Cotangent Sequenz *[Proposition 16.2 Kommutativ Algebra with a view Torwards Algebraic Geometrie [David Eisenbud 1994]]*

Proposition 1. *Seien $\alpha : R \longrightarrow S$ und $\beta : S \longrightarrow T$ zwei Ringhomomorphismen. Dann existiert folgende Exakte Sequenz:*

$$T \otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{t \otimes d_S(s) \mapsto t(d_T \circ \alpha)(s)} \Omega_{T/R} \xrightarrow{d_T(t) \mapsto d_T(t)} \Omega_{T/S} \longrightarrow 0$$

Im genauen gilt für die Differenzialräume von T über R und S:

$$\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R}/d_T(S).$$

d_T vs $d_T R$
Test1 faul fett

Differenzial ist Ableitung *[Eigene Überlegung]*

Beispiel 2. *Sei k ein Körper, somit entspricht $d_{k[x]} : k[x] \longrightarrow \Omega_{k[x]/k}$, $f \longmapsto f' d_{k[x]}(x)$ der analytischen Ableitung.*
Teste dies an $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$d(f(x)) = a \cdot d(x^2) + b \cdot d(x) = (2ax + b)d(x) = f'(x)d(x)$$

Definition der Differenzialbasis *[vlg. Chapter 16.5 Kommutativ Algebra with a view Torwards Algebraic Geometrie [David Eisenbud 1994]]*

Definition 3. *Sei $K \supset k$ eine Körpererweiterung. Dann nennen wir eine Teilmenge $\{b_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq T$ eine Differenzialbasis von K über k, falls $\{d_K(b_i)\}_{i \in \Lambda} \subseteq T$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/R}$ über T ist.*

Differentialbasis des Quotientenkoerpers von Polynomalgebren *[vlg. Chapter 16.5 Kommutativ Algebra with a view Torwards Algebraic Geometrie [David Eisenbud 1994]]*

Beispiel 4. *Sei k ein Körper und $K = k(\{x_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in n Varablen über k.*
Dann ist $\{x_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ eine Differenzialbasis von $\Omega_{K/k}$.

Beweis. Sehe $K = k[x_1, \ldots, x_n][k[x_1, \ldots, x_n]^{-1}]$ als Lokalisierung. Nach LOKALISIERUNG und POLYNOMRINGEN gilt:

$$\begin{aligned} \Omega_{K/k} &\simeq K \otimes \Omega_{k[x_1,\ldots,x_n]/k} \\ &\simeq K \otimes \oplus_{i \in \{1,\ldots,n\}} k[x_1, \ldots, x_n]\langle d_{k[x_1,\ldots x_n]}(x_i)\rangle \\ &\simeq K\langle d_{k[x_1,\ldots x_n]}(x_i)\rangle \end{aligned}$$

Damit ist $\{x_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ ein Erzeugenden-System von $\Omega_{K/k}$. $\square$

Aufbaulemma Koerperdifferenzial *[vlg. Lemma 16.15 Kommutativ Algebra with a view Torwards Algebraic Geometrie [David Eisenbud 1994]]*

Lemma 5. *Sei $R \longrightarrow S \subset T$ ein Ringhomomorphismus und $S \subset T$ eine seperabel und algebraische Körpererweiterung. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/R} = T \otimes_S \Omega_{S/R}$$

Beweis. Wähle $\alpha \in T$ mit $S[\alpha] = T$. Sei weiter f(x) das Minimalpolynom von α. Betrachte dazu die conormale Sequenz von $\pi : S[x] \longrightarrow S[x]/(f) \simeq T$ aus **Proposition 16.3**:

$$(f)/(f^2) \xrightarrow{1\otimes d_{S[x]}} T \otimes_{S[x]} \Omega_{S[x]/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

Wende nun 16.6 auf $\Omega_{S[x]/R}$ an und tensoriere mit T, somit gilt:

$$T \otimes_{S[x]} \Omega_{S[x]/R} \simeq T \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus T\langle d_{S[x]}(x)\rangle$$

Zusammen mit der conormalen Sequenz bedeutet dies:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus T\langle d_{S[x]}(x)\rangle)/(d_{S[x]}(f))$$

Wenn wir $d_{S[x]} : (f) \longrightarrow T \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus T\langle d_{S[x](x)}\rangle$ wie in **??** betrachten , sehen wir:

$$d_{S[x]}((f)) = J \oplus (f'(\alpha)d_{S[x]}) = J \oplus T\langle d_{S[x]}(x)\rangle$$
$$\text{,wobei } J \subseteq T \otimes_S \Omega_{S/R} \text{ ein Ideal ist.}$$

Für die letzte Gleichheit nutze, dass $T \supset S$ seperabel und somit $f'(\alpha) \neq 0$ ist und nach obiger Wahl $T = S[\alpha]$ gilt.
Damit erhalten wir nun:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R})/J$$
$$\Rightarrow T \otimes_S \Omega_{S/R} \hookrightarrow \Omega_{T/R} \textit{ ist surjektiv.}$$

Somit muss J = 0 gelten und es folgt $T \otimes_S \Omega_{S/R} \simeq \Omega_{T/R}$. □

Differenzialbasis eines Koerpers *[vlg. Theorem 16.4 Kommutativ Algebra with a view Torwards Algebraic Geometrie [David Eisenbud 1994]]*

Theorem 6. *Sei $T \supset k$ eine seperabel generierte Körpererweiterung und $B = \{b_i\}_{i\in\Lambda}$. Dann ist B genau dann eine Differenzialbasis von T über k, falls eine der folgedenen Bedingungen erfüllt ist:*

1. *char(k) = 0 und B ist eine Transzendenzbasis von T über k.*
2. *char(k) = p und B ist eine p-Basis von T über k.*

Beweis.

1."$\Leftarrow$": Sei B eine Transzendenzbasis von T über k.
Somit ist die Körpererweiterung $K \supset S := k(B)$ algebraisch und sepera-bel. Mit lemma 5 folgt:

$$\Omega_{T/k} = T \otimes_S \Omega_{S/k}$$

Betrachte S als Lokalisierung von $K[B]$ und wende **Lokalisierung des Kähler-Differenzials** auf $\Omega_{S/k}$ an, somit gilt:

$$\Omega_{S/k} = S \otimes_{k[B]} \Omega_{k[B]/k}$$

In **Differenzial von Polynomalgebren 1** haben wir gesehen, dass $\Omega_{k[B]/k}$ ein freis Modul über $k[B]$ mit $\{b_i\}_{i\in\Lambda}$ als Basis ist. Dies liefert uns letztendlich die gewünschte Darstellung

$$\Omega_{T/k} = \bigoplus_{i\in\Lambda\}} T\langle d_T(x_i)\rangle.$$

1."$\Rightarrow$": Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.
Zeige zunächst, dass T algebraisch über S ist.
Betrachte dazu die COTANGENT SEQUENZ (proposition 1) von $K \hookrightarrow S \hookrightarrow T$.

$$T \otimes_S \Omega_{S/k} \longrightarrow \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/S} \longrightarrow 0$$

Diese besagt $\Omega_{T/S} = \Omega_{T/k}/im(T \otimes_S \Omega_{S/k} \longrightarrow \Omega_{T/k})$.

$$\text{Nach Vorraussetzung gilt } \Omega_{T/k} = T\langle d_T(B)\rangle.$$
$$\Rightarrow im(T \otimes_S \Omega_{S/k} \longrightarrow \Omega_{T/k}) = T\langle d_S(B)\rangle \simeq \Omega_{T/k}$$

Zusammen zeigt und dies, dass $\Omega_{T/S} = 0$ gilt.
Da, wie wir in "$\Leftarrow_{1.}$"gezeigt haben, jede Transzendenzbasis B' von T über S auch eine Differenzialbasis $\Omega_{T/S} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Da dies sonst der existens von Transzendenzbasen *[vlg. PROPOSITION]* widersprechen würde, muss somit T algebraisch über S sein.

Zeige noch, dass B auch algebraisch unabhängig über S ist.
Sei dazu τ die minimale Teilmenge von Λ, für welche T noch algebraisch über $k(\{b_i\}_{i\in\tau})$ ist. Für diese ist $\{b_i\}_{i\in\tau}$ algebraisch unabhängig über K. Damit ist $\{b_i\}_{i\in\tau}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von T über k. Also muss schon $\tau = \Lambda$ gegolten haben und B ist eine Transzendenzbasis von T über k.

2."$\Leftarrow$": Sei B eine p-Basis von T über k.
Somit wird nach PROPOSITION T von B als Algebra über $(k * K^p)$

und $\Omega_{T/(k*K^p)}$ von $d_T(B)$ als Vektorraum über T *[vlg. PROPOSITION]* erzeugt. Zeige also $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p*k)}$:
Die Cotangent Sequenz (proposition 1) von $K \hookrightarrow (k * K^p) \hookrightarrow T$ besagt:

$$\Omega_{T/(T^p*k)} \simeq \Omega_{T/k}/d_T(T^p * k)$$

$$\text{Für beliege } a^p \in T \text{ gilt } d_T(a^p) = pa^{-1}d_T(a) = 0, \text{ da } char(T) = p.$$
$$\Rightarrow d_T(T^p * k) = d_T(k(T^p)) = 0$$

Damit gilt wie gefordert $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p*k)}$.

$\square$