(1) (a) Sei X eine Menge und $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ die Menge der beschränkten Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum ist, wobei

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

(b) Sei K ein kompakter topologischer Raum. Folgern Sie aus (a) und Resultaten der Vorlesung, dass die Menge $C(K) = C(K,\mathbb{R}) := \{f : K \to \mathbb{R}, f \text{ stetig}\}$ mit $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(C([0,1]), \|\cdot\|_{L^2([0,1])})$ ein normierter Raum ist, aber nicht vollständig. Betrachten Sie dazu beispielsweise die Folge

$$f_n := \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1 - 2n(x - \frac{1}{2}) & \frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \le x \le 1. \end{cases}$$

(2) Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ ist ein Banachraum.

(b) Die Menge

$$c_0(\mathbb{N}) := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n \in \mathbb{C} : \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$$

ist ein abgeschlossener Unterraum von $\ell^\infty(\mathbb{N})$ und daher mit $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$ wieder ein Banachraum.

(c) $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ist nicht separabel. Betrachten Sie dazu die überabzählbare Menge $A \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$,

$$A = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \{1,0\}, \forall n \in \mathbb{N}\},$$

um eine überabzählbare Menge an disjunkten offenen Kugeln zu definieren. Beweisen Sie die gewünschte Ausage dann durch Widerspruch.

(3) Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist X ein normierter Raum, so gilt für jedes $a \in X$ und $r > 0$

$$\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r) := \{x \in X : \|a - x\| \le r\},$$

d.h. der Abschluss $\overline{B(a,r)}$ einer offenen Kugel ist gleich der abgeschlossenen Kugel $\overline{B}(a,r)$.

(b) Ist X ein endlich-dimensionaler normierter Raum und $K \subset X$ eine Teilmenge, so ist K kompakt genau dann, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.

(c) Sei Y ein endlich-dimensionaler Untervektorraum eines normierten Raumes X. Dann ist $Y \subset X$ abgeschlossen.

(4) Sei X ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ ist stetig (Hinweis: Cauchy-Schwarz).

(b) Für alle $x, y \in X$ gilt die Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \forall x, y \in X.$$

(c) Für $x, y \in X$, $x \perp y$ gilt der Satz von Pythagoras: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(5) Zeigen Sie, dass ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ genau dann vollständig ist, wenn jede absolut konvergente Reihe konvergiert, d.h., falls für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ existiert in } X. \tag{1}$$

Hinweis: Um aus (1) die Vollständigkeit zu zeigen, beweisen Sie zunächst, dass jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt mit $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k}$. Aus

$$x_{n_k} = \sum_{j=1}^{k-1} (x_{n_{j+1}} - x_{n_j}) + x_{n_1}$$

und (1) folgt dann die Konvergenz von $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.