Programmieraufgaben

(1) Implementieren Sie in python die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zyklischen Töplitz-Matrizen mithilfe FFT (s. Skript S. 76). Verwenden Sie vorgefertigte Routinen z.B. `numpy.fft.fft` und `numpy.fft.ifft` für die schnelle Fourier-Transformation sowie deren Inverse (Achtung, hier wird evtl. bei der Berechnung der DFT nicht durch N dividiert, d.h. die Multiplikation mit N bei der Berechnung von x entfällt). Lösen Sie außerdem das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit python, z.B. mit `numpy.linalg.solve`. Stoppen Sie für beide Varianten die benötigte Zeit für verschiedene Werte von N und vergleichen Sie. Verwenden Sie zum Testen beispielsweise die Töplitz-Matrix, welche durch $(a_j)_{j=0}^{N-1}$ mit $a_j = \frac{1}{j+1}$ erzeugt wird, sowie rechten-Seite-Vektor $(b_j)_{j=0}^{N-1}$ gegeben durch $b_j = j^2$.

(2) Erstellen Sie einen Algorithmus zur Auswertung der Funktion $\log(x)$, $x > 0$, Beispiel 3.50 im Skriptum, und lassen Sie den Fehler plotten.
Hinweis: Sie müssen vorab die Chebyshev-Knoten auf $[0, 1]$ *transformieren. Damit ergibt sich*

$$c_k = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \log\left(1 + \frac{1 + \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right)}{2}\right) \cdot \cos\left(k\ \frac{2j+1}{2n+2}\ \pi\right) .$$

Die Koeffizienten c_k *finden Sie auch hier (S. 146 Mitte) zum Vergleich, beachten Sie aber, dass dort der Koeffizient* c_0 *schon mit 0.5 multipliziert ist, bei uns erfolgt diese Multiplikation erst bei der Definition des Polynoms* p *.*

Theorieaufgaben

(3) Zu zwei N-periodischen Folgen $a, b \in \mathcal{P}_N$ definiert man die Faltung $a * b$ durch

$$(a * b)_k = \sum_{\ell=0}^{N-1} a_{k-\ell} b_\ell.$$

Zeigen Sie:

(a) $a * b = b * a \in \mathcal{P}_N$.

(b) $\mathcal{F}_N(a * b) = N \cdot (\mathcal{F}_N a) \cdot (\mathcal{F}_N b)$, wobei das letzte $\cdot$ komponentenweise zu verstehen ist.

(4) Bezeichne $T_k(x)$ das k-te Chebyshev-Polynom und $x_\ell = \cos\left(\frac{(2\ell+1)\pi}{2n+2}\right)$ die Nullstellen von $T_{n+1}(x)$. Zeigen Sie für $0 \le k, j \le n$

$$\sum_{\ell=0}^{n} T_k(x_\ell)\, T_j(x_\ell) = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ n+1 & k = j = 0 \\ \frac{1}{2}(n+1) & k = j \neq 0 \end{cases}$$

Hinweis: Aufgabe (4) Blatt 5.

(5) Wann ist die Zwei-Term-Rekursion

$$ax_n + bx_{n-1} + c = 0, \quad x_0 = d$$

stabil, wann instabil (bei Störung des Startwerts d)? Finden Sie Bedingungen an die Koeffizienten a, b, c und den Startwert d.