Vorbereitung Übungsklausur Mathe II für Chemiker

Lukas Meinschad

0.1 Reihen und Konvergenz

Nun nochmal einige Aufgaben zur Konvergenz und Divergenz von Reihen. Vorher die wichtigsten Kriterien nochmal zusammengefasst.

Note:-

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert
Es gilt **Absolut Konvergent $\Longrightarrow$ normale Konvergenz**

Note:-

Leibniz-Kriterium Wenn eine Reihe die Form $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ hat und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine nichtnegative monoton fallende Nullfolge ist dann konvergiert die Reihe

Note:-

Majorantenkriterium Sei $|a_k| \leqslant b_k, \forall k \in \mathbb{N}$. Wann $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut

Note:-

Quotientenkriterium Ist $\sum_{k=1}^{\infty}$ eine Reihe mit $a_k \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Gibt es ein $\theta > 1$ und ein $N \in \mathbb{N}$ sodass $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leqslant \theta$ für alle $k \geqslant N$ gilt dann ist die Reihe absolut konvergent. *Bestimmt wird dies durch bilden des entsprechenden Grenzwertes*

Note:-

Wurzelkriterium Wenn $limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} < 1$ dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent

Note:-

Klassiker für Divergenz Wenn $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ divergiert oder $lim_{k\to\infty}a_k \neq 0$ gilt dann ist die Reihe divergent

Note:-

Minorantenkriterium Sei $a_k \geqslant c_k \geqslant 0$. Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ divergiert, dann divergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Hier nochmals einige Übungsaufgaben zu den Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^k)^2}{k^{k^2}} \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+k^2} \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{k}{k+1})^k \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{k}{k+1})^{k^2} \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \tag{6}$$

0.2 Potenzreihen und Konvergenzradius

Definition 0.2.1: Potenzreihe

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle oder komplexe Folge und $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Abbildung der Form

$$x \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \tag{7}$$

heißt Potenzreihe

Definition 0.2.2: Konvergenzradius

Die Zahl $r := lim_{k\rightarrow\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$ bzw $r := lim_{k\rightarrow\infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}$ heißt Konvergenzradius der Potenzreihe

Bestimme den Konvergenzradius der Folgenden Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k} x^k \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+x)^{2k}}{(2+\frac{1}{k})^k} \tag{9}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+2}}{2^k} x^k \tag{10}$$

0.3 Taylorreihe

Definition 0.3.1: Taylorreihe

Eine Taylorreihe einer reellen oder komplexwertigen Funktion $f(x)$ welche ist die Potenzreihe

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{11}$$

Bestimme jeweils das Taylor Polynom vom Grad 2 für die folgenden Funktionen

$$f(x) = cos(2x) \text{ mit } a = \pi \tag{12}$$

$$f(x) = sin(2x) \text{ mit } a = \frac{\pi}{2} \tag{13}$$

$$f(x) = ln(x) \text{ mit } a = 1 \tag{14}$$

$$f(x) = e^x \text{ mit } a = 1 \tag{15}$$

0.4 Diverse Aufgaben zum Integrieren

Hierzu findet ihr im **Olat** bereits einen eigenen Übungszettel. Wir besprechen jetzt noch die *DI-Methode* welche recht praktisch ist wenn es um das bestimmen der Partiellen Ableitung geht.

Am besten könnt ihr euch dazu dieses Video anschauen blackpenredpen-integration-by-parts.

Wir lösen damit diese Aufgaben:

$$\int x^2 \sin(3x)dx \tag{16}$$

$$\int x^4 \ln(x)dx \tag{17}$$

$$\int e^x sin(x)dx \tag{18}$$

Weiteres hier noch eine Auswahl an klassischen Integralen

$$\int 3x^2 - \frac{1}{2}x + 1dx \tag{19}$$

$$\int e^{(4x)}dx \tag{20}$$

$$\int 3x\cos(x^2)dx \tag{21}$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx \tag{22}$$

$$\int xln(x)dx \tag{23}$$

$$\int x^2e^xdx \tag{24}$$

$$\int sin^2(x)dx \tag{25}$$

$$\int x^2ln(x)dx \tag{26}$$

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dxdx \tag{27}$$