Proseminar Numerische Mathematik 2 am 01.April 2025

(1) Sei $\mathbf{Q}$ eine orthogonale Matrix der Dimension n. Zeigen Sie, dass man $\mathbf{Q}$ als Produkt von höchstens n Householder-Matrizen schreiben kann.

(2) Für $\varphi \in \mathbb{R}$ und $k \neq \ell$ definieren wir die Matrix $\mathbf{\Omega}_{k\ell}$ durch

$$(\mathbf{\Omega}_{k\ell})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, i \neq k, j \neq \ell \\ \cos\varphi & \text{falls } i = j = k \text{ oder } i = j = \ell \\ \sin\varphi & \text{falls } i = k \text{ und } j = \ell \\ -\sin\varphi & \text{falls } i = \ell \text{ und } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Matrix $\mathbf{\Omega}_{k\ell}$ heißt Givens-Rotation.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{\Omega}_{k\ell}$ eine orthogonale Matrix ist.

(b) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$. Bestimmen Sie φ so, dass das (k,ℓ)-Element vom Produkt $\mathbf{\Omega}_{k\ell}\mathbf{A}$ Null ist. Welche Zeilen und Spalten werden beim Produkt verändert?

(c) Wie können Givens-Rotationen verwendet werden, um die QR-Zerlegung eine Matrix zu bestimmen? Wie teuer ist die Zerlegung? Wieviel Speicher benötigt man?

(3) Sei $\mathbf{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : p \mapsto \begin{pmatrix} e^p - 2 \\ e^{2p} - 4 \\ e^{4p} - y \end{pmatrix}$. Finden Sie ein geeignetes $y \in \mathbb{R}$, so dass das Gauß-Newton-Verfahren zur Lösung der Minimierungsaufgabe $\|\mathbf{f}(p)\|_2 \to \min$ unabhängig vom Startwert (ausgenommen der Lösung der Minimierungsaufgabe) divergiert.
Hinweis: Schreiben Sie das Gauß-Newton-Verfahren für dieses Problem um in die entsprechende Fixpunktaufgabe, und finden Sie ein y, sodass die exakte Lösung ein abstoßender Fixpunkt ist.

(4) Importieren Sie die Datei `logistisch.csv`. Den Daten zu Grunde liegt das logistische Wachstumsmodell

$$f(t) = \frac{f_0 G}{f_0 + e^{-kGt}(G - f_0)}$$

(a) Welche Bedeutung haben die einzelnen Paramenter?

(b) Bestimmen Sie die Parameter mit Hilfe des Gauß-Newton-Verfahrens.

(c) Zeigen Sie: Kennt man den Parameter G so kann man das Problem auf ein linears Ausgleichsproblem reduzieren.

(5) (aus: Deufelhard P., Hohmann A.: **Numerische Mathematik I**. Eine algorithmisch orientierte Einführung. Walter de Gruyter Berlin, New York 2002)
Importieren Sie die Datei `biochemie.csv`. Die Daten entstammen einer Messreihe, welche dem Modell der sogenannten Feulgen-Hydrolyse der DNA

$$\phi(t) = \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_3}\left(e^{-p_3 t} - e^{-p_2 t}\right)$$

genügen.

(a) Versuchen Sie mit Hilfe des Gauß-Newton-Verfahrens jene Parameterwahl zu finden, mit denen das Modell die Daten am besten approximiert.

(b) Verwenden Sie die Transformation $s_1 := p_1 p_2$, $s_2 := \sqrt{p_3}$, $s_3 := \sqrt{\frac{p_2 - p_3}{2}}$. Wie verändert sich dadurch die Modellfunktion? Bestimmen Sie erneut die Parameter mit Hilfe des Gauß-Newton-Verfahrens. Was wird durch die Transformation sichergestellt?