(1) L^p-RÄUME: Seien $1 \leq p < q \leq +\infty$

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine messbare Teilmenge mit $\lambda(\Omega) < +\infty$. Zeigen Sie, dass in dem Fall die Inklusion $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ gilt.

(b) Zeigen Sie,

$$L^q(\mathbb{R}^d) \not\subset L^p(\mathbb{R}^d), \text{ und } L^p(\mathbb{R}^d) \not\subset L^q(\mathbb{R}^d),$$

indem Sie jeweils ein Gegenbeispiel angeben.

(2) RÄUME VON OPERATOREN: Seien X und Y normierte Räume.

(a) Zeigen Sie, dass $L(X, Y)$ ein normierter Raum ist.

(b) Zeigen Sie, dass $L(X, Y)$ ein Banachraum ist, falls Y ein Banachraum ist.

(c) Zeigen Sie, dass im Falle, dass X endlich-dimensional ist, jede lineare Abbildung $X \to Y$ beschränkt ist.

(3) BEISPIELE VON OPERATOREN:

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto xf(x)$ einen beschränkten Operator auf $L^1([0,1])$ definiert. Gilt dies auch auf $L^1(\mathbb{R})$?

(b) Zeigen Sie dass die Abbildung $P : L^1([0,1]) \to L^1([0,1])$,

$$f \mapsto f - \int_0^1 f(s)ds$$

eine Projektion ist. Charakterisieren Sie $\operatorname{rg}(P)$.

(4) EIGENSCHAFTEN DES ORTHOGONALEN KOMPLEMENTS: Es sei X ein Hilbertraum und $A \subset X$.

(a) Zeigen Sie, dass $A^\perp$ ein abgeschlossener Untervektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass $A^\perp = \overline{\operatorname{span}(A)}^\perp$ gilt.

(c) Verwenden Sie $X = \overline{\operatorname{span}(A)} \oplus \overline{\operatorname{span}(A)}^\perp$, um $(A^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span}(A)}$ zu zeigen.

(d) Folgern Sie, dass $\operatorname{span}(A)$ dicht in X ist genau dann, wenn $A^\perp = \{0\}$.

(e) Sei $B \subset X$ eine weitere Menge. Gilt $A \subset B$, so folgt $B^\perp \subset A^\perp$.

(5) HAMEL-BASIS UND UNSTETIGE FUNKTIONALE: Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Teilmenge $B \subset X$ heißt *Hamel-Basis* in X, falls sich jedes Element aus X als endliche Linearkombination aus Elementen aus B schreiben läßt.

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Sei X ein Vektorraum und A eine linear unabhängige Teilmenge von X. Dann existiert eine Hamel-Basis B von X mit $A \subset B$. Insbesondere besitzt jeder Vektorraum eine Hamel-Basis (Hinweis: Lemma von Zorn).

(b) Zeigen Sie, dass für jeden unendlich-dimensionalen Banachraum eine unstetige lineare Abbildung $X \to \mathbb{K}$ existiert, indem Sie folgendermaßen vorgehen:
Wählen Sie eine linear unabhängige Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|x_n\| = 1$ und ergänzen Sie diese zu einer Hamel-Basis von X. Setzen Sie dann $x^*(x_n) = n$ und Null auf allen anderen Basiselementen. Zeigen Sie, dass x^* zu einer unstetigen linearen Abbildung $x^*\colon X \to \mathbb{K}$ fortgesetzt werden kann.