PS Analysis 3 **WS 2024/25**

Übungszettel 12 (CA)

Karin Schnass *ankreuzbar bis 14.01., 8:00*

1. Lies den Beweis von Satz 2.7 durch und beweise dann Lemma 4.6.
   Hinweis: Teile die Laurentreihe in eine Potenzreihe ($n \geq 0$) und den Rest ($n < 0$), der wiederum als Potenzreihe in $w = (z - z_0)^{-1}$ aufgefasst werden kann.

2. Sei f holomorph mit isolierter Singularität in z_0. Zeige, dass der Hauptteil h_{f,z_0} der Laurentreihe von f in z_0 auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ holomorph ist und dass g mit $g(z) = h_{f,z_0}(z) - \frac{c_{-1}}{z-z_0}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ eine Stammfunktion hat.

3. Finde für die folgenden Funktionen f_i jeweils einen maximalen Definitionsbereich $U_i \subseteq \mathbb{C}$, sodass f_i auf U_i holomorph ist. Entwickle die Funktionen dann an allen isolierten Singularitäten in eine Laurentreihe und bestimme den Hauptteil und das Residuum.

$$(a) \quad f_1(z) = \frac{z^2+4}{z(z+2)^3} \qquad\qquad (b) \quad f_2(z) = z^2 \cdot e^{1/z}$$

4. Identifiziere die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$i) \quad \lim_{z\to\infty} f(z) = 3\pi\mathrm{i}, \qquad ii) \quad \lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \frac{1+\mathrm{i}}{2}, \qquad iii) \quad \int_{\partial B_1(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = -\mathrm{i}.$$

5. Berechne die folgenden Integrale,

$$(a) \quad \oint_{\partial B_2(0)} \frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}z, \qquad (b) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t, \qquad (c) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t.$$