DifferenzkokernUndKoproduktDef

Definition 1.

NeuDifferenzenkokerndef"

Bemerkung 2. *[Wikipedia] Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie. Sei weiter $C_1, C_2 \in Obj_{\mathcal{A}}$ und $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$.*
Im Falle der Existenz ist der Differnenzenkokern von f, g nach definition 1 durch ein Objekt $C \in Obj_{\mathcal{A}}$ und einen Morphismus $\psi = \{\psi_{C_1}, \psi_{C_2}\}$ gegeben, wobei gilt:

$$\psi_{C_2} = f \circ \psi_1 = g \circ \psi_2$$

Wir sehen, dass ψ eindeutig durch $q := \psi_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$ gegeben ist. Der Differnzenkokern ist also eindeutig durch $(C \in obj_{\mathcal{A}}, q \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2))$ gegeben, wobei q folgenden Eigenschaften besitzt:

Es gilt $f \circ q = g \circ g$ und
für alle $C \in Obj_A$ und $q' \in Hom_{\mathcal{A}}$ mit $f \circ q' = g \circ q'$ existiert genau ein $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}$, mit $q \circ \varphi = q'$:

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "f,g"] & C_2 \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q'"'] & C \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & & C' \end{tikzcd}$$

Wenn wir fortan vom Differenzkokern sprechen meinen wir damit das Paar (C, q).

NeuDifferenzenkokerndef'

Lemma 3. *[Wikipedia]*

(1.) Sei weiter $C \in Obj_{\mathcal{C}}$ und $q : C_2 \longrightarrow C$ mit $f \circ q = g \circ q$ und der folgenden universellen Eigenschaft gegeben:

Für alle $C' \in Obf_{\mathcal{C}}$ und $q' \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, C')$, mit $f \circ q = g \circ q$ erfüllen existiert genau ein $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}$, mit $q \circ \varphi = q'$:

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "f,g"] & C_2 \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q'"'] & C \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & & C' \end{tikzcd}$$

Dann existiert den Differenzkokern von f, g und ist durch C und den Morphismus $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow C$ mit $\psi_{C_1} = f \circ q$ und $\psi_{C_2} = q$ gegeben.

(2.) Falls der Differenzkokern (C, ψ) von f, g existiert, so existiert auch ein eindeutiges $q \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, C)$, welches die in (1.) beschriebenen Eigenschaften erfüllt.

Beweis. □

NeuDifferenzenkokerndef *[vlg. Wikipedia aber eigener Beweis]*

Lemma 4. *Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie mit $C_1, C_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$, so sind folgende Formulierungen äquivalent zur Definition des Differenzkokern's $T := \varinjlim \mathcal{C}$*

1. *Es existiert ein Morphismus $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow T$, mit der Eigenschaft, dass für alle Morphismen $\psi' : \mathcal{C} \longrightarrow T'$ genau ein $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(T, T')$ mit $\varphi \circ \psi = \psi'$ existiert.*

2. *Es existiert ein $q \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, T)$ mit $q \circ f = q \circ g$ und der Eigenschaft, dass für alle Morphismen $q' \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, Z)$ mit $q' \circ f = q' \circ g$ genau ein $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(T, T')$ mit $\varphi \circ q = q'$ existiert.*

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "f,g"] & C_2 \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q'"'] & T \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\
 & & T'
\end{tikzcd}$$

Beweis. *1.* ist offensichtlich eine Ausformulierung der Einführung des Kolimes aus **??**, zeige also im folgenden noch die Äquivalenz von *1.* und *2.*

- <u>1 ⇒ 2:</u>

  Da $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow T$ ein Morphismus ist, gilt für $\{f, g\} = Hom_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$: $\psi_{C_1} = \psi_{C_2} \circ f = \psi_{C_1} \circ \psi_{C_2}$, setze also $q := \psi_{C_2}$.

  Sei nun $q' \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, T)$ mit der Eigenschaft $q' \circ f = q' \circ g$ gegeben: Definiere den Morphismus $\psi' : \mathcal{C} \longrightarrow T$ als $\{\psi_1 = q' \circ f, \psi_2 = q'\}$, somit folgt direkt aus der Universellen Eigenschaft von ψ, dass genau ein $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, T)$ existiert, mit $\varphi \circ q = q'$.

- <u>2 ⇒ 1:</u>

  Definiere $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow T$ als $\{\psi_1 = q \circ f, \psi_2 = q\}$. Durch die Eigenschaft von q gilt $\psi_{C_1} = \psi_{C_2} \circ f = \psi_{C_2} \circ g$.

  Sei nun $\psi' : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein beliebiger Morphismus.
  Definiere $d' := \psi'$, somit existiert durch die Eigenschaft von d genau ein $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, T)$ mit $\varphi \circ q = q'$.

$$\Rightarrow \varphi \circ \psi_2 = \psi'_2$$
$$\textit{und } \varphi \circ \psi_1 = \varphi \circ \psi_2 \circ f = \varphi \circ \psi'_2 \circ f = \varphi \circ \psi'_1$$

□

Wenn im weiteren Verlauf von dem Differenzkokern zweier Homomorphismen $f, g : C_1 \longrightarrow C_2$ gesprochen wird, meinen wir damit den Homomorphismus $q : C_2 \longrightarrow T$ aus lemma 4.