1.3.2 TRENNUNG DER VARIABLEN

Wir betrachten im Folgenden skalare Differential-gleichungen der Form

$$u'(t) = g(t)\, f(u(t))$$

für gegebene Funktionen g, f. Man nennt eine solche Gleichung Differentialgleichung mit GETRENNTEN VARIABLEN.

Beispiel 1.3 (LOGISTISCHES WACHSTUM)

Das Modell aus Beispiel 1.1 führt zu unbegrenztem Wachstum, was wegen der Begrenztheit von Resourcen oft kein realistisches Modell ist. Realistischer ist das

LOGISTISCHE WACHSTUM

$$u'(t) = a\, u(t) \left(1 - \frac{u(t)}{u_\infty}\right)$$

für $a > 0$ und $u_\infty > 0$, die „Kapazität". (gegebene Konstante)

Wir lösen im folgenden das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= a u(t) \left(1 - \frac{u(t)}{u_\infty}\right) \qquad t > 0 \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.4)$$

Ist $u_0 = 0$ oder $u_0 = u_\infty$ so löst $u(t) = 0$ bzw. $u(t) = u_\infty\ \forall t$ das Problem. Sei nun $u_0 > 0$ und $u_0 \neq u_\infty$. Wir nehmen an es gibt eine Lösung $u \in C^1([0, t_0])$ für ein $t_0 > 0$

Aufgrund der Stetigkeit von u $\exists$ $t_1 > 0$, so dass $u(t) > 0$ und $u(t) \neq u_\infty$ für alle $t \in [0, t_1]$.

Aus der Gleichung folgt dann für $s \in [0, t]$ $t \leq t_1$

$$\frac{u'(s)}{(u_\infty - u(s))\, u(s)} = \frac{a}{u_\infty}$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{a}{u_\infty} ds = \frac{ta}{u_\infty} = \int_0^t \frac{u'(s)}{(u_\infty - u(s))\, u(s)} ds$$

Substitution $x = u(s)$

$$= -\int_{u_0}^{u(t)} \frac{dx}{x(x - u_\infty)} = \frac{1}{u_\infty} \log \frac{|x|}{|x - u_\infty|} \Big|_{u_0}^{u(t)}$$

$$\Rightarrow \log \frac{|u(t)|}{|u(t) - u_\infty|} = at + \log \frac{u_0}{|u_0 - u_\infty|}$$

$$\Rightarrow \frac{|u(t)|}{|u(t) - u_\infty|} = e^{at} \frac{u_0}{|u_0 - u_\infty|} .$$

Da $u(t) \neq u_\infty$ $\forall$ $t \in [0, t]$ gilt $u_0, u(t) > u_\infty$ oder $u_0, u(t) < u_\infty$ auf $[0, t]$. Also gilt

$$u(t) = (u(t) - u_\infty)\, e^{at} \frac{u_0}{u_0 - u_\infty}$$

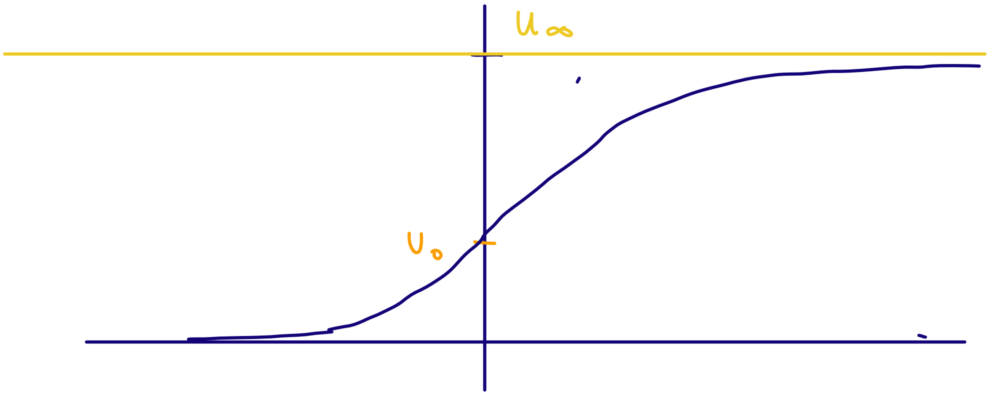
Ausrechnen

$$\Rightarrow \quad u(t) = \frac{u_0 u_\infty}{u_0 + (u_\infty - u_0)\, e^{-at}}$$

Einsetzen in die Gleichung zeigt, dass $u(t)$ die Gleichung löst (nicht nur auf einem Intervall, sondern für alle $t \geq 0$).

Insbesondere finden wir

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = u_\infty$$



Die Lösungsmethode, die wir hier angewendet haben, läßt sich für Gleichungen vom Typ „getrennte Variablen" systematisieren.

Unser Ziel ist es im Folgenden Anfangswertprobleme der Form

$$\boxed{\begin{aligned} u'(t) &= g(t)\, f(u(t)), \quad t > 0 \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}}$$

zu lösen. Die Einschränkung auf $t > 0$, sowie die Festlegung der Anfangsbedingung bei $t_0 = 0$ dient der Vereinfachung in der Notation, siehe Bemerkung

Seien $-\infty \le a < b \le +\infty$, $f \in C((a,b))$, $g \in C([0,\infty))$ und $u_0 \in (a,b)$.

Gilt $f(u_0) = 0$, so ist $u(t) = u_0 \ \forall\, t \geq 0$ stets eine Lösung. Diese ist aber unter Umständen nicht eindeutig (siehe Beispiel später).

Sei also $f(u_0) \neq 0$. Da f stetig ist gilt $f(x) \neq 0$ für ein $\delta > 0$ und $x \in (u_0 - \delta, u_0 + \delta) \subset (0, b)$.

Sei $I \subset (0,b)$ das größte Intervall mit $u_0 \in I$ und $f(x) \neq 0 \ \forall\, x \in I$. Wir definieren

$$F : I \to \mathbb{R} \qquad F(y) = \int_{u_0}^{y} \frac{dx}{f(x)}\, dx$$

$$G : [0, \infty) \to \mathbb{R} \quad G(t) = \int_0^t g(s)\, ds$$

Da f stetig ist, ist $f(I)$ wieder ein Intervall (Analysis 1) und es gilt $f(x) > 0$ oder $f(x) < 0 \ \forall x \in I$

Außerdem gilt
$$F'(x) = \frac{1}{f(x)}$$

$\Rightarrow$ F ist auf I streng monoton wachsend oder fallend $\Rightarrow$ Es existiert die Umkehrfunktion

$$F^{-1} : J := F(I) \to I,$$ wobei J ein Intervall ist mit $0 = F(u_0) \in J$. Außerdem ist 0 kein Randpunkt von J (Monotonie).

Außerdem gilt $G(0) = 0 \in J$ und da G stetig ist gibt es $t > 0$ mit $G([0,t]) \subset J$.

Sei $T := \sup\{t \geq 0 : G([0,t]) \subset J\} \Rightarrow G([0,T)) \subset J$ und $T \in (0,\infty]$.

Wir erhalten somit folgenden Satz.

Satz 1.4

Unter den obigen Voraussetzungen, insbesondere $f(u_0) \neq 0$, und Definitionen löst

$$u = F^{-1} \circ G \in C^1([0,T))$$

das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= f(u(t))g(t) \qquad t > 0 \\ u(0) &= u_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \quad (1.5)$$

Dabei gilt

$$F(u(t)) = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{dx}{f(x)} = \int_0^t g(s)ds = G(t) \qquad t \in [0,T).$$

Sei $v \in C^1([0,t_1))$ eine Lösung von (1.5) für ein $t_1 > 0$. Setze $T_1 := \min\{t_1, T\}$. Für alle $t \in [0, T_1)$ gilt dann $f(v(t)) \neq 0$ und $u(t) = v(t)$. Insbesondere ist u die einzige Lösung auf $[0,T)$.

Beweis:

$u = F^{-1} \circ G$ löst die Gleichung, denn

$$u'(t) = (F^{-1})'(G(t))\, G'(t) = \frac{g(t)}{F'(u(t))} = g(t)\, f(u(t))$$

Zur Eindeutigkeit: Sei $v \in C^1([0, t_1))$ eine Lösung. Da $f(v(0)) = f(v_0) \neq 0$ gilt wegen der Stetigkeit von $f \circ v$

$f(v(s)) \neq 0 \quad \forall s \in [0, t_0]$ für ein $t_0 \in [0, t_1)$.

Insbesondere ist $v(s) \in I$.

Sei $0 \leq s \leq t \leq t_0$. Aus der Gleichung erhalten wir

$$\frac{v'(s)}{f(v(s))} = g(s)$$

Mit Integration und Substitution folgt (da $v(0) = u_0$)

$$G(t) = \int_0^t g(s)\,ds = \int_0^t \frac{v'(s)}{f(v(s))}\,ds = \int_{u_0}^{v(t)} \frac{dx}{f(x)} = F(v(t))$$

Da $v(t) \in I \Rightarrow G(t) \subset J \Rightarrow t_0 < T$ und $u(t) = v(t)$.

Durch Bildung des Supremo über solche t_0 folgt die Behauptung

$\square$

Beispiel 1.5

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= u(t) \\ u(0) &= u_0 > 0 \end{aligned}\right\}$$

Mit der obigen Notation gilt $f(u) = u$, $g(t) = 1$

$I = (0, \infty)$, $G(t) = t$

$$F(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{1}{x}\,dx = \log\left(\frac{u}{u_0}\right) \quad \Rightarrow F(I) = (-\infty, \infty) =: J$$

$$\Rightarrow G(t) \subset J \;\forall\, t \geq 0$$

$\Rightarrow u(t) = u_0 e^t \quad \forall\, t \geq 0$ (und auch für alle $t < 0$!)

Beispiel 1.6 Die Wahl der Anfangsbedingung in Satz 1.4 bei $t_0 = 0$ ist willkürlich. Insbesondere kann der Satz somit Beweis sofort für eine Anfangsbedingung $u(t_0) = u_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ formuliert werden. Statt $t > 0$ (bzw. $t > t_0$) kann man die Lösung mit der Methode auch für $t < 0$ $(t < t_0)$ konstruieren und erhält ein maximales Existenzintervall (T_-, T_+).

Dabei sind $T_- \geq -\infty$ und $T_+ \leq +\infty$ so, dass $t_0 \in (T_-, T_+)$ und es gilt

$$G([t_1, t_2]) \subset F(I) \qquad \forall \quad T_- < t_1 < t_2 < T_+ .$$

Ist die Anfangsbedingung $u(t_0) = u_0$ nicht weiter spezifiziert, so müssen unter Umständen verschiedene Fälle (z.B.: $u_0 > 0$, $u_0 < 0$) unterschieden werden um verschiedene „Lösungszweige" zu finden (bzw. man schränkt sich vorab auf eine Bedingung an u_0 ein).

Bemerkung 1.7

In der Praxis kürzt man in der Anwendung der Methode der Trennung der Variablen oft saloppeweise ab (dies führt schnell auf eine formale allgemeine Lösung).

Betrachte beispielsweise das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= 3t^2 u(t) \\ u(0) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Wir suchen zunächst allgemeine Lösungen von

$$u'(t) = 3t^2 u(t) \qquad (*)$$

Wir rechnen $\frac{du}{dt} = 3t^2 u \Rightarrow \int \frac{1}{u}\,du = \int 3t^2\,dt$

$$\log|u| = t^3 + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$|u(t)| = e^{t^3}\tilde{c} \qquad \tilde{c} = e^c$$

$$u(t) = \pm \tilde{c}\, e^{t^3} \qquad \tilde{c} > 0$$

Weiters ist $u(t) = 0$ eine Lösung der Gleichung, d.h. alle Lösungen von $(*)$ sind von der Form

$$u(t) = \alpha e^{t^3} \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Nun setzen wir die Anfangsbedingung ein und legen damit α fest: $u(0) = \alpha e^0 = \alpha = 1$

Also löst $\underline{u(t) = e^{t^3}}$ das Anfangswertproblem (α) $\forall t \in \mathbb{R}$.