

Aufgaben zur Algebra 1

Besprechungstermin: Do. 10. Oktober 2024

Aufgabe 1

Finden Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$z^6 = -1, \quad z^4 = -5i, \quad 2z^2 - 5z + 2 = 0.$$

Aufgabe 2

(i) Zeigen Sie, dass es für $n \geq 1$ genau n verschiedene komplexe Lösungen der Gleichung

$$z^n = 1$$

gibt (diese Lösungen heißen n -te Einheitswurzeln). Geben Sie diese Einheitswurzeln in Polarkoordinaten an und veranschaulichen Sie sich ihre Lage in der komplexen Zahlenebene.

(ii) Zeigen Sie, dass es für $n \geq 1$ immer eine n -te Einheitswurzel gibt, durch deren Potenzen man alle anderen n -ten Einheitswurzeln erhält (eine solche Einheitswurzel heißt *primitive n -te Einheitswurzel*).

(iii) Finden Sie ein Kriterium um zu entscheiden, welche n -te Einheitswurzel eine primitive n -te Einheitswurzel ist.

Aufgabe 3

Beweisen Sie Satz 1.1.2.

Hinweis zum Ziehen von Wurzeln: bei welchen Konstruktionsschritten entstehen die Koordinaten der neuen Punkte durch Lösen von quadratischen Gleichungen?

Aufgabe 4

Auf dem offenen Intervall $I = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir folgende Verknüpfung:

$$a * b := \frac{a + b}{1 + ab}.$$

Zeigen Sie, dass es sich bei $*$ wirklich um eine Verknüpfung auf I handelt, und dass I damit zu einer abelschen Gruppe wird.