(1) Nichtmetrisierbare Hausdorff-Räume: Wir wollen Beispiele für Hausdorff-Räume finden, deren Topologie nicht von einer Metrik erzeugt wird.

(a) Es sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ eine Familie von Hausdorff-Räumen mit jeweils mindestens zwei Elementen. Zeigen Sie, dass auch das Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ versehen mit der Produkttopologie hausdorffsch ist.

(b) Zeigen Sie, dass wenn I überabzählbar ist kein Punkt in $\prod_{i \in I} X_i$ eine abzählbare Umgebungsbasis hat.

(c) Schließen Sie aus (a)-(b), dass überabzählbare Produkte von Hausdorff-Räumen hausdorffsch sind aber ihre Topologie nicht von einer Metrik erzeugt wird.

(2) Vergleich der Trennungsaxiome: Wir untersuchen die Beziehung zwischen den Trennungsaxiomen.

(a) Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum ein T_3-Raum ist, genau dann wenn jede offene Umgebung eine Punktes $x \in X$ eine abgeschlossene Umgebung enthält.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{cco}})$ ein T_1-Raum ist.

(c) Geben Sie ein Beispiel eines T_3-Raums an, der kein T_2-Raum ist.

(d) Geben Sie ein Beispiel eines T_4-Raums an, der kein T_2-Raum ist.

(3) Urysohn in metrischen Räumen: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $x \in X$, $A \subset X$ und gilt $d(x, A) = 0$, so folgt $x \in \overline{A}$.

(b) Jeder metrische Raum ist normal.

(c) Für disjunkte, nichtleere, abgeschlossene Mengen $A, B \subset X$ ist die Funktion

$$f\colon X \to [0,1], \qquad x \mapsto \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

wohldefiniert und stetig. Es gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in A$ und $f(x) = 1$ für alle $x \in B$.

(4) Separabilität und zweites Abzählbarkeitsaxiom: Ein topologischer Raum X heißt *separabel*, falls es eine abzählbare Teilmenge $A \subset X$ gibt, die dicht in X ist, also falls $\overline{A} = X$ gilt. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Erfüllt X das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so ist X separabel.

(b) Ist X ein separabler metrischer Raum, so erfüllt X das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

(5) Zusammenhängende topologische Räume: Ein topologischer Raum X ist *zusammenhängend*, wenn er sich nicht in zwei disjunkte offene Teilmengen zerlegen lässt. X ist *wegzusammenhängend*, falls zu allen Punkten $x, y \in X$ ein Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ existiert.

(a) Zeigen Sie, dass $[0,1]$ zusammenhängend und die Cantor-Menge nicht zusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, dass wegzusammenhängende Räume zusammenhängend sind.

(c) Es seien X, Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ ein Homöomorphismus. Zeigen Sie, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn Y zusammenhängend ist.

(d) Verwenden Sie (b) und (c), um zu zeigen, dass $[0,1]$ und $[0,1]^2$ nicht homöomorph sind, indem Sie zeigen, dass $[0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ nicht zusammenhängend, $[0,1]^2 \setminus \{z\}$ für jedes $z \in [0,1]^2$ jedoch wegzusammenhängend ist.