Programmieraufgaben

(1) Implementieren Sie die LU-Zerlegung für Tridiagonal-Matrizen aus Aufgabe (3)(a) in Python und testen Sie Ihre Funktion an der Tridiagonalmatrix mit $b_i = c_{i+1} = -i$ für $i = 1\ldots, n-1$ und $a_i = 4$ für alle $i = 1, \ldots, n$, $n = 8$.

Theorieaufgaben

(2) Berechnen Sie den Aufwand für folgende Operationen. Geben Sie dabei sowohl die genaue Anzahl der Rechenoperationen als auch für die Teilaufgaben (b) und (c) den Aufwand in der $\mathcal{O}$-Notation an.

(a) $A \cdot B$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$.

(b) $R \cdot S$, wobei $R, S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rechte obere Dreiecksmatrizen sind.

(c) $A \cdot x$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Tridiagonalmatrix und $x \in \mathbb{R}^n$ ist.

(3) Sei $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Tridiagonalmatrix, d.h. die Matrix T ist von der Form

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & c_3 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & c_n & a_n \end{pmatrix}$$

für $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

(a) Wir nehmen an, dass die invertierbare Tridiagonalmatrix T eine LU-Zerlegung besitzt. Zeigen Sie, dass die LU-Zerlegung der Tridiagonalmatrix T gegeben ist durch

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \gamma_3 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \gamma_n & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

mit rekursiv definierten Koeffizienten

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 \\ \gamma_i &= \frac{c_i}{\alpha_{i-1}},\ \alpha_i = a_i - \gamma_i\beta_{i-1},\ \beta_{i-1} = b_{i-1} \quad \text{für} \quad i = 2, \ldots, n\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Nachrechnen dass $LU = T$ gilt.

(b) Bestimmen Sie den Rechenaufwand für die LU-Zerlegung einer Tridiagonalmatrix.

(c) Begründen Sie, dass die Tridiagonalmatrix T eine LU-Zerlegung besitzt, wenn gilt dass $c_j \neq 0$ für $j = 1, \ldots, n$ und

$$|a_1| \geq |c_2|, \quad |a_n| \geq |b_{n-1}|, \quad |b_{i-1}| + |c_{i+1}| \leq |a_i| \quad \text{für} \quad i = 2, \ldots, n-1\,.$$

Hinweis: Zeigen Sie durch Induktion, dass $|\gamma_i| \leq 1$ gilt für $i = 2, \ldots, n$ und folgern Sie, dass $|\alpha_i| > 0$.

(4) Berechnen Sie die Zerlegung $PA = LU$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

bei Spaltenpivotsuche. Lösen Sie damit die Gleichung $Ax = b$ für $b = [3, -2, 1]^\top$. Berechnen Sie auch die Determinante der Matrix A.

(5) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Zerlegen Sie die Matrix A durch LU- bzw. Cholesky-Zerlegung.

(b) Heben Sie die Diagonale aus U heraus, d.h. schreiben Sie die Matrix U als $U = DR$, wobei R in der Diagonale alles Einsen hat und D eine Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3)$ ist. Sei weiters $D_1 = \operatorname{diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \sqrt{d_3})$. Vergleichen Sie $L_1 = LD_1$ mit dem Cholesky-Faktor C aus (a).