PS Analysis 3 **WS 2024/25**

Übungszettel 1 (ODE)

Birgit Schörkhuber *ankreuzbar bis 8.10., 8:00*

1. Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen (linear/nichtlinear, Ordnung, ...,)

   (a) $u'(t) + u(t) = 0$ (b) $\dfrac{d^2}{dx^2} y(x) = x \sin(y(x))$

   (c) $(1 - r^2) f''(r) + \dfrac{2}{r} f'(r) = 0$ (d) $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$

2. Transformieren Sie folgende Differentialgleichungen auf Systeme 1. Ordnung.

   (a) $u''(t) + t \sin(u'(t)) = u(t)$,
   (b) $x''(t) = -y(t)$, $y''(t) = x(t)$,

   Transformieren Sie folgende Differentialgleichungen in autonome Systeme erster Ordnung.

   (a) $u''(t) + t \sin(u'(t)) = u(t)$.
   (b) $x''(t) = -\cos(t) x(t)$.

3. Gegeben sei die Differentialgleichung

   $$y'(x) = 2x^2 - y(x).$$

   Skizzieren die zugehörigen Isoklinen und das Richtungsfeld. Skizzieren Sie einige Lösungskurven, inklusive derer, die der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ entspricht.

4. Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Zeigen Sie, dass sich mit der Substitution $u = y^{1-a}$ die Differentialgleichung

   $$y'(t) = f(t)y(t) + g(t)y(t)^a$$

   auf eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung transformieren lässt. Was ist im Fall $a \in \{0, 1\}$?

5. Zeigen Sie, dass sich Gleichungen folgender Form durch geeignete Substitution auf Gleichungen vom Typ *getrennte Variablen* zurückführen lassen.

   (a)
   $$u'(t) = f(at + bu(t) + c) \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

   (b)
   $$u'(t) = f\left(\frac{u(t)}{t}\right), \quad t > 0.$$

6. Gegeben sei das Anfangswertproblem

   $$u'(t) = au(t), \quad t > 0,$$
   $$u(0) = u_0,$$

   für $a \in \mathbb{R}$ und $u_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $u(t) = u_0 e^{at}$ die eindeutige Lösung des Problems ist. Nehmen Sie dafür an, dass $v \in C^1([0, \infty))$ eine weitere Lösung ist. Definieren Sie für $t > 0$ und $s \in [0, t]$, $w(s) := e^{(t-s)a} v(s)$, betrachten Sie die Ableitung und folgern Sie das Gewünschte.