Ausarbeitung Übungsblatt 1 Aufgabe 1
Folgen in Metrischen Räumen

12. März 2025

Zuerst einige wichtige Definitionen die für die Aufgabe benötigt werden:

Definition 1 (Konvergenz in Metrischen Raum)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent* gegen $x \in X$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ das gilt

$$d(x_n, x) < \epsilon, \ \forall n \geq N$$

Man schreibt hier $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

Definition 2 (Cauchy-Folge)**.** Ein Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum (X, d) heißt Cauchy Folge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt so dass gilt:

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \ \forall n, m \geq N$$

Definition 3 (Beschränkte Teilmenge)**.** Sei (X, d) metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Es ist A beschränkt, wenn es ein $C \geq 0$ und einen Punkt $x \in X$ gibt, so dass für alle $a \in A$ gilt $d(a, x) \leq C$

Folgen in metrischen Räumen. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeigen Sie:

1. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent so ist der Grenzwert eindeutig.
2. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.
3. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist die Folge eine Cauchy-Folge.
4. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, so ist die Folge selbst konvergent
5. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $x \in X$ und ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen $y \in X$ konvergiert so gilt $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$

Beweis. Es werden nun im folgenden Unterpunkte $[1-5]$ bewiesen:

Statement 1: Angenommen es gibt zwei Grenzwerte $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Da nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = y$$

- Da $x_n \to x$ konvergiert gilt $\forall \epsilon > 0 \ \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 : d(x_n, x) < \epsilon$
- Da $x_n \to y$ konvergiert gilt $\forall \epsilon > 0 \ \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 : d(x_n, y) < \epsilon$

Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, wähle $\epsilon := \frac{d(x,y)}{2}$. Es ist $d(x,y) > 0$ damit $\epsilon > 0$. Definiere nun $N := \max\{N_1, N_2\}$ und betrachte die folgende Δ-Ungleichung:

$$d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = d(x,y) \quad \forall n \geq N$$

Damit ein Widerspruch zu unserer ursprünglichen Annahme.

Statement 2: Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Wähle $\epsilon = 1$ dann $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_m,x_n) < 1\ \forall m,n \geq N$. Setze nun $n = N$, es gilt nun $d(x_m,x_N) < 1\ \forall m \geq N$. Betrachte nun die übrigen Folgeglieder und wähle:

$$R := \max_{1\leq m<N} d(x_m,x_N) \Rightarrow d(x_m,X_N) \leq R \quad \forall m < N$$

Damit gilt insbesondere $d(x_i,x_N) \leq R+1 =: M\ \forall i$, damit hat man mit M eine Schranke.

Statement 3: Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und sei $\epsilon > 0$. Nun exestiert ein $N > 0$ mit $d(x_n,x) \leq \frac{\epsilon}{2}\ \forall n \geq N$. Wiederum betrachten wir folgende Δ-Ungleichung:

$$d(x_m,x_n) \leq d(x_m,x) + d(x,x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall m,n \geq N$$

Statment 4: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{k\to\infty} x$. Man zeigt nun das auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert. Sei $\epsilon > 0$ dann $\exists N_1, N_2$ mit:

$$d(x_m,x_n) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n,m \geq N_1$$
$$d(x_{n_k},x) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n_k \geq N_2$$

Setze nun $N := \max\{N_1, N_2\}$ und wähle $n_k \geq N$ fix. Betrachte die Δ-Ungleichung:

$$d(x_m,x) \leq d(x_m,x_{n_k}) + d(x_{n_k},x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall m \geq N$$

Damit erhält man die gewünschte Konvergenz $x_m \xrightarrow{m\to\infty} x$.

Statement 5: Man betrachten nun zwei konvergente Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} x \in X$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} y \in X$. Nun gilt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$d(x_n,y_n) \leq d(x_n,x) + d(x,y) + d(y,y_n) \quad \text{(I)}$$
$$d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y_n) + d(y_n,x) \quad \text{(II)}$$

Durch Umformen erhält man aus (I) und (II):

$$d(x_n,y_n) - d(x,y) \leq d(x_n,x) + d(y,y_n) \quad \text{(I)}$$
$$d(x,y) - d(x_n,y_n) \leq d(x,x_n) + d(y_n,y) \quad \text{(II)}$$

Dies entspricht der Definition des Betrags damit:

$$|d(x_n,y_n) - d(x,y)| \leq d(x_n,x) + d(y_n,y)$$

Bildet man den Grenzwert so folgt $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} d(y_n,y) = 0$. Damit die gewünschte Aussage:

$$\lim_{n\to\infty} |d(x_n,y_n) - d(x,y)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y)$$

□