Definition 1. *Definition Leibnizregel*

Lemma 2. *Summe von Derivationen*

Bemerkung 3. *Derivation ist Ableitung*

Bemerkung 4. *Unendliche Indexmengen*

Proposition 5. *R-Algebra-Kolimiten*

Satz 6. *Konormale Sequenz*

Bemerkung 7. *NeuDifferenzenkokerndef*

Kapitel 1

Kolimes

1.1 Kähler-Differenzial von Kolimiten

Differenzial des Koproduktes

Proposition 1. *[vlg. Korolar 16.5 David Eisenbud 1994]*
Seien $\{S_i\}_{i\in\Lambda}$ R-Algebren und $T = \bigotimes_{i\in\Lambda} S_i$ deren Koprodukt.
Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} = \bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$$

mit: $d_T : R \longrightarrow \Omega_{T/R}\,,\ (\otimes_{i=1}^n s_i) \longmapsto \big((\otimes_{i=2}^n s_i) \otimes d_{S_1}(s_1), \dots, \otimes_{i=1}^{n-1}(s_i) \otimes d_{S_n}(s_n)\big)$

Beweis. Zeige, dass $\bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \simeq \Omega_{T/R}$ gilt.
Für $i \in \Lambda$ lässt sich T als $\left(\bigotimes_{j\in\Lambda\setminus\{i\}} S_i\right) \otimes_R S_i$ betrachten, nutze dies um folgende R-lineare Derivationen zu definieren:

$$e_i : T \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}\,,\ (\otimes_{j\neq i} s_j) \otimes s_i \longmapsto (0, \dots, 0, (\otimes_{j\neq i} s_j) \otimes d_{S_i}(s_i), 0, \dots, 0)$$

$$e : T \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}\,,\ t \longmapsto \sum_{i=1}^n e_i(t)$$

Da d_{S_i} eine Derivation ist, ist e' und somit nach lemma 2 und bemerkung 4 auch e eine Derivation. Mithilfe der universellen Eigenschaft von d_T erhalten wir einen eindeutigen Homomorphismus φ mit $\varphi \circ d_T = e$:

$$\varphi : \Omega_{T/R} \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})\,,\ d_T(s_1 \otimes \cdots \otimes s_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n e_i((\otimes_{j\neq i} s_j) \otimes s_i)$$

$$\varphi : d_T(1 \otimes s_i \otimes 1) \longmapsto (0, 1 \otimes d_{S_i}(s_i), 0)$$

Suche nun eine Umkehrfunktion ϕ zu φ. Definiere dazu für $i \in \Lambda$ folgendes

R-lineares Differential:

$$h_i : S_i \longrightarrow \Omega_{T/R}\,,\; s_i \longmapsto d_T((\otimes_{j\neq i} 1) \otimes s_i)$$

Mithilfe der universellen Eigenschaft von d_{S_i} erhalten wir dadurch einen eindeutigen Homomorphismus h_i' mit $h_i' \circ d_T = h_i$. Nutze diesen um einen weiteren Homomorphismus zu definieren:

$$\phi_i : T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \longrightarrow \Omega_{T/R}\,,\; t \otimes d_{S_i}(s_i) \longmapsto t \cdot (h' \circ d_{S_i})(s_i) = t \cdot h_i(s_i)$$

Damit erhalten wir folgenden kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[r, "d_{S_i}"] \arrow[dr, "h_i"'] & \Omega_{S_i/R} \arrow[r, "a"] \arrow[d, dashed, "\exists! k'"] & T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \arrow[dl, "\phi_i"] \\ & \Omega_{T/R} & \end{tikzcd}$$

Zuletzt bilden wir die Summe $\phi := \sum_{i\in\Lambda} \phi_i$ und erhalten damit eine Umkehrfunktion von φ:

$$\phi : \bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \longrightarrow \Omega_{T/R}\,,\; (t_i \otimes d_{S_1}(s_1), \ldots, t_n \otimes d_{S_n}(s_n)) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot h_i(s_i)$$

$$\phi : (0, 1 \otimes d_{S_i}(s_i), 0) \longmapsto d_T(1 \otimes s_i \otimes 1)$$

Somit gilt $\bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \simeq \Omega_{T/R}$.
Definiere also ab jetzt $\bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$ als des Differentialraum von T über R. Damit gilt $d_T = e$.

□

Lemma 2. *Sei $R(\{x_i\}_{i\in\Lambda})$ ein Polynomring über R. Bezeichne mit δ_{x_i} die Abeitung in Richtungx_i, wie wir sie aus der Analysis für Polynomfunktionen über $\mathbb{R}^n$ kennen:*

$$\delta_{x_i} : R(\{x_i\}_{i\in\Lambda}) \longrightarrow R(\{x_i\}_{i\in\Lambda})\,,\; \sum_j \left(a_j x_i^{n_j} \prod_{k\neq i} x_k^{n_k} \right) \longmapsto \sum_{j, n_j > 1} \left(a_j n_j x_i^{n_j - 1} \prod_{k\neq i} x_k^{n_k} \right)$$

Wenn wir nun $R(\{x_i\}_{i\in\Lambda})$ als Polynomring über $R(\{x_i\}_{i\in\Lambda\setminus\{i\}})$

Differenzial von Polynomalgebren 1 *[vlg. Proposition 16.1 David Eisenbud 1994]*

Korrolar 3. *Sei $S = R[x_1, ..., x_n]$ eine Polynomalgebra über R. Dann gilt:*

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i\in\{1,\ldots,n\}} S\langle d_S(x_i)\rangle$$

Wobei $S\langle d_S(x_i)\rangle$ das von $d_S(x_i)$ erzeugt Modul über S ist.

Beweis. Wie in **??** gezeigt, können wir S als $\bigotimes_{i\in\{1,...,n\}} R[x_i]$ schreiben. In proposition 1 haben wir gezeigt, wie das Differenzial eines solchen Tensorproduktes aussieht:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i\in\{1,...,n\}} (S \otimes_{R[x_i]} \Omega_{R[x_i]/R})$$

Da $R[x_i]$ die aus dem Element x_i erzeugte Algebra über R ist, folgt *[vlg. BEMERKUNG ZU ENDLICH ERZEUGTEN ALGEBREN]*:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i\in\{1,...,n\}} (S \otimes_{R[x_i]} R[x_i]\langle d_{S[x_i]}(x_i)\rangle) \simeq \bigoplus_{i\in\{1,...,n\}} S\langle d_S(x_i)\rangle$$

Für die letzte Isomorphie nutze, dass wegen $R[x_i] \subseteq S$ zum Einen $d_{R[x_i]}$ als Einschränkung von d_S gesehen werden kann und zum Anderen $S \otimes_{R[x_i]} R[x_i] \simeq S$ gilt. □

Differenzial von Polynomalgebren 2 *[vgl. Korrolar 16.6 David Eisenbud 1994]*

Korrolar 4. *Sei S eine R-Algebra und $T := S[x_1, ..., x_n]$ eine Polynomalgebra über S. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus \bigoplus_{i\in\{1,...,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

Beweis. Betrachte T als Tensorprodukt über R-Algebren und wende anschließend **??** an:

$$T \simeq S \otimes_R R[x_1, ..., x_n]$$
$$\Rightarrow \Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus (T \otimes_{R[x_1,...,x_n]} \Omega_{R[x_1,...,x_n]/R})$$

Zuletzt wende den soeben gezeigten korrolar 3 an und nutze schließlich $R[x_1, ..., x_n] \subseteq T$ um das Tensorprodukt zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} &T \otimes_{R[x_1,...,x_n]} \Omega_{R[x_1,...,x_n]/R} \\ \simeq\ &T \otimes_{R[x_1,...,x_n]} \bigoplus_{i\in\{1,...,n\}} R[x_1, ..., x_n]\langle d_{R[x_i]}(x_i)\rangle \\ \simeq\ &\bigoplus_{i\in\{1,...,n\}} T\langle d_R(x_i)\rangle \end{aligned}$$

□

Differential des Differenzkokerns

Proposition 5. *[Korrolar 16.7 David Eisenbud 1994]*
Sein S_1, S_2 R-Algebren und $f, g : S_1 \longrightarrow S_2$ zwei R-Algebren-Homomorphismen.

Sei weiter $q : S_2 \longrightarrow T$ für $T := S_2/Q$ der Differenzkokern von f, g (siehe bemerkung 7). Betrachte dazu folgende T-Modulhomomorphismen:

$$Df : S_2 \otimes_{S_1} \Omega_{S_1/R} \longrightarrow \Omega_{S_2/R}\,,\ s_2 \otimes d_{S_1}(s_1) \longmapsto s_2 \cdot (d_{S_1} \circ f)(s_1)$$
$$Dg : S_2 \otimes_{S_1} \Omega_{S_1/R} \longrightarrow \Omega_{S_2/R}\,,\ s_2 \otimes d_{S_1}(s_1) \longmapsto s_2 \cdot (d_{S_1} \circ g)(s_1)$$

Dann ist $Dq : T \otimes_R \Omega_{S_2/R} \longrightarrow \Omega_{T/R}$ der Differenzkokern von Df, Dg.

Beweis. Betrachte die Conormale Sequenz *(satz 6)* des Differenzkokerns *(proposition 5)* $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$:

$$Q/Q^2 \xrightarrow{1 \otimes d_{S_2}} T \otimes \Omega_{S_2/R} \xrightarrow{Dq} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

Betrachte nun $DQ := im(Df - Dg)$. Für dieses gilt:

$$DQ = im(Df - Dg) = T \otimes_{S_2} (d_{S_2} \circ (f - g))(S_1) = T \otimes_{S_2} d_{S_2}(Q)$$

Somit ist auch folgende Sequenz exakt:

$$T \otimes_{S_1} \Omega_{S_1/R} \xrightarrow{Df - Dg} T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R} \xrightarrow{Dq} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

Somit gilt $\Omega_{T/R} \simeq T \otimes \Omega_{S_2/R}/DQ$ und $Dq : T \otimes_R \Omega_{S_2/R} \longrightarrow \Omega_{T/R}$ ist der Differenzkokern von Df, Dg. □

Theorem 6. *[Proposition A6.1 David Eisenbud 1994]*
Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie, in der Koprodukte beliebiger Mengen von Objekten und Differenzkokerne von je zwei Morphismen existieren. Dann existiert für jedes Diagramm $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ dessen Kolimes $\varinjlim \mathcal{F}$.

Beweis. □

Differential des Kolimes

Theorem 7. *[Theorem 16.8 David Eisenbud 1994]*
Sei $\mathcal{B} \hookrightarrow (R - Algebren)$ ein Diagramm. Nach proposition 5 existiert dessen Kolimes $T := \varinjlim \mathcal{B}$. Für den Differentialraum von T über R gilt:

$$\varinjlim \mathcal{F} = \Omega_{T/R}$$

Wobei der Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow T - Module$ folgendermaßen definiert ist:

$$\mathcal{F} : Obj_{\mathcal{B}} \longrightarrow Obj_{(T-Module)}\,,\ S \longmapsto T \otimes_S \Omega_{S/R}$$
$$\mathcal{F} : Morp_{\mathcal{B}} \longrightarrow Morph_{(T-Module)}\,,\ \varphi \longmapsto D\varphi$$
$$\mathcal{F} : (\varphi : S_1 \longrightarrow S_2) \longmapsto (D\varphi : \Omega_{S_1/R} \longrightarrow \Omega_{S_2/R}\,,\ d_{S_1}(s_1) \longmapsto (d_{S_2} \circ \varphi)(s_1))$$

Differenzial der Lokalisierung *[vlg. Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]*

Theorem 8. *Sei S eine $R-$ Algebra und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$\Omega_{S[U^{-1}]/R} \simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}, \text{ Wobei:}$$
$$d_{S[U^{-1}]}((\frac{1}{u})_U) \longmapsto -(\frac{1}{u^2})_U \otimes d_S(u)$$

Beweis. Wir wollen THEOREM16.8 auf $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$ aus **??** anwenden. Zeige also zunächsten den einfacheren Fall $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ für ein beliebiges $t \in U$:

Nutze hierfür die Isomorphe Darstellung $S[t^{-1}] \simeq S[x]/(tx-1)$, sowie die Isomorphie $\Omega_{S[x]/R} \simeq S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x)$. aus korrolar 4
Daraus erhalten wir folgende Isomorphismen:

$$\alpha : S[t^{-1}] \longrightarrow S[x]/(tx-1)$$
$$\beta : S[x]/(tx-1) \longrightarrow S[t^{-1}]$$
$$\gamma : \Omega_{S[x]/R} \longrightarrow S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x)$$

Nutze diese nun, um $\Omega_{S[t^{-1}]/R}$ isomorph zu $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ umzuformen:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_{S[t^{-1}]/R} \arrow[d, "D\alpha"] & d_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t) \arrow[d, mapsto, "D\alpha"] \\
\Omega_{S[x]/R}/d_{S[x]}(tx-1) \arrow[d, "\gamma"] & {[d_{S[x]}(sx)] = [xd_{S[x]}(s) + sd_{S[x]}(x)]} \arrow[d, mapsto, "\gamma"] \\
(S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}x)/((tx-1)d_{S[x]}(tx-1)) \arrow[d, "\beta"] & {[x \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)]} \arrow[d, mapsto, "\beta"] \\
(S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus S[t^{-1}]d_{S[x]}(x)/d_{S[x]}(tx-1) =: M \arrow[d, "f"] & {[(\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)]} \arrow[d, mapsto, "f"] \\
S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} & ((\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s)) - ((\frac{s}{t^2})_t \otimes d_S(t))
\end{tikzcd}$$

Die ersten drei Schritte ergeben sich aus den oben angegeben Isomorphismen. Für den letzten Schritt definiere:

$$f : M \longrightarrow S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R},\ [(\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \longmapsto ((\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s)) - ((\frac{s}{t^2})_t \otimes d_S(t))$$

Damit f ein Isomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ ein eindeutiges Repräsentantensystem von M ist.

Sei dazu $[m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]$ ein beliebiger Erzeuger von M. Somit gilt:

$$d_{S[x]}(tx-1) = td_{S[x]}(x) + \beta(x)d_{S[x]}(s)$$
$$\Rightarrow [0, d_{S[x]}(x)] = [-(\frac{1}{t^2})_t d_S(t), 0]$$
$$\Rightarrow [m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)] = [m_1 - (\frac{s}{t^{n+2}})_t d_S(t), 0] = [f([m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]), 0]$$

f ist also wie vermutet ein Isomorphismus und aus obigen Umformungen folgt $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} = \Omega_{S/R}[t^{-1}]$.
Definiere für beliebige $t \in U$ folgenden Isomorphismus:

$$f \circ \beta \circ \gamma \circ D\alpha =: \delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}] \, , \, d_{S[t^{-1}]}((\frac{1}{t})_t) \longmapsto -(\frac{d_S(t)}{t^2})_t$$

Zeige nun den Allgemeinen Fall $\Omega_{S[U^{-1}]/R} \simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$:
Wähle $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$ wie in **??**, sodass $\varinjlim \mathcal{B} = S[U^{-1}]$ gilt.
Mit THEOREM16.8 folgt somit:

$$\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \varinjlim \mathcal{F} \text{ mit:}$$
$$\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow (S[U^{-1}] - Module) \, , \, S[t^{-1}] \longmapsto S[U^{-1}] \otimes \Omega_{S[t^{-1}]/R}$$
$$(\varphi : S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}])$$
$$\longmapsto (1 \otimes D\varphi : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}))$$

Zur Vereinfachung der Morphismen in $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ definiere folgenden Isomorphismus:

$$g : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}$$
$$(\frac{s}{u})_U \otimes ((\frac{s'}{t})_t \otimes d_{S[tt'^{-1}]}(x)) \longmapsto (\frac{s}{u})_U \otimes \varphi((\frac{s'}{t})_t) d_{S[tt'^{-1}]}(x)$$

Als letzten Schritt wollen wir **??** anwenden. Nutze dazu $\delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}]$ um den zu $\mathcal{F}$ isomorphen Funktor $\mathcal{F}' := \delta \circ \mathcal{F}$ zu erhalten. Um ein genaueres Bild von $\mathcal{F}'$ zu erlangen, betrachte folgendes Kommutatives Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
S[t^{-1}] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dd, "\mathcal{F}"] & S[tt'^{-1}] \arrow[d, "\mathcal{F}"] \\
 & S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) \arrow[d, "g"] \\
S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[t^{-1}]/R} \arrow[ur, "1\otimes D\varphi"] \arrow[d, "\delta_t"] & S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R} \arrow[d, "\delta_{tt'}"] \\
S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] \arrow[r, "1\otimes\varphi"] & S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S/R}[tt'^{-1}]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(\frac{s}{t})_t \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "d_{S[t^{-1}]}"] & (\frac{st'}{tt'})_{tt'} \arrow[d, "d_{S[tt'^{-1}]}"] \\
1 \otimes ((\frac{1}{t})_t d_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{1})_t) + (\frac{s}{1})_t d_{S[t^{-1}]}((\frac{1}{t})_t)) \arrow[r, "g\circ(1\otimes D\varphi)"] \arrow[d, "\delta_t"] & 1 \otimes ((\frac{1}{tt'})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{st'}{1})_{tt'}) + (\frac{st'}{1})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{1}{tt'})_{tt'})) \arrow[d, "\delta_{tt'}"] \\
1 \otimes ((\frac{d_S(s)}{t})_t - (\frac{s d_S(t)}{t^2})_t) \arrow[r, "1\otimes\varphi"] & 1 \otimes ((\frac{t' d_S(s)}{tt'})_{tt'} - (\frac{st' d_S(t)}{(tt')^2})_{tt'}) \textbf{(*)}
\end{tikzcd}
$$

Dass das Diagramm in dieser Form kommutiert, ergibt sich in fast allen Fällen direkt aus dem Einsetzen in die entsprechenden Homomorphismen. Der einzige Fall, welcher nicht direkt klar ist, ist **(*)**. Rechne diesen also nochmal nach:

$$
\begin{aligned}
\delta_{tt'}(1 \otimes ((\frac{1}{tt'})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{st'}{1})_{tt'}) + (\frac{st'}{1})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{1}{tt'})_{tt'})))& \\
= 1 \otimes ((\frac{d_S(st')}{tt'})_{tt'} - (\frac{t' s d_S(tt')}{(tt')^2})_{tt'})& \\
= 1 \otimes ((\frac{t' d_S(s')}{tt'})_{tt'} + (\frac{s d_S(t')}{tt'})_{tt'} - (\frac{tt' d_S(t')}{(tt')^2})_{tt'} - (\frac{t'^2 s d_S(t)}{(tt')^2})_{tt'})& \\
= 1 \otimes ((\frac{t' d_S(s)}{tt'})_{tt'} - (\frac{t'^2 s d_S(t)}{(tt')^2})_{tt'})& \\
= (1 \otimes \varphi)(1 \otimes ((\frac{d_S(s)}{t})_t - (\frac{s d_S(t)}{t^2})_t))&
\end{aligned}
$$

Damit ist $\mathcal{F}'$ zu $\mathcal{F}$ isomorph und für $\mathcal{C} := \mathcal{F}'(\mathcal{B})$ gilt $\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \varinjlim \mathcal{F}' = \varinjlim \mathcal{C}$ *[vlg.* **??***]*. Wobei die Form von $\mathcal{C}$ genau dem Fall aus **??** entspricht:

$$
\begin{gathered}
\mathcal{C} = \{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] | t \in U\} \textit{ mit den Morphismen} \\
1 \otimes \varphi : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S/R}[tt'^{-1}] \\
(\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{d_S(x)}{t^n})_t \longmapsto (\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{t'^n d_S(x)}{(tt')^n})_{tt'}
\end{gathered}
$$

Somit folgt $\varinjlim \mathcal{C} = \Omega_{S/R}[U^{-1}]$ und wir haben $\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \Omega_{S/R}[U^{-1}]$ gezeigt.

$\square$

Bemerkung 9. *[Eigene Überlegung]*
Sei $R(x)$ die Algebra der Rationalen Funktionen über R. Dann erfüllt die universelle Derivation von $R(x)$ die Quotientenregel, wie wir sie von der analytischen Ableitung von rationalen Funktionen kennen. Für $P(x), Q(x) \in R[x]$ gilt also:

$$d_{R(x)}\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) = \frac{Q(x)P'(x) - P(x)Q'(x)}{Q(x)^2} d_{R(x)}(x)$$

Wobei $P'(x)$ der analytischen Ableitung von Polynomfunktionen entspricht (siehe bemerkung 3)

Beweis. Wähle $P(x), Q(x) \in P[x]$ beliebig und nutze die Rechenregeln, die wir bisher für $d_{R(x)}$ kennen gelernt haben:

$$\begin{aligned}
&d_{R(x)}\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) \\
&= \frac{1}{Q(x)} d_{R(x)}\left(P(x)\right) + P(x) d_{R(x)}\left(\frac{1}{Q(x)}\right) \quad \textit{(Leibnizregel)} \\
&= \frac{1}{Q(x)} d_{R(x)}\left(P(x)\right) - \frac{P(x)}{Q(x)^2} d_{R(x)}\left(Q(x)\right) \quad \textit{(theorem 8)} \\
&= \left(\frac{P'(x)}{Q(x)} - \frac{P(x)Q'(x)}{Q(x)^2}\right) d_{R(x)}(x) \quad \textit{(bemerkung 3)} \\
&= \frac{Q(x)P'(x) - P(x)Q'(x)}{Q(x)^2} d_{R(x)}(x)
\end{aligned}$$

$\square$