Programmieraufgaben

(1) Interpolieren Sie mithilfe des Verfahrens von Aitken-Neville (s. Blatt 9 Aufgabe (3)) die Funktionen

(a) $f(x) = \sin(8x^2 + 2)$ (b) $g(x) = |x|$ (c) $h(x) = 1/(1 + 100x^2)$

auf dem Intervall $[-1, 1]$ durch Polynome vom Grad n. Verwenden Sie als Stützstellen x_i zum Einen eine äquidistante Unterteilung des Intervalls und zum Anderen Chebyshev-Punkte. Bestimmen Sie die Interpolationspolynome vom Grad $n = 10$ und zeichnen Sie diese beiden Polynome mit zugehörigen Stützstellen sowie die zugrundelegende Funktion jeweils in einen Plot.

(2) (a) Implementieren Sie die diskrete Fouriertransformation (DFT), also berechnen Sie die Fourierkoeffizienten näherungsweise mit der Trapezregel. Testen Sie Ihr Programm an der Funktion aus Aufgabe (5), variieren Sie N und beobachten Sie die Konvergenz

$$\hat{f}_N(k) \to \hat{f}(k) \quad \text{für} \quad |k| \leq \frac{N}{2}\,.$$

(b) Erweitern Sie Ihr Programm durch die Berechnung des trigonometrischen Interpolationspolynoms, unter Verwendung der zuvor berechneten DFT. Testen Sie Ihr Programm wieder an der Funktion f aus Aufgabe (5) auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. Variieren Sie die Anzahl an Stützstellen und bestimmen Sie den Interpolationsfehler.

(3) Gegeben sei das Signal

$$y(t) := \sin(7t) + 0.5\sin(5t)$$

an 128 äquidistanten Punkten auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. Fügen Sie den Messpunkten ein zufälliges Rauschen ≤ 0.75 hinzu. Versuchen Sie nun, das ursprüngliche Signal zu rekonstruieren, indem Sie das Signal fouriertransformieren (DFT aus Aufgabe (2) oder FFT, evtl. vorgefertigte Routine verwenden, Normierung beachten!) und Fourierkoeffizienten, deren Betrag ≤ 0.125 ist, auf 0 setzen. Vergleichen Sie das Ausgangssignal mit dem rekonstruierten Signal.

Theorieaufgaben

(4) Sei $y\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ genügend glatt.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x_0,\dots,x_k \to x} \delta^k y_0 = \frac{y^{(k)}(x)}{k!}.$$

(b) Schreiben Sie das Dividierte Differenzenschema für $x_0, x_0 + \epsilon, \dots, x_0 + n\epsilon \in [a, b]$ an, und führen Sie dann im Interpolationspolynom den Grenzprozess $\epsilon \to 0$ durch. Was ergibt sich? Wie sieht die Fehlerabschätzung aus?

(5) Setzen Sie die Funktion $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto x(\pi - x)$ gerade (dh. mittels $f(x) = f(-x)$) auf $[-\pi, \pi]$ und dann periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort. Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten

$$\hat{f}(k) = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x.$$