(1) Basen von Topologien I:

(a) Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ eine Basis der Topologie. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ die folgenden Eigenschaften hat:

i. $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$

ii. Für alle Mengen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und alle $x \in B_1 \cap B_2$ existiert eine Menge $B_3 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

(b) Es sei X eine Menge und $\mathcal{B} \subset 2^X$ ein Mengensystem mit den Eigenschaften (i) und (ii) aus (a). Zeigen Sie, dass eine eindeutige Topologie $\mathcal{T}$ auf X existiert, für die $\mathcal{B}$ eine Basis ist.

(2) Basen von Topologien II:

(a) Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ genau dann eine Basis der Topologie ist wenn zu jedem $x \in X$ und jedem $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O$ ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset O$ existiert.

(b) Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ genau dann eine Basis der Topologie ist wenn zu jedem $x \in X$ das Mengensystem $\{U \in \mathcal{B} \colon x \in U\}$ eine Umgebungsbasis von x ist.

(3) Stetige Funktionen: Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Sind $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ und $(Z, \mathcal{T}_Z)$ topologische Räume, $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetige Funktionen, so ist die Hintereinanderausführung $g \circ f : X \to Z$ ebenfalls stetig.

(b) Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für jede Teilmenge $A \subset X$ gilt
$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

(4) Offene und abgeschlossene Mengen: Beweisen Sie die Aussagen in Bemerkung 2.23.

(5) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Seien $A, B \subset X$ Teilmengen. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) ∂A ist abgeschlossen.

(b) $(X \setminus A)^{\circ} = X \setminus \overline{A}$, $\overline{X \setminus A} = X \setminus \mathring{A}$ und $\partial(X \setminus A) = \partial A$.

(c) $(A \cap B)^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ und $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \cup B)^{\circ}$.

(d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ und $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

(e) Gilt $A \subset B$, so folgt $\overline{A} \subset \overline{B}$ und $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.