Kapitel 1

Körpererweiterungen

1.1 Einführung in die Körpererweiterungen

Definition Transzenddenzbasis *[vlg. Anhang A1 David Eisenbud 1994]* Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung. Dann definieren wir:

- Eine endliche Teilmenge $\{l_1, \ldots, l_n\} \subseteq L$ heißt algebraisch abhängig über k, falls gilt:

$$\exists P(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n] : P(l_1, \ldots, l_n) = 0$$

- Eine endliche Teilmengen $\{l_1, \ldots, l_n\} \subseteq L$ heißt algebraisch unabhängig über k, falls gilt:

$$\forall P(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n] : P(l_1, \ldots, l_n) \neq 0$$

- Eine Teilmenge $B \subseteq L$ heißt transzendent über k, falls jede ihrer endlichen Teilmengen $\{b_1, \ldots, b_n\}$ algebraisch unabhängig über k ist.

- Eine Teilmenge $B \subseteq L$ ist eine Transzendenzbasis von L über k, falls sie transzendent über k und die Körpererweiterung $L \supset k(B)$ algebraisch ist.

Transzendenzbasis ist maximale transzendente Menge *[Lemma 22.1 Christian Karpfinger, Kurt Meyberg 2009]*

Lemma 1. *Sei $L \supset k$ ein Körpererweiterung und $B \subseteq L$ eine über k transzendente Teilmenge. Dann gilt:*
B ist genau dann eine Transzendenzbasis von L über k, wenn B bezüglich der Inklusion ein maximales Element der Menge aller über k transzendenten Elemente aus L ist.

Bemerkung 2. *Für jede Körpererweiterung $L \subseteq k$ existiert eine Transzendenzbasis $B \subseteq L$ von L über k.*

De *[]*

Erinnerung: Eine Algebraische Körpererweiterung $L \supset k$ heißt seperabel, falls für alle $\alpha \in L$ das Minimalpolynom $f(x) \in k[x]$ von α über $L[x]$ in Linearfaktoren zerfällt.

Definition 3. *Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung. Dann definieren wir:*

- *L ist seperabel generiert über k, falls eine Transzendenzbasis B von L über k existiert, sodass $L/k(B)$ eine seperable Körpererweiterung ist.*
- *k ist seperabel über k, falls jeder über k endlich genierte Teilkörper von L über k seperabel generiert ist.*

Definition 4. *Sei k ein Körper mit charakteristik p und sei weiter L/k eine Körpererweiterung. Dann definieren wir:*

- *Eine endliche Teilmenge $B \subseteq L$ heißt p-Basis von L über k, falls $W := \{\prod_{b \in B} b^i | i < p\}$ eine Vektorraumbasis von K über $k * K^p$ bildet.*

1.2 Differential von Körpererweiterungen

Definition der Differenzialbasis *[vlg. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]*

Definition 5. *Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung. Dann nennen wir eine Teilmenge $\{b_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq L$ eine Differenzialbasis von L über k, falls $\{d_K(b_i)\}_{i \in \Lambda}$ eine Vektorraumbasis von $\Omega_{L/R}$ über L ist.*

Differential von rationalen Funktionen 1 *[vlg. Chapter 16.5 David Eisenbud 1994]*

Beispiel 6. *Sei k ein Körper und $L = k(\{x_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in n Varablen über k.*
Dann gilt:

$$\Omega_{L/k} \simeq L\langle d_{k[x_1,\ldots x_n]}(x_i)\rangle$$

Insbesondere ist $\{x_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ eine Differenzialbasis von $\Omega_{L/k}$.

Differential von rationalen Funktionen 2 *[Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]*

Korrolar 7. *Sei k ein Körper und $L \supset k$ eine Körpererweiterung und $T = L(\{x_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}})$ der Körper der rationalen Funktionen in n Varablen über L. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/k} \simeq (T \otimes_L \Omega_{L/R}) \oplus \bigoplus_{i\in\{1,\ldots,n\}} T\langle d_T(x_i)\rangle$$

Cotangent Sequenz von Koerpern 1 *[Aufgabe 16.6 David Eisenbud 1994]*

Bemerkung 8. *Sei $L \supset k$ eine Körpererweiterung und $T = L(x_1, \ldots, x_n)$ der Körper der rationalen Funktionen in n Variablen über L. Dann ist die COTANGENT SEQUENZ (**??**) von $k \hookrightarrow L \hookrightarrow T$ eine kurze Exakte Sequenz:*

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Im Genauen ist $\varphi : T \otimes_L \Omega_{L/k} \longrightarrow \Omega_{T/k}$, $t \otimes d_L(l) \longmapsto t \cdot d_T(l)$ injektiv.

Aufbaulemma Koerperdifferenzial *[vlg. Lemma 16.15 David Eisenbud 1994]*

Lemma 9. *Sei $L \subset T$ eine seperable und algebraische Körpererweiterung und $R \longrightarrow L$ ein Ringhomomorphismus. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/R} = T \otimes_L \Omega_{L/R}$$

*Insbesondere ist in diesem Fall die COTANGENT SEQUENZ (**??**) von $R \to L \hookrightarrow T$ eine kurze Exakte Sequenz:*

$$0 \longrightarrow T \otimes_L \Omega_{L/R} \longrightarrow \Omega_{T/R} \longrightarrow \Omega_{T/L} \longrightarrow 0$$

Transzendenzbasis ist Differenzialbasis *[vlg. Theorem 16.4 David Eisenbud 1994]*

Theorem 10. *Sei $T \supset k$ eine seperabel generierte Körpererweiterung und $B = \{b_i\}_{i\in\Lambda} \subseteq T$. Dann ist B genau dann eine Differenzialbasis von T über k, falls eine der folgedenen Bedingungen erfüllt ist:*

1. *char(k) = 0 und B ist eine Transzendenzbasis von T über k.*

2. *char(k) = p und B ist eine p-Basis von T über k.*