Proposition 1. *in der Kategorie der R-Algebren existieren Coprodukte und Differenzenkokerne, wobei:*

1. *Das Coprodukt einer endlichen Familie von $R-Algebren$ $\{B_i\}_{i\in\Lambda}$ entspricht deren Tesorprodukt $\bigotimes_{i\in\Lambda} B_i$.*

2. *Der Differenzenkokern zweier R-Algebra-Homomorphismen $f, g : S_1 \longrightarrow S_2$ einspricht dem Homomorphismus $q : S_2 \longrightarrow C_2/Q$, $y \longmapsto [y]$, wobei $Q := \{f(x) - g(x) \mid x \in C_2\}$ das Bild der Differenz von f und g ist.*

Beweis. Zu ***1.***:
Sei $\mathcal{F} : \{B_i\} \hookrightarrow (R - Algebren)$ der Inklusionsfunktor. Nutze die universellen Eigenschaften des Tensorproduktes und des Kähler-Differenzials um einen Isomorphismus zwischen $\varinjlim \mathcal{F}$ und $\bigotimes_{i\in\Lambda} B_i$ zu finden.
Es sind der Morphismus $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}$ und die bilineare Abbildung $g : \oplus_i B_i \longrightarrow \otimes_i B_i$ gegeben.
Konstruiere den Morphismus $\psi' : \mathcal{F} \longrightarrow \otimes_i B_i$ durch $\psi_i' : B_i \longrightarrow \otimes_i B_i$, $b_i \longmapsto g(1, .., 1, b_i, 1, .., 1)$ für $i \in \lambda$ und die bilineare Abbildung $f : \oplus_i B_i \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}$, $b \longmapsto \prod_i \psi_i b_i$.

Somit liefern uns die universellen Eigenschaften folgende zwei R-Algebra-Homomorphismen:

$$\varphi : \varinjlim \mathcal{F} \longrightarrow \bigotimes_i B_i$$

$$\phi : \bigotimes_i B_i \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}.$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F} \arrow[dl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
\otimes_i B_i & & \varinjlim \mathcal{F} \arrow[ll, dashed, "\exists! \varphi"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \oplus_i B_i \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
\varinjlim \mathcal{F} & & \otimes_i B_i \arrow[ll, dashed, "\exists! \phi"']
\end{tikzcd}$$

Die Eindeutigkeit der universellen Eigenschaften liefert uns, das φ und ϕ zueinander Inverse sind und somit haben wir unsere gesuchten Isomorphismen zwischen $\varinjlim \mathcal{F}$ und $\bigotimes_i B_i$ gefunden.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F} \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
\varinjlim \mathcal{F} & & \varinjlim \mathcal{F} \arrow[ll, dashed, "\exists! id_{\varinjlim \mathcal{F}} = \phi \circ \varphi"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \bigoplus_i B_i \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "g"] & \\
\bigotimes_i B_i & & \bigotimes_i B_i \arrow[ll, dashed, "\exists! id_{\bigotimes_i B_i} = \varphi \circ \phi"']
\end{tikzcd}$$

Zu ***2.***:

$$q \circ f = q \circ g \ gilt, \ da \ kern(q) = Q = \{f(x) - g(x) \mid x \in C_2\}$$

Sei nun eine Funktion $q' \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, T')$ mit $q' \circ f = q' \circ$ gegeben.

$$q' \circ (f - g) = 0 \Rightarrow Q \textit{ ist Untermodul von } Q' := kern(q').$$

Nach HOMOMORPHIESATZ [kommutative Algebra 2.10] gilt somit $C_2/Q' \simeq (C_2/Q)/(Q'/Q))$.

$\Rightarrow q' : C_2 \longrightarrow (C_2/Q)/(Q'/Q))\,,\, y \longmapsto [y]'$ *ist eine isomorphe Darstellung von* $q' : C_2 \longrightarrow T'$

$$\Rightarrow \exists! \varphi : C_2/Q \longrightarrow (C_2/Q)/(Q'/Q)\,,\, [y] \longmapsto [y]' \textit{ mit } (\varphi \circ q) = q'.$$

$\square$