Proseminar Numerische Mathematik 2 am 03. Juni 2025

Erzeugung zufälliger Matrizen mit vorgegebenen Eigenwerten:

- $\mathbf{\Lambda} := \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit den Eigenwerten, die man gerne hätte (einfache, mehrfache je nachdem)
- $\mathbf{S} := \operatorname{random}(n, n)$ Zufallsmatrix
- $\mathbf{A} := \mathbf{S}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}$ zufällige Matrix mit den gewünschten Eigenwerten.
- Um eine symmetrische Matrix zu erstellen bestimmt man eine QR-Zerlegung von $\mathbf{S} = \mathbf{QR}$ und definiert $\mathbf{A} := \mathbf{Q}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}$.

(1) Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{x}\mathbf{y}^T) = 1 + \mathbf{y}^T\mathbf{x}.$$

b) Sei $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Einträgen, $\rho \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ mit von 0 verschiedenen Einträgen. Ist α ein Eigenwert von $\mathbf{D} + \rho\mathbf{u}\mathbf{u}^T$, dann ist $(\mathbf{D} - \alpha\mathbf{I})^{-1}u$ ein Eigenvektor zum Eigenwert α.

(2) Sei $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ eine Diagonalmatrix, $\rho \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Ist $d_i = d_k$, $i \neq k$ oder $u_i = 0$, so ist d_i ein Eigenwert von $\mathbf{D} + \rho\mathbf{u}\mathbf{u}^T$.

b) Ist $u_i = 0$, so ist der i-te Standardbasisvektor e_i ein Eigenvektor von $(\mathbf{D} + \rho\mathbf{u}\mathbf{u}^T)$ zum Eigenwert d_i.

c) Ist $d_i = d_k$ so gibt es eine Givensrotation welche den k-ten Eintrag von $\mathbf{u}$ ($= u_k$) zu Null macht.

(3) Implementieren Sie das Verfahren der Bisktion für symmetrische Matrizen, um die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix berechnen zu können. Berechnen Sie damit die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{10 \times 10}.$$

und anderer symmetrischer Zufallsmatrizen (mit einfachen und mehrfachen Eigenwerten). Bringen Sie die Matrix zu Beginn auf Hessenbergform. Zur Bestimmung der Hessenbergform kann die Funktion `scipy.linalg.hessenberg` verwendet werden.

(4) Implementieren Sie den QR-Algorithmus mit und ohne Shift (falls möglich Wilkinson shift) zur Bestimmung der Eigenwerte einer Matrix. Testen Sie Ihre Implementierung anhand einer Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$ mit $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(1, 2, 6, 30)$ und $\mathbf{S}$ einer zufälligen invertierbaren Matrix.
Bringen Sie die Matrix zu Beginn auf Hessenbergform und vergleichen Sie die Konvergenz des Algorithmus mit und ohne shift. Zur Bestimmung der Hessenbergform kann die Funktion `scipy.linalg.hessenberg` verwendet werden.