Korrolar 1. *Sei M ein S-Modul, wobei eine R-Algebra ist. Sei weiter $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$M[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{C}$$

Wobei $\mathcal{C}$ aus den Objekten $\{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] | t \in U\}$ und folgenden Morphismen besteht:

$$S[U^{-1}] \otimes M[t^{-1}] \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes M[(tt')^{-1}],$$
$$(s,u)_{mod\sim_U} \otimes (m,t^n)_{mod\sim_t} \longmapsto (s,u)_{mod\sim_U} \otimes (t'^n m, t^n t'^n)_{mod\sim_t}$$

Auch wenn sich **??** *sich hier nicht direkt anwenden lässt, so können wir doch im Beweis gleich vorgehen.*

Beweis. Schließe zunächst den trivialen Fall $0 \in U$ aus.
Sei $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow A$ der Colimes von $\mathcal{C}$. Zeige $S[U^{-1}] \simeq A$, definiere dazu folgenden Morphismus :

$$\psi : \mathcal{C} \longrightarrow M[U^{-1}]$$
$$\psi_t : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \longrightarrow M[U^{-1}]\,,\ (s,u)_{mod\sim_U} \otimes (m,t^n)_{mod\sim_t} \longmapsto (sm, ut^n)_{mod\sim_U}$$

Die Wohldefiniertheit von ψ_t für ein beliebiges $t \in U$ folgt direkt aus der Universellen Eigenschaft des Tensortrodukt's. Denn für die bilineare Abbildung
$f : S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \longrightarrow M[t^{-1}]\,,\ ((s,u)_{mod\sim_U}, (m,t^n)_{mod\sim_t}) \longmapsto (sm, ut^n)_{mod\sim_U}$
gilt:

$$\begin{tikzcd}
S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \arrow[d, dashed, "\exists!\psi_t"] \\
 & M[U^{-1}]
\end{tikzcd}$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir nun den eindeutigen Homomorphismus $\varphi : A \longrightarrow M[U^{-1}]$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C} \arrow[dl, "\psi'"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
M[U^{-1}] & & A \arrow[ll, dashed, "\exists!\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Für $\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow A$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen.
Zunächst können wir jedes Element $(m,u)_{mod\sim_\in} M[U^{-1}]$ als $\psi((1,u)_{mod\sim_U} \otimes (m,1)_{mod\sim})$schreiben.
Wobei mit ψ gemeint ist, dass wir ein beliebiges $t \in U$ wählen und dann ψ_t betrachten. Diese Verallgemeinerung ist möglich, da für beliebige $t, t', u \in U$ und $m \in M$ gilt:

$$\psi_t((1,u)_{mod\sim_U} \otimes (m,1)_{mod\sim_t}) = (m,u)_{mod\sim_U} = \psi_{t'}((1,u)_{mod\sim_U} \otimes (m,1)_{mod\sim_{t'}})$$

Definiere nun mit diesem Wissen folgenden Homomorphismus:

$$\phi : M[U^{-1}] \longrightarrow A\,,\; \psi((1,u)_{mod\sim_U} \otimes t) \longmapsto \psi'((1,u)_{mod\sim_U} \otimes t)$$

$\phi \circ \varphi = id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes. Für $\varphi \circ \phi \overset{!}{=} id_{M[U^{-1}]}$ wähle $(m,u)_{mod\sim_U} \in M[U^{-1}]$ beliebig, für dieses gilt:

$$\begin{aligned}
&(\varphi \circ \phi)(\psi'((1,u)_{mod\sim_U} \otimes (m,1)_{mod\sim}))\\
&= \varphi(\psi((1,u)_{mod\sim_U} \otimes (m,1)_{mod\sim}))\\
&= \psi'((1,u)_{mod\sim_U} \otimes (m,1)_{mod\sim})
\end{aligned}$$

Damit haben wir $A \simeq M[U^{-1}]$ gezeigt, definiere also ab sofort $M[U^{-1}]$ als den eindeutigen Kolimes von $\mathcal{C}$. $\square$