Extra Übungsblatt III Tutorium 12.12.2024

Meinschad Lukas
Mathematik für Chemiker

December 8, 2024

Aufgabe 1. Forme zuerst folgende komplexe Zahlen um:

$$(4+i)+(3-i)$$
$$5(2-i)+i(3-2i)$$
$$(4+2i)(5-3i)$$
$$(2+3i)(1+i)+(4-3i)$$

Und als Übung berechnen wir noch ein paar Quotienten:

$$\frac{5+i}{3+2i}$$
$$\frac{3+3i}{i}$$
$$\frac{i}{2-i}$$

Nun betrachten wir nochmal die Polarkoordinatendarstellung. Wir haben folgende Varianten zur Umrechnung:

- **Polarkoordinaten zu kartesische Koordinaten:** $Re(z) = r\cos\varphi$ und $Im(z) = rsin(\varphi)$
- **Von kartesischen zu Polarkoordinaten:** Tupel $z = (r, \varphi)$ mit $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$
  Zur Berechnung von φ gilt:

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\frac{a}{r} \; b0 \\ -\arccos\frac{a}{r} \; b<0 \end{cases} \tag{1}$$

Damit bestimme nun die Polarkoordinatendarstellung folgender komplexer Zahlen

$$3+3i$$
$$3-3i$$
$$-4-4i$$
$$5+3i$$

Auch haben wir die Euler-Formel und die Rechenregeln betrachtet hier nochmals

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$
$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

Nun noch ein paar Aufgaben zu Wurzeln, Potenzen etc, verwende die Rechenregeln die in der VO besprochen wurden

$$
\begin{aligned}
&(2+2i)^8 \\
&(4+4i)^6 \\
&z^5 = 2 \\
&z^7 = 3
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2. Als nächstes schauen wir uns nochmals den Gauß-Algorithmus sowie die Matrixmultiplikation an.
Berechne zuerst folgende Matrixmultiplikationen:

$$
\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}
$$
$$
\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}
$$
$$
\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}
$$

Als nächstes bestimme die Lösungen der folgenden Systeme an linearen Gleichungen durch den Gauß Algorithmus:

$$
\begin{aligned}
2x + y + z &= -1 \\
x + 2y + z &= 0 \\
3x - 2z &= 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-2x + 3y + 3z &= -9 \\
3x - 4y + z &= 5 \\
-5x + 7y + 2z &= -14
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3x - 2y + z &= -3 \\
x - y + 3z &= 5 \\
-x + y + z &= -1
\end{aligned}
$$

Dann bestimmen wir noch ein paar Inverse Matrizen:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$
$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

Aufgabe 3. Nun schauen wir uns zuletzt zuletzt einige Aufgaben zur linearen Unabhängigkeit, Erzeugendensystem, Basis an
Betrachte zuerst den K-VR $\mathbb{R}^2$ und folgende Vektoren, sind diese eindeutig (linear unabhängig)?

$$
u = (16 - 2)^T, v = (-3, 8)^T \tag{2}
$$

Dann den K-VR $\mathbb{R}^{\ntrianglerighteq}$:

$$u_1 = (5, 0, 5, -4)^T, u_2 = (0, 5 - 5, -3)^T, u_3 = (5, -5, 10, -1)^T, u_4 = (-4, -3, -1, 5)^T \tag{3}$$

Für die nächste Aufgabe betrachte folgende Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Sind diese Vektoren eindeutig, EZS, Basis?
Und noch ein letztes Beispiel, betrachte im $\mathbb{R}^3$:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Sind diese drei Vektoren eindeutig, weiteres wie kann man den Vektor $x = (-3, 4, 7)^T$ darstellen gib die Linearkombination explizit an?