$$= A(X - (y_1\ 0 \cdots 0)) = A(0\ e_2 \cdots e_d)$$
$$= (0\ Ae_2\ \cdots\ Ae_d) = (0\ a_2\ \cdots\ a_d)$$

für $A = (a_1 \cdots a_d)$.

Es gilt also $x'(t) = B(t)\,x(t)$ mit

$B(t) = (0\ b_1 \cdots b_d)$ und die rechte Seite der Gleichung ist daher unabhängig von x_1.

Es kann also zunächst das System für $(x_2, \dots x_d) =: \tilde{x}$

$\tilde{x} \in C^1(J, \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1})$ gelöst werden und x_1 erhält man durch Integration, bzw. y durch Rücktransformation

3.3.2 LINEARE GLEICHUNGEN HÖHERER ORDNUNG

Wir betrachten gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung $n \in \mathbb{N}$:

$$\underline{u^{(n)}(t) + q_{n-1}(t)\,u^{(n-1)}(t) + \dots + q_1(t)\,u'(t) + q_0(t)\,u(t) = 0} \qquad (*)$$

für Koeffizientenfunktionen $q_j \in C(J, \mathbb{R})$, $j \in \{0, .., n-1\}$.

Wir schreiben die Gleichung als System 1. Ordnung: Mit

$x := (u, u', \dots, u^{(n-1)})$ folgt: $(*)$ gilt $\Leftrightarrow$

$$(x) \qquad \underline{x'(t) = A(t)\,x(t)} \qquad \text{mit}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -q_0(t) & -q_1(t) & \cdots & \cdots & -q_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

Dieses System ist für jede Anfangsbedingung bei $t_0 \in J$

$$x(t_0) = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})^T =: x_0 \in \mathbb{R}^n$$

eindeutig lösbar, mit $x \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$, d.h.: $(*)$ besitzt

gegeben Anfangswerte

$$\underline{u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u_1, \quad \dots \quad u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1}}$$

eine eindeutige Lösung $u \in C^n(J, \mathbb{R})$.

Mit den Ergebnissen des letzten Kapitels folgt, dass der Lösungsraum von $(*)$ ein n-dimensionaler Untervektorraum von $C^n(J, \mathbb{R})$ ist.

Sei $Y_j \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$, $j \in \{1, \dots, n\}$ l.u. Lösungen von $(*)$.
Dann ist eine Fundamentalmatrix des Systems $(*)$ gegeben durch

$$Y(t) = (Y_1(t) \quad \dots \quad Y_n(t))$$

Aufgrund der speziellen Gestalt der Matrix A gilt

$$Y_j(t) = \begin{pmatrix} y_j(t) \\ y_j'(t) \\ \vdots \\ y_j^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & & y_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Wählt man Y_j so, dass gilt $Y_j(t_0) = e_j$, so erhält man die Hauptfundamentalmatrix $\Pi(t, t_0)$ des Systems

Für die allgemeine Lösung von (*) findet man also

$$u(t) = c_1 y_1(t) + \dots \; c_n y_n(t).$$

Definition 3.23

Sind $y_1, \dots y_n \in C^n(J, \mathbb{R})$ Lösungen von (*) für die gilt

$$\det \begin{pmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} =: W(y_1, \dots y_n)(t) \neq 0 \quad \forall t \in J,$$

so bezeichnet man $\{y_1, \dots, y_n\}$ als Fundamentalsystem für (*).

Für das inhomogene Anfangswertproblem mit $g \in C(J, \mathbb{R})$

$$\left. \begin{array}{l} u^{(n)}(t) + q_{n-1}(t) u^{(n-1)}(t) + \dots + q_1(t) u'(t) + q_0(t) u(t) = g(t) \\ \text{führt die Schreibweise als System auf} \end{array} \right\} (*)$$

$$x'(t) = A x(t) + G(t) \qquad \text{mit } G(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Eine partikuläre Lösung ist gegeben durch

$$x_p(t) = Y(t) \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\, G(s)\, ds \qquad x_p(t) = \begin{pmatrix} x_{p,1}(t) \\ \vdots \\ x_{p,n}(t) \end{pmatrix}$$

und entsprechend eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (*) : $u_p(t) = x_{p,1}(t)$

Dazu muss die Matrix Y invertiert werden. Die spezielle Gestalt von G vereinfacht die entstehenden Ausdrücke. Dies ist besonders im Fall $d=2$ relevant.

Satz 3.24 Seien $q, p \in C(J, \mathbb{R})$, $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $g \in C(J,\mathbb{R})$. Sei $\{y_1, y_2\}$ ein Fundamentalsystem für die Gleichung

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = 0$$

und $W(y_1,y_2)(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)$

Dann ist die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = g(t)$$

gegeben durch

$$u(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) - y_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s)}{W(y_1,y_2)(s)} g(s)\,ds + y_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)}{W(y_1,y_2)(s)} g(s)\,ds$$

für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $t_0 \in J$.

Beweis: Siehe auch Übungen. Details

Mit der Notation von oben gilt: $X_p(t) = Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\,G(s)\,ds$

$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$ $\quad \det Y = y_1 y_2' - y_1' y_2 = W(y_1,y_2)$

$$Y^{-1} = \frac{1}{W(y_1,y_2)} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix}$$

$$Y(t)\,Y(s)^{-1} = \frac{1}{W(y_1,y_2)(s)} \begin{pmatrix} -y_2(t)\,y_1'(s) + y_1(t)\,y_2'(s) & -y_1(t)\,y_2(s) + y_2(s)\,y_2(t) \\ y_1'(t)\,y_2'(s) - y_1'(s)\,y_2'(t) & -y_2(s)\,y_1'(t) + y_1'(s)\,y_2'(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Y(t)\,Y(s)^{-1}\,G(s) = \frac{1}{W(y_1,y_2)(s)} \begin{pmatrix} (-y_1(t)\,y_2(s) + y_2(s)\,y_2(t))\,g(s) \\ (-y_2(s)\,y_1'(t) + y_1'(s)\,y_2'(t))\,g(s) \end{pmatrix}$$

Die erste Komponente von x_p ist also gegeben durch

$$x_{p,1}(t) = -y_1(t) \int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s)\,g(s)}{W(y_1,y_2)(s)}\,ds + y_2(t) \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)\,g(s)}{W(y_1,y_2)(s)}\,ds$$

und daraus folgt die Behauptung $\square$

3.3 ELEMENTARE STABILITÄTSTHEORIE FÜR AUTONOME SYSTEME

Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C(D, \mathbb{R}^d)$. Für $x \in C^1(I, D)$ betrachten wir das System

$$(*) \qquad u'(t) = f(u(t)) \qquad t \in I, \; I \subset \mathbb{R} \text{ ein Intervall},$$

wobei wir annehmen, dass f lokal Lipschitz-stetig ist um Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu garantieren.

Als STATIONÄRE PUNKTE des Systems bezeichnet man die Menge aller $x \in \mathbb{R}^d$ für die gilt $f(x) = 0$, (andere übliche Bezeichnungen sind GLEICHGEWICHTSPUNKTE, EQUILIBRIA, oder RUHELAGEN.

Definition 3.25 Sei $x^* \in \mathbb{R}^d$ ein stationärer Punkt des Systems $(*)$. Man nennt x^* (für $t \to +\infty$)

- STABIL $:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, so dass für alle $u_0 \in \mathbb{R}^d$ mit $|u_0 - x^*| < \delta$ die Lösung $u(t; u_0)$ existiert für alle $t \in [t_0, \infty)$ und es gilt
  $$|u(t; u_0) - x^*| < \varepsilon \qquad \forall t \geq t$$
  KORR. 28.01 !
- INSTABIL $:\Leftrightarrow$ x^* nicht stabil ist
- ATTRAKTIV $:\Leftrightarrow$ $\exists \delta > 0$, so dass für alle $u_0 \in \mathbb{R}^d$ mit $|u_0 - x^*| < \delta$ die Lösung $u(t; u_0)$ existiert für alle $t \in [t_0, \infty)$ und es gilt
  $$\lim_{t \to \infty} u(t; u_0) = x^*$$

·) ASYMPTOTISCH STABIL, falls x^* stabil und attraktiv ist

Beachte: Es läßt sich kein allgemein gültiger Zusammenhang zwischen stabil und attraktiv herstellen
(es gibt jeweils Beispiele, wo die eine Eigenschaft erfüllt ist, die andere jedoch nicht)

Für $t \to -\infty$ lassen sich die obigen Stabilitätsbegriffe genauso definieren. Wir verzichten aber darauf und betrachten Stabilitätseigenschaften ausschließlich für $t \to +\infty$.

Beispiel 3.26 Für jedes $a \in \mathbb{R}$ besitzt die skalare Gleichung $u'(t) = a\,u(t)$ den Gleichgewichtspunkt $x^* = 0$.
Für $u_0 \in \mathbb{R}$ und $u(0) = t_0$, ist $u(t) = e^{at} u_0$ und es gilt daher: x^* ist

·) stabil, falls $a \leq 0$, denn $|u(t;u_0)| = |u_0|\, e^{at} \leq |u_0| \leq \delta := \varepsilon$

·) instabil, falls $a > 0$, denn für $u_0 \neq 0$ gilt dann

$$\lim_{t \to \infty} |u(t;u_0)| = +\infty$$

·) attraktiv, falls $a < 0$, denn $\lim_{t \to \infty} |u(t,u_0)| = 0 \quad \forall u_0 \in \mathbb{R}^d$.

also asymptotisch stabil, falls $a < 0$.

3.3.1 LINEARE AUTONOME SYSTEME

Wir betrachten zuerst den Fall $d = 2$ („ebene Systeme") und Gleichungen der Form

$$u'(t) = A\,u(t), \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}. \qquad (*)$$

Offensichtlich ist $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Equilibrium.

Ziel ist es, die Stabilitätseigenschaften von x^* mit Hilfe der Eigenwerte von A vollständig zu charakterisieren.

Wir betrachten das charakteristische Polynom

$$\det(\lambda \mathbb{I} - A) = \lambda^2 - p\lambda + q \quad \text{mit } p := \operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22}$$

und $q := \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Es gilt $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A}{2} \pm \sqrt{\frac{(\operatorname{tr} A)^2}{4} - \det A}$$

Wir unterscheiden nun einige grundlegende Fälle:

1 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (falls $q < \frac{p^2}{4}$)

2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2$ (falls $q = \frac{p^2}{4}$)

3) $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} \in \mathbb{C}$ (falls $q > \frac{p^2}{4}$)

<u>Fall 1)</u> Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ die zugehörigen linear unabhängigen Eigenvektoren. Sei $U = (v_1 \ v_2)$.

Dann gilt $U^{-1} A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Mit $y(t) := U^{-1}u(t)$, $y_0 = U^{-1}u_0$ transformiert sich das System auf

$$y'(t) = (U^{-1} A U)\, y(t) \qquad y(0) = y_0 =: \begin{pmatrix} y_{0,1} \\ y_{0,2} \end{pmatrix}$$

und die Lösung ist gegeben durch

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} y_0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{u(t) = y_{0,1} e^{\lambda_1 t} v_1 + y_{0,2} e^{\lambda_2 t} v_2}$$

Offensichtlich gilt: Ist einer der beiden Eigenwerte positiv, so gilt $\lim_{t \to \infty} |u(t)| = +\infty$ und der triviale Gleichgewichtspunkt $x^* = \binom{0}{0}$ ist instabil. Gilt weiters $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, so ist das System asymptotisch stabil. Ist einer der beiden Eigenwerte gleich Null und der andere negativ, so ist x^* stabil.

(Beweis durch Abschätzungen analog zu Beispiel 3.25)

Fall 2 Sei $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ mit geometrischer Vielfachheit 1. Ist v_1 der Eigenvektor bzw v_2 der verallgemeinerte Eigenvektor, so gilt mit $U = (v_1, v_2)$

$$U^{-1} A U = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

und durch explizite Rechnung folgt

$$\underline{u(t) = (y_{0,1} + y_{0,2}\, t)\, e^{\lambda t} v_1 + y_{0,2}\, e^{\lambda t} v_2}$$

Wieder ist offensichtlich: Gilt $\lambda < 0$, so ist $x^* = \binom{0}{0}$ asymptotisch stabil. Gilt $\lambda > 0$, so ist x^* instabil. Ist $\lambda = 0$, so ist x^* instabil.