(1) SCHWACHE KONVERGENZ IN $\ell^2(\mathbb{N})$: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem Banachraum X konvergiert schwach gegen ein $x \in X$, falls $\langle x^*, x_n - x\rangle \to 0$ für alle $x^* \in X^*$.

(a) Zeigen Sie, dass $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e_n der n-te Standardbasisvektor, in $\ell^2(\mathbb{N})$ schwach, aber nicht in der Norm, gegen Null konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\ell^2(\mathbb{N})$ genau dann schwach gegen ein $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ konvergiert, wenn es ein $C > 0$ gibt mit $\|x_n\| \leq C$ und für alle $j \in \mathbb{N}$, $x_n(j) \to x(j)$ für $n \to \infty$ gilt (mit der Notation $x_n = (x_n(j))_{j\in\mathbb{N}}$).
Hinweis: $(\ell^2(\mathbb{N}))^* = \ell^2(\mathbb{N})$ und der Satz von Banach-Steinhaus.

(2) NORM SELBSTADJUNGIERTER OPERATOREN: Es sei X ein Hilbertraum und $A \in L(X)$ ein selbst–adjungierter Operator.

(a) Zeigen Sie, dass $4\,\mathrm{Re}\langle Ax, y\rangle = \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle$ für alle $x, y \in X$.

(b) Verwenden Sie die obige Formel um $\|A\| = \sup\{\langle Ax, x\rangle \colon \|x\| = 1\}$ zu zeigen.

(3) BILD KOMPAKTER OPERATOREN: Seien X, Y Banachräume und $A \in L(X, Y)$ ein kompakter Operator.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{rg}(A)$ separabel ist (Beweisen Sie zuerst allgemeiner Satz 7.10 aus der Vorlesung).

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{rg}(A)$ genau dann abgeschlossen ist, wenn A endlichen Rang hat (Hinweis: Satz von der offenen Abbildung)

(4) NEUMANN-REIHE: Sei X ein Banachraum und $A \in L(X)$ mit $\|A\| < 1$. Zeigen Sie, dass gilt

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

und

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

(5) CHARAKTERISIERUNG ORTHOGONALER PROJEKTIONEN: Sei X ein Hilbertraum, $Y \subset X$ ein ab–geschlossener Unterraum und $P \in L(X)$ ein beschränkter Operator mit $\mathrm{rg}(P) = Y$ und $P^2 = P$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) P ist die orthogonale Projektion auf Y.

(b) $P = P^*$

(c) $\|P\| = 1$

Hinweis für die Implikation (c)⇒(a): Verwenden Sie dass für $x \in M^\perp$ und $t \in (0, 1)$ die Beziehung $P(tx + (1-t)Px) = tPx + (1-t)P^2x = Px$ gilt und den „Satz von Pythagoras“, d.h. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ für $x, y \in X$ mit $x \perp y$.