Proseminar Numerische Mathematik 2 am 20.May 2025

(1) Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen, welches eine chemische Reaktion simuliert:

$$\begin{aligned} y_1' &= -0.04y_1 + 10^4 y_2 y_3 \\ y_2' &= 0.04y_1 - 10^4 y_2 y_3 - 3 \cdot 10^7 y_2^2 \\ y_3' &= 3 \cdot 10^7 y_2^2 \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = y_3(0) = 0$.
Verwenden Sie das implizite Euler Verfahren mit Schrittweiten $h = 0.1$ bzw. $h = 0.01$ und das eingebettete RK3(2) mit den relativen lokalen Fehlertoleranzen `tol` $= 0.01$ und `tol` $= 1e - 4$. Vergleichen Sie die numerischen Approximationen zum Zeitpunkt $t = 0.3$. Der *exakte* Wert lautet $y_2(0.3) = 3.074626578578934 \cdot 10^{-5}$.

(2) Lösen Sie das AWP

$$y' = 10\left(y - \frac{x^2}{x^2+1}\right) + \frac{2x}{(x^2+1)^2},\ y(0) = 0$$

mit exakter Lösung $y(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ mit dem Trapezregel-Vefahren, dem impliziten Euler Verfahren und dem RK4. Verwenden Sie für jedes Verfahren 1000 Schritte auf dem Intervall [0,3]. Was fällt auf? (**Hinweis:** Inhärente Instabilität)

(3) Gegeben sei eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ mit Bandstruktur

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,q+1} & & & \\ \vdots & \ddots & & \ddots & & \\ a_{p+1,1} & & \ddots & & \ddots & \\ & \ddots & & \ddots & & a_{n-q,n} \\ & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{n,n-p} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

mit $p, q \ll n$. Zeigen Sie, dass zur Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ein modifizierter Gauß-Algorithmus mit $\mathcal{O}(n)$ arithmetische Operationen existiert.

(4) Zu gegebener Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und beliebigen Indizes $j, k \in \{1, 2, \ldots n\}$ mit $j \neq k$ heißt eine Familie von Indizes $j_0, j_1, \ldots, j_m \in \{1, \ldots, n\}$ mit $j_0 = j$ und $j_m = k$ eine die Indizes j und k verbindende Kette, falls $a_{j_{i-1},j_i} \neq 0$ für $i = 1, 2, \ldots m$.
Zeigen Sie, dass eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann nicht-zerfallend (irreduzibel) ist, wenn für alle $j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $j \neq k$ eine die Indizes j und k verbindende Kette exisitert.