Proposition 1. *in der Kategorie der R-Algeben existieren Coprodukte und Differenzenkokerne, wobei:*

1. *Das Coprodukt* $\varinjlim(\mathcal{F} : \{B_i\}_{i\in\Lambda} \hookrightarrow R - Agebren$ *einer endlichen Familie von* $R - Algebren$ *entspricht deren Tesorprodukt* $\bigotimes_{i\in\Lambda} B_i$.

2. *Seien* $f, g : C_1 \longrightarrow C_2$ *R-Algebra-Homomorphismen, setze* $Q := \{f(x) - g(x) \mid x \in C_2\}$.
Dann ist $q : C_2 \longrightarrow C_2/Q\ ,\ y \longmapsto [y]$ *der Differenzenkokern von* f, g.

Beweis. Zu ***1.***:
Nutze die universellen Eigenschaften des Tensorproduktes und des Kähler-Differenzials.
Es sind also der Morphismus $\psi : (\mathcal{F} : \{B_i\} \hookrightarrow (R - Algebren)) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}$ und die bilineare Abbildung $g : \oplus_i B_i \longrightarrow \otimes_i B_i$ gegeben.
Konstruieren den Morphismus $\psi' : \mathcal{F} \longrightarrow \otimes_i B_i$ durch $\psi'_i : B_i \longrightarrow \otimes_i B_i\ ,\ b_i \longmapsto g(1, .., 1, b_i, 1, .., 1)$ für $i \in \lambda$. Konstruiere außerdem die bilineare Abbildung $f : \oplus_i B_i \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}\ ,\ b \longmapsto \prod_i \psi_i b_i$.

Durch die universellen Eigenschaften erhalten wir die R-Algebra-Homomorphismen $\varphi : \varinjlim \mathcal{F} \longrightarrow \bigotimes_i B_i$ und $\phi : \bigotimes_i B_i \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F} : \{B_i\} \hookrightarrow (R - Algebren) \arrow[dl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
\otimes_i B_i & & \varinjlim \mathcal{F} \arrow[ll, dashed, "\exists! \varphi"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \oplus_i B_i \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
\varinjlim \mathcal{F} & & \otimes_i B_i \arrow[ll, dashed, "\exists! \phi"']
\end{tikzcd}$$

Weiter ergeben sich auch durch die universellen Eigenschaften
$id_{\varinjlim \mathcal{F}} = \phi \circ \varphi$ *und* $id_{\bigotimes_i B_i} = \varphi \circ \phi$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F} \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
\varinjlim \mathcal{F} & & \varinjlim \mathcal{F} \arrow[ll, dashed, "\exists! id_{\varinjlim \mathcal{F}} = \phi\circ\varphi"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \bigoplus_i B_i \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "g"] & \\
\bigotimes_i B_i & & \bigotimes_i B_i \arrow[ll, dashed, "\exists! id_{\bigotimes_i B_i} = \varphi\circ\phi"']
\end{tikzcd}$$

Zu ***2.***:

$$q \circ f = q \circ g \ \textit{gilt, da}\ kern(q) = Q = \{f(x) - g(x) \mid x \in C_2\}$$

Sei nun eine Funktion $q' \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, T')$ mit $q' \circ f = q' \circ$ gegeben.

$q' \circ (f - g) = 0 \Rightarrow Q$ *ist Untermodul von* $Q' := kern(q')$.

Nach HOMOMORPHIESATZ [kommutative Algebra 2.10] gilt $C_2/Q' \simeq (C_2/Q)/(Q'/Q))$.

$\Rightarrow$ *für* $q' : C_2 \longrightarrow (C_2/Q)/(Q'/Q))\ ,\ y \longmapsto [y]'$ *ist eine isomorphw Darstellung von* $q' : C_2 \longrightarrow T'$

$\Rightarrow \exists! \varphi : C_2/Q \longrightarrow (C_2/Q)/(Q'/Q)\ ,\ [y] \longmapsto [y]'$ *mit* $(\varphi \circ q) = q'$.

$\square$