$$|f_i(t,x) - f_i(t,y)| = \left| \int_0^1 \frac{d}{d\tau} f_i(t, \tau x + (1-\tau)y)\, d\tau \right|$$

$$\leq \int_0^1 |(x-y)^T \nabla_x f_i(t, \tau x + (1-\tau)y)|\, dy$$

$\forall (t,x), (t,y) \in K$. Mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung (siehe Analysis 2, Satz 1.16) folgt

$$|f_i(x,y) - f_i(t,y)| \leq |x-y| \int_0^1 |\nabla_x f_i(t, \tau x + (1-\tau)y)|\, d\tau$$

$$\leq |x-y| \max_{(t,x)\in K} |\nabla_x f_i(t,x)| = L_i |x-y|$$

mit $L_i := \max\limits_{(t,x)\in K} |\nabla_x f_i(t,x)| < \infty$, und dieses Maximum existiert, nach Voraussetzung

$$\Rightarrow \quad |f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y| \quad \text{mit} \quad L := \left(\sum_{i=1}^d L_i^2\right)^{1/2}$$

Alternativ kann man auch den Schrankensatz aus Analysis 2 Satz 3.39 und Bemerkung 3.40 heranziehen.

$\square$

Im Folgenden können wir einen der zentralen Sätze in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen beweisen.

Satz 2.8 (SATZ VON PICARD LINDELÖF)

Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, $U \neq \emptyset$, $f: U \to \mathbb{R}^d$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in x. Seien $(t_0, u_0) \in U$. Dann existiert ein $T > 0$ und eine Funktion $u \in C^1(J_T, \mathbb{R}^d)$

$J_T := [t_0 - T, t_0 + T]$, so dass $(t, u(t)) \in U$ für alle $t \in J_T$ gilt und u das Anfangswertproblem (2.1) löst.

Beweis:

Seien $T_0 > 0$ und $\delta > 0$ so fixiert, dass $V_0 := J_{T_0} \times \overline{B_\delta}(u_0) \subset U$ gilt, wobei $\overline{B_\delta}(u_0) = \{u \in \mathbb{R}^d : |u - u_0| \leq \delta\}$.

Für $0 < T \leq T_0$ sei $X_T = C(J_T, \mathbb{R}^d)$, $J_T := [t_0 - T, t_0 + T]$

Dann ist $(X_T, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum, wobei für $u \in X_T$

$$\|u\|_\infty := \sup_{t \in J_T} |u(t)| \text{ gilt.}$$

Sei $M_T := \{u \in X_T : \|u - u_0\|_\infty \leq \delta\}$. Dann ist $M_T \subset X_T$ abgeschlossen. Für $u \in M_T$ gilt $(t, u(t)) \in V_0 \ \forall t \in J_T$

Sei

$$K(u)(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds.$$

Wir zeigen: $K : M_T \to M_T$ ist eine Kontraktion, falls T hinreichend klein gewählt wird. Aus der Abgeschlossenheit von M_T folgt dann aus dem Banach'schen Fixpunktsatz die Existenz eines eindeutigen Fixpunkts von K in M_T

Schritt 1: $K : M_T \to M_T$.

Die Stetigkeit von u und f auf V_0 impliziert $K(u) \in X_T$.

Außerdem gilt mit

$$m := \max_{(t,x) \in V_0} |f(t,x)|$$

für $u \in M_T$ und alle $t \in J_T = [t_0 - T, t_0 + T]$,

$$|K(u)(t) - u_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \right| \leq \int_{J_T} |f(s, u(s))|\, ds \leq 2Tm$$

Ist $m=0$, so sei $T_1 = T_0$. Andernfalls setze

$T_1 := \min\{T_0, \frac{\delta}{2m}\}$. Für $T \leq T_1$ folgt dann

$$\sup_{t \in J_T} |K(u)(t) - v_0| = \|K(u) - u_0\| \leq \delta \Rightarrow K(u) \in M_T$$

<u>Schritt 2:</u> K ist eine Kontraktion auf M_T

Aus den Voraussetzungen an f folgt: $\exists L > 0$

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|$$

$\forall (t,x), (t,y) \in J_{T_0} \times \overline{B_\delta}(v_0)$.

Für $0 < T \leq T_0$ und $u, v \in M_T$ gilt

$$u(t), v(t) \in \overline{B_\delta}(v_0) \quad \forall t \in J_T \text{ und daher}$$

$$|K(u)(t) - K(v)(t)| \leq \int_{J_T} |f(s,u(s)) - f(s,v(s))| ds$$

$$\leq 2LT \sup_{s \in J_T} |u(s) - v(s)|$$

$$= 2LT \|u-v\|_\infty$$

Ist $T \leq \frac{1}{4L}$, so erhalten wir insbesondere

$$\|K(u) - K(v)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|u-v\|_\infty$$

d.h. für $0<T \leq \min\{T_0, \frac{\delta}{2m}, \frac{1}{4L}\}$ für $m>0$ (bzw. $0<T \leq \min\{T_0, \frac{1}{4L}\}$ für $m=0$) ist

$K: M_T \to M_T$ eine Kontraktion. Daher gibt es ein eindeutiges $u \in M_T$, so dass gilt $u = K(u)$, also gilt

$$u(t) = K(u)(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))\, ds$$

für alle $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. $\square$

Bemerkung 2.9 Der Beweis des Fixpunktsatzes von Banach liefert auch eine Iterationsvorschrift: Für $u_0(t) := u_0$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$u_{n+1}(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s))\,ds. \qquad t \in [t_0 - T, t_0 + T]$$

Dann konvergiert $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine Lösung des Anfangswertproblems.

Die Konstruktion der Lösung über eine derart definierte Folge nennt man PICARD-ITERATION.

Bemerkung 2.10 Im Beweis von Satz 2.8 hängt T explizit von der Lipschitz-Konstante L ab ($T \leq \frac{q}{2L}$. für ein $q \in (0,1)$)

Dies läßt sich durch Abwandlung des Beweises tatsächlich vermeiden, siehe Proseminar.

Weiters kann man den Beweis auch nur „nach rechts" („vorwärts") für $t_0 \leq t$ bzw. „nach links" („rückwärts") für $t \leq t_0$ führen und erhält mitunter ein größeres Existenzintervall in nur eine Richtung.

Korollar 2.11 Sei f wie in Satz 2.8 und sei $(t_0, u_0) \in U$.

Sei $(t_j, u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge in U mit

$$(t_j, u_j) \to (t_0, u_0) \quad \text{für } j \to \infty. \text{ und } t_j \leq t_0 \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Dann existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$ und ein $T > 0$, sodass für jedes $j \geq j_0$ das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)) \\ u(t_j) &= u_j \end{aligned}\right\}$$

eine Lösung auf dem Intervall $[t_j, t_j + T]$ besitzt, wobei T unabhängig von j ist.

Beweis: Für $(t_0, u_0) \in U$ sei $V_0 := [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}_\delta(u_0) \subset U$

Sei $0 < T < \min \{ T_0, \frac{1}{4L}, \frac{\delta}{4m} \}$ mit L und m wie im vorigen Beweis

Sei $j_0 \in \mathbb{N}$ so dass für $j \geq j_0$ gilt: $t_0 - T < t_j \leq t_0$ und

$u_j \in \overline{B_{\delta/2}}(u_0)$. Sei $M_T \subset X_T$ wie im vorigen Beweis definiert

als $M_T = \{ u \in X_T : \| u - v_0 \|_\infty \leq \delta \}$, $\|u\|_\infty = \sup\limits_{[t_0 - T, t_0 + T]} |u(t)|$

Dann ist $K_j : M_T \to M_T$.

$$K_j(u)(t) := u_j + \int_{t_j}^{t} f(s, u(s)) \, ds \quad \text{eine Kontraktion,}$$

denn es gilt $|K_j(u)(t) - v_0| \leq \underbrace{|u_j - v_0|}_{\leq \delta/2} + \underbrace{2Tm}_{< \frac{\delta}{2}} \leq \delta$ für $u \in M_T$

$\Rightarrow \quad \| K_j(u) - v_0 \|_\infty \leq \delta \Rightarrow K_j(u) \in M_T$

und $|K_j(u)(t) - K_j(v)(t)| \leq 2TL \sup\limits_{t \in J_T} |u(t) - v(t)| \leq \frac{1}{2} \|u - v\|_\infty$

$\Rightarrow$ Für jedes $j \geq j_0$ besitzt die jeweilige Abbildung K_j auf M_T einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $w_j \in M_T$ mit

$$w_j(t) = u_j + \int_{t_j}^{t} f(s, w_j(s)) \, ds \quad \forall \, t \in [t_0 - T, t_0 + T]$$

Einschränkung der Lösung auf $[t_j, t_j + T]$ für jedes $j \geq j_0$ liefert die Behauptung $\square$

Der Satz von Picard-Lindelöf liefert neben der Existenz die Eindeutigkeit der Lösung in M_T („bedingte" Eindeutigkeit). Die Lipschitz-Stetigkeit der rechten Seite allein liefert jedoch schon eine viel stärkere Eindeutigkeitsaussage, die wir im Folgenden zeigen. Grundlage dafür ist das folgende wichtige Lemma.

Lemma 2.12 (LEMMA VON GRONWALL)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$ und $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Sei weiters $\beta(t) \geq 0$ $\forall\, t \in [a,b]$. Angenommen $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig und erfüllt

$$(2.3) \qquad 0 \leq \varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\varphi(s)\,ds \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Dann gilt

$$(2.4) \qquad \varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \left(\alpha(s)\beta(s)\, e^{\int_s^t \beta(\tau)\,d\tau}\right) ds \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Gilt darüber hinaus $\alpha(s) \leq \alpha(t)$ für $s \leq t$, so folgt

$$(2.5) \qquad \varphi(t) \leq \alpha(t)\, e^{\int_a^t \beta(s)\,ds}$$

Beweis:

Wir setzen $\quad \psi(t) := \int_a^t \beta(s)\varphi(s)\,ds \quad$ für $t \in [a,b]$

Dann ist ψ stetig differenzierbar auf $[a,b]$ mit

$$\psi'(t) = \beta(t)\varphi(t)$$

Aus $\varphi(t) \le \alpha(t) + \Psi(t)$ erhalten wir wegen $\beta(t) \ge 0$ die Differential-ungleichung

$$\Psi'(t) \le \beta(t)\big(\alpha(t) + \Psi(t)\big) \qquad t \in [a,b].$$

Multiplikation mit $e^{-\int_a^t \beta(s)ds}$ liefert

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\int_a^t \beta(s)ds}\,\Psi(t)\right) = e^{-\int_a^t \beta(s)ds}\,\Psi'(t) - \beta(t)\,e^{-\int_a^t \beta(s)ds}\,\Psi(t)$$

$$= e^{-\int_a^t \beta(s)ds}\underbrace{\big(\Psi'(t) - \beta(t)\Psi(t)\big)}_{\le \beta(t)\alpha(t)} \le \alpha(t)\beta(t)\,e^{-\int_a^t \beta(s)ds}$$

Integration von a bis t ergibt (mit $\Psi(a) = 0$)

$$\Psi(t)\,e^{-\int_a^t \beta(s)ds} \le \int_a^t \alpha(s)\beta(s)\,e^{-\int_a^s \beta(\tau)d\tau}\,ds$$

$$\Rightarrow \quad \Psi(t) \le \int_a^t \alpha(s)\beta(s)\,e^{-\int_a^s \beta(\tau)d\tau + \int_a^t \beta(\tau)d\tau}\,ds$$

$$= \int_a^t \alpha(s)\beta(s)\,e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau}\,ds$$

und aus $\varphi(t) \le \alpha(t) + \Psi(t)$ folgt die Behauptung. Ist $\alpha(s) \le \alpha(t)$, dann ist

$$\int_a^t \alpha(s)\underbrace{\beta(s)\,e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau}}_{\ge 0} \le \alpha(t)\int_a^t \overbrace{\beta(s)\,e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau}}^{-\frac{d}{ds}\left(e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau}\right)}\,ds$$

$$= \alpha(t)\cdot\left(-1 + e^{\int_a^t \beta(\tau)d\tau}\right)$$

und es folgt aus (2.4)

$$\varphi(t) \le \alpha(t) - \alpha(t) + \alpha(t)\,e^{\int_a^t \beta(\tau)d\tau}$$ und somit (2.5)

$\square$