Proseminar Numerische Mathematik 2 am 25. März 2025

(1) Die Funktion $f \in C^1[a,b]$ sei streng monoton wachsend und konvex mit einer Nullstelle $x^\star \in [a,b]$. Zeige Sie, dass das Newton Verfahren für jeden Startwert $x_0 \in [x^\star, b]$ konvergiert und dass

$$x_{n+1} \leq x_n \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Hinweis:

- Zeigen Sie, dass $x_{n+1} \leq x_n$
- Für jede konvexe differenzierbare Funktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\varphi'(x)(z-x) \leq \varphi(z) - \varphi(x)$$

  für $x, z \in [a,b]$.
- Zeige Sie mit dem letzten Hinweis, dass $x_{n+1} \geq x^\star$ ist.

(2) Beweisen Sie folgende Aussage:
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und es gelte

$$|f'(x)| \geq m, \ |f''(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$$

mit $m, M > 0$. Dann gilt:

a) f hat in $[a,b]$ höchstens eine Nullstelle.
b) Ist $x^\star$ eine Nullstelle in (a,b), dann ist das Newtonverfahren für alle $x_0 \in \mathcal{U}_r(x^\star)$ wohldefiniert für $r := \min(2mM^{-1}, b - x^\star, x^\star - a)$
c) Ist zudem $q := M(2m)^{-1}|x_0 - x^\star| < 1$ so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$
   i. $|x^\star - x_n| \leq \dfrac{M}{2m}|x^\star - x_{n-1}|^2$
   ii. $|x^\star - x_n| \leq \dfrac{2m}{M} q^{2^n}$
   iii. $|x^\star - x_n| \leq \dfrac{1}{m}|f(x_n)| \leq \dfrac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2$

Hinweise:

a) Mittelwertsatz der Differentialrechnung
b) Subtraktion von Taylorentwicklung um Iteration und Verfahren
c) Folgt durch Induktion von b), Mittelwertsatz und Taylorentwicklung

(3) Es sei $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix. Weiters sei $\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ die durch das Gram-Schmidt Verfahren aus $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ konstruierte Orthonormalbasis und $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n]$ die entsprechende orthogonale Matrix.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{Q}^\top \mathbf{A}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. (Damit wird ebenso eine QR-Zerlegung definiert)
b) Zeigen Sie, dass diese QR-Zerlegung numerisch instabil, die Zerlegung mittels Householder Matrizen hingegen numerisch stabil ist. (**Hinweis:** Kondition Matrix-(Vektor)-Multiplikation)

(4) Wir betrachten im Folgenden das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} e^{x_1^2+x_2^2} - 1 = 0, \\ e^{x_1^2-x_2^2} - 1 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

das die eindeutige Lösung $x^\star = (0, 0)$ besitzt.

(a) **(Vereinfachtes Newton Verfahren)** Implementieren Sie das vereinfachte Verfahren von Newton zur Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen. Die Jacobimatrix des ersten Schrittes kann dabei analytisch oder mittels finite Differenzen bestimmt werden.

Bestimmen Sie damit die Nullstelle von (1) und vergleichen Sie die Konvergenz des vereinfachten Newtonverfahrens mit dem Newtonverfahren (Konvergenzplot).

(b) Beschleunigen Sie die Konvergenz indem Sie den ε-Algorithmus aus dem Wintersemester komponentenweise anwenden.

(c) **(Methode von Broyden.)** Verwenden Sie zur Approximation der Jacobimatrix die Methode von Broyden. Konvergiert die Approximation gegen die exakte Jakobimatrix in $(0, 0)$?

(5) Implementieren Sie das Gauß - Newton Verfahren. Importieren Sie die Datei `population.csv` und `temperature.csv` mit Hilfe der Funktion `numpy.genfromtxt`. Den Daten werden folgende Modelle zugrunde gelegt:

- Population: $\Phi(x; t) = x_1 e^{x_2 t}$
- Temperatur: $\Phi(x, t) = x_1 \sin(x_2 t + x_3) + x_4$

(a) Bestimme Sie die Parameter x für beide Modelle für verschiedene Startwerte. Wie sensibel reagiert das Verfahren auf verschiedene Startwerte?
Stellen Sie jeweils die Daten und das Modell graphisch dar.
Mögliche Startwerte Population: $x = (6, 0.3)$ Temperatur: $(17, 0.5, 10.5, 77)$.
Verwenden Sie anstatt der Jahre in `population.csv` die Werte 15, 20, …, 85, bzw. $1, 2, \ldots, 8$. Wie ändert sich das Verhalten des Gauß Newton Verfahrens?

(b) Linearisieren Sie das Modell für Population, indem Sie die Daten und das Modell logarithmieren. Bestimmen Sie mittels linearer Regression die Parameter x. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Ergebnis von Aufgabe (a).