**Korrolar 1.** *Sei $M$ ein $S$-Modul, wobei eine $R$-Algebra ist. Sei weiter $U \subseteq S$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

$$M[U^{-1}] = \varinjlim \mathcal{C}$$

*Wobei $\mathcal{C}$ aus den Objekten $\{S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] | t \in U\}$ und folgenden Morphismen besteht:*

$$S[U^{-1}] \otimes M[t^{-1}] \longrightarrow S[U^{-1}] \otimes M[(tt')^{-1}],$$
$$(s,u)_{mod\sim_U} \otimes (m,t^n)_{mod\sim_t} \longmapsto (s,u)_{mod\sim_U} \otimes (t'^n m, t^n t'^n)_{mod\sim_t}$$

*Beweis.* Schließe zunächst den trivialen Fall $0 \in U$ aus.
Sei $\phi : \mathcal{C} \longrightarrow A$ der Colimes von $\mathcal{C}$. Zeige $S[U^{-1}] \simeq A$, definiere dazu:

$$\psi : \mathcal{C} \longrightarrow M[U^{-1}]$$
$$\psi_t : S[U^{-1}] \otimes_{S[t^{-1}]} M[t^{-1}] \longrightarrow M[U^{-1}]\,,\ (s,u)_{mod\sim_U} \otimes (m,t^n)_{mod\sim_t} \longmapsto (sm, ut^n)_{mod\sim_U}$$

- $\phi$ ist wohldefiniert: Seien dazu $s, s' \in S$; $t, u, u' \in U$; $n, n' \in \mathbb{N}$ und $m, m' \in M$ beliebig, somit gilt:

$$Sei\ (s,u)_{mod\sim_U} \otimes (m,t^n)_{mod\sim_t} = (s',u')_{mod\sim_U} \otimes (m',t^{n'})_{mod\sim_t}$$
$$\Rightarrow (s,ut^n)_{mod\sim_U} \otimes m = (s,ut^n)_{mod\sim_U} \otimes m$$

$$da\ M\ ein\ S\text{-}Modul\ ist\ und\ für\ beliebige\ v,v' \in S\ gilt\ ((v,1)_{mod\sim_t} = (v',1)_{mod\sim_t} \Rightarrow v = v'), folgt:$$
$$\exists k,k' \in S\ mit\ km = k'm'\ und\ (s,ut^n k)_{mod\sim_U} = (s',u't^{n'}k')_{mod\sim_U}$$
$$\Rightarrow (sm,ut^n)_{mod\sim_U} = (skm,ut^n k)_{mod\sim_U} = (s'k'm',u't^{n'}k')_{mod\sim_U} = (s'm',u't^{n'})_{mod\sim_U}$$

- $\phi$ ist ein Morphismus:

□