Ist $u \in C^1([t_0-T, t_0+T], \mathbb{R}^d)$ die eindeutige Lösung, dann können wir, da $u(t_0+T) =: \tilde{v}_0 \in U$ gilt, das Anfangswertproblem für obige Differentialgleichung mit Anfangswert $u(t_0+T) = \tilde{v}_0$ betrachten und wieder den Satz von Picard-Lindelöf anwenden, um eine Lösung auf einem Intervall um t_0+T zu erhalten und so die Lösung lokal fortsetzen.
Dazu ist folgende Beobachtung essentiell.

Bemerkung 2.14 Ist u_1 eine Lösung auf $[t_0, t_1]$ und u_2 eine Lösung auf $[t_1, t_2]$ mit Anfangswerten $u_1(t_0) = v_0$ und $u_2(t_1) = u_1(t_1)$, dann ist

$$u(t) := \begin{cases} u_1(t) & t \in [t_0, t_1] \\ u_2(t) & t \in [t_1, t_2] \end{cases} \in C^1([t_0, t_2], \mathbb{R}^d)$$

eine Lösung von (2.3).
Dabei folgt die stetige Differenzierbarkeit in $t = t_1$ aus der Gleichung, denn es gilt

$$u_1'(t_1) = f(t_1, u_1(t_1)) = f(t_1, u_2(t_1)) = u_2'(t_1)$$

mit den jeweils einseitigen Ableitungen.
Diese Eigenschaft und die Eindeutigkeit von Lösungen zeigt, dass folgende Definition sinnvoll ist.

Definition 2.15 Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, $U \neq \emptyset$, $(t_0, v_0) \in U$ und $f \in C(U, \mathbb{R}^d)$, lokal Lipschitz-stetig bzgl. des 2. Arguments.
Dann sind $T_\pm(t_0, v_0) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ wie folgt definiert:

$T_+ := T_+(t_0, u_0) := \sup\{ t_1 > t_0 : \text{es existiert eine Lsg } u \text{ von } (2.3) \text{ auf } [t_0, t_1] \}$

$T_- := T_-(t_0, u_0) := \inf\{ t_2 < t_0 : \text{es existiert eine Lsg } u \text{ von } (2.3) \text{ auf } [t_2, t_0] \}.$

Das Intervall $I_{max} = (T_-, T_+)$ heißt MAXIMALES EXISTENZ-INTERVALL der Lösung. Für die MAXIMALE LÖSUNG von (2.3) gilt $u \in C^1((T_-, T_+), \mathbb{R}^d)$.

Der Existenzsatz stellt sicher, dass $T_+ > 0$ und $T_- < 0$ gilt.

Beachte, dass das maximale Existenz Intervall $I_{max} = (T_-, T_+)$ stets offen ist, da man sonst die Lösung weiter fortsetzen könnte. Gilt $T_+ = +\infty$ und $T_- = -\infty$, so nennt man u GLOBALE LÖSUNG

Darüber hinaus bezeichnet man die Intervalle $[t_0, T_+)$, $(T_-, t_0]$ als die maximalen Existenzintervall nach rechts bzw. nach links. (und im Fall $T_+ = +\infty$, $T_- > -\infty$ spricht man von globaler Existenz nach rechts)

Im Folgenden wollen wir das Verhalten der Lösung im Fall $T_+ < +\infty$ (bzw. $T_- > -\infty$) genauer untersuchen. Wir definieren dazu für eine Menge $M \subset \mathbb{R}^d$, $M \neq \emptyset$ und $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\operatorname{dist}(\xi, M) := \inf_{x \in M} |\xi - x|.$$

Satz 2.16 (FORTSETZUNGSSATZ)

Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, $U \neq \emptyset$, $f: U \to \mathbb{R}^d$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bezüglich des 2. Arguments. Sei $u_0 \in U$. Dann existiert die eindeutige Lösung von (2.3) auf dem maximalen Intervall (T_-, T_+) mit $T_\pm = T_\pm(t_0, u_0)$ und $t_0 \in (T_-, T_+)$. Dabei gelten folgende Alternativen für T_+:

i) $T_+ = +\infty$

ii) $T_+ < +\infty$ und für alle $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $t_n \in [t_0, T_+)$ mit $t_n \nearrow T_+$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} |u(t_n)| = +\infty$$

oder

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{dist}\big((t_n, u(t_n)), \partial U\big) = 0, \quad \text{falls } \partial U \neq \emptyset.$$

Entsprechendes gilt für den Endpunkt T_-.

Beweis: Angenommen ii) gilt nicht und $T_+ < \infty$.

Dann existiert eine Folge $t_n \nearrow T_+$ und ein $M > 0$:

$$|u(t_n)| \leq M \quad \forall\, t_n \in \mathbb{N}$$

und

$$\operatorname{dist}\big((t_n, u(t_n)), \partial U\big) > \frac{1}{M} \quad \forall\, t_n \in \mathbb{N} \qquad (*)$$

Insbesondere ist $(u(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und nach Bolzano-Weierstrass existiert eine Teilfolge $(u(t_{n_j}))_{j \in \mathbb{N}}$, die gegen ein $u^* \in \mathbb{R}^d$ konvergiert, d.h.: $\lim_{k \to \infty} (t_{n_j}, u(t_{n_j})) = (T_+, u^*)$

und $(T_+, u^*) \in U$ wegen $(*)$.

Aus Korollar 2.11 folgt: Es gibt ein $j_0 \in \mathbb{N}$, ein $T > 0$ und eine eindeutig bestimmte Lösung u_j auf $[t_{n_j}, t_{n_j} + T]$ mit $u_j(t_{n_j}) = u(t_{n_j})$ für jedes $j \geq j_0$.

Da $t_{n_j} \nearrow T^+$ gilt, können wir $j \geq j_0$ so groß wählen, dass $t_{n_j} + T > T^+$ gilt. Es folgt aus Bemerkung 2.14, dass

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & t \in [t_0, t_{n_j}] \\ u_j(t) & t \in [t_{n_j}, t_{n_j} + T^+] \end{cases}$$

eine stetig differenzierbare Lösung $\tilde{u} \in C^1([t_0, t_{n_j} + T])$ von (2.3) definiert. Dies widerspricht der Maximalität von T_+.

Der Beweis für T_- verläuft analog. $\square$

Korollar 2.17 Ist $U = J \times \mathbb{R}^d$, J ein Intervall, $\sup J = +\infty$, so vereinfacht sich Satz 2.16 zu

i) $T^+ = +\infty$

ii) $T^+ < +\infty$ und $\lim\limits_{t \nearrow T^+} |u(t)| = +\infty$.

Analoge Aussagen gelten für T_-.

Beachte, dass globale Lösungen durchaus unbeschränkt sein können (siehe $u(t) = e^t \Rightarrow u'(t) = u(t)$).

Im Folgenden wollen wir noch Kriterien ableiten, die globale Existenz sicherstellen.

Lemma 2.18 (LINEARE BESCHRÄNKTHEIT)

Sei $U = J \times \mathbb{R}^d$, $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $(t_0, u_0) \in U$ und $f \in C(U; \mathbb{R}^d)$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich des 2. Arguments. Seien $a, b \in C(J; [0,\infty))$, so dass gilt

$$|f(t,x)| \leq a(t) + b(t)|x|. \quad \forall\, t \in J,\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann gilt für alle $(t_0, u_0) \in U$ und $T_+ = T_+(t_0, u_0)$, $T_- = T_-(t_0, u_0)$

$$(T_-, T_+) = J.$$

Beweis:

Angenommen $T_+ \in J$ mit $\lim\limits_{t \nearrow t_+} |u(t)| = +\infty$

Für alle $t \in [t_0, T_+)$ gilt

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$$

Aus der Voraussetzung folgt

$$|u(t)| \leq |u_0| + \int_{t_0}^{t} |f(s, u(s))|\, ds \leq |u_0| + \int_{t_0}^{t} \big(a(s) + b(s)|u(s)|\big)\, ds$$

$$= \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} b(s)\,|u(s)|\, ds$$

mit $\alpha(t) = |u_0| + \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$. Mit dem Lemma von Gronwall folgt

$$|u(t)| \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\, b(s)\, e^{\int_s^t b(\tau)\, d\tau}\, ds \qquad \forall\, t \in [t_0, T_+)$$

Aus der Stetigkeit von a, b auf J und der Annahme $T_+ \in J$ folgt

$$\alpha(t) \leq |u_0| + \int_{t_0}^{T_+} a(s)\, ds = M_1 \qquad \forall\, t \in [t_0, T_+)$$

$$b(t) \leq \max_{t \in [t_0, T_+]} b(t) = M_2, \qquad e^{\int_s^t b(\tau)\, d\tau} \leq e^{\int_{t_0}^{T_+} b(s)\, ds} = M_3$$

$$\exists\, M > 0 : \ |u(t)| \leq M \quad \forall\, t \in [t_0, T_+) \quad ⚡ \ \Rightarrow T_+ = \sup J$$

Analog für T_-.

Beispiel 2.19 Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A \in C(J, \mathbb{R}^{d\times d})$ eine Matrix-wertige Funktion, $b \in C(J, \mathbb{R}^d)$, $t_0 \in J$ und $u_0 \in \mathbb{R}^d$.

Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= A(t)u(t) + b(t) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}\right\}$$

genau eine Lösung $u \in C^1(J, \mathbb{R}^d)$, denn es gilt mit

$$f(t,x) := A(t)x + b(t)$$

$$|f(t,x)| \leq \underbrace{\|A(t)\|_{op}}_{\in C^1(J,[0,\infty))} |x| + \underbrace{|b(t)|}_{\in C^1(J,[0,\infty))} \qquad \forall t \in J, \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Bemerkung 2.20 Sei $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ global Lipschitz-stetig.

Dann ist f linear beschränkt, denn es gilt

$$|f(x)| = |f(x) - f(0) + f(0)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leq L|x| + |f(0)|$$

also $|f(x)| \leq a + L|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$. mit $a := |f(0)|$

Insbesondere existieren Lösungen des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f(u(t)), \quad u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^d$$ global, also $\forall t \in \mathbb{R}$,

falls f global Lipschitz-stetig ist.