(1) Banachräume von Lipschitz-Funktionen: Wir betrachten einen metrischen Raum (M, ρ) und fixieren einen Punkt $e \in M$. Eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig, falls

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\rho(x, y)} < \infty$$

gilt. Sie erfüllt dann $|f(x) - f(y)| \leq \mathrm{Lip}(f)\rho(x, y)$ für alle $x, y \in M$. Wir betrachten den Vektorraum $\mathrm{Lip}_0(M) = \{f\colon M \to \mathbb{R}\colon f \text{ Lipschitz und } f(e) = 0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\|f\|_{\mathrm{L}} := \mathrm{Lip}(f)$ eine Norm auf $\mathrm{Lip}_0(M)$ definiert.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathrm{Lip}_0(M), \|f\|_{\mathrm{L}})$ ein Banachraum ist.
Hinweis: Verwenden Sie, dass punktweise konvergente Folgen von Lipschitz-Funktionen mit beschränkter Lipschitz-Konstante wieder Lipschitz sind, für $x \in M$ die Abschätzung $|f(x)| \leq \|f\|_L\, \rho(x, e)$ und Aufgabe 5 von Blatt 7.

(2) Summierbare Mengen und Orthonormalbasen: Wir betrachten Schranken an die Kardinalität von summierbaren Mengen.

(a) Es sei $A \subset [0, \infty)$ eine Menge mit $\sum_{a \in A} a < \infty$. Zeigen Sie, dass A höchstens abzählbar ist.
Hinweis: Wie groß kann die Menge $A_\varepsilon := \{a \in A\colon a > \varepsilon\}$ für fixes $\varepsilon > 0$ sein?

(b) Verwenden Sie die Bessel-Ungleichung, um zu schließen, dass für eine Orthonormalbasis $(x_i)_{i \in I}$ in einem Hilbertraum X für jedes $x \in X$ höchstens abzählbar viele Koeffizienten $\langle x, x_i \rangle \neq 0$ sind.

(3) Darstellungen der Operatornorm: Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und $T\colon X \to Y$ ein beschränkter Operator. Zeigen Sie

$$\|T\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \in S_X} \|Tx\|_Y = \inf\{C > 0\colon \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X\},$$

wobei $S_X = \{x \in X\colon \|x\| = 1\}$ die Einheitssphäre in X bezeichnet.

(4) Separable Hilberträume:

(a) Zeigen Sie, dass ein separabler Hilbertraum eine abzählbare Orthonormalbasis besitzt.
Hinweis: Für eine Orthonormalbasis $(x_i)_{i \in I}$ gilt $\|x_i - x_j\| = \sqrt{2}$ für $i \neq j$.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge der Linearkombinationen von Funktionen der Form $q\chi_{[a,b]}$ mit $a, b, q \in \mathbb{Q}$ und $0 \leq a \leq b \leq 1$ ein abzählbare dichte Teilmenge von $L^2[0, 1]$ bilden. Schließen Sie daraus, dass eine lineare Isometrie zwischen $L^2([0, 1])$ und $\ell^2(\mathbb{N})$ gibt.

(5) Isomorphismen zwischen Banachräumen: Wie betrachten

$$c = \left\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\colon \lim_{n \to \infty} a_n \text{ existiert}\right\}$$

versehen mit der Supremumsnorm $\|a\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$.

(a) Zeigen Sie, dass $K := \{\frac{1}{n}\colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, versehen mit der von der natürlichen Topologie von $\mathbb{R}$ auf K induzierten Topologie, kompakt ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $C(K) \to c, f \mapsto (f(1/n))_{n \in \mathbb{N}}$ ein Isomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$c \to c_0, \qquad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (\lim_{n \to \infty} a_n, a_1 - \lim_{n \to \infty} a_n, a_2 - \lim_{n \to \infty} a_n, \ldots)$$

ein Isomorphismus ist.