Korrolar 1. *Sei M ein S-Modul, wobei eine R-Algebra ist. Sei weiter $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$M[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{C}$$

Wobei $\mathcal{C}$ aus den Objekten $\{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] | t \in U\}$ und folgenden Morphismen besteht:

$$S[U^{-1}] \otimes M[t^{-1}] \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes M[(tt')^{-1}],$$
$$(s,u)_{mod \sim_U} \otimes (m, t^n)_{mod \sim_t} \longmapsto (s,u)_{mod \sim_U} \otimes (t'^n m, t^n t'^n)_{mod \sim_t}$$

*Auch wenn sich **??** sich hier nicht direkt anwenden lässt, so können wir doch im Beweis gleich vorgehen.*

Beweis. Schließe zunächst den trivialen Fall $0 \in U$ aus.
Sei $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow A$ der Colimes von $\mathcal{C}$. Zeige $S[U^{-1}] \simeq A$, definiere dazu folgenden Morphismus :

$$\psi : \mathcal{C} \longrightarrow M[U^{-1}]$$
$$\psi_t : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \longrightarrow M[U^{-1}]\,,\ (s,u)_{mod \sim_U} \otimes (m, t^n)_{mod \sim_t} \longmapsto (sm, ut^n)_{mod \sim_U}$$

Um die Wohldefiniertheit von ϕ zu zeigen seien $s, s' \in S$; $t, u, u' \in U$; $n, n' \in \mathbb{N}$ und $m, m' \in M$ beliebig. Somit gilt:

$$Sei\ (s,u)_{mod \sim_U} \otimes (m, t^n)_{mod \sim_t} = (s', u')_{mod \sim_U} \otimes (m', t^{n'})_{mod \sim_t}$$
$$\Rightarrow (s, ut^n)_{mod \sim_U} \otimes (m, 1)_{mod \sim_t} = (s', u't^{n'})_{mod \sim_U} \otimes (m', 1)_{mod \sim_t}$$
da M ein S-Modul ist und für beliebige $v, v' \in S$ gilt $((v,1)_{mod \sim_t} = (v', 1)_{mod \sim_t} \Rightarrow v = v'), folgt :$
$$\exists k, k' \in S\ mit\ km = k'm'\ und\ (s, ut^n k)_{mod \sim_U} = (s', u't^{n'}k')_{mod \sim_U}$$
$$\Rightarrow (sm, ut^n)_{mod \sim_U} = (skm, ut^n k)_{mod \sim_U} = (s'k'm', u't^{n'}k')_{mod \sim_U} = (s'm', u't^{n'})_{mod \sim_U}$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir den eindeutigen Homomorphismus $\varphi : A \longrightarrow M[U^{-1}]$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{C} \arrow[dl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
M[U^{-1}] & & A \arrow[ll, dashed, "\exists! \varphi"']
\end{tikzcd}$$

Für $\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow A$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen.
Zunächst können wir jedes Element $(m, u)_{mod \sim_{\in}} M[U^{-1}]$ als $\psi((1,u)_{mod \sim_U} \otimes (m, 1)_{mod \sim})$schreiben. Wobei mit ψ gemeint ist, dass wir ein beliebiges $t \in U$ wählen und dann ψ_t betrachten. Diese Verallgemeinerung ist möglich, da für beliebige $t, t', u \in U$ und $m \in M$ gilt:

$$\psi_t((1,u)_{mod \sim_U} \otimes (m,1)_{mod \sim_t}) = (m,u)_{mod \sim_U} = \psi_{t'}((1,u)_{mod \sim_U} \otimes (m,1)_{mod \sim_{t'}})$$

Definiere nun mit diesem Wissen folgenden Homomorphismus:

$$\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow A\,,\ \psi((1,u)_{mod\sim_U} \otimes t) \longmapsto \psi'((1,u)_{mod\sim_U} \otimes t)$$

$\phi \circ \varphi = id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes. Für $\varphi \circ \phi \stackrel{!}{=} id_{M[U^{-1}]}$ wähle $(m,u)_{mod\sim_U} \in M[U^{-1}]$ beliebig, für dieses gilt:

$$\begin{aligned}
&(\varphi \circ \phi)(\psi'((1,u)_{mod\sim_U} \otimes (m,1)_{mod\sim}))\\
&= \varphi(\psi((1,u)_{mod\sim_U} \otimes (m,1)_{mod\sim}))\\
&= \psi'((1,u)_{mod\sim_U} \otimes (m,1)_{mod\sim})
\end{aligned}$$

Damit haben wir $A \simeq M[U^{-1}]$ gezeigt, definiere also ab sofort $M[U^{-1}]$ als den eindeutigen Kolimes von $\mathcal{C}$. $\square$