Proseminar Numerische Mathematik 2 am 29.April 2025

(1) Implementieren Sie in Python die RK1 (Runge-Kutta erster Ordnung), RK2 und RK4 zur Lösung der Gleichung $y'(t) = -4y(t), \qquad y(0) = 2, \quad t \in [0, 2]$. Verwenden Sie $\Delta t = 0.2$, um die numerischen Lösungen und die analytische Lösung auf demselben Diagramm darzustellen. Kommentieren Sie die Ergebnisse. Geben Sie für eine Reihe von verfeinerten Zeitintervallen mit $\Delta t/2$ die Konvergenzkurven jedes Schemas nach folgender Formel an $order = \log(E_1/E_2)/log(2)$, wobei E_1 und E_2 die mit Δt bzw. $\Delta t/2$ berechneten Fehler sind.

(2) (Halbimplizite und explizite Methoden)

Wir befassen uns in dieser Übung mit folgendem Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t)x_2(t), \\ x_2'(t) = x_1(t)^2 - x_2(t), \quad t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = a, \quad x_2(0) = b, \tag{2}$$

wobei a und b dem offenen Intervall $]0, 1[$ angehören.

a) Wir setzen $x = (x_1, x_2)^T$. Zeigen Sie, dass das System (1)-(2) in der Form

$$x'(t) = f(x(t)), \quad t > 0, \tag{3}$$

geschrieben werden kann, wobei $f \in C^1((\mathbb{R}_+^*)^2, \mathbb{R}^2)$.

b) Die folgenden Fragen sind optional. Sie ermöglichen es zu zeigen, dass das System (3) eine maximale Lösung $x \in C^1([0, +\infty[; \mathbb{R}^2)$ besitzt. Der Leser kann dieses Ergebnis vorübergehend akzeptieren und direkt zu Frage c übergehen.

i. Zeigen Sie, dass es ein $\alpha > 0$ gibt und $x \in C^1([0, \alpha[; \mathbb{R}^2)$ Lösung von (3) (man kann hierbei die Tatsache nutzen, dass f lipschitzstetig auf jeder Menge $[\epsilon, A]^2$ mit $0 < \epsilon < A < 2.0$ ist).

ii. Sei $\beta > 0$. Zeigen Sie, dass es höchstens eine Lösung von (3) in $C^1([0, \beta[, \mathbb{R}^2)$ gibt.

iii. Zeigen Sie, dass das System (3) eine maximale Lösung $x \in C^1([0, +\infty[; \mathbb{R}^2)$ besitzt. (Diese Frage ist schwierig: man muss durch Widerspruch argumentieren und zeigen, dass in diesem Fall x keine maximale Lösung ist).

iv. Zeigen Sie, dass die maximale Lösung x zu $C^\infty([0, +\infty[; \mathbb{R}^2)$ gehört.

c) Wir betrachten das folgende Diskretisierungsschema des Systems (1)-(2); sei k der Zeitschritt, mit $0 < k < \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^{(n+1)} - x_1^{(n)}}{k} = -x_1^{(n+1)} x_2^{(n)}, \\ \dfrac{x_2^{(n+1)} - x_2^{(n)}}{k} = \left(x_1^{(n)}\right)^2 - x_2^{(n+1)}, \\ x_1^{(0)} = a, \quad x_2^{(0)} = b. \end{cases} \tag{4}$$

i. Zeigen Sie durch Induktion über n, dass die Folgen $(x_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch (4), wohldefiniert, monoton fallend und streng positiv sind.

ii. Zeigen Sie, dass das numerische Schema (4) in der Form

$$\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{k} = \varphi(x^{(k+1)}, x^{(k)}), \tag{5}$$

geschrieben werden kann,

wobei $x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} \in C^0((\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ und $\varphi(x, x) = f(x)$.

(c) (Konsistenz)
Sei $T > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $t_k = nk$. Zeigen Sie, dass es eine Funktion $C(T) \in \mathbb{R}_+$ gibt, sodass

$$\frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{k} = \varphi(x(t_n), k) + R_k^{(n)}, \quad \text{für alle } n \text{ mit } nk \leq T, \tag{6}$$

wobei $|R_k^{(n)}| \leq C(T)k$.

(d) (Stabilität)
Sei $T > 0$.

(i) Zeigen Sie, dass $x_1^{(k)} \geq (1 - k - kb)^{\frac{t}{k}}$ für alle ganzen n mit $nk \leq T$.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$(1 - k - kb)^{\frac{t}{k}} \to e^{-(1+b)t} \quad \text{wenn } k \to 0,$$

und schließen Sie daraus, dass

$$\inf_{0<k<\frac{1}{2}} (1 - k - kb)^{\frac{t}{k}} > 0.$$

(iii) Schließen Sie daraus, dass es $a(T) > 0$ und $b(T) > 0$ gibt, sodass

$$\begin{cases} a(T) \leq x_1^{(k)} \leq a, \\ b(T) \leq x_2^{(k)} \leq b, \end{cases} \qquad \text{für alle } n \text{ mit } nk \leq T. \tag{7}$$

(e) (Konvergenz)
Sei $T > 0$. Zeigen Sie, dass es $D(T) \in \mathbb{R}_+$ gibt, sodass

$$|x^{(k)} - x(t_k)| \leq D(T)k, \quad \text{für alle } n \text{ mit } nk \leq T. \tag{8}$$

Folgern Sie daraus die Konvergenz des Schemas (4).

(f) Wir ersetzen nun das Schema (4) durch das explizite Euler-Schema für das System (3). Schreiben Sie dieses Schema auf. Zeigen Sie, dass es für alle $x_1^{(0)} > 0$ ein $x_2^{(0)} > 0$ gibt, sodass es Werte n gibt mit $x_1^{(k)} \leq 0$ oder $x_2^{(k)} \leq 0$. (Man kann zeigen dass $x_1^{(k)}$ gegen 0 strebt, wenn $n \to +\infty$ wenn $x_1^{(0)} > 0$ und $x_2^{(0)} > 0$. Es existiert somit ein n mit $x_2^{(k)} \leq 0$, was der Annahme widerspricht). Kommentieren Sie.

(3) (Einfluss Rundung) Betrachten Sie für ein gegebenes Einschrittverfahren $\mathbf{\Phi}(h, x, \mathbf{y})$, folgendes durch Rundung gestörtes Einschrittverfahren:

$$\tilde{\mathbf{y}}_{i+1} = \mathrm{rd}(\tilde{\mathbf{y}}_i + \mathrm{rd}(h \cdot \mathrm{rd}(\mathbf{\Phi}(h, x_i, \tilde{\mathbf{y}}_i)))), \qquad \tilde{\mathbf{y}}_0 = \mathbf{y}_0.$$

Zeigen Sie, dass der Rundungsfehler beschränkt ist durch

$$|r(x, h)| \leq \frac{\varepsilon}{|h|} \cdot \frac{e^{\Lambda(x-x_0)} - 1}{\Lambda}.$$

(4) Betrachten Sie folgendes Drei-Körper-Problem (Arenstorf Orbit)

$$
\begin{aligned}
y_1'' &= y_1 + 2y_2' - (1-\mu)\frac{y_1+\mu}{D_1} - \mu\frac{y_1 - 1 + \mu}{D_2}, \\
y_2'' &= y_2 - 2y_1' - (1-\mu)\frac{y_2}{D_1} - \mu\frac{y_2}{D_2}
\end{aligned}
$$

mit

$$D_1 = ((y_1+\mu)^2 + y_2^2)^{3/2}\ ,\ D_2 = ((y_1 - 1 + \mu)^2 + y_2^2)^{3/2}$$

und $\mu = 0.012277471$. Die Anfangswerte lauten

$$
\begin{aligned}
y_1(0) &= 0.994 & y_1'(0) &= 0 \\
y_2(0) &= 0 & y_2'(0) &= -2.00158510637908552 24
\end{aligned}
$$

Approximieren Sie mit Hilfe des Verfahrens von Runge-Rutta die Lösung für $t \in [0, 17.0652165601579625588 9]$. Verwenden Sie
$N \in \{6000, 12000, 24000, 48000\}$ Schritte. Erstellen Sie einen Phasenplott von y_2 gegen y_1.