Definition 1. *Definition Leibnizregel*

Lemma 2. *Summe von Derivationen*

Bemerkung 3. *Derivation ist Ableitung*

Bemerkung 4. *Unendliche Indexmengen*

Bemerkung 5. *Darstellung der Polynomalgebra als Tensorprodukt*

Proposition 6. *R-Algebra-Kolimiten*

Satz 7. *Konormale Sequenz*

Bemerkung 8. *NeuDifferenzenkokerndef*

Kapitel 1

Kolimes

1.1 Ableiten von Polynomen

Korrolar 1. *[Eigene Überlegung]*
Für Differentialraum des Plynomrings $R[x]$ *gilt:*

$$\Omega_{R[x]/R} = R[x]\langle \div R[x](x) \rangle$$

Wobei $R[x]\langle d_{R[x]}(x) \rangle$ *das von* $d_{R[x]}(x)$ *erzeugt Modul über* $R[x]$ *ist.*
Genauer gesagt entspricht die universellen Derivation des Polynomrings $R[x]$ *der formalen Ableitung von Polynomfunktionen, wie wir sie aus der Analysis kennen. Für* $P(x) \in R[x]$ *gilt also:*

$$d_{R[x]}(P(x)) = P'(x) d_{R[x]}(x)$$

Proposition 2. *Seien* $S_1, \ldots, S_n$ *R-Algebren. Sei dazu* $S \coloneqq \prod_{i \in \{1,\ldots,n\}} S_i$ *deren direktes Produkt. Dann gilt:*

$$\Omega_{S/R} = \prod_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Omega_{S_i/R}$$

Darstellung der Polynomalgebra als Tensorprodukt

Bemerkung 3. *[Eigene Überlegung]*
Die Polynomalgebra $R[\{x_i\}_{i \in \Lambda}]$ *über* R *lässt sich wie folgt als Tensorprodukt darstellen:*

$$R[\{x_i\}_{i \in \Lambda}] = \bigotimes_{i \in \Lambda} R[x_i]$$

Beweis. Im Falle einer endlichen Indexmenge Λ wollen wir induktiv vorgehen. Seien für den Induktionsschritt $S_x \coloneqq R[x_1, \ldots x_n]$ und $S_y \coloneqq R[y_1, \ldots, y_m]$ zwei

Polynomalgebren über R, zeige:

$$S_{xy} := R[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m] \simeq S_x \otimes_R S_y$$

Dazu betrachten wir folgende bilineare Funktion:

$$g' : S_x \oplus S_y \longrightarrow S \, , \, (P, Q) \longmapsto P \cdot Q$$

Erhalte nun eine Funktion $\varphi : S_x \otimes_R S_y \longrightarrow S_{xy}$ aus der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes:

$$\begin{tikzcd} S_x \oplus S_y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & S_x \otimes_R S_y \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & S_{xy} \end{tikzcd}$$

$$\varphi : S_x \otimes_R S_y \longrightarrow S_{xy} \, , \, P \otimes Q \longmapsto P \cdot Q$$

Der Homomorphismus φ ist surjektiv und bildet die Erzeuger $\{x_i \otimes 1\} \cup \{1 \otimes y_j\}$ von $S_x \otimes_R S_y$ eindeutig auf die Erzeuger $\{x_i\} \cup \{y_j\}$ von S_{xy} ab. Folglich ist φ ein Isomorphismus.
Indunktiv erhalten wir daraus für den Fall $|\Lambda| < \infty$ folgenden Isomorphismus:

$$\Phi : \bigotimes_{i \in \Lambda} R[x_i] \longrightarrow R[\{x_i\}_{i \in \Lambda}] \, , \, (P_1(x_1), \dots P_n(x_n)) \longmapsto \prod_{i=1}^{n} P_i(x_i)$$

Dies ist auch im Fall $\Lambda = \infty$ ein Isomorphismus, da wir auch in diesem Fall nur Tensorprodukte endlich vieler Polynome bzw. Polynome in endlich vielen Variablen betrachten *(siehe bemerkung 4)*.
Da das Tensorprodukt $\bigotimes_{i \in \Lambda} R[x_i]$ bis auf eine Eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist, definiere dies ab jetzt als $R[\{x_i\}_{i \in \Lambda}]$. □

Differenzial des Koproduktes

Proposition 4. *[vlg. Korolar 16.5 David Eisenbud 1994]*
Seien $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$ R-Algebren und $T = \bigotimes_{i \in \Lambda} S_i$ deren Koprodukt.
Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} = \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$$

mit: $d_T : R \longrightarrow \Omega_{T/R} \, , \, (\otimes_{i=1}^{n} s_i) \longmapsto \big((\otimes_{i=2}^{n} s_i) \otimes d_{S_1}(s_1), \dots, \otimes_{i=1}^{n-1}(s_i) \otimes d_{S_n}(s_n) \big)$

Beweis. Zeige, dass $\bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \simeq \Omega_{T/R}$ gilt.
Für $i \in \Lambda$ lässt sich T als $\left(\bigotimes_{j \in \Lambda \setminus \{i\}} S_i \right) \otimes_R S_i$ betrachten, nutze dies um

folgende R-lineare Derivationen zu definieren:

$$e_i : T \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}\,,\ (\otimes_{j\neq i} s_j) \otimes s_i \longmapsto (0,\dots,0,(\otimes_{j\neq i} s_j) \otimes d_{S_i}(s_i),0,\dots,0)$$

$$e : T \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}\,,\ t \longmapsto \sum_{i=1}^{n} e_i(t)$$

Da d_{S_i} eine Derivation ist, ist e' und somit nach lemma 2 und bemerkung 4 auch e eine Derivation. Mithilfe der universellen Eigenschaft von d_T erhalten wir einen eindeutigen Homomorphismus φ mit $\varphi \circ d_T = e$:

$$\varphi : \Omega_{T/R} \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})\,,\ d_T(s_1 \otimes \dots \otimes s_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} e_i((\otimes_{j\neq i} s_j) \otimes s_i)$$

$$\varphi : d_T(1 \otimes s_i \otimes 1) \longmapsto (0, 1 \otimes d_{S_i}(s_i), 0)$$

Suche nun eine Umkehrfunktion ϕ zu φ. Definiere dazu für $i \in \Lambda$ folgendes R-lineares Differential:

$$h_i : S_i \longrightarrow \Omega_{T/R}\,,\ s_i \longmapsto d_T((\otimes_{j\neq i} 1) \otimes s_i)$$

Mithilfe der universellen Eigenschaft von d_{S_i} erhalten wir dadurch einen eindeutigen Homomorphismus h'_i mit $h'_i \circ d_T = h_i$. Nutze diesen um einen weiteren Homomorphismus zu definieren:

$$\phi_i : T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \longrightarrow \Omega_{T/R}\,,\ t \otimes d_{S_i}(s_i) \longmapsto t \cdot (h' \circ d_{S_i})(s_i) = t \cdot h_i(s_i)$$

Damit erhalten wir folgenden kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
S_i \arrow[r, "d_{S_i}"] \arrow[dr, "h_i"'] & \Omega_{S_i/R} \arrow[r, "a"] \arrow[d, dashed, "\exists! k'"] & T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \arrow[dl, "\phi_i"] \\
& \Omega_{T/R} &
\end{tikzcd}$$

Zuletzt bilden wir die Summe $\phi := \sum_{i\in\Lambda} \phi_i$ und erhalten damit eine Umkehrfunktion von φ:

$$\phi : \bigoplus_{i\in\Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \longrightarrow \Omega_{T/R}\,,\ (t_i \otimes d_{S_1}(s_1), \dots, t_n \otimes d_{S_n}(s_n)) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot h_i(s_i)$$

$$\phi : (0, 1 \otimes d_{S_i}(s_i), 0) \longmapsto d_T(1 \otimes s_i \otimes 1)$$

Somit gilt $\bigoplus_{i\in\Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \simeq \Omega_{T/R}$.
Definiere also ab jetzt $\bigoplus_{i\in\Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$ als des Differentialraum von T über R. Damit gilt $d_T = e$.

□

Mehrdimmensionales Algebraisches Differentieren

Bemerkung 5. *[Eigene Bemerkung]*
Sei $R(\{x_i\}_{i\in\Lambda})$ ein Polynomring über R. Bezeichne mit δ_j die formale Ableitung in Richtung x_j, wie wir sie aus der Analysis für Polynomfunktionen über $\mathbb{R}^n$ kennen:

$$\delta_j : R(\{x_i\}_{i\in\Lambda}) \longrightarrow R(\{x_i\}_{i\in\Lambda}) \, , \sum_k \left(a_k \cdot x_j^{n_{j,k}} \prod_{i\neq j} x_i^{n_{i,k}} \right) \longmapsto \sum_{k, n_{j,k}>0} \left(a_k \cdot n_{j,k} \cdot x_j^{n_{j,k}-1} \prod_{i\neq j} x_i^{n_{i,k}} \right)$$

Betrachte den Differentialraum von $R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]$ über $R[\{x_i\}_{i\in\Lambda\setminus\{j\}}]$:

$$d_j : R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}] \longrightarrow \Omega_{R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]/R[\{x_i\}_{i\in\Lambda\setminus\{j\}}]}$$

Nach bemerkung 3 entspricht d_j der formalen Ableitung δ_j. Für $P_j(x_j), P(x_1, \cdots, x_n) \in R\{x_i\}_{i\in\Lambda}$ gilt also:

$$\delta_j(P_j(x_j)) = P'(x_j) \tag{1.1}$$
$$d_j(P(x_1, \cdots, x_n)) = \delta_j(P(x_1, \cdots, x_n))d_j(x_j) \tag{1.2}$$

Differenzial von Polynomalgebren 1 *[vlg. Proposition 16.1 David Eisenbud 1994]*

Korrolar 6. *Sei $S = R[x_1, ..., x_n]$ eine Polynomalgebra über R. Dann gilt:*

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i\in\{1,...,n\}} S\langle d_S(x_i)\rangle$$

Für die universelle Derivation d_S gilt hierbei mit der Notation von bemerkung 5:

$$d_S : S \longrightarrow \Omega_{S/R} \, , \, P(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto (\delta_1(P)d_S(x_1), \cdots, \delta_n(P)d_S(x_n))$$

Beweis. Wie in bemerkung 3 gezeigt, ist S isomorph zu $S' := \bigotimes_{i\in\{1,...,n\}} R[x_i]$. In proposition 4 haben wir gezeigt, wie das Differenzial eines solchen Tensorproduktes aussieht:

$$\Omega_{S'/R} = \bigoplus_{i\in\Lambda} (S' \otimes_{R[x_i]} \Omega_{R[x_i]/R})$$

Mithilfe von bemerkung 3 können wir $\Omega_{R[x_i]/R}$ für $i \in \Lambda$ weiter umformen:

$$\Omega_{S'/R} = \bigoplus_{i\in\{1,...,n\}} (S' \otimes_{R[x_i]} R[x_i]\langle d_{R[x_i]}(x_i)\rangle) \simeq \bigoplus_{i\in\{1,...,n\}} S'\langle d_{R[x_i]}(x_i)\rangle$$

Nutze nun $S' \simeq S$ und betrachte $d_{R[x_i]}$ als Einschränkung von d_S. Dadurch erhalten wir die gewünschte Darstellung von $\Omega_{S/R}$.
Definiere ab nun also $\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i\in\{1,...,n\}} S\langle d_S(x_i)\rangle$.
Um zu zeigen, dass hierbei die universelle Derivation die gewünschte Form annimmt gehe zunächst die bisher genutzten Derivationen und Isomorphismen

durch:

$$d_S : S \longrightarrow \Omega_{S/R}$$

$$\begin{array}{ccc} S & & \prod_{i=1}^n P_i(x_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & & \otimes_{i=1}^n P_i(x_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{i\in\{1,\dots,n\}}(S' \otimes_{R[x_i]} R[x_i]\langle d_{R[x_i]}(x_i)\rangle) & & (\dots,(\otimes_{k\neq j} P_k(x_k) \otimes d_{Rx_i}(P(x_i))),\dots) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{i\in\Lambda} S\langle d_S(x_i)\rangle & & \left(\dots,\left(\prod_{k\neq i} P_k(x_k)\right) P'(x_i) d_S(x_i),\dots\right) \end{array}$$

Betrachte nun bemerkung 5. Dabei stellen wir fest, dass wir von $d_S(x_j) = d_j(x_j)$ ausgehen können, da $\{d_S(x_i)\}_{i\in\Lambda}$ linear unabhängig ist.
Rechne also für $\prod_{i=1}^n P_i(x_i) \in P(\{x_i\}_i)$ und $j \in \{1, \cdots, n\}$ nach, ob unsere gewünschte Darstellung von d_S zutrifft:

$$\delta_j\left(\prod_{i=1}^n P(x_i)\right) d_S(x_j) = d_j\left(\prod_{i=1}^n P(x_i)\right) \quad \textit{(bemerkung 5)}$$

$$= P_j(x_j) d_j\left(\prod_{i\neq j} P_i(x_i)\right) + \left(\prod_{i\neq j} P_i(x_i)\right) d_j(P_j(x_j)) \quad \textit{(Leibnizregel)}$$

$$= 0 + \left(\prod_{i\neq j} P_i(x_i)\right) \delta_j(P(x_j)) d_j(x_j) = \left(\prod_{i\neq j} P_i(x_i)\right) P'(x_j) d_j(x_j)$$

□

Differenzial von Polynomalgebren 2 *[vgl. Korrolar 16.6 David Eisenbud 1994]*

Korrolar 7. *Sei S eine R-Algebra und $T := S[x_1, ..., x_n]$ eine Polynomalgebra über S. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus \bigoplus_{i\in\{1,\dots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

Beweis. Betrachte T als Tensorprodukt über R-Algebren und wende anschließend **??** an:

$$T \simeq S \otimes_R R[x_1, ..., x_n]$$
$$\Rightarrow \Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus (T \otimes_{R[x_1,\dots,x_n]} \Omega_{R[x_1,\dots,x_n]/R})$$

Zuletzt wende den soeben gezeigten korrolar 6 an und nutze schließlich $R[x_1, ..., x_n] \subseteq T$ um das Tensorprodukt zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} &T \otimes_{R[x_1,\dots,x_n]} \Omega_{R[x_1,\dots,x_n]/R} \\ \simeq\, &T \otimes_{R[x_1,\dots,x_n]} \bigoplus_{i \in \{1,\dots,n\}} R[x_1, ..., x_n]\langle d_{R[x_i]}(x_i)\rangle \\ \simeq &\bigoplus_{i \in \{1,\dots,n\}} T\langle d_R(x_i)\rangle \end{aligned}$$

□