Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass A_4 keine Untergruppe mit 6 Elementen hat

Beweis Sei also $U < A_4$ mit $\# U = 6$ Elemente

Zu zeigen ist das A_4 keine Untergruppe der Ordnung 6 hat

Betrachte nochmal S_n und den Gruppenhomomorphismus $A_n := \ker(sgn)$ wird alternierende Gruppe genannt

damit besteht A_n aus allen geraden Permutationen einer n-elementigen Menge.

$\Rightarrow$ Alle geraden Permutationen $\Rightarrow \# A_4 = 12$

Primfaktorzerlegung $12 = 2^2 \cdot 3$

① Satz von Lagrange: Für $H < G$ ist $\# H$ Teiler von $\# G$

Damit alle möglichen Untergruppen Teiler von 12 $\quad A_4 : 1, 2, 3, 4, 6$ und 12

② Erster Sylowsatz

"Sei G endliche Gruppe mit $\# G = p^r m$ mit p Primzahl und $p \nmid m$.

Dann gilt es für $0 \le k \le r$ eine Untergruppe H von G mit $\# H = p^k$

Es ist $\# A_4 = 2^2 \cdot 3$

- 2-Sylow Untergruppe H_2 mit $\# H_2 = 2^2 = 4$
- 3-Sylow Untergruppe H_3 mit $\# H_3 = 3^1 = 3$

$\Rightarrow$ Sylowsatz gilt Existenz von 2/3 Sylowuntergruppen in A_4

③ 3. Sylowsatz

"Sei G eine endliche Gruppe mit $\# G = p^r m$ mit $p \nmid m$ Primzahl

Sei dann s die Anzahl der p-Sylowgruppen in G dann gilt

$s \mid m$ und $s \equiv 1 \bmod p$"

- Betrachten wir zuerst die 3-Sylowgruppen

$p = 3$ ist Sylow-3-Untergruppe mit Ordnung 3

$n_3 \equiv 1 \pmod 3 \quad \Rightarrow$ Zudem $s / 4$

Es ist $4 - 1 = 3 \bmod 3$ ✓

$\Rightarrow$ 4 - 3 Sylow Untergruppen in A_4 mit Ordnung 3

- Betrachten wir die 2-Sylowgruppen Ordnung 4

$n_2 \equiv 1 \pmod 2$ damit n_2 ungerade

n_2 muss Teiler von 3 sein

$\Rightarrow$ Mögliche Teiler sind 1 und 3

Aufgabe 3

Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen mit 5, 6 und 7 Elementen

Naja verwenden wir hierzu alles was wir bereits gelernt haben

Korollar 2.2.4: Jede Gruppe G mit $\# G = p$, p Primzahl ist zyklisch und abelsch

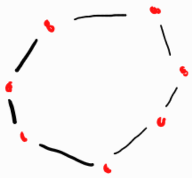
Korollar 2.2.3: Jede zyklische Gruppe ist isomorph zu $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Satz von Lagrange: Für $H < G$ gilt $\# H \mid \# G$

Lemma von Cauchy: Sei G Gruppe und p Primzahl mit $p \mid \# G$. Dann existiert ein Element g $\operatorname{ord}(g) = p$

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$



• Gruppe mit 5 Elementen $\cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ zyklisch und abelsch. Nach Satz von Lagrange Mögliche Untergr. 1, 5 damit die einzige Echte Untergruppe $\{e\}$

• Gruppe mit 7 Elementen $\cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ zyklisch und abelsch, nach Mögliche Untergruppe 1, 7 damit einzige echte Untergruppe $\{e\}$

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

• Gruppe mit 6 Elementen: $\Rightarrow$ Lagrange 1, 2, 3, 6 als -ungruppen

Mehrere Möglichkeiten: • Zyklische Gruppe wie $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3$

Betrachte Ordnung von $(1,1) \to (0,2) \to (1,0) \to (0,1) \to (1,2) \to (0,0)$

zB $(1,1)$ hat Ordnung 6 damit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ zyklisch

Spezielle Betrachtung von G mit $\# G = 6$

$\Rightarrow$ Satz von Cauchy $\Rightarrow$ Es existiert ein Element g von G mit ord 2 und ord 3

$(ab)^2 = a^2 b^2 = b^2 \neq e$

$(ab)^3 = a^3 b^3 = a^3 = a \neq e$

Sei nun $\operatorname{ord}(a) = 2$, $\operatorname{ord}(b) = 3$

Wenn G abelsch ist so gilt $\Rightarrow |ab| = 6$ möglichkeiten 1, 2, 3, 6

$G \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

wenn also G abelsch ist ist es zyklisch mit Erzeuger $\langle a, b \rangle$

Sei nun G nicht abelsch speziell $ab \neq ba$ 6-Elemente der Gruppe

dann sind $\boxed{e, a, b, b^2, ab, ba}$

$\Rightarrow \exists$ eine nicht abelsche Gruppe der Ordnung 6 das ergibt $G \cong S_3$ der Permutationsgruppe S_3 6 Elementen

$\Rightarrow S_3$ sind sechs Permutationen einer dreielementigen Menge

---

Aufgabe 4

Für $n \geq 3$ betrachten wir die Untergruppe D_n von $GL_2(\mathbb{R})$ die von der Spiegelung s an der x-Achse und der Drehung r um den Winkel $2\pi/n$ gegen den Uhrzeigersinn erzeugt wird. Zeigen Sie:

a) Es gilt $sr = r^{-1}s$

da $D_n < GL_2(\mathbb{R})$ betrachten wir geometrische Aussage der Elemente

- s ist die Spiegelung an der x-Achse $\quad s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- r ist die Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ gegen den Uhrzeigersinn $\quad r = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$

Betrachte
$$sr = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$$

Anwenden Sinus/Cosinus odd und even

Es ist r^{-1} eine Drehung um $-\frac{2\pi}{n}$

damit $r^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$

dann gilt
$$r^{-1}s = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$$

damit zeigt dies die Äquivalenz in der geometrischen Interpretation

ii) D_n hat $2n$ Elemente

D_n wird generiert durch Spiegelung s und Rotation r

Es gilt:
- $r^n = e$ was einer Drehung von $n \cdot \frac{2\pi}{n} = 2\pi = e$ entspricht
- $s^2 = e$ da eine doppelte Spiegelung das normale Element wiedergibt
- (i) $\Rightarrow$ $sr = r^{-1}s$ Spiegeln dann Rotieren gleich wie anders rotieren dann spiegeln

Aufzählen der Elemente

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ r^k \text{ mit } k = 0,1,2 \dots n-1 \text{ Rotationen} \\ \bullet\ sr^k \text{ mit } k = 0,1,2 \dots n-1 \text{ Spiegeln dann Rotation} \end{array}\right\} 2n \text{ Elemente}$$

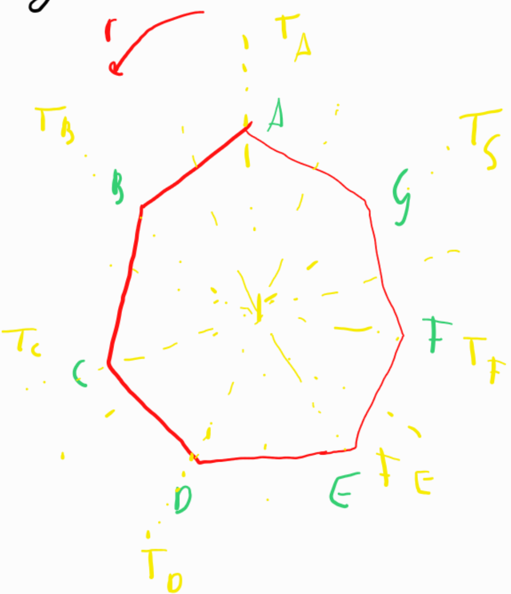
Nun zeigen wir noch diese Elemente sind distinkt

Betrachte wir Rotationen $r^a = r^b \Rightarrow a \equiv b \pmod n \Rightarrow a = b$

Betrachte wir Elemente vom Typ $sr^k \Rightarrow sr^a = sr^b \Rightarrow a \equiv b \pmod n \Rightarrow a = b$

Zudem überlappen sich Elemente nicht angenommen $r^a = sr^b \Rightarrow$ s an $sr = s \cdot s \cdot r$

Generell konnte man die Di gruppe auch als Symme gruppe eines Polygons mit n-Seiten



Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass A_4 keine Untergruppe mit 6 Elementen hat

Betrachte also die alternierende Gruppe A_4

Man hat Permutationen S_n und Gruppenhomomorphismus

$sgn: S_n \to \{1,-1\}$ es ist $\ker(sgn) =: A_n$

Elemente $(1), (12)(34), (13)(23), (13)(24), (14,23)$

$(123), (132), (142), (134), (143), (234), (243)$

Permutationen die ein Produkt aus geraden Anzahl von Transpositionen sind

Beweis: Angenommen $G \cong A_4$ und angenommen $H \leq G$ mit $|H| = 6$

Zeige nun im ersten Schritt $a^2 \in H \quad \forall a \in G \quad (1)$

Wenn $a \in H$ ist trivial, angenommen $a \notin H$

Wir wissen aus Proposition 2.1.12 für $H < G$ gilt $\# gH = \# H = \# Hg$

also ist G disjunkte Vereinigung von Linksnebenklassen und Rechtsnebenklassen

Index gibt uns die Mächtigkeit der Links/Rechtsnebenklassen $|G : H| := \frac{\# G}{\# H} = \#(G/H) = \#(H \backslash G)$

es ist $|G:H| = 2$

Es ist $1H = H$ eine Linksnebenklasse damit aH auch eine distinkte Linksnebenklasse

$\Rightarrow G$ ist Disjunkte Vereinigung $G = aH \cup H \wedge aH \cap H = \emptyset$

Angenommen $a^2 \in aH \Rightarrow a^2 = ah$ für $h \in H \Rightarrow a = h \in H$ ↯

$\Leftrightarrow a^{-1} \cdot a \cdot a = ah$

damit wissen wir $a^2 \in H \ (1)$

Es gilt also $\sigma^2 = \sigma^-$

Sei nun $\sigma = (a b c)$ ein 3-Zyklus in G dann kann man feststellen $(a b c) \cdot (a b c) = (a c b)$

$a \to c$
$b \to a$
$c \to b$

$(a \quad c)(a c b)$

$a \to a$
$\to b$
$\to c$

Das heißt insbesondere $\sigma = (\sigma^2)^2$ damit muss nach $a^2 \in H$ gelten dass jeder 3-Zyklus in H ist

wird auch gültig nach letztem Blatt

Alle geraden Transpositionen und Elemente aus $A_4 \Rightarrow$?

(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), 32), (124), (142), (134) (143) (234) (243)

8 Zyklen damit identisch!