von d_T erhalten wir einen eindeutigen Homomorphismus φ mit $\varphi \circ d_T = e$:

$$\varphi : \Omega_{T/R} \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \,,\, d_T(s_1 \otimes \cdots \otimes s_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} (\otimes_{j\neq i} s_j) \otimes d_{S_i}(s_i)$$
$$\varphi : d_T(1 \otimes s_i \otimes 1) \longmapsto (0, 1 \otimes d_{S_i}(s_i), 0)$$

Suche nun eine Umkehrfunktion ϕ zu φ. Definiere dazu für $i \in \Lambda$ folgendes R-lineares Differential:

$$h_i : S_i \longrightarrow \Omega_{T/R} \,,\, s_i \longmapsto d_T((\otimes_{j\neq i} 1) \otimes s_i)$$

Mithilfe der universellen Eigenschaft von d_{S_i} erhalten wir dadurch einen eindeutigen Homomorphismus h'_i mit $h'_i \circ d_T = h_i$. Nutze diesen um einen weiteren Homomorphismus zu definieren:

$$\phi_i : T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \longrightarrow \Omega_{T/R} \,,\, t \otimes d_{S_i}(s_i) \longmapsto t \cdot (h' \circ d_{S_i})(s_i) = t \cdot h_i(s_i)$$

Damit erhalten wir folgenden kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
S_i \arrow[r, "d_{S_i}"] \arrow[dr, "h_i"'] & \Omega_{S_i/R} \arrow[r, "a"] \arrow[d, dashed, "\exists! k'"] & T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \arrow[dl, "\phi_i"] \\
& \Omega_{T/R} &
\end{tikzcd}$$

Somit ist die Summe $\phi := \sum_{i\in\Lambda} \phi_i$ die Umkehrfunktion von φ:

$$\phi : \bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \longrightarrow \Omega_{T/R} \,,\, (t_i \otimes d_{S_1}(s_1), \ldots, t_n \otimes d_{S_n}(s_n)) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot h_i(s_i)$$
$$\phi : (0, 1 \otimes d_{S_i}(s_i), 0) \longmapsto d_T(1 \otimes s_i \otimes 1)$$

Somit gilt $\bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \simeq \Omega_{T/R}$.
Definiere also ab jetzt $\bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}$ als das Differential von T über R.

*Zu **2.**:* Betrachte die Conormale Sequenz *(satz 3)* des Differenzkokerns *(proposition 2)* $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$:

$$Q/Q^2 \xrightarrow{1\otimes d_{S_2}} T \otimes \Omega_{S_2/R} \xrightarrow{Dq} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

mit $f' : Q/Q^2 \longrightarrow T \otimes_{S_2} \Omega_{S/R} \,,\, [s_2]_{Q^2} \longmapsto 1 \otimes d_{S_2}(s_2)$.
Somit gilt $im(f) = T \otimes_{S_2} d_{S_2}(Q) = im(f')$.
$\Rightarrow$ die gesuchte Sequenz ist exakt. $\square$

Differenzial von Polynomalgebren 1 *[vlg. Proposition 16.1 David Eisenbud 1994]*

Korrolar 2. *Sei $S = R[x_1, ..., x_n]$ eine Polynomalgebra über R. Dann gilt:*

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i \in \{1,...,n\}} S\langle d_S(x_i)\rangle$$

Wobei $S\langle d_S(x_i)\rangle$ das von $d_S(x_i)$ erzeugt Modul über S ist.

Beweis. Wie in **??** gezeigt, können wir S als $\bigotimes_{i \in \{1,...,n\}} R[x_i]$ schreiben. In proposition 1 haben wir gezeigt, wie das Differenzial eines solchen Tensorproduktes aussieht:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i \in \{1,...,n\}} (S \otimes_{R[x_i]} \Omega_{R[x_i]/R})$$

Da $R[x_i]$ die aus dem Element x_i erzeugte Algebra über R ist, folgt *[vlg. BEMERKUNG ZU ENDLICH ERZEUGTEN ALGEBREN]*:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i \in \{1,...,n\}} (S \otimes_{R[x_i]} R[x_i]\langle d_{S[x_i]}(x_i)\rangle) \simeq \bigoplus_{i \in \{1,...,n\}} S\langle d_S(x_i)\rangle$$

Für die letzte Isomorphie nutze, dass wegen $R[x_i] \subseteq S$ zum Einen $d_{R[x_i]}$ als Einschränkung von d_S gesehen werden kann und zum Anderen $S \otimes_{R[x_i]} R[x_i] \simeq S$ gilt. $\square$

Differenzial von Polynomalgebren 2 *[vgl. Korrolar 16.6 David Eisenbud 1994]*

Korrolar 3. *Sei S eine R-Algebra und $T := S[x_1, ..., x_n]$ eine Polynomalgebra über S. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1,...,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

Beweis. Betrachte T als Tensorprodukt über R-Algebren und wende anschließend proposition 1 an:

$$T \simeq S \otimes_R R[x_1, ..., x_n]$$
$$\Rightarrow \Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus (T \otimes_{R[x_1,...,x_n]} \Omega_{R[x_1,...,x_n]/R})$$

Zuletzt wende den soeben gezeigten korrolar 2 an und nutze schließlich $R[x_1, ..., x_n] \subseteq T$ um das Tensorprodukt zu vereinfachen:

$$T \otimes_{R[x_1,...,x_n]} \Omega_{R[x_1,...,x_n]/R}$$
$$\simeq T \otimes_{R[x_1,...,x_n]} \bigoplus_{i \in \{1,...,n\}} R[x_1, ..., x_n]\langle d_{R[x_i]}(x_i)\rangle$$
$$\simeq \bigoplus_{i \in \{1,...,n\}} T\langle d_R(x_i)\rangle$$

$\square$

Differenzial der Lokalisierung *[vlg. Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]*

Theorem 4. *Sei S eine $R-$Algebra und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$\Omega_{S[U^{-1}]/R} \simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}, \text{ Wobei:}$$
$$d_{S[U^{-1}]}((\frac{1}{u})_U) \longmapsto -(\frac{1}{u^2})_U \otimes d_S(u)$$

Beweis. Wir wollen THEOREM16.8 auf $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$ aus **??** anwenden. Zeige also zunächsten den einfacheren Fall $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ für ein beliebiges $t \in U$:

Nutze hierfür die Isomorphe Darstellung $S[t^{-1}] \simeq S[x]/(tx-1)$, sowie die Isomorphie $\Omega_{S[x]/R} \simeq S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x)$. aus korrolar 3
Daraus erhalten wir folgende Isomorphismen:

$$\alpha : S[t^{-1}] \longrightarrow S[x]/(tx-1)$$
$$\beta : S[x]/(tx-1) \longrightarrow S[t^{-1}]$$
$$\gamma : \Omega_{S[x]/R} \longrightarrow S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x)$$

Nutze diese nun, um $\Omega_{S[t^{-1}]/R}$ isomorph zu $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ umzuformen:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_{S[t^{-1}]/R} \arrow[d, "D\alpha"] & d_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t) \arrow[d, mapsto, "D\alpha"] \\
\Omega_{S[x]/R}/d_{S[x]}(tx-1) \arrow[d, "\gamma"] & {[d_{S[x]}(sx)] = [xd_{S[x]}(s) + sd_{S[x]}(x)]} \arrow[d, mapsto, "\gamma"] \\
(S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}x)/((tx-1)d_{S[x]}(tx-1)) \arrow[d, "\beta"] & {[x \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)]} \arrow[d, mapsto, "\beta"] \\
(S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus S[t^{-1}]d_{S[x]}(x)/d_{S[x]}(tx-1) =: M \arrow[d, "f"] & {[(\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)]} \arrow[d, mapsto, "f"] \\
S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} & ((\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s)) - ((\frac{s}{t^2})_t \otimes d_S(t))
\end{tikzcd}$$

Die ersten drei Schritte ergeben sich aus den oben angegeben Isomorphismen. Für den letzten Schritt definiere:

$$f : M \longrightarrow S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}\,,\ [(\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \longmapsto ((\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s)) - ((\frac{s}{t^2})_t \otimes d_S(t))$$

Damit f ein Isomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ ein eindeutiges Repräsentantensystem von M ist.

Sei dazu $[m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]$ ein beliebiger Erzeuger von M. Somit gilt:

$$d_{S[x]}(tx-1) = t d_{S[x]}(x) + \beta(x) d_{S[x]}(s)$$
$$\Rightarrow [0, d_{S[x]}(x)] = [-(\frac{1}{t^2})_t d_S(t), 0]$$
$$\Rightarrow [m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)] = [m_1 - (\frac{s}{t^{n+2}})_t d_S(t), 0] = [f([m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]), 0]$$

f ist also wie vermutet ein Isomorphismus und aus obigen Umformungen folgt $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} = \Omega_{S/R}[t^{-1}]$.
Definiere für beliebige $t \in U$ folgenden Isomorphismus:

$$f \circ \beta \circ \gamma \circ D\alpha =: \delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}]\,,\ d_{S[t^{-1}]}((\frac{1}{t})_t) \longmapsto -(\frac{d_S(t)}{t^2})_t$$

Zeige nun den Allgemeinen Fall $\Omega_{S[U^{-1}]/R} \simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$:
Wähle $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$ wie in **??**, sodass $\varinjlim \mathcal{B} = S[U^{-1}]$ gilt.
Mit THEOREM16.8 folgt somit:

$$\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \varinjlim \mathcal{F} \text{ mit:}$$
$$\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow (S[U^{-1}] - Module)\,,\ S[t^{-1}] \longmapsto S[U^{-1}] \otimes \Omega_{S[t^{-1}]/R}$$
$$(\varphi : S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}])$$
$$\longmapsto (1 \otimes D\varphi : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}))$$

Zur Vereinfachung der Morphismen in $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ definiere folgenden Isomorphismus:

$$g : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}$$
$$(\frac{s}{u})_U \otimes ((\frac{s'}{t})_t \otimes d_{S[tt'^{-1}]}(x)) \longmapsto (\frac{s}{u})_U \otimes \varphi((\frac{s'}{t})_t) d_{S[tt'^{-1}]}(x)$$

Als letzten Schritt wollen wir **??** anwenden. Nutze dazu $\delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}]$ um den zu $\mathcal{F}$ isomorphen Funktor $\mathcal{F}' := \delta \circ \mathcal{F}$ zu erhalten. Um ein genaueres Bild von $\mathcal{F}'$ zu erlangen, betrachte folgendes Kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
S[t^{-1}] \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dd, "\mathcal{F}"] & & S[tt'^{-1}] \arrow[d, "\mathcal{F}"] \\
& & S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) \arrow[d, "g"] \\
S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[t^{-1}]/R} \arrow[urr, "1\otimes D\varphi"] \arrow[d, "\delta_t"] & & S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R} \arrow[d, "\delta_{tt'}"] \\
S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] \arrow[rr, "1\otimes\varphi"] & & S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S/R}[tt'^{-1}]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\frac{s}{t})_t \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "d_{S[t^{-1}]}"] & (\frac{st'}{tt'})_{tt'} \arrow[d, "d_{S[tt'^{-1}]}"] \\
1 \otimes ((\frac{1}{t})_t d_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{1})_t) + (\frac{s}{1})_t d_{S[t^{-1}]}((\frac{1}{t})_t)) \arrow[r, "g\circ(1\otimes D\varphi)"] \arrow[d, "\delta_t"] & 1 \otimes ((\frac{1}{tt'})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{st'}{1})_{tt'}) + (\frac{st'}{1})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{1}{tt'})_{tt'})) \arrow[d, "\delta_{tt'}"] \\
1 \otimes ((\frac{d_S(s)}{t})_t - (\frac{sd_S(t)}{t^2})_t) \arrow[r, "1\otimes\varphi"] & 1 \otimes ((\frac{t'd_S(s)}{tt'})_{tt'} - (\frac{st'd_S(t)}{(tt')^2})_{tt'})\textbf{(*)}
\end{tikzcd}$$

Dass das Diagramm in dieser Form kommutiert, ergibt sich in fast allen Fällen direkt aus dem Einsetzen in die entsprechenden Homomorphismen. Der einzige Fall, welcher nicht direkt klar ist, ist **(*)**. Rechne diesen also nochmal nach:

$$\begin{aligned}
&\delta_{tt'}(1 \otimes ((\frac{1}{tt'})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{st'}{1})_{tt'}) + (\frac{st'}{1})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{1}{tt'})_{tt'}))) \\
&= 1 \otimes ((\frac{d_S(st')}{tt'})_{tt'} - (\frac{t'sd_S(tt')}{(tt')^2})_{tt'}) \\
&= 1 \otimes ((\frac{t'd_S(s')}{tt'})_{tt'} + (\frac{sd_S(t')}{tt'})_{tt'} - (\frac{tt'd_S(t')}{(tt')^2})_{tt'} - (\frac{t'^2 sd_S(t)}{(tt')^2})_{tt'}) \\
&= 1 \otimes ((\frac{t'd_S(s)}{tt'})_{tt'} - (\frac{t'^2 sd_S(t)}{(tt')^2})_{tt'}) \\
&= (1 \otimes \varphi)(1 \otimes ((\frac{d_S(s)}{t})_t - (\frac{sd_S(t)}{t^2})_t))
\end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{F}'$ zu $\mathcal{F}$ isomorph und für $\mathcal{C} := \mathcal{F}'(\mathcal{B})$ gilt $\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \varinjlim \mathcal{F}' = \varinjlim \mathcal{C}$ *[vlg.* **??***]*. Wobei die Form von $\mathcal{C}$ genau dem Fall aus **??** entspricht:

$$\begin{gathered}
\mathcal{C} = \{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] | t \in U\} \textit{ mit den Morphismen} \\
1 \otimes \varphi : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S/R}[tt'^{-1}] \\
(\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{d_S(x)}{t^n})_t \longmapsto (\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{t'^n d_S(x)}{(tt')^n})_{tt'}
\end{gathered}$$

Somit folgt $\varinjlim \mathcal{C} = \Omega_{S/R}[U^{-1}]$ und wir haben $\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \Omega_{S/R}[U^{-1}]$ gezeigt.

$\square$