PS Analysis 3 **WS 2024/25**

Übungszettel 5 (ODE)

Birgit Schörkhuber *ankreuzbar bis 03.11., 8:00*

1. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem.

$$u'(t) = 2tu(t) + e^{t^2}\sin(t), \quad u(t_0) = u_0,$$

für $t_0, u_0 \in \mathbb{R}$.

2. (*Riccati-Differentialgleichung*)

(a) Seien $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Gegeben sei die Gleichung

$$y'(x) + g(x)y(x) + f(x)y(x)^2 = h(x).$$

Sei $y_p \in C^1(I)$ eine Lösung. Zeigen Sie, dass die Transformation

$$u(x) = \frac{1}{y(x) - y_p(x)}$$

auf eine lineare Gleichung in u führt.

3. Verwenden Sie die Vorgangsweise aus der vorigen Aufgabe und lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) + (2x-1)y(x) - y(x)^2 = 1 - x + x^2, \quad y(0) = 1,$$

indem Sie die spezielle Lösung $y_p(x) = x$ verwenden. Geben Sie das maximale Existenzintervall und sowie das aymptotische Verhalten der Lösung an.

4. (*Bernoulli-Differentialgleichung*) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) + \frac{y(x)}{1+x} + (1+x)y(x)^{-\frac{2}{3}} = 0, \quad y(0) = 1,$$

in einem hinreichend kleinen Intervall um $x = 0$.

5. (*Exakte Differentialgleichung*) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$3t^2u(t) + (t^3 + 2u(t))u'(t) = 0, \quad u(0) = -1,$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall der Lösung an.