# Kapitel 1

# Final countdown

### Lokalisierung von Algebren als Kolimes

**Proposition 1.** *[vlg. Aufgabe A6.7 David Eisenbud 1994]*
*Sei $S$ eine $R-$ Algebra und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$S[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{B}$$

*Wobei $\mathcal{B}$ aus den Objekten $\{S[t^{-1}] | t \in U\}$ und den Morphismen $S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}], (\frac{s}{t^n})_t \longmapsto (\frac{st'^n}{(tt')^n})_{(tt')}$ (für $t, t' \in U$) besteht.*

**Korrolar 2.** *Sei $S$ eine R-Algebra und $T := S[x_1, ..., x_n]$ eine Polynomalgebra über S. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1,...,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

*Beweis.* Betrachte $T$ als Tensorprodukt über R-Algebren und wende anschließend **??** an:

$$T \simeq S \otimes_R R[x_1, ..., x_n]$$
$$\Rightarrow \Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus (T \otimes_{R[x_1,...,x_n]} \Omega_{R[x_1,...,x_n]/R})$$

Zuletzt wende den soeben gezeigten **??** an und nutze schließlich $R[x_1, ..., x_n] \subseteq T$ um das Tensorprodukt zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} & T \otimes_{R[x_1,...,x_n]} \Omega_{R[x_1,...,x_n]/R} \\ \simeq\ & T \otimes_{R[x_1,...,x_n]} \bigoplus_{i \in \{1,...,n\}} R[x_1, ..., x_n]\langle d_{R[x_i]}(x_i)\rangle \\ \simeq\ & \bigoplus_{i \in \{1,...,n\}} T\langle d_R(x_i)\rangle \end{aligned}$$

□

## Differential des Kolimes

**Theorem 3.** *[Theorem 16.8 David Eisenbud 1994]*
*Sei $\mathcal{B} \hookrightarrow (R-Algebren)$ ein Diagramm. Nach* **??** *existiert dessen Kolimes $T := \varinjlim \mathcal{B}$. Für den Differentialraum von $T$ über $R$ gilt:*

$$\varinjlim \mathcal{F} = \Omega_{T/R}$$

*Wobei der Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow T-Module$ folgendermaßen definiert ist:*

$$\mathcal{F} : Obj_{\mathcal{B}} \longrightarrow Obj_{(T-Module)}\,,\; S \longmapsto T \otimes_S \Omega_{S/R}$$
$$\mathcal{F} : Morp_{\mathcal{B}} \longrightarrow Morph_{(T-Module)}\,,\; \varphi \longmapsto D\varphi$$
$$\mathcal{F} : (\varphi : S_1 \longrightarrow S_2) \longmapsto (D\varphi : \Omega_{S_1/R} \longrightarrow \Omega_{S_2/R}\,,\; d_{S_1}(s_1) \longmapsto (d_{S_2} \circ \varphi)(s_1))$$

## Differenzial der Lokalisierung *[vlg. Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]*

**Theorem 4.** *Sei $S$ eine $R-Algebra$ und $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$\Omega_{S[U^{-1}]/R} \simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R},\ \textit{Wobei:}$$
$$d_{S[U^{-1}]}((\frac{1}{u})_U) \longmapsto -(\frac{1}{u^2})_U \otimes d_S(u)$$

*Beweis.* Wir wollen theorem 3 auf $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$ aus proposition 1 anwenden.
Zeige also zunächsten den einfacheren Fall $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ für ein beliebiges $t \in U$:

Nutze hierfür die Isomorphe Darstellung $S[t^{-1}] \simeq S[x]/(tx-1)$, sowie die Isomorphie $\Omega_{S[x]/R} \simeq S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x)$ aus korrolar 2
Daraus erhalten wir folgende Isomorphismen:

$$\alpha : S[t^{-1}] \longrightarrow S[x]/(tx-1)$$
$$\beta : S[x]/(tx-1) \longrightarrow S[t^{-1}]$$
$$\gamma : \Omega_{S[x]/R} \longrightarrow S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}(x)$$

Nutze diese nun, um $\Omega_{S[t^{-1}]/R}$ isomorph zu $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ umzuformen:

$$\begin{array}{ccc}
\Omega_{S[t^{-1}]/R} & & d_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t) \\
\big\downarrow D\alpha & & \big\downarrow D\alpha \\
\Omega_{S[x]/R}/d_{S[x]}(tx-1) & & [d_{S[x]}(sx)] = [xd_{S[x]}(s) + sd_{S[x]}(x)] \\
\big\downarrow \gamma & & \big\downarrow \gamma \\
(S[x] \otimes_S \Omega_{S/R} \oplus S[x]d_{S[x]}x)/((tx-1)d_{S[x]}(tx-1)) & & [x \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \\
\big\downarrow \beta & & \big\downarrow \beta \\
(S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus S[t^{-1}]d_{S[x]}(x)/d_{S[x]}(tx-1) =: M & & [(\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \\
\big\downarrow f & & \big\downarrow f \\
S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} & & ((\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s)) - ((\frac{s}{t^2})_t \otimes d_S(t))
\end{array}$$

Die ersten drei Schritte ergeben sich aus den oben angegeben Isomorphismen.
Für den letzten Schritt definiere:

$$f : M \longrightarrow S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}\,,\ [(\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s), sd_{S[x]}(x)] \longmapsto ((\frac{1}{t})_t \otimes d_S(s)) - ((\frac{s}{t^2})_t \otimes d_S(t))$$

Damit $f$ ein Isomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass $S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ ein eindeutiges Repräsentantensystem von $M$ ist.
Sei dazu $[m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]$ ein beliebiger Erzeuger von $M$. Somit gilt:

$$\begin{gathered}
d_{S[x]}(tx-1) = td_{S[x]}(x) + \beta(x)d_{S[x]}(s) \\
\Rightarrow [0, d_{S[x]}(x)] = [-(\frac{1}{t^2})_t d_S(t), 0] \\
\Rightarrow [m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)] = [m_1 - (\frac{s}{t^{n+2}})_t d_S(t), 0] = [f([m_1, (\frac{s}{t^n})_t d_{S[x]}(x)]), 0]
\end{gathered}$$

f ist also wie vermutet ein Isomorphismus und aus obigen Umformungen folgt $\Omega_{S[t^{-1}]/R} \simeq S[t^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} = \Omega_{S/R}[t^{-1}]$.
Definiere für beliebige $t \in U$ folgenden Isomorphismus:

$$f \circ \beta \circ \gamma \circ D\alpha =: \delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}]\,,\ d_{S[t^{-1}]}((\frac{1}{t})_t) \longmapsto -(\frac{d_S(t)}{t^2})_t$$

Zeige nun den Allgemeinen Fall $\Omega_{S[U^{-1}]/R} \simeq S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$:
Wähle $\mathcal{B} = \{S[t^{-1}] | t \in U\}$ wie in proposition 1, sodass $\varinjlim \mathcal{B} = S[U^{-1}]$ gilt.
Mit THEOREM16.8 folgt somit:

$$\begin{gathered}
\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \varinjlim \mathcal{F} \text{ mit:} \\
\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow (S[U^{-1}] - Module)\,,\ S[t^{-1}] \longmapsto S[U^{-1}] \otimes \Omega_{S[t^{-1}]/R} \\
(\varphi : S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}]) \\
\longmapsto (1 \otimes D\varphi : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}))
\end{gathered}$$

Zur Vereinfachung der Morphismen in $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ definiere folgenden Isomorphismus:

$$\begin{aligned} g : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) &\longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R} \\ (\frac{s}{u})_{U} \otimes ((\frac{s'}{t})_{t} \otimes d_{S[tt'^{-1}]}(x)) &\longmapsto (\frac{s}{u})_{U} \otimes \varphi((\frac{s'}{t})_{t}) d_{S[tt'^{-1}]}(x) \end{aligned}$$

Als letzten Schritt wollen wir **??** anwenden. Nutze dazu $\delta_t : \Omega_{S[t^{-1}]/R} \longrightarrow \Omega_{S/R}[t^{-1}]$ um den zu $\mathcal{F}$ isomorphen Funktor $\mathcal{F}' := \delta \circ \mathcal{F}$ zu erhalten. Um ein genaueres Bild von $\mathcal{F}'$ zu erlangen, betrachte folgendes Kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
S[t^{-1}] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dd, "\mathcal{F}"] & S[tt'^{-1}] \arrow[d, "\mathcal{F}"] \\
 & S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} (S[t^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R}) \arrow[d, "g"] \\
S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S[t^{-1}]/R} \arrow[ur, "1\otimes D\varphi"] \arrow[d, "\delta_t"] & S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S[tt'^{-1}]/R} \arrow[d, "\delta_{tt'}"] \\
S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] \arrow[r, "1\otimes\varphi"] & S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S/R}[tt'^{-1}]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\frac{s}{t})_{t} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "d_{S[t^{-1}]}"] & (\frac{st'}{tt'})_{tt'} \arrow[d, "d_{S[tt'^{-1}]}"] \\
1 \otimes ((\frac{1}{t})_{t} d_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{1})_{t}) + (\frac{s}{1})_{t} d_{S[t^{-1}]}((\frac{1}{t})_{t})) \arrow[r, "g\circ(1\otimes D\varphi)"] \arrow[d, "\delta_t"] & 1 \otimes ((\frac{1}{tt'})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{st'}{1})_{tt'}) + (\frac{st'}{1})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{1}{tt'})_{tt'})) \arrow[d, "\delta_{tt'}"] \\
1 \otimes ((\frac{d_S(s)}{t})_{t} - (\frac{s d_S(t)}{t^2})_{t}) \arrow[r, "1\otimes\varphi"] & 1 \otimes ((\frac{t' d_S(s)}{tt'})_{tt'} - (\frac{st' d_S(t)}{(tt')^2})_{tt'}) \textbf{(*)}
\end{tikzcd}$$

Dass das Diagramm in dieser Form kommutiert, ergibt sich in fast allen Fällen direkt aus dem Einsetzen in die entsprechenden Homomorphismen. Der einzige Fall, welcher nicht direkt klar ist, ist **(*)**. Rechne diesen also nochmal nach:

$$\begin{aligned}
&\delta_{tt'}(1 \otimes ((\frac{1}{tt'})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{st'}{1})_{tt'}) + (\frac{st'}{1})_{tt'} d_{S[tt'^{-1}]}((\frac{1}{tt'})_{tt'}))) \\
&= 1 \otimes ((\frac{d_S(st')}{tt'})_{tt'} - (\frac{t' s d_S(tt')}{(tt')^2})_{tt'}) \\
&= 1 \otimes ((\frac{t' d_S(s')}{tt'})_{tt'} + (\frac{s d_S(t')}{tt'})_{tt'} - (\frac{tt' d_S(t')}{(tt')^2})_{tt'} - (\frac{t'^2 s d_S(t)}{(tt')^2})_{tt'}) \\
&= 1 \otimes ((\frac{t' d_S(s)}{tt'})_{tt'} - (\frac{t'^2 s d_S(t)}{(tt')^2})_{tt'}) \\
&= (1 \otimes \varphi)(1 \otimes ((\frac{d_S(s)}{t})_{t} - (\frac{s d_S(t)}{t^2})_{t}))
\end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{F}'$ zu $\mathcal{F}$ isomorph und für $\mathcal{C} := \mathcal{F}'(\mathcal{B})$ gilt $\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \varinjlim \mathcal{F}' = \varinjlim \mathcal{C}$ *[vlg. **??**]*. Wobei die Form von $\mathcal{C}$ genau dem Fall aus **??** entspricht:

$$
\begin{gathered}
\mathcal{C} = \{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] | t \in U\} \textit{ mit den Morphismen} \\
1 \otimes \varphi : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} \Omega_{S/R}[t^{-1}] \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes_{S[tt'^{-1}]} \Omega_{S/R}[tt'^{-1}] \\
(\frac{s}{u})_{U} \otimes (\frac{d_S(x)}{t^n})_t \longmapsto (\frac{s}{u})_{U} \otimes (\frac{t'^n d_S(x)}{(tt')^n})_{tt'}
\end{gathered}
$$

Somit folgt $\varinjlim \mathcal{C} = \Omega_{S/R}[U^{-1}]$ und wir haben $\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \Omega_{S/R}[U^{-1}]$ gezeigt. $\square$