PS Analysis 3 **WS 2024/25**

Übungszettel 10 (CA)

Karin Schnass *ankreuzbar bis 10.12., 8:00*

1. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $F : U \times [0,1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass für alle $t \in [0,1]$ die Funktion $F_t : U \to \mathbb{C}, z \mapsto F(z,t)$ holomorph ist. Zeige, dass die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ definiert durch
$$f(z) := \int_0^1 F(z,t)\,\mathrm{d}t$$
holomorph ist.
Hinweis: Betrachte die Folge der Riemann-Summen $f_n(z) = \sum_{k=1}^n F(z, \frac{k}{n})$ auf einem geeigneten Ball $B_r(z_0) \subset \bar{B}_r(z_0) \subset U$.

2. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig mit kompaktem Träger, dh. $\overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ ist kompakt. Zeige, dass $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch
$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi \mathrm{i} t\omega}\,\mathrm{d}t$$
analytisch (auf ganz $\mathbb{R}$) ist und dass $\hat{f}$ nur dann auf einem Intervall $\emptyset \neq (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ verschwinden kann, wenn gilt $\hat{f} = 0$.
Hinweis: Verwende Beispiel 1.

3. Berechne für $Q = \{z : |\mathrm{Re}(z)| \leq 1, |\mathrm{Im}(z)| \leq 1\} \subset \mathbb{C}$
$$\min_{z \in Q} |z + z^2| \qquad \text{und} \qquad \max_{z \in Q} |z + z^2|.$$

4. Bestimme alle isolierten Singularitäten der durch die folgende Ausdrücke definierten Funktionen, $f : U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \dots$
$$\frac{z^6 - 1}{z^4 - 1}, \qquad \frac{z}{e^z - 1}, \qquad \cos(1/z), \qquad z^2 \cdot \sin(1/z), \qquad \frac{\sin(z) - z}{z^3}.$$

5. (a) Zeige, dass eine auf einem Gebiet G meromorphe Funktion $f \neq 0$ höchstens abzählbar viele Pole und Nullstellen haben kann.
   (b) Zeige, dass die Menge der meromorphen Funktionen auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Körper bezüglich $+, \cdot$ mit $(f+g)(z) = f(z) + g(z)$ bzw. $(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z)$ sind.