**Definition Transzenddenzbasis** *[vlg. Anhang A1 David Eisenbud 1994]*
Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung. Dann definieren wir:

- Eine endliche Teilmenge $\{l_1, \dots, l_n\} \subseteq L$ heißt algebraisch abhängig über $k$, falls gilt:

$$\exists P(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n] : \, P(l_1, \dots, l_n) = 0$$

- Eine endliche Teilmengen $\{l_1, \dots, l_n\} \subseteq L$ heißt algebraisch unabhängig über $k$, falls gilt:

$$\forall P(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n] : \, P(l_1, \dots, l_n) \neq 0$$

- Eine Teilmenge $B \subseteq L$ heißt transzendent über $k$, falls jede ihrer endlichen Teilmengen $\{b_1, \dots, b_n\}$ algebraisch unabhängig über $k$ ist.
- Eine Teilmenge $B \subseteq L$ ist eine Transzendenzbasis von $L$ über $k$, falls sie transzendent über $k$ und die Körpererweiterung $L \supset k(B)$ algebraisch ist.

**Transzendenzbasis ist maximale transzendente Menge** *[Lemma 22.1 Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009]*

**Lemma 1.** *Sei $L \supset k$ ein Körpererweiterung und $B \subseteq L$ eine über $k$ transzendente Teilmenge. Dann gilt:*
*$B$ ist genau dann eine Transzendenzbasis von $L$ über $k$, wenn $B$ bezüglich der Inklusion ein maximales Element der Menge aller über $k$ transzendenten Elemente aus $L$ ist.*

*Beweis.*

„$\Rightarrow$:“ Sei B eine Transzendenzbasis über $k$. Zeige, dass für ein beliebiges Element $a \in L \setminus B$ die Menge $B \cup \{a\} \subseteq L$ nicht transzendent über $k$ ist:

Da die Körpererweiterung $L \supset k(B)$ algebraisch ist existiert
$P(x) \in k(\{b_1, \dots, n\})$ mit $P(a) = 0$.

Wir können ohne weitere Einschränkung annehmen, dass $P(x) \in k[\{b_1, \dots, n\}]$ gilt, denn falls dies nicht der Fall sein sollte, wähle $m \in \mathbb{N}$ groß genug, sodass $P(x) \cdot (\prod_i{}^n b_i)^m \in k[\{b_1, \dots, n\}]$ gilt.

Wähle nun $P'(x_1, \dots, x_n, x) \in k[x_1, \dots, x_n, x]$ mit $P(b_1, \dots, b_n, x) = P(x)$

Für dieses gilt $P'(b_1, \dots, b_n, a) = 0$. Somit ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ nicht algebraisch unabhängig und insbesondere $B \cup \{a\}$ nicht transzendent.

„$\Leftarrow$:“ Sei $B$ bezüglich der Inklusion ein maximales Element der Menge aller über $k$ transzendenten Elemente aus $L$. Zeige für ein beliebiges Element

$a \in L \setminus k(B)$, dass dieses algebraisch über $k(B)$ ist:

Nach Voraussetzung existiert eine endliche Teilmenge von $B \cup \{a\}$, welche algebraisch abhängig über $k$ ist. Da $B$ transzendent über $k$ ist, muss diese $a$ enthalten. Somit gilt:

$$\exists \{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq B : \{b_1, \ldots, b_n, a\} \textit{ ist algebraisch abhängig über } k$$
$$\Rightarrow \exists P(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in k[x] : P(b_1, \ldots, b_n, a) = 0$$
$$\Rightarrow \text{Für } P'(x) := P(b_1, \ldots, b_n, x) \in k(B)[x] \text{ gilt } P'(a) = 0$$

Es existiert also ein Polynom $P'(x) := P(b_1, \ldots, b_n, x) \in k(B)[x]$ mit $P'(a) = 0$ gefunden. Somit ist $a$ algebraisch über $k(B)$.

□

**Transzendenzbasen sind immer gleich lang** *[Theorem A1.1 David Eisenbud 1994]*

**Proposition 2.** *Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung. Seinen weiter $A$, $B$ zwei Transzendenzbasen von $L$ über $k$. Dann gilt:*

$$|A| = |B|$$

*Wir nennen $|B|$ den Transzendenzgrad von $L$ über $k$.*

*Beweis.* Sei ohne Einschränkung $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ mit $min(m, n) = n < \infty$.
Wir wollen in $n$ Schritten die Elemente aus $B$ durch Elemente aus $A$ ersetzten und damit zeigen, dass $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ein Transzendenzbasis von $L$ über $k$ ist:

Für den $i$-ten Schritt betrachte $A_k := \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$ und $B_i := \{b_i, \ldots, b_n\}$. Wobei $A_i \cup B_i$ eine Transzendenzbasis von $L$ über $k$ ist.
Betrachte $a_i \in A$. Nach lemma 1 ist $A_i \cup \{a_i\} \cup B_i$ nicht transzendent und somit algebraisch abhängig.
Folglich existiert eine Polynom $P \in K[x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_i, \ldots x_n]$ mit $P(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, b_i, \ldots b_n) = 0$.
Da $\{a_1, \ldots, a_i\} \subseteq A$ algebraisch unabhäing über $k$ ist kommt nach evenueller umnummerierung $b_i \in B_i$ echt in $P(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, b_i, \ldots b_n)$ vor.
Wenn wir $P$ als Polynom mit Koeffizienen aus $k[a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, b_{i+1}, \ldots b_n]$ betrachten, in das wir $b_k$ einsetzen, bedeutet dies, dass $b_k$ algebraisch über $A_{i+1} \cup B_{i+1}$ ist.
Folglich sind die Körpererweiterungen $L \supset k(A_i \cup \{a_i\} \cup B_i) \supset k(A_{i+1} \cup B_{i+1})$ und $L \supset k(A_{i+1} \cup B_{i+1})$ algebraisch.
Zeige also noch, dass $A_{i+1} \cup B_{i+1}$ transzendent über $k$ ist:
Nehme an, dies wäre nicht der Fall, somit existiert eine Polynom $P \in K[x_1, \ldots, x_n]$ mit $P(a_1, \ldots, a_i, b_{i+1}, \ldots, b_n) = 0$. Da $\{a_1, \ldots, a_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n\} \subseteq A_i \uplus B_i$ algebraisch unabhängig über $k$ ist, muss $a_{k+1}$ echt in $P(a_1, \ldots, a_i, b_{i+1}, \ldots, b_n)$

vorkommen. Wie oben können wir daraus folgern, dass $a_{i+1}$ algebraisch über $k(\{a_1, \ldots, a_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n\})$ ist.
Folglich sind die Körpererweiterungen $L \supset k(A_{i+1} \cup B_{i+1}) \supset k(\{a_1, \ldots, a_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n\})$ und $L \supset k(\{a_1, \ldots, a_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n\})$ algebraisch. Dies steht allerdings im Widerspruch dazu, dass $A_i \cup B_i = \{a_1, \ldots, a_{i-1}, b_i, \ldots, b_n\}$ eine Transzendenzbasis von $L$ über $k$ ist. Damit ist $A_{i+1} \cup B_{i+1}$ eine Transzendenzbasis von $L$ über $k$ ist.

Wenn wir $n$ viele Schritte dieses Verfahrens durchführen sehen wir, dass $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ eine Transzendenbasis von $L$ über $k$ ist. Da Nach lemma 1 muss somit $\{a_1, \ldots, a_n\} = A$ und $m = n$ gelten.

$\square$