

Aufgaben zur Algebra 1

Besprechungstermin: Do. 17. Oktober 2024

Aufgabe 1

Wir betrachten im Folgenden jeweils eine Menge G mit einer Verknüpfung

$$*: G \times G \rightarrow G.$$

Entscheiden und begründen Sie, welche davon Gruppen sind:

- (i) $G = \mathbb{N}$ und $a * b := |a - b|$
- (ii) $G = \mathbb{Z}$ und $a * b := \max\{a, b\}$
- (iii) $G = \{a, b, c, d\}$

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Aufgabe 2

Entscheiden Sie für die folgenden Gruppen jeweils, welche isomorph sind und welche nicht:

- (i) $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
- (ii) $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Aufgabe 3

Seien G, H Gruppen und $\varphi: G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus.

- (i) Zeigen Sie: Ist φ bijektiv, so ist die Umkehrabbildung φ^{-1} selbst ein Gruppenhomomorphismus.
- (ii) Bestimmen Sie alle Gruppenhomomorphismen $\varphi: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) sämtliche Gruppen mit 1, 2, 3 und 4 Elementen.