Vorlesungsnotizen zu
Analysis 4

Zusammenfassung. Dies ist eine erste, **unkorrigierte** Version der Vorlesungsnotizen zur Vorlesung Analysis 4 im Sommersemester 2025, die während des Semesters laufend ergänzt wird. Diese basieren zum Großteil auf Notizen zur gleichnamigen Vorlesung von Christian Bargetz (SoSe 2024). Kommentare und Tippfehler bitte jederzeit melden an: birgit.schoerkhuber@uibk.ac.at

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Topologische Grundlagen

Zunächste fassen wir kurz Inhalte der Analysis 2 zusammen und ergänzen weitere Definitionen und Eigenschaften.

1. Normierte Räume - Metrische Räume

Definition 1.1. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften.
(N1) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
(N2) $\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.
(N3) $\forall v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.
Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ nennt man **normierter Raum**.

Beispiel 1.2. (a) $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_2)$ mit der Euklidischen Norm

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

bzw. $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_\infty)$ mit der Maximumsnorm

$$\|x\|_\infty := \max_{i \in \{1,\ldots,d\}} |x_i|,$$

mit $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{K}^d$.

(b) Der Raum der quadratischen Matrizen $\mathbb{C}^{d \times d}$ ausgestattet mit der Frobenius-Norm

$$\|A\|_F := \left(\sum_{i,j=1}^{d} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{d \times d}$.

Definition 1.3. Sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_*$ auf V heißen **äquivalent**, falls es $c_1, c_2 > 0$ gibt, so dass für alle $v \in V$ gilt

$$c_1 \|v\|_* \leq \|v\| \leq c_2 \|v\|_*.$$

In Analysis 2 wurde folgender Satz bewiesen.

Satz 1.4. *Auf $\mathbb{R}^d$ sind alle Normen äquivalent.*

Dies impliziert sofort eine wichtige Verallgemeinerung.

Satz 1.5. *Sei V eine endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann sind alle Normen auf V äquivalent.*

Beweis. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit $\dim(V) = d < \infty$. Wähle einen Isomorphis–mus $T : V \to \mathbb{R}^d$. Seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_*$ Normen auf V. Dann definieren diese Abbildungen Normen auf $\mathbb{R}^d$ via

$$\|x\|_T := \|T^{-1}x\|, \quad \|x\|_{T,*} := \|T^{-1}x\|_*$$

für $x \in \mathbb{R}^d$. Aus Satz 1.4 folgt die Äquivalenz von $\|\cdot\|_T$ und $\|\cdot\|_{T,*}$, d.h. es existieren $c_1, c_2 > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$c_1\|x\|_{T,*} \le \|x\|_T \le c_2\|x\|_{T,*}.$$

Da T ein Isomorphismus ist, folgt

$$c_1\|v\|_* \le \|v\| \le c_2\|v\|_*.$$

für alle $v \in V$. □

Bemerkung 1.6. Die Aussage von Satz 1.5 gilt analog für endlich dimensionale Vektorräume über $\mathbb{C}$. Im unendlich dimensionalen Fall gilt die Aussage jedoch im Allgemeinen nicht (siehe Übungen).

Normierte Vektorräume werden im zweiten Teil der Vorlesung eine zentrale Rolle spielen. Zunächst ist es aber unser Ziel, auf einer Menge so wenig Struktur wie möglich vorauszusetzen, trotzdem aber bekannte Konzepte, wie etwa die Stetigkeit von Funktionen, sinnvoll definieren zu können. Der erste Schritt in diese Richtung ist die Betrachtung metrischer Räume. Diese sind ebenfalls bereits aus der Analysis 2 bekannt.

1.1. Metrische Räume.

Definition 1.7. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine **Metrik** auf X ist eine Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.
(M3) $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$ für alle $x, y, z \in X$ (Dreiecksungleichung).

Das Paar (X, d) heißt **metrischer Raum** und man schreibt oft nur X, wenn klar ist, welche Metrik auf X definiert ist.

Beispiel 1.8. (i) Jeder normierte Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist ein metrischer Raum mit der **von der Norm induzierten Metrik**

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

(ii) Sei X eine Menge und $d : X \times X \to [0, \infty)$ definiert als

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Man nennt d die *diskrete Metrik* auf X (siehe Übungen).

Definition 1.9. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Sei $a \in X$, $r > 0$. Die Menge

$$B(a, r) := \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

heißt **offene Kugel um a mit Radius r**.

(b) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **offen**, wenn für alle $x \in A$ ein $r > 0$ existiert mit $B(x, r) \subset A$. A heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Satz 1.10. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:*

(a) Eine offene Kugel ist eine offene Menge.
(b) X und die leere Menge $\emptyset$ sind offen.
(c) Die Vereinigung von offenen Mengen ist offen.
(d) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

Korollar 1.11. *Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes ist offen, genau dann wenn A Vereinigung offener Kugeln ist.*

Beweis. Übung. □

Definition 1.12. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Eine **Umgebung von** x ist eine Menge, die eine offene Kugel um x enthält.

Durch Einsetzen der Definitionen erhält man unmittelbar folgenden Satz.

Satz 1.13. *Ist (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge, so ist A genau dann offen, wenn A Umgebung aller seiner Punkte ist.*

Definition 1.14. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ eine Teilmenge. A heißt beschränkt, wenn es eine reelle Zahl $C \geq 0$ und einen Punkt $x \in X$ gibt derart, dass für alle $a \in A$ gilt $d(a, x) \leq C$.

Definition 1.15. Seien A und B nichtleere Teilmengen eines metrischen Raumes (X, d). Der **Abstand von** A **und** B ist definiert durch

$$d(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Für $A = \{x\}$ sei

$$d(x, B) := d(A, B).$$

Definition 1.16. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subset X$ eine Teilmenge. Sei $d_A : A \times A \to [0, \infty)$ die Einschränkung von d auf $A \times A$. Dann ist (A, d_A) ein metrischer Raum und d_A wird die **von** d **induzierte Metrik auf** A genannt.

Beispiel 1.17. Sei $X = \mathbb{R}$ und d die von der Betragsfunktion induzierte Metrik auf $\mathbb{R}$, $d(x, y) := |x - y|$. Dann ist $(\mathbb{Q}, d_{\mathbb{Q}})$ ebenfalls ein metrischer Raum.

Der Stetigkeitsbegriff kann leicht auf Abbildungen zwischen metrischen Räumen verall–gemeinert werden.

Definition 1.18. Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) f heißt **stetig in** $x_0 \in X$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ existiert, so dass gilt
$$d_X(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$
(b) f heißt **stetig** auf X, wenn f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

(c) f heißt **gleichmäßig stetig** auf X, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass gilt
$$d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Bemerkung 1.19. Die obige Bedingung an die Stetigkeit von f in x_0 lässt sich offensichtlich auch so formulieren: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt

$$f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon),$$

mit $B(x_0, \delta) \subset X$ und $B(f(x_0), \varepsilon) \subset Y$.

Satz 1.20. *Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume. Ein Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig, genau dann wenn das Urbild einer jeden offenen Menge in Y offen in X ist, d.h.*

$$\forall O \subset Y \textit{ offen } : f^{-1}(O) \subset X \textit{ offen }.$$

Beweis. $\Rightarrow$: Sei f stetig und $O \subset Y$ offen. Wir zeigen, dass dann $f^{-1}(O)$ offen ist. Sei $x \in f^{-1}(O)$. Dann gilt $f(x) \in O$ und da O offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B(f(x), \varepsilon) \subset O$. Da f stetig ist in x existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon) \subset O$$

und daher gilt $B(x,\delta) \subset f^{-1}(O)$. Da x beliebig war, folgt die Behauptung.
$\Leftarrow$: Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $B(f(x),\varepsilon) \subset Y$ offen und nach Vorausssetzung auch $f^{-1}(B(f(x),\varepsilon)) \subset X$. Außerdem ist $x \in f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$. Daher gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$B(x,\delta) \subset f^{-1}(B(f(x),\varepsilon)),$$

also

$$f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon).$$

Daher ist f stetig. □

Ein Beweis analog zum Beweis des letzten Satzes liefert auch folgende lokale Charak–terisierung.

Satz 1.21. *Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume. Ein Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn das Urbild jeder Umgebung von $f(x)$ eine Umgebung von x ist.*

Im $\mathbb{R}^d$ wurde Stetigkeit von Funktionen mit Hilfe von Folgen charakterisiert. Dies ist auch in metrischen Räumen möglich. Im Folgenden verstehen wir unter einer **Folge** in einer Menge X eine Funktion

$$\mathbb{N} \to X : n \mapsto x(n)$$

wobei der Funktionswert $x(n)$ an der Stelle n als x_n geschrieben wird. Für die Folge schreiben wir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition 1.22. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X,d) heißt beschränkt, falls die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ beschränkt ist.

Definition 1.23. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt **konvergent** gegen $x \in X$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt

$$d(x_n, x) < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Wir schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Satz 1.24. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X für die gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ und } \lim_{n\to\infty} x_n = y,$$

für $x, y \in X$, so folgt $x = y$. Der Grenzwert einer Folge in einem metrischen Raum ist also eindeutig.

Beweis. Analysis 2/Übungen. □

In einem metrischen Raum lässt sich nun die Stetigkeit einer Abbildung auf äquivalente Weise über Folgen charakterisieren.

Satz 1.25. *Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räum und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*
(a) f ist stetig in $x \in X$.
(b) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, so folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$ Sei f stetig in x und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon).$$

Aufgrund der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in B(x,\delta)$ für alle $n \geq N$. Also gilt $f(x_n) \in B(f(x),\varepsilon)$ für alle $n \geq N$ und daher konvergiert $f(x_n)$ gegen $f(x)$.
$(b) \Leftarrow (a)$: Wir nehmen an, dass f nicht stetig ist in x. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $f(B(x,\delta)) \not\subset B(f(x),\varepsilon)$ für alle $\delta > 0$. Insbesondere existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in B(x,\frac{1}{n})$ mit $f(x_n) \notin B(f(x),\varepsilon)$. Nach Konstruktion konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x, aber $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(x)$. $\square$

Eine wichtige Klasse von Folgen, die wir bereits in verschiedenen Bereichen kennengelernt haben, sind Cauchy-Folgen.

Definition 1.26. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X,d) heißt **Cauchy-Folge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt so, dass gilt

$$d(x_n,x_m) < \varepsilon, \quad \forall n,m \geq N.$$

Der Beweis der folgenden Aussagen ist eine Übung.

Bemerkung 1.27. Ist (X,d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, so gilt:
(i) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.
(ii) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist die Folge eine Cauchy-Folge.
(iii) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, so ist die Folge selbst konvergent.

Definition 1.28. Ein metrischer Raum (X,d) heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Im Folgenden wollen wir untersuchen, inwiefern sich Konzepte wie Stetigkeit von Abbildungen auch auf Mengen ohne metrische Struktur übertragen lassen. Dies führt uns auf sogenannte *topologische Räume*.

2. Topologische Räume - Grundbegriffe

Im Folgenden bezeichnet 2^X die Potenzmenge einer gegebenen Menge X.

Definition 2.1. Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X,\mathcal{T})$ bestehend aus einer Menge X und einem Mengensystem $\mathcal{T} \subset 2^X$ mit den folgenden Eigenschaften:
(T1) $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$.
(T2) Für $(O)_{i\in I}$ mit $O_i \in \mathcal{T}$ ist $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$.
(T3) Für O_1, $O_2 \in \mathcal{T}$ gilt $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$.
Die Elemente von $\mathcal{T}$ nennt man **offene Mengen** und die Menge $\mathcal{T}$ die **Topologie** auf X. Die Elemente von X bezeichnen im Folgenden auch als *Punkte*.

Bemerkung 2.2. Anstelle von (iii) in der obigen Definition kann man auch verlangen, dass endliche Durchschnitte offener Mengen offen sind (diese Forderung ist äquivalent).

Beispiel 2.3. (a) Sei (X,d) ein metrischer Raum, Dann heißt

$$\mathcal{T}_d = \{O \subset X : \forall x \in O\ \exists r > 0\ mit\ B(x,r) \subset O\}$$

die *von der Metrik d erzeugte Topologie* auf X. Insbesondere ist jeder metrische Raum ein topologischer Raum.

(b) Sei X eine Menge. Dann nennt man $\mathcal{T} := 2^X$ die *diskrete Topologie*.
(c) Sei X eine Menge. Dann nennt man $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ die *indiskrete Topologie* oder *Klumpentopologie*.
(d) Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Man nennt

$$\mathcal{T} = \{A = \emptyset \text{ oder } X \setminus A \text{ ist endlich}\}$$

die cofinite Topologie auf X.
(e) Auf der Menge $\{0,1\}$ ist $\mathcal{T} := \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$ eine Topologie.

Definition 2.4. Sei X eine Menge und seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf X. Dann heißt $\mathcal{T}_1$ **feiner** als $\mathcal{T}_2$, falls $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. In diesem Fall nennt man $\mathcal{T}_2$ **gröber** als $\mathcal{T}_1$.

Definition 2.5. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig**, falls Urbilder offener Mengen offen sind, d.h. falls

$$\forall O \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_X.$$

Satz 2.6. *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ und $(Z, \mathcal{T}_Z)$ topologische Räume. Sind die Abbildungen $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ stetig, so ist auch $g \circ f : X \to Z$ stetig.*

Beweis. Übung. □

Definition 2.7. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist ein **Homöomorphismus**, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind. Existiert zwischen zwei topologischen Räumen $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein Homöomorphismus, so nennt X und Y **homöomorph** und schreibt $X \simeq Y$.

Bemerkung 2.8. $\mathcal{T}_1$ ist genau dann feiner als $\mathcal{T}_2$, wenn $id : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ stetig ist (siehe Übungen).

In metrischen Räumen kann jede offene Menge als Vereinigung offener Kugeln dargestellt werden. In topologischen Räumen ist es oft praktisch, ein Mengensystem zu haben mit einer ähnlichen Eigenschaft.

Definition 2.9. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ein Mengensystem $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ heißt **Basis der Topologie** $\mathcal{T}$, falls jede offene Menge als Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$ dargestellt werden kann.

Bemerkung 2.10. Sei $I = \emptyset$. Dann gilt $\bigcup_{i \in I} B_i = \emptyset$.

Beispiel 2.11. Sei X eine Menge.

(a) $\{B(x,r) : x \in X, r > 0\}$ ist eine Basis der Topologie in Beispiel 2.3 (a).
(b) $\{\{x\} : x \in X\}$ ist eine Basis der diskreten Topologie auf X.
(c) $\{X\}$ ist eine Basis der indiskreten Topologie.

Satz 2.12. *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und $\mathcal{B}_Y$ eine Basis von $\mathcal{T}_Y$. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn für alle $B \in \mathcal{B}_Y$ gilt $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$*

Beweis. $\Rightarrow$: klar aus Definition 2.5, da $\mathcal{B}_Y \subset \mathcal{T}_Y$.
$\Leftarrow$: Sei $O \in \mathcal{T}_Y$. Dann gibt es $B_i \in \mathcal{B}_Y$, $i \in I$, so dass $O = \bigcup_{i \in I} B_i$. Daher folgt

$$f^{-1}(O) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{T}_X.$$

Die Identität im letzten Schritt gilt, da

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \{x \in X : \exists i \in I \text{ so, dass } f(x) \in B_i\} = \bigcup_{i\in I}\{x \in X : f(x) \in B_i\}.$$

$\square$

Wie in metrischen Räumen können wir auch in topologischen Räumen die Stetigkeit einer Abbildung in einem Punkt definieren.

DEFINITION 2.13. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt **Umgebung** von $x \in X$, falls $x \in U$ und es eine offene Menge V gibt, so dass $x \in V \subset U$. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{U}(x) := \{U \subset X : U \text{ ist Umgebung von } x\}$$

das **Umgebungssystem von** x.

DEFINITION 2.14. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig im Punkt** x, falls für jedes $V \in \mathcal{U}(f(x))$ ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subset V$ existiert.

DEFINITION 2.15. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Ein Mengensystem $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ heißt **Umgebungsbasis von** x, falls zu jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $B \in \mathcal{B}(x)$ mit $B \subset U$ existiert

SATZ 2.16. *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.*

(a) Seien $\mathcal{B}(x)$ und $\mathcal{B}(f(x))$ Umgebungsbasen von x bzw. $f(x)$. Die Abbildung f ist ganau dann stetig in x, wenn zu jedem $V \in \mathcal{B}(f(x))$ ein $U \in \mathcal{B}(x)$ existiert mit $f(U) \subset V$.

(b) f ist genau dann stetig, wenn es in allen Punkten $x \in X$ stetig ist.

BEWEIS. (a) $\Rightarrow$: Sei f stetig und sei $V \in \mathcal{B}(f(x)) \subset \mathcal{U}(f(x))$. Dann existiert nach Definition ein $\tilde{U} \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(\tilde{U}) \subset V$. Da $\mathcal{B}(x)$ eine Umgebungsbasis ist, gibt es ein $U \subset \mathcal{B}(x)$ mit $U \subset \tilde{U}$. Insbesondere gilt $f(U) \subset V$.
$\Leftarrow$: Sei $V \subset \mathcal{U}(f(x))$. Dann gibt es ein $\tilde{V} \in \mathcal{B}(f(x))$ mit $\tilde{V} \subset V$. Nach Annahme existiert ein $U \in \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subset \tilde{V}$. Also ist f stetig in x.

(b) $\Rightarrow$: Sei f stetig, $x \in X$ und $V \in \mathcal{U}(f(x))$. Dann gibt es nach Definition ein $O \in \mathcal{T}_Y$ mit $f(x) \in O \subset V$. Wegen der Stetigkeit von f ist $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_X$ und da $x \in f^{-1}(O)$ folgt $f^{-1}(O) \in \mathcal{U}(x)$ und $f(f^{-1}(O)) = O$. Also ist f stetig in x.
$\Leftarrow$:
Sei $O \in \mathcal{T}_X$. Da O Umgebung all seiner Elemente ist, d.h. $O \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in O$, gibt es zu jedem $x \in f^{-1}(O)$ ein $V_x \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(V_x) \subset O$. Wir wählen zu jedem x ein $U_x \in \mathcal{T}_X$ mit $U_x \subset V_x$. Dann ist

$$\bigcup_{x\in f^{-1}(O)} U_x \in \mathcal{T}_X \text{ und } \subset \bigcup_{x\in f^{-1}(O)} U_x$$

Da $f(U_x) \subset f(V_x) \subset O$, gilt auch $\bigcup_{x\in f^{-1}(O)} U_x \subset f^{-1}(O)$ und daher $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_X$. Daher ist f stetig.

$\square$

Wie in metrischen Räumen (siehe Analysis 2) können wir in topologischen Räumen Begriffe wie *Inneres, Abschluss* und *Rand* einer Menge definieren.

Definition 2.17. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.
(a) $A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \setminus A$ offen ist (d.h. $X \setminus A \in \mathcal{T}$).
(b) Für $A \subset X$ heißt $x \in X$ **innerer Punkt von** A, falls A eine Umgebung von x ist, **äußerer Punkt von** A, falls $X \setminus A$ eine Umgebung von x ist, bzw. **Randpunkt**, falls weder A noch $X \setminus A$ Umgebung von x ist.

Definition 2.18. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$.
(a) Die Menge
$$\mathring{A} := \{x \in X : x \text{ ist innerer Punkt von } A\}$$
heißt **Inneres von** A.
(b) Die Menge
$$\overline{A} := \{x \in X : \forall U \in \mathcal{U}(x) : A \cap U \neq \emptyset\}$$
heißt **Abschluss von** A.
(c) Die Menge $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ heißt **Rand von** A.
(d) A heißt **dicht** in X, falls $\overline{A} = X$.
(e) A heißt **nirgends dicht**, falls $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$.

Beispiel 2.19. (a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist dicht.
(b) Einpunktige Mengen sind nirgends dicht.

Bemerkung 2.20. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$.
(a) $\mathring{A}$ ist offen. Genauer ist $\mathring{A}$ die größte offene Menge, die in A enthalten ist und es gilt
$$\mathring{A} = \bigcup \{U \in \mathcal{T} : U \subset A\}$$
(b) A ist offen $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$
(c) $\overline{A}$ ist abgeschlossen. Genauer ist $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält und es gilt
$$\overline{A} = \bigcup \{V : A \subset V, X \setminus V \in \mathcal{T}\}.$$
(d) A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.