In anderen Worten: Eine Gleichung der Form (*) ist exakt, falls das Vektorfeld $F = (F_1, F_2)$ auf U eine Stammfunktion besitzt.

Ist U sternförmig und F stetig differenzierbar, so ist dies äquivalent zu Bedingung

$$\underline{\partial_2 F_1(t,u) = \partial_1 F_2(t,u)} \qquad \forall\, (t,u) \in U \qquad (*)$$

(Integrabilitätsbedingung, siehe Analysis 2).

Ist für eine exakte Differentialgleichungen nun das Potential bekannt, so liefert dies im Falle der Existenz eine implizite Darstellung der Lösung der Form $\phi(t,u(t)) = c$ für $c \in \mathbb{R}$ in einer Umgebung um die Anfangsbedingung (t_0,u_0). Umgekehrt kann durch lop

Ist eine Differentialgleichung exakt, so gilt es, das Potential zu finden. Dabei kann man wie folgt vorgehen:

$$\partial_1 \phi(t,u) = F_1(t,u) \Rightarrow \underline{\phi(t,u) = \int F_1(t,u)\,dt + \varphi(u)}$$

für eine Funktion φ

$$\Rightarrow \partial_2 \phi(t,u) \overset{!}{=} \partial_2 \int F_1(t,u)\,dt + \varphi'(u) = F_2(t,u)$$

$$\Rightarrow \underline{\varphi'(u) = F_2(t,u) - \partial_2 \int F_1(t,u)\,dt \quad (*)}$$

Es gilt $\partial_1 F_2(t,u) - \partial_1\partial_2 \int F_1(t,u)\,dt = \partial_1 F_2(t,u) - \partial_2 \underbrace{\partial_1 \int F_1(t,u)\,dt}_{F_1}$

$$= \partial_1 F_2(t,u) - \partial_2 F_1(t,u) = 0, \text{ da } (*) \text{ gilt.}$$

Daher hängt die rechte Seite in (*) nur von u ab und Integration nach u liefert eine explizite Darstellung von φ. Mit einer Anfangsbedingung wird weiters der Wert von c festgelegt.

Beispiel 1.18

$$2t\,u(t) - 9t^2 + (2u(t) + t^2 + 1)\,u'(t) = 0, \quad u(0) = -3.$$

Mit $F_1(t,u) := 2tu - 9t^2$ $\quad F_2(t,u) := 2u + t^2 + 1$

gilt

$$\partial_2 F_1(t,u) = 2t = \partial_1 F_2(t,u) = 2t$$

Da F_1, F_2 auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert werden können besitzt $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F = (F_1, F_2)$ eine Stammfunktion $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}. \in C^2(\mathbb{R}^2)$,

$$\partial_1 \phi(t,u) = F_1(t,u) = 2tu - 9t^2$$

$$\Rightarrow \quad \phi(t,u) = \int (2tu - 9t^2)\,dt = t^2u - 3t^3 + \varphi(u)$$

$$\partial_2 \phi(t,u) = t^2 + \varphi'(u) = F_2(t,u) = 2u + t^2 + 1$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(u) = 2u + 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(u) = u^2 + u + c_0 \qquad c_0 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \phi(t,u) = t^2u - 3t^3 + u^2 + u + c_0$$

Die Gleichung $\phi(t,u) = \text{const}$ liefert $t^2u - 3t^3 + u^2 + u = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und durch Einsetzen von $(t_0, u_0) = (0,-3)$ folgt $c = 6$.

Die Gleichung $t^2u - 3t^3 + u^2 + u - 6 = 0$ läßt sich lokal um (t_0, u_0) nach u auflösen und dies ist sogar explizit möglich

$$u(t) = \frac{1}{2}\left(-(t^2+1) - \sqrt{t^4 + 12t^3 + 2t^2 + 25}\right)$$

für $t \in I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $0 \in I$, so dass die Wurzel definiert

Bemerkung 1.19 Um das Potential im gegebenen Fall zu finden, ist es egal, nach welcher Variable man integriert. Das Vorgehen ist dann entsprechend anzupassen.

Bemerkung 1.20 Die Bedingung an U läßt sich noch abschwächen. Statt sternförmig genügt es, dass U EINFACH ZUSAMMENHÄNGEND (und offen) ist, damit aus den Integrabilitätsbedingungen bereits die Existenz einer Stammfunktion geschlossen werden kann.
Dabei ist U einfach zusammenhängend, falls U wegzusammenhängend ist und sich jeder stetige, geschlossene Weg auf einen Punkt zusammenziehen läßt (siehe Analysis 4).

Bemerkung 1.21 (INTEGRIERENDER FAKTOR)

Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form

$$F_1(t,u(t)) + F_2(t,u(t))\,u'(t) = 0 \qquad (*)$$

$F_i : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig diffb., U offen.
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $u \in C^1(I)$ eine Lösung, so dass $(t,u(t)) \in U \ \forall\, t \in I$.

Multiplikation mit einer Funktion $\mu : U \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ liefert

$$\mu(t,u(t))\,F_1(t,u(t)) + \mu(t,u(t))\,F_2(t,u(t))\,u'(t) = 0 \quad (**)$$

Da $\mu \neq 0$ gilt für $u \in C^1(I)$: u löst $(**)$ $\Leftrightarrow$ u löst $(*)$.

μ heißt integrierender Faktor zu (F_1, F_2), falls das Vektorfeld

$$(t,u) \mapsto \begin{pmatrix} \mu(t,u)\,F_1(t,u) \\ \mu(t,u)\,F_2(t,u) \end{pmatrix}$$

ein Potential besitzt.

Einen integrierenden Faktor zu finden ist aber auch schwierig und oft nur in Spezialfällen möglich (siehe Übungen).

(2) ALLGEMEINE LÖSUNGSTHEORIE

Sei $U \subset \mathbb{R}^{d+1}$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^d$ stetig.
Im folgenden untersuchen wir für $(t_0, v_0) \in U$ Anfangswertprobleme der Form

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)) \\ u(t_0) &= v_0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

Unter einer Lösung von (2.1) verstehen wir eine Funktion $u \in C^1(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $t_0 \in I$ und $(t, u(t)) \in U$ für alle $t \in I$, so dass (2.1) punktweise erfüllt ist.

Es stellen sich (unter anderem) folgende Fragen:

i) Existiert für alle $(t_0, v_0) \in U$ ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ und eine Lösung $u \in C^1(I)$?

ii) Ist diese Lösung eindeutig?

iii) Hängt die Lösung stetig von v_0 ab, d.h. die Lösung ändert sich (lokal um t_0) nur wenig, wenn sich v_0 nur wenig ändert?

Ist i) - iii) erfüllt, so nennt man das Anfangswertproblem (2.1) (LOKAL) WOHLGESTELLT.

2.1 Lokale Wohlgestelltheit

Grundlage für unsere Betrachtungen ist nachfolgendes Lemma.

Lemma 2.1 Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen, $I_0 \subset I \subset \mathbb{R}$ Intervalle $f: I \times D \to \mathbb{R}^d$ stetig, $v_0 \in D$, $t_0 \in I_0$ und $u \in C(I_0, D)$.
Genau dann gilt

$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t \in I_0$$
$$u(t_0) = v_0$$

wenn u die Gleichung

$$u(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \qquad (2.2)$$

$\forall t \in I_0$ erfüllt

Beweis: Da u und f stetig sind, ist auch die Abbildung $I_0 \to \mathbb{R}^d$, $t \mapsto f(t, u(t))$ stetig. Ist (2.2) erfüllt so gilt nach dem Hauptsatz $u \in C^1(I_0, D)$ und durch Ableiten folgt $u'(t) = f(t, u(t))$. Außerdem gilt $u(t_0) = v_0$.
Erfüllt u umgekehrt die Differentialgleichung, so folgt wieder aus dem Hauptsatz die Gültigkeit von (2.2). $\square$

Im Folgenden werden wir uns daher mit der eindeutigen Lösbarkeit der Integralgleichung (2.2) befassen.