Proposition 1.

1. *Sei $T = \otimes_{i\in\Lambda} S_i$ das Coprodukt der R-Algebren S_i. Dann gilt:*

$$\Omega_{T/R} \simeq \bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$$

2. *Seien S_1, S_2 R-Algebren und $\varphi, \varphi' : S_1 \longrightarrow S_2$ R-Algebra-Homomorphismen. Sei weiter $q : S_2 \longrightarrow T$ der Differenzenkokern von φ,φ'. Dann ist folgende Sequenz rechtsexakt:*

$$T \otimes_{S_1} \Omega_{S_1/R} \xrightarrow{f} T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R} \xrightarrow{g} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

mit: $f : T \otimes \Omega_{S_1/R} \longrightarrow T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R}\,,\ t \otimes d_{S_1}(x_1) \longmapsto t \otimes d_{S_2}(\varphi(x_1) - \varphi(x_2))$

$g : T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R} \longrightarrow \Omega_{T/R}\,,\ t \otimes d_{S_2}(x_2) \longmapsto (d_{S_2} \circ q)(x_2)$

Beweis. Für ***1.*** Finde durch die Universelle Eigenschaft des Kählerdifferenzials Isomorphismen $\Omega_{T/R} \longleftrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$.
Definiere das Differenzial $e : T \longrightarrow \sum_{i\in\Lambda} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}\,,\ (s_i \otimes ...) \longmapsto (1 \otimes d_{S_1}, ...)$ und erhalte dadurch

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "d_T"] \arrow[dr, "e"'] & \Omega_{T/R} \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & \sum_{i\in\Lambda} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \end{tikzcd} \qquad \varphi : \Omega_{T/R} \longrightarrow \bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}).$$

Definiere nun das Differenzial $k : S_i \hookrightarrow T \longrightarrow \Omega_{T/R}$ und erhalte dadurch

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[r, "d_{S_i}"] \arrow[dr, "k"'] & \Omega_{S_i/R} \arrow[r, "a"] \arrow[d, dashed, "\exists!k'"] & T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \arrow[dl, "\phi_i"] \\ & \Omega_{T/R} & \end{tikzcd} \qquad \phi_i : \bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \longrightarrow \Omega_{T/R}$$

$$\phi : \sum_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) \longrightarrow \Omega_{T/R}\,,\ (t_1 \otimes d_{S_i}s_1, ...) \longmapsto \prod_{i\in\Lambda} t_i \cdot \phi_i(d_{S_i}(s_i)).$$

Damit haben wir zwei zueinander inverse Funktionen φ, ϕ gefunden.
$\Rightarrow \Omega_{T/R} \simeq \bigoplus_{i\in\Lambda}(T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R})$

Für ***2.*** Wende **??** auf den Differenzenkokern $q : S_2 \longrightarrow S_2/Q$ an und erhalte dadurch eine exakte Sequenz, welche ähnlich zu der gesuchten ist:

$$Q/Q^2 \xrightarrow{f'} T \otimes \Omega_{S_2/R} \xrightarrow{g} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

$mit : f' : Q/Q^2 \longrightarrow T \otimes_{S_2} \Omega_{S/R}\, , \, [s_2]_{Q^2} \longmapsto 1 \otimes d_{S_2}(s_2)$
Somit gilt $im(f) = T \otimes_{S_2} d_{S_2}(Q) = im(f')$.
$\Rightarrow$ die gesuchte Sequenz ist exakt. $\square$