## Cotangent Sequenz

**Proposition 1.** ***(Relativ Cotangent Sequenz)*** *[vgl. Proposition 16.2 David Eisenbud 1994]*
*Seien $\alpha : R \longrightarrow S$ und $\beta : S \longrightarrow T$ zwei Ringhomomorphismen. Dann existiert folgende exakte Sequenz:*

$$T \otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{t \otimes d_S(s) \mapsto t(d_{T_R} \circ \beta)(s)} \Omega_{T/R} \xrightarrow{d_{T_R}(t) \mapsto d_{T_S}(t)} \Omega_{T/S} \longrightarrow 0$$

*Im Besonderen gilt für die Differenzialräume von $T$ über $R$ und $S$:*

$$\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R}/T\langle (d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle$$

*Beweis.* Durch $st := \beta(S) \cdot t$ und $rt := (\beta \circ \alpha)(r) \cdot t$ können wir $T$ als $S$- bzw. $R$-Algebra betrachten.
Zeige zunächst, dass $g : \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/S}$ , $d_{T_R}(t) \longmapsto d_{T_S}(t)$ surjektiv ist:

> $d_{T_S}$ ist $R$ - Linear, da $R$ durch $(\beta \circ \alpha)$ auf $T$ wirkt, es lässt sich also die universelle Eigenschaft von $d_{T_R}$ auf $d_{T_S}$ anwenden:
>
> $$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "d_{T_R}"] \arrow[dr, "d_{T_S}"'] & \Omega_{T/R} \arrow[d, dashed, "\exists! g"] \\ & \Omega_{T/S} \end{tikzcd}$$
>
> Dies zeigt, dass $g : \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/S}$ , $d_{T_R}(t) \longmapsto d_{T_S}(t)$ surjektiv ist.

Zeige nun, dass $\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R}/T\langle (d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle$ gilt:

> Definiere zunächst folgende $T$-lineare Ableitung:
>
> $$e : T \longrightarrow \Omega_{T/R}/T\langle (d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle \, , \, t \longmapsto [d_{T_R}(t)]_{T\langle (d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle}$$
>
> Wir sehen, dass $e$ auch $S$-linear ist:
>
> Seien dazu $s \in S$ und $t \in T$ beliebig, somit gilt:
>
> $$e(st) = [d_{T_R}(st)]_{T\langle (d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle}$$
> $$= [\beta(s) d_{T_R}(t)]_{T\langle (d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle} + [t d_T(\beta(s))]_{T\langle (d_T \circ \beta)(S)\rangle}$$
> $$= [\beta(s) d_T(t)]_{T\langle (d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle} + 0 = se(t)$$
>
> Dies bedeutet, dass wir die universelle Eigenschaft von $d_{T_S}$ anwenden können:
>
> $$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "d_{T_S}"] \arrow[dr, "e"'] & \Omega_{T/S} \arrow[d, dashed, "\exists! \varphi"] \\ & \Omega_{T/R}/T\Omega_{S/R} \end{tikzcd}$$

Dadurch erhalten wir $\varphi : \Omega_{T/S} \longrightarrow \Omega_{T/R}/T\Omega_{S/R}$.
Für die Umkehrfunktion $\phi$ nutze $g : \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/S}$ , $d_{T_R}(t) \longmapsto d_{T_S}(t)$ von Beginn des Beweises:

$$\text{Für alle } s \in S \text{ gilt } d_{T_S}(s) = 0.$$
$$\text{Somit gilt } T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle \subseteq kern(g).$$
$$\text{Also ist die Umkehrfunktion } \phi \text{ von } \varphi \text{ wohldefiniert:}$$
$$\phi : \Omega_{T/R}/T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle \longrightarrow \Omega_{T/S} \text{ , } [d_{T_R}(t)]_{T\langle(d_{T_R}\circ\beta)(S)\rangle} \longmapsto d_{T_S}(t).$$

Damit gilt $\Omega_{T/S} \simeq \Omega_{T/R}/T\langle(d_{T_R} \circ \beta)(S)\rangle$.
Auf unsere Sequenz bezogen bedeutet dies:

$$\text{Es gilt } im(\Omega_{T/R} \to \Omega_{T/S}) \simeq \Omega_{T/R}/im(T \otimes_S \Omega_{S/R} \to \Omega_{T/R}).$$
$$\text{Somit gilt auch } im(T \otimes_S \Omega_{S/R} \to \Omega_{T/R}) = kern(\Omega_{T/R} \to \Omega_{T/S}).$$

Damit haben wir gezeigt, dass die **Relative Cotangent Sequenz** exakt ist.

□

# Kapitel 1

# Körpererweiterungen

## 1.1 Differential von Körpererweiterungen

**Definition der Differenzialbasis** *[vlg. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]*

**Definition 1.** *Sei $L/k$ eine Körpererweiterung. Dann nennen wir eine Teilmenge $\{b_i\}_{i\in\Lambda} \subseteq L$ eine Differenzialbasis von $L$ über $k$, falls $\{d_L(b_i)\}_{i\in\Lambda}$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{L/k}$ über $L$ ist.*

**Differential von rationalen Funktionen 1** *[vlg. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]*

**Beispiel 2.** *Sei $k$ ein Körper und $L = k(\{x_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in $n$ Varablen über $k$.*
*Dann gilt:*

$$\Omega_{L/k} \simeq L\langle d_{k[x_1,\dots x_n]}(x_i)\rangle$$

*Insbesondere ist $\{x_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ eine Differenzialbasis von $\Omega_{L/k}$.*

*Beweis.* Betrachte $L = k[x_1,\dots,x_n][k[x_1,\dots,x_n]^{-1}]$ als Lokalisierung um **??** anwenden zu können. Anschließend forme noch $\Omega_{k[x_1,\dots,x_n]/k}$ mithilfe von **??** isomorph um:

$$\begin{aligned} \Omega_{L/k} &\simeq L \otimes \Omega_{k[x_1,\dots,x_n]/k} \\ &\simeq L \otimes \oplus_{i\in\{1,\dots,n\}} k[x_1,\dots,x_n]\langle d_{k[x_1,\dots x_n]}(x_i)\rangle \\ &\simeq L\langle d_{k[x_1,\dots x_n]}(x_i)\rangle \end{aligned}$$

Damit ist $\{d_L(x_i)\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{L/k}$. □

**Differential von rationalen Funktionen 2** *[Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]*

**Korrolar 3.** *Sei $k$ ein Körper und $L \supset k$ eine Körpererweiterung und $T = L(\{x_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in $n$ Varablen über $L$. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i\in\{1,\dots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

*Beweis.* Betrachten $T$ als Lokalisierung von $L[x_1,\dots,x_n]$ und gehen dann analog zu beispiel 2 vor:

$$\Omega_{T/k} \simeq T \otimes_{L[x_1,\dots,x_n]} \Omega_{L[x_1,\dots,x_n]/k} \text{ (??)}$$
$$\Omega_{L[x_1,\dots,x_n]/R} \simeq (L[x_1,\dots,x_n] \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i\in\{1,\dots,n\}} L[x_1,\dots,x_n]\langle d_{L[x_1,\dots,x_n]}(x_i)\rangle \text{ (??)}$$
$$\Rightarrow \Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i\in\{1,\dots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

□

## Cotangent Sequenz von Koerpern 1 *[Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]*

**Bemerkung 4.** *Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung und $T = L(x_1,\dots,x_n)$ der Körper der rationalen Funktionen in $n$ Variablen über $L$. Dann ist die COTANGENT SEQUENZ (proposition 1) von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ eine kurze Exakte Sequenz:*

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

*Im Genauen ist $\varphi : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k}\,,\ t \otimes d_L(l) \longmapsto t \cdot d_T(l)$ injektiv.*

*Beweis.* Die Injektivität von $\varphi$ folgt direkt aus der isomorphen Darstellung von $\Omega_{T/k}$, die wir uns in korrolar 3 erarbeitet haben.

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i\in\{1,\dots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

Um sicher zu gehen definiere $\varphi' \simeq \varphi$ und durchlaufe die in korrolar 3 genutzten Isomorphismen noch einmal Schritt für Schritt:

$$\varphi' : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus \bigoplus\nolimits_{i\in\{1,\dots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

$$\begin{tikzcd}
T \otimes_L \Omega_{L/k} \arrow[d, hook] & t \otimes d_L(l) \arrow[d, mapsto] \\
\Omega_{T/k} \arrow[d, hook, two heads, "??"] & t d_T(l) \arrow[d, mapsto] \\
T \otimes_S \Omega_{L[x_1,\ldots,x_n]/k} \arrow[d, hook, two heads, "??"] & t \otimes d_S(l) \arrow[d, mapsto] \\
T \otimes_S ((S \otimes_L \Omega_{L/k}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1,\ldots,n\}} S\langle d_S(x_i)\rangle) \arrow[d, hook, two heads] & t \otimes (d_L(l), 0) \arrow[d, mapsto] \\
(T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1,\ldots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle & (t \otimes d_L(l), 0)
\end{tikzcd}$$

Damit ist $\varphi$ eine injektive Einbettung von $T \otimes_L \Omega_{L/k}$ in $\Omega_{T/k}$. □

**Aufbaulemma Koerperdifferenzial** *[vlg. Lemma 16.15 David Eisenbud 1994]*

**Lemma 5.** *Sei $L \subset T$ eine seperable und algebraische Körpererweiterung und $R \longrightarrow L$ ein Ringhomomorphismus. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/R} = T \otimes_L \Omega_{L/R}$$

*Insbesondere ist in diesem Fall die COTANGENT SEQUENZ (proposition 1) von $R \to L \hookrightarrow T$ eine kurze Exakte Sequenz:*

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \longrightarrow \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

*Beweis.* Wähle $\alpha \in T$ mit $L[\alpha] = T$. Sei weiter f(x) das Minimalpolynom von $\alpha$. Betrachte dazu die conormale Sequenz von $\pi : L[x] \longrightarrow L[x]/(f) \simeq T$ *(**??**)*:

$$(f)/(f^2) \xrightarrow{1 \otimes d_{L[x]}} T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

Wende nun Proposition 16.6 auf $\Omega_{L[x]/R}$ an und tensoriere mit $T$, somit gilt:

$$T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \simeq T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T\langle d_{L[x]}(x)\rangle$$

Zusammen mit der conormalen Sequenz bedeutet dies:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T\langle d_{L[x]}(x)\rangle)/(d_{L[x]}(f))$$

Wenn wir $d_{L[x]} : (f) \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T\langle d_{L[x](x)}\rangle$ wie in **??** betrachten , sehen wir:

$$d_{L[x]}((f)) = J \oplus (f'(\alpha) d_{L[x]}) = J \oplus T\langle d_{S[x]}(x)\rangle$$

,wobei $J \subseteq T \otimes_L \Omega_{L/R}$ ein Ideal ist.

Für die letzte Gleichheit nutze, dass $T \supset L$ seperabel und somit $f'(\alpha) \neq 0$ ist und nach obiger Wahl $T = L[\alpha]$ gilt.
Damit erhalten wir nun:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R})/J$$
$$\Rightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \hookrightarrow \Omega_{T/R} \textit{ ist surjektiv.}$$

Somit muss J $= 0$ gelten und es folgt $T \otimes_L \Omega_{L/R} \simeq \Omega_{T/R}$.
Damit haben wir insbesondere auch gezeigt, dass $T \otimes_L \Omega_{L/R} \to \Omega_{T/R}$ injektiv und somit die COTANGENT SEQUENZ von $R \to L \hookrightarrow T$ eine kurze exakte Sequenz ist. □

**Transzendenzbasis ist Differenzialbasis** *[vlg. Theorem 16.4 David Eisenbud 1994]*

**Theorem 6.** *Sei $T \supset k$ eine seperabel generierte Körpererweiterung und $B = \{b_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq T$. Dann ist $B$ genau dann eine Differenzialbasis von $T$ über $k$, falls eine der folgedenen Bedingungen erfüllt ist:*

1. *char(k) $= 0$ und $B$ ist eine Transzendenzbasis von $T$ über $k$.*
2. *char(k) $= p$ und $B$ ist eine p-Basis von $T$ über $k$.*

*Beweis.*

**1.„⇐“:** Sei $B$ eine Transzendenzbasis von $T$ über $k$.
Damit ist die Körpererweiterung $L := k(B) \supset k$ algebraisch und seperabel. Mit lemma 5 folgt:

$$\Omega_{T/k} = T \otimes_L \Omega_{L/k}$$

Betrachte $L = k[B][k[B] \setminus 0^{-1}]$ als Lokalisierung und wende **??** auf $\Omega_{L/k}$ an, somit gilt:

$$\Omega_{L/k} = L \otimes_{k[B]} \Omega_{k[B]/k}$$

In **??** haben wir gesehen, dass $\Omega_{k[B]/k}$ ein freis Modul über $k[B]$ mit $\{b_i\}_{i\in\Lambda}$ als Basis ist. Dies liefert uns letztendlich die gewünschte Darstellung

$$\Omega_{T/k} = \bigoplus_{\{i \in \Lambda\}} T\langle d_T(b_i)\rangle.$$

**1.„⇒“:** Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.

Zeige zunächst, dass T algebraisch über $L := k(B)$ ist:

Die COTANGENT SEQUENZ *(proposition 1)* von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ besagt $\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(S)\rangle$ und nach Vorraussetzung gilt $\Omega_{T/k} = T\langle d_T(B)\rangle$.

$$\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L)\rangle = \Omega_{T/k}/T\langle d_T(B)\rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$$

Da, wie wir in „$\Leftarrow_{1.}$"gezeigt haben, jede Transzendenzbasis $B'$ von $T$ über $L$ auch eine Differenzialbasis von $\Omega_{T/L} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Somit ist $T$ schon algebraisch über $L$.

Zeige noch, dass $B$ auch algebraisch unabhängig über $L$ ist:
Sei dazu $\Gamma$ eine minimale Teilmenge von $\Lambda$, für welche $T$ noch algebraisch über $k(\{b_i\}_{i\in\Gamma})$ ist. Für diese ist $\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ algebraisch unabhängig über K. Damit ist nach „$\Leftarrow_{1.}$"$\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von $T$ über $k$. Also muss schon $\Gamma = \Lambda$ gegolten haben und $B$ ist eine Transzendenzbasis von $T$ über $k$.

**2.„$\Leftarrow$":** Sei B eine p-Basis von T über k.
Somit wird nach DEFINITION-PROPOSITION $T$ von $B$ als Algebra über $(k * T^p)$ und $\Omega_{T/(k*T^p)}$ von $d_T(B)$ als Vektorraum über $T$ *(PROPOSITION)* erzeugt. Zeige also $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p*k)}$:
Die Cotangent Sequenz *(proposition 1)* von $K \hookrightarrow (k * T^p) \hookrightarrow T$ besagt:

$$\Omega_{T/(T^p*k)} \simeq \Omega_{T/k}/d_T(T^p * k)$$

Für beliege $t^p \in T^p$ gilt $d_T(t^p) = pt^{p-1}d_T(t) = 0$, da $char(T) = p$.

$$\Rightarrow d_T(T^p * k) = d_T(k(T^p)) = 0$$

Damit ist $d_T : T \longrightarrow \Omega_{T/k}$ auch $(T^p*k)$-linear und es gilt $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p*k)}$.

**2.„$\Rightarrow$":** Sei $d_T(B)$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{T/k}$.
Zeige zunächst, dass $T$ von $B$ als Algebra über $k$ erzeugt wird:

Die COTANGENT SEQUENZ (proposition 1) von $k \hookrightarrow L := k(B) \hookrightarrow T$ besagt $\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L)\rangle$ und nach Vorraussetzung gilt $\Omega_{T/k} = T\langle d_T(B)\rangle$.

$$\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L)\rangle = \Omega_{T/k}/T\langle d_T(B)\rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$$

Da, wie wir in „$\Leftarrow_{2.}$"gezeigt haben, jede p-Basis $B'$ von $T$ über $L$ auch eine Differenzialbasis von $\Omega_{T/L} = 0$ ist, gilt für diese $B' = \emptyset$. Somit wird $T$ schon von $B$ als Algebra über $k$ erzeugt.

Zeige noch, dass $B$ auch minimal als Erzeugendensystem von $T$ als Algebra über $k$ ist:
Sei dazu $\Gamma$ die minimale Teilmenge von $\Lambda$, für welche $T$ noch von $\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ als Algebra über $k$ erzeugt wird. Dann ist $\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ eine p-Basis von $T$ über

$k$. Somit ist nach „$\Leftarrow_{2.}$“ $\{b_i\}_{i\in\Gamma}$ ebenfalls eine Differenzialbasis von $T$ über $k$. Es muss also schon $\Gamma = \Lambda$ gegolten haben und $B$ ist eine p-Basis von $T$ über $k$.

$\square$