1.3.3 Lineare skalare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten lineare Differentialgleichungen der Form

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= a(t)\,u(t) + h(t) \qquad t \in I \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}\right\} \quad (1.9)$$

$I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $u_0 \in I$, $a, h: I \to \mathbb{R}$ stetig.

Ist $h = 0$, so ist die Gleichung vom Typ „getrennte Variablen" und wir erhalten sofort folgendes Resultat:

Satz 1.12 (HOMOGENER FALL $h = 0$)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$, $a: I \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $u_0 \in \mathbb{R}$.

Dann existiert genau eine Lösung $u: I \to \mathbb{R}$ von

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= a(t)\,u(t) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}\right\} \quad t \in I$$

Diese ist gegeben durch $u(t) = u_0\, e^{A(t)}$

mit

$$A(t) := \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$$

Beweis: Mit der Notation aus Kapitel 1.3 gilt:

$f(u) = u$, $g(t) = a(t)$. Sei $u_0 = 0$, dann ist $f(u_0) = 0$ und $u(t) = 0 \;\forall\, t \in I$ löst das Problem.

Ist $u_0 \neq 0$, so ist $u_0 > 0$ oder $u_0 < 0$. Im ersten Fall sei $J := (0,\infty)$ das maximale Intervall für das gilt $f(u) \neq 0$ $\forall\, u \in J$ und $u_0 \in J$ (im zweiten Fall setze $J := (-\infty, 0)$).

Sei für $u \in (0,\infty)$,

$$F(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{1}{x}\, dx = \log u - \log u_0 \quad \text{und}$$

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds \quad \text{für } t_0, t \in I \text{ (wo } a \text{ definiert ist)}$$

Es gilt $F(J) = (-\infty, \infty)$, und daher folgt, da a stetig,

$A(t) \in J$ für alle $t \in I$.

Mit Satz 1.4 und Bemerkung 1.6 folgt für $t \in I$

$$F(u(t)) = \log u(t) - \log u_0 = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds = A(t)$$

und daher

$$u(t) = u_0 e^{A(t)} \quad \forall\, t \in I$$

(die Argumention im Fall $u_0 < 0$ ist analog)

Dass u auf I die eindeutige Lösung ist, kann man auch wie folgt einsehen: Sei $v \in C^1(I)$ eine weitere Lösung. Definiere

$$w(t) := v(t) \underbrace{e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}}_{\varphi(t)} = v(t)\, e^{-A(t)}$$

Dann gilt
$$\varphi'(t) = -a(t)\varphi(t) \quad \forall\, t \in I$$

und
$$w'(t) = v'(t)\varphi(t) + v(t)\varphi'(t) = a(t)v(t)\varphi(t) - a(t)v(t)\varphi(t) = 0$$

$\Rightarrow$ w ist auf I konstant
$$w(t) = w(t_0) = v(t_0)\varphi(t_0) = u_0$$
$$\Rightarrow \quad v(t) = u_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \qquad \square$$

Satz 1.13 (INHOMOGENER FALL – VARIATION DER KONSTANTEN)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, h: I \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $t_0 \in I$ und $A(t) := \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$. Dann ist
$$u(t) = e^{A(t)}u_0 + e^{A(t)}\int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}h(s)\,ds \qquad (1.10)$$
die eindeutige Lösung von (1.9).

Beweis: Sei $u \in C^1(I)$ eine Lösung (1.9). Setze $w(t) = e^{-A(t)}u(t)$. Dann folgt
$$w'(t) = e^{-A(t)}u'(t) - A'(t)e^{-A(t)}u(t)$$
$$= e^{-A(t)}\left(a(t)u(t) + h(t) - a(t)u(t)\right) = h(t)e^{-A(t)}$$
Aus der Stetigkeit von h, und $t \mapsto e^{-A(t)}$ und dem Hauptsatz folgt
$$w(t) = w(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}h(s)\,ds$$

und $w(t_0) = e^{-A(t_0)} u(t_0) = u(t_0) = u_0$

$$\Rightarrow \quad e^{-A(t)} u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} h(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = e^{A(t)} u_0 + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} h(s)\,ds$$

Umgekehrt findet man durch direktes Nachrechnen, dass u gegeben durch die obige Formel die Gleichung löst:

$$u'(t) = e^{A(t)} a(t)\, u_0 + e^{A(t)} a(t) \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} h(s)\,ds + h(t)$$

$$= a(t)\, u(t) + h(t)$$

und es gilt $u(t_0) = e^{A(t_0)} u_0 = u_0$. $\square$

Bemerkung 1.14

Die Lösungsformel (1.10) wird als FORMEL DER VARIATION DER KONSTANTEN bezeichnet.

Dem Namen liegt folgende Überlegung zugrunde:
Sei u_h die allgemeine Lösung des homogenen Problems

$$u'(t) = a(t)\, u(t)$$

also $u_h(t) = c\, e^{A(t)}$ für $c \in \mathbb{R}$. Sei weiters u_p eine (spezielle bzw. „partikuläre") Lösung der inhomogenen Gleichung

$$u'(t) = a(t)\, u(t) + h(t)$$

so löst $u(t) := u_h(t) + u_p(t)$ ebenfalls die inhomogene Gleichung, denn

$$u'(t) = u_h'(t) + u_p'(t) = a(t)u_h(t) + a(t)u_p(t) + h(t) = a(t)u(t) + h(t)$$

Dabei gilt $u(t_0) = u_h(t_0) + u_p(t_0)$

Setzen wir $c = u_0$, d.h. $u_h(t) = u_0 e^{A(t)}$, so muss $u_p(t_0) = 0$ gelten um eine Lösung des Anfangswertproblems zu erhalten.

Für u_p wählt man den Ansatz $u_p(t) = e^{A(t)} \underbrace{c(t)}$

„Variation der Konstanten."

und findet ähnlich wie im Beweis von Satz 1.8

$$u_p'(t) = c'(t)e^{A(t)} + c(t)e^{A(t)}a(t) = a(t)u_p(t) + c'(t)e^{A(t)}$$

$$\Rightarrow \quad c'(t)e^{A(t)} = h(t)$$

$$\Rightarrow \quad c(t) = \int_{t_0}^{t} h(s)e^{-A(s)}\,ds \quad , \text{ da } u_p(t_0) = 0 \ (\text{also } c(t_0) = 0)$$

d.h.: $$u_p(t) = e^{A(t)}\int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}h(s)\,ds.$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \underbrace{u_0 e^{A(t)}}_{u_h(t)} + \underbrace{e^{A(t)}\int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}h(s)\,ds}_{u_p(t)}.$$

Die Methode der Variation der Konstanten werden wir später noch allgemeiner für lineare Systeme bzw. lineare DGL 2. Ordnung kennenlernen.

Beispiel 1.15 Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= 3t^2 u(t) + 2t^2 \\ u(0) &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Mit $a(t) = 3t^2$ und $h(t) = 2t^2$ folgt $A(t) = \int_0^t 3s^2 ds = t^3$

Daher ist die eindeutige Lösung des Problems gegeben durch

$$u(t) = e^{t^3} + 2e^{t^3} \int_0^t e^{-s^3} s^2 ds = e^{t^3}\left(1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} e^{-s^3}\right)$$

$$= \frac{5}{3} e^{t^3} - \frac{2}{3}.$$

Bemerkung 1.16 Differentialgleichungen vom Typ

$$u'(t) = a(t)\, u(t) + b(t)\, u(t)^{\alpha} \qquad \alpha \neq 0, 1$$

für stetige Funktionen a, b heißen BERNOULLI-GLEICHUNG

Ist $\alpha > 0$, so ist $u(t) = 0 \;\; \forall t$ eine Lösung

Andere Lösungen findet man mittels Transformation $y(t) := u(t)^{1-\alpha}$. Dies liefert die lineare Gleichung

$$y'(t) = (1-s)\, a(t)\, y(t) + (1-s)\, b(t) \qquad (*)$$

Die Anfangsbedingung muss ebenfalls entsprechend transformiert werden. (siehe Übungen)

Achtung auf das Vorzeichen von u, damit die Transformation wohldefiniert ist.

Bemerkung 1.17 Differentialgleichungen vom Typ

$$u'(t) = a(t)\,u(t) + b(t)\,u(t)^2 + h(t)$$

für stetige Funktionen a, b, h mit $h(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$ heißen RICCATI GLEICHUNG.

Ist eine spezielle Lösung u_p bekannt so führt der Ansatz

$$u(t) = u_p(t) + v(t)$$

auf eine Bernoulli-Gleichung für v. (siehe Übungen)

1.3.4 Exakte Differentialgleichungen

Sei $\phi \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Angenommen es gibt ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $u \in C^1(I)$, $t \mapsto u(t)$, so dass gilt

$$\phi(t, u(t)) = 0 \qquad \forall\, t \in I$$

Dann folgt mit der Kettenregel

$$0 = \frac{d}{dt}\phi(t, u(t)) = \partial_1 \phi(t, u(t)) + \partial_2 \phi(t, u(t))\, u'(t) = 0$$

Mit $\quad p(t,s) := \partial_1 \phi(t,s) \qquad q(t,s) := \partial_2 \phi(t,s)$,

also $\quad \binom{p}{q} := \nabla \phi$, erhalten wir

$$p(t, u(t)) + q(t, u(t))\, u'(t) = 0$$

also eine skalare Differentialgleichung 1. Ordnung (in impliziter Form). Mit dem Satz von Schwarz gilt

$$\partial_2 p = \partial_2 \partial_1 \phi = \partial_1 \partial_2 \phi = \partial_1 q.$$

Sei umgekehrt eine Differentialgleichung der Form

$$F_1(t, u(t)) + F_2(t, u(t))\, u'(t) = 0 \qquad (*)$$

gegeben. Existiert eine Funktion $\phi \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, so dass gilt

$$\binom{F_1}{F_2} = \nabla \phi \quad \text{auf } U,$$

so nennt man $(*)$ eine <u>EXAKTE DIFFERENTIALGLEICHUNG</u>.