## Kapitel 1

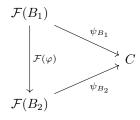
# **Kolimes**

### 1.1 Einführung in den Kolimes

#### Definition des Kolimes

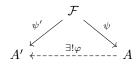
**Definition 1.** [vgl. Anhang A6 David Eisenbud 1994] Sei A eine Kategorie.

- Ein <u>Diagramm</u> über A ist eine Kategorie B zusammen mit einem Funktor  $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow A$ .
- Sei  $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$  ein Diagramm und  $A \in \mathcal{A}$  ein Objekt. Dann definieren wir einen Morphismus  $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$  als eine Menge von Funktionen  $\{\psi_B \in Hom(F(B), A) | B \in \mathcal{B}\}$ , wobei für alle  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  und  $\varphi \in Hom(B_1, B_2)$  folgendes Diagramm kommutiert:



• Der <u>Kolimes</u>  $\varinjlim \mathcal{F}$  eines Diagramms  $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$  ist ein Paar aus einem Objekt  $A \in \mathcal{A}$  zusammen mit einem Morphismus  $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$ , welche folgende universelle Eingenschaft erfüllen:

Für Objekte  $A' \in \mathcal{A}$  und alle Morphismen  $\psi' : \mathcal{F} \longrightarrow A'$  existiert genau eine Funktion  $\varphi \in Hom(A, A')$ , sodass folgendes Diagramm kommutiert:



Eindeutigkeit des Kolimes [vgl. A6 David Eisenbud 1994]

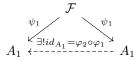
**Lemma 2.** Seien  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A}$  zwei Kategorien und  $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$  ein Funktor. Dann ist im Falle der Existenz  $\lim \mathcal{F}$  eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien  $A_1 \in \mathcal{A}, (\psi_1 : \mathcal{F} \longrightarrow A_1)$  und  $A_2 \in \mathcal{A}, (\psi_2 : \mathcal{F} \longrightarrow A_2)$  beide gleich  $\lim \mathcal{F}$ .

Erhalte durch die universelle Eigenschaft des Kolimes die eindeutig bestimmten Funktionen  $\varphi_1 \in Hom_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$  und  $\varphi_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(A_2, A_1)$ , für welche die folgende Diagramme kommutieren:



Wende nun die Universelle Eigenschaft von  $\psi_1$  auf  $\psi_1$  selbst an und erhalte  $id_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1$ . Analog erhalte auch  $id_{A_2} = \varphi_1 \circ \varphi_2$ .



Somit existiert genau eine Isomorphie  $\varphi_1: A_1 \longrightarrow A_2$ 

#### Vereinfachung des Kolimes

Korrolar 3. [Eigene Überlegung ]

Sei  $\mathcal{A}$  eine Kategorie und  $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$  ein Diagramm. Betrachte die Unterkategorie  $\mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{A}$  zusammen mit dem Inklusionsfunktor  $\mathcal{F}(B) \hookrightarrow \mathcal{A}$  ebenfalls als Diagramm. Dann gilt:

$$\varinjlim \mathcal{F} \ existiert \ genau \ dann, \ wenn \ \varinjlim (\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \ existiert.$$
$$Mit \ \varinjlim \mathcal{F} = \varinjlim (\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}).$$

Beweis. Dies folgt direkt aus unserer Definition von Morphismen:

In definition 1 haben wir einen Morphismus  $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$  als eine Menge von Funktionen  $\psi_{\mathcal{B}} \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(B), A)$  definiert. Dies zeigt, dass es keinen Unterschied macht, ob wir von Morphismen  $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$  oder von Morphismen  $\psi: (\mathcal{F}(B) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$  reden.

Wenn wir nun die universelle Eigenschaft des Kolimes genauer betrachten, sehen wir, dass diese sich nur auf Morphismen  $\mathcal{F} \longrightarrow A$  bzw.  $(\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$  und auf die Kategorie  $\mathcal{A}$  bezieht. Es macht also keinen Unterschied, ob wir vom Kolimes des Diagramms  $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$  oder vom Kolimes des Diagramms  $(\mathcal{F}(\mathcal{B}), \mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A})$  sprechen.

Es genügt also im Fall von Kolimtenn Diagramme  $(\mathcal{B}, \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$  mit  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  zu betrachten. Zur Vereinfachung schreibe für  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  in Zukunft  $\varinjlim \mathcal{B}$  anstatt von  $\varinjlim (\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$ .

#### DifferenzkokernUndKoproduktDef

**Definition 4.** [vlg. A6 David Eisenbud 1994] Sei A eine Kategorie.

- Das Koprodukt von  $\{B_i\}_{i\in\Lambda}\subseteq\mathcal{A}$  wird durch  $\coprod_{i\in\Lambda}\{B_i\}:=\varinjlim_{\longrightarrow}\mathcal{B}$  definiert, wobei  $\{B_i\}_{i\in\Lambda}$  die Objekte und die Identitätsabbildungen  $\{id_{B_i}:B_i\longrightarrow B_i\}_{i\in\Lambda}$  die einzigen Morphismen von  $\mathcal{B}$  sind.
- Der Differenzkokern von  $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$  wird durch  $\varinjlim \mathcal{C}$  definiert, wobei  $\{C_1, C_2\}$  die Objekte und  $\{f, g\}$  zusammen mit den Identitätsabbildungen die Morphismen von  $\mathcal{C}$  sind.

#### NeuDifferenzenkokerndef

#### Bemerkung 5. | Wikipedia |

Sei A eine Kategorie. Sei weiter  $C_1, C_2 \in Obj_A$  und  $f, g \in Hom_A(C_1, C_2)$ . Im Falle der Existenz ist der Differnenzenkokern von f, g nach definition 4 durch ein Objekt  $C \in Obj_A$  und einen Morphismus  $\psi = \{\psi_{C_1}, \psi_{C_2}\}$  gegeben, wobei gilt:

$$\psi_{C_2} = f \circ \psi_1 = g \circ \psi_2$$

Wir sehen, dass  $\psi$  eindeutig durch  $q := \psi_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$  gegeben ist. Der Differnzenkokern ist also eindeutig durch  $(C \in obj_{\mathcal{A}}, q \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2))$  gegeben, wobei q folgenden Eigenschaften besitzt:

Es gilt  $f \circ q = g \circ g$  und für alle  $C \in Obj_A$  und  $q' \in Hom_A$  mit  $f \circ q' = g \circ q'$  existiert genau ein  $\varphi \in Hom_A$ , mit  $q \circ \varphi = q'$ :

$$C_1 \xrightarrow{f,g} C_2 \xrightarrow{q} C$$

$$\downarrow^{q'} \qquad \downarrow^{\exists ! \varphi}$$

$$C'$$

Wenn wir fortan vom Differenzkokern sprechen meinen wir damit das Paar (C,q).

#### Kolimes durch Koprodukt und Differenzkokern

**Theorem 6.** [Proposition A6.1 David Eisenbud 1994]

Sei  $\mathcal{A}$  eine Kategorie, in der Koprodukte beliebiger Mengen von Objekten und Differenzkokerne von je zwei Morphismen existieren. Dann existiert für jedes Diagramm  $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$  dessen Kolimes  $\lim \mathcal{F}$ .

Beweis. In korrolar 3 haben wir gesehen, dass es genügt den Fall  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  zu betrachten. Konstruiere also für eine beliebige Unterkategorie  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  deren Kolimes  $\lim \mathcal{B}$ :

Bezeichne für jeden Morphismus  $\gamma \in Morph_{\mathcal{C}}$  dessen Definitionsbreich mit  $B_{\gamma} \in$ 

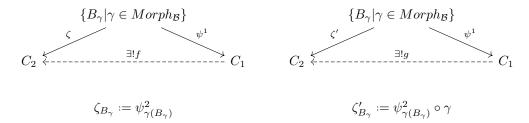
 $\mathcal{B}$ . Weiter, wenn wir einen Morphismus  $\psi$  gegeben haben und  $\psi_{\gamma(B_{\gamma})}$  betrachten, ist damit  $\psi_B$  gemeint, wobei B die Zielmenge von  $\gamma$  ist. Definiere nun:

- $C_1 := \coprod_{\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}} B_{\gamma}$  ist das Koprodukt aller Objekte von  $\mathcal{B}$ , in dem jedes Objekt so oft vorkommt, wie es Definitionsbereich eines  $\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}$  ist. Sei  $\psi^1 : \{B_{\gamma} | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_1$  der dazugehörige Morphismus.
- $C_2 := \coprod_{B \in Obj_{\mathcal{B}}}$  ist das Koprodukt aller Objekte von  $\mathcal{B}$ . Sei  $\psi^2 : \{B|B \in Obj_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_2$  der dazugehörige Morphismus.

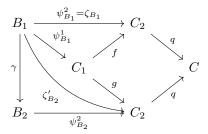
Konstruiere nun  $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$  so, dass der Differenzkokern von f und g dem Kolimes von  $\mathcal{B}$  entspricht. Nutze dazu die universelle Eigenschaft von  $(C_1, \psi^1) = \lim \{B_{\gamma} | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\}:$ 

Für f betrachte den Morphismus  $\zeta: \{B_{\gamma}|\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_2$ , mit  $\zeta_{B_{\gamma}} := \psi_{\gamma(B_{\gamma})}^2$  für  $B_{\gamma} \in \{B_{\gamma}|\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\}$ . Wähle  $f \in Hom_{\mathcal{B}}(C_1, C_2)$  als die eindeutige Funktion, mit  $\zeta = f \circ \psi^1$ .

Für g betrachte den Morphismus  $\zeta':\{B_{\gamma}|\gamma\in Morph_{\mathcal{B}}\}\longrightarrow C_2,$  mit  $\zeta'_{B_{\gamma}}:=\psi^2_{\gamma(B_{\gamma})}\circ\gamma$  für  $B_{\gamma}\in\{B_{\gamma}|\gamma\in Morph_{\mathcal{B}}\}.$  Wähle  $g\in Hom_{\mathcal{B}}(C_1,C_2)$  als die eindeutige Funktion, mit  $\zeta'=g\circ\psi^1.$ 



Sei  $C \in Obj_{\mathcal{B}}$  zusammen mit  $q \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, C)$  der Differenzkokern von f, g. Betrachte abschließend  $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow C$ , mit  $\psi_B = q \circ \psi_B^2$  für  $B \in Obj_{\mathcal{B}}$ . Um zu sehen, dass  $\psi$  ein Morphismus ist, wähle  $B_1, B_2 \in Obj_{\mathcal{B}}$  beliebig und betrachte folgendes kommutatives Diagramm:



Zeige nun, dass  $(C, \psi)$  die Universelle Eigenschaft des Kolimes besitzt. Nutze dazu nacheinander die universellen Eigenschaften von  $(C_2, \psi^2)$  und (q, C):

Da  $\psi'$  ein Morphismus von  $\mathcal{B}$  nach C' ist, ist  $\psi'$  insbesondere auch ein Morphismus von  $\{B|B\in Obj_{\mathcal{B}}\}$  nach C. Somit existiert genau ein  $q'\in Hom_{\mathcal{B}}(C_2,C')$  mit  $\psi^2\circ q'=\psi'$ .

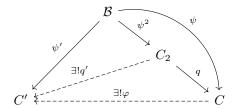
Zeige nun  $q' \circ f \stackrel{!}{=} q' \circ g$ . Sei dazu  $c \in C_1$  beliebig und  $\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}, b \in B_{\gamma}$  mit  $\psi_{B_{\alpha}}^{1}(b) = c$ , dann gilt:

$$(q' \circ f)(c) = (q' \circ f \circ \psi_{B_{\gamma}}^{1})(b) = (q' \circ \zeta_{B_{\gamma}})(b) = (q' \circ \psi_{B_{\gamma}}^{2})(b) = \psi'_{B_{\gamma}}(b)$$

$$(q' \circ g)(c) = (q' \circ g \circ \psi_{B_{\gamma}}^{1})(b) = (q' \circ \zeta'_{B_{\gamma}})(b)$$

$$= (q' \circ \psi_{\gamma(B_{\gamma})}^{2} \circ \gamma)(b) = (\psi'_{\gamma(B_{\gamma})} \circ \gamma)(b) = \psi'_{B_{\gamma}}(b)$$

Somit können wir die universelle Eigenschaft von q auf q' anwenden und erhalten ein eindeutiges  $\varphi \in Hom(C, C')$  mit  $q' = q \circ \varphi$ .



Dieses  $\varphi \in Hom(C,C')$  erfüllt auch  $\psi \circ \varphi = \psi^2 \circ q \circ \varphi = \psi^2 \circ q' = \psi'$  und ist nach Konstruktion eindeutig. Damit gilt  $\lim \mathcal{B} = (C,\psi)$ .

#### Bemerkung 7. (Unendliche Indexmengen)

Wir wollen uns hier nochmal kurz in Erinnerung rufen, was es bedeutet, wenn wir eine unendlich große Indexmenge  $\Lambda$  vor uns haben:

1. Sei A eine Kategorie und  $\{B_i\}_{i\in\Lambda}\subseteq Obj_A$ , dann gilt:

$$\bigoplus_{i \in \Lambda} B_i = \bigcup_{\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \Lambda} \bigoplus_{k=1}^n B_{i_k} = \{(b_{i_1}, \dots, b_{i_n}) | n \in \mathbb{N} \land \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \Lambda\}$$

2. Sei  $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$  eine Menge von R-Moduln (oder R-Algebren), dann gilt:

$$\bigotimes_{i \in \Lambda} M_i = \bigcup_{\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \Lambda} \bigotimes_{k=1}^n M_{i_k} = \{ (m_{i_1} \otimes \dots \otimes m_{i_n}) | n \in \mathbb{N} \land \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \Lambda \}$$

3. Für den Polynomring über R in unendlich vielen Variablen  $\{x_i\}_{i\in\Lambda}$  gilt:

$$P[\{x_i\}_{i \in \Lambda}] = \bigcup_{\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \Lambda} P[x_{i_1}, \dots, x_{i_n}] = \{P(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) | n \in \mathbb{N} \land \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \Lambda\}$$

Dies zeigt, dass sich diesen drei Fällen eine unendliche Indexmenge  $\Lambda$  immer auf endliche Indexmengen  $\{1,\ldots,n\}$  zurückführen lässt.

#### Darstellung der Polynomalgebra als Tensorprodukt

#### Bemerkung 8. [Eigene Überlegung]

Die Polynomalgebra  $R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}]$  über R lässt sich wie folgt als Tensorprodukt darstellen:

$$R[\{x_i\}_{i\in\Lambda}] = \bigotimes_{i\in\Lambda} R[x_i]$$

Beweis. Im Falle einer endlichen Indexmenge  $\Lambda$  wollen wir induktiv vorgehen. Seien für den Induktionsschritt  $S_x := R[x_1, \dots x_n]$  und  $S_y := R[y_1, \dots, y_m]$  zwei Polynomalgebren über R, zeige:

$$S_{xy} := R[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m] \simeq S_x \otimes_R S_y$$

Dazu betrachten wir folgende bilineare Funktion:

$$q': S_x \oplus S_y \longrightarrow S, (P,Q) \longmapsto P \cdot Q$$

Erhalte nun eine Funktion  $\varphi: S_x \otimes_R S_y \longrightarrow S_{xy}$  aus der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes:

$$S_x \oplus S_y \xrightarrow{g} S_x \otimes_R S_y$$

$$\downarrow^{\exists ! \varphi}$$

$$S_{xy}$$

$$\varphi : S_x \otimes_R S_y \longrightarrow S_{xy}, \ P \otimes Q \longmapsto P \cdot Q$$

Der Homomorphismus  $\varphi$  ist surjektiv und bildet die Erzeuger  $\{x_i \otimes 1\} \cup \{1 \otimes y_j\}$  von  $S_x \otimes_R S_y$  eindeutig auf die Erzeuger  $\{x_i\} \cup \{y_j\}$  von  $S_{xy}$  ab. Folglich ist  $\varphi$  ein Isomorphismus.

Indunktiv erhalten wir daraus für den Fall  $|\Lambda| < \infty$  folgenden Isomorphismus:

$$\Phi: \bigotimes_{i \in \Lambda} R[x_i] \longrightarrow R[\{x_i\}_{i \in \Lambda}], (P_1(x_1), \dots P_n(x_n)) \longmapsto \prod_{i=1}^n P_i(x_i)$$

Dies ist auch im Fall  $\Lambda = \infty$  ein Isomorphismus, da wir auch in diesem Fall nur Tensorprodukte endlich vieler Polynome bzw. Polynome in endlich vielen Variablen betrachten (siehe bemerkung 7).

Da das Tensorprodukt  $\bigotimes_{i \in \Lambda} R[x_i]$  bis auf eine Eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist, definiere dies ab jetzt als  $R[\{x_i\}_{i \in \Lambda}]$ .

#### R-Algebra-Kolimiten

Proposition 9. [vlg. Proposition A6.7 David Eisenbud 1994] In der Kategorie der R-Algebren existieren Kolimiten beliebiger Diagramme, wobei gilt:

**1.** Das Koprodukt einer Familie von  $R-Algebren \{S_i\}_{i\in\Lambda}$  entspricht deren Tesorprodukt  $\bigotimes_{i\in\Lambda} S_i$ .

2. Der Differenzkokern zweier R-Algebrenhomomorphismen  $f, g: S_1 \longrightarrow S_2$  einspricht dem Homomorphismus  $q: S_2 \longrightarrow S_2/Q$ ,  $y \longmapsto [y]$ , wobei  $Q := \{f(x) - g(x) \mid x \in S_1\}$  das Bild der Differenz von f und g ist.

Beweis.

<u>Zu 1.</u>: Sei  $\mathcal{B} = \{S_i\}_{i \in \Lambda}$  die Unterkategorie der R-Algebren, welche  $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$  zusammen mit den Identitätsabbildungen enthält. Somit gilt nach definition 4  $\coprod_{i \in \Lambda} S_i = \lim_{\longrightarrow} \mathcal{B}$ . Seien weiter:

 $\psi: \mathcal{B} \longrightarrow \coprod_{i \in \Lambda} S_i$  der Morphismus des Koprodukts und

$$g:\bigoplus_{i\in\Lambda}S_i\longrightarrow \bigotimes_{i\in\Lambda}S_i$$
 die multilineare Abbildung des Tensorprodukts.

Konstruiere daraus einen Morphismus  $\psi'$  und eine multilineare Abbildung g':

$$\psi': \mathcal{B} \longrightarrow \bigotimes_{i \in \Lambda} S_i, \text{ mit } \psi'_{S_i}: S_i \longrightarrow \bigotimes_{i \in \Lambda} S_i, s_i \longmapsto g(1,..,1,s_i,1,..,1) \text{ für } i \in \Lambda$$
$$g': \bigoplus_{i \in \Lambda} S_i \longrightarrow \coprod_{i \in \Lambda} S_1, s \longmapsto \prod_{i \in \{i \in \Lambda \mid s_i \neq 0\}} \psi_i(s_i)$$

Somit liefern uns die universellen Eigenschaften folgende zwei R-Algebra-Homomorphismen:



Wende nun die Universelle Eigenschaft von  $\psi$  auf  $\psi$  selbst an und erhalte  $id_{\coprod_{i\in\Lambda}S_i}=\phi\circ\varphi$ . Analog erhalte auch durch die universelle Eigenschschaft des Tensorpruduktes  $id_{\bigotimes_i S_i}=\varphi\circ\phi$ .



Damit haben wir Isomorphismen zwischen  $\coprod_{i \in \Lambda} S_i$  und  $\bigotimes_i S_i$  gefunden. Da das Koprodukt  $\coprod_{i \in \Lambda} S_i = \varinjlim_{i \in \Lambda} \mathcal{B}$  bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist (lemma 2), definiere dies ab jetzt als  $\bigotimes_{i \in \Lambda} S_i$ .

<u>Zu 2.</u>: Zeige, dass  $q: S_2 \longrightarrow S_2/Q$  die in bemerkung 5 eingeführten Eigenschaften des Differenzkokern's besitzt:

$$g \circ f = g \circ g$$
 gilt, da  $kern(g) = Q = \{f(x) - g(x) \mid x \in C_2\}.$ 

Sei nun ein R-Algabrahomomorphismus  $q': S_2 \longrightarrow T'$  mit  $q' \circ f = q' \circ g$  gegeben. Somit gilt  $q' \circ (f-g) = 0$ , wodurch Q ein Untermodul von Q' := kern(q') ist. Mit dem Isomorphiesatz für R-Algebren erhalten wir:

$$S_2/Q' \simeq (S_2/Q)/(Q'/Q).$$

Somit ist  $q': S_2 \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q)$ ,  $y \longmapsto [y]'$  eine isomorphe Darstellung von  $q': S_2 \longrightarrow T'$ .

$$\Rightarrow \exists ! \varphi : S_2/Q \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q), [y] \longmapsto [y]' \ mit \ (\varphi \circ q) = q'.$$

Also ist  $S_2/Q$  zusammen mit  $q: S_2 \longrightarrow S_2/Q$  der bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmte Differenzkokern von f und g.

Damit haben wir gezeigt, dass Koprodukte beliebiger Mengen von R-Algebren und Differenzkokerne von je zwei R-Algebrenhomomorphismus existieren. Nach theorem 6 existieren somit in der Kategorie der R-Algebren Kolimiten beliebiger Diagramme.

#### R-Modul-Kolimiten

Proposition 10. [Proposition A6.2 David Eisenbud 1994]

In der Kategorie der R-Moduln existieren Kolimiten beliebiger Diagramme, wobei gilt:

- 1. Das Koprodukt einer Familie von R Moduln  $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$  entspricht deren direkter Summe  $\bigoplus_{i\in\Lambda} M_i$ .
- 2. Der Differenzenkokern zweier R-Modulhomomorphismen  $f, g: M_1 \longrightarrow M_2$  entspricht dem Homomorphismus  $q: M_2 \longrightarrow M_2/Q$ ,  $y \longmapsto [y]$ , wobei  $Q := \{f(x) g(x) \mid x \in M_1\}$  das Bild der Differenz von f und g ist.

Beweis.

<u>Zu 1.</u>: Sei  $\mathcal{B} = \{M_i\}_{i \in \Lambda}$  die Unterkategorie der R-Moduln, welche  $\{M_i\}_{i \in \Lambda}$  zusammen mit den Identitätsabbildungen enthält. Betrachte als Morphismus  $\psi$  die jeweilige Einbettung von  $M_i$  in  $\bigoplus_{i \in \Lambda} M_i$ :

$$\psi: \mathcal{B} \longrightarrow \bigoplus_{i \in \Lambda} M_i \text{ mit } \psi_{M_i}: M_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in \Lambda} M_i, m_i \longmapsto (0, \dots, 0, m_i, 0, \dots, 0) \text{ für } i \in \Lambda$$

Somit lässt sich jedes  $(m_1, \dots m_n) \in \bigoplus_{i \in \Lambda} M_i$  (im Fall von  $|\lambda| = \infty$  siehe bemerkung 7) eindeutig durch die Elemente  $m_i \in M_i$  (für  $i \in \{i, \dots, n\}$ ) darstellen:

$$(m_1, \cdots, m_n) = \sum_{i=1}^n \psi_{M_i}(m_i)$$

Damit erfüllt  $\psi$  die universelle Eigenschaft von  $\lim_{\longrightarrow} \mathcal{B}$ , denn sei  $\psi': \mathcal{B} \longrightarrow M'$  ein bieliebiger Morphismus, so existiert genau ein R-Modulhomomorphismus:

Also ist  $\bigoplus_{i\in\Lambda} M_i$  zusammen mit den Einbettungen  $\psi_{M_i}: M_i \hookrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda} M_i$  das bis auf eine eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmte Koprodukt von  $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$ . 2. ist Analog zu proposition 9

Damit haben wir gezeigt, dass Koprodukte beliebiger Mengen von R-Moduln und Differenzkokerne von je zwei R-Modulhomomorphismen existieren. Nach theorem 6 existieren somit in der Kategorie der R-Moduln Kolimiten beliebiger Diagramme.

## 1.2 Darstellung von Lokalisierung als Kolimes

Lokalisierung von Algebren als Kolimes [vlg. Aufgabe A6.7 David Eisenbud 1994]

**Lemma 11.** Sei S eine R-Algebra und  $U\subseteq S$  multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$S[U^{-1}] = \lim_{\longrightarrow} \mathcal{B}$$

Wobei  $\mathcal{B}$  aus den Objekten  $\{S[t^{-1}]|t \in U\}$  und den Morphismen  $S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}], (\frac{s}{t^n})_t \longmapsto (\frac{st'^n}{(tt')^n})_{(tt')} \ \forall t, t' \in U$  besteht.

Beweis. Sei  $\psi: \mathcal{B} \longrightarrow A$  der Kolimes von  $\mathcal{B}$ . Zeige  $S[U^{-1}] \simeq A$ , definiere dazu:

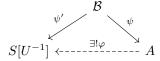
$$\psi': \mathcal{B} \longrightarrow S[U^{-1}]$$

$$\psi'_{S[t^{-1}]}: S[t^{-1}] \longrightarrow S[t^{-1}], \left(\frac{s}{t^n}\right)_t \longmapsto \left(\frac{s}{t^n}\right)_U$$

 $\psi'$  ist ein Morphismus, da für beliebige  $t,t'\in U$  und  $s\in S$  gilt:

$$\left(\frac{s}{t^n}\right)_{\scriptscriptstyle U} = \left(\frac{st'^n}{(tt')^n}\right)_{\scriptscriptstyle U}$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir den eindeutigen Homomorphismus  $\varphi:A\longrightarrow S[U^{-1}].$ 



Für  $\phi: S[U^{-1}] \longrightarrow A$  benötigen wir kleinere Vorüberlegungen. Zunächst können wir jedes Element  $(\frac{s}{u})_{U} \in S[U^{-1}]$  als  $\psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_{t})$  schreiben. Weiter gilt für alle  $s_{1}, s_{2} \in S, t_{1}, t_{2} \in U$ :

$$Sei \ \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_t) = \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_t)$$

$$\Rightarrow \exists u \in U : (s_1t_1 - s_2t_2) \cdot u = 0$$

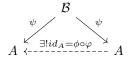
$$\Rightarrow (\frac{s_1u}{t_1u})_{tu} = (\frac{s_2u}{t_2u})_{tu}$$

$$\Rightarrow \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_t) = \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_t)$$

Mit diesem Wissen können wir den R-Algebra-Homomorphismus  $\phi:S[U^{-1}]\longrightarrow A$  definieren:

$$\phi: S[U^{-1}] \longrightarrow A, \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t) \longmapsto \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t)$$

 $\phi\circ\varphi=id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes:



Für  $\varphi \circ \phi \stackrel{!}{=} id_{S[U^{-1}]}$  wähle beliebige  $s \in S, t \in U$ , für diese gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{s}{t})_t)) = \varphi(\psi((\frac{s}{t})_t)) = \psi'((\frac{s}{t})_t)$$

Damit haben wir gezeigt, dass  $\varphi, \phi$  Isomorphismen sind und somit  $A \simeq S[U^{-1}]$  gilt.

Da der Kolimes bis auf Isomorphie eindeutig ist, definiere ab sofort  $S[U^{-1}]$  als den eindeutigen Kolimes von  $\mathcal{B}$ .

# Lokalisierung von Moduln als Kolimes [Beweis von Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]

**Korrolar 12.** Sei M ein S-Modul, wobei S eine R-Algebra ist. Sei weiter  $U \subseteq S$  multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$M[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{C}$$

Wobei C aus den Objekten  $\{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] | t \in U\}$  und folgenden Morphismen besteht:

$$S[U^{-1}] \otimes M[t^{-1}] \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes M[(tt')^{-1}],$$
$$(\frac{s}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{t^{n}})_{t} \longmapsto (\frac{s}{u})_{U} \otimes (\frac{t'^{n}m}{(tt')^{n}})_{t}$$

Auch wenn sich lemma 11 hier nicht direkt anwenden lässt, so können wir doch im Beweis gleich vorgehen.

Beweis. Schließe zunächst den trivialen Fall  $0 \in U$  aus.

Sei  $\psi: \mathcal{C} \longrightarrow A$  der Colimes von  $\mathcal{C}$ . Zeige  $S[U^{-1}] \simeq A$ , definiere dazu folgenden Morphismus:

$$\psi: \mathcal{C} \longrightarrow M[U^{-1}]$$

$$\psi_t: S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \longrightarrow M[U^{-1}], \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{t^n}\right)_t \longmapsto \left(\frac{sm}{ut^n}\right)_U$$

Die Wohldefiniertheit von  $\psi'_t$  für ein beliebiges  $t \in U$  folgt direkt aus der Universellen Eigenschaft des Tensorprodukt's. Denn für die bilineare Abbildung  $f: S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \longrightarrow M[t^{-1}]$ ,  $((\frac{s}{u})_U, (\frac{m}{t^n})_t) \longmapsto (\frac{sm}{ut^n})_U$  gilt:

$$S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \xrightarrow{g} S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}]$$

$$\downarrow \exists ! \psi'_t \\ M[U^{-1}]$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir nun den eindeutigen Homomorphismus  $\varphi: A \longrightarrow M[U^{-1}]$ .

$$M[U^{-1}] \leftarrow A$$

Für  $\phi: M[U^{-1}] \longrightarrow A$  benötigen wir kleinere Vorüberlegungen. Zunächst können wir iedes Element  $(\frac{m}{2}) \in M[U^{-1}]$  als  $\psi((\frac{1}{2}))$ 

Zunächst können wir jedes Element  $(\frac{m}{u})_{U} \in M[U^{-1}]$  als  $\psi((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t})$  schreiben. Wobei mit  $\psi$  gemeint ist, dass wir ein beliebiges  $t \in U$  wählen und dann  $\psi_{t}$  betrachten. Diese Verallgemeinerung ist möglich, da für beliebige  $t_{1}, t_{2}, u \in U$  und  $m \in M$  gilt:

$$\psi_{t_1}((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_{t_1}) = (\frac{m}{u})_U = \psi_{t_2}((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_{t_2})$$

Definiere nun mit diesem Wissen folgenden Homomorphismus:

$$\phi: M[U^{-1}] \longrightarrow A, \ \psi((\frac{1}{u})_{U} \otimes t) \longmapsto \psi'((\frac{1}{u})_{U} \otimes t)$$

 $\phi \circ \varphi = id_A$  ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes. Für  $\varphi \circ \phi \stackrel{!}{=} id_{M[U^{-1}]}$  wähle  $(\frac{m}{u})_U \in M[U^{-1}]$  beliebig, für dieses gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t}))$$

$$= \varphi(\psi((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t}))$$

$$= \psi'((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t})$$

Damit haben wir  $A\simeq M[U^{-1}]$  gezeigt, definiere also ab sofort  $M[U^{-1}]$  als den eindeutigen Kolimes von  $\mathcal C.$