Kapitel 1

Grundlegende Sätze

Differenzial indempotenter Elemente *[Aufgabe 16.1 David Eisenbud 1994]*

Lemma 1. *Sei S eine R-Algebra und $d : S \longrightarrow M$ ein beliebige Ableitung von S in ein S-Modul M. Sei weiter $a \in S$ ein indempotentes Element $(a^2 = a)$.*

$$\text{Dann gilt } d(a) = 0.$$

Beweis. Nutze hierfür allein die Leibnizregel *(DEFINITION)*:

$$\begin{gathered}
\text{Schritt 1: } d_S(a) = d_S(a^2) = a d_S(a) + a d_S(a) \\
\text{Schritt 2: } a d_S(a) = a d_S(a^2) = a^2 d_S(a) + a^2 d_S(a) = a d_S(a) + a d_S(a) \\
\Rightarrow d_S(a) = a d_S(a) = 0
\end{gathered}$$

□

Differenzial des Produktes von Algebren *[Proposition 16.10 David Eisenbud 1994]*

Proposition 2. *Seien $S_1, \ldots, S_n$ R-Algebren. Sei dazu $S := \prod_{i \in \{1,\ldots,n\}} S_i$ die direkte Summe. Dann gilt:*

$$\Omega_{S/R} = \prod_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Omega_{S_i/R}$$

Beweis. Sei für $i \in \{1, \ldots, n\}$ jeweils $e_i \in S$ die Einbettung es Einselement's von S_i in S, somit ist $p_i : e_i S \longrightarrow S_i$ ein Isomorphismus.
Nutze weiter, dass e_i ein indempotentes Element $({e_i}^2 = e_i)$ von S ist:

$$\begin{gathered}
\text{Nach lemma 1 gilt } d_S(e_i) = 0 \\
\Rightarrow \forall s \in s : d_S(e_i s) = d_S({e_i}^2 s) = e_i d_S(e_i s) + e_i s d_S(e_i) = e_i d_S(e_i s)
\end{gathered}$$

Mit diesem Wissen können wir einen Isomorphismus $\Phi : \Omega_{S/R} \longrightarrow \prod_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Omega_{S_i/R}$ definieren:

$$\Phi:\ \Omega_{S/R} \longrightarrow \prod_{i\in\{1,\ldots,n\}} e_i d_S(e_i S) \longrightarrow \prod_{i\in\{1,\ldots,n\}} \Omega_{S_i/R}$$

$$d_S(s) = \sum_{i\in\{1,\ldots,n\}} d_S(e_i s) \longmapsto (e_1 d_S(e_1 s), \ldots, e_n d_S(e_n s)) \longmapsto ((d_{S_1}\circ p_1)(s), \ldots, (d_{S_n}\circ p_n)(s))$$

Da der Differenzialraum $\Omega_{S/R}$ bis auf eine eindeutige Isomophie eindeutig ist *(PROPOSITION)*, definiere diesen ab jetzt als $\prod_{i\in\{1,\ldots,n\}} \Omega_{S_i/R}$. □

Cotangent Sequenz *[Proposition 16.2 David Eisenbud 1994(Wichtig für Körpererweiterungen)]*

Proposition 3. *Seien $\alpha : R \longrightarrow S$ und $\beta : S \longrightarrow T$ zwei Ringhomomorphismen. Dann existiert folgende Exakte Sequenz:*

$$T \otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{t\otimes d_S(s)\mapsto t(d_T\circ\beta)(s)} \Omega_{T/R} \xrightarrow{d_T(t)\mapsto d_T(t)} \Omega_{T/S} \longrightarrow 0$$

Im Besonderen gilt für die Differenzialräume von T über R und S:

$$\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R}/T\langle(d_T\circ\beta)(S)\rangle.$$

Konormale Sequenz *[vlg. Proposition 16.3 David Eisenbud 1994]*

Satz 4. *Sei $\pi : S \longrightarrow T$ ein R-Algebrenephimorphismus mit Kern(π):= I Dann ist folgende Sequenz rechtsexakt:*

$$I/I^2 \xrightarrow{f} T\otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{g} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

mit: $f : I/I^2 \longrightarrow T\otimes_S \Omega_{S/R}\,,\ [a]_{I^2} \longmapsto 1\otimes d_S(a)$

$g : T\otimes_S \Omega_{S/R} \longrightarrow \Omega_{T/R}\,,\ b\otimes d_S(c) \longmapsto b\cdot(d_S\circ\pi)(c)$

Beweis.
f ist wohldefiniert: Seien $a, b \in I^2$. Zeige $f(a\cdot b) = 0$:

$$f(a\cdot b) = 1\otimes(d_S\circ\pi)(a\cdot b) = 1\otimes\pi(a)\cdot(d_S\circ\pi)(b) + \pi(b)\cdot(d_S\circ\pi)(a) = 0$$

$D\pi$ ist surjektiv:

$$\begin{tikzcd} \Omega_{S/R} \arrow[r, "D\pi"] & \Omega_{T/R} \\ S \arrow[u, "d_S"] \arrow[r, "\pi"] & T \arrow[u, "d_T"] \end{tikzcd}$$

Da $\Omega_{S/R}$ und $\Omega_{T/S}$ jeweils von d_S und d_T erzeugt werden, vererbt sich die Surjektivität von π auf $D\pi$. Somit ist auch $1\otimes_S D\pi$ surjektiv.

$\underline{im(f) = kern(g)}$:
Dies folgt direkt aus der Isomorphie $(T \otimes_S \Omega_{S/R})/Im(f) \simeq \Omega_{T/R}$:

$$\begin{aligned}
&(T \otimes_S \Omega_{S/R})/Im(f) \\
&= (T \otimes_S \Omega_{S/R})/(T \otimes_S d_S(I)) \\
&= T \otimes_S (\Omega_{S/R}/d_S(I)) \\
&= T \otimes_S (d_S(S)/d_S(I)) \\
&\simeq T \otimes_S d_S(S/I) \\
&\simeq T \otimes_S d_T(T)
\end{aligned}$$

□

Differenzial ist Ableitung *[Eigene Überlegung (Wichtig für Körpererweiterungen)]*

Beispiel 5. *Sei k ein Körper, somit entspricht $d_{k[x]} : k[x] \longrightarrow \Omega_{k[x]/k}$, $f \longmapsto f' d_{k[x]}(x)$ der analytischen Ableitung.*
Teste dies an $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$d(f(x)) = a \cdot d(x^2) + b \cdot d(x) = (2ax + b)d(x) = f'(x)d(x)$$

Kapitel 2

Kolimes

2.1 Einführung in den Kolimes

Definition des Kolimes *[vgl. Anhang A6 David Eisenbud 1994]*

Definition 1. *Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie und $C \in \mathcal{A}$ ein Objekt*

- *Ein Diagramm über $\mathcal{A}$ ist eine Kategorie $\mathcal{B}$ zusammen mit einem Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$.*

- *Ein Morphismus $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow C$ ist eine Menge von Funktionen $\{\psi_B \in Hom(F(B), C) | B \in \mathcal{B}\}$, wobei für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $\varphi \in Hom(B_1, B_2)$ folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(B_1) \arrow[d, "\mathcal{F}(\varphi)"] \arrow[dr, "\psi_{B_1}"] & \\
& C \\
\mathcal{F}(B_2) \arrow[ur, "\psi_{B_2}"] &
\end{tikzcd}$$

- *Der Kolimes $\varinjlim \mathcal{F}$ eines Diagramms $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ist ein Objekt $A \in \mathcal{A}$ zusammen mit einem Morphismus $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$ und folgender universellen Eigenschaft:*

  für alle Morphismen $\psi' : \mathcal{F} \longrightarrow A'$ existiert genau eine Funktion $\varphi \in Hom(A, A')$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{F} \arrow[dl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
A' & & A \arrow[ll, dashed, "\exists!\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Eindeutigkeit des Kolimes *[vgl. A6 David Eisenbud 1994]*

Lemma 2. *Seien $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ zwei Kategorien und $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor, so git: Im Falle der Existenz sind $\varinjlim \mathcal{F}$ und der dazugehörige Morphismus $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow A$ bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien $A_1 \in \mathcal{A}, (\psi_1 : \mathcal{F} \longrightarrow A_1)$ und $A_2 \in \mathcal{A}, (\psi_2 : \mathcal{F} \longrightarrow A_2)$ beide gleich $\varinjlim \mathcal{F}$.
Erhalte durch die universelle Eigenschaft des Kolimes die eindeutig bestimmten Funktionen $\varphi_1 \in Hom_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$ und $\varphi_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(A_2, A_1)$, für welche die folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F} \arrow[dl, "\psi_2"'] \arrow[dr, "\psi_1"] & \\ A_2 & & A_1 \arrow[ll, dashed, "\exists! \varphi_1"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathcal{F} \arrow[dl, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\psi_2"] & \\ A_1 & & A_2 \arrow[ll, dashed, "\exists! \varphi_2"'] \end{tikzcd}$$

Wende nun die Universelle Eigenschaft von ψ_1 auf ψ_1 selbst an und erhalte $id_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1$. Analog erhalte auch $id_{A_2} = \varphi_1 \circ \varphi_2$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F} \arrow[dl, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\psi_1"] & \\ A_1 & & A_1 \arrow[ll, dashed, "\exists! id_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1"'] \end{tikzcd}$$

Somit existiert genau eine Isomorphie $\varphi_1 : A_1 \longrightarrow A_2$. □

Im folgenden beschäftigen wir uns mit dem Fall des $\varinjlim \mathcal{F} : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$, bei welchem $\mathcal{B}$ eine Unterkategorie von $\mathcal{A}$ ist. Zur Vereinfachung unterschlagen dabei die triviale Existenz des Funktors $\varinjlim \mathcal{F} : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$. Wir werden also im folgenden von dem Diagramm $\mathcal{B}$ und dem entsprechenden Kolimes $\varinjlim \mathcal{B}$, sowie dem Morphismus $\phi : \mathcal{B} \longrightarrow A$ sprechen.

Vereinfachung des Kolimes *[Eigene Überlegung (Beweis fehlt noch)]*

Bemerkung 3. *Seien $\mathcal{B} \nsubseteq \mathcal{A}$ zwei Kategorien und $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Diagramm. Dann gilt im Falle der Existenz $\varinjlim \mathcal{F} = \varinjlim \mathcal{F}(\mathcal{B})$*

DifferenzkokernUndKoproduktDef *[vlg. A6 David Eisenbud 1994]*

Definition 4. *Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie.*

- *Das Koprodukt von $\{B_i\} \subseteq \mathcal{A}$ wird durch $\coprod_i \{B_i\} := \varinjlim \mathcal{B}$ definiert, wobei $\mathcal{B}$ $\{B_i\}$ als Objekte und die Identitätsabbildungen $id_{B_i} : B_i \longrightarrow B_i$ als Morphismen enthält.*
- *Der Differenzkokern (oder auch Coequilizer) von $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$ wird durch $\varinjlim \mathcal{C}$ definiert, wobei $\mathcal{C}$ $\{C_1, C_2\}$ als Objekte und $\{f, g\} := Hom_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$ als Morphismen enthält.*

NeuDifferenzenkokerndef *[vlg. Wikipedia aber eigener Beweis]*

Lemma 5. *Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie mit $C_1, C_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$, so sind folgende Formulierungen äquivalent zur Definition des Differenzkokern's $T := \varinjlim \mathcal{C}$*

1. *Es existiert ein Morphismus $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow T$, mit der Eigenschaft, dass für alle Morphismen $\psi' : \mathcal{C} \longrightarrow T'$ genau ein $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(T, T')$ mit $\varphi \circ \psi = \psi'$ existiert.*

2. *Es existiert ein $q \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, T)$ mit $q \circ f = q \circ g$ und der Eigenschaft, dass für alle Morphismen $q' \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, Z)$ mit $q' \circ f = q' \circ g$ genau ein $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(T, T')$ mit $\varphi \circ q = q'$ existiert.*

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "f{,}g"] & C_2 \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q'"] & T \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & & T' \end{tikzcd}$$

Beweis. *1.* ist offensichtlich eine Ausformulierung der Einführung des Kolimes aus **??**, zeige also im folgenden noch die Äquivalenz von *1.* und *2.*

- <u>$1 \Rightarrow 2$:</u>

  Da $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow T$ ein Morphismus ist, gilt für $\{f, g\} = Hom_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$: $\psi_{C_1} = \psi_{C_2} \circ f = \psi_{C_1} \circ \psi_{C_2}$, setze also $q := \psi_{C_2}$.

  Sei nun $q' \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, T)$ mit der Eigenschaft $q' \circ f = q' \circ g$ gegeben: Definiere den Morphismus $\psi' : \mathcal{C} \longrightarrow T$ als $\{\psi_1 = q' \circ f, \psi_2 = q'\}$, somit folgt direkt aus der Universellen Eigenschaft von ψ, dass genau ein $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, T)$ existiert, mit $\varphi \circ q = q'$.

- <u>$2 \Rightarrow 1$:</u>

  Definiere $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow T$ als $\{\psi_1 = q \circ f, \psi_2 = q\}$. Durch die Eigenschaft von q gilt $\psi_{C_1} = \psi_{C_2} \circ f = \psi_{C_2} \circ g$.

  Sei nun $\psi' : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein beliebiger Morphismus.
  Definiere $d' := \psi'$, somit existiert durch die Eigenschaft von d genau ein $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, T)$ mit $\varphi \circ q = q'$.

  $$\Rightarrow \varphi \circ \psi_2 = \psi_2'$$
  $$\textit{und } \varphi \circ \psi_1 = \varphi \circ \psi_2 \circ f = \varphi \circ \psi_2' \circ f = \varphi \circ \psi_1'$$

□

Wenn im weiteren Verlauf von dem Differenzkokern zweier Homomorphismen $f, g : C_1 \longrightarrow C_2$ gesprochen wird, meinen wir damit den Homomorphismus $q : C_2 \longrightarrow T$ aus lemma 5.

Tensorprodukt des Differenzenkokerns *[Eigene Bemerkung]*

Bemerkung 6. *Seien $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(S_1, S_2)$ R-Algebra-Homomorphismen, so können wir für den Differenzenkokern $q : S_2 \longrightarrow T$ für ein beliebiges S_1-Modul das Tensorprodukt $T \otimes_{C_1} M$ definieren.*

$$\textit{für } s_1 \in S_1 \textit{ und } t \otimes m) \in T \otimes_{C_1} M \textit{ gilt:}$$
$$s_1 \cdot (t \otimes m) = ((q \circ f)(s_1)) \cdot t \otimes m = ((q \circ g)) \cdot (s_1)t \otimes m$$

R-Algebra-Kolimiten *[vlg. Proposition A6.7 David Eisenbud 1994]*

Proposition 7. *in der Kategorie der R-Algebren existieren Koprodukte und Differenzkokerne, wobei:*

1. *Das Koprodukt einer endlichen Familie von $R-$ Algebren $\{S_i\}_{i\in\Lambda}$ entspricht deren Tesorprodukt $\bigotimes_{i\in\Lambda} S_i$.*
2. *Der Differenzkokern zweier R-Algebra-Homomorphismen $f, g : S_1 \longrightarrow S_2$ einspricht dem Homomorphismus $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$, $y \longmapsto [y]$, wobei $Q := \{f(x) - g(x) \mid x \in S_2\}$ das Bild der Differenz von f und g ist.*

Beweis. Zu ***1.***:
Sei $\mathcal{B}$ die Unterkategorie der R-Algebren, welche $\{S_i\}_{i\in\Lambda}$ zusammen mit den Identitätsabbildungen enthält. Wir wollen die universellen Eigenschaften des Tensorproduktes und des Kähler-Differenzials nutzen, um einen Isomorphismus zwischen $\varinjlim \mathcal{F}$ und $\bigotimes_{i\in\Lambda} B_i$ zu finden.
Es sind der Morphismus $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \varinjlim \mathcal{B}$ und die bilineare Abbildung $g : \oplus_i S_i \longrightarrow \otimes_i S_i$ gegeben.
Konstruiere den Morphismus $\psi' : \mathcal{B} \longrightarrow \otimes_i S_i$ durch $\psi'_i : S_i \longrightarrow \otimes_i S_i$, $s_i \longmapsto g(1, .., 1, s_i, 1, .., 1)$ für $i \in \lambda$ und die bilineare Abbildung $f : \oplus_i S_i \longrightarrow \varinjlim \mathcal{B}$, $s \longmapsto \prod_i \psi_i(s_i)$.

Somit liefern uns die universellen Eigenschaften folgende zwei R-Algebra-Homomorphismen:

$$\varphi : \varinjlim \mathcal{B} \longrightarrow \bigotimes_i S_i$$
$$\phi : \bigotimes_i S_i \longrightarrow \varinjlim \mathcal{B}.$$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ \otimes_i S_i & & \varinjlim \mathcal{B} \arrow[ll, dashed, "\exists! \varphi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \oplus_i S_i \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \varinjlim \mathcal{B} & & \otimes_i S_i \arrow[ll, dashed, "\exists! \phi"'] \end{tikzcd}$$

Die Eindeutigkeit der universellen Eigenschaften liefert uns, das φ und ϕ zueinander Inverse sind und somit haben wir unsere gesuchten Isomorphismen zwischen $\varinjlim \mathcal{B}$ und $\bigotimes_i S_i$ gefunden.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ \varinjlim \mathcal{B} & & \varinjlim \mathcal{F} \arrow[ll, dashed, "\exists ! id_{\varinjlim \mathcal{B}} = \phi \circ \varphi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \bigoplus_i S_i \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \bigotimes_i S_i & & \bigotimes_i S_i \arrow[ll, dashed, "\exists ! id_{\bigotimes_i S_i} = \varphi \circ \phi"'] \end{tikzcd}$$

Zu *2.*:
Zeige, dass $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ die in lemma 5 eingeführten Eigenschaften des Differenzkokern's besitzt.

$$q \circ f = q \circ g \text{ gilt, da } kern(q) = Q = \{f(x) - g(x) \mid x \in C_2\}.$$

Sei nun eine Funktion $q' \in Hom_{\mathcal{A}}(S_2, T')$ mit $q' \circ f = q' \circ$ gegeben.
Somit gilt $q' \circ (f - g) = 0$, wodurch Q ein Untermodul von $Q' := kern(q')$ ist.
Mit dem Isomorphiesatz für R-Algebren erhalten wir:

$$S_2/Q' \simeq (S_2/Q)/(Q'/Q).$$

Somit ist $q' : S_2 \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q)\,,\ y \longmapsto [y]'$ eine isomorphe Darstellung von $q' : S_2 \longrightarrow T'$.

$$\Rightarrow \exists ! \varphi : S_2/Q \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q)\,,\ [y] \longmapsto [y]' \ mit\ (\varphi \circ q) = q'.$$

Also ist $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Differenzkokern von f und g. □

Darstellung der Polynomalgebra als Tensorprodukt *[Eigene Überlegung]*

Bemerkung 8. *Die Polynomalgebra $R[x_1, ..., x_d]$ über R lässt sich wie folgt als Tensorprodukt darstellen:*

$$R[x_1, ..., x_n] = \bigotimes_{i \in \{1,...,n\}} R[x_i]$$

Genauer gilt für zwei Polynomalgebren $A = R[x_1, ..., x_{n_A}]$, $B = R[y_1, ..., y_{n_B}]$ über R:

$$A \otimes_R B = R[x_1, ..., x_{n_A}, y_1, ..., y_{n_B}]$$

Skizziere den Beweis.

Beweis. Zeige, dass für $g : A \oplus B \longrightarrow R[x_1, ..., x_{n_A}, y_1, ..., y_{n_B}]\,,\ (a, b) \longmapsto a \cdot b$ die Universelle Eigenschaft des Tensorproduktes gilt:

$$\begin{tikzcd} A \oplus B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & R[x_1, ..., x_{n_A}, y_1, ..., y_{n_B}] \arrow[d, dashed, "\exists ! \varphi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Es ist leicht nachzurechnen, dass es sich bei φ um folgende Funktion handeln muss:

$$\varphi : R[x_1, ..., x_{n_A}, y_1, ..., y_{n_B}] \longrightarrow M\ ,\ (x_i \cdot y_j) \longmapsto f(x_i, 1) \cdot f(1, y_i)$$

□

R-Modul-Kolimiten *[Proposition A6.2 David Eisenbud 1994]*

Proposition 9. *In Der Kategorie der R-Module existieren Koprodukte und Differenzkokerne, wobei:*

1. *das Koprodukt $\varinjlim \mathcal{B}$ von R-Modulen $M_i \in (R - Module)$entspricht der direkten Summe $\sum_i M_i$.*
2. *der Differenzenkokern zweier Homomorphismen $f, g : M_1 \longrightarrow M_2$ entspricht dem Kokern $M_2/im(f - g)$ der Differenzenabbildung.*

Beweis. für ***1.*** Sei $\phi : \{M_i\} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein beliebiger Morphismus. Zeige:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dl, "\psi_i"'] \arrow[dr, "\psi_i"] & \\ M' & & \bigoplus_i M_i \arrow[ll, dashed, "\exists!\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Für ein beliebiges i existiert genau ein $\varphi_i : M_i \oplus 0 \longrightarrow M'\ ,\ (0, ..., 0, m_i, 0, ..., 0 \longmapsto \psi_i'(m_i)$ mit $\psi_i' = \psi_i \circ \varphi_i$
$\Rightarrow \exists!\varphi : \bigoplus_i M_i \longrightarrow M'\ ,\ (m_1, ..., m_n) \longmapsto \sum_i \psi_i(m_i)$

2. ist Analog zu proposition 7

□

Die in proposition 9 gezeigten Darstellungen gelten mit kurzen Überlegungen auch für S-Module, wobei S eine R-Algebra ist.

Lokalisierung von Algebren als Kolimes *[vlg. Aufgabe A6.7 David Eisenbud 1994]*

Lemma 10. *Sei S eine $R - Algebra$ und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$S[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{B}$$

Wobei $\mathcal{B}$ aus den Objekten $\{S[t^{-1}] | t \in U\}$ und den Morphismen $S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}], (\frac{s}{t^n})_t \longmapsto (\frac{st'^n}{(tt')^n})_{(tt')}\ \forall t, t' \in U$ besteht.

Beweis. Sei $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow A$ der Kolimes von $\mathcal{B}$. Zeige $S[U^{-1}] \simeq A$, definiere dazu:

$$\psi' : \mathcal{B} \longrightarrow S[U^{-1}]$$
$$\psi'_{S[t^{-1}]} : S[t^{-1}] \longrightarrow S[t^{-1}]\,,\ (\frac{s}{t^n})_{t} \longmapsto (\frac{s}{t^n})_{U}$$

ψ' ist ein Morphismus, da für beliebige $t, t' \in U$ und $s \in S$ gilt:

$$(\frac{s}{t^n})_{U} = (\frac{st'^n}{(tt')^n})_{U}$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir den eindeutigen Homomorphismus $\varphi : A \longrightarrow S[U^{-1}]$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ S[U^{-1}] & & A \arrow[ll, dashed, "\exists!\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Für $\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow A$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen.
Zunächst können wir jedes Element $(\frac{s}{u})_{U} \in S[U^{-1}]$ als $\psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_{t})$ schreiben.
Weiter gilt für alle $s_1, s_2 \in S$, $t_1, t_2 \in U$:

$$\begin{aligned} \textit{Sei } \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_{t}) &= \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_{t}) \\ \Rightarrow \exists u \in U : (s_1t_1 - s_2t_2) \cdot u &= 0 \\ \Rightarrow (\frac{s_1u}{t_1u})_{tu} &= (\frac{s_2u}{t_2u})_{tu} \\ \Rightarrow \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_{t}) &= \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_{t}) \end{aligned}$$

Mit diesem Wissen können wir den R-Algebra-Homomorphismus $\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow A$ definieren:

$$\phi : S[U^{-1}] \longrightarrow A\,,\ \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_{t}) \longmapsto \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_{t})$$

$\phi \circ \varphi = id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ A & & A \arrow[ll, dashed, "\exists!id_A = \phi\circ\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Für $\varphi \circ \phi \overset{!}{=} id_{S[U^{-1}]}$ wähle beliebige $s \in S, t \in U$, für diese gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{s}{t})_{t})) = \varphi(\psi((\frac{s}{t})_{t}) = \psi'((\frac{s}{t})_{t})$$

Damit haben wir gezeigt, dass φ, ϕ Isomorphismen sind und somit $A \simeq S[U^{-1}]$ gilt.
Da der Kolimes bis auf Isomorphie eindeutig ist, definiere ab sofort $S[U^{-1}]$ als den eindeutigen Kolimes von $\mathcal{B}$. □

Lokalisierung von Moduln als Kolimes *[Eigene Idee, wurde angeschnitten im Beweis von Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]*

Korrolar 11. *Sei M ein S-Modul, wobei S eine R-Algebra ist. Sei weiter $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$M[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{C}$$

Wobei $\mathcal{C}$ aus den Objekten $\{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] | t \in U\}$ und folgenden Morphismen besteht:

$$S[U^{-1}] \otimes M[t^{-1}] \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes M[(tt')^{-1}],$$
$$(\frac{s}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{t^n})_{t} \longmapsto (\frac{s}{u})_{U} \otimes (\frac{t'^n m}{(tt')^n})_{t}$$

Auch wenn sich lemma 10 hier nicht direkt anwenden lässt, so können wir doch im Beweis gleich vorgehen.

Beweis. Schließe zunächst den trivialen Fall $0 \in U$ aus.
Sei $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow A$ der Colimes von $\mathcal{C}$. Zeige $S[U^{-1}] \simeq A$, definiere dazu folgenden Morphismus :

$$\psi : \mathcal{C} \longrightarrow M[U^{-1}]$$
$$\psi_t : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \longrightarrow M[U^{-1}]\,,\, (\frac{s}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{t^n})_{t} \longmapsto (\frac{sm}{ut^n})_{U}$$

Die Wohldefiniertheit von ψ'_t für ein beliebiges $t \in U$ folgt direkt aus der Universellen Eigenschaft des Tensorprodukt‘s. Denn für die bilineare Abbildung $f : S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \longrightarrow M[t^{-1}]\,,\, ((\frac{s}{u})_{U}, (\frac{m}{t^n})_{t}) \longmapsto (\frac{sm}{ut^n})_{U}$ gilt:

$$\begin{tikzcd} S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \arrow[d, dashed, "\exists! \psi'_t"] \\ & M[U^{-1}] \end{tikzcd}$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir nun den eindeutigen Homomorphismus $\varphi : A \longrightarrow M[U^{-1}]$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[dl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ M[U^{-1}] & & A \arrow[ll, dashed, "\exists! \varphi"'] \end{tikzcd}$$

Für $\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow A$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen.
Zunächst können wir jedes Element $(\frac{m}{u})_{U} \in M[U^{-1}]$ als $\psi((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t})$ schreiben. Wobei mit ψ gemeint ist, dass wir ein beliebiges $t \in U$ wählen und dann ψ_t

betrachten. Diese Verallgemeinerung ist möglich, da für beliebige $t_1, t_2, u \in U$ und $m \in M$ gilt:

$$\psi_{t_1}((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_{t_1}) = (\frac{m}{u})_U = \psi_{t_2}((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_{t_2})$$

Definiere nun mit diesem Wissen folgenden Homomorphismus:

$$\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow A \,,\, \psi((\frac{1}{u})_U \otimes t) \longmapsto \psi'((\frac{1}{u})_U \otimes t)$$

$\phi \circ \varphi = id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes. Für $\varphi \circ \phi \stackrel{!}{=} id_{M[U^{-1}]}$ wähle $(\frac{m}{u})_U \in M[U^{-1}]$ beliebig, für dieses gilt:

$$\begin{aligned}
&(\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)) \\
&= \varphi(\psi((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)) \\
&= \psi'((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)
\end{aligned}$$

Damit haben wir $A \simeq M[U^{-1}]$ gezeigt, definiere also ab sofort $M[U^{-1}]$ als den eindeutigen Kolimes von $\mathcal{C}$. □

2.2 Kähler-Differenzial von Kolimiten

Differenzial des Kolimes von R-Algebren *[vlg. Korolar 16.7 David Eisenbud 1994]*

Proposition 12.

1. *Sei $T = \otimes_{i \in \Lambda} S_i$ das Koprodukt der R-Algebren S_i. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/R} \simeq \bigoplus_{i \in \Lambda} (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$$

2. *Seien S_1, S_2 R-Algebren und $\varphi, \varphi' : S_1 \longrightarrow S_2$ R-Algebra-Homomorphismen. Sei weiter $q : S_2 \longrightarrow T$ der Differenzkokern von φ,φ'. Dann ist folgende Sequenz rechtsexakt:*

$$T \otimes_{S_1} \Omega_{S_1/R} \xrightarrow{f} T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R} \xrightarrow{g} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

mit: $f : T \otimes \Omega_{S_1/R} \longrightarrow T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R} \,,\, t \otimes d_{S_1}(x_1) \longmapsto t \otimes d_{S_2}(\varphi(x_1) - \varphi(x_2))$
$g : T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R} \longrightarrow \Omega_{T/R} \,,\, t \otimes d_{S_2}(x_2) \longmapsto (d_T \circ q)(x_2)$

Beweis.
Für ***1.*** finde durch die Universelle Eigenschaft des Kähler-Differenzials Isomor-

phismen $\Omega_{T/R} \longleftrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$.
Definiere das Differenzial $e : T \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}$, $(s_i \otimes ...) \longmapsto (1 \otimes d_{S_1}, ...)$ und erhalte dadurch

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "d_T"] \arrow[dr, "e"'] & \Omega_{T/R} \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & \bigoplus_{i\in\Lambda} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \end{tikzcd} \qquad \varphi : \Omega_{T/R} \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}).$$

Definiere nun das Differenzial $k : S_i \hookrightarrow T \longrightarrow \Omega_{T/R}$ und erhalte dadurch:

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[r, "d_{S_i}"] \arrow[dr, "k"'] & \Omega_{S_i/R} \arrow[r, "a"] \arrow[d, dashed, "\exists!k'"] & T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \arrow[dl, "\phi_i"] \\ & \Omega_{T/R} & \end{tikzcd} \qquad \phi_i : \bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \longrightarrow \Omega_{T/R}$$

$$\phi : \bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \longrightarrow \Omega_{T/R} \, , \, (..., t_i \otimes d_{S_i}(s_i), ...) \longmapsto \prod_{i\in\Lambda} t_i \cdot \phi_i(d_{S_i}(s_i))$$

Damit haben wir zwei zueinander inverse Funktionen φ, ϕ gefunden.
$\Rightarrow \Omega_{T/R} \simeq \bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$

Für ***2.*** Wende satz 4 auf den Differenzkokern $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ *(vlg. proposition 7)* an und erhalte dadurch eine exakte Sequenz, welche ähnlich zu der gesuchten ist:

$$Q/Q^2 \xrightarrow{f'} T \otimes \Omega_{S_2/R} \xrightarrow{g} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

mit $f' : Q/Q^2 \longrightarrow T \otimes_{S_2} \Omega_{S/R}$, $[s_2]_{Q^2} \longmapsto 1 \otimes d_{S_2}(s_2)$.
Somit gilt $im(f) = T \otimes_{S_2} d_{S_2}(Q) = im(f')$.
$\Rightarrow$ die gesuchte Sequenz ist exakt. $\square$

s

Differenzial von Polynomalgebren 1 *[vlg. Proposition 16.1 David Eisenbud 1994]*

Korrolar 13. *Sei $S = R[x_1, ..., x_n]$ eine Polynomalgebra über R. Dann gilt:*

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i\in\{1,...,n\}} S\langle d_S(x_i)\rangle$$

Wobei $S\langle d_S(x_i)\rangle$ das von $d_S(x_i)$ erzeugt Modul über S ist.

Beweis. Wie in bemerkung 8 gezeigt, können wir S als $\bigotimes_{i\in\{1,...,n\}} R[x_i]$ schreiben. In proposition 12 haben wir gezeigt, wie das Differenzial eines solchen Tensorproduktes aussieht:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i\in\{1,...,n\}} (S \otimes_{R[x_i]} \Omega_{R[x_i]/R})$$

Da $R[x_i]$ die aus dem Element x_i erzeugte Algebra über R ist, folgt *[vlg. BEMERKUNG ZU ENDLICH ERZEUGTEN ALGEBREN]*:

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i\in\{1,...,n\}} (S \otimes_{R[x_i]} R[x_i]\langle d_{S[x_i]}(x_i)\rangle) \simeq \bigoplus_{i\in\{1,...,n\}} S\langle d_S(x_i)\rangle$$

Für die letzte Isomorphie nutze, dass wegen $R[x_i] \subseteq S$ zum Einen $d_{R[x_i]}$ als Einschränkung von d_S gesehen werden kann und zum Anderen $S \otimes_{R[x_i]} R[x_i] \simeq S$ gilt. □

Differenzial von Polynomalgebren 2 *[vgl. Korrolar 16.6 David Eisenbud 1994]*

Korrolar 14. *Sei S eine R-Algebra und $T := S[x_1, ..., x_n]$ eine Polynomalgebra über S. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus \bigoplus_{i\in\{1,...,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

Beweis. Betrachte T als Tensorprodukt über R-Algebren und wende anschließend proposition 12 an:

$$T \simeq S \otimes_R R[x_1, ..., x_n]$$
$$\Rightarrow \Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus (T \otimes_{R[x_1,...,x_n]} \Omega_{R[x_1,...,x_n]/R})$$

Zuletzt wende den soeben gezeigten korrolar 13 an und nutze schließlich $R[x_1, ..., x_n] \subseteq T$ um das Tensorprodukt zu vereinfachen:

$$T \otimes_{R[x_1,...,x_n]} \Omega_{R[x_1,...,x_n]/R}$$
$$\simeq T \otimes_{R[x_1,...,x_n]} \bigoplus_{i\in\{1,...,n\}} R[x_1, ..., x_n]\langle d_{R[x_i]}(x_i)\rangle$$
$$\simeq \bigoplus_{i\in\{1,...,n\}} T\langle d_R(x_i)\rangle$$

□

Differenzial der Lokalisierung *[vlg. Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]*

Theorem 15. *Sei S eine $R-$Algebra und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$\Omega_{S[U^{-1}]/R} \simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}, \text{ Wobei:}$$
$$d_{S[U^{-1}]}((\frac{1}{u})_U) \longmapsto -(\frac{1}{u^2})_U \otimes d_S(u)$$

Beweis. Wir wollen THEOREM16.8 auf $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$ aus lemma 10 anwenden.

Zeige also zunächsten den einfacheren Fall $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ für ein beliebiges $t \in U$:

> Nutze hierfür die Isomorphe Darstellung $S[t^{-1}] \simeq S[x]/(tx-1)$, sowie die Isomorphie $\Omega_{S[x]/R} \simeq S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x)$. aus korrolar 14
> Daraus erhalten wir folgende Isomorphismen:
>
> $$\alpha : S[t^{-1}] \longrightarrow S[x]/(tx-1)$$
> $$\beta : S[x]/(tx-1) \longrightarrow S[t^{-1}]$$
> $$\gamma : \Omega_{S[x]/R} \longrightarrow S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x)$$
>
> Nutze diese nun, um $\Omega_{S[t^{-1}]/R}$ isomorph zu $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ umzuformen:
>
> $$\begin{tikzcd}
\Omega_{S[t^{-1}]/R} \arrow[d, "D\alpha"] & d_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t) \arrow[d, mapsto, "D\alpha"] \\
\Omega_{S[x]/R}/d_{S[x]}(tx-1) \arrow[d, "\gamma"] & {[d_{S[x]}(sx)] = [xd_{S[x]}(s) + sd_{S[x]}(x)]} \arrow[d, mapsto, "\gamma"] \\
(S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}x)/((tx-1)d_{S[x]}(tx-1)) \arrow[d, "\beta"] & {[x \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)]} \arrow[d, mapsto, "\beta"] \\
(S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus S[t^{-1}]d_{S[x]}(x)/d_{S[x]}(tx-1) =: M \arrow[d, "f"] & {[(\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)]} \arrow[d, mapsto, "f"] \\
S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} & ((\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s)) - ((\frac{s}{t^2})_t \otimes d_S(t))
\end{tikzcd}$$
>
> Die ersten drei Schritte ergeben sich aus den oben angegeben Isomorphismen. Für den letzten Schritt definiere:
>
> $$f : M \longrightarrow S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}\,,\ [(\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \longmapsto ((\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s)) - ((\frac{s}{t^2})_t \otimes d_S(t))$$
>
> Damit f ein Isomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ ein eindeutiges Repräsentantensystem von M ist.
> Sei dazu $[m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]$ ein beliebiger Erzeuger von M. Somit gilt:
>
> $$d_{S[x]}(tx-1) = td_{S[x]}(x) + \beta(x)d_{S[x]}(s)$$
> $$\Rightarrow [0, d_{S[x]}(x)] = [-(\frac{1}{t^2})_t d_S(t), 0]$$
> $$\Rightarrow [m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)] = [m_1 - (\frac{s}{t^{n+2}})_t d_S(t), 0] = [f([m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]), 0]$$
>
> f ist also wie vermutet ein Isomorphismus und aus obigen Umformungen folgt $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} = \Omega_{S/R}[t^{-1}]$.
> Definiere für beliebige $t \in U$ folgenden Isomorphismus:
>
> $$f \circ \beta \circ \gamma \circ D\alpha =: \delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}]\,,\ d_{S[t^{-1}]}((\frac{1}{t})_t) \longmapsto -(\frac{d_S(t)}{t^2})_t$$

Zeige nun den Allgemeinen Fall $\Omega_{S[U^{-1}]/R} \simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$:
Wähle $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$ wie in lemma 10, sodass $\varinjlim \mathcal{B} = S[U^{-1}]$ gilt.
Mit THEOREM16.8 folgt somit:

$$\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \varinjlim \mathcal{F} \text{ mit:}$$

$$\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow (S[U^{-1}] - Module)\,,\; S[t^{-1}] \longmapsto S[U^{-1}] \otimes \Omega_{S[t^{-1}]/R}$$

$$(\varphi : S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}])$$

$$\longmapsto (1 \otimes D\varphi : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}))$$

Zur Vereinfachung der Morphismen in $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ definiere folgenden Isomorphismus:

$$g : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}$$

$$(\frac{s}{u})_{U} \otimes ((\frac{s'}{t})_t \otimes d_{S[tt'^{-1}]}(x)) \longmapsto (\frac{s}{u})_{U} \otimes \varphi((\frac{s'}{t})_t) d_{S[tt'^{-1}]}(x)$$

Als letzten Schritt wollen wir **??** anwenden. Nutze dazu $\delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}]$ um den zu $\mathcal{F}$ isomorphen Funktor $\mathcal{F}' := \delta \circ \mathcal{F}$ zu erhalten. Um ein genaueres Bild von $\mathcal{F}'$ zu erlangen, betrachte folgendes Kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
S[t^{-1}] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dd, "\mathcal{F}"] & S[tt'^{-1}] \arrow[d, "\mathcal{F}"] \\
& S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) \arrow[d, "g"] \\
S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[t^{-1}]/R} \arrow[ur, "1\otimes D\varphi"] \arrow[d, "\delta_t"] & S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R} \arrow[d, "\delta_{tt'}"] \\
S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] \arrow[r, "1\otimes\varphi"] & S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S/R}[tt'^{-1}]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\frac{s}{t})_t \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "d_{S[t^{-1}]}"] & (\frac{st'}{tt'})_{tt'} \arrow[d, "d_{S[tt'^{-1}]}"] \\
1 \otimes ((\frac{1}{t})_t d_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{1})_t) + (\frac{s}{1})_t d_{S[t^{-1}]}((\frac{1}{t})_t)) \arrow[r, "g\circ(1\otimes D\varphi)"] \arrow[d, "\delta_t"] & 1 \otimes ((\frac{1}{tt'})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{st'}{1})_{tt'}) + (\frac{st'}{1})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{1}{tt'})_{tt'})) \arrow[d, "\delta_{tt'}"] \\
1 \otimes ((\frac{d_S(s)}{t})_t - (\frac{s d_S(t)}{t^2})_t) \arrow[r, "1\otimes\varphi"] & 1 \otimes ((\frac{t' d_S(s)}{tt'})_{tt'} - (\frac{st' d_S(t)}{(tt')^2})_{tt'})\textbf{(*)}
\end{tikzcd}$$

Dass das Diagramm in dieser Form kommutiert, ergibt sich in fast allen Fällen direkt aus dem Einsetzen in die entsprechenden Homomorphismen. Der einzige

Fall, welcher nicht direkt klar ist, ist **(*)**. Rechne diesen also nochmal nach:

$$\begin{gathered}
\delta_{tt'}(1 \otimes ((\frac{1}{tt'})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{st'}{1})_{tt'}) + (\frac{st'}{1})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{1}{tt'})_{tt'}))) \\
= 1 \otimes ((\frac{d_S(st')}{tt'})_{tt'} - (\frac{t' s d_S(tt')}{(tt')^2})_{tt'}) \\
= 1 \otimes ((\frac{t' d_S(s')}{tt'})_{tt'} + (\frac{s d_S(t')}{tt'})_{tt'} - (\frac{tt' d_S(t')}{(tt')^2})_{tt'} - (\frac{t'^2 s d_S(t)}{(tt')^2})_{tt'}) \\
= 1 \otimes ((\frac{t' d_S(s)}{tt'})_{tt'} - (\frac{t'^2 s d_S(t)}{(tt')^2})_{tt'}) \\
= (1 \otimes \varphi)(1 \otimes ((\frac{d_S(s)}{t})_t - (\frac{s d_S(t)}{t^2})_t))
\end{gathered}$$

Damit ist $\mathcal{F}'$ zu $\mathcal{F}$ isomorph und für $\mathcal{C} := \mathcal{F}'(\mathcal{B})$ gilt $\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \varinjlim \mathcal{F}' = \varinjlim \mathcal{C}$ *[vlg. bemerkung 3]*. Wobei die Form von $\mathcal{C}$ genau dem Fall aus **??** entspricht:

$$\begin{gathered}
\mathcal{C} = \{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] | t \in U\} \textit{ mit den Morphismen} \\
1 \otimes \varphi : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S/R}[tt'^{-1}] \\
(\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{d_S(x)}{t^n})_t \longmapsto (\frac{s}{u})_U \otimes (\frac{t'^n d_S(x)}{(tt')^n})_{tt'}
\end{gathered}$$

Somit folgt $\varinjlim \mathcal{C} = \Omega_{S/R}[U^{-1}]$ und wir haben $\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \Omega_{S/R}[U^{-1}]$ gezeigt.
□

Kapitel 3

Körpererweiterungen

3.1 Einführung in transzendente Körpererweiterungen

Sei im folgenden k ein Körper.
Wir haben in BEISPIEL gesehen, dass das Kähler-Differenzial algebraischer Körpererweiterungen über k der Null-Vektorraum über k ist. Dies liegt daran, dass im Falle einer algebraischen Körpererweiterung $k(\alpha)/k$ ein irreduzibles Polynom $f(x) \in k[x]$ existiert, mit $f(\alpha) = 0$ und $k[\alpha] \simeq k[x]/(f(x))$.
Im Falle einer transzendenten Körpererweiterung $k(\beta)$ existiert kein solches Polynom in $k[x]$ und es gilt $k(\beta) \simeq k(x)$. In KORROLAR haben wir gesehen, dass in diesem Falle $\Omega_{k(x)/k} \simeq ???$ gilt. Dies motiviert dazu Transzendente Körpererweiterungen und deren Differenzial näher zu untersuchen. Dazu wird hier elementares Wissen über algebraische Körpererweiterungen vorausgesetzt *[eventuell nach zu lesen in Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009]*.
In diesem Kapitel führen wir Transzendenzbasisen ein und untersuchen diese näher.

Definition 1. *[vlg. Anhang A1 David Eisenbud 1994sowie Kapitel 22 Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009]*
Sei L/k eine Körpererweiterung. Dann definieren wir:

- *Eine endliche Teilmengen $\{l_1, \ldots, l_n\} \subseteq L$ heißt algebraisch unabhängig über k, falls gilt:*

$$\forall P(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n] : \, P(l_1, \ldots, l_n) \neq 0$$

- *Eine Teilmenge $B \subseteq L$ heißt transzendent über k, falls jede ihrer endlichen Teilmengen $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq B$ algebraisch unabhängig über k ist.*
- *Eine Teilmenge $B \subseteq L$ ist eine Transzendenzbasis von L/k, falls sie transzendent über k und die Körpererweiterung $L/k(B)$ algebraisch ist.*

- *Falls eine Transzendenzbasis von B von L/k existiert, sodass $k(B) = L$ gilt, so ist L/k eine pur transzendente Körpererweiterung.*

pur transzendente Erweiterung

Korrolar 2. *[Eigene Überlegung]*
Sei L/k eine pur transzendente Körpererweiterung mit Transzendenzbasis B. Dann gilt:

$$L \simeq k(\{x_b\}_{b\in B})$$

Insbesondere ist $\{x_b\}_{b\in B}$ eine Transzendenzbasis der Körpererweiterung der rationalen Funktionen $k(\{x_b\}_{b\in B})$ über k.

Beweis. Betrachte folgenden Körpermorphismus und zeige, dass es sich dabei um einen Isomorphismus handelt:

$$\Phi : k(\{x_b\}_{b\in B}) \longrightarrow k(B)\,, \; \frac{P(x_{b_1},\ldots,x_{b_n})}{Q(x_{b_1},\ldots,x_{b_n})} \longmapsto \frac{P(b_1,\ldots,b_n)}{Q(b_1,\ldots b_n)}$$

Da B als Transzendenzbasis insbesondere transzendent über k ist, ist jede endliche Teilmenge von algebraisch unabhängig über k. Dies bedeutet:

$$\forall\{b_1,\ldots,b_n\} \in B\,\forall P(x_{b_1},\ldots,x_{b_n}) \in k[x_{b_1},\ldots,x_{b_n}] :$$
$$P(x_{b_1},\ldots,x_{b_n}) \Rightarrow P(b_1,\ldots,b_n) \neq 0$$

Folglich ist Φ wohldefiniert und insbesondere injektiv.
Dass Φ surjektiv ist, folgt direkt aus der Definition von $L = k(B)$ als Quotientenkörper über $k[x]$.

Dass $\{x_b\}_{b\in B}$ Transzendenzbasis von $k(\{x_i\}_{i\in B})$ ist folgt direkt aus **??**. Denn jede endliche Teilmenge $\{x_{b_1},\ldots x_{b_n}\} \subseteq \{x_b\}_{b\in B}$ ist transzendent, da $k[x_1,\ldots,x_n]$ und $k[x_{b_1},\ldots x_{b_n}]$ isomorph zueinander sind. Außerdem ist die triviale Körpererweiterung $k(x_{b_1},\ldots x_{b_n})/k(x_{b_1},\ldots x_{b_n})$ algebraisch. □

Transzendenzbasis ist maximale transzendente Menge

Lemma 3. *[Lemma 22.1 Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009]*
Sei L/k ein Körpererweiterung und $B \subseteq L$ eine über k transzendente Teilmenge. Dann gilt:
B ist genau dann eine Transzendenzbasis von L/k, wenn B bezüglich der Inklusion ein maximales Element der Menge aller über k transzendenten Elemente aus L ist.

Beweis.

„$\Rightarrow$:“ Sei B eine Transzendenzbasis über k. Zeige, dass für ein beliebiges Element $a \in L \setminus B$ die Menge $B \cup \{a\} \subseteq L$ nicht transzendent über k ist:

$$\text{Da die Körpererweiterung } L/k(B) \text{ algebraisch ist, existiert}$$
$$0 \neq P(x) \in k(B)[x] \text{ mit } P(a) = 0.$$

Aus der Definition von $k(B)$ geht hervor, dass $\{b_1, \dots b_n\} \subseteq B$ existiert, mit $P(x) \in k(\{b_1, \dots b_n\})[x]$.
Wir können ohne weitere Einschränkung annehmen, dass $P(x) \in k[\{b_1, \dots, b_n\}][x]$ gilt, denn falls dies nicht der Fall sein sollte, wähle $m \in \mathbb{N}$ groß genug, sodass $\left(P(x) \cdot (\prod_i^n b_i)^m\right) \in k[\{b_1, \dots, b_n\}]$ gilt.

Wähle nun $P'(x_1, \dots, x_n, x) \in k[x_1, \dots, x_n, x]$ mit $P'(b_1, \dots, b_n, x) = P(x)$.
$$\text{Dies erfüllt } P'(b_1, \dots, b_n, a) = 0.$$

Folglich ist $B \cup \{b_1, \dots, b_n, a\}$ algebraisch abhängig und insbesondere $B \cup \{a\}$ nicht transzendent über k.

„$\Leftarrow$:“ Sei B bezüglich der Inklusion ein maximales Element der Menge aller über k transzendenten Elemente aus L. Zeige für ein beliebiges Element $a \in L \setminus k(B)$, dass dieses algebraisch über $k(B)$ ist:

Nach Voraussetzung existiert eine endliche Teilmenge $\{b_1, \dots, b_n, a\} \subseteq B \cup \{a\}$, welche algebraisch abhängig über k ist.

$$\text{Also existiert } P(x_1, \dots, x_{n+1}) \in k[x_1, \dots, x_{n+1}] \text{ mit } P(b_1, \dots, b_n, a) = 0.$$
$$\text{Für } P'(x) \coloneqq P(b_1, \dots, b_n, x) \in k(B)[x] \text{ gilt somit } P'(a) = 0$$

Die Existenz eines solchen Polynoms $P'(x)$ zeigt uns, dass a algebraisch über $k(B)$ ist.
Damit haben wir gezeigt, dass jedes $a \in L$ algebraisch über $k(B)$ ist. Folglich ist $L/k(B)$ algebraisch und B eine Transzendenzbasis von L über k.

□

Existenz von Transzendenzbasen

Proposition 4. *[Kapitel 22.1.3 Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009] Jede Körpererweiterung $L \subseteq k$ besitzt eine Transzendenzbasis $B \subseteq L$.*

Beweis. Verwende hierzu das Lemma von Zorn:
lemma 3 besagt, dass die Transzendenzbasen von L/k gerade die maximalen Elemente der Menge aller über k transzendenten Elemente aus L sind.
Das Lemma von Zorn besagt, dass jede partiell geordenete Menge, in der jede total geordneten Untermenge (auch Kette genannt) eine obere Schranke besitzt, ein Maximales Element besitzt *[vlg. Kapitel A2.3 Christian Karpfinger, Kurt*

Meyberg 2009].
Sei also $\mathbb{B}$ eine Kette von Transzendenten Mengen.
Offensichtlich ist $\tilde{B} \coloneqq \bigcup_{B \in \mathbb{B}} \in L$ eine obere Schranke von $\mathbb{B}$. Zeige also noch, dass $\tilde{B}$ auch transzendent ist.
Annahme: $\tilde{B}$ ist nicht transzendent:
Also existiert $\{b_1, \dots, b_n\} \in \tilde{B}$ mit: $\{b_1, \dots, b_n\}$ ist algebraisch abhängig über k. Da $\mathbb{B}$ bezüglich der Inklusion total geordnet ist, existiert ein $B \in \mathbb{B}$ mit $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq B$. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass $B \in \mathbb{B}$ transzendent über k ist.
Damit war unsere Annahme falsch und wir haben gezeigt, dass die Menge der über k transzendente Teilmengen von L mindestens ein maximales Element und damit L/k eine Transzendenzbasis besitzt. □

Transzendent ist pur transzendent plus algebraisch 1

Korrolar 5. *[Eigene Überlegung] Für jede Körpererweiterung L/k existiert ein Zwischenkörper $K \subseteq L$, sodass K/k eine pur transzendente und L/K eine algebraische Körpererweiterung ist.*

Beweis. Nach proposition 4 existiert eine Transzendenzbasis B von L/k.
Wie in definition 1 beschrieben ist somit $k(B)/k$ pur transzendent und $L/k(B)$ algebraisch.
Wähle also $K \coloneqq k(B)$. □

Transzendenzbasen sind immer gleich lang *[Theorem A1.1 David Eisenbud 1994]*

Proposition 6. *Sei L/k eine Körpererweiterung. Seinen weiter A, B zwei Transzendenzbasen von L über k. Dann gilt:*

$$|A| = |B|$$

Wir nennen $|B|$ den Transzendenzgrad von L/k.

Beweis. Im Fall von $|A| = |B| = \infty$ sind wir schon fertig, Sei also ohne Einschränkung $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ mit $min(m, n) = n < \infty$.
Wir wollen zunächst in n Schritten die Elemente aus B durch Elemente aus A ersetzten und damit zeigen, dass $\{a_1, \dots, a_n\}$ eine Transzendenzbasis von L über k ist:

Für den i-ten Schritt definiere $A_i \coloneqq \{a_1, \dots, a_{i-1}\} \subseteq A$, $B_i \coloneqq \{b_i, \dots, b_n\} \subseteq B$ und gehe davon aus, dass $A_i \cup B_i$ eine Transzendenzbasis ist:
Nach lemma 3 ist $\{a_i\} \cup A_i \cup B_i = A_{i+1} \cup B_i$ nicht transzendent und somit

algebraisch abhängig.

$$\text{Also existiert } P \in k[x, x_1, \dots, x_n] \text{ mit } P(a_i, a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, \dots, b_n) = 0.$$
$$\text{Definiere } P'(x) := P(a_i, a_1, \dots, a_{i-1}, x, b_{i+1}, \dots, b_n) \in k(A_{i+1} \cup B_{i+1})[x].$$
$$\text{Dieses erfüllt } P'(b_i) = 0.$$

Da $A_i \subseteq A$ algebraisch unabhängig ist, gilt $P(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, \dots, x_n) \neq 0$. Nummeriere also gegebenenfalls B vor der Bildung von $P'(x)$ so um, dass auch $P'(x) \neq 0$ gilt.
Die Existenz eines solchen $P'(x)$ zeigt uns, dass die Körpererweiterungen $L \subset k(A_{i+1} \cup B_i) = k(A_{i+1} \cup B_{i+1})(\{b_i\}) \subset k(A_{i+1} \cup B_{i+1})$ algebraisch sind und legt nahe, dass $A_{i+1} \cup B_{i+1}$ wieder eine Transzendenzbasis ist.
Um dies zu zeigen nehme zunächst an $A_{i+1} \cup B_{i+1}$ wäre algebraisch abhängig.

$$\text{Also existiert } Q \in k[x_1, \dots, x_n] \text{ mit } Q(a_1, \dots, a_i, b_{i+1}, \dots, b_n) = 0.$$
$$\text{Definiere } Q'(x) := Q(a_1, \dots, a_{i-1}, x, b_{i+1}, b_n) \in k(a_1, \dots, a_{i-1}, b_{i+1}, b_n)[x].$$
$$\text{Dieses erfüllt } Q'(a_i) = 0.$$

Da $(A_{i+1} \cup B_{i+1}) \setminus \{a_i\} \subseteq A_i \cup B_i$ algebraisch unabhängig ist gilt $Q'(x) \neq 0$.
Die Existenz eines solchen $Q'(x)$ zeigt uns, dass die Körpererweiterung $L \subset k(A_{i+1} \cup B_{i+1}) \subset k((A_{i+1} \cup B_{i+1}) \setminus \{a_i\}) = k((A_i \cup B_i) \setminus \{b_i\})$ algebraisch ist. Damit ist $(A_i \cup B_i) \setminus \{b_i\}$ eine Transzendenzbasis, was nach lemma 3 im Widerspruch dazu steht, dass $A_i \cup B_i$ eine Transzendenzbasis ist.
Folglich ist $A_{i+1} \cup B_{i+1}$ transzendent und somit eine Transzendenzbasis von L über k.

Dieses Verfahren zeigt uns, dass $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$ eine Transzendenbasis von L über k ist. Nach lemma 3 muss somit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $m = n$ gelten. $\square$

Unterschiedliche Transzendenzbasen bsp

Beispiel 7. *[Eigene Überlegung] Sei dazu $L = k(y)$ der Körper der rationalen Funktionen über k. Betrachte zwei unterschiedliche Transzendenzbasen von L/k:*

1. *$B = \{y\}$ ist eine Transzendenzbasis von L/k mit $\deg(L/k(B)) = 1$.*
2. *Für $n \in \mathbb{N}$ ist $B' = \{y^n\}$ eine Transzendenzbasis von L/k mit $\deg(L/k(B)) = n$.*

   $$f(x) = x^n - y^n \in k(y^n)[x] \text{ ist Minnimalpolynom von } x \text{ über } k(y^n).$$
   $$\Rightarrow k(y)/k(y^n) \text{ ist eine algebraische Körpererweiterung vom Grad } n$$

Dies zeigt, dass die Form des Körpers $k(B)$ und insbesondere der Grad der Körpererweiterung $L/k(B)$ sehr von der Wahl der Transzendenzbasis B abhängt.

3.2 Kähler-Differenzial von Körpererweiterungen

Definition der Differenzialbasis *[vlg. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]*

Definition 8. *Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung. Dann nennen wir eine Teilmenge $\{b_i\}_{i\in\Lambda} \subseteq L$ eine Differenzialbasis von L über k, falls $\{d_K(b_i)\}_{i\in\Lambda}$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{L/R}$ über L ist.*

Differential von rationalen Funktionen 1 *[vlg. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]*

Beispiel 9. *Sei k ein Körper und $L = k(\{x_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in n Varablen über k.*
Dann gilt:

$$\Omega_{L/k} \simeq L\langle d_{k[x_1,\ldots x_n]}(x_i)\rangle$$

Insbesondere ist $\{x_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ eine Differenzialbasis von $\Omega_{L/k}$.

Beweis. Betrachte $L = k[x_1,\ldots,x_n][k[x_1,\ldots,x_n]^{-1}]$ als Lokalisierung um theorem 15 anwenden zu können. Anschließend forme noch $\Omega_{k[x_1,\ldots,x_n]/k}$ mithilfe von korrolar 13 isomorph um:

$$\begin{aligned} \Omega_{L/k} &\simeq L \otimes \Omega_{k[x_1,\ldots,x_n]/k} \\ &\simeq L \otimes \oplus_{i\in\{1,\ldots,n\}} k[x_1,\ldots,x_n]\langle d_{k[x_1,\ldots x_n]}(x_i)\rangle \\ &\simeq L\langle d_{k[x_1,\ldots x_n]}(x_i)\rangle \end{aligned}$$

Damit ist $\{d_L(x_i)\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{L/k}$. $\square$

Differential von rationalen Funktionen 2 *[Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]*

Korrolar 10. *Sei k ein Körper und $L \supset k$ eine Körpererweiterung und $T = L(\{x_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in n Varablen über L.*
Dann gilt:

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i\in\{1,\ldots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

Beweis. Betrachten T als Lokalisierung von $L[x_1,\ldots,x_n]$ und gehen dann analog zu beispiel 9 vor:

$$\begin{aligned} \Omega_{T/k} &\simeq T \otimes_{L[x_1,\ldots,x_n]} \Omega_{L[x_1,\ldots,x_n]/k} \textit{ (theorem 15)} \\ \Omega_{L[x_1,\ldots,x_n]/R} &\simeq (L[x_1,\ldots,x_n] \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i\in\{1,\ldots,n\}} L[x_1,\ldots,x_n]\langle d_{L[x_1,\ldots,x_n]}(x_i)\rangle \textit{ (korrolar 14)} \\ \Rightarrow \Omega_{T/k} &\simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i\in\{1,\ldots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle \end{aligned}$$

$\square$

Cotangent Sequenz von Koerpern 1 *[Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]*

Bemerkung 11. *Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung und $T = L(x_1, \ldots, x_n)$ der Körper der rationalen Funktionen in n Variablen über L. Dann ist die COTANGENT SEQUENZ (proposition 3) von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ eine kurze Exakte Sequenz:*

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Im Genauen ist $\varphi : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k}\, ,\, t \otimes d_L(l) \longmapsto t \cdot d_T(l)$ injektiv.

Beweis. Die Injektivität von φ folgt direkt aus der isomorphen Darstellung von $\Omega_{T/k}$, die wir uns in korrolar 10 erarbeitet haben.

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1,\ldots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

Um sicher zu gehen definiere $\varphi' \simeq \varphi$ und durchlaufe die in korrolar 10 genutzten Isomorphismen noch einmal Schritt für Schritt:

$$\varphi' : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus \textstyle\bigoplus_{i \in \{1,\ldots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

$$\begin{tikzcd}
T \otimes_L \Omega_{L/k} \arrow[d, hook] & t \otimes d_L(l) \arrow[d, mapsto] \\
\Omega_{T/k} \arrow[d, hook, two heads, "theorem\ 15"] & td_T(l) \arrow[d, mapsto] \\
T \otimes_S \Omega_{L[x_1,\ldots,x_n]/k} \arrow[d, hook, two heads, "korrolar\ 14"] & t \otimes d_S(l) \arrow[d, mapsto] \\
T \otimes_S ((S \otimes_L \Omega_{L/k}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1,\ldots,n\}} S\langle d_S(x_i)\rangle) \arrow[d, hook, two heads] & t \otimes (d_L(l), 0) \arrow[d, mapsto] \\
(T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1,\ldots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle & (t \otimes d_L(l), 0)
\end{tikzcd}$$

Damit ist φ eine injektive Einbettung von $T \otimes_L \Omega_{L/k}$ in $\Omega_{T/k}$. □

Aufbaulemma Koerperdifferenzial *[vlg. Lemma 16.15 David Eisenbud 1994]*

Lemma 12. *Sei $L \subset T$ eine seperable und algebraische Körpererweiterung und $R \longrightarrow L$ ein Ringhomomorphismus. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/R} = T \otimes_L \Omega_{L/R}$$

Insbesondere ist in diesem Fall die COTANGENT SEQUENZ (proposition 3) von $R \to L \hookrightarrow T$ eine kurze Exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \longrightarrow \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Beweis. Wähle $\alpha \in T$ mit $L[\alpha] = T$. Sei weiter f(x) das Minimalpolynom von α. Betrachte dazu die conormale Sequenz von $\pi : L[x] \longrightarrow L[x]/(f) \simeq T$ *(satz 4)*:

$$(f)/(f^2) \xrightarrow{1 \otimes d_{L[x]}} T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

Wende nun Proposition 16.6 auf $\Omega_{L[x]/R}$ an und tensoriere mit T, somit gilt:

$$T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \simeq T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T\langle d_{L[x]}(x) \rangle$$

Zusammen mit der conormalen Sequenz bedeutet dies:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T\langle d_{L[x]}(x) \rangle)/(d_{L[x]}(f))$$

Wenn wir $d_{L[x]} : (f) \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T\langle d_{L[x](x)} \rangle$ wie in beispiel 5 betrachten , sehen wir:

$$d_{L[x]}((f)) = J \oplus (f'(\alpha) d_{L[x]}) = J \oplus T\langle d_{S[x]}(x) \rangle$$

,wobei $J \subseteq T \otimes_L \Omega_{L/R}$ ein Ideal ist.

Für die letzte Gleichheit nutze, dass $T \supset L$ seperabel und somit $f'(\alpha) \neq 0$ ist und nach obiger Wahl $T = L[\alpha]$ gilt.
Damit erhalten wir nun:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R})/J$$
$$\Rightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \hookrightarrow \Omega_{T/R} \textit{ ist surjektiv.}$$

Somit muss J = 0 gelten und es folgt $T \otimes_L \Omega_{L/R} \simeq \Omega_{T/R}$.
Damit haben wir insbesondere auch gezeigt, dass $T \otimes_L \Omega_{L/R} \to \Omega_{T/R}$ injektiv und somit die COTANGENT SEQUENZ von $R \to L \hookrightarrow T$ eine kurze exakte Sequenz ist. □

Transzendenzbasis ist Differenzialbasis *[vlg. Theorem 16.4 David Eisenbud 1994]*

Theorem 13. *Sei $T \supset k$ eine seperabel generierte Körpererweiterung und $B = \{b_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq T$. Dann ist B genau dann eine Differenzialbasis von T über k, falls eine der folgedenen Bedingungen erfüllt ist:*

1. *char(k) = 0 und B ist eine Transzendenzbasis von T über k.*

2. *char(k) = p und B ist eine p-Basis von T über k.*

Beweis.

1.„⇐“: Sei B eine Transzendenzbasis von T über k.
Damit ist die Körpererweiterung $L := k(B) \supset k$ algebraisch und seperabel.

Mit lemma 12 folgt:

$$\Omega_{T/k} = T \otimes_L \Omega_{L/k}$$

Betrachte $L = k[B][k[B] \setminus 0^{-1}]$ als Lokalisierung und wende theorem 15 auf $\Omega_{L/k}$ an, somit gilt:

$$\Omega_{L/k} = L \otimes_{k[B]} \Omega_{k[B]/k}$$

In korrolar 13 haben wir gesehen, dass $\Omega_{k[B]/k}$ ein freis Modul über $k[B]$ mit $\{b_i\}_{i\in\Lambda}$ als Basis ist. Dies liefert uns letztendlich die gewünschte Darstellung

$$\Omega_{T/k} = \bigoplus_{\{i\in\Lambda\}} T\langle d_T(b_i)\rangle.$$

1.„⇒“: Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.
Zeige zunächst, dass T algebraisch über $L := k(B)$ ist:

Die COTANGENT SEQUENZ *(proposition 3)* von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ besagt $\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(S)\rangle$ und nach Vorraussetzung gilt $\Omega_{T/k} = T\langle d_T(B)\rangle$.

$$\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L)\rangle = \Omega_{T/k}/T\langle d_T(B)\rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$$

Da, wie wir in „$\Leftarrow_{1.}$“gezeigt haben, jede Transzendenzbasis B' von T über L auch eine Differenzialbasis von $\Omega_{T/L} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Somit ist T schon algebraisch über L.

Zeige noch, dass B auch algebraisch unabhängig über L ist:
Sei dazu Γ eine minimale Teilmenge von Λ, für welche T noch algebraisch über $k(\{b_i\}_{i\in\Gamma})$ ist. Für diese ist $\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ algebraisch unabhängig über K. Damit ist nach „$\Leftarrow_{1.}$“$\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von T über k. Also muss schon $\Gamma = \Lambda$ gegolten haben und B ist eine Transzendenzbasis von T über k.

2.„⇐“: Sei B eine p-Basis von T über k.
Somit wird nach DEFINITION-PROPOSITION T von B als Algebra über $(k * T^p)$ und $\Omega_{T/(k*T^p)}$ von $d_T(B)$ als Vektorraum über T *(PROPOSITION)* erzeugt. Zeige also $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p*k)}$:
Die Cotangent Sequenz *(proposition 3)* von $K \hookrightarrow (k * T^p) \hookrightarrow T$ besagt:

$$\Omega_{T/(T^p*k)} \simeq \Omega_{T/k}/d_T(T^p * k)$$

Für beliege $t^p \in T^p$ gilt $d_T(t^p) = pt^{p-1}d_T(t) = 0$, da $char(T) = p$.

$$\Rightarrow d_T(T^p * k) = d_T(k(T^p)) = 0$$

Damit ist $d_T : T \longrightarrow \Omega_{T/k}$ auch (T^p*k)-linear und es gilt $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p*k)}$.

2.„$\Rightarrow$“: Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.
Zeige zunächst, dass T von B als Algebra über k erzeugt wird:

Die COTANGENT SEQUENZ (proposition 3) von $k \hookrightarrow L := k(B) \hookrightarrow T$ besagt $\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L)\rangle$ und nach Vorraussetzung gilt $\Omega_{T/k} = T\langle d_T(B)\rangle$.

$$\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L)\rangle = \Omega_{T/k}/T\langle d_T(B)\rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$$

Da, wie wir in „$\Leftarrow_{2.}$“gezeigt haben, jede p-Basis B' von T über L auch eine Differenzialbasis von $\Omega_{T/L} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Somit wird T schon von B als Algebra über k erzeugt.

Zeige noch, dass B auch minimal als Erzeugendensystem von T als Algebra über k ist:
Sei dazu Γ die minimale Teilmenge von Λ, für welche T noch von $\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ als Algebra über k erzeugt wird. Dann ist $\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ eine p-Basis von T über k. Somit ist nach „$\Leftarrow_{2.}$“$\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von T über k. Es muss also schon $\Gamma = \Lambda$ gegolten haben und B ist eine p-Basis von T über k.

$\square$

Kapitel 4

Aufgaben

- Aufgabe 6.7 aus David Eisenbud 1994 ist lemma 10.
- Aufgabe 16.6 a) aus David Eisenbud 1994 ist bemerkung 11.

Cotangent Sequenz von Koerpern 3 *[Aufgabe 16.6 b) David Eisenbud 1994]*
Wir nennen eine Körpererweiterung $T \supset L$ pur inseperabel, falls gilt:

$$char(L) = p > 0 \text{ und } \forall t \in T \, \exists l \in L \, \exists n \in \mathbb{N} : t^{p^n} = l$$

Proposition 1. *Seien $T \supset L \supset k$ endliche Körpererweiterungen. Betrachte die COTANGENT SEQUENZ (proposition 3) von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$:*

$$T \otimes_L \Omega_{L/k} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Sei weiter die Körpererweiterung $T \supset L$ algebraisch und pur inseperabel und existiere ein $\alpha \in T$ mit $L(\alpha) = T$ und $Mipo(\alpha) = f(x) = x^p - a$.
Dann gilt:

$$\varphi \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow d_L(a) = 0$$

Beweis. Lege zunächst $T = L[x]/(f(x))$ fest und betrachte den kanonischen Epimorphismus $\pi : L[x] \longrightarrow T$, sowie die dazugehörige Konormale Sequenz *(satz 4)*. Forme diese leicht um **(2)**, sodass wir sie mit der COTANGENT SEQUENZ von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ **(3)** vergleichen können:

$$(f(x))/(f(x)^2) \xrightarrow{1 \otimes d_{L[x]}} T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/k} \longrightarrow 0 \tag{1}$$

$$T\langle d_{L[x]}(f(x))\rangle \longleftrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/k} \oplus T\langle d_{L[x]}(x)\rangle \xrightarrow{\widetilde{D\pi}} \Omega_{T/k} \longrightarrow 0 \tag{2}$$

$$T \otimes_L \Omega_{L/k} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0 \tag{3}$$

Zeige, dass **(2)** auch wirkliche exakt ist:

$$(1 \otimes d_{L[x]})(f(x)) = T \otimes_{L[x]} L[x]\langle d_{L[x]}(f(x))\rangle \simeq T\langle d_{L[x]}(f(x))\rangle$$
$$\Rightarrow \text{ Ersetze } 1 \otimes d_{L[x]} : (f(x))/(f(x)^2) \longrightarrow T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k}$$
$$\text{durch } T\langle d_{L[x]}(f(x))\rangle \hookrightarrow T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k}.$$

$$\text{nach korrolar 14 gilt } \Omega_{L[x]/k} \simeq L[x] \otimes_L \Omega_{L/k} \oplus L[x]\langle d_{L[x]}(x)\rangle$$
$$\text{und tensorieren mit } T \text{ ergibt } T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/k} \simeq T \otimes_L \Omega_{L/k} \oplus T\langle d_{L[x]}(x)\rangle.$$

„$\Rightarrow$“: Wenn wir nun unsere zwei exakten Sequenzen betrachten sehen wir, dass φ eine Einschränkung von $D\pi$ auf einen kleineren Definitionsbereich ist. Zeige also, dass $D\pi$ injektiv ist:

$$\text{Nach Vorraussetung gilt } d_L(a) = 0 \text{ also auch } d_{L[x]}(a) = 0$$
$$\Rightarrow d_{L[x]}(f) = d_{L[x]}(x^p) - d_{L[x]}(a) = px^{p-1}d_{L[x]}(x) - d_{L[x]}(a) = 0 - 0$$
$$\Rightarrow T\langle d_{L[x]}(f(x))\rangle = 0$$

Bezogen auf die exakte Sequenz **(2)** bedeutet dies, dass $D\pi$ injektiv ist.

„$\Leftarrow$“: Da φ nach Vorrausetzung injektiv ist, genügt es $\varphi 1 \otimes a = 0$ zu zeigen:

$$\text{In } T \text{ gilt } [f(x)]_T = 0$$
$$\Rightarrow 0 = d_T([f(x)]_T) = d_T([x^p]_T) - d_T([a]_T) = d_T([a]_T)$$
$$\Rightarrow \varphi(1 \otimes d_L(a)) = d_T([a]_T) = 0$$

Da φ nach Voraussetzung injektiv ist, gilt $1 \otimes d_{L[x]}(a) = 0$ und somit auch $d_L(a) = 0$.

□

Cotangent Sequenz von Koerpern 3 Beispiel *[Aufgabe 16.6 b) David Eisenbud 1994]*

Beispiel 2. *Betrachte das in proposition 1 gegebenen Szenario und wähle:*

$$k = \mathbb{F}_3,\ L = k[y]/(y^2+1),\ T = L(\sqrt[3]{y}) \simeq L[x]/(x^3 - y).$$

Hierbei gilt $d_L(x) \neq 0$ und somit ist $\varphi : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{L/k}$ nicht injektiv.

seperabel generierte Koerpererweiterung mit DifR(T)(R) ist 0 *[Aufgabe 16.10 David Eisenbud 1994(steht im Bezug zu Korrolar 16.17)]*

Beispiel 3. *Sei k ein Körper mit $char(k) = p > 0$ und sei weiter $K(x)$ der*

Raum der Rationalen Funktionen über k.

$$\textit{Definiere: } L := k(x^{1/p^\infty}) = \varinjlim\{k(x^{1/p^n})|n \in \mathbb{N}\}$$

Dann gilt : $\Omega_{L/k} = 0$
Prüfe noch, ob $L \supset k$ eine seperabel generierte Körpererweiterung ist.

Beweis. Es gilt:

$$d_L(x^{1/p^n}) = d_L\left(\prod_{i\in\{1,\dots,p\}} x^{1/p^{n+1}}\right) = p \cdot \left(\prod_{i\in\{1,\dots,p-1\}} x^{1/p^{n+1}}\right) \cdot d_L(x^{1/p^{n+1}}) = 0$$

Nute noch proposition 12 und beispiel 9 um zu folgern, dass $\Omega_{L/k}$ von $\{d_L(x^{1/p^n})|n \in \mathbb{N}\}$ erzeugt wird. □

Differenzial algebraischer Algebren ist Null *[Aufgabe 16.11 David Eisenbud 1994]*

Beispiel 4. *Sei K ein Körper mit $char(K) = 0$ und T eine noethersche K-Algebra. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/K} = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$T = \prod_{i\in\{1,\dots,n\}} K(\alpha_i) \textit{ ist ein endliches Produkt algebraischer Körpererweiterungen.}$$

Beweis.

„$\Rightarrow$ “: Da T noethersch ist, ist T als Algebra über K endlich erzeugt und es gilt:

$$T = \prod_{i\in\{1,\dots,n\}} K[\alpha_i]/I_i$$

Wobei $I_i \subseteq K[\alpha_i]$ ein Ideal ist.($\forall i \in \{1, \dots, n\}$)

Zur Vereinfachung definiere $T' := \prod_{i\in\{1,\dots,n\}} K[\alpha_i]$. Betrachte nun den Differentialraum von T genauer:

$$\Omega_{T/K} = d_{T'}\left(\prod_{i\in\{1,\dots,n\}} K[\alpha_i]/I_i\right)$$
$$= \prod_{i\in\{1,\dots,n\}} d_{K[\alpha]}\left(K[\alpha_i]/I_i\right) \ \textit{(proposition 2)}$$

Betrachte also jeweils für $i \in \{1, \dots, n\}$ die K-Algebra $K[\alpha_i]/I_i$.
Sei $I_i \neq K[\alpha_i]$, da andernfalls $K[\alpha_i]/I_i = 0$ und somit α_i kein Erzeuger

vor T wäre.
Unterscheide nun zwischen den zwei möglichen Fällen $\underline{I_i = 0}$ und $\underline{I_i \neq 0}$:

1. $\underline{I_i = 0}$: Da $\Omega_{T/K} = 0$ gilt, muss $K[\alpha_i] = 0$ gelten.
$\mathbb{A}$nnhame: α_i ist transzendent über K.

$$\text{Dies bedeutet } K[\alpha_i] \simeq K[x]$$
$$\Rightarrow \Omega_{K[\alpha_i]/K} \simeq K[x]\langle d_{K[x]}(x)\rangle \neq 0 \textit{ (korrolar 13)}$$

Dies steht allerdings im Widerspruch zu $K[\alpha_i] = 0$. Folglich war unsere $\mathbb{A}$nnahme falsch und α_i ist algebraisch über K.
Folglich ist $K[\alpha_i] = K(\alpha_i)$ eine algebraische Körpererweiterung.

2. $\underline{I_i \neq 0}$: Zunächst sehen wir, dass α_i transzendent sein muss, da sonst $K[\alpha_i] = K(\alpha_i)$ ein Körper wäre und somit $I_i = K(\alpha_i)$ gelten würde.
Also ist α_i transzendent und es gilt:

$$K[\alpha_i] \simeq K[x] \text{ und } I \simeq (f(x)) \text{ mit } f(x) \in K[x]$$
$$\Rightarrow K[\alpha_i] \simeq K[\beta_1, \dots \beta_n] = K(\beta_1, \dots \beta_n), \text{ wobei } \beta_1, \dots \beta_n \text{ die Nullstellen von f sind.}$$

Somit haben wir gezeigt, dass auch in diesem Fall $K[\alpha_i]/I_i$ eine Algebraische Körpererweiterung ist.

„$\Leftarrow$ “: proposition 2 besagt, dass das direkte Produkt unter Bildung des Differenzials erhalten bleibt, also gilt in diesem Fall:

$$\Omega_{T/K} = \prod_{i \in \{1,\dots,n\}} \Omega_{K(\alpha_i)/K}$$

Nach Voraussetzung sind alle Körpererweiterungen $K\alpha_i \supset K$ algebraisch. Wir haben schon in BSP gesehen, dass somit deren Differentiale gleich 0 sind. Folglich ist auch das direkte Produkt der einzelnen Differenziale und somit $\Omega_{T/K}$ gleich 0.

$\square$