

Programmieraufgaben

- (1) (a) Stellen Sie die Vandermonde-Matrix V_n zu den Werten $c_i = i$ für $i = 1, \dots, n$ auf (evtl. `numpy.vander` verwenden). Berechnen Sie die Kondition $\kappa_1(V_n)$ der Vandermonde-Matrix (beispielsweise mithilfe `numpy.linalg.cond`) zur 1-Norm (vgl. Beispiel 4.14 Skript).
- (b) Berechnen Sie die Gewichte der Newton-Cotes-Quadraturformeln (vgl. Beispiel 4.15 Skript) für verschiedene Werte von n durch Lösen des linearen Gleichungssystems, welches die Vandermonde-Matrix beinhaltet (beispielsweise mit `numpy.linalg.solve`). Vergleichen Sie Ihr Resultat mit den tatsächlichen Werten der Gewichte (diese können Sie beispielsweise mithilfe `scipy` bestimmen lassen).
- (2) Programmieren Sie die Cholesky-Zerlegung. Testen Sie Ihr Programm an den Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie an der Matrix A aus Aufgabe (5) Blatt 13.

- (3) Sei $v = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^{60}$ und W die Wilkinson-Matrix der Dimension 60.
- (a) Berechnen Sie $b = Wv$.
- (b) Lösen Sie in python das Gleichungssystem $Wx = b$ und bestimmen Sie Fehler und Defekte der numerischen Lösung x .
- (c) Verbessern Sie die numerische Lösung aus (b) durch eine Nachiteration.

Theorieaufgaben

- (4) Berechnen Sie die Konditionen κ_1 , κ_2 und κ_∞ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (5) Gegeben sei das 2×2 -Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 10x_2 &= 11 \\ 10x_1 + 101x_2 &= 111 \end{aligned}$$

sowie das gestörte Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 10x_2 &= 11.1 \\ 10x_1 + 101x_2 &= 111. \end{aligned}$$

Berechnen Sie Lösungen x bzw. \hat{x} für beide Fälle. Berechnen Sie den relativen Fehler $\frac{\|\hat{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ sowie eine Abschätzung mit Hilfe der Konditionszahl $\kappa_\infty(A)$ sowie dem relativen Datenfehler $\frac{\|\hat{b} - b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$.