Beispiel 2.19 Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A \in C(J, \mathbb{R}^{d \times d})$ eine Matrix-wertige Funktion, $b \in C(J, \mathbb{R}^d)$, $t_0 \in J$ und $u_0 \in \mathbb{R}^d$.

Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= A(t)u(t) + b(t) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}\right\}$$

genau eine Lösung $u \in C^1(J, \mathbb{R}^d)$, denn es gilt mit

$$f(t,x) := A(t)x + b(t)$$

$$|f(t,x)| \leq \underbrace{\|A(t)\|_{op}}_{\in C^1(J,[0,\infty))} |x| + \underbrace{|b(t)|}_{\in C^1(J,[0,\infty))} \qquad \forall t \in J, \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Bemerkung 2.20 Sei $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ global Lipschitz-stetig.

Dann ist f linear beschränkt, denn es gilt

$$|f(x)| = |f(x) - f(0) + f(0)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leq L|x| + |f(0)|$$

also $|f(x)| \leq a + L|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$. mit $a := |f(0)|$

Insbesondere existieren Lösungen des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f(u(t)), \quad u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^d$$ global, also $\forall t \in \mathbb{R}$,

falls f global Lipschitz-stetig ist.

Beispiel 2.21 (Das gedämpfte Pendel)

Betrachte die Differentialgleichung

$$u''(t) + \underbrace{\alpha u'(t)}_{\text{Dämpfungsterm}} + w^2 \sin(u(t)) = \underbrace{b(t)}_{\text{äußere Kraft}} \qquad t \in \mathbb{R}$$

mit $\alpha, w \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$, $b \in C(\mathbb{R})$ gegeben.

Wir schreiben die Gleichung als System 1. Ordnung:

$u_1 := u$, $\quad u_2 := u'$ und betrachten

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= u_2(t) \\ u_2'(t) &= -\alpha u_2(t) - \omega^2 \sin(u_1(t)) + b(t) \end{aligned}\right\}$$

Sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(t,x) := \begin{pmatrix} x_2 \\ -\alpha x_2 - \omega^2 \sin(x_1) + b(t) \end{pmatrix}$

mit $x = (x_1, x_2)$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(t,x)|^2 &= |x_2|^2 + |-\alpha x_2 - \omega^2 \sin(x_1) + b(t)|^2 \\ &\leq |x_2|^2 + (\alpha |x_2| + \omega^2 |x_1| + |b(t)|)^2 \\ &\leq |x_2|^2 + 3(\alpha^2 |x_2|^2 + \omega^4 |x_1|^2 + |b(t)|^2) \end{aligned}$$

denn $|\sin(x_1)| \leq |x_1| \ \forall x_1 \in \mathbb{R}$ und $2ab \leq a^2 + b^2 \ \forall a,b \in \mathbb{R}$.

Es gibt also eine Konstante $C^2 = C^2(\alpha, \omega) > 0$, so dass gilt

$$|f(t,x)|^2 \leq C^2(|b(t)|^2 + |x|^2)$$

und mit $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ für $a,b \geq 0$ folgt

$$|f(t,x)| \leq C(|b(t)| + |x|)$$

Also ist f linear beschränkt.

Außerdem ist f lokal Lipschitz-stetig, da f stetig differenzierbar ist bzgl. x. Daher existiert eine eindeutige, globale Lösung $(u_1, u_2) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ für jeden Anfangswert $(u_1(t_0), u_2(t_0)) = (\nu_0, \nu_1) \in \mathbb{R}^2$.

Sei nun $u(t) := u_1(t)$. Dann folgt $u'(t) = u_1'(t) = u_2(t)$

$\Rightarrow u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und

$$u''(t) = u_2'(t) = -\alpha u'(t) - \omega^2 \sin(u(t)) + b(t)$$

$$u(t_0) = \nu_0, \quad u'(t_0) = \nu_1.$$

Satz 2.22

Sei $U = J \times \mathbb{R}^d$, $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\sup J = +\infty$; $(t_0, u_0) \in U$ und $f \in C(U; \mathbb{R}^d)$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich des 2. Arguments. Existiert eine Konstante $\omega \geq 0$, so dass gilt

$$f(t,x) \cdot x \leq \omega |x|^2 \qquad \forall (t,x) \in U,$$

so gilt $\forall (t_0, u_0) \in U$: $T_+ = T_+(t_0, u_0) = +\infty$.

Beweis: Sei $u \in C^1([t_0, T_+), \mathbb{R}^d)$ die maximale Lösung nach rechts. Sei $\varphi(t) = |u(t)|^2$. Dann folgt

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{d} u_i(t)^2 = \sum_{i=1}^{d} 2 u_i(t) u_i'(t) = 2 \sum_{i=1}^{d} u_i(t) f_i(t, u(t))$$

$$= 2 f(t, u(t)) \cdot u(t) \leq 2 \omega |u(t)|^2 = 2 \omega \varphi(t)$$

Sei $\varphi_0 := \varphi(t_0) = |u(t_0)|^2$.

Die Differentialungleichung
$$\varphi'(t) \leq 2\omega\varphi(t) \qquad \text{liefert}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi(t) e^{-2\omega(t-t_0)} \right) = \left(\varphi'(t) - 2\omega\varphi(t) \right) e^{-2\omega(t-t_0)} \leq 0$$

Durch Integration erhält man $\varphi(t) \leq \varphi(t_0) e^{2\omega(t-t_0)}$

$\Rightarrow |u(t)|^2 \leq |u(t_0)|^2 e^{2\omega(t-t_0)}$. Wäre $T_+ < +\infty$, so müsste

$\lim_{t \nearrow T_+} |u(t)| = +\infty$ gelten, doch $|u(t)|^2 \leq |u(t_0)|^2 e^{2\omega(T_+ - t_0)}$ $\forall t \in [t_0, T_+)$ $\square$.

Beispiel 2.25 •) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3$. Dann ist $f(x) \cdot x = -x^4 \leq 0$. Insbesondere ist die Bedingung aus Lemma 2.22. erfüllt und es gilt $T_+ = +\infty$. Durch Trennung der Variablen erhält man explizit für $u_0 \neq 0$

$$u(t) = \frac{\operatorname{sgn}(u_0)}{\left(2t + \frac{1}{u_0^2}\right)^{1/2}}$$

als Lösung von $u'(t) = -u(t)^3$ mit dem maximalen Existenzintervall $\left(-\frac{1}{2u_0^2}, +\infty\right)$.

③ LINEARE SYSTEME

Wir betrachten im Folgenden lineare Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= A(t)u(t) + g(t) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

für $A \in C(J; \mathbb{R}^{d\times d})$, $g \in C(J, \mathbb{R}^d)$, $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in J$.

Wir betrachten auf dem Vektorraum der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, den wir mit dem Raum der Matrizen $\mathbb{R}^{d\times d}$ identifizieren können, eine Matrix-Norm $\|\cdot\|$, die mit der Norm $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}^d$ verträglich ist, d.h. es gilt

$$|Ax| \leq \|A\|\,|x|,$$

und die außerdem submultiplikativ ist, d.h. es gilt

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \qquad \forall A, B \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

Für die Euklidische Norm $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}^d$ besitzt etwa

$$\|A\| := \left(\sum_{i,j=1}^{d} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \qquad \text{(„Frobenius-Norm")}$$

diese Eigenschaft. (Beachte, dass diese Norm keine Operatornorm im Sinne der Definition aus Analysis 2)

Lemma 3.1 Für $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ gilt, $A = (a_{ij})$

$$|a_{ij}| \leq \|A\| \leq d \max_{i,j\in\{1,..d\}} |a_{ij}| \qquad \forall i,j \in \{1, .. d\}$$

Insbesondere ist die Konvergenz in $\mathbb{R}^{d\times d}$ bezüglich $\|\cdot\|$ äquivalent zur komponentenweise Konvergenz. Außerdem ist $(\mathbb{R}^{d\times d}, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.

Beweis: Folgt aus der obigen Abschätzung und die

ist offensichtlich zu beweisen.