Definition 3.17

Eine Basis von $\mathcal{L}_0$ heißt FUNDAMENTALSYSTEM (FS) zu (*), d Lösungen y_i, $i=1,\dots,d \in \mathcal{L}_0$ fasst man zu einer LÖSUNGSMATRIX $Y = (y_1 \cdots y_d)$ zusammen. Ist $\{y_1,\dots,y_d\}$ ein FS, so nennt man $Y \in C^1(J,\mathbb{R}^{d\times d})$ eine FUNDAMENTALMATRIX. Gilt außerdem $Y(t_0) = \mathbb{1}$, so heißt Y HAUPTFUNDAMENTALMATRIX und die Spalten von Y HAUPTFUNDAMENTALSYSTEM.

Die Hauptfundamentalmatrix zu t_0 schreiben wir auch als $\Pi(t,t_0)$, d.h. es gilt $\Pi(t_0,t_0) = \mathbb{1}$ und $\Pi(\cdot,t_0)$ ist eine Fundamentalmatrix.

Lemma 3.18

Sei $A \in C(J,\mathbb{R}^{d\times d})$. Dann gelten folgende Aussagen.

a) Für jede Lösungsmatrix $Y \in C^1(J,\mathbb{R}^{d\times d})$ gilt die Matrix-Differentialgleichung

$$Y'(t) = A(t)\,Y(t) \qquad \forall t \in J$$

b) Seien $y_1,\dots,y_d$ Lösungen von (*). Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) $\{y_1,\dots,y_d\}$ ist linear unabhängig in $C^1(J,\mathbb{R}^d)$

2) $\{y_1(t_0),\dots,y_d(t_0)\}$ ist linear unabhängig in $\mathbb{R}^d$ für ein $t_0 \in J$.

3) $\{y_1(t), \dots, y_d(t)\}$ ist linear unabhängig in $\mathbb{R}^d$ für alle $t \in J$.

4) $Y(t_0)$ ist invertierbar für ein $t_0 \in J$

5) $Y(t)$ ist invertierbar für alle $t_0 \in J$

Für die WRONSKI-DETERMINANTE

$$W(t) := \det Y(t) \qquad \text{gilt}$$

6) $W(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in J$.

7) $W(t) \neq 0$ für alle $t \in J$.

d.h. die Wronski-Determinante ist entweder für $\forall t \in J$ von Null verschieden, oder sie ist identisch Null.

Beweis: a)

Gilt für Funktionen $y_1, \dots, y_d \in C^1(J, \mathbb{R}^d)$ die Gleichung

$$y_i'(t) = A(t) y_i(t),$$ so folgt die Behauptung aufgrund der Identität $A(t)(y_1 \cdots y_d) = (A(t)y_1 \cdots A(t)y_d)$

b) 2) $\Rightarrow$ 1) folgt aus der Isomorphie von $S(t_0)$ aus Satz 3.15; 1) $\Rightarrow$ 3) ebenso und 3) $\Rightarrow$ 2) ist klar, also gilt 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3).

Ebenso klar sind 7) $\Rightarrow$ 6) und (siehe Lineare Algebra) 3) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 7) sowie 6) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 2). $\square$

Folgerungen 3.19

i) Ist Y eine Fundamentalmatrix, so läßt sich jede Lösung von $u'(t) = A(t)u(t)$ durch $u(t) = Y(t)c$ mit einem eindeutig bestimmten Vektor $c \in \mathbb{R}^d$ darstellen.

ii) Für jede Lösungsmatrix $Z \in C^1(J, \mathbb{R}^{d\times d})$ und jede konstante Matrix $C \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ist auch

$$Y(t) = Z(t)\, C$$

eine Lösungsmatrix, denn

$$Y'(t) = Z'(t)\, C = A(t) Z(t) C = A(t) Y(t).$$

iii) Sind zwei Fundamentalmatrizen Y, Z gegeben, so gilt

$$Z(t) = Y(t) Y(t_0)^{-1} Z(t_0),$$

iv) Wählt man linear unabhängige Anfangswerte $u_0^1, \dots, u_0^d \in \mathbb{R}^d$, so bilden die Lösungen $y_1, \dots, y_d$ von (*) für $y_j(t_0) = u_0^j$, $j \in \{1, \dots, d\}$ eine Fundamentalmatrix $Y = (y_1 \cdots y_d)$. Diese ist genau dann eine Hauptfundamentalmatrix für t_0, wenn $u_0^j = e_j$ für jedes $j \in \{1, \dots, d\}$ gilt, d.h. es gibt genau eine Hauptfundamentalmatrix $\Pi(\cdot, t_0)$.

v) Ist Y irgendeine Fundamentalmatrix, so folgt aus iii)

$$\Pi(t, t_0) = Y(t) Y(t_0)^{-1}$$

ii) Es gilt für $t_1 \in J$: $\Pi(t, t_1)\Pi(t_1, t_0) = \Pi(t, t_0)$, denn beide Seiten sind für $t = t_1$ identisch und lösen $\Pi'(t,\cdot) = A(t)\Pi(t,\cdot)$

Insbesondere folgt mit $t = t_0$: $\Pi(t_0, t_1)\Pi(t_1, t_0) = \mathbb{1}$,

$\Rightarrow$ $\Pi(t, t_0)$ ist ein Isomorphismus mit $\Pi(t, t_0)^{-1} = \Pi(t_0, t)$

Für $t, s \in J$ wird $\Pi(t, s)$ auch als die „ÜBERGANSMATRIX" bezeichnet.

Bemerkung 3.20

Seien $y_1, \dots, y_d \in C^1(J, \mathbb{R}^d)$, $W(t) = \det Y(t) \neq 0 \ \forall t \in J$.
$Y = (y_1, \dots, y_d)$. Dann lösen $y_1, \dots, y_d$ eine eindeutig bestimmte Differentialgleichung, nämlich

$$Y'(t) = A(t)Y(t) \qquad \text{mit} \qquad A(t) := Y'(t)Y(t)^{-1}$$

Beispiel 3.21 (Konstante Koeffizienten)

Ist $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ unabhängig von t, so ist mit den Ergebnissen aus Kapitel 3.1 offensichtlich

$$\Pi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

Als nächstes suchen wir die Darstellung der Lösung der inhomogenen Gleichung: $A \in C(J, \mathbb{R}^{d \times d})$, $g \in C(J, \mathbb{R}^d)$

$$u'(t) = A(t)u(t) + g(t) \qquad t \in J \qquad (*)$$

Sind $u, v \in C^1(J, \mathbb{R}^d)$ zwei Lösungen von $(*)$, so löst $w := u - v \in C^1(J, \mathbb{R}^{d \times d})$ die homogene Gleichung,

denn $$w'(t) = u'(t) - v'(t) = A(t)u(t) + g(t) - A(t)v(t) - g(t)$$
$$= A(t)(u(t) - v(t)) = A(t)w(t)$$

Sei $Y \in C^1(J, \mathbb{R}^{d\times d})$ eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems. Dann gilt $w(t) = Y(t)c$ für ein $c \in \mathbb{R}^d$.

Es gilt also
$$u(t) = Y(t)c + v(t)$$

Finden wir also irgendeine Lösung v von (*), so läßt sich jede beliebige Lösung u durch die obige Beziehung ausdrücken. Eine spezielle („partikuläre") Lösung läßt sich mit der Methode der VARIATION DER KONSTANTEN (siehe auch Kapitel 1) bestimmen:

Der Ansatz
$$v(t) = Y(t)c(t)$$ führt auf
$$v'(t) = Y'(t)c(t) + Y(t)c'(t) = A(t)Y(t)c(t) + Y(t)c'(t)$$
$$= A(t)v(t) + Y(t)c'(t)$$

Ist v eine Lösung von (*), so gilt
$$Y(t)c'(t) = g(t) \Rightarrow c'(t) = Y^{-1}(t)g(t),$$
da Y als Fundamentalmatrix invertierbar ist. Durch Integration folgt
$$c(t) - c(t_0) = \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)g(s)ds$$

Da wir nur an einer speziellen Lösung interessiert sind, setzen wir $c(t_0) = 0$ und erhalten

$$v(t) = Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)g(s)\,ds \qquad t \in J$$

Die allgemeine Lösunung von (*) läßt sich also schreiben als

$$u(t) = Y(t)c + Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)g(s)\,ds$$

Mit einem gegebenen Anfangswert $u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^d$ folgt

$$u(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)u_0 + Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)g(s)\,ds \qquad (*)$$

Wir fassen dies in einem Satz zusammen.

<u>Satz 3.22</u> (DARSTELLUNG DER LÖSUNG DES INHOMOGENEN SYSTEMS)

Sei $A \in C(J, \mathbb{R}^{d\times d})$, $g \in C(J, \mathbb{R}^d)$. Dann läßt sich die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = A(t)u(t) + g(t) \qquad t \in J$$
$$u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^d$$

schreiben als

$$u(t) = \Pi(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} \Pi(t,s)g(s)\,ds$$

wobei $\Pi(t,s)$ die Übergansmatrix (bzw. Hauptfundamentalmatrix für festes $s \in J$) bezeichnet, d.h. $\Pi(s,s) = \mathbb{1}$.

Es gilt: Der Lösungsraum $\mathcal{L}_g \subset C^1(J, \mathbb{R}^d)$ ist ein d-dimensionaler affiner Teilraum.

Beweis: Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung wurde bereits in Kapitel 2 gezeigt. Die Darstellung der Lösung folgt aus unseren Vorbemerkungen, da (*) $\Pi(t, t_0) = Y(t)Y^{-1}(t_0)$ und $\Pi(t, s) = Y(t)Y^{-1}(s)$.

3.2.1 Die d'Alembert-Reduktion

Im Allgemeinen gibt es keine systematische Methode ein lineare System im nicht-autonomen Fall zu lösen (außer im Fall $d=1$). Zur Bestimmung eines Fundamentalsystems der homogenen Gleichung kann jedoch die d'Alembert-Reduktion hilfreich sein (insbesondere im Fall $d=2$).

Voraussetzung ist, dass eine Lösung $y_1 \in C^1(J, \mathbb{R}^d)$ bereits bekannt ist, wobei wir oBdA annehmen, dass die 1. Komponente ungleich Null ist für $t \in J$.

Insbesondere löst y_1,

$$y'(t) = A(t)\,y(t). \quad (*)$$

Sei $X(t) := (y_1(t) \;\; e_2 \cdots e_d)$ mit $e_j = (0 \cdots \underset{\underset{j}{\uparrow}}{1} \cdots 0)^T$ der j-te Einheitsvektor

Sei y Lösung von (*) und setze $x(t) := X(t)^{-1}y(t)$

Dann folgt

$$\begin{aligned} x'(t) &= X(t)^{-1}y'(t) - X(t)^{-1}X'(t)\,X(t)^{-1}y(t) \\ &= X(t)^{-1}\left[A(t)X(t) - X'(t)\right]x(t) \end{aligned}$$

Es gilt $AX - X' = AX - (y_1' \; 0 \cdots 0) = AX - A(y_1 \; 0 \cdots 0)$

$$= A(X - (y_1\ 0 \cdots 0)) = A(0\ e_2 \cdots e_d)$$
$$= (0\ Ae_2 \cdots Ae_d) = (0\ a_2 \cdots a_d)$$

für $A = (a_1 \cdots a_d)$.

Es gilt also $x'(t) = B(t)\,x(t)$ mit

$B(t) = (0\ b_1 \cdots b_d)$ und die rechte Seite der Gleichung ist daher unabhängig von x_1.

Es kann also zunächst das System für $(x_2, \dots x_d) =: \tilde{x}$

$\tilde{x} \in C^1(J, \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1})$ gelöst werden und x_1 erhält man durch Integration, bzw. y durch Rücktransformation