Blatt 4

Samstag, 26. Oktober 2024 16:13

Aufgabe 1

Sei G eine Gruppe. Ein Automorphismus $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ heißt innerer Automorphismus falls ein $h \in G$ existiert mit $\varphi(g) = h^{-1} g h$ für alle $g \in G$.

i) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Inn}(G)$ aller inneren Automorphismen ein normale Untergruppe von $\mathrm{Aut}(G)$ ist

$\mathrm{Aut}(G) = \{f \mid f$ bijektiver Gruppen Homomorphismus $G \to G\}$

Untergruppe: Teilmenge $H \subseteq G$ mit

(Abgeschlossenheit unter $*$) $g, h \in H \Rightarrow g * h \in H$

(Abgeschlossen unter Inverse) $h \in H$, $g \in G$ invers zu $h \Rightarrow g \in H$

normale Untergruppe falls $gH = Hg$ $\forall g \in G$ gilt

Zeigen wir zuerst $\mathrm{Inn}(G)$ ist Untergruppe

- **Identität $\in \mathrm{Inn}(G)$**

Es gilt Identität von $\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Id}_G$ $\quad g \mapsto g$

nehme als $h = e$ $= \varphi(g) = e^{-1} g e = g$

- **Abgeschlossenheit**

Betrachte $\varphi_{h_1} \circ \varphi_{h_2}(g) = \varphi(\varphi(g)) = \varphi(h_2^{-1} g h_2) = h_1^{-1} h_2^{-1} g h_2 h_1 = (h_2 h_1)^{-1} g (h_2 h_1) \in \mathrm{Inn}(G)$

- **Inverse Elemente**

Sei $\varphi \in \mathrm{Inn}(G)$ und $\varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}$ invers zu φ

$g = \mathrm{id}_G(g) = (\varphi^{-1} \circ \varphi) g = \varphi^{-1}(\varphi(g)) = \varphi^{-1}(h^{-1} g h)$

damit ist $\varphi^{-1}(g) = h g h^{-1} \Rightarrow h h^{-1} g h h^{-1} = g \Rightarrow \varphi^{-1} \in \mathrm{Inn}(G)$

Insgesamt also $\mathrm{Inn}(G) < \mathrm{Aut}(G)$

Zeigen wir nun $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$

2.2 $\forall \varphi \in \mathrm{Inn}(G), \forall \psi \in \mathrm{Aut}(G) \Rightarrow \psi^{-1} \varphi \psi^{-1} \in \mathrm{Inn}(G)$

$\Leftrightarrow$ für beliebige $\varphi \in \mathrm{Inn}(G)$, $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$: $\psi \varphi_h \psi^{-1}(g) = (h')^{-1} g (h')$ für $h' \in G$

Betrachte $(\psi \varphi_h \psi^{-1})(g) = \psi(\varphi_h(\psi^{-1}(g))) \overset{\varphi_H \text{ ausführen}}{=} \psi(h^{-1} \psi^{-1}(g) h)$

Nun per Definition $\psi(x) \to x \in G$ bijektive Abbildung $G \to G$

Setze $h' = \psi(h) \in G \Rightarrow \psi(h^{-1}) \psi(\psi^{-1}(g)) \psi(h) \overset{\psi \text{ Gruppenhom}}{=} \psi(h)^{-1} g \psi(h) = (h')^{-1} g h' \in \mathrm{Inn}(G)$

damit $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$

ii) Finde einen Automorphismus der kein innerer Automorphismus ist

Aufgabe 3

(i) Eine Gruppe mit 35 Elementen operiert auf einer Menge X mit 18 Elemente

Zeigen Sie, dass es mindestens ein Element $x \in X$ gibt mit $g \cdot x = x$ $\forall g \in G$

Es ist $|G| = 35$ und Operiert auf $|X| = 18$

Gruppenoperation: $G \times X \to X$

$(g, x) \to g \cdot x$

mit Axiome: $\forall x \in X \quad e \cdot x = x$

$\forall g, h \in G \quad x \in X \quad g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$

Man braucht $\exists!\, x \in X$ mit $g \cdot x = x$

Betrachte Bahn und Stabilisator:

- Bahn für $G \times X \to X$ ist $Gx : \{gx \mid g \in G\}$
- Stabilisator $\mathrm{Stab}(x) := G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$

Satz 2.3.5 (Bahnengleichung): Sei X eine endliche Menge, $G \times X \to X$ eine Gruppenoperation und $V \subseteq X$ Vertretersystem von Bahnen.

$$\# X = \sum_{v \in V} |G : \mathrm{Stab}(v)| = \sum_{v \in V} \frac{\# G}{\# \mathrm{Stab}(v)}$$

Index: $|G : \mathrm{Stab}(v)| = \dfrac{\# G}{\# \mathrm{Stab}(v)}$

$\Rightarrow$ Vollständiges Vertretersystem von Bahnen falls $\forall\, Gx$ Bahn gilt

$\#(Gx \cap V) = 1$

Beweis nach der Bahnengleichung $|X| = \sum_{v \in V} \dfrac{|G|}{|\mathrm{Stab}(v)|}$

Man sieht im besonderen dass die Stabilisatoren $\mathrm{Stab}(v)$ G teilen müssen

Teiler von $35 = 1, 5, 7, 35$

Betrachte $k_1 + 5k_5 + 7k_7 = 18$

$\Rightarrow$ 18 nicht durch 5 oder 7 bildbar $\Rightarrow \exists$ Bahn mit Länge k_1

Bilden wir also 18 durch Summen dieser Bahngröße

- $35 \Rightarrow$ nicht möglich
- Allein aus Bahn von 5 und 7 $\Rightarrow$ auch nicht möglich

$\Rightarrow$ Man benötigt also mindestens einen Stabilisator der Größe 1

(ii) Finden Sie ein Beispiel für eine Gruppenoperation wie in (1) mit einem Fixpunkt

Betrachte eine Gruppe G mit 35 Elementen $G \cong \mathbb{Z}_{35}$

Betrachte $X = \{x_1 \dots x_{18}\}$ und betrachte folgende Gruppenoperation

$$G \times X \to X$$
$$(g, x) \mapsto g \cdot x_i := \begin{cases} x_i & \text{für } i = 1 \\ x_{(i+g)} \bmod 18 & \end{cases}$$

dann gilt $g x_1 = x_1$ und alle anderen Elemente verschieben sich

Wenn $g = 0 \Rightarrow g \cdot x_i = x_i$ also keine Veränderung

wenn $g = 1 \Rightarrow 1 \cdot x_2 = x_3 \bmod 18 = x_3$

$1 \cdot x_3 = x_4 \bmod 18 = x_4$

sprich die Elemente werden einfach verschoben und es kann keinen Fixpunkt geben

gilt z.B. auch für $g = 17$ da $i \neq 1$

Aufgabe 2

Sei G eine Gruppe, $H < G$ eine Untergruppe, $N \trianglelefteq G$ eine Normale Untergruppe und es gelte $H \cap N = \{e\}$ sowie $G = NH$. Zeigen Sie:

(i) Die Vorschrift $\Theta : H \to \mathrm{Aut}(N);\ h \mapsto (n \to h n h^{-1})$ ist ein Gruppenhomomorphismus

Definition Gruppenhomomorphismus: Man hat H und $\mathrm{Aut}(G)$ als Gruppen

nun muss man zeigen $\Theta(g * h) = \Theta(g) \circ \varphi(h)$

$\forall g, h \in H$

Was macht Θ? nimmt ein $h \in H$ und bildet nach $\mathrm{Aut}(N)$ durch Konjugation ab.

$\Theta(h)(n) = h n h^{-1} \quad \forall n \in N$

① **Abbildung wohldefiniert?**

Da $H < G$ und $N \trianglelefteq G$ ist $\Rightarrow h n h^{-1} \in N$ ist definiert und nach Aufgabe ① ist die Konjugation ein Automorphismus ✓

Hintereinanderausführung der $\mathrm{Aut}(G)$ Funktionen

② **2.2, $\forall h_1, h_2 \in H : \Theta(h_1 h_2) = \Theta(h_1) \circ \Theta(h_2)$**

Betrachte $n \in N$ beliebig: $\Theta(h_1 h_2)(n) = (h_1 h_2)\, n\, (h_1 h_2)^{-1}$

und $\Theta(h_1) \circ \Theta(h_2) = \Theta(h_1)(\Theta(h_2)(n)) = \Theta(h_1)(h_2 n h_2^{-1}) = h_1 (h_2 n h_2^{-1}) h_1^{-1}$

$= (h_1 h_2)\, n\, (h_1 h_2)^{-1}$

damit gilt $\Theta(h_1 h_2) = \Theta(h_1) \circ \Theta(h_2)$

ii) Das semidirekte Produkt $N \rtimes_\Theta H$ (Aufgabe 4 vom letzten Blatt) ist isomorph zu G mittels der Abbildung $(n, h) \to nh$

Definition des semidirekten Produkts: $G \rtimes_\Theta H$ mit Operation $(g, h) \cdot (g', h') := (g \cdot \Theta(h)(g'), h \cdot h')$

mit $\Theta : H \to \mathrm{Aut}(G)$ Gruppenhomomorphismus

↳ Isomorph wenn bijektiver Gruppenhomomorphismus existiert

Bedingungen: $H < G$ Untergruppe

$N \trianglelefteq G$ normale Untergruppe

$H \cap N = \{e\}$ und $G = NH$

i) $\Theta : H \to \mathrm{Aut}(N);\ h \mapsto (n \to h n h^{-1})$

① **Definieren mal semidirektes Produkt** $N \rtimes_\Theta H$ ist Gruppe mit $*$: $(n_1, h_1) * (n_2, h_2) := (n_1 \cdot \Theta(h_1)(n_2), h_1 \cdot h_2)$

explizit durch Anwenden von $\Theta \Rightarrow (n_1 h_1)(n_2 h_2) = (n_1 \cdot h_1 n_2 h_1^{-1}, h_1 h_2)$

Sei nun Abbildung $\varphi : N \rtimes_\Theta H \to G$

$(n, h) \longrightarrow nh$

② **zeige dass φ ein Homomorphismus ist $\varphi((n_1, h_1)(n_2, h_2)) = \varphi(n_1, h_1)\, \varphi(n_2, h_2)$**

$\varphi((n_1, h_1)(n_2, h_2)) \overset{*}{=} \varphi(n_1 h_1 n_2 h_1^{-1}, h_1 h_2) \overset{\varphi}{=} (n_1 h_1 n_2 h_1^{-1})(h_1 h_2)$

$= n_1 h_1 n_2 h_1^{-1} h_1 h_2$

$= n_1 h_1 n_2 h_2$

$\varphi(n_1, h_1)\, \varphi(n_2, h_2) = n_1 h_1 n_2 h_2$

// damit Gruppenhomomorphismus

③ **Zeigen wir nun φ ist injektiv**

Angenommen $\varphi(n_1, h_1) = \varphi(n_2, h_2) \Leftrightarrow n_1 h_1 = n_2 h_2$

$\Leftrightarrow n_1 h_1 h_2^{-1} = n_2$

$\Leftrightarrow n_1 = n_2 h_2 h_1^{-1}$

$n_1, n_2 \in N \quad h_2 h_1^{-1} \in H$

damit rechts $n_2 h_2 h_1^{-1} \in H \cap N = \{e\}$

③ **Zeigen wir φ ist surjektiv**

Es ist $G = NH$ damit kann $g = nh$ für $n \in N, h \in H$

dadurch gilt $g = \varphi(n, h)$ sogar genau surjektiv

$\Rightarrow \varphi$, surjektiv, injektiv und Homomorphismus damit Isomorphismus $G \cong N \rtimes_\Theta H$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass für $n \geq 3$ jede Permutation $\pi \in S_n$ mit $\mathrm{sgn}(\pi) = 1$ von Zyklen der Länge 3 ist

Permutationen $S(M) := \{f : M \to M \mid f$ bijektiv$\}$

Satz 4.1.1 (Lineare Algebra)

Jede Permutation kann als Produkt von elementfremden Zyklen geschrieben werden

Signatur für $\sigma \in S_m$ ist $\mathrm{sgn}(\sigma) := (-1)^s$ wenn σ Produkt von s Transpositionen ist

↳ Transposition ist ein Zykel der Länge 2

Durch $\mathrm{sgn}(\pi) = 1$ und $\pi \in S_n$ weiß man dass es sich um gerade Permutationen handelt

Beweis:

Man kann jede Permutation $\pi \in S_n$ mit $\mathrm{sgn}(\pi) = 1$ also als gerade Anzahl von Transpositionen (i.e. Zyklen Länge 2) schreiben

Gruppieren wir nun zwei Transpositionen im Produkt $(a, b) \cdot (c, d) \cdot (e, f) \dots$

- **1. Fall:** Das Paar ist disjunkt z.B. $(a\,b)(c\,d)$

$(a\,b)(c, d) =$ $a \to b$, $b \to a$, $c \to d$, $d \to c$

natürlich das gleiche wie folgendes Produkt $(a, b, c)(b, c, d)$: $a \to b$, $b \to a$, $c \to d$, $d \to c$ ✓

$\Rightarrow$ Für $(a\,b)(c\,d)$ ist dies äquivalent zu $(a\,b\,c)(b\,c\,d)$

- **2. Fall** Sie haben ein gleiches Element sei dies b

Folgende Möglichkeiten $(a\,b)(b\,c)$, $(a\,b)(c\,b)$, $(b\,a)(b\,c)$, $(b\,a)(c\,b)$

Nun gilt $(a\,b) = (b\,a)$ und $(b\,c) = (c\,b)$ damit eigentlich

alle Fälle äquivalent zu $(a, b)(b\,c) \Rightarrow (a\,b\,c)$

$a \to b$, $b \to c$, $c \to a$ ✓ $=$ $a \to b$, $b \to c$, $c \to a$

- **3. Fall** Zwei Elemente wiederholen sich also wie Paare $(a\,b)(a\,b)$ oder $(a\,b)(b\,a)$

was beides eigentlich in der Hintereinanderausführung nur Identitäten sind

$(a\,b)(a\,b) =$ $a \to a$, $b \to b$

$\Rightarrow$ Da jede Permutation aus gerader Anzahl von Transpositionen geschrieben werden kann und jedes Tupel von zwei Elementen als Produkt von Dreizyklen folgt der Beweis ∎