Für einen kommutativen Ring R definieren wir $\mathcal{M}$ als die Kategorie der $R-Module$

Lemma 1. *In $\mathcal{M}$ existieren Coprodukte und Differenzenkokerne, wobei:*

1. *das Coprodukt $\coprod_i M_i = \bigoplus_i M_i$ entspricht der direkten Summe*

2. *der Differenzenkokern zweier Homomorphismen $f, g : M_1 \longrightarrow M_2$ entspricht dem Kokern $M/im(f-g)$ der Differenzenabbildung.*

Beweis. für ***1.*** Sei $\phi : \{M_i\} \longrightarrow \mathcal{M}$ ein beliebiger Morphismus. Zeige:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F} : \{M_i\} \hookrightarrow \mathcal{M} \arrow[dl, "\psi_i"'] \arrow[dr, "\psi_i"] & \\ M' & & \bigoplus_i M_i \arrow[ll, dashed, "\exists!\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Für ein beliebiges i existiert genau ein $\varphi_i : M_i \bigoplus 0 \longrightarrow M'$, $(0, ..., 0, m_i, 0, ..., 0 \longmapsto \psi_i'(m_i)$
mit $\psi_i' = \psi_i \circ \varphi_i$
$\Rightarrow \exists! \varphi : \bigoplus_i M_i \longrightarrow M'$, $(m_1, ..., m_n) \longmapsto \sum_i \psi_i(m_i)$

2. ist Analog zu PENIS

$\square$