Kapitel 1

Komplexe Zahlen und Funktionen

1.1 Die komplexen Zahlen als Körper

Wir wiederholen schnell, was wir in *Lineare Algebra 1* über die komplexen Zahlen gelernt haben und dort im Detail nachlesen können. Wir definieren auf $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ eine Addition und eine Multiplikation via

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{1.1}$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \tag{1.2}$$

und bekommen damit einen Körper, genannt die komplexen Zahlen, bezeichnet mit $\mathbb{C}$.
Um die Notation überschaubar zu halten, identifizieren wir $(x, 0)$ mit der reellen Zahl x und $(0, 1)$ mit dem Symbol i, und bekommen aus den Rechenregeln in (1.1) bzw. (1.2)

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) \mathrel{\widehat{=}} x + \mathrm{i} \cdot y := x + \mathrm{i}y$$

sowie $\mathrm{i}^2 := \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$. Im alltäglichen Sprachgebrauch deutet komplexe Zahlen auf die kompakte Schreibweise hin, während sich komplexe Ebene auf die Menge der Tupel in $\mathbb{R}^2$ (mit der dazugehörigen Addition und Multiplikation im Hintergrund) bezieht.
Für eine komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ definieren wir den Realteil $\mathrm{Re}(z)$, den Imaginärteil $\mathrm{Im}(z)$, den Betrag $|z| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$ als

$$\mathrm{Re}(z) := x, \qquad \mathrm{Im}(z) := y, \qquad |z| := \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \bar{z} := x - \mathrm{i}y. \tag{1.3}$$

Weiters definieren wir ganzzahlige Potenzen von komplexen Zahlen rekursiv, also $z^0 := 1$ und für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$z^n := z \cdot z^{n-1} \quad \text{bzw.} \quad z^{-n} := (z^n)^{-1} \quad \text{für } z \neq 0.$$

Lemma 1.1 (Rechnen in $\mathbb{C}$).
Es gelten die folgenden nützlichen Rechenregeln und Abschätzungen, für $z, a, b \in \mathbb{C}$:

(a) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ *und* $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

(b) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ *und* $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$

(c) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

(d) $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$ *und* $\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$.

(e) $|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0.$

(f) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(g) $|a + b| \leq |a| + |b|.$

Aufgabe: (Lisa) Zeige, die obigen Rechenregeln und Abschätzungen.
Aufgabe: (Philipp/David) Zeige, dass für $z \neq 0$ gilt

$$z^{-1} = \bar{z}/|z|^2, \quad |z^{-1}| = |z|^{-1} \quad \text{und} \quad \overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1},$$

bzw. dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n \quad \text{und} \quad |z^n| = |z|^n.$$

1.2 Topologie & Konvergenz in $\mathbb{C}$

Der Betrag $|\cdot|$ in $\mathbb{C}$ entspricht der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ in $\mathbb{R}^2$ und damit ist $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ eine Metrik. Alternativ sehen wir das direkt aus den Eigenschaften (d-f) von Lemma1.1. Um topologische Konzepte wie offen, abgeschlossen, kompakt, Konvergenz, Häufungspunkte, etc in $\mathbb{C}$ zu behandeln bietet es sich also an die komplexen Zahlen mit der reellen Ebene zu identifizieren und alle Konzepte von dort zu übernehmen.

Definition 1.2 (offene/abgeschlossene Mengen).
Eine Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann offen, wenn sie aufgefasst als Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen ist, also genau dann wenn

$$\forall z_0 \in U \, \exists \varepsilon > 0 \, : \, B_\varepsilon(z_0) := \{z : |z - z_0| < \varepsilon\} \subseteq U.$$

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt abgeschlossen, falls ihr Komplement offen ist.

Aufgabe: (Philipp/David) beliebige Vereinigungen und endliche Schnitte von offenen Mengen sind offen, beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen, $B_\varepsilon(z_0)$ ist offen, $\bar{B}_\varepsilon(z_0) := \{z : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen.

Definition 1.3 (Abschluss, Inneres, Rand).
Für eine beliebige Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ ist ihr Abschluss $\bar{M}$ die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält, ihr Inneres M° die grösste offene Menge, die in M enthalten ist, und ihr Rand ∂M ihr Abschluss ohne ihr Inneres $\partial M = \bar{M} \backslash M^\circ$,

$$\bar{M} := \bigcap_{\substack{A:A \text{ abg.} \\ M \subseteq A}} A, \qquad M^\circ := \bigcup_{\substack{U:U \text{ offen} \\ U \subseteq M}} U, \qquad \partial M := \bar{M} \backslash M^\circ. \tag{1.4}$$

Aufgabe: (Eleni) Zeige $(M^\circ)^c = \overline{(M^c)}$.

Definition 1.4 (Konvergenz, Cauchyfolgen).
Eine Folge von komplexen Zahlen $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, wenn $z \in \mathbb{C}$ mit $\lim_{n \to \infty} |z_n - z| = 0$ existiert, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, : \, |z_n - z| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N, \tag{1.5}$$

oder anders formuliert

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, : \, z_n \in B_\varepsilon(z) \quad \forall n \geq N. \tag{1.6}$$

Wir sagen in dem Fall das z_n gegen (den Grenzwert) z konvergiert, symbolisch $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, $\lim z_n = z$ bzw. $z_n \to z$.
Eine Folge von komplexen Zahlen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge falls

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} \,:\, |z_n - z_m| \leq \varepsilon \quad \forall n, m > N.$$

Aufgabe: (Valentin) Zeige dass $z_n \to z$ genau dann wenn $\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z)$ in $\mathbb{R}$.

Aufgabe: (Valentin) Zeige, dass der Grenzwert eindeutig ist, d.h. falls $z_n \to z$ und $z_n \to z_0$, dann gilt $z = z_0$.

Aufgabe: (Charlotte) Zeige, dass $\mathbb{C}$ vollständig ist, d.h. jede Cauchyfolge konvergiert.

Aufgabe: (Charlotte) Zeige, dass wir in der Definition oben $B_\varepsilon(z)$ durch beliebige offene Mengen U mit $z \in U$ ersetzen könnten, ohne etwas zu ändern, also $z_n \to z$ genau dann wenn

$$\forall U \text{ offen mit } z \in U\, \exists N \in \mathbb{N} \,:\, z_n \in U, \quad \forall n \geq N. \tag{1.7}$$

Definition 1.5 (Häufungspunkt).
Ein Punkt z heißt Häufungspunkt der Menge $M \subseteq \mathbb{C}$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$M \cap B_\varepsilon(z) \neq \emptyset.$$

Aufgabe: (Lukas) Zeige, dass z genau dann Häufungspunkt der Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ ist, wenn eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \in M$ existiert, sodass $z_n \to z$.

Aufgabe: (Richard) Der Abschluss einer komplexen Menge, ist die Menge ihrer Häufungspunkte, d.h. $A \subseteq C$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für alle Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \in A$ und $z_n \to z$ gilt $z \in A$.

Definition 1.6 (kompakte Mengen).
Eine Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ heißt kompakt, genau dann wenn sie eine der folgenden drei äquivalenten Eigenschaften besitzt.

(a) Jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \in K$ besitzt eine in K konvergente Teilfolge, d.h. $z_{n_k} \to z \in K$.

(b) K ist abgeschlossen und beschränkt, d.h. $\bar{K} = K$ und $\sup_{z\in K} |z| < \infty$.

(c) Jede offene Überdeckung von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

Aufgabe: (Tilman) Zeige die Äquivalenz von (a) und (b).

Aufgabe*: Zeige die Äquivalenz von (c) zu (a) oder (b), also den Satz von Heine-Borel.

Satz 1.7 (Rechenregeln für $\lim$ in $\mathbb{C}$).
Für zwei komplexe Folgen $(a_n)_{n\in N}, (b_n)_{n\in N}$ mit $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ und $c, d \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n + d \cdot b_n) = c \cdot a + d \cdot b$,

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

(c) $\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n) = a/b$, *falls* $b, b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$,

(d) $\lim |a_n| = |a|$,

(e) $\lim \bar{a}_n = \bar{a}$.

Aufgabe: (Mia/Eugenie) Beweise Satz 1.7

Definition 1.8 (Reihen).
Für eine komplexe Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt die assoziierte Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergent, falls die Folge der Partialsummen $s_k := \sum_{n=1}^{k} z_n$ gegen ein $c \in \mathbb{C}$ konvergiert, in dem Fall setzen wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} z_n = \lim_{k\to\infty} s_k = c.$$

Die Reihe heißt absolut konvergent, falls die (reelle) Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergiert.
(Analog für $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, etc.)

Lemma 1.9 (Eigenschaften von Reihen). *(a) Sind $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ zwei konvergente komplexe Reihen und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha z_n + \beta c_n)$ konvergent und es gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha z_n + \beta c_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

(b) Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Aufgabe: (Hannes) Zeige Lemma 1.9.

1.3 Komplexe Funktionen

Wir beginnen mit der Definition von Stetigkeit von Funktionen mit Definitions- oder Wertebereich in $\mathbb{C}$ einfach indem wir wieder $\mathbb{C}$ mit $|\cdot|$ als $\mathbb{R}^2$ mit $\|\cdot\|_2$ auffassen.

Definition 1.10 (stetige komplexe Funktionen).
Sei $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt stetig in $z_0 \in U$, symb. $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, falls sie aufgefasst als Funktion von $U \subseteq \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ in $z_0 = (x_0, y_0)$ stetig ist, d.h. falls

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \,:\, |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \forall z \in U \text{ mit } |z - z_0| \leq \delta,$$

oder umformuliert

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \,:\, f(z) \in B_\varepsilon(f(z_0)) \quad \forall z \in B_\delta(z_0) \cap U.$$

Die Funktion heißt stetig (in U), falls sie stetig für alle $z_0 \in U$ ist.
Falls $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist oder umgekehrt die Funktion nach $\mathbb{R}^n$ statt nach $\mathbb{C}$ geht, definieren wir Stetigkeit analog, indem wir geeignet $|\cdot|$ durch $\|\cdot\|_2$ ersetzen bzw. die Definition von $B_\varepsilon(f(z_0))$ oder $B_\delta(z_0)$ anpassen. Im Folgenden wird meistens entweder $U \subseteq \mathbb{C}$ offen sein oder $U = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Aufgabe: (Raphael) Zeige, dass $f : U \to \mathbb{C}$ genau dann in $z_0 \in U$ stetig ist, falls für alle Folgen $(z_n)_{n\in N}$ aus U mit $\lim_n z_n = z_0$ gilt $\lim_n f(z_n) = f(z_0)$.

Aufgabe: (Raphael) Zeige, dass für U offen die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ genau dann stetig ist, wenn Urbilder offener Mengen offen sind, also $f^{-1}(O)$ ist offen für alle $O \subseteq \mathbb{C}$ offen.

Satz 1.11 (Eigenschaften stetiger Funktionen).
Für $U \subseteq \mathbb{C}$ seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ zwei stetige Funktionen und $c, d \in \mathbb{C}$

(a) Die Funktionen $c \cdot f + d \cdot g$ und $f \cdot g$ sind stetig.

(b) *Die Funktion* $1/f$ *ist stetig, wo definiert, d.h auf* $U \setminus f^{-1}(\{0\})$.

(c) *Verknüpfungen stetiger Funktionen sind stetig, d.h. für* $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *bzw.* $V \subseteq \mathbb{C}$ *und* $h_1 : V \to U$ *bzw.* $h_2 : f(U) \to \mathbb{R}^n$ *stetig gilt,* $f \circ h_1$ *und* $h_2 \circ f$ *sind stetig.*

(d) *Betrag* $|\cdot|$ *und komplexe Konjugation* $z :\mapsto \bar{z}$ *sind stetig auf ganz* $\mathbb{C}$.

Aufgabe: (Remo/Luis) Beweise Satz 1.11.

Aufgabe: (Marco) Zeige, dass komplexe Polynomfunktionen auf ganz $\mathbb{C}$ und rationale Funktionen dort wo definiert stetig sind.

Definition 1.12 (Potenzreihe).
Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *mit* $a_n \in \mathbb{C}$ *und* $z_0 \in \mathbb{C}$ *ist eine Potenzreihe ein Ausdruck der Form*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Die Potenzreihe heißt konvergent in z *(in* $U \subseteq \mathbb{C}$*), wenn die Folge der Partialsummen* $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n(z - z_0)^n$ *konvergiert (für alle* $z \in U$*).*

Lemma 1.13 (Konvergenzradius von Potenzreihen, Stetigkeit).
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *mit* $a_n \in \mathbb{C}$ *und* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *konvergiert (absolut) für alle* $z \in B_R(z_0)$, *also* $|z - z_0| < R$ *wobei*

$$R := \frac{1}{\limsup_n |a_n|^{1/n}} \in [0, \infty].$$

R *heißt Konvergenzradius. Die Konvergenz ist gleichmäßig in* $\bar{B}_r(z_0)$ *für alle* $0 \le r < R$.
Desweiteren ist die durch die Potenzreihe definierte Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *stetig auf* $B_R(z_0)$.

Aufgabe: (Stefan) Beweise Lemma 1.13.
Aufgabe: (Clemens) Berechne den Konvergenzradius, für die folgenden Potenzreihen:

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (c) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad (d) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Für (a) berechne den Grenzwert für alle z innerhalb des Konvergenzradius.

Definition 1.14 (analytisch).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$. *Eine Funktion* $f : U \to \mathbb{C}$ *heißt analytisch in* $z_0 \in U$, *falls* $\rho > 0$ *und* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *mit* $a_n \in \mathbb{C}$ *existieren, sodass*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \forall z \in B_\rho(z_0) \cap U,$$

d.h. f *kann lokal um* z_0 *als Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R \ge \rho$ *geschrieben werden. Die Funktion* f *heißt analytisch in* U, *falls sie analytisch für alle* $z_0 \in U$ *ist.*

Aufgabe: (Hannes) Seien $g, f : U \to \mathbb{C}$ zwei Funktionen, die analytisch in $z_0 \in U$ sind. Zeige, dass für $\alpha, \beta in \mathbb{C}$ auch $\alpha g + \beta f$ analytisch in z_0 ist.

Definition 1.15 (Integrale komplexwerter Funktionen).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *eine Borel-messbare Funktion. Wir sagen, dass* f *integrierbar ist falls* $|f| : \Omega \to \mathbb{R}$ *integrierbar ist, also* $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$ *und setzen in diesem Fall*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \int \mathrm{Re} f \,\mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int \mathrm{Im} f \,\mathrm{d}\mu,$$

wobei $\mathrm{Re} f : \Omega \to \mathbb{R}$ *mit* $z \mapsto \mathrm{Re}(f(z))$ *und analog für* $\mathrm{Im} f$.

Aufgabe: (Theresa/Aylin) Zeige, dass $f : \Omega \to \mathbb{C}$ genau dann messbar ist, wenn $\mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar sind und dass f genau dann integrierbar ist, wenn $\mathrm{Re} f$ und $\mathrm{Im} f$ integrierbar sind.

Aufgabe: (Moritz/Noah) Zeige den Satz von der dominierten Konvergenz für komplexwertige Funktionen.

Aufgabe: (Felix) Zeige, dass für eine stückweise stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ gilt, dass

$$\int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b \mathrm{Re} f \,\mathrm{d}x + \mathrm{i} \int_a^b \mathrm{Im} f \,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe: (Moritz/Noah) Zeige, dass für zwei integrierbare (stückweise stetige) Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt,

$$\int_{[a,b]} \alpha f + \beta g \,\mathrm{d}\lambda = \alpha \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda + \beta \int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\lambda.$$

Aufgabe: (Theresa/Aylin) Zeige, dass für $f : \Omega \to \mathbb{C}$, integrierbar, und $\bar{f} : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto \overline{f(z)}$ gilt

$$\int \bar{f} \,\mathrm{d}\mu = \overline{\int f \,\mathrm{d}\mu}.$$

Aufgabe: (Moritz/Noah) Zeige, dass für $f : \Omega \to \mathbb{C}$ integrierbar gilt

$$\left| \int f \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

1.4 $\exp, \cos, \sin, \log$ auf $\mathbb{C}$

Wir erweitern nun einige Funktion, die wir bereits auf $\mathbb{R}$ kennen, auf $\mathbb{C}$.

Definition 1.16 (komplexe Exponentialfunktion).
Wir definieren die Exponentialfunktion $\exp$ *auf ganz* $\mathbb{C}$ *durch*

$$\exp(z) := e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{1.8}$$

Lemma 1.17 (Eigenschaften von $\exp$**).**
Die Exponentialfunktion ist stetig auf ganz $\mathbb{C}$ *und es gilt für* $z, w \in \mathbb{C}$

(a) $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$.

(b) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$.

(c) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$*, also insbesondere* $|e^z| = 1 \Leftrightarrow z = \mathrm{i}y$ *für* $y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe: (Alexander/Mathias: a, Karin: b,c) Beweise Lemma 1.17.

Definition 1.18 (komplexer Cosinus und Sinus).
Wir definieren die Funktionen $\cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *via*

$$\cos(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} \quad \textit{bzw.} \quad \sin(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}.$$

Aufgabe: Zeige, dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix}) \in [-1, 1]$ bzw. $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix}) \in [-1, 1]$.

Lemma 1.19 (Eigenschaften von $\cos, \sin$**).**
Die Funktionen $\cos, \sin$ *sind stetig auf ganz* $\mathbb{C}$*, und es gilt für all* $z, w \in \mathbb{C}$

(a) $e^{\mathrm{i}z} = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)$,

(b) $\cos(-z) = \cos(z)$ *und* $\sin(z) = -\sin(-z)$,

(c) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$,

(d) $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

(e) $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$

(f) $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ *und* $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Aufgabe: (Simon/Franz) Beweise Lemma 1.19.

Lemma 1.20 (Abschätzungen für $\cos, \sin$ **im Reellen).**
Für $x \in (0, 2]$ *gilt*

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \qquad \textit{und} \qquad x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x. \tag{1.9}$$

Aufgabe: (Jeremias) Beweise Lemma 1.20.

Satz 1.21 (Eindeutigkeit/Definition von π**).**
Es gibt genau eine reelle Zahl $r \in [0, 2]$ *mit* $\cos(r) = 0$*. Wir definieren also* π *als die einzige Zahl in* $[0, 4]$ *mit* $\cos(\pi/2) = 0$.

Beweis:

Satz 1.22 (Eindeutigkeit von Polarkoordinaten).
Wir bezeichnen den Einheitskreis mit $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

(a) Die stetige Abbildung $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{T}$ *mit* $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ *ist bijektiv und durchläuft* $\mathbb{T}$ *im mathematisch positiven Sinn.*

(b) Es gilt $\mathrm{e}^z = 1$ *genau dann wenn* $z = 2k\pi\mathrm{i}$ *für* $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ *kann eindeutig in der Form*

$$z = re^{i\varphi} \quad \textit{mit} \quad r = |z| > 0 \quad \textit{und} \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

geschrieben werden. Dabei wird φ *wird auch als Argument und* $\mathrm{e}^{i\varphi}$ *als Phase oder komplexes Vorzeichen bezeichnet, und das Tupel* (r, φ) *als Polarkoordinaten.*

Beweis:

Aufgabe: Sei $I = [a, a+2\pi)$ bzw. $I = (a, a+2\pi]$, $a \in \mathbb{R}$, ein Intervall der Länge 2π. Zeige, dass $z \neq 0$ eindeutig in der Form

$$z = re^{\mathrm{i}\varphi} \quad \text{mit} \quad r = |z| > 0 \quad \text{und} \quad \varphi \in I$$

geschrieben werden kann.
Aufgabe: Zeige, dass für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cos(z) = 0 \iff z = \tfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \sin(z) = 0 \iff z = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe: Zeige, dass für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z + 2\pi\mathrm{i}) = \exp(z), \qquad \cos(z + 2\pi) = \cos(z) \qquad \sin(z + 2\pi) = \sin(z). \tag{1.10}$$

Aufgabe: Zeige, dass für $c \in \mathbb{C}, c \neq 0$ die Gleichung $z^n = c$ genau n verschiedene Lösungen besitzt und dass im Fall $n = 2$ für die Lösungen z_1, z_2 gilt $z_1 = -z_2$.

Satz 1.23 (Surjektivität von $\exp, \cos, \sin$).
Wir bezeichnen mit $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Menge der komplexen Einheiten. Es gilt:

(a) Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ist surjektiv.

(b) Die Funktionen $\cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind surjektiv.

Beweis:

Definition 1.24 (geschlitzte Ebene $\mathbb{C}^-$, Hauptzweig des Logarithmus).
Wir bezeichnen die Menge der komplexen Zahlen mit positivem Realteil als die geschlitzte Ebene,

$$\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\} = \{re^{\mathrm{i}\varphi}, r > 0, \varphi \in (-\pi, \pi)\}.$$

Die Abbildung $\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ *mit*

$$z = re^{\mathrm{i}\varphi} \mapsto \log(r) + \mathrm{i}\varphi, \quad \textit{wobei} \quad \varphi \in (-\pi, \pi)$$

heißt Hauptzweig des Logarithmus.

Aufgabe: Zeige, dass das Hauptargument $\arg : C^- \to (-\pi, \pi)$ mit $z = re^{\mathrm{i}\varphi} \mapsto \varphi$ stetig ist und folgere daraus die Stetigkeit des Hauptzweigs des Logarithmus. Hinweis: Verwende, dass $\arg(z) = \arg(z/|z|)$ und dass der Cosinus auf $(-\pi, 0)$ bzw. $(0, \pi)$ stetig und monoton ist, also auch seine Umkehrfunktion stetig und monoton ist.
Aufgabe: Zeige, dass für $z, w \in \mathbb{C}^-$ mit $z \cdot w \in C^-$ gilt

$$\log(zw) = \log(z) + \log(w) + 2\pi\mathrm{i}\eta \quad \text{für} \quad \eta \in \{-1, 0, 1\}.$$

Andere Zweige des Logarithmus und einen Beweis, dass $\mathbb{C}^-$ in gewisser Weise schon der größte Bereich ist, auf dem wir den Logarithmus sinnvoll (stetig) definieren können, werden wir später kennenlernen.

Mit Hilfe des Hauptzweigs können wir nun auch allgemeine Potenzen definieren. Allerdings gehen dabei uns dabei Potenzen von negativen Zahlen verloren.

Definition 1.25 (allgemeine Potenzen auf $\mathbb{C}^-$).
Für $\alpha \in \mathbb{C}$ and $z \in \mathbb{C}^-$ definieren wir

$$z^\alpha := e^{\alpha \log(z)}.$$

Aufgabe: Zeige, dass für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $z, w \in \mathbb{C}^-$ mit $zw \in \mathbb{C}^-$ gilt:

$$(a) \quad z^{\alpha+\beta} = z^\alpha \cdot z^\beta \qquad (b) \quad z^n = e^{n \log(z)} = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{\text{n-mal}} \qquad (c) \quad (zw)^\alpha = z^\alpha \cdot w^\alpha. \tag{1.11}$$

Aufgabe: Berechne

$$(a) \quad (1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}} \qquad (b) \quad 2^{\mathrm{i}} \qquad (c) \quad \mathrm{i}^{\sqrt{2}}.$$

Aufgabe: Berechne

$$(\mathrm{i}^{\mathrm{i}})^5 \quad \text{und} \quad (\mathrm{i}^5)^{\mathrm{i}}.$$