Proseminar Numerische Mathematik 2 am 06.Mai 2025

(1) Implementieren Sie das eingebettete Runge-Kutta Verfahren 3(2) mit variabler Schrittweitensteuerung und testen Sie Ihren Code.

(2) Lösen Sie mit dem Verfahren aus Aufgabe (1) die Van der Pol'sche Differentialgleichung

$$y'' - \lambda(1 - y^2)y' + y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0,$$

für $\lambda = 0$ und $\lambda = 12$. Erstellen Sie jeweils ein Phasendiagramm. Zeichnen Sie auch die zeitliche Entwicklung der Schrittweiten für eine geeignete Toleranz.

(3) Zeigen Sie exemplarisch, dass für ein Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung p die Gleichung

$$\mathbf{b}^\top \mathbf{A}^\ell \mathbb{1} = \frac{1}{(\ell+1)!}, \quad 0 \leq \ell \leq p-1$$

gilt. Betrachten Sie Verfahren bis Ordnung 5. Einen allgemeinen Beweis finden Sie in Deufelhard / Bornemann Numerische Mathematik 2 S.160 (bzw. S. 155–159).

(4) Bestimmen Sie numerisch den Stabilitätsbereich für das Verfahren von Runge (Bsp. 4.3 S. 44) und Kutta (Bsp. 4.4 S. 44).
Hinweise:

- Verwenden Sie Bemerkung 4.15 S. 60.
- Betrachten Sie ein diskretes Gitter des komplexe Rechteck $[-3, 3] \times [-3, 3]\,\mathrm{i}$.
- Werten Sie die Stabilitätsfunktion auf dem diskreten Gitter aus.
- Verwenden Sie `contour` des `matplotlib`-Pakets um das 1-Niveau zu zeichnen.