Exersize A6.7

**Lemma 1.** Seit S eine R-Algebra und  $U\subseteq S$  multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

$$S[U^{-1}] = \lim_{\longrightarrow} (\mathcal{F} : \mathcal{B} \hookrightarrow (R - Algebren))$$

Wobei  $\mathcal{B}$  aus den Objekten  $\{S[t^{-1}]|t\in U\}$  und den Morphismen  $S[t^{-1}]\longrightarrow S[tt'^{-1}], (s,t^n)_{mod\sim_t}\longmapsto (st'^n,t^nt'^n)_{mod\sim_{(tt')}} \forall t,t'\in U$  besteht.

Beweis. Sei  $\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A$  der Colimes von  $\mathcal{F}$ . Zeige  $S[U^{-1}] \simeq A$ , definiere dazu:

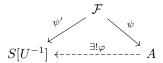
$$\psi': \mathcal{F} \longrightarrow S[U^{-1}]$$

$$\psi'_{S[t^{-1}]}: S[t^{-1}] \longrightarrow S[t^{-1}], (s, t^n)_{mod \sim_t} \longmapsto (s, t^n)_{mod \sim_U}$$

 $\psi'$  ist ein Morphismus, da für beliebige  $t,t'\in U$  und  $s\in S$  gilt:

$$(s,t^n)_{mod \sim U} = (st'^n, t^nt'^n)_{mod \sim U}$$

Durch die Universelle Eigenschaft des Colimes, erhalten wir den Homomorphismus  $\varphi:A\longrightarrow S[U^{-1}].$ 



Für  $\phi: S[U^{-1}] \longrightarrow A$  benötigen wir kleinere Vorüberlegungen. Zunächst können wir jedes Element  $(s,u)_{mod \sim_U} \in S[U^{-1}]$  als  $\psi_{S[t^{-1}]}((s,t)_{mod \sim_t})$  schreiben.

Weiter gilt für alle  $s_1, s_2 \in S, t_1, t_2 \in U$ :

$$\psi'_{S[t^{-1}]}((s_1, t_1)_{mod \sim_t}) = \psi'_{S[t^{-1}]}((s_2, t_2)_{mod \sim_t})$$

$$\Rightarrow \exists u \in U : (s_1t_1 - s_2t_2) \cdot u = 0$$

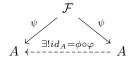
$$\Rightarrow (s_1u, t_1u)_{mod \sim_{tu}} = (s_2u, t_2u)_{mod \sim_{tu}}$$

$$\Rightarrow \psi_{S[t^{-1}]}((s_1, t_1)_{mod \sim_t}) = \psi_{S[t^{-1}]}((s_2, t_2)_{mod \sim_t})$$

Mit diesem Wissen können wir den R-Algebra-Homomorphismus  $\phi: S[U^{-1}] \longrightarrow A$  definieren:

$$\phi: S[U^{-1}] \longrightarrow A \,,\, \psi_{S[t^{-1}]}'((s,t)_{mod \sim_t}) \longmapsto \psi_{S[t^{-1}]}((s,t)_{mod \sim_t})$$

 $\phi\circ\varphi=id_A$ ergibt sich direkt aus der Universellen Eigenschaft des Colimes:



Für  $\varphi\circ\phi=id_{S[U^{-1}]}$  wähle beliebige  $s\in S, t\in U,$  für diese gilt:

$$(\varphi \circ \phi)(\psi((s,t)_{mod \sim_t})) = \varphi(\psi'((s,t)_{mod \sim_t}) = \psi((s,t)_{mod \sim_t})$$

Damit haben wir gezeigt, dass  $\varphi,\phi$  Isomorphismen sind und somit  $A\simeq S[U^{-1}]$  gilt.

Da der Colimes bis auf Isomorphie eindeutig ist, definiere ab sofort  $S[U^{-1}]$  als den eindeutigen Colimes von  $\mathcal{F}: \mathcal{B} \longrightarrow (R-Algebren)$ .