Satz 1.

Differenzial algebraischer Algebren ist Null *[Aufgabe 16.11 David Eisenbud 1994]*

Beispiel 2. *Sei K ein Körper mit char und T eine noethersche K-Algebra. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/K} = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$T = \oplus_{i\in\{1,\dots,n\}} K(\alpha_i) \textit{Ist ein endliches Produkt algebraischer Körpererweiterungen}$$

Beweis.

„$\Rightarrow$": Da T noethersch ist, ist T als Algebra über K endlich erzeugt, also:

$$T = T'/I$$
$$Wobei : S := \bigoplus_{i\in\{1,\dots,n\}} K[\alpha_i]$$

$$\text{und } I := \bigoplus_{i\in\{1,\dots,n\}} I_i \subseteq T' \text{ ist ein Ideal, mit } \forall i \in \{1,\dots,n\} : I_i \subseteq K[\alpha_i]. \text{ ist ein Ideal.}$$

$$\text{Also gilt } T = \bigoplus_{i\in\{1,\dots,n\}} K[\alpha_i]/I_i$$

Betrachte also jeweils für $i \in \{1,\dots,n\}$ den Ring $K[\alpha_i]/I_i$.
Setze dabei $I_i \neq K[\alpha_i]$ voraus, da sonst T isomorph einer Algebra T' wäre, welche $(\alpha_j)_j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i\}$ als Erzeuger hat.
Unterteile nun in die zwei möglichen Fälle $I = 0$ und $I \neq 0$:

1. $I_i = 0$: Da $\Omega_{T/K} = 0$ gilt, muss $K[\alpha_i] = 0$ gelten.
Annhame: α_i ist transzendent über K.

$$\text{Dies bedeutet } K[\alpha_i] \simeq K[x]$$
$$\Rightarrow \Omega_{K[\alpha]/K} \simeq K[x]\langle d_{K[x]}(x)\rangle \neq 0 \textit{ (satz 1)}$$

Dies steht allerdings im Widerspruch zu $K[\alpha_i] = 0$. Folglich war unsere Annahme falsch und α ist algebraisch über K. Somit ist $K[\alpha] = K(\alpha)$ eine algebraische Körpererweiterung.

2. $I_i \neq 0$: Zunächst sehen wir, dass α_i transzendent sein muss, da sonst $K[\alpha_i] = K(\alpha_i)$ ein Körper und somit $I_i = K(\alpha_i)$ gelten würde. Also ist α_i transzendent und es gilt:

$$K[\alpha_i] \simeq K[x] \text{ und } I \simeq (f(x)) \text{ mit } f(x) \in K[x]$$
$$\Rightarrow K[\alpha_i] \simeq K[\beta_1,\dots\beta_n] = K(\beta_1,\dots\beta_n), \text{ wobei } \beta_1,\dots\beta_n \text{ die Nullstellen von f sind.}$$

Somit haben wir gezeigt, dass auch in diesem Fall $K[\alpha_i]/I_i$ eine Algebraische Körpererweiterung ist.

$\square$