

# Kapitel 1

## Körpererweiterungen

### 1.1 Einführung in die Körpererweiterungen

**Definition Transzendenzbasis** [vgl. Anhang A1 David Eisenbud 1994] Sei  $L/k$  eine Körpererweiterung. Dann definieren wir:

- Eine endliche Teilmengen  $\{l_1, \dots, l_n\} \subseteq L$  heißt algebraisch unabhängig über  $k$ , falls gilt:

$$\forall P(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n] : P(l_1, \dots, l_n) \neq 0$$

- Eine Teilmenge  $B \subseteq L$  heißt transzendent über  $k$ , falls jede ihrer endlichen Teilmengen  $\{b_1, \dots, b_n\}$  algebraisch unabhängig über  $k$  ist.
- Eine Teilmenge  $B \subseteq L$  ist eine Transzendenzbasis von  $L/k$ , falls sie transzendent über  $k$  und die Körpererweiterung  $L/k(B)$  algebraisch ist.
- Falls eine Transzendenzbasis von  $B$  von  $L/k$  existiert, sodass  $k(B) = L$  gilt, so ist  $L/k$  eine pur transzendente Körpererweiterung.

**pur transzendente Erweiterung** [Eigene Überlegung]

**Bemerkung 1.** Sei  $L/k$  eine pur transzendente Körpererweiterung mit Transzendenzbasis  $B$ . Dann gilt:

$$L \simeq k(\{x_i\}_{i \in B})$$

Insbesondere ist  $\{x_i\}_{i \in B}$  eine Transzendenzbasis der Körpererweiterung der rationalen Funktionen  $k(\{x_i\}_{i \in B})$  über  $k$ .

**Transzendenzbasis ist maximale transzendente Menge** [Lemma 22.1 Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009]

**Lemma 2.** Sei  $L/k$  ein Körpererweiterung und  $B \subseteq L$  eine über  $k$  transzendente Teilmenge. Dann gilt:

$B$  ist genau dann eine Transzendenzbasis von  $L/k$ , wenn  $B$  bezüglich der Inklusion ein maximales Element der Menge aller über  $k$  transzendenten Elemente aus  $L$  ist.

*Beweis.*

„ $\Rightarrow$ “ Sei  $B$  eine Transzendenzbasis über  $k$ . Zeige, dass für ein beliebiges Element  $a \in L \setminus B$  die Menge  $B \cup \{a\} \subseteq L$  nicht transzendent über  $k$  ist:

Da die Körpererweiterung  $L/k(B)$  algebraisch ist existiert  $0 \neq P(x) \in k(B)[x]$  mit  $P(a) = 0$ .

Aus der Definition von  $k(B)$  also für  $|B| = \infty$  geht hervor, dass  $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq B$  existiert, mit  $P(x) \in k(\{b_1, \dots, b_n\})[x]$ .

Wir können ohne weitere Einschränkung annehmen, dass  $P(x) \in k[\{b_1, \dots, b_n\}][x]$  gilt, denn falls dies nicht der Fall sein sollte, wähle  $m \in \mathbb{N}$  groß genug, so dass  $(P(x) \cdot (\prod_i^n b_i)^m) \in k[\{b_1, \dots, b_n\}]$  gilt.

Wähle nun  $P'(x_1, \dots, x_n, x) \in k[x_1, \dots, x_n, x]$  mit  $P'(b_1, \dots, b_n, x) = P(x)$ .

Dies erfüllt  $P'(b_1, \dots, b_n, a) = 0$ .

Folglich ist  $B \cup \{b_1, \dots, b_n, a\}$  algebraisch abhängig und insbesondere  $B \cup \{a\}$  nicht transzendent über  $k$ .

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $B$  bezüglich der Inklusion ein maximales Element der Menge aller über  $k$  transzendenten Elemente aus  $L$ . Zeige für ein beliebiges Element  $a \in L \setminus k(B)$ , dass dieses algebraisch über  $k(B)$  ist:

Nach Voraussetzung existiert eine endliche Teilmenge  $\{b_1, \dots, b_n, a\} \subseteq B \cup \{a\}$ , welche algebraisch abhängig über  $k$  ist.

Also existiert  $P(x_1, \dots, x_{n+1}) \in k[x_1, \dots, x_{n+1}]$  mit  $P(b_1, \dots, b_n, a) = 0$ .

$\Rightarrow$  Für  $P'(x) := P(b_1, \dots, b_n, x) \in k(B)[x]$  gilt  $P'(a) = 0$

Es existiert also ein Polynom  $P'(x) := P(b_1, \dots, b_n, x) \in k(B)[x]$  mit  $P'(a) = 0$  gefunden. Somit ist  $a$  algebraisch über  $k(B)$ .

□

**Transzendenzbasen sind immer gleich lang** [Theorem A1.1 David Eisenbud 1994]

**Proposition 3.** Sei  $L \supset k$  eine Körpererweiterung. Seien weiter  $A, B$  zwei Transzendenzbasen von  $L$  über  $k$ . Dann gilt:

$$|A| = |B|$$

Wir nennen  $|B|$  den Transzendenzgrad von  $L$  über  $k$ .

*Beweis.* Im Fall von  $|A| = |B| = \infty$  sind wir schon fertig, sei also ohne Einschränkung  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  und  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  mit  $\min(m, n) = n < \infty$ . Wir wollen zunächst in  $n$  Schritten die Elemente aus  $B$  durch Elemente aus  $A$  ersetzen und damit zeigen, dass  $\{a_1, \dots, a_n\}$  eine Transzendenzbasis von  $L$  über  $k$  ist:

Für den  $i$ -ten Schritt definiere  $A_i := \{a_1, \dots, a_{i-1}\} \subseteq A$ ,  $B_i := \{b_i, \dots, b_n\} \subseteq B$  und gehe davon aus, dass  $A_i \cup B_i$  eine Transzendenzbasis ist:  
Nach lemma 2 ist  $\{a_i\} \cup A_i \cup B_i = A_{i+1} \cup B_i$  nicht transzendent und somit algebraisch abhängig.

Also existiert  $P \in k[x_1, \dots, x_n]$  mit  $P(a_i, a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, \dots, b_n) = 0$ .

Definiere  $P'(x) := P(a_i, a_1, \dots, a_{i-1}, x, b_{i+1}, \dots, b_n) \in k(A_{i+1} \cup B_{i+1})[x]$ .

Dieses erfüllt  $P'(b_i) = 0$ .

Da  $A_i \subseteq A$  algebraisch unabhängig ist, gilt  $P(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, \dots, x_n) \neq 0$ . Nummeriere also gegebenenfalls  $B$  vor der Bildung von  $P'(x)$  so um, dass auch  $P'(x) \neq 0$  gilt.

Die Existenz eines solchen  $P'(x)$  zeigt uns, dass die Körpererweiterungen  $L \subset k(A_{i+1} \cup B_i) = k(A_{i+1} \cup B_{i+1})(\{b_i\}) \subset k(A_{i+1} \cup B_{i+1})$  algebraisch sind und legt nahe, dass  $A_{i+1} \cup B_{i+1}$  wieder eine Transzendenzbasis ist.

Um dies zu zeigen nehme zunächst an  $A_{i+1} \cup B_{i+1}$  wäre algebraisch abhängig.

Also existiert  $Q \in k[x_1, \dots, x_n]$  mit  $Q(a_1, \dots, a_i, b_{i+1}, \dots, b_n) = 0$ .

Definiere  $Q'(x) := Q(a_1, \dots, a_{i-1}, x, b_{i+1}, b_n) \in k(a_1, \dots, a_{i-1}, b_{i+1}, b_n)[x]$ .

Dieses erfüllt  $Q'(a_i) = 0$ .

Da  $(A_{i+1} \cup B_{i+1}) \setminus \{a_i\} \subseteq A_i \cup B_i$  algebraisch unabhängig ist gilt  $Q'(x) \neq 0$ .

Die Existenz eines solchen  $Q'(x)$  zeigt uns, dass die Körpererweiterung  $L \subset k(A_{i+1} \cup B_{i+1}) \subset k((A_{i+1} \cup B_{i+1}) \setminus \{a_i\}) = k((A_i \cup B_i) \setminus \{b_i\})$  algebraisch ist. Damit ist  $(A_i \cup B_i) \setminus \{b_i\}$  eine Transzendenzbasis, was nach lemma 2 im Widerspruch dazu steht, dass  $A_i \cup B_i$  eine Transzendenzbasis ist.

Folglich ist  $A_{i+1} \cup B_{i+1}$  transzendent und somit eine Transzendenzbasis von  $L$  über  $k$ .

Dieses Verfahren zeigt uns, dass  $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$  eine Transzendenzbasis von  $L$  über  $k$  ist. Nach lemma 2 muss somit  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  und  $m = n$  gelten.  $\square$

**Korrolar 4.** Jede Körpererweiterung  $L \subseteq k$  besitzt eine Transzendenzbasis  $B \subseteq L$ .

**Korrolar 5.** Für jede Körpererweiterung  $L/k$  existiert ein Zwischenkörper  $K \subseteq L$ , sodass  $K/k$  eine pur transzendente und  $L/K$  eine algebraische Körpererweiterung ist.

*Beweis.* Nach korrolar 4 existiert eine Transzendenzbasis  $B$  von  $L/k$ . Nach ?? ist somit  $k(B)/k$  pur Transzendent und  $L/k(B)$  algebraisch.  
Wähle also  $K := k(B)$  □

**Erinnerung:** Eine Algebraische Körpererweiterung  $L \supset k$  heißt seperabel, falls für alle  $\alpha \in L$  das Minimalpolynom  $f(x) \in k[x]$  von  $\alpha$  über  $L[x]$  in Linearfaktoren zerfällt.

**Definition 6.** Sei  $L \supset k$  eine Körpererweiterung. Dann definieren wir:

- $L$  ist seperabel generiert über  $k$ , falls eine Transzendenzbasis  $B$  von  $L$  über  $k$  existiert, sodass  $L/k(B)$  eine seperable Körpererweiterung ist.
- $k$  ist seperabel über  $k$ , falls jeder über  $k$  endlich genierte Teilkörper von  $L$  über  $k$  seperabel generiert ist.

**Definition 7.** Sei  $k$  ein Körper mit charakteristik  $p$  und sei weiter  $L/k$  eine Körpererweiterung. Dann definieren wir:

- Eine endliche Teilmenge  $B \subseteq L$  heißt  $p$ -Basis von  $L$  über  $k$ , falls  $W := \{\prod_{b \in B} b^i \mid i < p\}$  eine Vektorraumbasis von  $K$  über  $k * K^p$  bildet.

## 1.2 Differential von Körpererweiterungen

**Definition der Differenzialbasis** [vgl. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]

**Definition 8.** Sei  $L \supset k$  eine Körpererweiterung. Dann nennen wir eine Teilmenge  $\{b_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq L$  eine Differenzialbasis von  $L$  über  $k$ , falls  $\{d_K(b_i)\}_{i \in \Lambda}$  eine Vektorraumbasis von  $\Omega_{L/R}$  über  $L$  ist.

**Differential von rationalen Funktionen 1** [vgl. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]

**Beispiel 9.** Sei  $k$  ein Körper und  $L = k(\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}})$  der Körper der rationalen Funktionen in  $n$  Variablen über  $k$ .

Dann gilt:

$$\Omega_{L/k} \simeq L \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle$$

Insbesondere ist  $\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  eine Differenzialbasis von  $\Omega_{L/k}$ .

*Beweis.* Betrachte  $L = k[x_1, \dots, x_n][k[x_1, \dots, x_n]^{-1}]$  als Lokalisierung um ?? anwenden zu können. Anschließend forme noch  $\Omega_{k[x_1, \dots, x_n]/k}$  mithilfe von ?? isomorph um:

$$\begin{aligned} \Omega_{L/k} &\simeq L \otimes \Omega_{k[x_1, \dots, x_n]/k} \\ &\simeq L \otimes \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} k[x_1, \dots, x_n] \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \\ &\simeq L \langle d_{k[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \end{aligned}$$

Damit ist  $\{d_L(x_i)\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  eine Vektorraumbasis von  $\Omega_{L/k}$ . □

## Differential von rationalen Funktionen 2 [Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]

**Korrolar 10.** Sei  $k$  ein Körper und  $L \supset k$  eine Körpererweiterung und  $T = L(\{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}})$  der Körper der rationalen Funktionen in  $n$  Variablen über  $L$ . Dann gilt:

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$

*Beweis.* Betrachten  $T$  als Lokalisierung von  $L[x_1, \dots, x_n]$  und gehen dann analog zu Beispiel 9 vor:

$$\begin{aligned} \Omega_{T/k} &\simeq T \otimes_{L[x_1, \dots, x_n]} \Omega_{L[x_1, \dots, x_n]/k} \quad (??) \\ \Omega_{L[x_1, \dots, x_n]/R} &\simeq (L[x_1, \dots, x_n] \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i \in \{1, \dots, n\}} L[x_1, \dots, x_n] \langle d_{L[x_1, \dots, x_n]}(x_i) \rangle \quad (??) \\ &\Rightarrow \Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle \end{aligned}$$

□

## Cotangent Sequenz von Körpern 1 [Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]

**Bemerkung 11.** Sei  $L \supset k$  eine Körpererweiterung und  $T = L(x_1, \dots, x_n)$  der Körper der rationalen Funktionen in  $n$  Variablen über  $L$ . Dann ist die COTANGENT SEQUENZ (??) von  $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$  eine kurze Exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Im Genauen ist  $\varphi : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k}$ ,  $t \otimes d_L(l) \longmapsto t \cdot d_T(l)$  injektiv.

*Beweis.* Die Injektivität von  $\varphi$  folgt direkt aus der isomorphen Darstellung von  $\Omega_{T/k}$ , die wir uns in korollar 10 erarbeitet haben.

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle$$

Um sicher zu gehen definiere  $\varphi' \simeq \varphi$  und durchlaufe die in korollar 10 genutzten Isomorphismen noch einmal Schritt für Schritt:

$$\begin{array}{ccc} \varphi' : T \otimes_L \Omega_{L/k} & \longrightarrow & T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle \\ \\ \begin{array}{c} T \otimes_L \Omega_{L/k} \\ \downarrow \\ \Omega_{T/k} \\ \downarrow \text{??} \\ T \otimes_S \Omega_{L[x_1, \dots, x_n]/k} \\ \downarrow \text{??} \\ T \otimes_S ((S \otimes_L \Omega_{L/k}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} S \langle d_S(x_i) \rangle) \\ \downarrow \\ (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} T \langle d_T(x_i) \rangle \end{array} & & \begin{array}{c} t \otimes d_L(l) \\ \downarrow \\ td_T(l) \\ \downarrow \\ t \otimes d_S(l) \\ \downarrow \\ t \otimes (d_L(l), 0) \\ \downarrow \\ (t \otimes d_L(l), 0) \end{array} \end{array}$$

Damit ist  $\varphi$  eine injektive Einbettung von  $T \otimes_L \Omega_{L/k}$  in  $\Omega_{T/k}$ .  $\square$

**Aufbaulemma Koerperdifferenzial** [vgl. Lemma 16.15 David Eisenbud 1994]

**Lemma 12.** Sei  $L \subset T$  eine seperable und algebraische Körpererweiterung und  $R \longrightarrow L$  ein Ringhomomorphismus. Dann gilt:

$$\Omega_{T/R} = T \otimes_L \Omega_{L/R}$$

Insbesondere ist in diesem Fall die COTANGENT SEQUENZ (??) von  $R \rightarrow L \hookrightarrow T$  eine kurze Exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \longrightarrow \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

*Beweis.* Wähle  $\alpha \in T$  mit  $L[\alpha] = T$ . Sei weiter  $f(x)$  das Minimalpolynom von  $\alpha$ . Betrachte dazu die conormale Sequenz von  $\pi : L[x] \longrightarrow L[x]/(f) \simeq T$  (??):

$$(f)/(f^2) \xrightarrow{1 \otimes d_{L[x]}} T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

Wende nun Proposition 16.6 auf  $\Omega_{L[x]/R}$  an und tensoriere mit  $T$ , somit gilt:

$$T \otimes_{L[x]} \Omega_{L[x]/R} \simeq T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle$$

Zusammen mit der conormalen Sequenz bedeutet dies:

$$\Omega_{T/R} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle) / (d_{L[x]}(f))$$

Wenn wir  $d_{L[x]} : (f) \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \oplus T \langle d_{L[x]}(x) \rangle$  wie in ?? betrachten, sehen wir:

$$d_{L[x]}((f)) = J \oplus (f'(\alpha) d_{L[x]}) = J \oplus T \langle d_{S[x]}(x) \rangle$$

, wobei  $J \subseteq T \otimes_L \Omega_{L/R}$  ein Ideal ist.

Für die letzte Gleichheit nutze, dass  $T \supset L$  separabel und somit  $f'(\alpha) \neq 0$  ist und nach obiger Wahl  $T = L[\alpha]$  gilt.

Damit erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} \Omega_{T/R} &\simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) / J \\ &\Rightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \hookrightarrow \Omega_{T/R} \text{ ist surjektiv.} \end{aligned}$$

Somit muss  $J = 0$  gelten und es folgt  $T \otimes_L \Omega_{L/R} \simeq \Omega_{T/R}$ .

Damit haben wir insbesondere auch gezeigt, dass  $T \otimes_L \Omega_{L/R} \rightarrow \Omega_{T/R}$  injektiv und somit die COTANGENT SEQUENZ von  $R \rightarrow L \hookrightarrow T$  eine kurze exakte Sequenz ist.  $\square$

**Transzendenzbasis ist Differenzialbasis** [vgl. Theorem 16.4 David Eisenbud 1994]

**Theorem 13.** Sei  $T \supset k$  eine separabel generierte Körpererweiterung und  $B = \{b_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq T$ . Dann ist  $B$  genau dann eine Differenzialbasis von  $T$  über  $k$ , falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1.  $\text{char}(k) = 0$  und  $B$  ist eine Transzendenzbasis von  $T$  über  $k$ .
2.  $\text{char}(k) = p$  und  $B$  ist eine  $p$ -Basis von  $T$  über  $k$ .

*Beweis.*

1., „ $\Leftarrow$ “: Sei  $B$  eine Transzendenzbasis von  $T$  über  $k$ .

Damit ist die Körpererweiterung  $L := k(B) \supset k$  algebraisch und separabel.

Mit lemma 12 folgt:

$$\Omega_{T/k} = T \otimes_L \Omega_{L/k}$$

Betrachte  $L = k[B][k[B] \setminus 0^{-1}]$  als Lokalisierung und wende ?? auf  $\Omega_{L/k}$  an, somit gilt:

$$\Omega_{L/k} = L \otimes_{k[B]} \Omega_{k[B]/k}$$

In ?? haben wir gesehen, dass  $\Omega_{k[B]/k}$  ein freies Modul über  $k[B]$  mit  $\{b_i\}_{i \in \Lambda}$  als Basis ist. Dies liefert uns letztendlich die gewünschte Darstellung

$$\Omega_{T/k} = \bigoplus_{\{i \in \Lambda\}} T\langle d_T(b_i) \rangle.$$

1.,,⇒“: Sei  $d_T(B)$  eine Vektorraumbasis von  $\Omega_{T/k}$ .

Zeige zunächst, dass  $T$  algebraisch über  $L := k(B)$  ist:

Die COTANGENT SEQUENZ (??) von  $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$  besagt  
 $\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(S) \rangle$  und nach Voraussetzung gilt  $\Omega_{T/k} = T\langle d_T(B) \rangle$ .  
 $\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L) \rangle = \Omega_{T/k}/T\langle d_T(B) \rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$

Da, wie wir in „ $\Leftarrow_1$ “ gezeigt haben, jede Transzendenzbasis  $B'$  von  $T$  über  $L$  auch eine Differenzialbasis von  $\Omega_{T/L} = 0$  ist, gilt für diese  $B' = \emptyset$ . Somit ist  $T$  schon algebraisch über  $L$ .

Zeige noch, dass  $B$  auch algebraisch unabhängig über  $L$  ist:

Sei dazu  $\Gamma$  eine minimale Teilmenge von  $\Lambda$ , für welche  $T$  noch algebraisch über  $k(\{b_i\}_{i \in \Gamma})$  ist. Für diese ist  $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$  algebraisch unabhängig über  $K$ . Damit ist nach „ $\Leftarrow_1$ “  $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$  ebenfalls eine Differenzialbasis von  $T$  über  $k$ . Also muss schon  $\Gamma = \Lambda$  gegolten haben und  $B$  ist eine Transzendenzbasis von  $T$  über  $k$ .

2.,,⇐“: Sei  $B$  eine  $p$ -Basis von  $T$  über  $k$ .

Somit wird nach DEFINITION-PROPOSITION  $T$  von  $B$  als Algebra über  $(k * T^p)$  und  $\Omega_{T/(k * T^p)}$  von  $d_T(B)$  als Vektorraum über  $T$  (PROPOSITION) erzeugt. Zeige also  $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p * k)}$ :

Die Cotangent Sequenz (??) von  $K \hookrightarrow (k * T^p) \hookrightarrow T$  besagt:

$$\Omega_{T/(T^p * k)} \simeq \Omega_{T/k}/d_T(T^p * k)$$

Für beliebige  $t^p \in T^p$  gilt  $d_T(t^p) = pt^{p-1}d_T(t) = 0$ , da  $\text{char}(T) = p$ .  
 $\Rightarrow d_T(T^p * k) = d_T(k(T^p)) = 0$

Damit ist  $d_T : T \longrightarrow \Omega_{T/k}$  auch  $(T^p * k)$ -linear und es gilt  $\Omega_{T/k} \simeq \Omega_{T/(T^p * k)}$ .

2.,,⇒“: Sei  $d_T(B)$  eine Vektorraumbasis von  $\Omega_{T/k}$ .

Zeige zunächst, dass  $T$  von  $B$  als Algebra über  $k$  erzeugt wird:

Die COTANGENT SEQUENZ (??) von  $k \hookrightarrow L := k(B) \hookrightarrow T$  besagt  
 $\Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L) \rangle$  und nach Voraussetzung gilt  $\Omega_{T/k} = T\langle d_T(B) \rangle$ .  
 $\Rightarrow \Omega_{T/L} \simeq \Omega_{T/k}/T\langle d_T(L) \rangle = \Omega_{T/k}/T\langle d_T(B) \rangle = \Omega_{T/k}/\Omega_{T/k} = 0$

Da, wie wir in „ $\Leftarrow_2$ “ gezeigt haben, jede  $p$ -Basis  $B'$  von  $T$  über  $L$  auch



eine Differenzialbasis von  $\Omega_{T/L} = 0$  ist, gilt für diese  $B' = \emptyset$ . Somit wird  $T$  schon von  $B$  als Algebra über  $k$  erzeugt.

Zeige noch, dass  $B$  auch minimal als Erzeugendensystem von  $T$  als Algebra über  $k$  ist:

Sei dazu  $\Gamma$  die minimale Teilmenge von  $\Lambda$ , für welche  $T$  noch von  $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$  als Algebra über  $k$  erzeugt wird. Dann ist  $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$  eine p-Basis von  $T$  über  $k$ . Somit ist nach „ $\Leftarrow$ 2.“  $\{b_i\}_{i \in \Gamma}$  ebenfalls eine Differenzialbasis von  $T$  über  $k$ . Es muss also schon  $\Gamma = \Lambda$  gegolten haben und  $B$  ist eine p-Basis von  $T$  über  $k$ .

□