

# Aufgaben zur Algebra 2

Besprechungstermin Di. 13. Mai 2025

Eine Folge von Modulhomomorphismen  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  heißt **exakt an der Stelle** B, wenn  $\operatorname{Bild}(f) = \operatorname{Kern}(g)$  gilt. Eine (evtl. längere) Folge heißt **exakt**, wenn sie exakt an jeder Stelle ist.

#### Aufgabe 1

Gegeben sei die exakte Folge

$$0 \to A \to B \xrightarrow{f} C \to 0.$$

Zeigen Sie, dass wenn f ein Rechtsinverses besitzt (d.h.  $g\colon C\to B$  mit  $f\circ g=\mathrm{id}_C$ ), dann

$$B\cong A\oplus C$$

gilt.

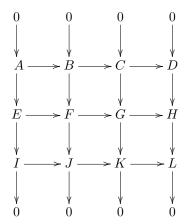
#### Aufgabe 2

In folgendem kommutativen Diagramm von R-Moduln seien die Zeilen exakt:

Zeigen Sie: Sind g, i Isomorphismen, f surjektiv und j injektiv, so ist h ein Isomorphismus.

### Aufgabe 3

Gegeben sei ein kommutatives Diagramm von R-Moduln und -Morphismen, in dem alle Spalten und die unteren beiden Zeilen exakt sind:



Zeigen Sie, dass dann die obere Zeile exakt bei  ${\cal C}$  ist.

## Aufgabe 4

Gegeben sei eine endliche Folge von Vektorräumen und linearen Abbildungen

$$0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} 0$$

mit  $f_{i+1}\circ f_i=0$  für alle i. Wir definieren

$$H_i := \ker(f_i)/\operatorname{im}(f_{i-1}).$$

Zeigen Sie

$$\sum_{i} (-1)^{i} \dim H_{i} = \sum_{i} (-1)^{i} \dim V_{i}.$$