2.1 Lokale Wohlgestelltheit

Grundlage für unsere Betrachtungen ist nachfolgendes Lemma.

Lemma 2.1 Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen, $I_0 \subset I \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f: I \times D \to \mathbb{R}^d$ stetig, $u_0 \in D$, $t_0 \in I_0$ und $u \in C(I_0, D)$. Genau dann gilt

$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t \in I_0$$
$$u(t_0) = u_0$$

wenn u die Gleichung

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \qquad (2.2)$$

$\forall t \in I_0$ erfüllt.

Beweis: Da u und f stetig sind, ist auch die Abbildung $I_0 \to \mathbb{R}^d$, $t \mapsto f(t, u(t))$ stetig. Ist (2.2) erfüllt so gilt nach dem Hauptsatz $u \in C^1(I_0, D)$ und durch Ableiten folgt $u'(t) = f(t, u(t))$. Außerdem gilt $u(t_0) = u_0$.

Erfüllt u umgekehrt die Differentialgleichung, so folgt wieder aus dem Hauptsatz die Gültigkeit von (2.2). $\square$

Im Folgenden werden wir uns daher mit der eindeutigen Lösbarkeit der Integralgleichung (2.2) befassen.

Unser zentrales Argument wird hierbei der Banach'sche Fixpunkt-Satz sein. Wir formulieren diesen allgemeiner als in Analysis 2.

Satz 2.2 (FIXPUNKTSATZ VON BANACH)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. $X \neq \emptyset$

Sei $K: X \to X$ eine Kontraktion mit Kontraktionszahl $q \in [0,1)$, d.h. es gilt

$$d(K(x), K(y)) \leq q \cdot d(x,y) \qquad \forall x, y \in X.$$

Dann besitzt K genau einen Fixpunkt in X, d.h. es gibt genau ein $x^* \in X$ für den gilt

$$K(x^*) = x^*.$$

<u>Beweis:</u> Zunächst zur Eindeutigkeit: Gibt es $x^*, x \in M$ mit $x^* = K(x^*)$ und $x = K(x)$, so folgt

$$d(x^*, x) = d(K(x^*), K(x)) \leq q\, d(x^*, x)$$

$$\Rightarrow \quad d(x^*, x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = x.$$

Zur Existenz: Sei $x_0 \in M$. Definiere die rekursive Folge für $n \in \mathbb{N}$: $\quad x_{n+1} := K(x_n) = K^n(x_0)$, wobei $K^n(x) = K(K^{n-1}(x))$

Dann gilt

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q\, d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq q^n\, d(x_1, x_0)$$

und mit der Dreiecksungleichung für $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{j=m+1}^{n} d(x_j, x_{j-1}) \leq \sum_{j=m+1}^{n} q^{j-1} d(x_1, x_0)$$

$\tilde{j} = j - m - 1$

$j = \tilde{j} + m + 1$

$$= d(x_1, x_0)\, q^m \sum_{j=0}^{n-m-1} q^j = d(x_1, x_0)\, q^m \frac{1 - q^{n-m}}{1 - q} \leq d(x_1, x_0) \frac{q^m}{1-q}$$

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge und da X vollständig ist gibt es ein $x^* \in X$, so dass gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ und da aus $d(K(x_n), K(x^*)) \leq q\, d(x_n, x^*)$ $K(x_n) \to K(x^*)$ folgt gilt $x^* = K(x^*)$ □

Unser Ziel ist es Gl (2.2) als Fixpunktproblem

$$u = K(u) \quad \text{mit} \quad K(u)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$$

auf einer geeigneten Teilmenge von $C(I, \mathbb{R}^d)$, $I \subset \mathbb{R}$ zu formulieren.

Notation 2.3 Im Folgenden bezeichnen wir für $x \in \mathbb{R}^d$, die Euklidische Norm von x mit $|x|$, d.h.

$$|x| := \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

Satz 2.4 Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Auf der Menge $C([a,b], \mathbb{R}^d)$ sei $\|\cdot\|_\infty : C([a,b], \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\|u\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |u(t)|$$

Dann ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm und $\left(C([a,b], \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty\right)$ ein Banachraum.

Beweis: Man überzeugt sich leicht, dass $\|\cdot\|_\infty$ alle Eigenschaften einer Norm erfüllt. Da $C([a,b], \mathbb{R}^d)$ ein Vektorraum ist, müssen wir noch die Vollständigkeit nachweisen, d.h. wir zeigen dass jede Cauchy-Folge in $C([a,b], \mathbb{R}^d)$ konvergent ist. Sei also $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, d.h. $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, N \in \mathbb{N}_0$, so dass gilt

$$\|u_n - u_m\|_\infty < \varepsilon \qquad \forall\, n, m > N = N_\varepsilon \qquad (*)$$

Mit der Definition der Norm folgt für $u_n = (u_n^1, \dots, u_n^d)$:
Für jedes $j \in \{1, \dots, d\}$ ist $(u_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge mit $u_n^j : [a,b] \to \mathbb{R}$. Aus $(*)$ folgt: $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, N \in \mathbb{N}_0$, so dass gilt

$$|u_n^j(t) - u_m^j(t)| \leq \|u_n - u_m\|_\infty < \varepsilon \qquad \forall\, m, n > N_0$$
$$\forall\, t \in I$$

Also konvergiert $(u_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen ein $u^j : [a,b] \to \mathbb{R}$ (siehe Analysis 1 Vertiefung, Kapitel 7), und aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz ist u^j stetig.
Mit $u := (u^1, \dots, u^d)$ gilt daher $u \in C([a,b], \mathbb{R}^d)$ und $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_\infty = 0$. $\square$

Um die benötigte Kontraktionseigenschaft von K nachzuweisen, muss f gewisse Eigenschaften erfüllen.
Um diese zu formulieren, verwenden wir folgende Definitionen.

Definition 2.5 Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen

i) Eine stetige Funktion $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $f = f(t,x)$ heißt <u>LOKAL LIPSCHITZ-STETIG</u> bzgl. des 2. Arguments („bzgl. x“) falls es zu jedem Punkt $(t_0, x_0) \in U$ eine Kugel $\overline{B_r}(x_0)$ gibt und ein $\alpha > 0$ mit

$[t_0-\alpha, t_0+\alpha] \times \overline{B}_r(x_0) \subset U$, sowie eine Konstante $L>0$ so dass gilt:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L\,|x-y|$$

für alle $t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ und für alle $x, y \in \overline{B}_r(x_0)$.
Hier hängt L über r und α von (t_0, x_0) ab.

ii) f heißt GLOBAL LIPSCHITZ-STETIG bzgl. x, falls ein $L>0$ existiert, so dass gilt:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L\,|x-y| \quad \forall\, (t,x), (t,y) \in U.$$

Proposition 2.6 Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C(U, \mathbb{R}^d)$, lokal Lipschitz stetig bezüglich x und sei $K \subset U$ kompakt.
Dann ist die Einschränkung $f|_K$ von f auf K global Lipschitz-stetig bezüglich x

Beweis: Übungen.

Lemma 2.7 Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C(U, \mathbb{R}^d)$ und bezüglich x stetig differenzierbar. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig in x.

Beweis: Sei $(t_0, x_0) \in U$. Da U offen ist, existieren Konstanten $\alpha > 0$, $r>0$ sodass die kompakte Menge

$$K := [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \times \overline{B}_r(x_0) \subset U \quad \text{erfüllt.}$$

Nach dem Hauptsatz und der Kettenregel gilt für $f = (f_1, \dots, f_d)$ und $i \in \{1, \dots, d\}$, $f_i \in C(U, \mathbb{R})$ und für $(t,x), (t,y) \in K$ folgt

$$|f_i(t,x) - f_i(t,y)| = \left| \int_0^1 \frac{d}{d\tau} f_i(t, \tau x + (1-\tau)y)\, d\tau \right|$$

$$\leq \int_0^1 |(x-y)^T \nabla_x f_i(t, \tau x + (1-\tau)y)|\, dy$$

$\forall (t,x), (t,y) \in K$. Mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung (siehe Analysis 2, Satz 1.16) folgt

$$|f_i(x,y) - f_i(t,y)| \leq |x-y| \int_0^1 |\nabla_x f_i(t, \tau x + (1-\tau)y)|\, d\tau$$

$$\leq |x-y| \max_{(t,x)\in K} |\nabla_x f_i(t,x)| = L_i |x-y|$$

mit $L_i := \max_{(t,x)\in K} |\nabla_x f_i(t,x)| < \infty$, und dieses Maximum existiert, nach Voraussetzung

$$\Rightarrow \quad |f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y| \quad \text{mit} \quad L := \left(\sum_{i=1}^d L_i^2\right)^{1/2}$$

Alternativ kann man auch den Schrankensatz aus Analysis 2 Satz 3.39 und Bemerkung 3.40 heranziehen.

$\square$

Im Folgenden können wir einen der zentralen Sätze in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen beweisen.

Satz 2.8 (SATZ VON PICARD LINDELÖF)

Sei $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ offen, $U \neq \emptyset$, $f: U \to \mathbb{R}^d$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in x. Seien $(t_0, u_0) \in U$. Dann existiert ein $T > 0$ und eine Funktion $u \in C^1(J_T, \mathbb{R}^d)$

$J_T := [t_0 - T, t_0 + T]$, so dass $(t, u(t)) \in U$ für alle $t \in J_T$ gilt und u das Anfangswertproblem (2.1) löst.