

Cotangent Sequenz [Proposition 16.2 Kommutativ Algebra with a view Towards Algebraic Geometrie [David Eisenbud 1994]]

Proposition 1. Seien $\alpha : R \longrightarrow S$ und $\beta : S \longrightarrow T$ zwei Ringhomomorphismen. Dann existiert folgende Exakte Sequenz:

$$T \otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{t \otimes d_S(s) \mapsto t(d_T \circ \beta)(s)} \Omega_{T/R} \xrightarrow{d_T(t) \mapsto d_T(t)} \Omega_{T/S} \longrightarrow 0$$

Im genauen gilt für die Differenzialräume von T über R und S :

$$\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R} / T \langle (d_T \circ \beta)(S) \rangle.$$

Differenzial ist Ableitung [Eigene Überlegung]

Beispiel 2. Sei k ein Körper, somit entspricht $d_{k[x]} : k[x] \longrightarrow \Omega_{k[x]/k}$, $f \longmapsto f' d_{k[x]}(x)$ der analytischen Ableitung.

Teste dies an $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$d(f(x)) = a \cdot d(x^2) + b \cdot d(x) = (2ax + b)d(x) = f'(x)d(x)$$

Definition der Differenzialbasis [vgl. Chapter 16.5 Kommutativ Algebra with a view Towards Algebraic Geometrie [David Eisenbud 1994]]

Definition 3. Sei $K \supset k$ eine Körpererweiterung. Dann nennen wir eine Teilmenge $\{b_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq T$ eine Differenzialbasis von K über k , falls $\{d_K(b_i)\}_{i \in \Lambda} \subseteq T$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/R}$ über T ist.

Differentialbasis des Quotientenkoerpers von Polynomalgebren [vgl. Chapter 16.5 Kommutativ Algebra with a view Towards Algebraic Geometrie [David Eisenbud 1994]]

Beispiel 4. Sei k ein Körper und $K = k(\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in n Variablen über k .

Dann ist $\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ eine Differenzialbasis von $\Omega_{K/k}$.

Beweis. Sehe $K = k[x_1, \dots, x_n][k[x_1, \dots, x_n]^{-1}]$ als Lokalisierung. Nach LOKALISIERUNG und POLYNOMRINGEN gilt:

$$\begin{aligned} \Omega_{K/k} &\simeq K \otimes \Omega_{k[x_1, \dots, x_n]/k} \\ &\simeq K \otimes \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} k[x_1, \dots, x_n] \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \\ &\simeq K \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \end{aligned}$$

Damit ist $\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ ein Erzeugenden-System von $\Omega_{K/k}$. □

Aufbaulemma Koerperdifferenzial [vgl. Lemma 16.15 Kommutativ Algebra with a view Towards Algebraic Geometrie [David Eisenbud 1994]]

Lemma 5. Sei $S \subset T$ eine seperable und algebraische Körpererweiterung und $R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} = T \otimes_S \Omega_{S/R}$$

Beweis. Wähle $\alpha \in T$ mit $S[\alpha] = T$. Sei weiter $f(x)$ das Minimalpolynom von α . Betrachte dazu die conormale Sequenz von $\pi : S[x] \longrightarrow S[x]/(f) \simeq T$ aus proposition 1:

$$(f)/(f^2) \xrightarrow{1 \otimes d_{S[x]}} T \otimes_{S[x]} \Omega_{S[x]/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

Wende nun Proposition 16.6 auf $\Omega_{S[x]/R}$ an und tensoriere mit T , somit gilt:

$$T \otimes_{S[x]} \Omega_{S[x]/R} \simeq T \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus T \langle d_{S[x]}(x) \rangle$$

Zusammen mit der conormalen Sequenz bedeutet dies:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus T \langle d_{S[x]}(x) \rangle) / (d_{S[x]}(f))$$

Wenn wir $d_{S[x]} : (f) \longrightarrow T \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus T \langle d_{S[x]}(x) \rangle$ wie in ?? betrachten, sehen wir:

$$d_{S[x]}((f)) = J \oplus (f'(\alpha) d_{S[x]}) = J \oplus T \langle d_{S[x]}(x) \rangle$$

, wobei $J \subseteq T \otimes_S \Omega_{S/R}$ ein Ideal ist.

Für die letzte Gleichheit nutze, dass $T \supset S$ seperabel und somit $f'(\alpha) \neq 0$ ist und nach obiger Wahl $T = S[\alpha]$ gilt.

Damit erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} \Omega_{T/R} &\simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) / J \\ &\Rightarrow T \otimes_S \Omega_{S/R} \hookrightarrow \Omega_{T/R} \text{ ist surjektiv.} \end{aligned}$$

Somit muss $J = 0$ gelten und es folgt $T \otimes_S \Omega_{S/R} \simeq \Omega_{T/R}$. □

Differenzialbasis eines Koerpers [vgl. Theorem 16.4 Kommutativ Algebra with a view Towards Algebraic Geometrie [David Eisenbud 1994]]

Theorem 6. Sei $T \supset k$ eine seperabel generierte Körpererweiterung und $B = \{b_i\}_{i \in \Lambda}$. Dann ist B genau dann eine Differenzialbasis von T über k , falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. $\text{char}(k) = 0$ und B ist eine Transzendenzbasis von T über k .
2. $\text{char}(k) = p$ und B ist eine p -Basis von T über k .

Beweis.

1.,,⇐: Sei $B = \{b_i\} \subseteq T$ eine Transzendenzbasis von T über k .
Damit ist die Körpererweiterung $K \supset S := k(B)$ algebraisch und separabel. Mit lemma 5 folgt:

$$\Omega_{T/k} = T \otimes_S \Omega_{S/k}$$

Betrachte $S = K[B][K[B] \setminus 0^{-1}]$ als Lokalisierung und wende **Lokalisierung des Kähler-Differenzials** auf $\Omega_{S/k}$ an, somit gilt:

$$\Omega_{S/k} = S \otimes_{k[B]} \Omega_{k[B]/k}$$

In **Differenzial von Polynomialgebren 1** haben wir gesehen, dass $\Omega_{k[B]/k}$ ein freies Modul über $k[B]$ mit $\{b_i\}_{i \in \Lambda}$ als Basis ist. Dies liefert uns letztendlich die gewünschte Darstellung

$$\Omega_{T/k} = \bigoplus_{\{i \in \Lambda\}} T \langle d_T(b_i) \rangle.$$

1.,,⇒: Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.
Zeige zunächst, dass T algebraisch über $S := k(B)$ ist:

Die COTANGENT SEQUENZ (*proposition 1*) von $k \hookrightarrow S \hookrightarrow T$ besagt $\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/k}/T \langle d_T(S) \rangle$ und nach Voraussetzung gilt $\Omega_{T/k} = T \langle d_T(B) \rangle$.
 $\Rightarrow \Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/k}/T \langle d_T(S) \rangle = \Omega_{T/k}/T \langle d_T(B) \rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$

Da, wie wir in „⇐₁“ gezeigt haben, jede Transzendenzbasis B' von T über S auch eine Differenzialbasis von $\Omega_{T/S} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Da dies sonst der Existenz von Transzendenzbasen (*PROPOSITION*) widersprechen würde, muss somit T algebraisch über S sein.

Zeige noch, dass B auch algebraisch unabhängig über S ist:
Sei dazu Γ eine minimale Teilmenge von Λ , für welche T noch algebraisch über $k(\{b_i\}_{i \in \Gamma})$ ist. Für diese ist $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ algebraisch unabhängig über K . Damit ist nach „⇐₁“ $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von T über k . Also muss schon $\Gamma = \Lambda$ gegolten haben und B ist eine Transzendenzbasis von T über k .

2.,,⇐: Sei B eine p-Basis von T über k .
Somit wird nach DEFINITION-PROPOSITION T von B als Algebra über $(k * K^p)$ und $\Omega_{T/(k * K^p)}$ von $d_T(B)$ als Vektorraum über T (*PROPOSITION*) erzeugt. Zeige also $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p * k)}$:
Die Cotangent Sequenz (*proposition 1*) von $K \hookrightarrow (k * K^p) \hookrightarrow T$ besagt:

$$\Omega_{T/(T^p * k)} \simeq \Omega_{T/k}/d_T(T^p * k)$$

Für beliege $t^p \in T^p$ gilt $d_T(t^p) = pt^{p-1}d_T(t) = 0$, da $\text{char}(T) = p$.
 $\Rightarrow d_T(T^p * k) = d_T(k(T^p)) = 0$

Damit gilt wie gefordert $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p * k)}$.

2. „ \Rightarrow “: Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.
 Zeige zunächst, dass T algebraisch über $S := k(B)$ ist:

Die COTANGENT SEQUENZ (proposition 1) von $k \hookrightarrow S \hookrightarrow T$ besagt
 $\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(S) \rangle$ und nach Voraussetzung gilt $\Omega_{T/k} = T\langle d_T(B) \rangle$.
 $\Rightarrow \Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(S) \rangle = \Omega_{T/k}/T\langle d_T(B) \rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$

Da, wie wir in „ \Leftarrow “ gezeigt haben, jede p -Basis B' von T über S auch eine Differenzialbasis von $\Omega_{T/S} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Somit muss schon $T = k(S)$ gelten.

Zeige noch, dass B auch minimal als Erzeugendensystem von T als Algebra über k ist:

Sei dazu Γ die minimale Teilmenge von Λ , für welche T noch von $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ als Algebra über k erzeugt wird. Dann ist $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ eine p -Basis von T über k . Somit ist nach „ \Leftarrow “ $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von T über k . Es muss also schon $\Gamma = \Lambda$ gegolten haben und B ist eine p -Basis von T über k .

□