PS Analysis 3 **WS 2024/25**

Übungszettel 13 (ODE)

Birgit Schörkhuber *ankreuzbar bis 21.01., 8:00*

1. **Lineare Systeme.** Berechnen Sie e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$ für

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (b) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Gegeben Sei das System

$$u'(t) = Au(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem $\{y_1, y_2\}$, $y_i \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

   (b) Geben Sie für $t_0 \in \mathbb{R}$ die Hauptfundamentalmatrix $\Pi(t, t_0)$ an.

3. Finden Sie ein $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2\times 2})$, so dass die Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$u(t) = \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ e^t \end{pmatrix}$$

   die Gleichung

$$u'(t) = A(t)u(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

   löst. Geben Sie die Hauptfundamentalmatrix $\Pi(t, t_0)$ für $t_0 \in \mathbb{R}$ für das resultierende System an.

4. Gegeben Sei das System

$$y'(t) = A(t)y(t), \quad A(t) = \begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ 2t & 0 \end{pmatrix}.$$

   Eine Lösung ist $y_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie mit dem d'Alembertschen Reduktionsverfahren eine Fundamentalmatrix des Systems.

5. **Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung**. Gegeben sei eine allgemeine inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x) \tag{1.1}$$

   für gegebene Funktionen $p, q, g \in C(J)$, $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Seien $y_1, y_2 \in C^2(J)$ Lösungen der homogenen Gleichung ($g = 0$) für die gilt

$$W(y_1, y_2)(x) := y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \neq 0$$

   für $x \in J$. In diesem Fall nennt man $\{y_1, y_2\}$ ein Fundamentalsystem für Gleichung (1.1).

(a) Formulieren Gleichung (1.1) im homogenen Fall als System 1. Ordnung. Zeigen Sie, dass für $Y_j := (y_j, y_j')^T$, $j \in \{1, 2\}$, die Matrix (Y_1, Y_2) eine Fundamentalmatrix bildet.

(b) Zeigen Sie, dass jede Lösung von Gleichung (1.1) dargestellt werden kann als

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

mit $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und

$$y_p(x) = -y_1(x) \int_{x_2}^{x} \frac{y_2(s)}{W(y_1, y_2)(s)} g(s) ds + y_2(x) \int_{x_1}^{x} \frac{y_1(s)}{W(y_1, y_2)(s)} g(s) ds$$

für $x_1, x_2 \in J$. Setzen Sie dazu beispielsweise den Ansatz (Variation der Konstanten)

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

in Gleichung (1.1) ein.

(c) Zeigen Sie die *Abel'sche Identität* für die Wronksi-Determinante: Für beliebige $x_0 \in J$ gilt

$$W(y_1, y_2)(x) = W(y_1, y_2)(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} p(s) ds}, \quad x \in J.$$

Betrachten Sie dazu W'.

6. Gegeben sei die Gleichung

$$x y''(x) - (x+1) y'(x) + y(x) = x^2$$

(a) Seien $y_1(x) = e^x$ und $y_2(x) = x + 1$. Zeigen Sie, dass $\{y_1, y_2\}$ ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung ist (siehe Aufgabe 3).

(b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Gleichung und vereinfachen Sie diese soweit als möglich.