Programmieraufgaben

(1) Betrachten Sie das *Wilkinson-Polynom*

$$x \mapsto \prod_{i=1}^{20}(x-i) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{19}x^{19} + x^{20}.$$

Zeigen Sie numerisch, dass die Bestimmung der Nullstellen instabil ist, indem Sie die Koeffizienten a_i zufällig normalverteilt stören ($\tilde{a}_k = a_k(1 + 10^{-10} r_k)$ mit normalverteilter Zufallsvariable r_k mit Erwartungswert 0 und Varianz 1) und die entsprechenden Nullstellen plotten. (Die Nullstellen eines Polynoms können mit Hilfe des Befehls `np.roots` bestimmt werden.)

(2) Implementieren Sie den Algorithmus zur Berechnung der dividierten Differenzen sowie das Horner-Schema zur Auswertung eines Polynoms, wie im Skriptum beschrieben. Interpolieren Sie damit die Funktion

(a) $f(x) = \sin(8x^2 + 2)$ (b) $g(x) = |x|$ (c) $h(x) = 1/(1 + 100x^2)$

auf dem Intervall $[-1, 1]$ durch Polynome vom Grad n. Verwenden Sie als Stützstellen x_i zum Einen eine äquidistante Unterteilung des Intervalls und zum Anderen Chebyshev-Punkte. Bestimmen Sie die Interpolationspolynome vom Grad $n = 10$ und zeichnen Sie diese beiden Polynome mit zugehörigen Stützstellen sowie die zugrundelegende Funktion jeweils in einen Plot.

Theorieaufgaben

(3) Bestimmen Sie den Verfahrensfehler der (einseitigen) Approximation

$$f'(x) \approx \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h}.$$

Implementieren Sie die Näherung der Ableitung durch obige Formel sowie durch den Differenzenquotienten (Skript S.43 ff.) in python. Diskutieren Sie die beiden Approximationen am Beispiel $f(x) = \mathrm{e}^x$, $h = 10^{-j}$, $j = 0, 1, \ldots, 16$ an der Stelle $a = 1$. Berechnen Sie die Beträge der absoluten Fehler und stellen Sie diese tabellarisch sowie in einem doppelt-logarithmischen Plot dar.

(4) Zeigen Sie für gegebene paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ und zugehörigen Funktionswerten $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, dass für die dividierten Differenzen gilt:

$$\delta^j y_k = \sum_{i=k}^{k+j} \frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{s=k \\ s\neq i}}^{k+j}(x_i - x_s)} \quad \text{für} \quad k = 0, \ldots, n-j,\ j = 1, \ldots, n\,.$$

Hinweis: Induktion nach j.

(5) Sei $p(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ ein Polynom vom Grad n. Das Horner-Schema zur Berechnung von $b_0 = p(x_0)$ lautet

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_i &= a_i + x_0 b_{i+1}, \qquad i = n-1, n-2, \ldots, 1, 0. \end{aligned}$$

Bezeichne $q(x) = b_1 + b_2 x + \ldots + b_n x^{n-1}$.

(a) Zeigen Sie die Identitäten $p(x) = b_0 + (x - x_0)q(x)$ sowie $p'(x_0) = q(x_0)$.

(b) Erweitern Sie obiges Horner-Schema so, dass $p(x_0)$ und $p'(x_0)$ gleichzeitig berechnet werden können.

(c) Berechnen Sie per Hand mit dem erweiterten Horner-Schema gleichzeitig die Funktionswerte $p(2)$ sowie $p'(2)$ für $p(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 6x - 7$.