FACULTEIT INGENIEURSWETENSCHAPPEN EN ARCHITECTUUR

Hoofdstuk 2 – Verzamelingen, relaties & functies

Discrete wiskunde

dr. ir. Cedric De Boom

IDLab - imec

UNIVERSITEIT GENT

IDLab INTERNET & DATA LAB

imec

Verzamelingen

Verzamelingen

Verzameling = niet-geordende collectie van objecten (= elementen)

Notaties:

$a \in A$ (i.e. het element a maakt deel uit van de verzameling A)

$a \notin A$

$\emptyset$ is de lege verzameling

Voorstellingswijzen:

- Via expliciete opsomming, bv. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Via een voorschrift, bv. $\mathbb{Z} = \{z \mid z \in \mathbb{N} \text{ of } -z \in \mathbb{N}\}$

Cardinaliteit = aantal elementen in een verzameling

Notatie:

$\#\{1,2,3,4\} = 4$

$\#\emptyset = 0$

Deelverzamelingen

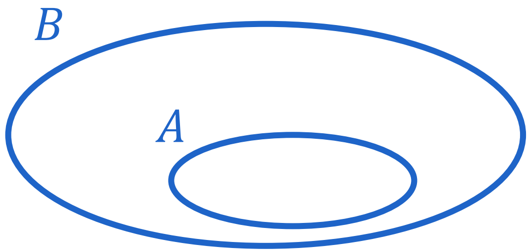
Als elk element van A ook tot B behoort, dan is A een **deelverzameling** van B

Wiskundig: $\forall a \in A: a \in B$

Notaties:

$A \subseteq B$ A is een deelverzameling van B

$A \subset B$ A is een strikte deelverzameling van B



Onechte deelverzamelingen van A zijn $\emptyset$ en A zelf

Machtsverzameling of delenverzameling

Machtsverzameling van A = verzameling van alle mogelijke deelverzamelingen van A

Het is m.a.w. een verzameling van verzamelingen

Notatie: $\mathcal{P}(A)$

Bijvoorbeeld:

Stel $A = \{1,2,3\}$

Dan $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

Vraag: als $\#A = n$, wat is dan $\#\mathcal{P}(A)$?

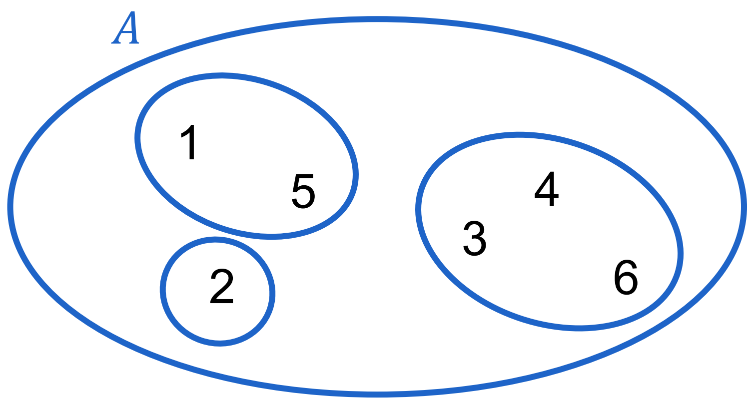
Partitie (niet in cursus)

Partitie van A = strikte ‘opsplitsing’ van A in verschillende verzamelingen

Bijvoorbeeld:

Stel $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

Dan is een mogelijke partitie P bijv. $P = \{\{2\},\{1,5\},\{3,4,6\}\}$



Wiskundig:

$\forall X \in P: \emptyset \neq X \subset A$

$\forall x \in A: \exists!\, X \in P: x \in X$

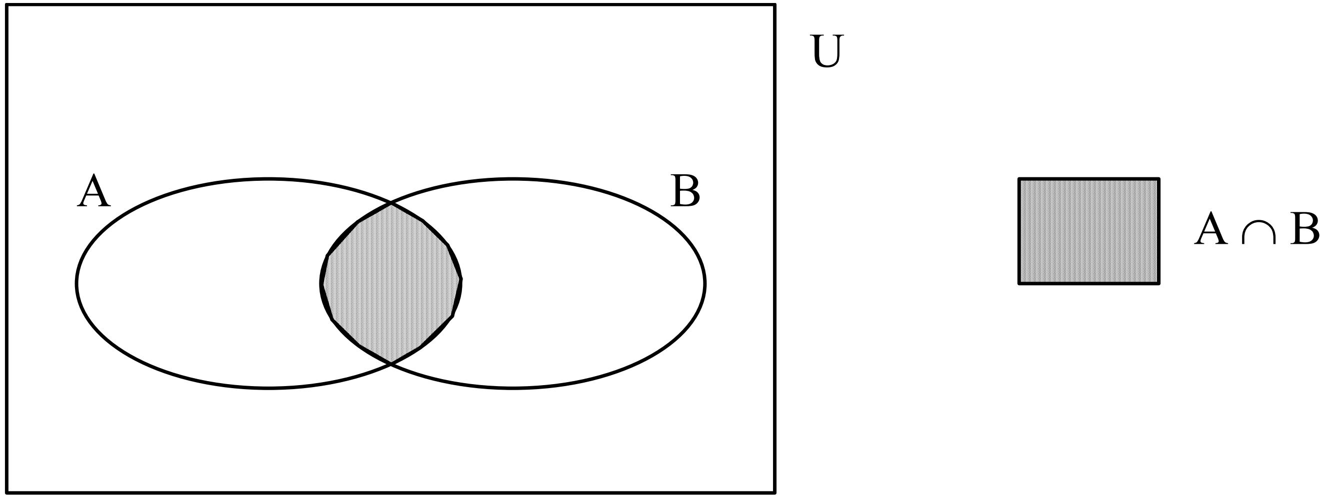
Doorsnede

Notatie en definitie:

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ en } x \in B\}$$

Twee verzamelingen zijn **disjunct** a.s.a. $A \cap B = \emptyset$

Voorbeeld: alle deelverzamelingen van een partitie zijn disjunct

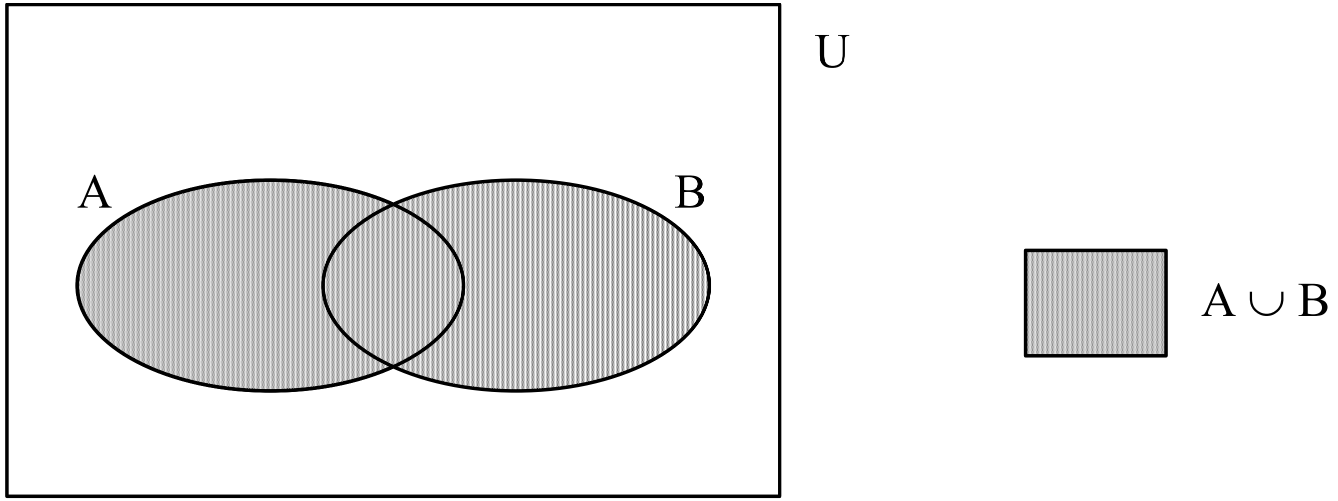


NB: U is het **universum** = de verzameling die alle elementen bevat

Unie

Notatie en definitie:

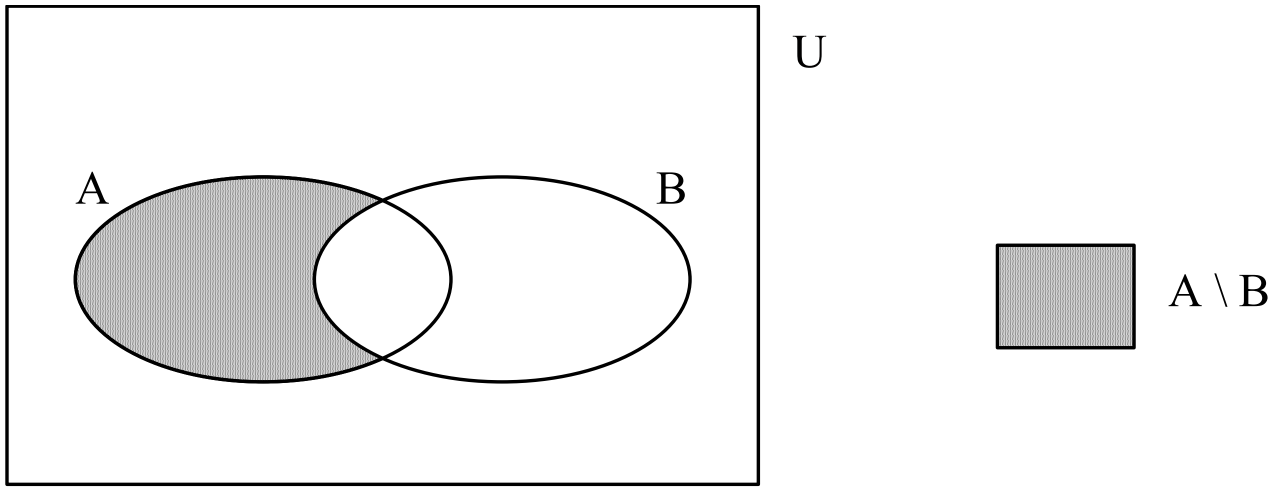
$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ of } x \in B\}$$



Verschil

Notatie en definitie:

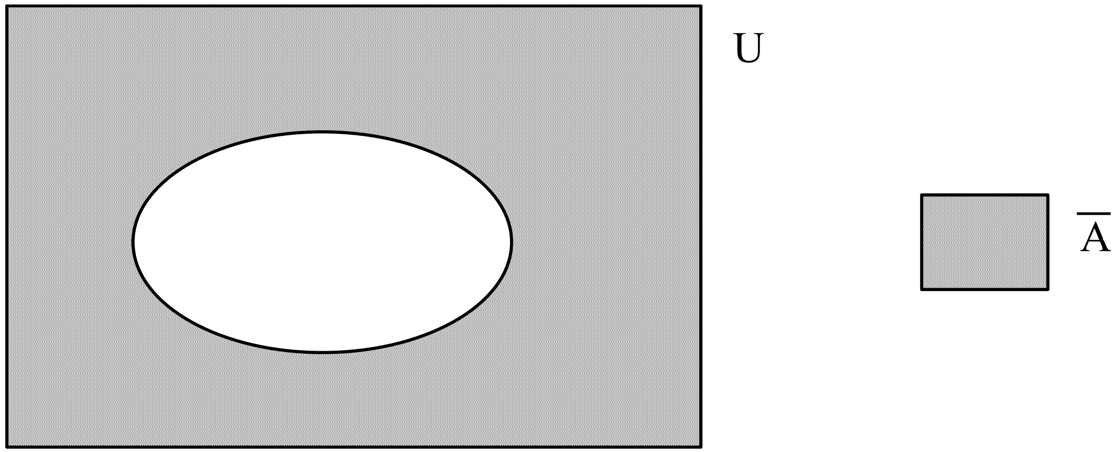
$$A \backslash B = \{x \in U \mid x \in A \text{ en } x \notin B\}$$



Complement

Notatie en definitie:

$$\bar{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$



Enkele nuttige eigenschappen

Associativiteit:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Commutativiteit:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$\mathrm{A} \cap B = B \cap A$$

Distributiviteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Wetten van De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Kunnen ‘bewezen’ worden a.d.h.v. venndiagrammen

Cartesisch product

Cartesisch product $A \times B$ tussen twee verzamelingen A en B

= de verzameling van alle *geordende koppels* met element 1 uit A en element 2 uit B

Voorbeeld:

$\{a, b\} \times \{a, b, c\} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c)\}$

Wiskundig:

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ en } b \in B\}$

Uitbreiding naar meerdere verzamelingen mogelijk:

$A_1 \times A_2 \times A_3$ leidt tot triples

$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ leidt tot quadruples

$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ leidt tot *k*-tuples

Speciaal geval(!): A^n is het cartesisch product van A, n keer met zichzelf

Relaties en functies

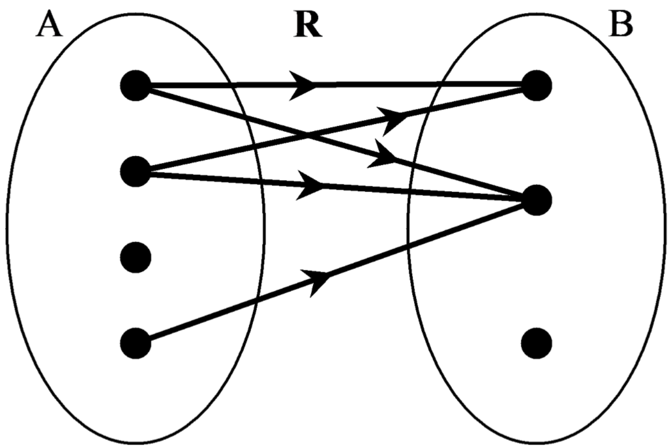
Relatie

Een **relatie** R tussen twee verzamelingen A en B is een deelverzameling van $A \times B$

Notatie:

$R \subset A \times B$

$R: A \to B$



Het **domein** van R

= de verzameling van alle punten van waaruit een pijl vertrekt

= $\{a \in A: \exists b \in B \text{ waarvoor } (a, b) \in R\}$

Het **bereik** of **codomein** van R

= de verzameling van alle punten waarin in een pijl toekomt

= $\{b \in B: \exists a \in A \text{ waarvoor } (a, b) \in R\}$

Relatie

Toepassingen:

- Wiskunde zelf
- Programmeertalen: functies, methoden, procedures, ...
- Relationele databanken

Taster

identifier	name
g_001	Leila
g_002	Mark
g_003	Luke
g_004	Sarah

Variety

identifier	price_per_kilo	maturity	taste
Red Delicious	3.19	Late Sept.	sweet
Braeburn	3.49	Mid. Oct.	sweet/tart
Gala	3.19	Mid. Sept.	sweet

PRODUCT

Taster_Variety

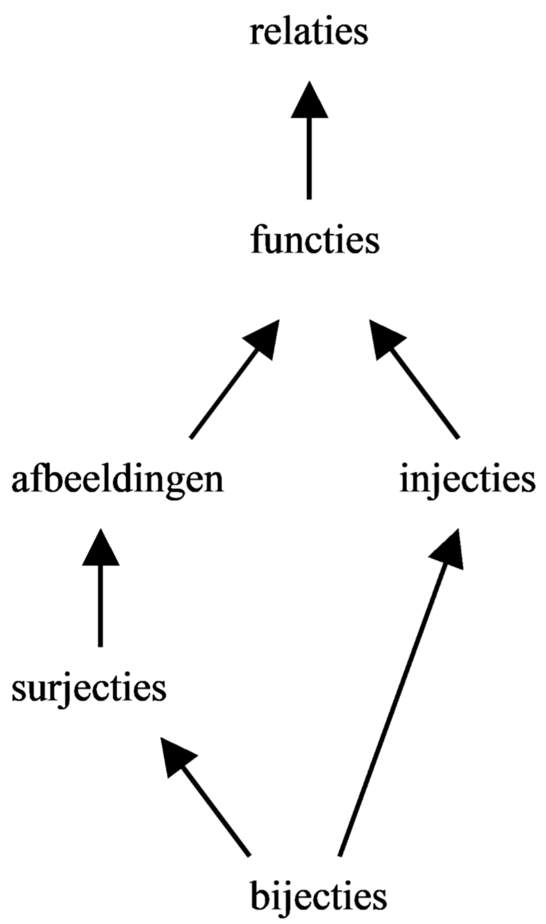
identifier	name	label	price_per_kilo	maturity	taste
g_001	Leila	Red Delicious	3.19	Late Sept.	sweet
g_001	Leila	Braeburn	3.49	Mid. Oct.	sweet/tart
g_001	Leila	Gala	3.19	Mid. Sept.	sweet
g_002	Mark	Red Delicious	3.19	Late Sept.	sweet
g_002	Mark	Braeburn	3.49	Mid. Oct.	sweet/tart
g_002	Mark	Gala	3.19	Mid. Sept.	sweet
g_003	Luke	Red Delicious	3.19	Late Sept.	sweet
g_003	Luke	Braeburn	3.49	Mid. Oct.	sweet/tart
g_003	Luke	Gala	3.19	Mid. Sept.	sweet
g_004	Sarah	Red Delicious	3.19	Late Sept.	sweet
g_004	Sarah	Braeburn	3.49	Mid. Oct.	sweet/tart
g_004	Sarah	Gala	3.19	Mid. Sept.	sweet

Functie, afbeelding, bijectie, injectie en surjectie

Afhankelijk van bijkomende eigenschappen, kan men een relatie verder classificeren

speciale relatie van A naar B	# pijlen vertrekkend uit punt van A	# pijlen toekomend in punt van B
functie	≤ 1	–
afbeelding	1	–
bijectie	1	1
injectie	≤ 1	≤ 1
surjectie	1	≥ 1

– betekent 'niet nader gespecificeerd'



Functie, afbeelding, bijectie, injectie en surjectie

Voorbeeld:

$$R = \{(q, q') \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\colon q' = q^2\}$$

speciale relatie van A naar B	# pijlen vertrekkend uit punt van A	# pijlen toekomend in punt van B
functie	≤ 1	–
afbeelding	1	–
bijectie	1	1
injectie	≤ 1	≤ 1
surjectie	1	≥ 1

Vanuit elk punt vertrekt sowieso een pijl

(want elke breuk heeft een kwadraat in $\mathbb{Q}$)

Niet in elk punt komt een pijl toe; in de meeste punten komen 2 pijlen toe

bijv. in 2 komt geen pijl toe, in 4 komen twee pijlen toe

Dus: R is een functie en afbeelding, maar geen bijectie, injectie of surjectie

Aantal elementen

Verzamelingen A en B bevatten evenveel elementen

$\Leftrightarrow$ er bestaat een bijectie van A naar B (of omgekeerd)

Is intuïtief voor **eindige** verzamelingen

Ook voor **oneindige** verzamelingen?

Bijv. bestaat er een bijectie van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{Z}$?

Ja!

$$R\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}\colon n \mapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{als } n \text{ even} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}$$

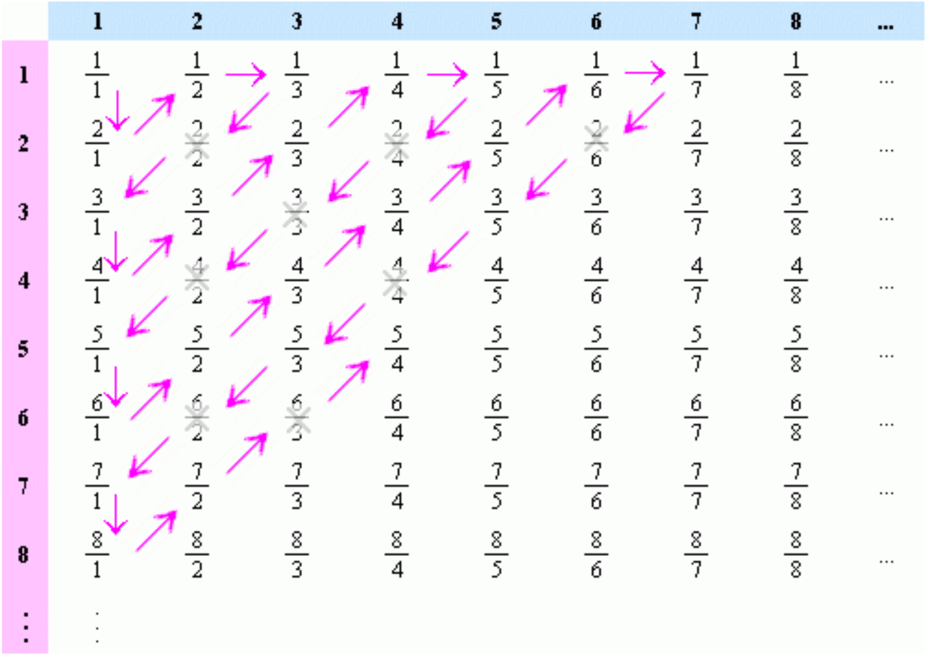
Dus $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ bevatten evenveel elementen

Aftelbaar en onaftelbare verzamelingen

Er wordt onderscheid gemaakt tussen

- **Eindig aftelbare** verzameling: iedere eindige verzameling is aftelbaar
- **Oneindig aftelbare** verzameling: er bestaat een bijectie met $\mathbb{N}$
- **Oneindig overaftelbare** verzameling: er bestaat geen bijectie met $\mathbb{N}$

Grafisch bewijs: $\mathbb{Q}$ is aftelbaar



Eigenlijk is dit een surjectie i.p.v. een bijectie,
maar dat is nog sterker dan een bijectie
(we tellen soms dubbel), dus zeker aftelbaar

Is $\mathbb{R}$ aftelbaar of overaftelbaar? Het diagonaalargument van Cantor

Gerelateerde vraag: is $]0,1]$ overaftelbaar?

Voorstel bijectie van N naar [0,1] :

0 → 0.2718…

1 → 0.4679…

2 → 0.4976…

3 → 0.9999…

…

Construeer nu als volgt een getal *r* :

0.

1e decimaal ≠ 2

2e decimaal ≠ 6

3e decimaal ≠ 7

4e decimaal ≠ 9

…

(bijkomende voorwaarde : geen 0 of 9 gebruiken, bv. 0.6999… = 0.7000...)

Dan: *r* komt niet aan bod in “bijectie”

Dus: [0,1] is overaftelbare verzameling

En bijgevolg: $\mathbb{R}$ is overaftelbaar

Orderelaties: partieel vs totaal, gewoon vs strikt

R is een **partiële orderelatie** in $V \Leftrightarrow$

reflexiviteit $\forall x \in V: (x, x) \in R$

anti-symmetrie $\forall x, y \in V: (x, y) \in R$ en $(y, x) \in R \Rightarrow x = y$

transitiviteit $\forall x, y, z \in V: (x, y) \in R$ en $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

R is een **totale orderelatie** in $V \Leftrightarrow$

$\forall x, y \in V: (x, y) \in R$ of $(y, x) \in R$

Strikte orderelaties zijn niet-reflexief: alle (x, x)-pijlen vallen weg

Voorbeelden:

$\subset$ in de machtsverzameling $\mathcal{P}(A)$ van een verzameling A

$\leq$ en $<$ bij natuurlijke getallen

Oefening

Classificeer volgende relaties (partiële/totale orde, strikte orde, geen orde)

1. Relatie R_1: '… deelt …' in {1, 2, 3, …, 12}
2. Relatie R_2: '… heeft dezelfde ouders als …'