Kapitel 2

Komplexe Differenzierbarkeit & der Cauchy'sche Integralsatz

In diesem und den folgenden Kapiteln bezeichnet U immer eine nichtleere, offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.

2.1 Komplex Differenzieren

Definition 2.1 (komplex differenzierbar, holomorph, ganz).
Sei $U \neq \emptyset$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in U$ (komplex) differenzierbar, falls ein $f'(z_0) := c \in \mathbb{C}$ existiert,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ :\ \left| \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z} - c \right| \leq \varepsilon \quad \forall z \in B_\delta(z_0),\ z \neq z_0 \tag{2.1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z} = c. \tag{2.2}$$

die Funktion f heißt (komplex) differenzierbar, falls f in jedem Punkt $z \in U$ differenzierbar ist, d.h. $f'(z)$ existiert für alle $z \in U$. Falls die dadurch auf U definierte Ableitungsfunktion f' stetig ist, heißt f holomorph (auf U). Eine auf ganz $\mathbb{C}$ (definierte und dort) holomorphe Funktion heißt ganz.

Definition 2.2 (Stammfunktion).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$. Eine differenzierbare Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$ heißt Stammfunktion von f.

Lemma 2.3 (differenzierbar $\Rightarrow$ stetig).
Sei $U \neq \emptyset$ offen. Falls die Funktion $f : U \to C$ in z_0 differenzierbar ist, ist sie in z_0 stetig.

Beweis:

Beispiel 2.4. Konstante Funktionen und die Identität sind auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar.

Beispiel 2.5. Die Funktion $k(z) = \bar{z}$ ist nirgends differenzierbar.

Satz 2.6 (Ableitungsregeln).
Seien $U, V \neq 0$ offen. Falls $f, g : U \to \mathbb{C}$ und $h : V \to \mathbb{C}$ mit $f(U) \subseteq V$ komplex differenzierbar sind, so sind für $c, d \in \mathbb{C}$ auch $cf + dg$, $f \cdot g$, f/g (wo definiert) und $h \circ g$ differenzierbar. Es gilt

(a) $(cf + dg)' = cf' + dg'$,

(b) $(fg)' = f'g + fg'$,

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$,

(d) $(h \circ g)' = (g' \circ f) \cdot f'$, *also* $(h \circ g)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$ *für* $z \in U$.

Aufgabe: Zeige, dass Polynomfunktionen auf ganz $\mathbb{C}$ und rationale Funktionen, wo definiert, differenzierbar sind. Zeige dass für Polynome $p(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n (z - z_0)^n$ gilt

$$p'(z) = \sum_{n=1}^{N} n\, a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Aufgabe: Zeige, dass die Betragsfunktion $z \mapsto |z|$ nirgends differenzierbar ist.

Satz 2.7 (analytisch $\Rightarrow$ differenzierbar (unendlich oft)).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und die Funktion $f : U \to C$ in z_0 analytisch mit Konvergenzradius R, also

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \textit{für} \quad z \in B_R(z_0), \tag{2.3}$$

dann gilt:

(a) f ist auf $B_R(z_0)$ differenzierbar mit Ableitungsfunktion

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z - z_0)^{n-1} \quad \textit{für} \quad z \in B_R(z_0). \tag{2.4}$$

(b) Die k-te Ableitung f^k auf $B_R(z_0)$ existiert und

$$a_k = \frac{f^k(z_0)}{k!}.$$

(c) Die Koeffizienten a_n in 2.3 sind eindeutig bestimmt.

Beweis:

Lemma 2.8 (Ableitung der Umkehrfunktion).
Seien U, V offen und $f : U \to V$ stetig und $g : V \to U$ differenzierbar, sowie $g \circ f = \mathrm{id}$. Falls für $w \in U$ gilt $g'(f(w)) \neq 0$, dann ist f in w differenzierbar und es gilt

$$f'(w) = \frac{1}{g'(f(w))}.$$

Aufgabe: Berechne die Ableitung von $\exp, \cos, \sin, \log$.

Aufgabe: Zeige, dass eine Funktion, die in z_0 analytisch mit Konvergenzradius R ist, eine Stammfunktion auf $B_R(z_0)$ besitzt.

Definition 2.9 (Cauchy-Riemann'sche DGL).
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ erfüllt die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, falls für

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \qquad \textit{gilt} \qquad \begin{aligned} \partial_x u &= \partial_y v \\ \partial_y u &= -\partial_x v \end{aligned} \qquad \textit{also} \qquad Df(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Satz 2.10 (komplex differenzierbar $\widehat{=}$ reell differenzierbar & Cauchy-Riemann).
Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist genau dann komplex differenzierbar in $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ falls die Funktion f_r mit

$$f_r(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re} f(x+iy) \\ \mathrm{Im} f(x+iy) \end{pmatrix}$$

in (x_0, y_0) reell differenzierbar ist und die Cauchy-Riemann'schen DGL erfüllt.

Beweis: