

Kapitel 1

Grundlegende Sätze

Cotangent Sequenz [Proposition 16.2 David Eisenbud 1994 (Wichtig für Körpererweiterungen)]

Proposition 1. Seien $\alpha : R \longrightarrow S$ und $\beta : S \longrightarrow T$ zwei Ringhomomorphismen. Dann existiert folgende Exakte Sequenz:

$$T \otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{t \otimes d_S(s) \mapsto t(d_T \circ \beta)(s)} \Omega_{T/R} \xrightarrow{d_T(t) \mapsto d_T(t)} \Omega_{T/S} \longrightarrow 0$$

Im Besonderen gilt für die Differenzialräume von T über R und S :

$$\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R} / T \langle (d_T \circ \beta)(S) \rangle.$$

Konormale Sequenz [vgl. Proposition 16.3 David Eisenbud 1994]

Satz 2. Sei $\pi : S \longrightarrow T$ ein R -Algebrenepimorphismus mit $\text{Kern}(\pi) := I$. Dann ist folgende Sequenz rechtsexakt:

$$I/I^2 \xrightarrow{f} T \otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{g} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

mit: $f : I/I^2 \longrightarrow T \otimes_S \Omega_{S/R}, [a]_{I^2} \longmapsto 1 \otimes d_S(a)$

$g : T \otimes_S \Omega_{S/R} \longrightarrow \Omega_{T/R}, b \otimes d_S(c) \longmapsto b \cdot (d_S \circ \pi)(c)$

Beweis.

f ist wohldefiniert: Seien $a, b \in I^2$. Zeige $f(a \cdot b) = 0$:

$$f(a \cdot b) = 1 \otimes (d_S \circ \pi)(a \cdot b) = 1 \otimes \pi(a) \cdot (d_S \circ \pi)(b) + \pi(b) \cdot (d_S \circ \pi)(a) = 0$$

$D\pi$ ist surjektiv:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{S/R} & \xrightarrow{D\pi} & \Omega_{T/R} \\ d_S \uparrow & & d_T \uparrow \\ S & \xrightarrow{\pi} & T \end{array}$$

Da $\Omega_{S/R}$ und $\Omega_{T/S}$ jeweils von d_S und d_T erzeugt werden, vererbt sich die Surjektivität von π auf $D\pi$. Somit ist auch $1 \otimes_S D\pi$ surjektiv.

$im(f) = kern(g)$:

Dies folgt direkt aus der Isomorphie $(T \otimes_S \Omega_{S/R})/Im(f) \simeq \Omega_{T/R}$:

$$\begin{aligned} & (T \otimes_S \Omega_{S/R})/Im(f) \\ &= (T \otimes_S \Omega_{S/R})/(T \otimes_S d_S(I)) \\ &= T \otimes_S (\Omega_{S/R}/d_S(I)) \\ &= T \otimes_S (d_S(S)/d_S(I)) \\ &\simeq T \otimes_S d_S(S/I) \\ &\simeq T \otimes_S d_T(T) \end{aligned}$$

□

Differenzial ist Ableitung [*Eigene Überlegung (Wichtig für Körpererweiterungen)*]

Beispiel 3. Sei k ein Körper, somit entspricht $d_{k[x]} : k[x] \longrightarrow \Omega_{k[x]/k}$, $f \longmapsto f'd_{k[x]}(x)$ der analytischen Ableitung.

Teste dies an $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$d(f(x)) = a \cdot d(x^2) + b \cdot d(x) = (2ax + b)d(x) = f'(x)d(x)$$

Kapitel 2

Kolimes

2.1 Einführung in den Kolimes

Definition des Kolimes [vgl. Anhang A6 David Eisenbud 1994]

Definition 1. Sei \mathcal{A} eine Kategorie und $C \in \mathcal{A}$ ein Objekt

- Ein Diagramm über \mathcal{A} ist eine Kategorie \mathcal{B} zusammen mit einem Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$.
- Ein Morphismus $\psi : \mathcal{F} \rightarrow C$ ist eine Menge von Funktionen $\{\psi_B \in \text{Hom}(\mathcal{F}(B), C) | B \in \mathcal{B}\}$, wobei für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $\varphi \in \text{Hom}(B_1, B_2)$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(B_1) & & \\ \downarrow \mathcal{F}(\varphi) & \searrow \psi_{B_1} & \\ & & C \\ \uparrow \psi_{B_2} & \nearrow & \\ \mathcal{F}(B_2) & & \end{array}$$

- Der Kolimes $\varinjlim \mathcal{F}$ eines Diagramms $\mathcal{F} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ist ein Objekt $A \in \mathcal{A}$ zusammen mit einem Morphismus $\psi : \mathcal{F} \rightarrow A$ und folgender universellen Eigenschaft:

für alle Morphismen $\psi' : \mathcal{F} \rightarrow A'$ existiert genau eine Funktion $\varphi \in \text{Hom}(A, A')$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \psi' \swarrow & & \searrow \psi \\ A' & \xleftarrow{\exists! \varphi} & A \end{array}$$

Eindeutigkeit des Kolimes [vgl. A6 David Eisenbud 1994]

Lemma 2. Seien \mathcal{B}, \mathcal{A} zwei Kategorien und $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor, so gilt:
Im Falle der Existenz sind $\varinjlim \mathcal{F}$ und der dazugehörige Morphismus $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$
bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien $A_1 \in \mathcal{A}, (\psi_1 : \mathcal{F} \longrightarrow A_1)$ und $A_2 \in \mathcal{A}, (\psi_2 : \mathcal{F} \longrightarrow A_2)$ beide
gleich $\varinjlim \mathcal{F}$.

Erhalte durch die universelle Eigenschaft des Kolimes die eindeutig bestimmten Funktionen $\varphi_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$ und $\varphi_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_2, A_1)$, für welche die folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \psi_2 \swarrow & & \searrow \psi_1 \\ A_2 & \xleftarrow{\exists! \varphi_1} & A_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \psi_1 \swarrow & & \searrow \psi_2 \\ A_1 & \xleftarrow{\exists! \varphi_2} & A_2 \end{array}$$

Wende nun die Universelle Eigenschaft von ψ_1 auf ψ_1 selbst an und erhalte
 $id_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1$. Analog erhalte auch $id_{A_2} = \varphi_1 \circ \varphi_2$.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \psi_1 \swarrow & & \searrow \psi_1 \\ A_1 & \xleftarrow{\exists! id_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1} & A_1 \end{array}$$

Somit existiert genau eine Isomorphie $\varphi_1 : A_1 \longrightarrow A_2$. □

Im folgenden beschäftigen wir uns mit dem Fall des $\varinjlim \mathcal{F} : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$, bei welchem
 \mathcal{B} eine Unterkategorie von \mathcal{A} ist. Zur Vereinfachung unterschlagen dabei die tri-
viale Existenz des Funktors $\varinjlim \mathcal{F} : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$. Wir werden also im folgenden von
dem Diagramm \mathcal{B} und dem entsprechenden Kolimes $\varinjlim \mathcal{B}$, sowie dem Morphis-
mus $\phi : \mathcal{B} \longrightarrow A$ sprechen.

Vereinfachung des Kolimes [Eigene Überlegung (Beweis fehlt noch)]

Bemerkung 3. Seien $\mathcal{B} \not\subseteq \mathcal{A}$ zwei Kategorien und $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Diagramm.
Dann gilt im Falle der Existenz $\varinjlim \mathcal{F} = \varinjlim \mathcal{F}(\mathcal{B})$

DifferenzkokernUndKoproduktDef [vgl. A6 David Eisenbud 1994]

Definition 4. Sei \mathcal{A} eine Kategorie.

- Das Koprodukt von $\{B_i\} \subseteq \mathcal{A}$ wird durch $\coprod_i \{B_i\} := \varinjlim \mathcal{B}$ definiert, wo-
bei $\mathcal{B} \{B_i\}$ als Objekte und die Identitätsabbildungen $id_{B_i} : B_i \longrightarrow B_i$ als
Morphismen enthält.
- Der Differenzkokern (oder auch Coequalizer) von $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$
wird durch $\varinjlim \mathcal{C}$ definiert, wobei $\mathcal{C} \{C_1, C_2\}$ als Objekte und $\{f, g\} :=$
 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$ als Morphismen enthält.

NeuDifferenzkokernDef [vgl. Wikipedia aber eigener Beweis]

Lemma 5. Sei \mathcal{A} eine Kategorie mit $C_1, C_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$, so sind folgende Formulierungen äquivalent zur Definition des Differenzkern's $T := \varinjlim C$

1. Es existiert ein Morphismus $\psi : C \longrightarrow T$, mit der Eigenschaft, dass für alle Morphismen $\psi' : C \longrightarrow T'$ genau ein $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, T')$ mit $\varphi \circ \psi = \psi'$ existiert.
2. Es existiert ein $q \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_2, T)$ mit $q \circ f = q \circ g$ und der Eigenschaft, dass für alle Morphismen $q' \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_2, Z)$ mit $q' \circ f = q' \circ g$ genau ein $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, T')$ mit $\varphi \circ q = q'$ existiert.

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{f, g} & C_2 & \xrightarrow{q} & T \\ & & \searrow q' & & \downarrow \exists! \varphi \\ & & & & T' \end{array}$$

Beweis. 1. ist offensichtlich eine Ausformulierung der Einführung des Kolimes aus ??, zeige also im folgenden noch die Äquivalenz von 1. und 2.

• 1 \Rightarrow 2:

Da $\psi : C \longrightarrow T$ ein Morphismus ist, gilt für $\{f, g\} = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$:
 $\psi_{C_1} = \psi_{C_2} \circ f = \psi_{C_2} \circ \psi_{C_1}$, setze also $q := \psi_{C_2}$.

Sei nun $q' \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_2, T)$ mit der Eigenschaft $q' \circ f = q' \circ g$ gegeben:
 Definiere den Morphismus $\psi' : C \longrightarrow T$ als $\{\psi_1 = q' \circ f, \psi_2 = q'\}$,
 somit folgt direkt aus der Universellen Eigenschaft von ψ , dass genau
 ein $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_2, T)$ existiert, mit $\varphi \circ q = q'$.

• 2 \Rightarrow 1:

Definiere $\psi : C \longrightarrow T$ als $\{\psi_1 = q \circ f, \psi_2 = q\}$. Durch die Eigenschaft
 von q gilt $\psi_{C_1} = \psi_{C_2} \circ f = \psi_{C_2} \circ g$.

Sei nun $\psi' : C \longrightarrow \mathcal{A}$ ein beliebiger Morphismus.

Definiere $d' := \psi'$, somit existiert durch die Eigenschaft von d genau
 ein $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_2, T)$ mit $\varphi \circ q = q'$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \varphi \circ \psi_2 = \psi'_2 \\ \text{und } \varphi \circ \psi_1 &= \varphi \circ \psi_2 \circ f = \varphi \circ \psi'_2 \circ f = \varphi \circ \psi'_1 \end{aligned}$$

□

Wenn im weiteren Verlauf von dem Differenzkern zweier Homomorphismen $f, g : C_1 \longrightarrow C_2$ gesprochen wird, meinen wir damit den Homomorphismus $q : C_2 \longrightarrow T$ aus lemma 5.

Tensorprodukt des Differenzkerns *[Eigene Bemerkung]*

Bemerkung 6. Seien $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(S_1, S_2)$ R -Algebra-Homomorphismen, so können wir für den Differenzkern $q : S_2 \longrightarrow T$ für ein beliebiges S_1 -Modul das Tensorprodukt $T \otimes_{C_1} M$ definieren.

für $s_1 \in S_1$ und $t \otimes m \in T \otimes_{C_1} M$ gilt:

$$s_1 \cdot (t \otimes m) = ((q \circ f)(s_1)) \cdot t \otimes m = ((q \circ g)) \cdot (s_1) t \otimes m$$

R-Algebra-Kolimiten [vgl. Proposition A6.7 David Eisenbud 1994]

Proposition 7. in der Kategorie der R -Algebren existieren Koprodukte und Differenzkerne, wobei:

1. Das Koprodukt einer endlichen Familie von R -Algebren $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$ entspricht deren Tensorprodukt $\bigotimes_{i \in \Lambda} S_i$.
2. Der Differenzkern zweier R -Algebra-Homomorphismen $f, g : S_1 \longrightarrow S_2$ entspricht dem Homomorphismus $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$, $y \mapsto [y]$, wobei $Q := \{f(x) - g(x) \mid x \in S_2\}$ das Bild der Differenz von f und g ist.

Beweis. Zu 1.:

Sei \mathcal{B} die Unterkategorie der R -Algebren, welche $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$ zusammen mit den Identitätsabbildungen enthält. Wir wollen die universellen Eigenschaften des Tensorproduktes und des Kähler-Differenzials nutzen, um einen Isomorphismus zwischen $\varinjlim \mathcal{B}$ und $\bigotimes_{i \in \Lambda} B_i$ zu finden.

Es sind der Morphismus $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \varinjlim \mathcal{B}$ und die bilineare Abbildung $g : \bigoplus_i S_i \longrightarrow \bigotimes_i S_i$ gegeben.

Konstruiere den Morphismus $\psi' : \mathcal{B} \longrightarrow \bigotimes_i S_i$ durch $\psi'_i : S_i \longrightarrow \bigotimes_i S_i$, $s_i \mapsto g(1, \dots, 1, s_i, 1, \dots, 1)$ für $i \in \Lambda$ und die bilineare Abbildung $f : \bigoplus_i S_i \longrightarrow \varinjlim \mathcal{B}$, $s \mapsto \prod_i \psi_i(s_i)$.

Somit liefern uns die universellen Eigenschaften folgende zwei R -Algebra-Homomorphismen:

$$\varphi : \varinjlim \mathcal{B} \longrightarrow \bigotimes_i S_i$$

$$\phi : \bigotimes_i S_i \longrightarrow \varinjlim \mathcal{B}.$$

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{B} & \\ \psi' \swarrow & & \searrow \psi \\ \bigotimes_i S_i & \xleftarrow{\exists! \varphi} & \varinjlim \mathcal{B} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \bigoplus_i S_i & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ \varinjlim \mathcal{B} & \xleftarrow{\exists! \phi} & \bigotimes_i S_i \end{array}$$

Die Eindeutigkeit der universellen Eigenschaften liefert uns, dass φ und ϕ zueinander Inverse sind und somit haben wir unsere gesuchten Isomorphismen zwischen $\varinjlim \mathcal{B}$ und $\bigotimes_i S_i$ gefunden.

$$\begin{array}{ccc}
& \mathcal{B} & \\
\psi \swarrow & & \searrow \psi \\
\varinjlim \mathcal{B} & \xleftarrow{\exists! \text{id}_{\varinjlim \mathcal{B}} = \phi \circ \varphi} & \varinjlim \mathcal{F}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
& \bigoplus_i S_i & \\
g \swarrow & & \searrow g \\
\bigotimes_i S_i & \xleftarrow{\exists! \text{id}_{\bigotimes_i S_i} = \varphi \circ \phi} & \bigotimes_i S_i
\end{array}$$

Zu 2.:

Zeige, dass $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ die in lemma 5 eingeführten Eigenschaften des Differenzkern's besitzt.

$$q \circ f = q \circ g \text{ gilt, da } \text{kern}(q) = Q = \{f(x) - g(x) \mid x \in C_2\}.$$

Sei nun eine Funktion $q' \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(S_2, T')$ mit $q' \circ f = q' \circ g$ gegeben.

Somit gilt $q' \circ (f - g) = 0$, wodurch Q ein Untermodul von $Q' := \text{kern}(q')$ ist.

Mit dem Isomorphiesatz für R-Algebren erhalten wir:

$$S_2/Q' \simeq (S_2/Q)/(Q'/Q).$$

Somit ist $q' : S_2 \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q)$, $y \longmapsto [y]'$ eine isomorphe Darstellung von $q' : S_2 \longrightarrow T'$.

$$\Rightarrow \exists! \varphi : S_2/Q \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q), [y] \longmapsto [y]' \text{ mit } (\varphi \circ q) = q'.$$

Also ist $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Differenzkern von f und g . □

Darstellung der Polynomialgebra als Tensorprodukt *[Eigene Überlegung]*

Bemerkung 8. Die Polynomialgebra $R[x_1, \dots, x_d]$ über R lässt sich wie folgt als Tensorprodukt darstellen:

$$R[x_1, \dots, x_n] = \bigotimes_{i \in \{1, \dots, n\}} R[x_i]$$

Genauer gilt für zwei Polynomialgebren $A = R[x_1, \dots, x_{n_A}]$, $B = R[y_1, \dots, y_{n_B}]$ über R :

$$A \otimes_R B = R[x_1, \dots, x_{n_A}, y_1, \dots, y_{n_B}]$$

Skizziere den Beweis.

Beweis. Zeige, dass für $g : A \oplus B \longrightarrow R[x_1, \dots, x_{n_A}, y_1, \dots, y_{n_B}]$, $(a, b) \longmapsto a \cdot b$ die Universelle Eigenschaft des Tensorproduktes gilt:

$$\begin{array}{ccc}
A \oplus B & \xrightarrow{g} & R[x_1, \dots, x_{n_A}, y_1, \dots, y_{n_B}] \\
& \searrow f & \downarrow \exists! \varphi \\
& & M
\end{array}$$

Es ist leicht nachzurechnen, dass es sich bei φ um folgende Funktion handeln muss:

$$\varphi : R[x_1, \dots, x_{n_A}, y_1, \dots, y_{n_B}] \longrightarrow M, (x_i \cdot y_j) \longmapsto f(x_i, 1) \cdot f(1, y_j)$$

□

R-Modul-Kolimiten [Proposition A6.2 David Eisenbud 1994]

Proposition 9. In Der Kategorie der R -Module existieren Koproducte und Differenzkokerne, wobei:

1. das Koproduct $\lim_{\longrightarrow} \mathcal{B}$ von R -Modulen $M_i \in (R - \text{Module})$ entspricht der direkten Summe $\sum_i M_i$.
2. der Differenzkern zweier Homomorphismen $f, g : M_1 \longrightarrow M_2$ entspricht dem Kokern $M_2 / \text{im}(f - g)$ der Differenzenabbildung.

Beweis. für 1. Sei $\phi : \{M_i\} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein beliebiger Morphismus. Zeige:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{B} & \\ \psi_i \swarrow & & \searrow \psi_i \\ M' & \xleftarrow{\exists! \varphi} & \bigoplus_i M_i \end{array}$$

Für ein beliebiges i existiert genau ein $\varphi_i : M_i \oplus 0 \longrightarrow M'$, $(0, \dots, 0, m_i, 0, \dots, 0) \longmapsto \psi'_i(m_i)$ mit $\psi'_i = \psi_i \circ \varphi_i$
 $\Rightarrow \exists! \varphi : \bigoplus_i M_i \longrightarrow M', (m_1, \dots, m_n) \longmapsto \sum_i \psi_i(m_i)$

2. ist Analog zu proposition 7

□

Die in proposition 9 gezeigten Darstellungen gelten mit kurzen Überlegungen auch für S -Module, wobei S eine R -Algebra ist.

Lokalisierung von Algebren als Kolimes [vgl. Aufgabe A6.7 David Eisenbud 1994]

Lemma 10. Sei S eine R -Algebra und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$S[U^{-1}] = \lim_{\longrightarrow} \mathcal{B}$$

Wobei \mathcal{B} aus den Objekten $\{S[t^{-1}] | t \in U\}$ und den Morphismen $S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}], (\frac{s}{t^n})_t \longmapsto (\frac{st'^n}{(tt')^n})_{(tt')}, \forall t, t' \in U$ besteht.

Beweis. Sei $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow A$ der Kolimes von \mathcal{B} . Zeige $S[U^{-1}] \simeq A$, definiere dazu:

$$\begin{aligned} \psi' : \mathcal{B} &\longrightarrow S[U^{-1}] \\ \psi'_{S[t^{-1}]} : S[t^{-1}] &\longrightarrow S[t^{-1}], \left(\frac{s}{t^n}\right)_t \longmapsto \left(\frac{s}{t^n}\right)_U \end{aligned}$$

ψ' ist ein Morphismus, da für beliebige $t, t' \in U$ und $s \in S$ gilt:

$$\left(\frac{s}{t^n}\right)_U = \left(\frac{st'^n}{(tt')^n}\right)_U$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir den eindeutigen Homomorphismus $\varphi : A \longrightarrow S[U^{-1}]$.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{B} & \\ \psi' \swarrow & & \searrow \psi \\ S[U^{-1}] & \xleftarrow{\exists! \varphi} & A \end{array}$$

Für $\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow A$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen.

Zunächst können wir jedes Element $\left(\frac{s}{u}\right)_U \in S[U^{-1}]$ als $\psi_{S[t^{-1}]}(\left(\frac{s}{t}\right)_t)$ schreiben.

Weiter gilt für alle $s_1, s_2 \in S$, $t_1, t_2 \in U$:

$$\begin{aligned} \text{Sei } \psi'_{S[t^{-1}]}(\left(\frac{s_1}{t_1}\right)_t) &= \psi'_{S[t^{-1}]}(\left(\frac{s_2}{t_2}\right)_t) \\ \Rightarrow \exists u \in U : (s_1 t_1 - s_2 t_2) \cdot u &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{s_1 u}{t_1 u}\right)_{tu} &= \left(\frac{s_2 u}{t_2 u}\right)_{tu} \\ \Rightarrow \psi_{S[t^{-1}]}(\left(\frac{s_1}{t_1}\right)_t) &= \psi_{S[t^{-1}]}(\left(\frac{s_2}{t_2}\right)_t) \end{aligned}$$

Mit diesem Wissen können wir den R-Algebra-Homomorphismus $\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow A$ definieren:

$$\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow A, \psi'_{S[t^{-1}]}(\left(\frac{s}{t}\right)_t) \longmapsto \psi_{S[t^{-1}]}(\left(\frac{s}{t}\right)_t)$$

$\phi \circ \varphi = id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{B} & \\ \psi \swarrow & & \searrow \psi \\ A & \xleftarrow{\exists! id_A = \phi \circ \varphi} & A \end{array}$$

Für $\varphi \circ \phi \stackrel{!}{=} id_{S[U^{-1}]}$ wähle beliebige $s \in S, t \in U$, für diese gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi'(\left(\frac{s}{t}\right)_t)) = \varphi(\psi(\left(\frac{s}{t}\right)_t)) = \psi'(\left(\frac{s}{t}\right)_t)$$

Damit haben wir gezeigt, dass φ, ϕ Isomorphismen sind und somit $A \simeq S[U^{-1}]$ gilt.

Da der Kolimes bis auf Isomorphie eindeutig ist, definiere ab sofort $S[U^{-1}]$ als den eindeutigen Kolimes von \mathcal{B} . \square

Lokalisierung von Moduln als Kolimes *[Eigene Idee, wurde angeschnitten im Beweis von Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]*

Korrolar 11. Sei M ein S -Modul, wobei S eine R -Algebra ist. Sei weiter $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$M[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{C}$$

Wobei \mathcal{C} aus den Objekten $\{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] | t \in U\}$ und folgenden Morphismen besteht:

$$\begin{aligned} S[U^{-1}] \otimes M[t^{-1}] &\longrightarrow S[U^{-1}] \otimes M[(tt')^{-1}], \\ \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{t^n}\right)_t &\longmapsto \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{t'^n m}{(tt')^n}\right)_t \end{aligned}$$

Auch wenn sich lemma 10 hier nicht direkt anwenden lässt, so können wir doch im Beweis gleich vorgehen.

Beweis. Schließe zunächst den trivialen Fall $0 \in U$ aus.

Sei $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow A$ der Colimes von \mathcal{C} . Zeige $S[U^{-1}] \simeq A$, definiere dazu folgenden Morphismus :

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{C} &\longrightarrow M[U^{-1}] \\ \psi_t : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] &\longrightarrow M[U^{-1}], \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{t^n}\right)_t \longmapsto \left(\frac{sm}{ut^n}\right)_U \end{aligned}$$

Die Wohldefiniertheit von ψ'_t für ein beliebiges $t \in U$ folgt direkt aus der Universellen Eigenschaft des Tensorprodukt's. Denn für die bilineare Abbildung $f : S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \longrightarrow M[t^{-1}], \left(\left(\frac{s}{u}\right)_U, \left(\frac{m}{t^n}\right)_t\right) \longmapsto \left(\frac{sm}{ut^n}\right)_U$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] & \xrightarrow{g} & S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \psi'_t \\ & & M[U^{-1}] \end{array}$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir nun den eindeutigen Homomorphismus $\varphi : A \longrightarrow M[U^{-1}]$.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C} & \\ \psi' \swarrow & & \searrow \psi \\ M[U^{-1}] & \xleftarrow{\exists! \varphi} & A \end{array}$$

Für $\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow A$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen.

Zunächst können wir jedes Element $\left(\frac{m}{u}\right)_U \in M[U^{-1}]$ als $\psi\left(\left(\frac{1}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{1}\right)_t\right)$ schreiben. Wobei mit ψ gemeint ist, dass wir ein beliebiges $t \in U$ wählen und dann ψ_t

betrachten. Diese Verallgemeinerung ist möglich, da für beliebige $t_1, t_2, u \in U$ und $m \in M$ gilt:

$$\psi_{t_1}((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_{t_1}) = (\frac{m}{u})_U = \psi_{t_2}((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_{t_2})$$

Definiere nun mit diesem Wissen folgenden Homomorphismus:

$$\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow A, \psi((\frac{1}{u})_U \otimes t) \longmapsto \psi'((\frac{1}{u})_U \otimes t)$$

$\phi \circ \varphi = id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes.

Für $\varphi \circ \phi \stackrel{!}{=} id_{M[U^{-1}]}$ wähle $(\frac{m}{u})_U \in M[U^{-1}]$ beliebig, für dieses gilt:

$$\begin{aligned} & (\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)) \\ &= \varphi(\psi((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)) \\ &= \psi'((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t) \end{aligned}$$

Damit haben wir $A \simeq M[U^{-1}]$ gezeigt, definiere also ab sofort $M[U^{-1}]$ als den eindeutigen Kolimes von \mathcal{C} . \square

2.2 Kähler-Differenzial von Kolimiten

Differenzial des Kolimes von R-Algebren [vgl. Korollar 16.7 David Eisenbud 1994]

Proposition 12.

1. Sei $T = \otimes_{i \in \Lambda} S_i$ das Koprodukt der R -Algebren S_i .
Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} \simeq \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$$

2. Seien S_1, S_2 R -Algebren und $\varphi, \varphi' : S_1 \longrightarrow S_2$ R -Algebra-Homomorphismen. Sei weiter $q : S_2 \longrightarrow T$ der Differenzkokern von φ, φ' . Dann ist folgende Sequenz rechtsexakt:

$$T \otimes_{S_1} \Omega_{S_1/R} \xrightarrow{f} T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R} \xrightarrow{g} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{mit: } f : T \otimes \Omega_{S_1/R} &\longrightarrow T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R}, t \otimes d_{S_1}(x_1) \longmapsto t \otimes d_{S_2}(\varphi(x_1) - \varphi(x_2)) \\ g : T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R} &\longrightarrow \Omega_{T/R}, t \otimes d_{S_2}(x_2) \longmapsto (d_T \circ q)(x_2) \end{aligned}$$

Beweis.

Für **1.** finde durch die Universelle Eigenschaft des Kähler-Differenzials Isomor-

phismen $\Omega_{T/R} \longleftrightarrow \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$.

Definiere das Differenzial $e : T \longrightarrow \bigoplus_{i \in \Lambda} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}$, $(s_i \otimes \dots) \longmapsto (1 \otimes d_{S_1}, \dots)$ und erhalte dadurch

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{d_T} & \Omega_{T/R} \\ & \searrow e & \downarrow \exists! \varphi \\ & & \bigoplus_{i \in \Lambda} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \end{array} \quad \varphi : \Omega_{T/R} \longrightarrow \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}).$$

Definiere nun das Differenzial $k : S_i \hookrightarrow T \longrightarrow \Omega_{T/R}$ und erhalte dadurch:

$$\begin{array}{ccc} S_i & \xrightarrow{d_{S_i}} & \Omega_{S_i/R} \xrightarrow{a} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \\ & \searrow k & \downarrow \exists! k' \swarrow \phi_i \\ & & \Omega_{T/R} \end{array} \quad \phi_i : \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \longrightarrow \Omega_{T/R}$$

$$\phi : \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \longrightarrow \Omega_{T/R}, \quad (\dots, t_i \otimes d_{S_i}(s_i), \dots) \longmapsto \prod_{i \in \Lambda} t_i \cdot \phi_i(d_{S_i}(s_i))$$

Damit haben wir zwei zueinander inverse Funktionen φ, ϕ gefunden.

$$\Rightarrow \Omega_{T/R} \simeq \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$$

Für 2. Wende Satz 2 auf den Differenzialkokern $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ (vgl. Proposition 7) an und erhalte dadurch eine exakte Sequenz, welche ähnlich zu der gesuchten ist:

$$Q/Q^2 \xrightarrow{f'} T \otimes_{S_2/R} \Omega_{S_2/R} \xrightarrow{g} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

mit $f' : Q/Q^2 \longrightarrow T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R}$, $[s_2]_{Q^2} \longmapsto 1 \otimes d_{S_2}(s_2)$.

Somit gilt $\text{im}(f) = T \otimes_{S_2} d_{S_2}(Q) = \text{im}(f')$.

\Rightarrow die gesuchte Sequenz ist exakt. \square

s

Differenzial von Polynomalgebren 1 [vgl. Proposition 16.1 David Eisenbud 1994]

Korollar 13. Sei $S = R[x_1, \dots, x_n]$ eine Polynomalgebra über R . Dann gilt:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} S \langle d_S(x_i) \rangle$$

Wobei $S \langle d_S(x_i) \rangle$ das von $d_S(x_i)$ erzeugte Modul über S ist.

Beweis. Wie in Bemerkung 8 gezeigt, können wir S als $\bigotimes_{i \in \{1, \dots, n\}} R[x_i]$ schreiben. In Proposition 12 haben wir gezeigt, wie das Differenzial eines solchen Tensorproduktes aussieht:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} (S \otimes_{R[x_i]} \Omega_{R[x_i]/R})$$

Da $R[x_i]$ die aus dem Element x_i erzeugte Algebra über R ist, folgt [vgl. *BE-MERKUNG ZU ENDLICH ERZEUGTEN ALGEBREN*]:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} (S \otimes_{R[x_i]} R[x_i] \langle d_{S[x_i]}(x_i) \rangle) \simeq \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} S \langle d_S(x_i) \rangle$$

Für die letzte Isomorphie nutze, dass wegen $R[x_i] \subseteq S$ zum Einen $d_{R[x_i]}$ als Einschränkung von d_S gesehen werden kann und zum Anderen $S \otimes_{R[x_i]} R[x_i] \simeq S$ gilt. \square

Differenzial von Polynomialalgebren 2 [vgl. Korollar 16.6 David Eisenbud 1994]

Korollar 14. Sei S eine R -Algebra und $T := S[x_1, \dots, x_n]$ eine Polynomialgebra über S . Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$

Beweis. Betrachte T als Tensorprodukt über R -Algebren und wende anschließend proposition 12 an:

$$\begin{aligned} T &\simeq S \otimes_R R[x_1, \dots, x_n] \\ \Rightarrow \Omega_{T/R} &\simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus (T \otimes_{R[x_1, \dots, x_n]} \Omega_{R[x_1, \dots, x_n]/R}) \end{aligned}$$

Zuletzt wende den soeben gezeigten korollar 13 an und nutze schließlich $R[x_1, \dots, x_n] \subseteq T$ um das Tensorprodukt zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} &T \otimes_{R[x_1, \dots, x_n]} \Omega_{R[x_1, \dots, x_n]/R} \\ &\simeq T \otimes_{R[x_1, \dots, x_n]} \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} R[x_1, \dots, x_n] \langle d_{R[x_i]}(x_i) \rangle \\ &\simeq \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_R(x_i) \rangle \end{aligned}$$

\square

Differenzial der Lokalisierung [vgl. Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]

Theorem 15. Sei S eine R -Algebra und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Omega_{S[U^{-1}]/R} &\simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}, \text{ Wobei:} \\ d_{S[U^{-1}]}((\frac{1}{u})_U) &\longmapsto -(\frac{1}{u^2})_U \otimes d_S(u) \end{aligned}$$

Beweis. Wir wollen THEOREM16.8 auf $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$ aus lemma 10 anwenden.

Zeige also zunächst den einfacheren Fall $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ für ein beliebiges $t \in U$:

Nutze hierfür die Isomorphe Darstellung $S[t^{-1}] \simeq S[x]/(tx - 1)$, sowie die Isomorphie $\Omega_{S[x]/R} \simeq S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x)$. aus korrolar 14
Daraus erhalten wir folgende Isomorphismen:

$$\begin{aligned}\alpha : S[t^{-1}] &\longrightarrow S[x]/(tx - 1) \\ \beta : S[x]/(tx - 1) &\longrightarrow S[t^{-1}] \\ \gamma : \Omega_{S[x]/R} &\longrightarrow S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x)\end{aligned}$$

Nutze diese nun, um $\Omega_{S[t^{-1}]/R}$ isomorph zu $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ umzuformen:

$$\begin{array}{ccc}\Omega_{S[t^{-1}]/R} & & d_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t) \\ \downarrow D\alpha & & \downarrow D\alpha \\ \Omega_{S[x]/R}/d_{S[x]}(tx - 1) & & [d_{S[x]}(sx)] = [xd_{S[x]}(s) + sd_{S[x]}(x)] \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \\ (S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x))/((tx - 1)d_{S[x]}(tx - 1)) & & [x \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \\ \downarrow \beta & & \downarrow \beta \\ (S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus S[t^{-1}]d_{S[x]}(x)/d_{S[x]}(tx - 1) =: M & & [(\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} & & ((\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s)) - ((\frac{s}{t^2})_t \otimes d_S(t))\end{array}$$

Die ersten drei Schritte ergeben sich aus den oben angegebenen Isomorphismen. Für den letzten Schritt definiere:

$$f : M \longrightarrow S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}, [(\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \longmapsto ((\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s)) - ((\frac{s}{t^2})_t \otimes d_S(t))$$

Damit f ein Isomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ ein eindeutiges Repräsentantensystem von M ist.

Sei dazu $[m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]$ ein beliebiger Erzeuger von M . Somit gilt:

$$\begin{aligned}d_{S[x]}(tx - 1) &= td_{S[x]}(x) + \beta(x)d_{S[x]}(s) \\ \Rightarrow [0, d_{S[x]}(x)] &= [-(\frac{1}{t^2})_t d_S(t), 0] \\ \Rightarrow [m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)] &= [m_1 - (\frac{s}{t^{n+2}})_t d_S(t), 0] = [f([m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]), 0]\end{aligned}$$

f ist also wie vermutet ein Isomorphismus und aus obigen Umformungen folgt $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} = \Omega_{S/R}[t^{-1}]$.

Definiere für beliebige $t \in U$ folgenden Isomorphismus:

$$f \circ \beta \circ \gamma \circ D\alpha =: \delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}], d_{S[t^{-1}]}((\frac{1}{t})_t) \longmapsto -(\frac{d_S(t)}{t^2})_t$$

Zeige nun den Allgemeinen Fall $\Omega_{S[U^{-1}]/R} \simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$:

Wähle $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$ wie in lemma 10, sodass $\varinjlim \mathcal{B} = S[U^{-1}]$ gilt.

Mit THEOREM16.8 folgt somit:

$$\begin{aligned} \Omega_{S[U^{-1}]/R} &= \varinjlim \mathcal{F} \text{ mit:} \\ \mathcal{F} : \mathcal{B} &\longrightarrow (S[U^{-1}] - \text{Module}), S[t^{-1}] \longmapsto S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]/R} \\ &\quad (\varphi : S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}]) \\ &\longmapsto (1 \otimes D\varphi : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R})) \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Morphismen in $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ definiere folgenden Isomorphismus:

$$\begin{aligned} g : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) &\longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R} \\ \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \left(\left(\frac{s'}{t}\right)_t \otimes d_{S[tt'^{-1}]}(x)\right) &\longmapsto \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \varphi\left(\left(\frac{s'}{t}\right)_t\right) d_{S[tt'^{-1}]}(x) \end{aligned}$$

Als letzten Schritt wollen wir ?? anwenden. Nutze dazu $\delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}]$ um den zu \mathcal{F} isomorphen Funktor $\mathcal{F}' := \delta \circ \mathcal{F}$ zu erhalten. Um ein genaueres Bild von \mathcal{F}' zu erlangen, betrachte folgendes Kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} S[t^{-1}] & \xrightarrow{\varphi} & S[tt'^{-1}] \\ \downarrow \mathcal{F} & & \downarrow \mathcal{F} \\ S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[t^{-1}]/R} & \xrightarrow{1 \otimes D\varphi} & S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) \\ \downarrow \delta_t & & \downarrow g \\ S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] & \xrightarrow{1 \otimes \varphi} & S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S/R}[tt'^{-1}] \\ & & \downarrow \delta_{tt'} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \left(\frac{s}{t}\right)_t & \xrightarrow{\varphi} & \left(\frac{st'}{tt'}\right)_{tt'} \\ \downarrow d_{S[t^{-1}]} & & \downarrow d_{S[tt'^{-1}]} \\ 1 \otimes \left(\left(\frac{1}{t}\right)_t d_{S[t^{-1}]} \left(\left(\frac{s}{1}\right)_t\right) + \left(\frac{s}{1}\right)_t d_{S[t^{-1}]} \left(\left(\frac{1}{t}\right)_t\right)\right) & \xrightarrow{g \circ (1 \otimes D\varphi)} & 1 \otimes \left(\left(\frac{1}{tt'}\right)_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]} \left(\left(\frac{st'}{1}\right)_{tt'}\right) + \left(\frac{st'}{1}\right)_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]} \left(\left(\frac{1}{tt'}\right)_{tt'}\right)\right) \\ \downarrow \delta_t & & \downarrow \delta_{tt'} \\ 1 \otimes \left(\left(\frac{d_S(s)}{t}\right)_t - \left(\frac{sd_S(t)}{t^2}\right)_t\right) & \xrightarrow{1 \otimes \varphi} & 1 \otimes \left(\left(\frac{t'd_S(s)}{tt'}\right)_{tt'} - \left(\frac{st'd_S(t)}{(tt')^2}\right)_{tt'}\right) (*) \end{array}$$

Dass das Diagramm in dieser Form kommutiert, ergibt sich in fast allen Fällen direkt aus dem Einsetzen in die entsprechenden Homomorphismen. Der einzige

Fall, welcher nicht direkt klar ist, ist (*). Rechne diesen also nochmal nach:

$$\begin{aligned}
& \delta_{tt'}(1 \otimes ((\frac{1}{tt'})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{st'}{1})_{tt'}) + (\frac{st'}{1})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{1}{tt'})_{tt'}))) \\
&= 1 \otimes ((\frac{d_S(st')}{tt'})_{tt'} - (\frac{t' sd_S(tt')}{(tt')^2})_{tt'}) \\
&= 1 \otimes ((\frac{t' d_S(s')}{tt'})_{tt'} + (\frac{sd_S(t')}{tt'})_{tt'} - (\frac{tt' d_S(t')}{(tt')^2})_{tt'} - (\frac{t'^2 sd_S(t)}{(tt')^2})_{tt'}) \\
&= 1 \otimes ((\frac{t' d_S(s)}{tt'})_{tt'} - (\frac{t'^2 sd_S(t)}{(tt')^2})_{tt'}) \\
&= (1 \otimes \varphi)(1 \otimes ((\frac{d_S(s)}{t})_t - (\frac{sd_S(t)}{t^2})_t))
\end{aligned}$$

Damit ist \mathcal{F}' zu \mathcal{F} isomorph und für $\mathcal{C} := \mathcal{F}'(\mathcal{B})$ gilt $\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \varinjlim \mathcal{F}' = \varinjlim \mathcal{C}$ [vgl. bemerkung 3]. Wobei die Form von \mathcal{C} genau dem Fall aus ?? entspricht:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] | t \in U\} \text{ mit den Morphismen} \\
1 \otimes \varphi : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] &\longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S/R}[tt'^{-1}] \\
(\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{d_S(x)}{t^n})_t &\longmapsto (\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{t'^n d_S(x)}{(tt')^n})_{tt'}
\end{aligned}$$

Somit folgt $\varinjlim \mathcal{C} = \Omega_{S/R}[U^{-1}]$ und wir haben $\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \Omega_{S/R}[U^{-1}]$ gezeigt. \square

Kapitel 3

Körpererweiterungen

Definition der Differenzialbasis [vgl. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]

Definition 1. Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung. Dann nennen wir eine Teilmenge $\{b_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq L$ eine Differenzialbasis von L über k , falls $\{d_K(b_i)\}_{i \in \Lambda}$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{L/R}$ über L ist.

Differential von rationalen Funktionen 1 [vgl. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]

Beispiel 2. Sei k ein Körper und $L = k(\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in n Variablen über k . Dann gilt:

$$\Omega_{L/k} \simeq L \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle$$

Insbesondere ist $\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ eine Differenzialbasis von $\Omega_{L/k}$.

Beweis. Betrachte $L = k[x_1, \dots, x_n][k[x_1, \dots, x_n]^{-1}]$ als Lokalisierung um theorem 15 anwenden zu können. Anschließend forme noch $\Omega_{k[x_1, \dots, x_n]/k}$ mithilfe von korollar 13 isomorph um:

$$\begin{aligned} \Omega_{L/k} &\simeq L \otimes \Omega_{k[x_1, \dots, x_n]/k} \\ &\simeq L \otimes \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} k[x_1, \dots, x_n] \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \\ &\simeq L \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \end{aligned}$$

Damit ist $\{d_L(x_i)\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{L/k}$. □

Differential von rationalen Funktionen 2 [Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]

Korollar 3. Sei k ein Körper und $L \supset k$ eine Körpererweiterung und $T = L(\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in n Variablen über L .

Dann gilt:

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$

Beweis. Betrachten T als Lokalisierung von $L[x_1, \dots, x_n]$ und gehen dann analog zu Beispiel 2 vor:

$$\begin{aligned} \Omega_{T/k} &\simeq T \otimes_{L[x_1, \dots, x_n]} \Omega_{L[x_1, \dots, x_n]/k} \quad (\text{theorem 15}) \\ \Omega_{L[x_1, \dots, x_n]/R} &\simeq (L[x_1, \dots, x_n] \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i \in \{1, \dots, n\}} L[x_1, \dots, x_n] \langle d_{L[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \quad (\text{korollar 14}) \\ &\Rightarrow \Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle \end{aligned}$$

□

Cotangent Sequenz von Körpern 1 [Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]

Bemerkung 4. Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung und $T = L(x_1, \dots, x_n)$ der Körper der rationalen Funktionen in n Variablen über L . Dann ist die COTANGENT SEQUENZ (proposition 1) von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ eine kurze Exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Im Allgemeinen ist $\varphi : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k}, t \otimes d_L(l) \longmapsto t \cdot d_T(l)$ injektiv.

Beweis. Die Injektivität von φ folgt direkt aus der isomorphen Darstellung von $\Omega_{T/k}$, die wir uns in korollar 3 erarbeitet haben.

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$

Um sicher zu gehen definiere $\varphi' \simeq \varphi$ und durchlaufe die in korollar 3 genutzten Isomorphismen noch einmal Schritt für Schritt:

$$\begin{array}{ccc} \varphi' : T \otimes_L \Omega_{L/k} & \longrightarrow & T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_{T/k} & & td_T(l) \\ \downarrow \text{theorem 15} & & \downarrow \\ T \otimes_S \Omega_{L[x_1, \dots, x_n]/k} & & t \otimes d_S(l) \\ \downarrow \text{korollar 14} & & \downarrow \\ T \otimes_S ((S \otimes_L \Omega_{L/k}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} S \langle d_S(x_i) \rangle) & & t \otimes (d_L(l), 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle & & (t \otimes d_L(l), 0) \end{array}$$

Damit ist φ eine injektive Einbettung von $T \otimes_L \Omega_{L/k}$ in $\Omega_{T/k}$. \square

Aufbaulemma Koerperdifferenzial [vgl. Lemma 16.15 David Eisenbud 1994]

Lemma 5. Sei $L \subset T$ eine seperable und algebraische Körpererweiterung und $R \rightarrow L$ ein Ringhomomorphismus. Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} = T \otimes_L \Omega_{L/R}$$

Insbesondere ist in diesem Fall die COTANGENT SEQUENZ (proposition 1) von $R \rightarrow L \hookrightarrow T$ eine kurze Exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \longrightarrow \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Beweis. Wähle $\alpha \in T$ mit $L[\alpha] = T$. Sei weiter $f(x)$ das Minimalpolynom von α . Betrachte dazu die conormale Sequenz von $\pi : L[x] \rightarrow L[x]/(f) \simeq T$ (satz 2):

$$(f)/(f^2) \xrightarrow{1 \otimes d_{L[x]}} T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

Wende nun Proposition 16.6 auf $\Omega_{L[x]/R}$ an und tensoriere mit T , somit gilt:

$$T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \simeq T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle$$

Zusammen mit der conormalen Sequenz bedeutet dies:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle) / (d_{L[x]}(f))$$

Wenn wir $d_{L[x]} : (f) \rightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle$ wie in beispiel 3 betrachten, sehen wir:

$$d_{L[x]}((f)) = J \oplus (f'(\alpha)d_{L[x]}) = J \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle$$

, wobei $J \subseteq T \otimes_L \Omega_{L/R}$ ein Ideal ist.

Für die letzte Gleichheit nutze, dass $T \supset L$ seperabel und somit $f'(\alpha) \neq 0$ ist und nach obiger Wahl $T = L[\alpha]$ gilt.

Damit erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} \Omega_{T/R} &\simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) / J \\ &\Rightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \hookrightarrow \Omega_{T/R} \text{ ist surjektiv.} \end{aligned}$$

Somit muss $J = 0$ gelten und es folgt $T \otimes_L \Omega_{L/R} \simeq \Omega_{T/R}$.

Damit haben wir insbesondere auch gezeigt, dass $T \otimes_L \Omega_{L/R} \rightarrow \Omega_{T/R}$ injektiv und somit die COTANGENT SEQUENZ von $R \rightarrow L \hookrightarrow T$ eine kurze exakte Sequenz ist. \square

Transzendenzbasis ist Differenzialbasis [vgl. Theorem 16.4 David Eisenbud 1994]

Theorem 6. Sei $T \supset k$ eine separabel generierte Körpererweiterung und $B = \{b_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq T$. Dann ist B genau dann eine Differenzialbasis von T über k , falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. $\text{char}(k) = 0$ und B ist eine Transzendenzbasis von T über k .
2. $\text{char}(k) = p$ und B ist eine p -Basis von T über k .

Beweis.

1., „ \Leftarrow “: Sei B eine Transzendenzbasis von T über k .

Damit ist die Körpererweiterung $L := k(B) \supset k$ algebraisch und separabel. Mit lemma 5 folgt:

$$\Omega_{T/k} = T \otimes_L \Omega_{L/k}$$

Betrachte $L = k[B][k[B] \setminus 0^{-1}]$ als Lokalisierung und wende theorem 15 auf $\Omega_{L/k}$ an, somit gilt:

$$\Omega_{L/k} = L \otimes_{k[B]} \Omega_{k[B]/k}$$

In korollar 13 haben wir gesehen, dass $\Omega_{k[B]/k}$ ein freies Modul über $k[B]$ mit $\{b_i\}_{i \in \Lambda}$ als Basis ist. Dies liefert uns letztendlich die gewünschte Darstellung

$$\Omega_{T/k} = \bigoplus_{\{i \in \Lambda\}} T \langle d_T(b_i) \rangle.$$

1., „ \Rightarrow “: Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.

Zeige zunächst, dass T algebraisch über $L := k(B)$ ist:

Die COTANGENT SEQUENZ (*proposition 1*) von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ besagt $\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T \langle d_T(S) \rangle$ und nach Voraussetzung gilt $\Omega_{T/k} = T \langle d_T(B) \rangle$.
 $\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T \langle d_T(L) \rangle = \Omega_{T/k}/T \langle d_T(B) \rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$

Da, wie wir in „ \Leftarrow “ gezeigt haben, jede Transzendenzbasis B' von T über L auch eine Differenzialbasis von $\Omega_{T/L} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Da dies sonst der Existenz von Transzendenzbasen (*PROPOSITION*) widersprechen würde, muss somit T algebraisch über L sein.

Zeige noch, dass B auch algebraisch unabhängig über L ist:

Sei dazu Γ eine minimale Teilmenge von Λ , für welche T noch algebraisch über $k(\{b_i\}_{i \in \Gamma})$ ist. Für diese ist $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ algebraisch unabhängig über K . Damit ist nach „ \Leftarrow “ $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von T über k . Also muss schon $\Gamma = \Lambda$ gegolten haben und B ist eine Transzendenzbasis von T über k .

2., „ \Leftarrow “: Sei B eine p -Basis von T über k .

Somit wird nach DEFINITION-PROPOSITION T von B als Algebra über $(k * T^p)$ und $\Omega_{T/(k * T^p)}$ von $d_T(B)$ als Vektorraum über T (*PROPOSITION*) erzeugt. Zeige also $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p * k)}$:

Die Cotangent Sequenz (*proposition 1*) von $K \hookrightarrow (k * T^p) \hookrightarrow T$ besagt:

$$\Omega_{T/(T^p * k)} \simeq \Omega_{T/k} / d_T(T^p * k)$$

$$\begin{aligned} \text{Für beliebige } t^p \in T^p \text{ gilt } d_T(t^p) &= pt^{p-1}d_T(t) = 0, \text{ da } \text{char}(T) = p. \\ \Rightarrow d_T(T^p * k) &= d_T(k(T^p)) = 0 \end{aligned}$$

Damit ist $d_T : T \longrightarrow \Omega_{T/k}$ auch $(T^p * k)$ -linear und es gilt $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p * k)}$.

2., „ \Rightarrow “: Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.

Zeige zunächst, dass T von B als Algebra über k erzeugt wird:

Die COTANGENT SEQUENZ (*proposition 1*) von $k \hookrightarrow L := k(B) \hookrightarrow T$ besagt $\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k} / T \langle d_T(L) \rangle$ und nach Voraussetzung gilt $\Omega_{T/k} = T \langle d_T(B) \rangle$.

$$\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k} / T \langle d_T(L) \rangle = \Omega_{T/k} / T \langle d_T(B) \rangle = \Omega_{T/k} / \Omega_{T/k} = 0$$

Da, wie wir in „ \Leftarrow “ gezeigt haben, jede p -Basis B' von T über L auch eine Differenzialbasis von $\Omega_{T/L} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Somit wird T schon von B als Algebra über k erzeugt.

Zeige noch, dass B auch minimal als Erzeugendensystem von T als Algebra über k ist:

Sei dazu Γ die minimale Teilmenge von Λ , für welche T noch von $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ als Algebra über k erzeugt wird. Dann ist $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ eine p -Basis von T über k . Somit ist nach „ \Leftarrow “ $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von T über k . Es muss also schon $\Gamma = \Lambda$ gegolten haben und B ist eine p -Basis von T über k .

□

Kapitel 4

Aufgaben

- Aufgabe 6.7 aus David Eisenbud 1994 ist lemma 10.
- Aufgabe 16.6 a) aus David Eisenbud 1994 ist bemerkung 4.

Cotangent Sequenz von Koerpern 3 [Aufgabe 16.6 b) David Eisenbud 1994]

Wir nennen eine Körpererweiterung $T \supset L$ pur inseperabel, falls gilt:

$$\text{char}(L) = p > 0 \text{ und } \forall t \in T \exists l \in L \exists n \in \mathbb{N} : t^{p^n} = l$$

Proposition 1. Seien $T \supset L \supset k$ endliche Körpererweiterungen. Betrachte die COTANGENT SEQUENZ (proposition 1) von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$:

$$T \otimes_L \Omega_{L/k} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Sei weiter die Körpererweiterung $T \supset L$ algebraisch und pur inseperabel und existiere ein $\alpha \in T$ mit $L(\alpha) = T$ und $\text{Mipo}(\alpha) = f(x) = x^p - a$. Dann gilt:

$$\varphi \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow d_L(a) = 0$$

Beweis. Lege zunächst $T = L[x]/(f(x))$ fest und betrachte den kanonischen Epimorphismus $\pi : L[x] \rightarrow T$, sowie die dazugehörige Konormale Sequenz (satz 2). Forme diese leicht um (2), sodass wir sie mit der COTANGENT SEQUENZ von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ (3) vergleichen können:

$$(f(x))/(f(x)^2) \xrightarrow{1 \otimes d_{L[x]}} T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/k} \longrightarrow 0 \quad (1)$$

$$T \langle d_{L[x]}(f(x)) \rangle \hookrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/k} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle \xrightarrow{\widetilde{D\pi}} \Omega_{T/k} \longrightarrow 0 \quad (2)$$

$$T \otimes_L \Omega_{L/k} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0 \quad (3)$$

Zeige, dass **(2)** auch wirklich exakt ist:

$$\begin{aligned} (1 \otimes d_{L[x]})(f(x)) &= T \otimes_{L[x]} L[x] \langle d_{L[x]}(f(x)) \rangle \simeq T \langle d_{L[x]}(f(x)) \rangle \\ \Rightarrow \text{Ersetze } 1 \otimes d_{L[x]} : (f(x))/(f(x)^2) &\longrightarrow T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k} \\ &\text{durch } T \langle d_{L[x]}(f(x)) \rangle \hookrightarrow T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k}. \end{aligned}$$

nach korollar 14 gilt $\Omega_{L[x]/k} \simeq L[x] \otimes_L \Omega_{L/k} \oplus L[x] \langle d_{L[x]}(x) \rangle$
und tensorieren mit T ergibt $T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k} \simeq T \otimes_L \Omega_{L/k} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle$.

„ \Rightarrow “: Wenn wir nun unsere zwei exakten Sequenzen betrachten sehen wir, dass φ eine Einschränkung von $D\pi$ auf einen kleineren Definitionsbereich ist. Zeige also, dass $D\pi$ injektiv ist:

$$\begin{aligned} \text{Nach Voraussetzung gilt } d_L(a) &= 0 \text{ also auch } d_{L[x]}(a) = 0 \\ \Rightarrow d_{L[x]}(f) &= d_{L[x]}(x^p) - d_{L[x]}(a) = px^{p-1}d_{L[x]}(x) - d_{L[x]}(a) = 0 - 0 \\ &\Rightarrow T \langle d_{L[x]}(f(x)) \rangle = 0 \end{aligned}$$

Bezogen auf die exakte Sequenz **(2)** bedeutet dies, dass $D\pi$ injektiv ist.

„ \Leftarrow “: Da φ nach Voraussetzung injektiv ist, genügt es $\varphi 1 \otimes a = 0$ zu zeigen:

$$\begin{aligned} \text{In } T \text{ gilt } [f(x)]_T &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= d_T([f(x)]_T) = d_T([x^p]_T) - d_T([a]_T) = d_T([a]_T) \\ &\Rightarrow \varphi(1 \otimes d_L(a)) = d_T([a]_T) = 0 \end{aligned}$$

Da φ nach Voraussetzung injektiv ist, gilt $1 \otimes d_{L[x]}(a) = 0$ und somit auch $d_L(a) = 0$.

□

Cotangent Sequenz von Koerpern 3 Beispiel [Aufgabe 16.6 b) David Eisenbud 1994]

Beispiel 2. Betrachte das in proposition 1 gegebenen Szenario und wähle:

$$k = \mathbb{F}_3, L = k[y]/(y^2 + 1), T = L(\sqrt[3]{y}) \simeq L[x]/(x^3 - y).$$

Hierbei gilt $d_L(x) \neq 0$ und somit ist $\varphi : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{L/k}$ nicht injektiv.

seperabel generierte Koerpererweiterung mit $\text{DifR}(\mathbf{T})(\mathbf{R})$ ist 0 [Aufgabe 16.10 David Eisenbud 1994 (steht im Bezug zu Korollar 16.17)]

Beispiel 3. Sei k ein Körper mit $\text{char}(k) = p > 0$ und sei weiter $K(x)$ der

Raum der Rationalen Funktionen über k .

$$\text{Definiere: } L := k(x^{1/p^\infty}) = \varinjlim \{k(x^{1/p^n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Dann gilt : $\Omega_{L/k} = 0$

Prüfe noch, ob $L \supset k$ eine separabel generierte Körpererweiterung ist.

Beweis. Es gilt:

$$d_L(x^{1/p^n}) = d_L \left(\prod_{i \in \{1, \dots, p\}} x^{1/p^{n+1}} \right) = p \cdot \left(\prod_{i \in \{1, \dots, p-1\}} x^{1/p^{n+1}} \right) \cdot d_L(x^{1/p^{n+1}}) = 0$$

Nutze noch proposition 12 und beispiel 2 um zu folgern, dass $\Omega_{L/k}$ von $\{d_L(x^{1/p^n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ erzeugt wird. \square