Kapitel 1

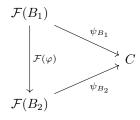
Kolimes

1.1 Einführung in den Kolimes

Definition des Kolimes

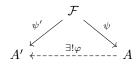
Definition 1. [vgl. Anhang A6 David Eisenbud 1994] Sei A eine Kategorie.

- Ein <u>Diagramm</u> über A ist eine Kategorie B zusammen mit einem Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow A$.
- Sei $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Diagramm und $A \in \mathcal{A}$ ein Objekt. Dann definieren wir einen Morphismus $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$ als eine Menge von Funktionen $\{\psi_B \in Hom(F(B), A) | B \in \mathcal{B}\}$, wobei für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $\varphi \in Hom(B_1, B_2)$ folgendes Diagramm kommutiert:



• Der <u>Kolimes</u> $\varinjlim \mathcal{F}$ eines Diagramms $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ist ein Paar aus einem Objekt $A \in \mathcal{A}$ zusammen mit einem Morphismus $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$, welche folgende universelle Eingenschaft erfüllen:

Für Objekte $A' \in \mathcal{A}$ und alle Morphismen $\psi' : \mathcal{F} \longrightarrow A'$ existiert genau eine Funktion $\varphi \in Hom(A, A')$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:



Eindeutigkeit des Kolimes [vgl. A6 David Eisenbud 1994]

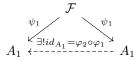
Lemma 2. Seien \mathcal{B} , \mathcal{A} zwei Kategorien und $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor. Dann ist im Falle der Existenz $\lim \mathcal{F}$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien $A_1 \in \mathcal{A}, (\psi_1 : \mathcal{F} \longrightarrow A_1)$ und $A_2 \in \mathcal{A}, (\psi_2 : \mathcal{F} \longrightarrow A_2)$ beide gleich $\lim \mathcal{F}$.

Erhalte durch die universelle Eigenschaft des Kolimes die eindeutig bestimmten Funktionen $\varphi_1 \in Hom_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$ und $\varphi_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(A_2, A_1)$, für welche die folgende Diagramme kommutieren:



Wende nun die Universelle Eigenschaft von ψ_1 auf ψ_1 selbst an und erhalte $id_{A_1} = \varphi_2 \circ \varphi_1$. Analog erhalte auch $id_{A_2} = \varphi_1 \circ \varphi_2$.



Somit existiert genau eine Isomorphie $\varphi_1: A_1 \longrightarrow A_2$.

Vereinfachung des Kolimes

Korrolar 3. [Eigene Überlegung]

Sei \mathcal{A} eine Kategorie und $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$ ein Diagramm. Betrachte die Unterkategorie $\mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{A}$ zusammen mit dem Inklusionsfunktor $\mathcal{F}(B) \hookrightarrow \mathcal{A}$ ebenfalls als Diagramm. Dann gilt:

$$\varinjlim \mathcal{F} \ existiert \ genau \ dann, \ wenn \ \varinjlim (\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \ existiert.$$
$$Mit \ \varinjlim \mathcal{F} = \varinjlim (\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}).$$

Beweis. Dies folgt direkt aus unserer Definition von Morphismen:

In definition 1 haben wir einen Morphismus $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$ als eine Menge von Funktionen $\psi_{\mathcal{B}} \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(B), A)$ definiert. Dies zeigt, dass es keinen Unterschied macht, ob wir von Morphismen $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$ oder von Morphismen $\psi: (\mathcal{F}(B) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$ reden.

Wenn wir nun die universelle Eigenschaft des Kolimes genauer betrachten, sehen wir, dass diese sich nur auf Morphismen $\mathcal{F} \longrightarrow A$ bzw. $(\mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow A$ und auf die Kategorie \mathcal{A} bezieht. Es macht also keinen Unterschied, ob wir vom Kolimes des Diagramms $(\mathcal{B}, \mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A})$ oder vom Kolimes des Diagramms $(\mathcal{F}(\mathcal{B}), \mathcal{F}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{A})$ sprechen.

Es genügt also im Fall von Kolimtenn Diagramme $(\mathcal{B}, \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$ mit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ zu betrachten. Zur Vereinfachung schreibe für $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ in Zukunft $\varinjlim \mathcal{B}$ anstatt von $\varinjlim (\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A})$.

DifferenzkokernUndKoproduktDef

Definition 4. [vlg. A6 David Eisenbud 1994] Sei A eine Kategorie.

- Das Koprodukt von {B_i}_{i∈Λ} ⊆ A wird durch ∐_{i∈Λ}{B_i} := lim B definiert, wobei {B_i}_{i∈Λ} die Objekte und die Identitätsabbildungen {id_{Bi} : B_i → B_i}_{i∈Λ} die einzigen Morphismen von B sind.
- Der Differenzkokern von $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(C_1, C_2)$ wird durch $\varinjlim \mathcal{C}$ definiert, wobei $\{C_1, C_2\}$ die Objekte und $\{f, g\}$ zusammen mit den Identitätsabbildungen die Morphismen von \mathcal{C} sind.

Kolimes durch Koprodukt und Differenzkokern

Theorem 5. [Proposition A6.1 David Eisenbud 1994]

Sei \mathcal{A} eine Kategorie, in der Koprodukte beliebiger Mengen von Objekten und Differenzkokerne von je zwei Morphismen existieren. Dann existiert für jedes Diagramm $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ dessen Kolimes $\lim \mathcal{F}$.

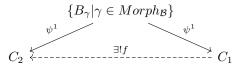
Beweis. In korrolar 3 haben wir gesehen, dass es genügt den Fall $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ zu betrachten. Konstruiere also für eine beliebige Unterkategorie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ deren Kolimes $\lim(\mathcal{F})$:

Bezeichne für jeden Morphismus $\gamma \in Morph_{\mathcal{C}}$ dessen Definitionsbreich mit $B_{\gamma} \in \mathcal{B}$. Definiere nun:

- $C_1 := \coprod_{\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}} B_{\gamma}$ ist das Koprodukt aller Objekte von \mathcal{B} , in dem jedes Objekt so oft vorkommt, wie es Definitionsbereich eines $\gamma \in Morph_{\mathcal{B}}$ ist. Sei $\psi^1 : \{B_{\gamma} | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_1$ der dazugehörige Morphismus.
- $C_2 := \coprod_{B \in Obj_{\mathcal{B}}}$ ist das Koprodukt aller Objekte von \mathcal{B} . Sei $\psi^2 : \{B | B \in Obj_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_2$ der dazugehörige Morphismus.

Konstruiere nun $f, g \in Hom_{\mathcal{B}}C_1, C_2$ so, dass der Differenzkokern von f und g gleich dem Kolimes von \mathcal{B} ist:

Für f betrachte den Morphismus $\Phi: \{B_{\gamma} | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_2$, mit $\Phi_{B_{\gamma}} = \psi_{\gamma(B_{\gamma})}^2 \circ \gamma$ für $B_{\gamma} \in \{B_{\gamma} | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\}$. Wende die universelle Eigenschaft von $C_1 = \lim_{\gamma \to \infty} \{B_{\gamma} | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\}$ an:



Wähle $f \in Hom_{\mathcal{B}}(C_1, C_2)$ als die eindeutige Funktion, für die $\Phi = \psi^1 \circ f$ gilt.

Für g betrachte den Morphismus $\Phi': \{B_{\gamma} | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\} \longrightarrow C_2$, mit $\Phi'_{B_{\gamma}} = \psi^2_{\gamma(B_{\gamma})}$ für $B_{\gamma} \in \{B_{\gamma} | \gamma \in Morph_{\mathcal{B}}\}$.

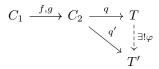
Wähle analog zu f mithilfe der universellen Eigenschaft des Kolimes $g \in Hom_{\mathcal{B}}(C_1, C_2)$ als die eindeutige Funktion, für die $\Phi' = \psi^1 \circ g$ gilt.

Sei $C \in Obj_{\mathcal{B}}$ zusammen mit dem Morphismus ζ der Differenzkokern von f,g. Zeige Abschließend, dass $(C, \psi : \mathcal{B} \longrightarrow \zeta \circ \psi^2$ Der Kolimes von \mathcal{B}) ist:

NeuDifferenzenkokerndef [vlg. Wikipedia aber eigener Beweis]

Lemma 6. Sei A eine Kategorie mit $C_1, C_2 \in Hom_A(C_1, C_2)$, so sind folgende Formulierungen äquivalent zur Definition des Differenzkokern's $T := \lim C$

- 1. Es existiert ein Morphismus $\psi: \mathcal{C} \longrightarrow T$, mit der Eigenschaft, dass für alle Morphismen $\psi': \mathcal{C} \longrightarrow T'$ genau ein $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(T, T')$ mit $\varphi \circ \psi = \psi'$ existiert.
- 2. Es existiert ein $q \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, T)$ mit $q \circ f = q \circ g$ und der Eigenschaft, dass für alle Morphismen $q' \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, Z)$ mit $q' \circ f = q' \circ g$ genau ein $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(T, T')$ mit $\varphi \circ q = q'$ existiert.



Beweis. 1. ist offensichtlich eine Ausformulierung der Einführung des Kolimes aus ??, zeige also im folgenden noch die Äquivalenz von 1. und 2.

• $1 \Rightarrow 2$:

Da $\psi: \mathcal{C} \longrightarrow T$ ein Morphismus ist, gilt für $\{f,g\} = Hom_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$: $\psi_{C_1} = \psi_{C_2} \circ f = \psi_{C_1} \circ \psi_{C_2}$, setze also $q := \psi_{C_2}$.

Sei nun $q' \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, T)$ mit der Eigenschaft $q' \circ f = q' \circ g$ gegeben: Definiere den Morphismus $\psi' : \mathcal{C} \longrightarrow T$ als $\{\psi_1 = q' \circ f, \psi_2 = q'\}$, somit folgt direkt aus der Universellen Eigenschaft von ψ , dass genau ein $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, T)$ existiert, mit $\varphi \circ q = q'$.

• $2 \Rightarrow 1$:

Definiere $\psi: \mathcal{C} \longrightarrow T$ als $\{\psi_1 = q \circ f, \psi_2 = q\}$. Durch die Eigenschaft von q gilt $\psi_{C_1} = \psi_{C_2} \circ f = \psi_{C_2} \circ g$.

Sei nun $\psi': \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein beliebiger Morphismus.

Definiere $d' := \psi'$, somit existiert durch die Eigenschaft von d genau ein $\varphi \in Hom_{\mathcal{A}}(C_2, T)$ mit $\varphi \circ q = q'$.

$$\Rightarrow \varphi \circ \psi_2 = \psi_2'$$

$$und \ \varphi \circ \psi_1 = \varphi \circ \psi_2 \circ f = \varphi \circ \psi_2' \circ f = \varphi \circ \psi_1'$$

Wenn im weiteren Verlauf von dem Differenzkokern zweier Homomorphismen $f,g:C_1\longrightarrow C_2$ gesprochen wird, meinen wir damit den Homomorphismus $g:C_2\longrightarrow T$ aus lemma 6.

Tensorprodukt des Differenzenkokerns [Eigene Bemerkung]

Bemerkung 7. Seien $f,g \in Hom_{\mathcal{A}}(S_1,S_2)$ R-Algebra-Homomorphismen, so können wir für den Differenzenkokern $q: S_2 \longrightarrow T$ für ein beliebiges S_1 -Modul das Tensorprodukt $T \otimes_{C_1} M$ definieren.

$$f\ddot{u}r \ s_1 \in S_1 \ und \ t \otimes m) \in T \otimes_{C_1} M \ gilt:$$
$$s_1 \cdot (t \otimes m) = ((q \circ f)(s_1)) \cdot t \otimes m = ((q \circ g)) \cdot (s_1)t \otimes m$$

R-Algebra-Kolimiten [vlg. Proposition A6.7 David Eisenbud 1994]

Proposition 8. in der Kategorie der R-Algebren existieren Koprodukte und Differenzkokerne, wobei:

- **1.** Das Koprodukt einer endlichen Familie von R Algebren $\{S_i\}_{i\in\Lambda}$ entspricht deren Tesorprodukt $\bigotimes_{i\in\Lambda} S_i$.
- 2. Der Differenzkokern zweier R-Algebra-Homomorphismen $f,g:S_1 \longrightarrow S_2$ einspricht dem Homomorphismus $q:S_2 \longrightarrow S_2/Q$, $y \longmapsto [y]$, wobei $Q:=\{f(x)-g(x)\mid x\in S_2\}$ das Bild der Differenz von f und g ist.

Beweis. Zu 1.:

Sei \mathcal{B} die Unterkategorie der R-Algebren, welche $\{S_i\}_{i\in\Lambda}$ zusammen mit den Identitätsabbildungen enthält. Wir wollen die universellen Eigenschaften des Tensorproduktes und des Kähler-Differenzials nutzen, um einen Isomorphismus zwischen $\lim \mathcal{F}$ und $\bigotimes_{i\in\Lambda} B_i$ zu finden.

Es sind der Morphismus $\psi: \mathcal{B} \longrightarrow \varinjlim \mathcal{B}$ und die bilineare Abbildung $g: \bigoplus_i S_i \longrightarrow \otimes_i S_i$ gegeben.

Konstruiere den Morphismus $\psi': \mathcal{B} \longrightarrow \otimes_i S_i$ durch $\psi'_i: S_i \longrightarrow \otimes_i S_i$, $s_i \longmapsto g(1,..,1,s_i,1,..,1)$ für $i \in \lambda$ und die bilineare Abbildung $f: \oplus_i S_i \longrightarrow \varinjlim \mathcal{B}$, $s \longmapsto \prod_i \psi_i(s_i)$.

Somit liefern uns die universellen Eigenschaften folgende zwei R-Algebra-Homomorphismen:

$$\varphi: \varinjlim_{i} \mathcal{B} \longrightarrow \bigotimes_{i} S_{i}$$
$$\phi: \bigotimes_{i} S_{i} \longrightarrow \varinjlim_{i} \mathcal{B}.$$



Die Eindeutigkeit der universellen Eigenschaften liefert uns, das φ und ϕ zueinander Inverse sind und somit haben wir unsere gesuchten Isomorphismen zwischen lim \mathcal{B} und $\bigotimes_i S_i$ gefunden.



Zu 2.:

Zeige, dass $q:S_2\longrightarrow S_2/Q$ die in lemma 6 eingeführten Eigenschaften des Differenzkokern's besitzt.

$$q \circ f = q \circ g$$
 gilt, da $kern(q) = Q = \{f(x) - g(x) \mid x \in C_2\}.$

Sei nun eine Funktion $q' \in Hom_{\mathcal{A}}(S_2, T')$ mit $q' \circ f = q' \circ$ gegeben. Somit gilt $q' \circ (f - g) = 0$, wodurch Q ein Untermodul von Q' := kern(q') ist. Mit dem Isomorphiesatz für R-Algebren erhalten wir:

$$S_2/Q' \simeq (S_2/Q)/(Q'/Q).$$

Somit ist $q': S_2 \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q)$, $y \longmapsto [y]'$ eine isomorphe Darstellung von $q': S_2 \longrightarrow T'$.

$$\Rightarrow \exists ! \varphi : S_2/Q \longrightarrow (S_2/Q)/(Q'/Q), [y] \longmapsto [y]' \ mit \ (\varphi \circ q) = q'.$$

Also ist $q: S_2 \longrightarrow S_2/Q$ der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Differenzkokern von f und g.

Darstellung der Polynomalgebra als Tensorprodukt [Eigene Überlegung]

Bemerkung 9. Die Polynomalgebra $R[x_1,...,x_d]$ über R lässt sich wie folgt als Tensorprodukt darstellen:

$$R[x_1,...,x_n] = \bigotimes_{i \in \{1,...,n\}} R[x_i]$$

Genauer gilt für zwei Polynomalgebren $A=R[x_1,...,x_{n_A}],\,B=R[y_1,...,y_{n_B}]$ über R:

$$A \otimes_R B = R[x_1, ..., x_{n_A}, y_1, ..., y_{n_B}]$$

Skizziere den Beweis.

Beweis. Zeige, dass für $g:A\oplus B\longrightarrow R[x_1,...,x_{n_A},y_1,...,y_{n_B}]$, $(a,b)\longmapsto a\cdot b$ die Universelle Eigenschaft des Tensorproduktes gilt:

$$A \oplus B \xrightarrow{g} R[x_1, ..., x_{n_A}, y_1, ..., y_{n_B}]$$

$$\downarrow f \qquad \qquad \downarrow \exists ! \varphi \qquad \qquad \downarrow M$$

Es ist leicht nachzurechnen, dass es sich bei φ um folgende Funktion handeln muss:

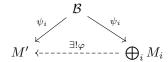
$$\varphi: R[x_1, ..., x_{n_A}, y_1, ..., y_{n_B}] \longrightarrow M, (x_i \cdot y_j) \longmapsto f(x_i, 1) \cdot f(1, y_i)$$

R-Modul-Kolimiten [Proposition A6.2 David Eisenbud 1994]

Proposition 10. In Der Kategorie der R-Module existieren Koprodukte und Differenzkokerne, wobei:

- 1. das Koprodukt $\lim_{\longrightarrow} \mathcal{B}$ von R-Modulen $M_i \in (R Module)$ entspricht der direkten Summe $\sum_i M_i$.
- **2.** der Differenzenkokern zweier Homomorphismen $f, g: M_1 \longrightarrow M_2$ entspricht dem Kokern $M_2/im(f-g)$ der Differenzenabbildung.

Beweis. für 1. Sei $\phi:\{M_i\}\longrightarrow \mathcal{B}$ ein beliebiger Morphismus. Zeige:



Für ein beliebiges i existiert genau ein $\varphi_i:M_i\oplus 0\longrightarrow M'$, $(0,...,0,m_i,0,...,0\longmapsto \psi_i'(m_i)$ mit $\psi_i'=\psi_i\circ\varphi_i$

$$\Rightarrow \exists! \varphi : \bigoplus_i M_i \longrightarrow M', (m_1, ..., m_n) \longmapsto \sum_i \psi_i(m_i)$$

2. ist Analog zu proposition 8

Die in proposition 10 gezeigten Darstellungen gelten mit kurzen Überlegungen auch für S-Module, wobei S eine R-Algebra ist.

1.2 Darstellung von Lokalisierung als Kolimes

Lokalisierung von Algebren als Kolimes [vlg. Aufgabe A6.7 David Eisenbud 1994]

Lemma 11. Sei S eine R-Algebra und $U\subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$S[U^{-1}] = \lim_{\longrightarrow} \mathcal{B}$$

Wobei \mathcal{B} aus den Objekten $\{S[t^{-1}]|t \in U\}$ und den Morphismen $S[t^{-1}] \longrightarrow S[tt'^{-1}], (\frac{s}{t^n})_t \longmapsto (\frac{st'^n}{(tt')^n})_{(tt')} \ \forall t, t' \in U$ besteht.

Beweis. Sei $\psi: \mathcal{B} \longrightarrow A$ der Kolimes von \mathcal{B} . Zeige $S[U^{-1}] \simeq A$, definiere dazu:

$$\psi': \mathcal{B} \longrightarrow S[U^{-1}]$$

$$\psi'_{S[t^{-1}]}: S[t^{-1}] \longrightarrow S[t^{-1}], \left(\frac{s}{t^n}\right)_t \longmapsto \left(\frac{s}{t^n}\right)_U$$

 ψ' ist ein Morphismus, da für beliebige $t, t' \in U$ und $s \in S$ gilt:

$$\left(\frac{s}{t^n}\right)_{\scriptscriptstyle U} = \left(\frac{st'^n}{(tt')^n}\right)_{\scriptscriptstyle U}$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir den eindeutigen Homomorphismus $\varphi:A\longrightarrow S[U^{-1}].$

$$S[U^{-1}] \stackrel{\mathcal{B}}{\longleftarrow} A$$

Für $\phi: S[U^{-1}] \longrightarrow A$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen. Zunächst können wir jedes Element $(\frac{s}{u})_{U} \in S[U^{-1}]$ als $\psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_{t})$ schreiben. Weiter gilt für alle $s_{1}, s_{2} \in S, t_{1}, t_{2} \in U$:

$$Sei \ \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_t) = \psi'_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_t)$$

$$\Rightarrow \exists u \in U : (s_1t_1 - s_2t_2) \cdot u = 0$$

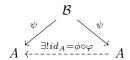
$$\Rightarrow (\frac{s_1u}{t_1u})_{tu} = (\frac{s_2u}{t_2u})_{tu}$$

$$\Rightarrow \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_1}{t_1})_t) = \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s_2}{t_2})_t)$$

Mit diesem Wissen können wir den R-Algebra-Homomorphismus $\phi:S[U^{-1}]\longrightarrow A$ definieren:

$$\phi: S[U^{-1}] \longrightarrow A\,,\, \psi_{S[t^{-1}]}'((\frac{s}{t})_t) \longmapsto \psi_{S[t^{-1}]}((\frac{s}{t})_t)$$

 $\phi\circ\varphi=id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes:



Für $\varphi \circ \phi \stackrel{!}{=} id_{S[U^{-1}]}$ wähle beliebige $s \in S, t \in U$, für diese gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{s}{t})_t)) = \varphi(\psi((\frac{s}{t})_t) = \psi'((\frac{s}{t})_t)$$

Damit haben wir gezeigt, dass φ, ϕ Isomorphismen sind und somit $A \simeq S[U^{-1}]$ gilt.

Da der Kolimes bis auf Isomorphie eindeutig ist, definiere ab sofort $S[U^{-1}]$ als den eindeutigen Kolimes von \mathcal{B} .

Lokalisierung von Moduln als Kolimes [Beweis von Proposition 16.9 David Eisenbud 1994]

Korrolar 12. Sei M ein S-Modul, wobei S eine R-Algebra ist. Sei weiter $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$M[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{C}$$

Wobei \mathcal{C} aus den Objekten $\{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] | t \in U\}$ und folgenden Morphismen besteht:

$$S[U^{-1}] \otimes M[t^{-1}] \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes M[(tt')^{-1}],$$
$$(\frac{s}{u})_{\scriptscriptstyle U} \otimes (\frac{m}{t^n})_{\scriptscriptstyle t} \longmapsto (\frac{s}{u})_{\scriptscriptstyle U} \otimes (\frac{t'^n m}{(tt')^n})_{\scriptscriptstyle t}$$

Auch wenn sich lemma 11 hier nicht direkt anwenden lässt, so können wir doch im Beweis gleich vorgehen.

Beweis.Schließe zunächst den trivialen Fall $0 \in U$ aus.

Sei $\psi:\mathcal{C}\longrightarrow A$ der Colimes von $\mathcal{C}.$ Zeige $S[U^{-1}]\simeq A,$ definiere dazu folgenden Morphismus :

$$\psi: \mathcal{C} \longrightarrow M[U^{-1}]$$

$$\psi_t: S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \longrightarrow M[U^{-1}], \left(\frac{s}{u}\right)_U \otimes \left(\frac{m}{t^n}\right)_t \longmapsto \left(\frac{sm}{ut^n}\right)_U$$

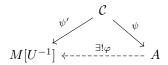
Die Wohldefiniertheit von ψ'_t für ein beliebiges $t \in U$ folgt direkt aus der Universellen Eigenschaft des Tensorprodukt's. Denn für die bilineare Abbildung $f: S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \longrightarrow M[t^{-1}]$, $((\frac{s}{u})_U, (\frac{m}{t^n})_t) \longmapsto (\frac{sm}{ut^n})_U$ gilt:

$$S[U^{-1}] \oplus M[t^{-1}] \xrightarrow{g} S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}]$$

$$\downarrow \exists ! \psi'_t$$

$$M[U^{-1}]$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Kolimes erhalten wir nun den eindeutigen Homomorphismus $\varphi:A\longrightarrow M[U^{-1}].$



Für $\phi: M[U^{-1}] \longrightarrow A$ benötigen wir kleinere Vorüberlegungen. Zunächst können wir jedes Element $(\frac{m}{u})_U \in M[U^{-1}]$ als $\psi((\frac{1}{u})_U \otimes (\frac{m}{1})_t)$ schreiben. Wobei mit ψ gemeint ist, dass wir ein beliebiges $t \in U$ wählen und dann ψ_t betrachten. Diese Verallgemeinerung ist möglich, da für beliebige $t_1, t_2, u \in U$ und $m \in M$ gilt:

$$\psi_{t_1}((\frac{1}{u})_{\scriptscriptstyle U}\otimes(\frac{m}{1})_{\scriptscriptstyle t_1})=(\frac{m}{u})_{\scriptscriptstyle U}=\psi_{t_2}((\frac{1}{u})_{\scriptscriptstyle U}\otimes(\frac{m}{1})_{\scriptscriptstyle t_2})$$

Definiere nun mit diesem Wissen folgenden Homomorphismus:

$$\phi: M[U^{-1}] \longrightarrow A, \ \psi((\frac{1}{u})_U \otimes t) \longmapsto \psi'((\frac{1}{u})_U \otimes t)$$

 $\phi\circ\varphi=id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Kolimes. Für $\varphi\circ\phi\stackrel{!}{=}id_{M[U^{-1}]}$ wähle $(\frac{m}{u})_U\in M[U^{-1}]$ beliebig, für dieses gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi'((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t}))$$

$$= \varphi(\psi((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t}))$$

$$= \psi'((\frac{1}{u})_{U} \otimes (\frac{m}{1})_{t})$$

Damit haben wir $A \simeq M[U^{-1}]$ gezeigt, definiere also ab sofort $M[U^{-1}]$ als den eindeutigen Kolimes von \mathcal{C} .