Kapitel 1

Kolimes

1.1 Einführung in den Kolimes

Definition des Kolimes

Definition 1. *[vgl. Anhang A6 David Eisenbud 1994] Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie.*

- *Ein Diagramm über $\mathcal{A}$ ist eine Kategorie $\mathcal{B}$ zusammen mit einem Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$.*

- *Sei $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Diagramm und $A \in \mathcal{A}$ ein Objekt. Dann definieren wir einen Morphismus $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$ als eine Menge von Funktionen $\{\psi_B \in Hom(F(B), A) | B \in \mathcal{B}\}$, wobei für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $\varphi \in Hom(B_1, B_2)$ folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(B_1) \arrow[d, "\mathcal{F}(\varphi)"] \arrow[dr, "\psi_{B_1}"] & \\
& C \\
\mathcal{F}(B_2) \arrow[ur, "\psi_{B_2}"'] &
\end{tikzcd}$$

- *Der Kolimes $\varinjlim \mathcal{F}$ eines Diagramms $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ist ein Paar aus einem Objekt $A \in \mathcal{A}$ zusammen mit einem Morphismus $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$, welche folgende universelle Eingenschaft erfüllen:*

  Für Objekte $A' \in \mathcal{A}$ und alle Morphismen $\psi' : \mathcal{F} \longrightarrow A'$ existiert genau eine Funktion $\varphi \in Hom(A, A')$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{F} \arrow[dl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
A' & & A \arrow[ll, dashed, "\exists!\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Eindeutigkeit des Kolimes *[vgl. A6 David Eisenbud 1994]*

Lemma 2. *Seien $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ zwei Kategorien und $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor. Dann ist im Falle der Existenz $\varinjlim \mathcal{F}$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien $A_1 \in \mathcal{A}, (\psi_1 : \mathcal{F} \longrightarrow A_1)$ und $A_2 \in \mathcal{A}, (\psi_2 : \mathcal{F} \longrightarrow A_2)$ beide gleich $\varinjlim \mathcal{F}$.
Erhalte durch die universelle Eigenschaft des Kolimes die eindeutig bestimmten Funktionen $\varphi_1 \in Hom_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$ und $\varphi_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(A_2, A_1)$, für welche die folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F} \arrow[dl, "\psi_2"'] \arrow[dr, "\psi_1"] & \\ A_2 & & A_1 \arrow[ll, dashed, "\exists! \varphi_1"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathcal{F} \arrow[dl, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\psi_2"] & \\ A_1 & & A_2 \arrow[ll, dashed, "\exists! \varphi_2"'] \end{tikzcd}$$

Wende nun die Universelle Eigenschaft von ψ_1 auf ψ_1 selbst an und erhalte $id_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1$. Analog erhalte auch $id_{A_2} = \varphi_1 \circ \varphi_2$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F} \arrow[dl, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\psi_1"] & \\ A_1 & & A_1 \arrow[ll, dashed, "\exists! id_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1"'] \end{tikzcd}$$

Somit existiert genau eine Isomorphie $\varphi_1 : A_1 \longrightarrow A_2$. $\square$

Vereinfachung des Kolimes

Korrolar 3. *[Eigene Überlegung]*
Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie und $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$ ein Diagramm. Betrachte die Unterkategorie $\mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{A}$ zusammen mit dem Inklusionsfunktor $\mathcal{F}(B) \hookrightarrow \mathcal{A}$ ebenfalls als Diagramm. Dann gilt:

$$\varinjlim \mathcal{F} \text{ existiert genau dann, wenn } \varinjlim(\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \text{ existiert.}$$
$$\text{Mit } \varinjlim \mathcal{F} = \varinjlim(\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}).$$

Beweis. Dies folgt direkt aus unserer Definition von Morphismen:
In definition 1 haben wir einen Morphismus $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$ als eine Menge von Funktionen $\psi_{\mathcal{B}} \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(B), A)$ definiert. Dies zeigt, dass es keinen Unterschied macht, ob wir von Morphismen $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$ oder von Morphismen $\psi : (\mathcal{F}(B) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$ reden.
Wenn wir nun die universelle Eigenschaft des Kolimes genauer betrachten, sehen wir, dass diese sich nur auf Morphismen $\mathcal{F} \longrightarrow A$ bzw. $(\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$ und auf die Kategorie $\mathcal{A}$ bezieht. Es macht also keinen Unterschied, ob wir vom Kolimes des Diagramms $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$ oder vom Kolimes des Diagramms $(\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(B) \hookrightarrow \mathcal{A})$ sprechen. $\square$

Es genügt also im Fall von Kolimtenn Diagramme $(\mathcal{B}, \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$ mit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ zu betrachten. Zur Vereinfachung schreibe für $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ in Zukunft $\varinjlim \mathcal{B}$ anstatt von $\varinjlim(\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$.

DifferenzkokernUndKoproduktDef

Definition 4. *[vlg. A6 David Eisenbud 1994]*
Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie.

- *Das Koprodukt von $\{B_i\}_{i\in\Lambda} \subseteq \mathcal{A}$ wird durch $\coprod_{i\in\Lambda}\{B_i\} := \varinjlim \mathcal{B}$ definiert, wobei $\{B_i\}_{i\in\Lambda}$ die Objekte und die Identitätsabbildungen $\{id_{B_i} : B_i \longrightarrow B_i\}_{i\in\Lambda}$ die einzigen Morphismen von $\mathcal{B}$ sind.*

- *Der Differenzkokern von $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$ wird durch $\varinjlim \mathcal{C}$ definiert, wobei $\{C_1, C_2\}$ die Objekte und $\{f, g\}$ zusammen mit den Identitätsabbildungen die Morphismen von $\mathcal{C}$ sind.*

Kolimes durch Koprodukt und Differenzkokern

Theorem 5. *[Proposition A6.1 David Eisenbud 1994]*
Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie, in der Koprodukte beliebiger Mengen von Objekten und Differenzkokerne von je zwei Morphismen existieren. Dann existiert für jedes Diagramm $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ dessen Kolimes $\varinjlim \mathcal{F}$.

Beweis. In korrolar 3 haben wir gesehen, dass es genügt den Fall $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ zu betrachten. Konstruiere also für eine beliebige Unterkategorie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ deren Kolimes $\varinjlim(\mathcal{F})$:
Bezeichne für jeden Morphismus $\gamma \in Morph_{\mathcal{C}}$ dessen Definitionsbreich mit $B_\gamma \in \mathcal{B}$. Definiere nun:

- $C_1 := \coprod_{\gamma\in Morph_{\mathcal{B}}} B_\gamma$ ist das Koprodukt aller Objekte von $\mathcal{B}$, in dem jedes Objekt so oft vorkommt, wie es Definitionsbereich eines $\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}$ ist.
Sei $\psi^1 : \{B_\gamma | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_1$ der dazugehörige Morphismus.

- $C_2 := \coprod_{B\in Obj_{\mathcal{B}}}$ ist das Koprodukt aller Objekte von $\mathcal{B}$. Sei $\psi^2 : \{B | B \in Obj_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_2$ der dazugehörige Morphismus.

Konstruiere nun $f, g \in Hom_{\mathcal{B}} C_1, C_2$ so, dass der Differenzkokern von f und g gleich dem Kolimes von $\mathcal{B}$ ist:

Für f betrachte den Morphismus $\Phi : \{B_\gamma | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_2$,
mit $\Phi_{B_\gamma} = \psi^2_{\gamma(B_\gamma)} \circ \gamma$ für $B_\gamma \in \{B_\gamma | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\}$.
Wende die universelle Eigenschaft von $C_1 = \varinjlim\{B_\gamma | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\}$ an:

$$\begin{tikzcd}
 & \{B_\gamma | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\} \arrow[dl, "\psi^1"'] \arrow[dr, "\psi^1"] & \\
C_2 & & C_1 \arrow[ll, dashed, "\exists! f"']
\end{tikzcd}$$

Wähle $f \in Hom_{\mathcal{B}}(C_1, C_2)$ als die eindeutige Funktion, für die $\Phi = \psi^1 \circ f$ gilt.

Für g betrachte den Morphismus $\Phi' : \{B_\gamma | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_2$,
mit $\Phi'_{B_\gamma} = \psi^2_{\gamma(B_\gamma)}$ für $B_\gamma \in \{B_\gamma | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\}$.
Wähle analog zu f mithilfe der universellen Eigenschaft des Kolimes $g \in Hom_{\mathcal{B}}(C_1, C_2)$ als die eindeutige Funktion, für die $\Phi' = \psi^1 \circ g$ gilt.

Sei $C \in Obj_{\mathcal{B}}$ zusammen mit dem Morphismus ζ der Differenzkokern von f,g. Zeige Abschließend, dass $(C, \psi : \mathcal{B} \longrightarrow \zeta \circ \psi^2$ Der Kolimes von $\mathcal{B})$ ist:

$\square$

NeuDifferenzenkokerndef *[vlg. Wikipedia aber eigener Beweis]*

Lemma 6. *Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie mit $C_1, C_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$, so sind folgende Formulierungen äquivalent zur Definition des Differenzkokern's $T := \varinjlim \mathcal{C}$*

1. *Es existiert ein Morphismus $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow T$, mit der Eigenschaft, dass für alle Morphismen $\psi' : \mathcal{C} \longrightarrow T'$ genau ein $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(T, T')$ mit $\varphi \circ \psi = \psi'$ existiert.*

2. *Es existiert ein $q \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, T)$ mit $q \circ f = q \circ g$ und der Eigenschaft, dass für alle Morphismen $q' \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, Z)$ mit $q' \circ f = q' \circ g$ genau ein $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(T, T')$ mit $\varphi \circ q = q'$ existiert.*

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "f{,}g"] & C_2 \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q'"] & T \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & & T' \end{tikzcd}$$

Beweis. *1.* ist offensichtlich eine Ausformulierung der Einführung des Kolimes aus **??**, zeige also im folgenden noch die Äquivalenz von *1.* und *2.*

- 1 $\Rightarrow$ 2:

  Da $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow T$ ein Morphismus ist, gilt für $\{f, g\} = Hom_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$: $\psi_{C_1} = \psi_{C_2} \circ f = \psi_{C_1} \circ \psi_{C_2}$, setze also $q := \psi_{C_2}$.

  Sei nun $q' \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, T)$ mit der Eigenschaft $q' \circ f = q' \circ g$ gegeben: Definiere den Morphismus $\psi' : \mathcal{C} \longrightarrow T$ als $\{\psi_1 = q' \circ f, \psi_2 = q'\}$, somit folgt direkt aus der Universellen Eigenschaft von ψ, dass genau ein $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, T)$ existiert, mit $\varphi \circ q = q'$.

- 2 $\Rightarrow$ 1:

  Definiere $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow T$ als $\{\psi_1 = q \circ f, \psi_2 = q\}$. Durch die Eigenschaft von q gilt $\psi_{C_1} = \psi_{C_2} \circ f = \psi_{C_2} \circ g$.

  Sei nun $\psi' : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein beliebiger Morphismus.
  Definiere $d' := \psi'$, somit existiert durch die Eigenschaft von d genau ein $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, T)$ mit $\varphi \circ q = q'$.

$$\Rightarrow \varphi \circ \psi_2 = \psi_2'$$
$$\textit{und } \varphi \circ \psi_1 = \varphi \circ \psi_2 \circ f = \varphi \circ \psi_2' \circ f = \varphi \circ \psi_1'$$

$\square$

Wenn im weiteren Verlauf von dem Differenzkokern zweier Homomorphismen $f, g : C_1 \longrightarrow C_2$ gesprochen wird, meinen wir damit den Homomorphismus $q : C_2 \longrightarrow T$ aus lemma 6.

Tensorprodukt des Differenzenkokerns *[Eigene Bemerkung]*

Bemerkung 7. *Seien $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(S_1, S_2)$ R-Algebra-Homomorphismen, so können wir für den Differenzenkokern $q : S_2 \longrightarrow T$ für ein beliebiges S_1-Modul das Tensorprodukt $T \otimes_{C_1} M$ definieren.*

$$\text{für } s_1 \in S_1 \text{ und } t \otimes m) \in T \otimes_{C_1} M \text{ gilt:}$$
$$s_1 \cdot (t \otimes m) = ((q \circ f)(s_1)) \cdot t \otimes m = ((q \circ g)) \cdot (s_1)t \otimes m$$

R-Algebra-Kolimiten *[vlg. Proposition A6.7 David Eisenbud 1994]*

Proposition 8. *in der Kategorie der R-Algebren existieren Koprodukte und Differenzkokerne, wobei:*

1. *Das Koprodukt einer endlichen Familie von $R-$ Algebren $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$ entspricht deren Tesorprodukt $\bigotimes_{i \in \Lambda} S_i$.*
2. *Der Differenzkokern zweier R-Algebra-Homomorphismen $f, g : S_1 \longrightarrow S_2$ einspricht dem Homomorphismus $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$, $y \longmapsto [y]$, wobei $Q := \{f(x) - g(x) \mid x \in S_2\}$ das Bild der Differenz von f und g ist.*

Beweis. Zu ***1.***:
Sei $\mathcal{B}$ die Unterkategorie der R-Algebren, welche $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$ zusammen mit den Identitätsabbildungen enthält. Wir wollen die universellen Eigenschaften des Tensorproduktes und des Kähler-Differenzials nutzen, um einen Isomorphismus zwischen $\varinjlim \mathcal{F}$ und $\bigotimes_{i \in \Lambda} B_i$ zu finden.
Es sind der Morphismus $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \varinjlim \mathcal{B}$ und die bilineare Abbildung $g : \oplus_i S_i \longrightarrow \otimes_i S_i$ gegeben.
Konstruiere den Morphismus $\psi' : \mathcal{B} \longrightarrow \otimes_i S_i$ durch $\psi'_i : S_i \longrightarrow \otimes_i S_i$, $s_i \longmapsto g(1, .., 1, s_i, 1, .., 1)$ für $i \in \lambda$ und die bilineare Abbildung $f : \oplus_i S_i \longrightarrow \varinjlim \mathcal{B}$, $s \longmapsto \prod_i \psi_i(s_i)$.

Somit liefern uns die universellen Eigenschaften folgende zwei R-Algebra-Homomorphismen:

$$\varphi : \varinjlim \mathcal{B} \longrightarrow \bigotimes_i S_i$$
$$\phi : \bigotimes_i S_i \longrightarrow \varinjlim \mathcal{B}.$$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ \otimes_i S_i & & \varinjlim \mathcal{B} \arrow[ll, dashed, "\exists!\varphi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \oplus_i S_i \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \varinjlim \mathcal{B} & & \otimes_i S_i \arrow[ll, dashed, "\exists!\phi"'] \end{tikzcd}$$

Die Eindeutigkeit der universellen Eigenschaften liefert uns, das φ und ϕ zueinander Inverse sind und somit haben wir unsere gesuchten Isomorphismen zwischen $\varinjlim \mathcal{B}$ und $\bigotimes_i S_i$ gefunden.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ \varinjlim \mathcal{B} & & \varinjlim \mathcal{F} \arrow[ll, dashed, "\exists! id_{\varinjlim \mathcal{B}} = \phi\circ\varphi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \bigoplus_i S_i \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \bigotimes_i S_i & & \bigotimes_i S_i \arrow[ll, dashed, "\exists! id_{\bigotimes_i S_i} = \varphi\circ\phi"'] \end{tikzcd}$$

Zu ***2.***:
Zeige, dass $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ die in lemma 6 eingeführten Eigenschaften des Differenzkokern's besitzt.

$$q \circ f = q \circ g \text{ gilt, da } kern(q) = Q = \{f(x) - g(x) \mid x \in C_2\}.$$

Sei nun eine Funktion $q' \in Hom_{\mathcal{A}}(S_2, T')$ mit $q' \circ f = q' \circ$ gegeben.
Somit gilt $q' \circ (f - g) = 0$, wodurch Q ein Untermodul von $Q' := kern(q')$ ist.
Mit dem Isomorphiesatz für R-Algebren erhalten wir:

$$S_2/Q' \simeq (S_2/Q)/(Q'/Q).$$

Somit ist $q' : S_2 \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q)\,,\; y \longmapsto [y]'$ eine isomorphe Darstellung von $q' : S_2 \longrightarrow T'$.

$$\Rightarrow \exists! \varphi : S_2/Q \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q)\,,\; [y] \longmapsto [y]' \;\mathit{mit}\; (\varphi \circ q) = q'.$$

Also ist $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Differenzkokern von f und g. □

Darstellung der Polynomalgebra als Tensorprodukt *[Eigene Überlegung]*

Bemerkung 9. *Die Polynomalgebra $R[x_1, ..., x_d]$ über R lässt sich wie folgt als Tensorprodukt darstellen:*

$$R[x_1, ..., x_n] = \bigotimes_{i \in \{1,...,n\}} R[x_i]$$

Genauer gilt für zwei Polynomalgebren $A = R[x_1, ..., x_{n_A}]$, $B = R[y_1, ..., y_{n_B}]$ über R:

$$A \otimes_R B = R[x_1, ..., x_{n_A}, y_1, ..., y_{n_B}]$$

Skizziere den Beweis.

Beweis. Zeige, dass für $g : A \oplus B \longrightarrow R[x_1, ..., x_{n_A}, y_1, ..., y_{n_B}]\,,\; (a, b) \longmapsto a \cdot b$ die Universelle Eigenschaft des Tensorproduktes gilt:

$$\begin{tikzcd} A \oplus B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & R[x_1, ..., x_{n_A}, y_1, ..., y_{n_B}] \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Es ist leicht nachzurechnen, dass es sich bei φ um folgende Funktion handeln muss:

$$\varphi : R[x_1, ..., x_{n_A}, y_1, ..., y_{n_B}] \longrightarrow M \, , \, (x_i \cdot y_j) \longmapsto f(x_i, 1) \cdot f(1, y_i)$$

□

R-Modul-Kolimiten *[Proposition A6.2 David Eisenbud 1994]*

Proposition 10. *In Der Kategorie der R-Module existieren Koprodukte und Differenzkokerne, wobei:*

1. *das Koprodukt $\varinjlim \mathcal{B}$ von R-Modulen $M_i \in (R - Module)$entspricht der direkten Summe $\sum_i M_i$.*
2. *der Differenzenkokern zweier Homomorphismen $f, g : M_1 \longrightarrow M_2$ entspricht dem Kokern $M_2/im(f - g)$ der Differenzenabbildung.*

Beweis. für ***1.*** Sei $\phi : \{M_i\} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein beliebiger Morphismus. Zeige:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dl, "\psi_i"'] \arrow[dr, "\psi_i"] & \\ M' & & \bigoplus_i M_i \arrow[ll, dashed, "\exists!\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Für ein beliebiges i existiert genau ein $\varphi_i : M_i \oplus 0 \longrightarrow M'$, $(0, ..., 0, m_i, 0, ..., 0 \longmapsto \psi_i'(m_i)$ mit $\psi_i' = \psi_i \circ \varphi_i$
$\Rightarrow \exists!\varphi : \bigoplus_i M_i \longrightarrow M'$, $(m_1, ..., m_n) \longmapsto \sum_i \psi_i(m_i)$

2. ist Analog zu proposition 8

□

Die in proposition 10 gezeigten Darstellungen gelten mit kurzen Überlegungen auch für S-Module, wobei S eine R-Algebra ist.

1.2 Darstellung von Lokalisierung als Kolimes

Lokalisierung von Algebren als Kolimes *[vlg. Aufgabe A6.7 David Eisenbud 1994]*

Lemma 11. *Sei S eine $R-$ Algebra und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$S[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{B}$$

Wobei $\mathcal{B}$ aus den Objekten $\{S[t^{-1}] | t \in U\}$ und den Morphismen $S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}], (\frac{s}{t^n})_t \longmapsto (\frac{st'^n}{(tt')^n})_{(tt')}\ \forall t, t' \in U$ besteht.

Beweis. Sei $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow A$ der Kolimes von $\mathcal{B}$. Zeige $S[U^{-1}] \simeq A$, definiere dazu:

$$\psi' : \mathcal{B} \longrightarrow S[U^{-1}]$$

$$\psi'_{S[t^{-1}]} : S[t^{-1}] \longrightarrow S[t^{-1}]\,,\ (\frac{s}{t^n})_t \longmapsto (\frac{s}{t^n})_U$$

ψ' ist ein Morphismus, da für beliebige $t, t' \in U$ und $s \in S$ gilt:

$$(\frac{s}{t^n})_U = (\frac{st'^n}{(tt')^n})_U$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir den eindeutigen Homomorphismus $\varphi : A \longrightarrow S[U^{-1}]$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ S[U^{-1}] & & A \arrow[ll, dashed, "\exists!\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Für $\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow A$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen.
Zunächst können wir jedes Element $(\frac{s}{u})_U \in S[U^{-1}]$ als $\psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t)$ schreiben.
Weiter gilt für alle $s_1, s_2 \in S$, $t_1, t_2 \in U$:

$$\begin{aligned} \textit{Sei } \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_t) &= \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_t) \\ \Rightarrow \exists u \in U : (s_1 t_1 - s_2 t_2) \cdot u &= 0 \\ \Rightarrow (\frac{s_1 u}{t_1 u})_{tu} &= (\frac{s_2 u}{t_2 u})_{tu} \\ \Rightarrow \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_t) &= \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_t) \end{aligned}$$

Mit diesem Wissen können wir den R-Algebra-Homomorphismus $\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow A$ definieren:

$$\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow A\,,\ \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t) \longmapsto \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t)$$

$\phi \circ \varphi = id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ A & & A \arrow[ll, dashed, "\exists! id_A = \phi\circ\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Für $\varphi \circ \phi \overset{!}{=} id_{S[U^{-1}]}$ wähle beliebige $s \in S, t \in U$, für diese gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{s}{t})_t)) = \varphi(\psi((\frac{s}{t})_t) = \psi'((\frac{s}{t})_t)$$

Damit haben wir gezeigt, dass φ, ϕ Isomorphismen sind und somit $A \simeq S[U^{-1}]$ gilt.
Da der Kolimes bis auf Isomorphie eindeutig ist, definiere ab sofort $S[U^{-1}]$ als den eindeutigen Kolimes von $\mathcal{B}$. □

Lokalisierung von Moduln als Kolimes *[Beweis von Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]*

Korrolar 12. *Sei M ein S-Modul, wobei S eine R-Algebra ist. Sei weiter $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$M[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{C}$$

Wobei $\mathcal{C}$ aus den Objekten $\{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] | t \in U\}$ und folgenden Morphismen besteht:

$$S[U^{-1}] \otimes M[t^{-1}] \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes M[(tt')^{-1}],$$
$$(\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{m}{t^n})_t \longmapsto (\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{t'^n m}{(tt')^n})_t$$

Auch wenn sich lemma 11 hier nicht direkt anwenden lässt, so können wir doch im Beweis gleich vorgehen.

Beweis. Schließe zunächst den trivialen Fall $0 \in U$ aus.
Sei $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow A$ der Colimes von $\mathcal{C}$. Zeige $S[U^{-1}] \simeq A$, definiere dazu folgenden Morphismus :

$$\psi : \mathcal{C} \longrightarrow M[U^{-1}]$$
$$\psi_t : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \longrightarrow M[U^{-1}] \,,\, (\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{m}{t^n})_t \longmapsto (\frac{sm}{ut^n})_U$$

Die Wohldefiniertheit von ψ'_t für ein beliebiges $t \in U$ folgt direkt aus der Universellen Eigenschaft des Tensorprodukt‘s. Denn für die bilineare Abbildung $f : S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \longrightarrow M[t^{-1}] \,,\, ((\frac{s}{u})_U, (\frac{m}{t^n})_t) \longmapsto (\frac{sm}{ut^n})_U$ gilt:

$$\begin{tikzcd}
S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \arrow[d, dashed, "\exists! \psi'_t"] \\
& M[U^{-1}]
\end{tikzcd}$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir nun den eindeutigen Homomorphismus $\varphi : A \longrightarrow M[U^{-1}]$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C} \arrow[dl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
M[U^{-1}] & & A \arrow[ll, dashed, "\exists!\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Für $\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow A$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen.
Zunächst können wir jedes Element $(\frac{m}{u})_U \in M[U^{-1}]$ als $\psi((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)$ schreiben. Wobei mit ψ gemeint ist, dass wir ein beliebiges $t \in U$ wählen und dann ψ_t betrachten. Diese Verallgemeinerung ist möglich, da für beliebige $t_1, t_2, u \in U$ und $m \in M$ gilt:

$$\psi_{t_1}((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_{t_1}) = (\frac{m}{u})_U = \psi_{t_2}((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_{t_2})$$

Definiere nun mit diesem Wissen folgenden Homomorphismus:

$$\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow A\,,\ \psi((\frac{1}{u})_U \otimes t) \longmapsto \psi'((\frac{1}{u})_U \otimes t)$$

$\phi \circ \varphi = id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes.
Für $\varphi \circ \phi \overset{!}{=} id_{M[U^{-1}]}$ wähle $(\frac{m}{u})_U \in M[U^{-1}]$ beliebig, für dieses gilt:

$$\begin{aligned}
&(\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)) \\
&= \varphi(\psi((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)) \\
&= \psi'((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)
\end{aligned}$$

Damit haben wir $A \simeq M[U^{-1}]$ gezeigt, definiere also ab sofort $M[U^{-1}]$ als den eindeutigen Kolimes von $\mathcal{C}$. $\square$