

Cotangent Sequenz

Proposition 1. (Relativ Cotangent Sequenz) [vgl. Proposition 16.2 David Eisenbud 1994]

Seien $\alpha : R \longrightarrow S$ und $\beta : S \longrightarrow T$ zwei Ringhomomorphismen. Dann existiert folgende exakte Sequenz:

$$T \otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{t \otimes d_S(s) \mapsto t(d_{T_R} \circ \beta)(s)} \Omega_{T/R} \xrightarrow{d_{T_R}(t) \mapsto d_{T_S}(t)} \Omega_{T/S} \longrightarrow 0$$

Im Besonderen gilt für die Differenzialräume von T über R und S :

$$\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R} / T \langle (d_{T_R} \circ \beta)(S) \rangle$$

Beweis. Durch $st := \beta(S) \cdot t$ und $rt := (\beta \circ \alpha)(r) \cdot t$ können wir T als S - bzw. R -Algebra betrachten.

Zeige zunächst, dass $g : \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/S}$, $d_{T_R}(t) \longmapsto d_{T_S}(t)$ surjektiv ist:

d_{T_S} ist R -Linear, da R durch $(\beta \circ \alpha)$ auf T wirkt, es lässt sich also die universelle Eigenschaft von d_{T_R} auf d_{T_S} anwenden:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{d_{T_R}} & \Omega_{T/R} \\ & \searrow d_{T_S} & \downarrow \exists! g \\ & & \Omega_{T/S} \end{array}$$

Dies zeigt, dass $g : \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/S}$, $d_{T_R}(t) \longmapsto d_{T_S}(t)$ surjektiv ist.

Zeige nun, dass $\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R} / T \langle (d_{T_R} \circ \beta)(S) \rangle$ gilt:

Definiere zunächst folgende T -lineare Ableitung:

$$e : T \longrightarrow \Omega_{T/R} / T \langle (d_{T_R} \circ \beta)(S) \rangle, t \longmapsto [d_{T_R}(t)]_{T \langle (d_{T_R} \circ \beta)(S) \rangle}$$

Wir sehen, dass e auch S -linear ist:

Seien dazu $s \in S$ und $t \in T$ beliebig, somit gilt:

$$\begin{aligned} e(st) &= [d_{T_R}(st)]_{T \langle (d_{T_R} \circ \beta)(S) \rangle} \\ &= [\beta(s)d_{T_R}(t)]_{T \langle (d_{T_R} \circ \beta)(S) \rangle} + [td_{T_R}(\beta(s))]_{T \langle (d_{T_R} \circ \beta)(S) \rangle} \\ &= [\beta(s)d_{T_R}(t)]_{T \langle (d_{T_R} \circ \beta)(S) \rangle} + 0 = se(t) \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass wir die universelle Eigenschaft von d_{T_S} anwenden können:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{d_{T_S}} & \Omega_{T/S} \\ & \searrow e & \downarrow \exists! \varphi \\ & & \Omega_{T/R} / T \Omega_{S/R} \end{array}$$

Dadurch erhalten wir $\varphi : \Omega_{T/S} \longrightarrow \Omega_{T/R}/T\Omega_{S/R}$.

Für die Umkehrfunktion ϕ nutze $g : \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/S}$, $d_{T_R}(t) \longmapsto d_{T_S}(t)$ von Beginn des Beweises:

Für alle $s \in S$ gilt $d_{T_S}(s) = 0$.

Somit gilt $T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle \subseteq \ker(g)$.

Also ist die Umkehrfunktion ϕ von φ wohldefiniert:

$$\phi : \Omega_{T/R}/T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle \longrightarrow \Omega_{T/S}, [d_{T_R}(t)]_{T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle} \longmapsto d_{T_S}(t).$$

Damit gilt $\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R}/T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle$.

Auf unsere Sequenz bezogen bedeutet dies:

Es gilt $\operatorname{im}(\Omega_{T/R} \rightarrow \Omega_{T/S}) \simeq \Omega_{T/R}/\operatorname{im}(T \otimes_S \Omega_{S/R} \rightarrow \Omega_{T/R})$.

Somit gilt auch $\operatorname{im}(T \otimes_S \Omega_{S/R} \rightarrow \Omega_{T/R}) = \ker(\Omega_{T/R} \rightarrow \Omega_{T/S})$.

Damit haben wir gezeigt, dass die **Relative Cotangent Sequenz** exakt ist.

□

Kapitel 1

Körpererweiterungen

1.1 Differential von Körpererweiterungen

Definition der Differenzialbasis [vgl. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]

Definition 1. Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung. Dann nennen wir eine Teilmenge $\{b_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq L$ eine Differenzialbasis von L über k , falls $\{d_K(b_i)\}_{i \in \Lambda}$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{L/R}$ über L ist.

Differential von rationalen Funktionen 1 [vgl. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]

Beispiel 2. Sei k ein Körper und $L = k(\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in n Variablen über k .
Dann gilt:

$$\Omega_{L/k} \simeq L \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle$$

Insbesondere ist $\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ eine Differenzialbasis von $\Omega_{L/k}$.

Beweis. Betrachte $L = k[x_1, \dots, x_n][k[x_1, \dots, x_n]^{-1}]$ als Lokalisierung um ?? anwenden zu können. Anschließend forme noch $\Omega_{k[x_1, \dots, x_n]/k}$ mithilfe von ?? isomorph um:

$$\begin{aligned} \Omega_{L/k} &\simeq L \otimes \Omega_{k[x_1, \dots, x_n]/k} \\ &\simeq L \otimes \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} k[x_1, \dots, x_n] \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \\ &\simeq L \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \end{aligned}$$

Damit ist $\{d_L(x_i)\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{L/k}$. □

Differential von rationalen Funktionen 2 [Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]

Korollar 3. Sei k ein Körper und $L \supset k$ eine Körpererweiterung und $T = L(\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in n Variablen über L . Dann gilt:

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$

Beweis. Betrachten T als Lokalisierung von $L[x_1, \dots, x_n]$ und gehen dann analog zu Beispiel 2 vor:

$$\begin{aligned} \Omega_{T/k} &\simeq T \otimes_{L[x_1, \dots, x_n]} \Omega_{L[x_1, \dots, x_n]/k} \quad (??) \\ \Omega_{L[x_1, \dots, x_n]/R} &\simeq (L[x_1, \dots, x_n] \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i \in \{1, \dots, n\}} L[x_1, \dots, x_n] \langle d_{L[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \quad (??) \\ &\Rightarrow \Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle \end{aligned}$$

□

Cotangent Sequenz von Körpern 1 [Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]

Bemerkung 4. Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung und $T = L(x_1, \dots, x_n)$ der Körper der rationalen Funktionen in n Variablen über L . Dann ist die COTANGENT SEQUENZ (proposition 1) von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ eine kurze Exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Im Genauen ist $\varphi : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k}$, $t \otimes d_L(l) \mapsto t \cdot d_T(l)$ injektiv.

Beweis. Die Injektivität von φ folgt direkt aus der isomorphen Darstellung von $\Omega_{T/k}$, die wir uns in Korollar 3 erarbeitet haben.

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$

Um sicher zu gehen definiere $\varphi' \simeq \varphi$ und durchlaufe die in Korollar 3 genutzten Isomorphismen noch einmal Schritt für Schritt:

$$\varphi' : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$

$$\begin{array}{ccc}
T \otimes_L \Omega_{L/k} & & t \otimes d_L(l) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Omega_{T/k} & & td_T(l) \\
\downarrow ?? & & \downarrow \\
T \otimes_S \Omega_{L[x_1, \dots, x_n]/k} & & t \otimes d_S(l) \\
\downarrow ?? & & \downarrow \\
T \otimes_S ((S \otimes_L \Omega_{L/k}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} S \langle d_S(x_i) \rangle) & & t \otimes (d_L(l), 0) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle & & (t \otimes d_L(l), 0)
\end{array}$$

Damit ist φ eine injektive Einbettung von $T \otimes_L \Omega_{L/k}$ in $\Omega_{T/k}$. \square

Aufbaulemma Koerperdifferenzial [vgl. Lemma 16.15 David Eisenbud 1994]

Lemma 5. Sei $L \subset T$ eine seperable und algebraische Körpererweiterung und $R \rightarrow L$ ein Ringhomomorphismus. Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} = T \otimes_L \Omega_{L/R}$$

Insbesondere ist in diesem Fall die COTANGENT SEQUENZ (proposition 1) von $R \rightarrow L \hookrightarrow T$ eine kurze Exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \longrightarrow \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Beweis. Wähle $\alpha \in T$ mit $L[\alpha] = T$. Sei weiter $f(x)$ das Minimalpolynom von α . Betrachte dazu die conormale Sequenz von $\pi : L[x] \rightarrow L[x]/(f) \simeq T$ (??):

$$(f)/(f^2) \xrightarrow{1 \otimes d_{L[x]}} T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

Wende nun Proposition 16.6 auf $\Omega_{L[x]/R}$ an und tensoriere mit T , somit gilt:

$$T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \simeq T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle$$

Zusammen mit der conormalen Sequenz bedeutet dies:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle) / (d_{L[x]}(f))$$

Wenn wir $d_{L[x]} : (f) \rightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle$ wie in ?? betrachten, sehen wir:

$$d_{L[x]}((f)) = J \oplus (f'(\alpha)d_{L[x]}) = J \oplus T \langle d_{S[x]}(x) \rangle$$

, wobei $J \subseteq T \otimes_L \Omega_{L/R}$ ein Ideal ist.

Für die letzte Gleichheit nutze, dass $T \supset L$ separabel und somit $f'(\alpha) \neq 0$ ist und nach obiger Wahl $T = L[\alpha]$ gilt.

Damit erhalten wir nun:

$$\begin{aligned}\Omega_{T/R} &\simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R})/J \\ \Rightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} &\hookrightarrow \Omega_{T/R} \text{ ist surjektiv.}\end{aligned}$$

Somit muss $J = 0$ gelten und es folgt $T \otimes_L \Omega_{L/R} \simeq \Omega_{T/R}$.

Damit haben wir insbesondere auch gezeigt, dass $T \otimes_L \Omega_{L/R} \rightarrow \Omega_{T/R}$ injektiv und somit die COTANGENT SEQUENZ von $R \rightarrow L \hookrightarrow T$ eine kurze exakte Sequenz ist. \square

Transzendenzbasis ist Differenzialbasis [vgl. Theorem 16.4 David Eisenbud 1994]

Theorem 6. Sei $T \supset k$ eine separabel generierte Körpererweiterung und $B = \{b_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq T$. Dann ist B genau dann eine Differenzialbasis von T über k , falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. $\text{char}(k) = 0$ und B ist eine Transzendenzbasis von T über k .
2. $\text{char}(k) = p$ und B ist eine p -Basis von T über k .

Beweis.

1., \Leftarrow : Sei B eine Transzendenzbasis von T über k .

Damit ist die Körpererweiterung $L := k(B) \supset k$ algebraisch und separabel. Mit lemma 5 folgt:

$$\Omega_{T/k} = T \otimes_L \Omega_{L/k}$$

Betrachte $L = k[B][k[B] \setminus 0^{-1}]$ als Lokalisierung und wende ?? auf $\Omega_{L/k}$ an, somit gilt:

$$\Omega_{L/k} = L \otimes_{k[B]} \Omega_{k[B]/k}$$

In ?? haben wir gesehen, dass $\Omega_{k[B]/k}$ ein freies Modul über $k[B]$ mit $\{b_i\}_{i \in \Lambda}$ als Basis ist. Dies liefert uns letztendlich die gewünschte Darstellung

$$\Omega_{T/k} = \bigoplus_{\{i \in \Lambda\}} T \langle d_T(b_i) \rangle.$$

1., \Rightarrow : Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.

Zeige zunächst, dass T algebraisch über $L := k(B)$ ist:

Die COTANGENT SEQUENZ (*proposition 1*) von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ besagt $\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(S) \rangle$ und nach Voraussetzung gilt $\Omega_{T/k} = T\langle d_T(B) \rangle$.
 $\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L) \rangle = \Omega_{T/k}/T\langle d_T(B) \rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$

Da, wie wir in „ \Leftarrow_1 “ gezeigt haben, jede Transzendenzbasis B' von T über L auch eine Differenzialbasis von $\Omega_{T/L} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Somit ist T schon algebraisch über L .

Zeige noch, dass B auch algebraisch unabhängig über L ist:

Sei dazu Γ eine minimale Teilmenge von Λ , für welche T noch algebraisch über $k(\{b_i\}_{i \in \Gamma})$ ist. Für diese ist $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ algebraisch unabhängig über K . Damit ist nach „ \Leftarrow_1 “ $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von T über k . Also muss schon $\Gamma = \Lambda$ gegolten haben und B ist eine Transzendenzbasis von T über k .

2., „ \Leftarrow “: Sei B eine p-Basis von T über k .

Somit wird nach DEFINITION-PROPOSITION T von B als Algebra über $(k * T^p)$ und $\Omega_{T/(k * T^p)}$ von $d_T(B)$ als Vektorraum über T (*PROPOSITION*) erzeugt. Zeige also $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p * k)}$:

Die Cotangent Sequenz (*proposition 1*) von $K \hookrightarrow (k * T^p) \hookrightarrow T$ besagt:

$$\Omega_{T/(T^p * k)} \simeq \Omega_{T/k}/d_T(T^p * k)$$

Für beliebige $t^p \in T^p$ gilt $d_T(t^p) = pt^{p-1}d_T(t) = 0$, da $\text{char}(T) = p$.

$$\Rightarrow d_T(T^p * k) = d_T(k(T^p)) = 0$$

Damit ist $d_T : T \longrightarrow \Omega_{T/k}$ auch $(T^p * k)$ -linear und es gilt $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p * k)}$.

2., „ \Rightarrow “: Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.

Zeige zunächst, dass T von B als Algebra über k erzeugt wird:

Die COTANGENT SEQUENZ (*proposition 1*) von $k \hookrightarrow L := k(B) \hookrightarrow T$ besagt

$\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L) \rangle$ und nach Voraussetzung gilt $\Omega_{T/k} = T\langle d_T(B) \rangle$.
 $\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L) \rangle = \Omega_{T/k}/T\langle d_T(B) \rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$

Da, wie wir in „ \Leftarrow_2 “ gezeigt haben, jede p-Basis B' von T über L auch eine Differenzialbasis von $\Omega_{T/L} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Somit wird T schon von B als Algebra über k erzeugt.

Zeige noch, dass B auch minimal als Erzeugendensystem von T als Algebra über k ist:

Sei dazu Γ die minimale Teilmenge von Λ , für welche T noch von $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ als Algebra über k erzeugt wird. Dann ist $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ eine p-Basis von T über

k . Somit ist nach „ \Leftarrow_2 “ $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von T über k . Es muss also schon $\Gamma = \Lambda$ gegolten haben und B ist eine p-Basis von T über k .

□