

**Beispiel 1.** Sei  $k$  ein Körper, somit entspricht  $d_{k[x]} : k[x] \longrightarrow \Omega_{k[x]/k}$ ,  $f \longmapsto f' d_{k[x]}(x)$  der analytischen Ableitung.

Teste dies an  $f(x) = ax^2 + bx + c$ :

$$d(f(x)) = a \cdot d(x^2) + b \cdot d(x) = (2ax + b)d(x) = f'(x)d(x)$$

**Beispiel 2.** Sei  $k$  ein Körper und  $K = k(\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}})$  der Körper der rationalen Funktionen in  $n$  Variablen über  $k$ .

Dann ist  $\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  eine Differenzialbasis von  $\Omega_{K/k}$ .

*Beweis.* Sehe  $K = k[x_1, \dots, x_n][k[x_1, \dots, x_n]^{-1}]$  als Lokalisierung. Somit gilt nach LOKALISIERUNG und POLYNOMRING:

$$\Omega_{K/k} \simeq K \otimes \Omega_{k[x_1, \dots, x_n]/k} \simeq K \otimes \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} k[x_1, \dots, x_n] \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \simeq K \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle$$

Somit ist  $\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  ein Erzeugenden-System von  $\Omega_{K/k}$ .  $\square$

**Lemma 3.** Sei  $R \longrightarrow S \subset T$  ein Ringhomomorphismus und  $S \subset T$  eine separabel und algebraische Körpererweiterung. Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} = T \otimes_S \Omega_{S/R}$$

*Beweis.* Wähle  $\alpha \in T$  mit  $S[\alpha] = T$  und sei  $f(x)$  das Minimalpolynom von  $\alpha$ . Betrachte dazu die conormale Sequenz von  $\pi : S[x] \longrightarrow S[x]/(f) \simeq T$  [vgl. ??]:

$$(f)/(f^2) \xrightarrow{1 \otimes d_{S[x]}} T \otimes_{S[x]} \Omega_{S[x]/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

Wende nun 16.6 auf  $\Omega_{S[x]/R}$  an und tensoriere mit  $T$ , somit gilt:

$$T \otimes_{S[x]} \Omega_{S[x]/R} \simeq T \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus T \langle d_{S[x]}(x) \rangle$$

Zusammen mit der Conormalen Sequenz bedeutet dies

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus T \langle d_{S[x]}(x) \rangle) / (d_{S[x]}(f))$$

Wenn wir  $d_{S[x]} : (f) \longrightarrow T \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus T \langle d_{S[x]}(x) \rangle$  genauer betrachten sehen wir: [betrachte dazu beispiel 1 ]:

$$d_{S[x]}((f)) = J \oplus (f'(\alpha) d_{S[x]}) = J \oplus T \langle \rangle \text{ wobei } J \subseteq T \otimes_S \Omega_{S/R} \text{ ein Ideal ist.}$$

Für die letzte Gleichheit nutze, dass  $T \supset S$  separabel und somit  $f(\alpha) \neq 0$  ist und nach obiger Wahl  $K = S[\alpha]$  gilt.

Damit erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} \Omega_{T/R} &\simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) / J \\ &\Rightarrow T \otimes_S \Omega_{S/R} \hookrightarrow \Omega_{T/R} \text{ ist surjektiv.} \end{aligned}$$

Somit muss  $J = 0$  gelten und es folgt  $T \otimes_S \Omega_{S/R} \simeq \Omega_{T/R}$ .  $\square$