PS Analysis 3 **WS 2024/25**

Übungszettel 8 (ODE)

Birgit Schörkhuber *ankreuzbar bis 26.11., 8:00*

1. Gegeben sei ein Anfangswertproblem der Form

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = u_0$$

mit $f \in C(U, \mathbb{R}^d)$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich des 2. Arguments, $(t_0, u_0) \in U$, $U \subset \mathbb{R}^d$ offen. Seien $T_0, \delta > 0$ so, dass $V_0 := [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B_\delta}(u_0) \subset U$ gilt. Seien

$$m := \sup_{(t,x) \in V_0} |f(t, x)|, \quad T := \min\left\{T_0, \frac{\delta}{m}\right\},$$

falls $m \neq 0$. Beweisen Sie mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Weissinger [1] die Existenz einer Lösung $u \in C^1(J_T, \mathbb{R}^d)$, $J_T := [t_0 - T, t_0 + T]$. Gehen Sie wie folgt vor.

   (a) Definieren Sie $X := C(J_T, \mathbb{R}^d)$ ausgestattet mit Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Definieren Sie auf $M := \{u \in X : \|u - u_0\|_\infty \leq \delta\}$ eine geeignete Abbildung K und zeigen Sie $K : M \to M$.

   (b) Sei $L > 0$ die lokale Lipschitzkonstante von f auf V_0. Zeigen Sie induktiv, dass für alle $u, v \in M$ und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\|K^n(u) - K^n(v)\|_\infty \leq \frac{L^n T^n}{n!} \|u - v\|_\infty$$

   gilt und folgern Sie daraus die Existenz eines Fixpunktes von K.

2. Gegeben sei ein Anfangswertproblem der Form

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = u_0$$

mit $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ global Lipschitz-stetig. Beweisen Sie die Existenz einer eindeutigen Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$. Gehen Sie dabei vor wie in Aufgabe 1, aber mit $T > 0$ nun beliebig und $M = X$.

3. Gegeben sei das skalare Anfangswertproblem

$$u'(t) = \sin(tu(t)), \quad u(0) = u_0.$$

   (a) Argumentieren Sie, dass für jedes $u_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige globale Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ existiert.

   (b) Finden Sie eine Konstante $C > 0$, so dass für $|u_0| \leq C$ gilt

$$\forall t \in [0, 1] : |u(t)| \leq \varepsilon$$

   mit $\varepsilon = 10^{-2}$.

[1] Blatt 7

4. Zeigen Sie, dass die Aussage von Lemma 2.18 im Allgemeinen nicht mehr gilt, falls lediglich eine Ungleichung der Form
$$|f(t,x)| \leq a(t) + b(t)|x|^{\alpha}$$
mit $\alpha > 1$ erfüllt ist. *Hinweis: Beispiel 1.9.*

5. Gegeben sei die skalare Differentialgleichung
$$u'(t) = f(u(t))$$
mit $f \in C(\mathbb{R})$ lokal Lipschitz-stetig und $f(0) = f(1) = 0$. Beweisen Sie, dass für jede Anfangsbedingung $u(0) = u_0 \in [0,1]$ eine eindeutige maximale Lösung $u \in C((T_-, T_+), \mathbb{R})$ existiert, wobei $u(t) \in [0,1]$ für alle $t \in (T_-, T_+)$ gilt. Was lässt sich über das maximale Existenzintervall aussagen?
Hinweis: Können Sie spezielle konstante Lösungen erraten?