

Kapitel 1

Körpererweiterungen

1.1 Einführung in die Körpererweiterungen

Definition Transzendenzbasis [vgl. Anhang A1 David Eisenbud 1994] Sei L/k eine Körpererweiterung. Dann definieren wir:

- Eine endliche Teilmenge $\{l_1, \dots, l_n\} \subseteq L$ heißt algebraisch abhängig über k , falls gilt:

$$\exists P(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n] : P(l_1, \dots, l_n) = 0$$

- Eine endliche Teilmengen $\{l_1, \dots, l_n\} \subseteq L$ heißt algebraisch unabhängig über k , falls gilt:

$$\forall P(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n] : P(l_1, \dots, l_n) \neq 0$$

- Eine Teilmenge $B \subseteq L$ heißt transzendent über k , falls jede ihrer endlichen Teilmengen $\{b_1, \dots, b_n\}$ algebraisch unabhängig über k ist.
- Eine Teilmenge $B \subseteq L$ ist eine Transzendenzbasis von L/k , falls sie transzendent über k und die Körpererweiterung $L/k(B)$ algebraisch ist.
- Falls eine Transzendenzbasis von B von L/k existiert, sodass $k(b) = L$ gilt, so ist L/k eine pur Transzendente Körpererweiterung.

pur transzendente Erweiterung [Eigene Überlegung]

Korrolar 1. Sei L/k eine pur Transzendente Körpererweiterung mit Transzendenzbasis B . Dann gilt:

$$L \simeq k(\{x_i\}_{i \in B})$$

Insbesondere ist $\{x_i\}_{i \in B}$ eine Transzendenzbasis der Körpererweiterung der rationalen Funktionen $k(\{x_i\}_{i \in B})$ über k .

Transzendenzbasis ist maximale transzendente Menge [Lemma 22.1
Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009]

Lemma 2. Sei $L \supset k$ ein Körpererweiterung und $B \subseteq L$ eine über k transzendente Teilmenge. Dann gilt:

B ist genau dann eine Transzendenzbasis von L über k , wenn B bezüglich der Inklusion ein maximales Element der Menge aller über k transzendenten Elemente aus L ist.

Beweis.

„ \Rightarrow :“ Sei B eine Transzendenzbasis über k . Zeige, dass für ein beliebiges Element $a \in L \setminus B$ die Menge $B \cup \{a\} \subseteq L$ nicht transzendent über k ist:

Da die Körpererweiterung $L \supset k(B)$ algebraisch ist existiert

$$P(x) \in k(\{b_1, \dots, b_n\}) \text{ mit } P(a) = 0.$$

Wir können ohne weitere Einschränkung annehmen, dass $P(x) \in k[\{b_1, \dots, b_n\}]$ gilt, denn falls dies nicht der Fall sein sollte, wähle $m \in \mathbb{N}$ groß genug, so dass $P(x) \cdot (\prod_i^n b_i)^m \in k[\{b_1, \dots, b_n\}]$ gilt.

Wähle nun $P'(x_1, \dots, x_n, x) \in k[x_1, \dots, x_n, x]$ mit $P(b_1, \dots, b_n, x) = P(x)$

Für dieses gilt $P'(b_1, \dots, b_n, a) = 0$. Somit ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ nicht algebraisch unabhängig und insbesondere $B \cup \{a\}$ nicht transzendent.

„ \Leftarrow :“ Sei B bezüglich der Inklusion ein maximales Element der Menge aller über k transzendenten Elemente aus L . Zeige für ein beliebiges Element $a \in L \setminus k(B)$, dass dieses algebraisch über $k(B)$ ist:

Nach Voraussetzung existiert eine endliche Teilmenge von $B \cup \{a\}$, welche algebraisch abhängig über k ist. Da B transzendent über k ist, muss diese a enthalten. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \exists \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq B : \{b_1, \dots, b_n, a\} \text{ ist algebraisch abhängig über } k \\ \Rightarrow \exists P(x_1, \dots, x_{n+1}) \in k[x] : P(b_1, \dots, b_n, a) = 0 \\ \Rightarrow \text{Für } P'(x) := P(b_1, \dots, b_n, x) \in k(B)[x] \text{ gilt } P'(a) = 0 \end{aligned}$$

Es existiert also ein Polynom $P'(x) := P(b_1, \dots, b_n, x) \in k(B)[x]$ mit $P'(a) = 0$ gefunden. Somit ist a algebraisch über $k(B)$.

□

Transzendenzbasen sind immer gleich lang [Theorem A1.1 David Eisenbud 1994]

Proposition 3. Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung. Seien weiter A, B zwei Transzendenzbasen von L über k . Dann gilt:

$$|A| = |B|$$

Wir nennen $|B|$ den Transzendenzgrad von L über k .

Beweis. Im Fall von $|A| = |B| = \infty$ sind wir schon fertig, sei also ohne Einschränkung $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ mit $\min(m, n) = n < \infty$. Wir wollen zunächst in n Schritten die Elemente aus B durch Elemente aus A ersetzen und damit zeigen, dass $\{a_1, \dots, a_n\}$ eine Transzendenzbasis von L über k ist:

Für den i -ten Schritt definiere $A_i := \{a_1, \dots, a_{i-1}\} \subseteq A$, $B_i := \{b_i, \dots, b_n\} \subseteq B$ und gehe davon aus, dass $A_i \cup B_i$ eine Transzendenzbasis ist:

Nach lemma 2 ist $\{a_i\} \cup A_i \cup B_i = A_{i+1} \cup B_i$ nicht transzendent und somit algebraisch abhängig.

Also existiert $P \in k[x_1, \dots, x_n]$ mit $P(a_i, a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, \dots, b_n) = 0$.

Definiere $P'(x) := P(a_i, a_1, \dots, a_{i-1}, x, b_{i+1}, \dots, b_n) \in k(A_{i+1} \cup B_{i+1})[x]$.

Dieses erfüllt $P'(b_i) = 0$.

Da $A_i \subseteq A$ algebraisch unabhängig ist, gilt $P(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, \dots, x_n) \neq 0$. Nummeriere also gegebenenfalls B vor der Bildung von $P'(x)$ so um, dass auch $P'(x) \neq 0$ gilt.

Die Existenz eines solchen $P'(x)$ zeigt uns, dass die Körpererweiterungen $L \subset k(A_{i+1} \cup B_i) = k(A_{i+1} \cup B_{i+1})(\{b_i\}) \subset k(A_{i+1} \cup B_{i+1})$ algebraisch sind und legt nahe, dass $A_{i+1} \cup B_{i+1}$ wieder eine Transzendenzbasis ist.

Um dies zu zeigen nehme zunächst an $A_{i+1} \cup B_{i+1}$ wäre algebraisch abhängig.

Also existiert $Q \in k[x_1, \dots, x_n]$ mit $Q(a_1, \dots, a_i, b_{i+1}, \dots, b_n) = 0$.

Definiere $Q'(x) := Q(a_1, \dots, a_{i-1}, x, b_{i+1}, b_n) \in k(a_1, \dots, a_{i-1}, b_{i+1}, b_n)[x]$.

Dieses erfüllt $Q'(a_i) = 0$.

Da $(A_{i+1} \cup B_{i+1}) \setminus \{a_i\} \subseteq A_i \cup B_i$ algebraisch unabhängig ist gilt $Q'(x) \neq 0$.

Die Existenz eines solchen $Q'(x)$ zeigt uns, dass die Körpererweiterung $L \subset k(A_{i+1} \cup B_{i+1}) \subset k((A_{i+1} \cup B_{i+1}) \setminus \{a_i\}) = k((A_i \cup B_i) \setminus \{b_i\})$ algebraisch ist. Damit ist $(A_i \cup B_i) \setminus \{b_i\}$ eine Transzendenzbasis, was nach lemma 2 im Widerspruch dazu steht, dass $A_i \cup B_i$ eine Transzendenzbasis ist.

Folglich ist $A_{i+1} \cup B_{i+1}$ transzendent und somit eine Transzendenzbasis von L über k .

Dieses Verfahren zeigt uns, dass $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$ eine Transzendenzbasis von L über k ist. Nach lemma 2 muss somit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $m = n$ gelten. \square

Korrolar 4. Jede Körpererweiterung $L \subseteq k$ besitzt eine Transzendenzbasis $B \subseteq L$.

Korrolar 5. Für jede Körpererweiterung L/k existiert ein Zwischenkörper $K \subseteq L$, sodass K/k eine pur transzendente und L/K eine algebraische Körpererweiterung ist.

Beweis. Nach ?? existiert eine Transzendenzbasis B von L/k . Nach ?? ist somit $k(B)/k$ pur Transzendent und $L/k(B)$ algebraisch.
Wähle also $K := k(B)$ □

Erinnerung: Eine Algebraische Körpererweiterung $L \supset k$ heißt seperabel, falls für alle $\alpha \in L$ das Minimalpolynom $f(x) \in k[x]$ von α über $L[x]$ in Linearfaktoren zerfällt.

Definition 6. Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung. Dann definieren wir:

- L ist seperabel generiert über k , falls eine Transzendenzbasis B von L über k existiert, sodass $L/k(B)$ eine seperable Körpererweiterung ist.
- k ist seperabel über k , falls jeder über k endlich genierte Teilkörper von L über k seperabel generiert ist.

Definition 7. Sei k ein Körper mit charakteristik p und sei weiter L/k eine Körpererweiterung. Dann definieren wir:

- Eine endliche Teilmenge $B \subseteq L$ heißt p -Basis von L über k , falls $W := \{\prod_{b \in B} b^i \mid i < p\}$ eine Vektorraumbasis von K über $k * K^p$ bildet.

1.2 Differential von Körpererweiterungen

Definition der Differenzialbasis [vgl. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]

Definition 8. Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung. Dann nennen wir eine Teilmenge $\{b_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq L$ eine Differenzialbasis von L über k , falls $\{d_K(b_i)\}_{i \in \Lambda}$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{L/R}$ über L ist.

Differential von rationalen Funktionen 1 [vgl. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]

Beispiel 9. Sei k ein Körper und $L = k(\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in n Variablen über k .

Dann gilt:

$$\Omega_{L/k} \simeq L \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle$$

Insbesondere ist $\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ eine Differenzialbasis von $\Omega_{L/k}$.

Beweis. Betrachte $L = k[x_1, \dots, x_n][k[x_1, \dots, x_n]^{-1}]$ als Lokalisierung um ?? anwenden zu können. Anschließend forme noch $\Omega_{k[x_1, \dots, x_n]/k}$ mithilfe von ?? isomorph um:

$$\begin{aligned} \Omega_{L/k} &\simeq L \otimes \Omega_{k[x_1, \dots, x_n]/k} \\ &\simeq L \otimes \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} k[x_1, \dots, x_n] \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \\ &\simeq L \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \end{aligned}$$

Damit ist $\{d_L(x_i)\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{L/k}$. □

Differential von rationalen Funktionen 2 [Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]

Korrolar 10. Sei k ein Körper und $L \supset k$ eine Körpererweiterung und $T = L(\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in n Variablen über L . Dann gilt:

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$

Beweis. Betrachten T als Lokalisierung von $L[x_1, \dots, x_n]$ und gehen dann analog zu Beispiel 9 vor:

$$\begin{aligned} \Omega_{T/k} &\simeq T \otimes_{L[x_1, \dots, x_n]} \Omega_{L[x_1, \dots, x_n]/k} \quad (??) \\ \Omega_{L[x_1, \dots, x_n]/R} &\simeq (L[x_1, \dots, x_n] \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i \in \{1, \dots, n\}} L[x_1, \dots, x_n] \langle d_{L[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \quad (??) \\ &\Rightarrow \Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle \end{aligned}$$

□

Cotangent Sequenz von Körpern 1 [Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]

Bemerkung 11. Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung und $T = L(x_1, \dots, x_n)$ der Körper der rationalen Funktionen in n Variablen über L . Dann ist die COTANGENT SEQUENZ (??) von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ eine kurze Exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Im Genauen ist $\varphi : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k}$, $t \otimes d_L(l) \longmapsto t \cdot d_T(l)$ injektiv.

Beweis. Die Injektivität von φ folgt direkt aus der isomorphen Darstellung von $\Omega_{T/k}$, die wir uns in korollar 10 erarbeitet haben.

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$

Um sicher zu gehen definiere $\varphi' \simeq \varphi$ und durchlaufe die in korollar 10 genutzten Isomorphismen noch einmal Schritt für Schritt:

$$\begin{array}{ccc} \varphi' : T \otimes_L \Omega_{L/k} & \longrightarrow & T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle \\ \\ \begin{array}{c} T \otimes_L \Omega_{L/k} \\ \downarrow \\ \Omega_{T/k} \\ \downarrow \text{??} \\ T \otimes_S \Omega_{L[x_1, \dots, x_n]/k} \\ \downarrow \text{??} \\ T \otimes_S ((S \otimes_L \Omega_{L/k}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} S \langle d_S(x_i) \rangle) \\ \downarrow \\ (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle \end{array} & & \begin{array}{c} t \otimes d_L(l) \\ \downarrow \\ td_T(l) \\ \downarrow \\ t \otimes d_S(l) \\ \downarrow \\ t \otimes (d_L(l), 0) \\ \downarrow \\ (t \otimes d_L(l), 0) \end{array} \end{array}$$

Damit ist φ eine injektive Einbettung von $T \otimes_L \Omega_{L/k}$ in $\Omega_{T/k}$. \square

Aufbaulemma Koerperdifferenzial [vgl. Lemma 16.15 David Eisenbud 1994]

Lemma 12. Sei $L \subset T$ eine seperable und algebraische Körpererweiterung und $R \longrightarrow L$ ein Ringhomomorphismus. Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} = T \otimes_L \Omega_{L/R}$$

Insbesondere ist in diesem Fall die COTANGENT SEQUENZ (??) von $R \rightarrow L \hookrightarrow T$ eine kurze Exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \longrightarrow \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Beweis. Wähle $\alpha \in T$ mit $L[\alpha] = T$. Sei weiter $f(x)$ das Minimalpolynom von α . Betrachte dazu die conormale Sequenz von $\pi : L[x] \longrightarrow L[x]/(f) \simeq T$ (??):

$$(f)/(f^2) \xrightarrow{1 \otimes d_{L[x]}} T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

Wende nun Proposition 16.6 auf $\Omega_{L[x]/R}$ an und tensoriere mit T , somit gilt:

$$T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \simeq T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle$$

Zusammen mit der conormalen Sequenz bedeutet dies:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle) / (d_{L[x]}(f))$$

Wenn wir $d_{L[x]} : (f) \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle$ wie in ?? betrachten, sehen wir:

$$d_{L[x]}((f)) = J \oplus (f'(\alpha) d_{L[x]}) = J \oplus T \langle d_{S[x]}(x) \rangle$$

, wobei $J \subseteq T \otimes_L \Omega_{L/R}$ ein Ideal ist.

Für die letzte Gleichheit nutze, dass $T \supset L$ separabel und somit $f'(\alpha) \neq 0$ ist und nach obiger Wahl $T = L[\alpha]$ gilt.

Damit erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} \Omega_{T/R} &\simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) / J \\ &\Rightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \hookrightarrow \Omega_{T/R} \text{ ist surjektiv.} \end{aligned}$$

Somit muss $J = 0$ gelten und es folgt $T \otimes_L \Omega_{L/R} \simeq \Omega_{T/R}$.

Damit haben wir insbesondere auch gezeigt, dass $T \otimes_L \Omega_{L/R} \rightarrow \Omega_{T/R}$ injektiv und somit die COTANGENT SEQUENZ von $R \rightarrow L \hookrightarrow T$ eine kurze exakte Sequenz ist. \square

Transzendenzbasis ist Differenzialbasis [vgl. Theorem 16.4 David Eisenbud 1994]

Theorem 13. Sei $T \supset k$ eine separabel generierte Körpererweiterung und $B = \{b_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq T$. Dann ist B genau dann eine Differenzialbasis von T über k , falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. $\text{char}(k) = 0$ und B ist eine Transzendenzbasis von T über k .
2. $\text{char}(k) = p$ und B ist eine p -Basis von T über k .

Beweis.

1., „ \Leftarrow “: Sei B eine Transzendenzbasis von T über k .

Damit ist die Körpererweiterung $L := k(B) \supset k$ algebraisch und separabel.

Mit lemma 12 folgt:

$$\Omega_{T/k} = T \otimes_L \Omega_{L/k}$$

Betrachte $L = k[B][k[B] \setminus 0^{-1}]$ als Lokalisierung und wende ?? auf $\Omega_{L/k}$ an, somit gilt:

$$\Omega_{L/k} = L \otimes_{k[B]} \Omega_{k[B]/k}$$

In ?? haben wir gesehen, dass $\Omega_{k[B]/k}$ ein freies Modul über $k[B]$ mit $\{b_i\}_{i \in \Lambda}$ als Basis ist. Dies liefert uns letztendlich die gewünschte Darstellung

$$\Omega_{T/k} = \bigoplus_{\{i \in \Lambda\}} T\langle d_T(b_i) \rangle.$$

1.,,⇒“: Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.

Zeige zunächst, dass T algebraisch über $L := k(B)$ ist:

Die COTANGENT SEQUENZ (??) von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ besagt
 $\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(S) \rangle$ und nach Voraussetzung gilt $\Omega_{T/k} = T\langle d_T(B) \rangle$.
 $\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L) \rangle = \Omega_{T/k}/T\langle d_T(B) \rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$

Da, wie wir in „ \Leftarrow_1 “ gezeigt haben, jede Transzendenzbasis B' von T über L auch eine Differenzialbasis von $\Omega_{T/L} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Somit ist T schon algebraisch über L .

Zeige noch, dass B auch algebraisch unabhängig über L ist:

Sei dazu Γ eine minimale Teilmenge von Λ , für welche T noch algebraisch über $k(\{b_i\}_{i \in \Gamma})$ ist. Für diese ist $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ algebraisch unabhängig über K . Damit ist nach „ \Leftarrow_1 “ $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von T über k . Also muss schon $\Gamma = \Lambda$ gegolten haben und B ist eine Transzendenzbasis von T über k .

2.,,⇐“: Sei B eine p -Basis von T über k .

Somit wird nach DEFINITION-PROPOSITION T von B als Algebra über $(k * T^p)$ und $\Omega_{T/(k * T^p)}$ von $d_T(B)$ als Vektorraum über T (PROPOSITION) erzeugt. Zeige also $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p * k)}$:

Die Cotangent Sequenz (??) von $K \hookrightarrow (k * T^p) \hookrightarrow T$ besagt:

$$\Omega_{T/(T^p * k)} \simeq \Omega_{T/k}/d_T(T^p * k)$$

Für beliebige $t^p \in T^p$ gilt $d_T(t^p) = pt^{p-1}d_T(t) = 0$, da $\text{char}(T) = p$.
 $\Rightarrow d_T(T^p * k) = d_T(k(T^p)) = 0$

Damit ist $d_T : T \longrightarrow \Omega_{T/k}$ auch $(T^p * k)$ -linear und es gilt $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p * k)}$.

2.,,⇒“: Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.

Zeige zunächst, dass T von B als Algebra über k erzeugt wird:

Die COTANGENT SEQUENZ (??) von $k \hookrightarrow L := k(B) \hookrightarrow T$ besagt
 $\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L) \rangle$ und nach Voraussetzung gilt $\Omega_{T/k} = T\langle d_T(B) \rangle$.
 $\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L) \rangle = \Omega_{T/k}/T\langle d_T(B) \rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$

Da, wie wir in „ \Leftarrow_2 “ gezeigt haben, jede p -Basis B' von T über L auch

eine Differenzialbasis von $\Omega_{T/L} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Somit wird T schon von B als Algebra über k erzeugt.

Zeige noch, dass B auch minimal als Erzeugendensystem von T als Algebra über k ist:

Sei dazu Γ die minimale Teilmenge von Λ , für welche T noch von $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ als Algebra über k erzeugt wird. Dann ist $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ eine p-Basis von T über k . Somit ist nach „ \Leftarrow 2.“ $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von T über k . Es muss also schon $\Gamma = \Lambda$ gegolten haben und B ist eine p-Basis von T über k .

□