Komplexe Analysis
(Ahd. Funktionentheorie)

Version WS 24/25

Karin Schnass

korrigierte Fehler 4.8
4.16

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Komplexe Zahlen und Funktionen

1.1 Die komplexen Zahlen als Körper

Wir wiederholen schnell, was wir in *Lineare Algebra 1* über die komplexen Zahlen gelernt haben und dort im Detail nachlesen können. Wir definieren auf $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ eine Addition und eine Multiplikation via

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{1.1}$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{1.2}$$

und bekommen damit einen Körper, genannt die komplexen Zahlen, bezeichnet mit $\mathbb{C}$.
Um die Notation überschaubar zu halten, identifizieren wir $(x, 0)$ mit der reellen Zahl x und $(0, 1)$ mit dem Symbol i, und bekommen aus den Rechenregeln in (1.1) bzw. (1.2)

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) \mathrel{\widehat{=}} x + \mathrm{i} \cdot y := x + \mathrm{i}y$$

sowie $\mathrm{i}^2 := \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$. Im alltäglichen Sprachgebrauch deutet komplexe Zahlen auf die kompakte Schreibweise hin, während sich komplexe Ebene auf die Menge der Tupel in $\mathbb{R}^2$ (mit der dazugehörigen Addition und Multiplikation im Hintergrund) bezieht.
Für eine komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ definieren wir den Realteil $\mathrm{Re}(z)$, den Imaginärteil $\mathrm{Im}(z)$, den Betrag $|z| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$ als

$$\mathrm{Re}(z) := x, \qquad \mathrm{Im}(z) := y, \qquad |z| := \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \bar{z} := x - \mathrm{i}y. \tag{1.3}$$

Weiters definieren wir ganzzahlige Potenzen von komplexen Zahlen rekursiv, also $z^0 := 1$ und für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$z^n := z \cdot z^{n-1} \quad \text{bzw.} \quad z^{-n} := (z^n)^{-1} \quad \text{für } z \neq 0.$$

Lemma 1.1 (Rechnen in $\mathbb{C}$).
Es gelten die folgenden nützlichen Rechenregeln und Abschätzungen, für $z, a, b \in \mathbb{C}$:

(a) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ *und* $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

(b) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ *und* $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$

(c) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

(d) $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$ *und* $\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$.

(e) $|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0.$

(f) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(g) $|a + b| \leq |a| + |b|.$

Aufgabe: (Lisa) Zeige, die obigen Rechenregeln und Abschätzungen.
Aufgabe: (Philipp/David) Zeige, dass für $z \neq 0$ gilt

$$z^{-1} = \bar{z}/|z|^2, \quad |z^{-1}| = |z|^{-1} \quad \text{und} \quad \overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1},$$

bzw. dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n \quad \text{und} \quad |z^n| = |z|^n.$$

1.2 Topologie & Konvergenz in $\mathbb{C}$

Der Betrag $|\cdot|$ in $\mathbb{C}$ entspricht der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ in $\mathbb{R}^2$ und damit ist $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ eine Metrik. Alternativ sehen wir das direkt aus den Eigenschaften (d-f) von Lemma1.1. Um topologische Konzepte wie offen, abgeschlossen, kompakt, Konvergenz, Häufungspunkte, etc in $\mathbb{C}$ zu behandeln bietet es sich also an die komplexen Zahlen mit der reellen Ebene zu identifizieren und alle Konzepte von dort zu übernehmen.

Definition 1.2 (offene/abgeschlossene Mengen).
Eine Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann offen, wenn sie aufgefasst als Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen ist, also genau dann wenn

$$\forall z_0 \in U \; \exists \varepsilon > 0 \; : \; B_\varepsilon(z_0) := \{z : |z - z_0| < \varepsilon\} \subseteq U.$$

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt abgeschlossen, falls ihr Komplement offen ist.

Aufgabe: (Philipp/David) beliebige Vereinigungen und endliche Schnitte von offenen Mengen sind offen, beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen, $B_\varepsilon(z_0)$ ist offen, $\bar{B}_\varepsilon(z_0) := \{z : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen.

Definition 1.3 (Abschluss, Inneres, Rand).
Für eine beliebige Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ ist ihr Abschluss $\bar{M}$ die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält, ihr Inneres M° die grösste offene Menge, die in M enthalten ist, und ihr Rand ∂M ihr Abschluss ohne ihr Inneres $\partial M = \bar{M} \backslash M^\circ$,

$$\bar{M} := \bigcap_{\substack{A:A \text{ abg.} \\ M \subseteq A}} A, \qquad M^\circ := \bigcup_{\substack{U:U \text{ offen} \\ U \subseteq M}} U, \qquad \partial M := \bar{M} \backslash M^\circ. \tag{1.4}$$

Aufgabe: (Eleni) Zeige $(M^\circ)^c = \overline{(M^c)}$.

Definition 1.4 (Konvergenz, Cauchyfolgen).
Eine Folge von komplexen Zahlen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, wenn $z \in \mathbb{C}$ mit $\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$ existiert, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; : \; |z_n - z| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N, \tag{1.5}$$

oder anders formuliert

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; : \; z_n \in B_\varepsilon(z) \quad \forall n \geq N. \tag{1.6}$$

Wir sagen in dem Fall das z_n gegen (den Grenzwert) z konvergiert, symbolisch $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, $\lim z_n = z$ bzw. $z_n \to z$.
Eine Folge von komplexen Zahlen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge falls

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} \,:\, |z_n - z_m| \leq \varepsilon \quad \forall n, m > N.$$

Aufgabe: (Valentin) Zeige dass $z_n \to z$ genau dann wenn $\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z)$ in $\mathbb{R}$.

Aufgabe: (Valentin) Zeige, dass der Grenzwert eindeutig ist, d.h. falls $z_n \to z$ und $z_n \to z_0$, dann gilt $z = z_0$.

Aufgabe: (Charlotte) Zeige, dass $\mathbb{C}$ vollständig ist, d.h. jede Cauchyfolge konvergiert.

Aufgabe: (Charlotte) Zeige, dass wir in der Definition oben $B_\varepsilon(z)$ durch beliebige offene Mengen U mit $z \in U$ ersetzen könnten, ohne etwas zu ändern, also $z_n \to z$ genau dann wenn

$$\forall U \text{ offen mit } z \in U\, \exists N \in \mathbb{N} \,:\, z_n \in U, \quad \forall n \geq N. \tag{1.7}$$

Definition 1.5 (Häufungspunkt).
Ein Punkt z heißt Häufungspunkt der Menge $M \subseteq \mathbb{C}$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$M \cap \dot{B}_\varepsilon(z) \neq \emptyset \qquad \textit{wobei} \quad \dot{B}_\varepsilon(z) = B_\varepsilon(z) \setminus \{z\}.$$

Aufgabe: (Lukas) Zeige, dass z genau dann Häufungspunkt der Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ ist, wenn eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $z_n \in M$, $z_n \neq z$ existiert, sodass $z_n \to z$.

Aufgabe: (Richard) Der Abschluss einer komplexen Menge, ist die Menge vereinigt mit der Menge ihrer Häufungspunkte, d.h. $A \subseteq C$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für alle Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \in A$ und $z_n \to z$ gilt $z \in A$.

Definition 1.6 (kompakte Mengen).
Eine Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ heißt kompakt, genau dann wenn sie eine der folgenden drei äquivalenten Eigenschaften besitzt.

(a) Jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \in K$ besitzt eine in K konvergente Teilfolge, d.h. $z_{n_k} \to z \in K$.

(b) K ist abgeschlossen und beschränkt, d.h. $\bar{K} = K$ und $\sup_{z\in K} |z| < \infty$.

(c) Jede offene Überdeckung von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

Aufgabe: (Tilman) Zeige die Äquivalenz von (a) und (b).

Aufgabe*: Zeige die Äquivalenz von (c) zu (a) oder (b), also den Satz von Heine-Borel.

Satz 1.7 (Rechenregeln für lim in $\mathbb{C}$).
Für zwei komplexe Folgen $(a_n)_{n\in N}, (b_n)_{n\in N}$ mit $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ und $c, d \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n + d \cdot b_n) = c \cdot a + d \cdot b$,

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

(c) $\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n) = a/b$, *falls* $b, b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$,

(d) $\lim |a_n| = |a|$,

(e) $\lim \bar{a}_n = \bar{a}$.

Aufgabe: (Mia/Eugenie) Beweise Satz 1.7

Definition 1.8 (Reihen).
Für eine komplexe Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt die assoziierte Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *konvergent, falls die Folge der Partialsummen* $s_k := \sum_{n=1}^{k} z_n$ *gegen ein* $c \in \mathbb{C}$ *konvergiert, in dem Fall setzen wir*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} z_n = \lim_{k\to\infty} s_k = c.$$

Die Reihe heißt absolut konvergent, falls die (reelle) Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *konvergiert.*
(Analog für $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$*, etc.)*

Lemma 1.9 (Eigenschaften von Reihen).

(a) Sind $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *zwei konvergente komplexe Reihen und* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *dann ist auch* $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha z_n + \beta c_n)$ *konvergent und es gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha z_n + \beta c_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

(b) Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Aufgabe: (Hannes) Zeige Lemma 1.9.

1.3 Komplexe Funktionen

Wir beginnen mit der Definition von Stetigkeit von Funktionen mit Definitions- oder Wertebereich in $\mathbb{C}$ einfach indem wir wieder $\mathbb{C}$ mit $|\cdot|$ als $\mathbb{R}^2$ mit $\|\cdot\|_2$ auffassen.

Definition 1.10 (stetige komplexe Funktionen).
Sei $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C}$*. Eine Funktion* $f : U \to \mathbb{C}$ *heißt stetig in* $z_0 \in U$*, symb.* $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$*, falls sie aufgefasst als Funktion von* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *nach* $\mathbb{R}^2$ *in* $z_0 = (x_0, y_0)$ *stetig ist, d.h. falls*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \;:\; |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \forall z \in U \text{ mit } |z - z_0| \leq \delta,$$

oder umformuliert

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \;:\; f(z) \in B_\varepsilon(f(z_0)) \quad \forall z \in B_\delta(z_0) \cap U.$$

Die Funktion heißt stetig (in U*), falls sie stetig für alle* $z_0 \in U$ *ist.*
Falls $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist oder umgekehrt die Funktion nach* $\mathbb{R}^n$ *statt nach* $\mathbb{C}$ *geht, definieren wir Stetigkeit analog, indem wir geeignet* $|\cdot|$ *durch* $\|\cdot\|_2$ *ersetzen bzw. die Definition von* $B_\varepsilon(f(z_0))$ *oder* $B_\delta(z_0)$ *anpassen. Im Folgenden wird meistens entweder* $U \subseteq \mathbb{C}$ *offen sein oder* $U = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$*.*

Aufgabe: (Raphael) Zeige, dass $f : U \to \mathbb{C}$ genau dann in $z_0 \in U$ stetig ist, falls für alle Folgen $(z_n)_{n\in N}$ aus U mit $\lim_n z_n = z_0$ gilt $\lim_n f(z_n) = f(z_0)$.

Aufgabe: (Raphael) Zeige, dass für U offen die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ genau dann stetig ist, wenn Urbilder offener Mengen offen sind, also $f^{-1}(O)$ ist offen für alle $O \subseteq \mathbb{C}$ offen.

Satz 1.11 (Eigenschaften stetiger Funktionen).
Für $U \subseteq \mathbb{C}$ *seien* $f, g : U \to \mathbb{C}$ *zwei stetige Funktionen und* $c, d \in \mathbb{C}$

(a) Die Funktionen $c \cdot f + d \cdot g$ und $f \cdot g$ sind stetig.

(b) Die Funktion $1/f$ ist stetig, wo definiert, d.h auf $U \setminus f^{-1}(\{0\})$.

(c) Verknüpfungen stetiger Funktionen sind stetig, d.h. für $V \subseteq \mathbb{R}^n$ bzw. $V \subseteq \mathbb{C}$ und $h_1 : V \to U$ bzw. $h_2 : f(U) \to \mathbb{R}^n$ stetig gilt, $f \circ h_1$ und $h_2 \circ f$ sind stetig.

(d) Betrag $|\cdot|$ und komplexe Konjugation $z :\mapsto \bar{z}$ sind stetig auf ganz $\mathbb{C}$.

Aufgabe: (Remo/Luis) Beweise Satz 1.11.

Aufgabe: (Marco) Zeige, dass komplexe Polynomfunktionen auf ganz $\mathbb{C}$ und rationale Funktionen dort wo definiert stetig sind.

Definition 1.12 (Potenzreihe).
Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ ist eine Potenzreihe ein Ausdruck der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Die Potenzreihe heißt konvergent in z (in $U \subseteq \mathbb{C}$), wenn die Folge der Partialsummen $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n(z - z_0)^n$ konvergiert (für alle $z \in U$).

Lemma 1.13 (Konvergenzradius von Potenzreihen, Stetigkeit).
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergiert (absolut) für alle $z \in B_R(z_0)$, also $|z - z_0| < R$ wobei

$$R := \frac{1}{\limsup_n |a_n|^{1/n}} \in [0, \infty].$$

R heißt Konvergenzradius. Die Konvergenz ist gleichmäßig in $\bar{B}_r(z_0)$ für alle $0 \le r < R$. Desweiteren ist die durch die Potenzreihe definierte Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ stetig auf $B_R(z_0)$.

Aufgabe: (Stefan) Beweise Lemma 1.13.
Aufgabe: (Clemens) Berechne den Konvergenzradius, für die folgenden Potenzreihen:

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (c)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad (d)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Für (a) berechne den Grenzwert für alle z innerhalb des Konvergenzradius.

Definition 1.14 (analytisch).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt analytisch in $z_0 \in U$, falls $\rho > 0$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ existieren, sodass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \forall z \in B_\rho(z_0) \cap U,$$

d.h. f kann lokal um z_0 als Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \ge \rho$ geschrieben werden. Die Funktion f heißt analytisch in U, falls sie analytisch für alle $z_0 \in U$ ist.

Aufgabe: (Hannes) Seien $g, f : U \to \mathbb{C}$ zwei Funktionen, die analytisch in $z_0 \in U$ sind. Zeige, dass für $\alpha, \beta in \mathbb{C}$ auch $\alpha g + \beta f$ analytisch in z_0 ist.

Definition 1.15 (Integrale komplexwerter Funktionen).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *eine Borel-messbare Funktion. Wir sagen, dass* f *integrierbar ist falls* $|f| : \Omega \to \mathbb{R}$ *integrierbar ist, also* $\int |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$ *und setzen in diesem Fall*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \int \mathrm{Re} f \, \mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int \mathrm{Im} f \, \mathrm{d}\mu,$$

wobei $\mathrm{Re} f : \Omega \to \mathbb{R}$ *mit* $z \mapsto \mathrm{Re}(f(z))$ *und analog für* $\mathrm{Im} f$*.*

Aufgabe: (Theresa/Aylin) Zeige, dass $f : \Omega \to \mathbb{C}$ genau dann messbar ist, wenn $\mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar sind und dass f genau dann integrierbar ist, wenn $\mathrm{Re} f$ und $\mathrm{Im} f$ integrierbar sind.

Aufgabe: (Moritz/Noah) Zeige den Satz von der dominierten Konvergenz für komplexwertige Funktionen.

Aufgabe: (Felix) Zeige, dass für eine stückweise stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ gilt, dass

$$\int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_a^b \mathrm{Re} f \, \mathrm{d}x + \mathrm{i} \int_a^b \mathrm{Im} f \, \mathrm{d}x.$$

Aufgabe: (Moritz/Noah) Zeige, dass für zwei integrierbare (stückweise stetige) Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt,

$$\int_{[a,b]} \alpha f + \beta g \, \mathrm{d}\lambda = \alpha \int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\lambda + \beta \int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}\lambda.$$

Aufgabe: (Theresa/Aylin) Zeige, dass für $f : \Omega \to \mathbb{C}$, integrierbar, und $\bar{f} : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto \overline{f(z)}$ gilt

$$\int \bar{f} \, \mathrm{d}\mu = \overline{\int f \, \mathrm{d}\mu}.$$

Aufgabe: (Moritz/Noah) Zeige, dass für $f : \Omega \to \mathbb{C}$ integrierbar gilt

$$\left| \int f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

1.4 $\exp, \cos, \sin, \log$ auf $\mathbb{C}$

Wir erweitern nun einige Funktion, die wir bereits auf $\mathbb{R}$ kennen, auf $\mathbb{C}$.

Definition 1.16 (komplexe Exponentialfunktion).
Wir definieren die Exponentialfunktion $\exp$ *auf ganz* $\mathbb{C}$ *durch*

$$\exp(z) := e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{1.8}$$

Lemma 1.17 (Eigenschaften von $\exp$**).**
Die Exponentialfunktion ist stetig auf ganz $\mathbb{C}$ *und es gilt für* $z, w \in \mathbb{C}$

(a) $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$.

(b) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$.

(c) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$*, also insbesondere* $|e^z| = 1 \Leftrightarrow z = \mathrm{i}y$ *für* $y \in \mathbb{R}$*.*

Aufgabe: (Alexander/Mathias: a, Karin: b,c) Beweise Lemma 1.17.

Definition 1.18 (komplexer Cosinus und Sinus).
Wir definieren die Funktionen $\cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *via*

$$\cos(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} \quad \textit{bzw.} \quad \sin(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}.$$

Aufgabe: Zeige, dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix}) \in [-1, 1]$ bzw. $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix}) \in [-1, 1]$.

Lemma 1.19 (Eigenschaften von $\cos, \sin$).
Die Funktionen $\cos, \sin$ *sind stetig auf ganz* $\mathbb{C}$*, und es gilt für all* $z, w \in \mathbb{C}$

(a) $e^{\mathrm{i}z} = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)$,

(b) $\cos(-z) = \cos(z)$ *und* $\sin(z) = -\sin(-z)$,

(c) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$,

(d) $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

(e) $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$

(f) $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ *und* $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Aufgabe: (Simon/Franz) Beweise Lemma 1.19.

Lemma 1.20 (Abschätzungen für $\cos, \sin$ im Reellen).
Für $x \in (0, 2]$ *gilt*

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \qquad \textit{und} \qquad x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x. \tag{1.9}$$

Aufgabe: (Jeremias) Beweise Lemma 1.20.

Satz 1.21 (Eindeutigkeit/Definition von π).
Es gibt genau eine reelle Zahl $r \in [0, 2]$ *mit* $\cos(r) = 0$*. Wir definieren also* π *als die einzige Zahl in* $[0, 4]$ *mit* $\cos(\pi/2) = 0$.

Beweis:

Satz 1.22 (Eindeutigkeit von Polarkoordinaten).
Wir bezeichnen den Einheitskreis mit $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

(a) Die stetige Abbildung $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{T}$ *mit* $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}t}$ *ist bijektiv und durchläuft* $\mathbb{T}$ *im mathematisch positiven Sinn.*

(b) Es gilt $e^z = 1$ *genau dann, wenn* $z = 2k\pi\mathrm{i}$ *für* $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ *kann eindeutig in der Form*

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad r = |z| > 0 \quad \text{und} \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

geschrieben werden. Dabei wird φ *wird auch als Argument und* $e^{i\varphi}$ *als Phase oder komplexes Vorzeichen bezeichnet, und das Tupel* (r, φ) *als Polarkoordinaten.*

Beweis:

Aufgabe: Sei $I = [a, a+2\pi)$ bzw. $I = (a, a+2\pi]$, $a \in \mathbb{R}$, ein Intervall der Länge 2π. Zeige, dass $z \neq 0$ eindeutig in der Form

$$z = re^{\mathrm{i}\varphi} \quad \text{mit} \quad r = |z| > 0 \quad \text{und} \quad \varphi \in I$$

geschrieben werden kann.
Aufgabe: Zeige, dass für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cos(z) = 0 \iff z = \tfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \sin(z) = 0 \iff z = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe: Zeige, dass für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z + 2\pi\mathrm{i}) = \exp(z), \qquad \cos(z + 2\pi) = \cos(z) \qquad \sin(z + 2\pi) = \sin(z). \tag{1.10}$$

Aufgabe: Zeige, dass für $c \in \mathbb{C}, c \neq 0$ die Gleichung $z^n = c$ genau n verschiedene Lösungen besitzt und dass im Fall $n = 2$ für die Lösungen z_1, z_2 gilt $z_1 = -z_2$.

Satz 1.23 (Surjektivität von $\exp, \cos, \sin$**).**
Wir bezeichnen mit $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *die Menge der komplexen Einheiten. Es gilt:*

(a) Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ *ist surjektiv.*

(b) Die Funktionen $\cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *sind surjektiv.*

Beweis:

Definition 1.24 (geschlitzte Ebene $\mathbb{C}^-$, Hauptzweig des Logarithmus).
Wir bezeichnen die Menge der komplexen Zahlen mit positivem Realteil als die geschlitzte Ebene,

$$\mathbb{C}^- = \{re^{\mathrm{i}\varphi} : r > 0, \varphi \in (-\pi, \pi)\} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) < 0\}^c.$$

Die Abbildung $\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ *mit*

$$z = re^{\mathrm{i}\varphi} \mapsto \log(r) + \mathrm{i}\varphi, \quad \textit{wobei} \quad \varphi \in (-\pi, \pi)$$

heißt Hauptzweig des Logarithmus.

Aufgabe: Zeige, dass das Hauptargument $\arg : C^- \to (-\pi, \pi)$ mit $z = re^{\mathrm{i}\varphi} \mapsto \varphi$ stetig ist und folgere daraus die Stetigkeit des Hauptzweigs des Logarithmus. Hinweis: Verwende, dass $\arg(z) = \arg(z/|z|)$ und dass der Cosinus auf $(-\pi, 0)$ bzw. $(0, \pi)$ stetig und monoton ist, also auch seine Umkehrfunktion stetig und monoton ist.

Aufgabe: Zeige, dass für $z, w \in \mathbb{C}^-$ mit $z \cdot w \in C^-$ gilt

$$\log(zw) = \log(z) + \log(w) + 2\pi\mathrm{i}\eta \quad \text{für} \quad \eta \in \{-1, 0, 1\}.$$

Andere Zweige des Logarithmus und einen Beweis, dass $\mathbb{C}^-$ in gewisser Weise schon der größte Bereich ist, auf dem wir den Logarithmus sinnvoll (stetig) definieren können, werden wir später kennenlernen.

Mit Hilfe des Hauptzweigs können wir nun auch allgemeine Potenzen definieren. Allerdings gehen dabei uns dabei Potenzen von negativen Zahlen verloren.

Definition 1.25 (allgemeine Potenzen auf $\mathbb{C}^-$).
Für $\alpha \in \mathbb{C}$ *and* $z \in \mathbb{C}^-$ *definieren wir*

$$z^\alpha := e^{\alpha \log(z)}.$$

Aufgabe: Zeige, dass für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $z, w \in \mathbb{C}^-$ mit $zw \in \mathbb{C}^-$ gilt:

$$(a) \quad z^{\alpha+\beta} = z^\alpha \cdot z^\beta \qquad (b) \quad z^n = e^{n \log(z)} = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{\text{n-mal}} \qquad (c) \quad (zw)^\alpha = z^\alpha \cdot w^\alpha. \tag{1.11}$$

Aufgabe: Berechne

$$(a) \quad (1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}} \qquad (b) \quad 2^{\mathrm{i}} \qquad (c) \quad \mathrm{i}^{\sqrt{2}}.$$

Aufgabe: Berechne

$$(\mathrm{i}^{\mathrm{i}})^5 \quad \text{und} \quad (\mathrm{i}^5)^{\mathrm{i}}.$$

Kapitel 2

Komplexe Differenzierbarkeit & der Cauchy'sche Integralsatz

In diesem und den folgenden Kapiteln bezeichnet U immer eine nichtleere, offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.

2.1 Komplex differenzieren

Definition 2.1 (komplex differenzierbar, holomorph, ganz).
Sei $U \neq \emptyset$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in U$ (komplex) differenzierbar, falls ein $f'(z_0) := c \in \mathbb{C}$ existiert,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ :\ \left| \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z} - c \right| \leq \varepsilon \quad \forall z \in B_\delta(z_0),\ z \neq z_0 \tag{2.1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z} = c. \tag{2.2}$$

die Funktion f heißt (komplex) differenzierbar, falls f in jedem Punkt $z \in U$ differenzierbar ist, d.h. $f'(z)$ existiert für alle $z \in U$. Falls die dadurch auf U definierte Ableitungsfunktion f' stetig ist, heißt f holomorph (auf U). Eine auf ganz $\mathbb{C}$ (definierte und dort) holomorphe Funktion heißt ganz.

Definition 2.2 (Stammfunktion).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$. Eine differenzierbare Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$ heißt Stammfunktion von f.

Lemma 2.3 (differenzierbar $\Rightarrow$ stetig).
Sei $U \neq \emptyset$ offen. Falls die Funktion $f : U \to C$ in z_0 differenzierbar ist, ist sie in z_0 stetig.

Beweis:

Beispiel 2.4. Konstante Funktionen und die Identität sind auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar.

Beispiel 2.5. Die Funktion $k(z) = \bar{z}$ ist nirgends differenzierbar.

Satz 2.6 (Ableitungsregeln).
Seien $U, V \neq 0$ offen. Falls $f, g : U \to \mathbb{C}$ und $h : V \to \mathbb{C}$ mit $f(U) \subseteq V$ komplex differenzierbar sind, so sind für $c, d \in \mathbb{C}$ auch $cf + dg$, $f \cdot g$, f/g (wo definiert) und $h \circ g$ differenzierbar. Es gilt

(a) $(cf + dg)' = cf' + dg'$,

(b) $(fg)' = f'g + fg'$,

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$,

(d) $(h \circ g)' = (g' \circ f) \cdot f'$, *also* $(h \circ g)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$ *für* $z \in U$.

Aufgabe: Zeige, dass Polynomfunktionen auf ganz $\mathbb{C}$ und rationale Funktionen, wo definiert, differenzierbar sind. Zeige dass für Polynome $p(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n(z-z_0)^n$ gilt

$$p'(z) = \sum_{n=1}^{N} n\, a_n(z-z_0)^{n-1}.$$

Aufgabe: Zeige, dass die Betragsfunktion $z \mapsto |z|$ nirgends differenzierbar ist.

Satz 2.7 (analytisch $\Rightarrow$ differenzierbar (unendlich oft)).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und die Funktion $f : U \to C$ in z_0 analytisch mit Konvergenzradius R, also

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \textit{für} \quad z \in B_R(z_0), \tag{2.3}$$

dann gilt:

(a) f ist auf $B_R(z_0)$ differenzierbar mit Ableitungsfunktion

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(z-z_0)^{n-1} \quad \textit{für} \quad z \in B_R(z_0). \tag{2.4}$$

(b) Die k-te Ableitung f^k auf $B_R(z_0)$ existiert und

$$a_k = \frac{f^k(z_0)}{k!}.$$

(c) Die Koeffizienten a_n in 2.3 sind eindeutig bestimmt.

Beweis:

Lemma 2.8 (Ableitung der Umkehrfunktion).
Seien U, V offen und $f : U \to V$ stetig und $g : V \to U$ differenzierbar, sowie $g \circ f = \mathrm{id}$. Falls für $w \in U$ gilt $g'(f(w)) \neq 0$, dann ist f in w differenzierbar und es gilt

$$f'(w) = \frac{1}{g'(f(w))}.$$

Aufgabe: Berechne die Ableitung von $\exp, \cos, \sin, \log$.

Aufgabe: Zeige, dass eine Funktion, die in z_0 analytisch mit Konvergenzradius R ist, eine Stammfunktion auf $B_R(z_0)$ besitzt.

Definition 2.9 (Cauchy-Riemann'sche DGL).
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ erfüllt die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, falls für

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \qquad \textit{gilt} \qquad \begin{aligned} \partial_x u &= \partial_y v \\ \partial_y u &= -\partial_x v \end{aligned} \qquad \textit{also} \qquad Df(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Satz 2.10 (komplex differenzierbar $\widehat{=}$ reell differenzierbar & Cauchy-Riemann).
Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist genau dann komplex differenzierbar in $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ falls die Funktion f_r mit

$$f_r(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re} f(x+iy) \\ \mathrm{Im} f(x+iy) \end{pmatrix}$$

in (x_0, y_0) reell differenzierbar ist und die Cauchy-Riemann'schen DGL erfüllt.

Beweis:

2.2 Gebiete, Wege, glatte Kurven & Kurvenintegrale

Definition 2.11 (zusammenhängend, Gebiet).
Eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt zusammenhängend wenn sie nicht als disjunkte Vereinigung von zwei offenen nicht-leeren Mengen geschrieben werden kann. Eine nicht-leere offene zusammenhängende Menge heißt Gebiet.

Definition 2.12 (sternförmige Gebiete).
Ein Gebiet G heißt sternförmig falls ein Punkt $z_0 \in G$ existiert, sodass für alle $z \in G$, die Verbindungsstrecke zwischen z und z_0 in G liegt, d.h. $\{sz + (1-s)z_0 \mid s \in [0,1]\} \subseteq G$.

Definition 2.13 (Weg/Kurve, weg-zusammenhängend, einfache/r Kurve/Weg).
Eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt Weg oder parametrisierte Kurve von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$. Falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ heißt der Weg (die Kurve) geschlossen. Ein nicht geschlossener Weg heißt einfach, wenn γ injektiv ist, und ein geschlossener heißt einfach, falls γ auf $[a,b)$ injektive ist.
Eine offene Menge U heißt weg-zusammenhängend, falls für alle $z, w \in U$ ein Weg $\gamma : [a,b] \to U$ existiert mit $\gamma(a) = w$ und $\gamma(b) = z$.

Lemma 2.14 (Gebiet $\widehat{=}$ offen + weg-zusammenhängend).
Eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$, $U \neq \emptyset$ ist genau dann ein Gebiet, wenn sie weg-zusammenhängend ist. Insbesondere existiert zwischen zwei Punkten eines Gebiets immer ein stückweise affiner Weg.

Beweis:

Aufgabe: Zeige, dass $\mathbb{C}^-$ und jede konvexe Teilmenge von $\mathbb{C}$ sternförmig sind.

Aufgabe: Zeige, dass $\mathbb{C}^*$ und $B_R(z_0) \setminus \bar{B}_r(z_0)$ für $0 < r < R$ Gebiete aber nicht sternförmig ist.

Definition 2.15 (stückweise glatte Kurven).
Eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt regulär parametrisierte *oder hier kurz* glatte *Kurve falls sie aufgefasst als Abbildung nach $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar ist (links- bzw, rechtsseitig in a, b) mit nicht verschwindender Ableitung, also genau dann, wenn $x, y : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $x = \mathrm{Re}(\gamma)$ und $y = \mathrm{Im}(\gamma)$ stetig differenzierbar sind, und $\gamma(t) \neq 0$ für $t \in [a,b]$. Wir setzen, dann*

$$\dot{\gamma}(t) = x'(t) + \mathrm{i}y'(t).$$

Eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt stückweise glatte Kurve, falls eine Unterteilung

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

existiert, sodass für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ die Einschränkung $\gamma_k : [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma(t)$ eine glatte Kurve ist.

Definition 2.16 (Kurvenlänge).
Für eine glatte Kurve $\gamma : [a,b] \to U$ definieren wir ihre Länge $\ell(\gamma)$ als

$$\ell(\gamma) := \int_{[a,b]} |\dot{\gamma}| \, \mathrm{d}\lambda = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| \, \mathrm{d}t. \tag{2.5}$$

Für stückweise glatte Kurven können wir diesselbe (erste) Definition wie für glatte Kurven verwenden oder äquivalent $\ell(\gamma) = \sum_{k=1}^n \ell(\gamma_k)$.

In Analysis 2 wurde die Länge eines einfachen Wegs etwas anders definiert und gezeigt, dass dies im Fall eines einfachen glatten Wegs mit der obigen Definition zusammenfällt. Insbesondere wissen wir von dort, dass zwei einfache glatte Kurven, die dasselbe Bild haben, diesselbe Kurvenlänge besitzen.
Damit wir uns noch weniger damit beschäftigen müssen, wie wir eine Kurve parametrisieren, definieren wir zuerst

Definition 2.17.
Zwei glatte Kurven $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{C}$ heißen äquivalent, $\gamma \sim \tilde{\gamma}$, wenn eine stetig differenzierbare Abbildung $\psi : [a,b] \to [\tilde{a}, \tilde{b}]$ mit $\psi' > 0$ existiert, sodass $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \psi$.

und verwenden dann oft den folgenden Satz, der sich in Analysis 2 wahrscheinlich nicht ausgegangen ist,

Satz 2.18.
Zwei einfache, glatte Kurven sind genau dann äquivalent, wenn sie das gleiche Bild und die gleiche Orientierung haben.

aber in Differentialgeometrie nachgeholt werden könnte, wenn sich das dort genug Leute wünschen.

Definition 2.19 (Kurvenintegrale).
Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a,b] \to U$ eine stückweise glatte Kurve. Das Kurvenintegral von f entlang γ ist definiert als

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z := \int_{[a,b]} (f \circ \gamma) \cdot \dot{\gamma} \, \mathrm{d}\lambda. \tag{2.6}$$

Für alle, die mit dem Lebesgueintegral auf Kriegsfuß stehen, können wir die Definition oben in 2 Schritten in Riemannintegrale umwandeln.

Aufgabe*: (Maßtheorie verwenden) Für eine stückweise glatte Kurve γ gilt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{2.7}$$

Aufgabe: Für eine glatte Kurve γ gilt mit der Notation $u = \mathrm{Re}(f), v = \mathrm{Im}(f)$ sowie $x = \mathrm{Re}(\gamma)$ und $y = \mathrm{Im}(\gamma)$

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b \Big[(u\circ\gamma)x' - (v\circ\gamma)y'\Big](t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b [\Big(u\circ\gamma)y' + (v\circ\gamma)x'\Big](t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.8}$$

Aufgabe: Zeige, dass zwei äquivalente glatte Kurven $\gamma, \tilde{\gamma}$ dasselbe Kurvenintegral besitzen.

Aufgabe: Zeige, dass zwei einfache gleichorientierte und stückweise glatte Kurven, mit $\mathrm{Bild}(\gamma) = \mathrm{Bild}(\tilde{\gamma})$ dasselbe Kurvenintegral besitzen.

Beispiel 2.20. Wir berechnen für $Q := \{z = x + iy : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$ und γ eine stückweise glatte Kurve die ∂Q einmal im mathematisch positiven Sinn durchläuft,

$$\oint_{\partial Q} z\,\mathrm{d}z := \int_\gamma z\,\mathrm{d}z$$

Aufgabe: Es sei $\gamma : [a, b] \to U$ eine stückweise glatte Kurve und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Zeige, dass $M = \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| < \infty$ und dass gilt,

$$\Big| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \Big| \leq M \cdot \ell(\gamma).$$

Aufgabe: Es sei $\gamma : [a, b] \to U$ eine glatte Kurve und $\overleftarrow{\gamma} : [a, b] \to U$ die umgekehrte Kurve oder Rückkurve, also $\overleftarrow{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$. Zeige, dass für $f : U \to \mathbb{C}$ stetig gilt

$$\int_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Aufgabe: Sei $r > 0$. Berechne für $\gamma_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(t) = re^{\mathrm{i}t}, \gamma_2(t) = re^{2\mathrm{i}t}, \gamma_{-1}(t) = re^{-\mathrm{i}t}$

$$\int_{\gamma_k} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z.$$

Folgere, dass die drei Kurven nicht äquivalent sind. Was fällt noch auf?

Satz 2.21 (Stammfunktionen und Kurvenintegrale).
Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig mit Stammfunktion F, also $F' = f$. Dann gilt für jede stückweise glatte Kurve $\gamma : [a, b] \to U$,

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \tag{2.9}$$

Insbesondere gilt $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, falls γ geschlossen ist, also $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Korollar 2.22.
Sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $f' = 0$, dann gilt $f \equiv c$, $c \in \mathbb{C}$.
Sind F_1, F_2 zwei Stammfunktionen von f auf G, dann gilt $F_2 - F_1 \equiv c$, $c \in \mathbb{C}$.

Aufgabe: Beweise Korollar 2.22. Verwende, dass je 2 Punkte eines Gebiets durch einen stückweise linearen (affinen) Weg verbunden werden können.

Aufgabe: Zeige, dass es keine offene Menge U mit $\mathbb{C}^- \subset U$ gibt, auf welcher der komplexe Logarithmus, also eine Umkehrfunktion von exp, stetig definiert werden kann.

2.3 Integralsatz & Integralformel von Cauchy

Lemma 2.23 (von Goursat, Cauchy'scher Integralsatz für Δ).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Dann gilt für jedes abgeschlossene Dreieck (mit Innerem) $\Delta \subseteq U$, und jede einfache stückweise glatte Kurve γ, die $\partial\Delta$ durchläuft,

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z := \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{2.10}$$

Beweis:

Satz 2.24 (komplex differenzierbar $\Rightarrow$ Stammfunktion für $\star$:).
Sei $G \neq 0$ ein sternförmiges Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Dann hat f auf G eine Stammfunktion.

Beweis:

Korollar 2.25 (Cauchy'scher Integralsatz in $\star$).
Sei $G \neq 0$ ein sternförmiges Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ differenzierbar, dann gilt für jede geschlossene, stückweise glatte Kurve γ in G,

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Korollar 2.26 (Cauchy'scher Integralsatz für $\bigcirc \subseteq U$).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Falls $\bar{B}_r(z_0) \subseteq U$ dann gilt für $C_r = \partial B_r(z_0)$

$$\int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{|z-z_0|=r} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Satz (Cauchy'scher Integralsatz für $\circledcirc \subseteq U$).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Falls $\{z : |z - z_0| \in [r, R]\} = \bar{B}_R(z_0) \backslash B_r(z_0) \subseteq U$ dann gilt für $C_r = \partial B_r(z_0)$ bzw. $C_R = \partial B_R(z_0)$

$$\oint_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Beweis. Übungsaufgabe, mit Bild als Hinweis. □

Beispiel 2.27. Wir berechnen mit Hilfe des Integralsatzes,

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Satz 2.28 (Cauchy'sche Integralformel für ○).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Falls $\bar{B}_r(z_0) \subseteq U$ dann gilt für $C_r = \partial B_r(z_0)$ und alle $a \in B_r(z_0)$, also $|a - z_0| < r$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_r} \frac{f(z)}{z - a} \, \mathrm{d}z.$$

Beweis:

Satz 2.29 (differenzierbar $\Rightarrow$ analytisch).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Falls $B_r(z_0) \subseteq U$, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ und Konvergenzradius $R \geq r$, sodass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \text{für alle} \qquad z \in B_r(z_0). \tag{2.11}$$

Weiters gilt für alle $C_\rho = \partial B_\rho(z_0)$ mit $\rho < r$, dass

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z. \tag{2.12}$$

Korollar 2.30 (Abschätzung Taylorkoeffizienten).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Falls $\bar{B}_r(z_0) \subseteq U$ und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ auf $B_R(z_0)$ mit $R > r$ dann gilt,

$$|a_n| \leq \frac{\|f|_{\bar{B}_r(z_0)}\|_\infty}{r^n} \qquad \textit{wobei} \qquad \|f|_{\bar{B}_r(z_0)}\|_\infty = \sup_{z \in \bar{B}_r(z_0)} |f(z)| < \infty.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Satz 2.31 (von Morera).
Sei $U \neq \emptyset$ offen. Jede stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass für jede stückweise glatte, geschlossene Kurve $\gamma \subseteq U$ gilt $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, ist holomorph (auf U).

Beweis. Übungsaufgabe.
Überlege zuerst, dass es reicht den Satz für Gebiete zu zeigen. Kombiniere dann bereits bekannte Ergebnisse, sodass es genügt zu zeigen, dass f eine Stammfunktion besitzt, und recycle den Beweis von Satz 2.24. □

Satz 2.32 (Zusammenfassung - Äquivalenzen zu holomorph).

Kapitel 3

Holomorphe Funktionen

3.1 Fun facts

Satz 3.1 (von Liouville).
Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Aufgabe: Es sei f eine ganze, nicht-konstante Funktion. Zeige, dass das Bild $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ ist. Hinweis: Strategie wie im folgenden Satz.

Korollar 3.2 (Fundamentalsatz der Algebra).
Jedes nicht-konstante Polynom hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Satz 3.3 (Schwarz'sches Spiegelungsprinzip).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ *offen,* $V = U \cap \{\mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ *und* $V^* = \{\bar{z} : z \in V\}$*, sowie* $U_s = V \cup V^*$*. Falls* $f : V \to \mathbb{C}$ *stetig, im Inneren von* V*, also in* V°*, holomorph, und auf* $U \cap \mathbb{R}$ *reellwertig ist, dann ist die Fortsetzung* $f_s : U_s \to \mathbb{C}$ *von* f*, gegeben durch*

$$f_s(z) := \begin{cases} f(z), & z \in V \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in V^* \end{cases} \qquad \textit{ebenfalls holomorph.}$$

Definition 3.4 (kompakte Konvergenz).
Sei U offen und $f_n : U \to \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen. Die Folge f_n heißt kompakt konvergent gegen $f : U \to \mathbb{C}$, wenn f_n auf jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq U$ gleichmäßig gegen f konvergiert d.h.

$$\forall K \subseteq U, \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall z \in K, \forall n > N : |f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon.$$

Satz 3.5 (kompakte Konvergenz, Weierstraß).
Sei U offen und $f_n : U \to \mathbb{C}$ eine Folge von holomorphen Funktionen, die kompakt gegen $f : U \to \mathbb{C}$ konvergiert, dann ist f holomorph.

3.2 Nullstellen

Definition 3.6 (Nullstellen).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Für $f \in \mathbb{N}_0$ sei $f^{(k)}$ die k-te Ableitung von f wobei $f^{(0)} = f$. Falls für $z \in U$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt,

$$f^{(k)}(z) = 0 \quad \forall k \in \{0, \dots n-1\} \quad \textit{und} \quad f^{(n)}(z) \neq 0,$$

dann hat f in z eine Nullstelle der Ordnung n, oder kurz n-fache Nullstelle. Falls $f^{(k)}(z) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ hat f in z eine Nullstelle unendlicher Ordnung, symb. $n = \infty$.

Lemma 3.7 (Nullstellen).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in U$.

(a) Falls f in z_0 eine Nullstelle unendlicher Ordnung hat, so existiert $r > 0$, sodass $f|_{B_r(z_0)} \equiv 0$.

(b) f hat genau dann eine Nullstelle der Ordnung $n < \infty$ in z_0, wenn für ein $r > 0$ eine holomorphe Funktion $g : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$ existiert, sodass

$$f(z) = (z - z_0)^n \cdot g(z) \qquad \forall z : |z - z_0| < r.$$

(c) Falls f in z_0 eine n-fache Nullstelle hat, hat f^m in z_0 eine $m \cdot n$-fache Nullstelle.

(d) Die Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

ist holomorph.

Satz 3.8 (Identitätssatz).
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ eine Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph.

(a) Falls f in $z_0 \in G$ eine Nullstelle unendlicher Ordnung hat, gilt $f \equiv 0$.

(b) Falls eine konvergente Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit $z_n \in G$, $\lim z_n = z_0 \in G$ sowie $z_n \neq z_m$ für $n \neq m$, sodass $f(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $f \equiv 0$.

Lemma 3.9 (k-fache Nullstellen und Wurzeln).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in U$ eine Nullstelle der Ordnung k, $0 < k < \infty$. Dann existiert ein $\delta > 0$, sowie eine holomorphe Funktion $h : B_\delta(z_0) \to \mathbb{C}$ die in z_0 eine einfache Nullstelle hat und für die gilt,

$$f(z) = h^k(z) \quad \forall z \in B_\delta(z_0).$$

Satz 3.10 (Blätterzahl einer Nullstelle).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in U$ eine Nullstelle der Ordnung k, $0 < k < \infty$. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass für alle ε mit $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ eine offene Menge $U_\varepsilon \subseteq U$ existiert für die gilt,

$$f(U_\varepsilon) = B_\varepsilon(0) \quad \textit{und} \quad |f^{-1}(\{z\})| = k \quad \forall z : 0 < |z - z_0| < \varepsilon.$$

Satz 3.11 (Gebietstreue, offene Abbildung).
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Funktion, dann ist auch $f(G)$ ein Gebiet.

Satz 3.12 (Maximumprinzip).
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion.

(a) Die Funktion $|f|$ hat in G kein Maximum, d.h.

$$\forall z \in G \ \exists \hat{z} \in G \ : \ |f(z)| < |f(\hat{z})|.$$

(b) Falls G beschränkt ist und f zu einer stetigen Funktion auf dem Abschluss $\bar{G}$ erweitert werden kann, nimmt $|f|$ das Maximum am Rand also in ∂G an, d.h.

$$\exists z_0 \in \partial G \ : \ |f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in \bar{G}.$$

Satz 3.13 (Schwarz'sches Lemma).
Sei $f : B_1(0) \to B_1(0)$ eine holomorphe Abbildung von der offenen Einheitsscheibe in sich selbst.

(a) Falls f in Null einen Fixpunkt hat, also $f(0) = 0$, dann gilt

$$|f'(0)| \leq 1 \quad \textit{und} \quad |f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in B_1(0).$$

(b) Falls f außer Null einen weiteren Fixpunkt besitzt, also es existiert $z_0 \neq 0$ mit $f(z_0) = z_0$, oder $|f'(0)| = 1$, so ist f eine Drehung, d.h.

$$\exists \varphi \in [0, 2\pi) \quad \textit{sodass} \quad f(z) = e^{i\varphi} z \quad \forall z \in B_1(0).$$

Kapitel 4

Meromorphe Funktionen

4.1 Singularitäten, Pole & meromorphe Funktionen

Definition 4.1 (Singularitäten).
Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und f eine komplexwertige Funktion, die in einer offenen punktierteten Umgebung von z_0 definiert und dort holomorph ist, d.h. für U offen und $z_0 \in U$ gilt $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ ist holomorph, dann heißt z_0 isolierte Singularität von f.

- *Falls f zu einer holomorphen Funktion auf ganz U fortgesetzt werden kann, so heißt z_0 uneigentliche oder hebbare Singularität.*
- *Falls z_0 nicht hebbar ist, aber für ein $n \in \mathbb{N}$ die Funktion g mit $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$ in z_0 eine hebbare Singularität hat, so heißt z_0 Pol von f. Das kleinste mögliche solche $n \geq 1$ wird die Ordnung des Pols genannt.*
- *Falls z_0 weder hebbar noch ein Pol ist, so heißt z_0 wesentliche Singularität.*

Beispiele:

- $\operatorname{sinc}(z) = \frac{\sin z}{z}$ hat eine hebbare Singularität in 0.
- Für $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$, hat $g : U \to \mathbb{C}$ mit
$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$
eine hebbare Singularität in z_0.
- $g(z) = \frac{z^2+3z+1}{(z^2+1)^2}$ hat in $z_0 = i$ einen Pol der Ordnung 2.
- $h(z) = \frac{z^2+3z+2}{z^2-1}$ hat in $z_0 = 1$ einen Pol der Ordnung 1.

Lemma 4.2.
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Falls f in z_0 einen Pol hat, gilt

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty. \tag{4.1}$$

Beweis. □

Beispiele:

- $\sin(\frac{1}{z})$ hat in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität.

Definition 4.3 (meromorph).
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine komplexwertige Funktion, die in U nach Elimierung aller hebbaren Singularitäten bis auf Pole holomorph ist, heißt meromorph.
Es gilt also für alle $z \in U$, dass eine offene Umgebung $V \subseteq U$ existiert, sodass f entweder auf V oder auf $\dot{V} = V \setminus \{z\}$ holomorph ist.

Alternativ können wir, motiviert durch Lemma 4.1, meromorphe Funktionen als Funktionen $f : U \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ interpretieren, wobei wir zuerst alle hebbaren Singularitäten eliminieren und dann $f(z) = \infty$ setzen falls z ein Pol ist. Die Menge der Pole ist dann $P_f = f^{-1}(\{\infty\})$.

Aufgabe: Zeige, dass eine auf einem Gebiet G meromorphe Funktion $f \neq 0$ höchstens abzählbar viele Pole und Nullstellen haben kann.

Lemma 4.4.
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ meromorph und nicht identisch null, also $f \neq 0$. Die Menge der Nullstellen N_f und der Polstellen P_f ist diskret, also abzählbar (oder endlich) und hat keinen Häufungspunkt in G.

Aufgabe: Zeige, dass die Menge der meromorphen Funktionen auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Körper bezüglich $+, \cdot$ mit $(f + g)(z) = f(z) + g(z)$ bzw. $(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z)$ sind.

4.2 Laurentreihen

Definition 4.5 (Laurentreihe).
Eine Reihe der Form $\sum_{n\in Z} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ *heißt Laurentreihe in* z_0. *Die Laurentreihe heißt (absolut, gleichmäßig) konvergent, wenn sowohl* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ *also auch* $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ *(absolut, gleichmäßig) konvergieren.*

Lemma 4.6 (Konvergenz von Laurentreihen).
Sei $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n$ *eine Laurentreihe, und* $r, R \in [0,\infty]$ *gegeben durch*

$$R^{-1} := \limsup_{n\geq 0} |c_n|^{1/n} \qquad \textit{bzw.} \qquad r := \limsup_{n\geq 0} |c_{-n}|^{1/n}.$$

Falls $r < R$, *sei der Konvergenzring* $S_{r,R}(z_0)$ *definiert durch*

$$S_{r,R}(z_0) := B_R(z_0) \setminus \bar{B}_r(z_0) = \{z : r < |z-z_0| < R\}.$$

Es gilt, dass die Laurentreihe auf $S_{r,R}(z_0)$ *absolut konvergiert und für alle* ρ, θ *mit* $r < \rho < \theta < R$ *gilt, dass* $\sum_{n\in Z} c_n(z-z_0)^n$ *auf* $\bar{S}_{\rho,\theta}(z_0) = \bar{B}_\theta(z_0) \setminus B_\rho(z_0)$ *gleichmäßig konvergiert.*
Desweiteren, ist die durch die Laurentreihe definierte Funktion $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n$ *holomorph auf* $S_{r,R}(z_0)$ *und es gilt*

$$f'(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n \cdot c_n(z-z_0)^{n-1}.$$

Aufgabe: Lies den Beweis von Satz 2.7(a) durch und beweise Lemma 4.6.

Lemma 4.7 (Koeffizienten einer Laurentreihe).
Sei $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n$ *eine Laurentreihe mit Konvergenzring* $S_{r,R}(z_0)$, *dann gilt für alle* $\rho \in (r,R)$ *und* $C_\rho = \partial B_\rho(z_0)$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{4.2}$$

Insbesondere gilt, dass die Koeffizienten c_n *einer Laurentreihe eindeutig bestimmt sind.*

Satz 4.8 (Entwicklungssatz für Laurentreihen).
Es sei $r < R$ und $f : S_{r,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Desweiteren sei ρ, θ so, dass $r < \rho < \theta < R$ und $C_\rho = \partial \bar{B}_\rho(z_0)$, bzw. $C_\theta = \partial \bar{B}_\rho(z_0)$

(a) *Für alle z mit $\rho < |z - z_0| < \theta$ gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_\theta} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_\rho} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w. \tag{4.3}$$

(b) *f kann in eine auf $S_{r,R}(z_0)$ absolut konvergente und auf $\bar{S}_{\rho,\theta}(z_0)$ gleichmäßig konvergente Laurentreihe entwickelt werden.*

Korollar 4.9 (Laurentreihen um isolierten Singularitäten).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit isolierter Singularität in z_0, dann existiert $R > 0$, sodass

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in \dot{B}_R(z_0) = \{z : 0 < |z - z_0| < R\}.$$

Definition 4.10 (Hauptteil einer Laurentreihe).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : \dot{U} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit isolierter Singularität in z_0 und Laurentreihe $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n$ für $z \in \dot{B}_R(z_0)$, dann heißt h_{f,z_0} mit

$$h_{f,z_0}(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

Hauptteil der Laurentreihenentwicklung von f in z_0.

Aufgabe: Zeige, dass der Hauptteil h_{f,z_0} der Laurentreihenentwicklung von f in z_0 auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ holomorph ist und dass g mit $g(z_0) = h_{f,z_0}(z) - \frac{c_{-1}}{z-z_0}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ eine Stammfunktion hat.

Lemma 4.11 (isolierte Singularitäten nach Hauptteil).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : \dot{U} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit isolierter Singularität in z_0. Es gilt für den Hauptteil von f in z_0, gegeben durch $h_{f,z_0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-z_0)^n}$

(a) *z_0 ist hebbar* $\quad\Leftrightarrow\quad$ $h_{f,z_0} \equiv 0$.

(b) *z_0 ist ein Pol der Ordnung k* $\quad\Leftrightarrow\quad$ $h_{f,z_0}(z) = \sum_{n=1}^{k} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ *mit* $c_{-k} \neq 0$.

(c) *z_0 ist eine wesentliche Singularität* $\quad\Leftrightarrow\quad$ $h_{f,z_0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ *wobei unendliche viele $c_{-n} \neq 0$.*

Satz 4.12 (Riemann'scher Hebbarkeitssatz).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : \dot{U} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit isolierter Singularität in z_0. Die Singularität ist genau dann hebbar, wenn f in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist, dh.

$$\exists \delta > 0, \exists M \in \mathbb{R} : \quad |f(z)| \leq M \quad \forall z : 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Satz 4.13 (Casorati - Weierstraß).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : \dot{U} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit isolierter Singularität in z_0. Die Singularität ist genau dann wesentlich, wenn f in jeder punktierten Umgebung von z_0 jedem Wert in $\mathbb{C}$ beliebig nahe kommt, dh.

$$\exists \delta > 0 \ : \quad \overline{f(\dot{B}_\varepsilon(z_0))} = \mathbb{C} \quad \forall \varepsilon \in (0, \delta).$$

Es gilt sogar $f(\dot{B}_\varepsilon(z_0)) = \mathbb{C}$ oder $f(\dot{B}_\varepsilon(z_0)) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ (Satz von Picard).

Korollar 4.14 (Pol in $z_0 \Leftrightarrow |f(z_0)| = \infty$).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : \dot{U} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit isolierter Singularität in z_0. Die Singularität ist genau dann ein Pol wenn

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty.$$

4.3 Residuen & Residuensatz

Definition 4.15 (Residuum).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ *offen,* $z_0 \in U$ *und* $f : \dot{U} \to \mathbb{C}$ *eine holomorphe Funktion mit isolierter Singularität in* z_0 *und Laurentreihe* $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n$ *für* $z \in \dot{B}_\delta(z_0)$*. Der Koeffizient* c_{-1} *heißt Residuum von* f *in* z_0*, dh.*

$$\mathrm{Res}_f(z_0) := c_{-1}.$$

Satz 4.16 (Residuensatz I).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ *offen und* $\gamma : [a,b] \to U$ *eine einfache, geschlossene, stückweise glatte Kurve. Falls*

(a) *für alle holomorphen Funktionen* $h : U \to \mathbb{C}$ *gilt* $\int_\gamma h(z)\,\mathrm{d}z = 0$ *und*

(b) *für alle* $z_k \in \{z_1, \ldots, z_K\} \subseteq U \setminus \gamma([a,b])$ *gilt* $\int_\gamma \frac{1}{z-z_k}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}$*,*

dann gilt für jede auf $U \setminus \{z_1, \ldots, z_K\}$ *holomorphe Funktion* f

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{K}\mathrm{Res}_f(z_k).$$

Lemma 4.17. *(a) Falls U ein sternförmige Gebiet ist, so ist Bedingung a) in Satz 4.16 immer erfüllt.*

(b) Sei G ein Gebiet in Form eines Kreises, Kreissegments, Kreissektors, Dreiecks oder Rechtecks und γ eine stückweise glatte Kurve, die den Rand ∂G einmal im positiven Sinn durchläuft. Dann erfüllt γ Bedingung b) in Satz 4.16 für alle $\{z_1, \ldots, z_K\} \subset G$.

(c) Sei G ein beschränktes Gebiet, dessen Rand ∂G durch eine (!) einfache, geschlossene, stückweise glatte und positiv orientierte Kurve γ parametrisiert werden kann, also $\mathrm{Bild}(\gamma) = \partial G$. Dann erfüllt γ Bedingung b) in Satz 4.16 für alle $\{z_1, \ldots, z_K\} \subset G$, für die Geraden g_i durch z_i existieren, sodass die Schnitte $g_i \cap \partial G$ mit dem Rand aus endlich vielen Punkten und abgeschlossenen Intervallen bestehen.

Beispiel 4.18. Wir berechnen mit Hilfe des Residuensatzes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Lemma 4.19 (Tricks zur Residuenbestimmung).
Es sei U offen, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ und $g, h : U \to \mathbb{C}$ holomorph.

(a) Falls f in z_0 einen einfachen Pol hat, gilt

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

(b) Falls f in z_0 einen Pol der Ordnung k hat, so gilt für $\phi(z) = (z - z_0)^k f(z)$,

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \frac{\phi^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}.$$

(c) Falls h in z_0 eine einfache Nullstelle und g in z_0 kein Nullstelle hat, also $h(z_0) = 0, h'(z_0) \neq 0$ und $g(z_0) \neq 0$, so gilt für $f = g/h$

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Beweis. (a)

(b/c) Übungsaufgabe □

Satz 4.20 (Integrale über $\mathbb{R}$).
Sei $\mathbb{H} = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $S = \{z_1, \dots, z_K\} \subset \mathbb{H}$, sowie $U \supset \bar{\mathbb{H}} = \{z : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ offen. Falls $f : U \setminus \{z_1, \dots, z_K\} \to \mathbb{C}$ holomorph ist, $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda$ existiert und $\lim_{z\to\infty} f(z)z = 0$, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Res}_f(z_k).$$

Aufgabe: Beweise Satz 4.20.

Satz 4.21 (Null- und Polstellen zählendes Integral für $\bigcirc$).
Sei U offen und $f : U \to \mathbb{C}$, $f \neq 0$, eine meromorphe Funktion. Sei N_f, P_f die Menge der Null- bzw. Polstellen. Für $\bar{B}_r(z_0) \subseteq U$ und $C = \partial B_r(z_0)$ mit $C \cap (N_f \cup P_f) = \emptyset$ sowie N, P die Anzahl der Null- bzw Polstellen (mit Vielfachheit/Ordnung) in $B_r(z_0)$, gilt

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = N - P. \tag{4.4}$$

Satz 4.22 (Satz von Rouché für ○).
Sei U offen, $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen und $\bar{B}_r(z_0) \subseteq U$. Falls

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \forall z \in \partial B_r(z_0),$$

so haben f und g in $B_r(z_0)$ gleich viele Nullstellen (mit Vielfachheiten).

Korollar 4.23 (Fundamentalsatz der Algebra).
Jedes komplexe Polynom n-ten Grades hat n Nullstellen (mit Vielfachheiten) in $\mathbb{C}$.

Korollar 4.24 (Fixpunkte).
Sei U offen, $h : U \to \mathbb{C}$ und $\bar{B}_1(0) \subseteq U$. Falls $|h(z)| < 1$ für alle z mit $|z| = 1$, so hat h in $B_1(0)$ genau einen Fixpunkt.

Satz 4.25 (Satz v. Hurwitz).
Sei G ein Gebiet und $f_n : G \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge holomorpher Funktionen, die kompakt gegen $f : G \to \mathbb{C}$ konvergiert. Falls jedes f_n höchstens m a-Stellen besitzt so hat auch f höchstens m a-Stellen oder ist konstant a, d.h.

$$|f_n^{-1}\{a\}| \leq m < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad |f^{-1}\{a\}| \leq m \quad \textit{oder} \quad f \equiv a.$$

Insbesondere ist die Grenzfunktion von kompakt konvergenten, injektiven, holomorphen Funktion entweder wieder injektiv (und holomorph) oder konstant.

Kapitel 5

Einfach zusammenhängende Gebiete

Definition 5.1 (homotope Wege, nullhomotop).
Zwei Wege $\gamma, \tilde{\gamma} : [0,1] \to U \subseteq \mathbb{C}$ mit gleichem Anfangspunkt $z_0 = \gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$ und Endpunkt $z_1 = \gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$ heißen homotop, falls eine stetige Abbildung $h : [0,1]^2 \to U$, existiert, sodass

$$\begin{array}{llll} h(t,0) = \gamma(t) & \textit{und} \;\; h(t,1) = \tilde{\gamma}(t) & \forall t \in [0,1], & \textit{sowie} \\ h(0,s) = z_0 & \textit{und} \;\; h(1,s) = z_1 & \forall s \in [0,1]. & \end{array}$$

Ein geschlossener Weg $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$ heißt nullhomotop, falls γ homotop zum konstanten Weg $\iota : [0,1] \to U, t \mapsto z_0$ ist, symb. $\gamma \simeq z_0$.

Aufgabe: Zeige, dass $\simeq$ eine Äquivalenzrelation ist.

Falls wir zwei Wege $\gamma_i : [a_i, b_i] \to U$ auf Homotopie untersuchen wollen, betrachten wir einfach ihre Reparametrisierungen $\tilde{\gamma}_i : [0,1] \to U$ mit $\tilde{\gamma}_i(t) = \gamma(a_i + t(b_i - a_i))$ für die gilt $\mathrm{Bild}(\gamma_\mathrm{i}) = \mathrm{Bild}(\tilde{\gamma}_\mathrm{i})$.

Definition 5.2 (einfach zusammenhängende Gebiete).
Ein Gebiet heißt einfach zusammenhängend, wenn jeder geschlossene Weg in G nullhomotop ist.

Lemma 5.3 (sternförmig $\Rightarrow$ einfach zusammenhängend).
Jedes sternförmige Gebiet ist einfach zusammenhängend.

Umgekehrt gibt es aber einfach zusammenhängende Gebiete, die nicht sternförmig sind, z.B.

Das Ziel ist jetzt so weit wie möglich Resultate, die wir bereits für sternförmige Gebiete gezeigten haben, auf einfach zusammenhängende Gebiete zu erweitern, z.B. die Existenz einer Stammfunktion oder den Residuensatz (und alle seine Konsequenzen).

5.1 Analytische Fortsetzung

Wir wissen, dass jede holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ auf einem sternförmigen Gebiet $G \subseteq U$, z.B. $G = B_1 = B_r(z_1)$ eine bis auf eine Konstante eindeutige Stammfunktion F besitzt. Wenn wir jetzt ein weiteres sternförmiges Gebiet nehmen z.B. $B_2 = B_\rho(z_2)$, sodass der Schnitt nichtleer und wieder sternförmig ist, also für Kreise falls $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, können wir F auf $B_1 \cup B_2$ eindeutig fortsetzen:

Da wir einerseits nicht nur Stammfunktionen fortsetzen wollen, und andererseits beim Fortsetzen eventuell eine Ziel haben, betrachten wir allgemein Fortsetzungen entlang von Wegen und Kreisketten.

Definition 5.4 (Kreiskette entlang γ).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $\gamma : [0,1] \to U$ stetig, also ein Weg. Seien $t_i \in [0,1]$, $r_i > 0$, $i = 1 \dots n$, so gewählt, dass

$$t_0 = 0,\ t_n = 1,\ t_i < t_{i+1}, \qquad B_i = B_{r_i}(\gamma(t_i)) \subseteq U \quad \textit{und} \quad \gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq B_{i-1} \cap B_i,$$

so heißt $(B_i)_{i=1}^n$ (kurz $(B_i)_i$) Kreiskette entlang γ in U.

Lemma 5.5 (Existenz einer Kreiskette).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $\gamma : [0,1] \to U$ ein Weg, dann existiert eine Kreiskette entlang γ in U.

Definition 5.6 (analytische Fortsetzung entlang eines Wegs).
Sei $U \neq \emptyset$ offen, $\gamma : [0,1] \to U$ stetig, und $(B_i)_{i=1}^n$ eine Kreiskette entlang γ in U. Falls für die Familie holomorpher Funktionen $f_i : B_i \to \mathbb{C}$, $i = 0 \dots n$ gilt,

$$f_{i-1}(z) = f_i(z) \quad \forall z \in B_{i-1} \cap B_i, \quad \forall i = 1 \dots n,$$

nennen wir f_n analytische Fortsetzung von f_0 entlang γ, bzw. sagen f_n ensteht durch analytische Fortsetzung von f_0 entlang γ.

Lemma 5.7 (Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung entlang γ).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $\gamma : [0,1] \to U$ ein Weg. Weiters seien $(B_i)_{i=1}^n$ und $(\tilde{B}_j)_{j=1}^m$ zwei Kreisketten entlang γ. Falls $f_0 : B_0 \to \mathbb{C}$ und $\tilde{f}_0 : \tilde{B}_0 \to \mathbb{C}$ auf $B_0 \cap \tilde{B}_0$ übereinstimmen, so stimmen auch die jeweiligen analytische Fortsetzungen f_n bzw. $\tilde{f}_m$ auf $B_n \cap \tilde{B}_m$ überein, d.h.

$$f_0(z) = \tilde{f}_0(z) \quad \forall z \in B_0 \cap \tilde{B}_0 \qquad \Rightarrow \qquad f_n(z) = \tilde{f}_m(z) \quad \forall z \in B_n \cap \tilde{B}_m.$$

Die analytische Fortsetzung hängt also wirklich nur vom Weg und nicht von der gewählten Kreiskette ab.

Satz 5.8 (Monodromiesatz, Wege homotop $\Rightarrow$ analytische Fortsetzungen ident).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $\gamma, \tilde{\gamma} : [0,1] \to U$ zwei homotope Wege in U mit $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = z_0$ und $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(1) = z_1$ und Homotopie $h : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$. Desweiteren sei $f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion die entlang jeden Weges $\gamma_s = h(\cdot, s)$ analytisch fortsetzbar ist, dann gilt, dass die analytische Fortsetzung g von f entlang γ mit der analytischen Fortsetzung $\tilde{g}$ von f entlang $\tilde{\gamma}$ übereinstimmt, d.h. es existiert $\delta > 0$, sodass

$$g(z) = \tilde{g}(z) \quad \forall z \in B_\delta(z_1).$$

Korollar 5.9 (Homotopieinvarianz von Kurvenintegralen).
Sei $U \neq \emptyset$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma, \tilde{\gamma} : [0,1] \to U$ zwei homotope stückweise glatte Wege/Kurven in U, dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Insbesondere gilt $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, falls γ nullhomotop ist.

Korollar 5.10 (Stammfunktion auf einfach zusammenhängenden Gebieten ✓).
Sei $G \neq \emptyset$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent

(a) f ist holomorph.

(b) f besitzt eine Stammfunktion.

(c) Für alle stückweise glatten, geschlossenen Kurven γ in G gilt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Insbesondere, erfüllt jedes einfach zusammenhängende Gebiet Bedingung (a) im Residuensatz 4.16.

Korollar 5.11.
Sei $G \neq \emptyset$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $0 \notin f(G)$, dann existiert eine holomorphe Funktion $g : G \to \mathbb{C}$, genannt ein holomorpher Logarithmus von f, mit

$$e^g = f.$$

5.2 Der Riemann'sche Abbildungssatz

Wieviele einfach zusammenhängende Gebiete gibt es?

Lemma 5.12.
Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine bijektive holomorphe (=bi-holomorphe) Abbildung, dann ist auch $f(G)$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

Aufgabe: Zeige, dass die folgende Abbildung, auch bekannt als Cayleyabbildung, die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ bi-holomorph in die offene Kreisscheibe $\mathbb{D} = B_1(0)$ abbildet. Bestimme die Umkehrabbildung,

$$f : \mathbb{H} \to \mathbb{D},\ z \mapsto \frac{i-z}{i+z}.$$

Satz 5.13 (Riemann'scher Abbildungssatz).
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, dann ist G das biholomorphe Bild der Einheitsscheibe $\mathbb{D} = B_1(0)$, d.h. existiert eine bi-holomorphe Abbildung $f : \mathbb{D} \to G$.

Beweis. Wunderschönes Thema für das Teilgebiete der Mathematik Seminar im 5. Semester. □

Komplexe Analysis - Satzsammlung

Kapitel 2. Komplexe Differenzierbarkeit

Satz 2.7 (analytisch ⇒ differenzierbar (unendlich oft)).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und die Funktion $f : U \to C$ in z_0 analytisch mit Konvergenzradius R, also

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \textit{für} \quad z \in B_R(z_0),$$

dann gilt:

(a) *f ist auf $B_R(z_0)$ differenzierbar mit Ableitungsfunktion*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z - z_0)^{n-1} \quad \textit{für} \quad z \in B_R(z_0).$$

(b) *Die k-te Ableitung f^k auf $B_R(z_0)$ existiert und*

$$a_k = \frac{f^k(z_0)}{k!}.$$

(c) *Die Koeffizienten a_n in 2.3 sind eindeutig bestimmt.*

Satz 2.10 (komplex differenzierbar $\widehat{=}$ reell differenzierbar & Cauchy-Riemann).
Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist genau dann komplex differenzierbar in $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ falls die Funktion f_r mit

$$f_r(x, y) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re} f(x + iy) \\ \mathrm{Im} f(x + iy) \end{pmatrix}$$

in (x_0, y_0) reell differenzierbar ist und die Cauchy-Riemann'schen DGL erfüllt.

Lemma 2.14 (Gebiet $\widehat{=}$ offen + weg-zusammenhängend).
Eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$, $U \neq \emptyset$ ist genau dann ein Gebiet, wenn sie weg-zusammenhängend ist. Insbesondere existiert zwischen zwei Punkten eines Gebiets immer ein stückweise affiner Weg.

Satz 2.21 (Stammfunktionen und Kurvenintegrale).
A
Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig mit Stammfunktion F, also $F' = f$. Dann gilt für jede stückweise glatte Kurve $\gamma : [a, b] \to U$,

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Insbesondere gilt $\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 0$, falls γ geschlossen ist, also $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Korollar 2.22.
Sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $f' = 0$, dann gilt $f \equiv c$, $c \in \mathbb{C}$. Sind F_1, F_2 zwei Stammfunktionen von f auf G, dann gilt $F_2 - F_1 \equiv c$, $c \in \mathbb{C}$.

Lemma 2.23 (von Goursat, Cauchy'scher Integralsatz für Δ).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Dann gilt für jedes abgeschlossene Dreieck (mit Innerem) $\Delta \subseteq U$, und jede einfache stückweise glatte Kurve γ, die $\partial\Delta$ durchläuft,

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z := \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Satz 2.24 (komplex differenzierbar $\Rightarrow$ Stammfunktion für $\star$:).
Sei $G \neq 0$ ein sternförmiges Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Dann hat f auf G eine Stammfunktion.

Korollar 2.25 (Cauchy'scher Integralsatz in $\star$).
Sei $G \neq 0$ ein sternförmiges Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ differenzierbar, dann gilt für jede geschlossene, stückweise glatte Kurve γ in G,

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Korollar 2.26 (Cauchy'scher Integralsatz für $\bigcirc \subseteq U$).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Falls $\bar{B}_r(z_0) \subseteq U$ dann gilt für $C_r = \partial B_r(z_0)$

$$\int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{|z-z_0|=r} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Satz 2.28 (Cauchy'sche Integralformel für $\bigcirc$).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Falls $\bar{B}_r(z_0) \subseteq U$ dann gilt für $C_r = \partial B_r(z_0)$ und alle $a \in B_r(z_0)$, also $|a - z_0| < r$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_r} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

Satz 2.29 (differenzierbar $\Rightarrow$ analytisch).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Falls $B_r(z_0) \subseteq U$, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ und Konvergenzradius $R \geq r$, sodass

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n \qquad \text{für alle} \qquad z \in B_r(z_0).$$

Weiters gilt für alle $C_\rho = \partial B_\rho(z_0)$ mit $\rho < r$, dass

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Korollar 2.30 (Abschätzung Taylorkoeffizienten).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Falls $\bar{B}_r(z_0) \subseteq U$ und $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ auf $B_R(z_0)$ mit $R > r$ dann gilt,

$$|a_n| \leq \frac{\|f|_{\bar{B}_r(z_0)}\|_\infty}{r^n} \qquad \text{wobei} \qquad \|f|_{\bar{B}_r(z_0)}\|_\infty = \sup_{z \in \bar{B}_r(z_0)} |f(z)| < \infty.$$

Satz 2.31 (von Morera).
Sei $U \neq \emptyset$ offen. Jede stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass für jede stückweise glatte, geschlossene Kurve $\gamma \subseteq U$ gilt $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, ist holomorph (auf U).

Kapitel 3. Holomorphe Funktionen

Satz 3.1 (von Liouville).
Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Korollar 3.2 (Fundamentalsatz der Algebra).
Jedes nicht-konstante Polynom hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Satz 3.3 (Schwarz'sches Spiegelungsprinzip).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $V = U \cap \{\mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ und $V^* = \{\bar{z} : z \in V\}$, sowie $U_s = V \cup V^*$. Falls $f : V \to \mathbb{C}$ stetig, im Inneren von V, also in V°, holomorph, und auf $U \cap \mathbb{R}$ reellwertig ist, dann ist die Fortsetzung $f_s : U_s \to \mathbb{C}$ von f, gegeben durch

$$f_s(z) := \begin{cases} f(z), & z \in V \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in V^* \end{cases} \qquad \text{ebenfalls holomorph.}$$

Satz 3.5 (kompakte Konvergenz, Weierstraß).
Sei U offen und $f_n : U \to \mathbb{C}$ eine Folge von holomorphen Funktionen, die kompakt gegen $f : U \to \mathbb{C}$ konvergiert, dann ist f holomorph.

Lemma 3.7 (Nullstellen).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in U$.

(a) Falls f in z_0 eine Nullstelle unendlicher Ordnung hat, so existiert $r > 0$, sodass $f|_{B_r(z_0)} \equiv 0$.

(b) f hat genau dann eine Nullstelle der Ordnung $n < \infty$ in z_0, wenn für ein $r > 0$ eine holomorphe Funktion $g : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$ existiert, sodass

$$f(z) = (z - z_0)^n \cdot g(z) \qquad \forall z : |z - z_0| < r.$$

(c) Falls f in z_0 eine n-fache Nullstelle hat, hat f^m in z_0 eine $m \cdot n$-fache Nullstelle.

(d) Die Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

ist holomorph.

Satz 3.8 (Identitätssatz).
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ eine Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph.

(a) Falls f in $z_0 \in G$ eine Nullstelle unendlicher Ordnung hat, gilt $f \equiv 0$.

(b) Falls eine konvergente Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert mit $z_n \in G$, $\lim z_n = z_0 \in G$ sowie $z_n \neq z_m$ für $n \neq m$, sodass $f(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $f \equiv 0$.

Lemma 3.9 (k-fache Nullstellen und Wurzeln).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in U$ eine Nullstelle der Ordnung k, $0 < k < \infty$. Dann existiert ein $\delta > 0$, sowie eine holomorphe Funktion $h : B_\delta(z_0) \to \mathbb{C}$ die in z_0 eine einfache Nullstelle hat und für die gilt,

$$f(z) = h^k(z) \quad \forall z \in B_\delta(z_0).$$

Satz 3.10 (Blätterzahl einer Nullstelle).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in U$ eine Nullstelle der Ordnung k, $0 < k < \infty$. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass für alle ε mit $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ eine offene Menge $U_\varepsilon \subseteq U$ existiert für die gilt,

$$f(U_\varepsilon) = B_\varepsilon(0) \quad \text{und} \quad |f^{-1}(\{z\})| = k \quad \forall z : 0 < |z - z_0| < \varepsilon.$$

Satz 3.11 (Gebietstreue, offene Abbildung).
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Funktion, dann ist auch $f(G)$ ein Gebiet.

Satz 3.12 (Maximumprinzip).
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion.

(a) Die Funktion $|f|$ hat in G kein Maximum, d.h.

$$\forall z \in G \ \exists \hat{z} \in G \ : \ |f(z)| < |f(\hat{z})|.$$

(b) Falls G beschränkt ist und f zu einer stetigen Funktion auf dem Abschluss $\bar{G}$ erweitert werden kann, nimmt $|f|$ das Maximum am Rand also in ∂G an, d.h.

$$\exists z_0 \in \partial G \ : \ |f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in \bar{G}.$$

Satz 3.13 (Schwarz'sches Lemma).
Sei $f : B_1(0) \to B_1(0)$ eine holomorphe Abbildung von der offenen Einheitsscheibe in sich selbst.

(a) Falls f in Null einen Fixpunkt hat, also $f(0) = 0$, dann gilt

$$|f'(0)| \leq 1 \quad \textit{und} \quad |f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in B_1(0).$$

(b) Falls f außer Null einen weiteren Fixpunkt besitzt, also es existiert $z_0 \neq 0$ mit $f(z_0) = z_0$, oder $|f'(0)| = 1$, so ist f eine Drehung, d.h.

$$\exists \varphi \in [0, 2\pi) \quad \textit{sodass} \quad f(z) = e^{i\varphi} z \quad \forall z \in B_1(0).$$

Kapitel 4. Meromorphe Funktionen

Lemma 4.1.
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Falls f in z_0 einen Pol hat, gilt

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty.$$

Lemma 4.4.
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ meromorph und nicht identisch null, also $f \neq 0$. Die Menge der Nullstellen N_f und der Polstellen P_f ist diskret, also abzählbar (oder endlich) und hat keinen Häufungspunkt in G.

Lemma 4.6 (Konvergenz von Laurentreihen).
Sei $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z - z_0)^n$ eine Laurentreihe, und $r, R \in [0, \infty]$ gegeben durch

$$R^{-1} := \limsup_{n\geq 0} |c_n|^{1/n} \qquad \textit{bzw.} \qquad r := \limsup_{n\geq 0} |c_{-n}|^{1/n}.$$

Falls $r < R$, sei der Konvergenzring $S_{r,R}(z_0)$ definiert durch

$$S_{r,R}(z_0) := B_R(z_0) \setminus \bar{B}_r(z_0) = \{z : r < |z - z_0| < R\}.$$

Es gilt, dass die Laurentreihe auf $S_{r,R}(z_0)$ absolut konvergiert und für alle ρ, θ mit $r < \rho < \theta < R$ gilt, dass $\sum_{n\in Z} c_n(z - z_0)^n$ auf $\bar{S}_{\rho,\theta}(z_0) = \bar{B}_\theta(z_0) \setminus B_\rho(z_0)$ gleichmäßig konvergiert.
Desweiteren, ist die durch die Laurentreihe definierte Funktion $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n$ holomorph auf $S_{r,R}(z_0)$ und es gilt

$$f'(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n \cdot c_n(z - z_0)^{n-1}.$$

Lemma 4.7 (Koeffizienten einer Laurentreihe).
Sei $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n$ eine Laurentreihe mit Konvergenzring $S_{r,R}(z_0)$, dann gilt für alle $\rho \in (r,R)$ und $C_\rho = \partial B_\rho(z_0)$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Insbesondere gilt, dass die Koeffizienten c_n einer Laurentreihe eindeutig bestimmt sind.

Satz 4.8 (Entwicklungssatz für Laurentreihen).
Es sei $r < R$ und $f : S_{r,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Desweiteren sei ρ, θ so, dass $r < \rho < \theta < R$ und $C_\rho = \partial \bar{B}_\rho(z_0)$, bzw. $C_\theta = \partial \bar{B}_\rho(z_0)$

B

(a) Für alle z mit $\rho < |z-z_0| < \theta$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_\theta} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_\rho} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w.$$

(b) f kann in eine auf $S_{r,R}(z_0)$ absolut konvergente und auf $\bar{S}_{\rho,\theta}(z_0)$ gleichmäßig konvergente Laurentreihe entwickelt werden.

Korollar 4.9 (Laurentreihen um isolierten Singularitäten).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit isolierter Singularität in z_0, dann existiert $R > 0$, sodass

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n \quad \forall z \in \dot{B}_R(z_0) = \{z : 0 < |z-z_0| < R\}.$$

Lemma 4.11 (isolierte Singularitäten nach Hauptteil).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : \dot{U} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit isolierter Singularität in z_0. Es gilt für den Hauptteil von f in z_0, gegeben durch $h_{f,z_0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-z_0)^n}$

(a) z_0 ist hebbar $\quad\Leftrightarrow\quad h_{f,z_0} \equiv 0$.

(b) z_0 ist ein Pol der Ordnung $k \quad\Leftrightarrow\quad h_{f,z_0}(z) = \sum_{n=1}^{k} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ mit $c_{-k} \neq 0$.

(c) z_0 ist eine wesentliche Singularität $\quad\Leftrightarrow\quad h_{f,z_0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ wobei unendliche viele $c_{-n} \neq 0$.

Satz 4.12 (Riemann'scher Hebbarkeitssatz).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : \dot{U} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit isolierter Singularität in z_0. Die Singularität ist genau dann hebbar, wenn f in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist, dh.

$$\exists \delta > 0, \exists M \in \mathbb{R} : \quad |f(z)| \leq M \quad \forall z : 0 < |z-z_0| < \delta.$$

Satz 4.13 (Casorati - Weierstraß).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : \dot{U} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit isolierter Singularität in z_0. Die Singularität ist genau dann wesentlich, wenn f in jeder punktierten Umgebung von z_0 jedem Wert in $\mathbb{C}$ beliebig nahe kommt, dh.

$$\exists \delta > 0 : \quad \overline{f(\dot{B}_\varepsilon(z_0))} = \mathbb{C} \quad \forall \varepsilon \in (0,\delta).$$

Korollar 4.14 (Pol in $z_0 \Leftrightarrow |f(z_0)| = \infty$).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : \dot{U} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit isolierter Singularität in z_0. Die Singularität ist genau dann ein Pol wenn

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty.$$

Satz 4.16 (Residuensatz I).
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma : [a,b] \to U$ eine einfache, geschlossene, stückweise glatte Kurve. Falls

(a) *für alle holomorphen Funktionen $h : U \to \mathbb{C}$ gilt $\int_\gamma h(z)\,\mathrm{d}z = 0$ und*

(b) *für alle $z_k \in \{z_1, \ldots, z_K\} \subseteq U \setminus \gamma([a,b])$ gilt $\int_\gamma \frac{1}{z-z_k}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}$,*

dann gilt für jede auf $U \setminus \{z_1, \ldots, z_K\}$ holomorphe Funktion f

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{K} \mathrm{Res}_f(z_k).$$

Lemma 4.17. (a) *Falls U ein sternförmige Gebiet ist, so ist Bedingung a) in Satz 4.16 immer erfüllt.*

(b) *Sei G ein Gebiet in Form eines Kreises, Kreissegments, Kreissektors, Dreiecks oder Rechtecks und γ eine stückweise glatte Kurve, die den Rand ∂G einmal im positiven Sinn durchläuft. Dann erfüllt γ Bedingung b) in Satz 4.16 für alle $\{z_1, \ldots, z_K\} \subset G$.*

(c) *Sei G ein beschränktes Gebiet, dessen Rand ∂G durch eine (!) einfache, geschlossene, stückweise glatte und positiv orientierte Kurve γ parametrisiert werden kann, also $\mathrm{Bild}(\gamma) = \partial G$. Dann erfüllt γ Bedingung b) in Satz 4.16 für alle $\{z_1, \ldots, z_K\} \subset G$, für die Geraden g_i durch z_i existieren, sodass die Schnitte $g_i \cap \partial G$ mit dem Rand aus endlich vielen Punkten und abgeschlossenen Intervallen bestehen.*

Lemma 4.19 (Tricks zur Residuenbestimmung).
Es sei U offen, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ und $g, h : U \to \mathbb{C}$ holomorph.

(a) *Falls f in z_0 einen einfachen Pol hat, gilt*

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

(b) *Falls f in z_0 einen Pol der Ordnung k hat, so gilt für $\phi(z) = (z - z_0)^k f(z)$,*

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \frac{\phi^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}.$$

(c) *Falls h in z_0 eine einfache Nullstelle und g in z_0 kein Nullstelle hat, also $h(z_0) = 0, h'(z_0) \neq 0$ und $g(z_0) \neq 0$, so gilt für $f = g/h$*

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Satz 4.20 (Integrale über $\mathbb{R}$).
Sei $\mathbb{H} = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $S = \{z_1, \ldots, z_K\} \subset \mathbb{H}$, sowie $U \supset \bar{\mathbb{H}} = \{z : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ offen. Falls $f : U \setminus \{z_1, \ldots, z_K\} \to \mathbb{C}$ holomorph ist, $\int_\mathbb{R} f\,d\lambda$ existiert und $\lim_{z\to\infty} f(z)z = 0$, so gilt

$$\int_\mathbb{R} f\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{K} \mathrm{Res}_f(z_k).$$

Satz 4.21 (Null- und Polstellen zählendes Integral für $\bigcirc$).
Sei U offen und $f : U \to \mathbb{C}$, $f \neq 0$, eine meromorphe Funktion. Sei N_f, P_f die Menge der Null- bzw. Polstellen. Für $\bar{B}_r(z_0) \subseteq U$ und $C = \partial B_r(z_0)$ mit $C \cap (N_f \cup P_f) = \emptyset$ sowie N, P die Anzahl der Null- bzw Polstellen (mit Vielfachheit/Ordnung) in $B_r(z_0)$, gilt

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = N - P.$$

Satz 4.22 (Satz von Rouché für ○).
Sei U offen, $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen und $\bar{B}_r(z_0) \subseteq U$. Falls

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \forall z \in \partial B_r(z_0),$$

so haben f und g in $B_r(z_0)$ gleich viele Nullstellen (mit Vielfachheiten).

Korollar 4.23 (Fundamentalsatz der Algebra).
Jedes komplexe Polynom n-ten Grades hat n Nullstellen (mit Vielfachheiten) in $\mathbb{C}$.

Korollar 4.24 (Fixpunkte).
Sei U offen, $h : U \to \mathbb{C}$ und $\bar{B}_1(0) \subseteq U$. Falls $|h(z)| < 1$ für alle z mit $|z| = 1$, so hat h in $B_1(0)$ genau einen Fixpunkt.

Satz 4.25 (Satz v. Hurwitz).
Sei G ein Gebiet und $f_n : G \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge holomorpher Funktionen, die kompakt gegen $f : G \to \mathbb{C}$ konvergiert. Falls jedes f_n höchstens m a-Stellen besitzt so hat auch f höchstens m a-Stellen oder ist konstant a, d.h.

$$|f_n^{-1}\{a\}| \leq m < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad |f^{-1}\{a\}| \leq m \quad \text{oder} \quad f \equiv a.$$

Insbesondere ist die Grenzfunktion von kompakt konvergenten, injektiven, holomorphen Funktion entweder wieder injektiv (und holomorph) oder konstant.

Kapitel 5. Einfach zusammenhängende Gebiete

Lemma 5.3 (sternförmig ⇒ einfach zusammenhängend).
Jedes sternförmige Gebiet ist einfach zusammenhängend.

Lemma 5.5 (Existenz einer Kreiskette).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $\gamma : [0,1] \to U$ ein Weg, dann existiert eine Kreiskette entlang γ in U.

Lemma 5.7 (Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung entlang γ).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $\gamma : [0,1] \to U$ ein Weg. Weiters seien $(B_i)_{i=1}^n$ und $(\tilde{B}_j)_{j=1}^m$ zwei Kreisketten entlang γ. Falls $f_0 : B_0 \to \mathbb{C}$ und $\tilde{f}_0 : \tilde{B}_0 \to \mathbb{C}$ auf $B_0 \cap \tilde{B}_0$ übereinstimmen, so stimmen auch die jeweiligen analytische Fortsetzungen f_n bzw. $\tilde{f}_m$ auf $B_n \cap \tilde{B}_m$ überein, d.h.

$$f_0(z) = \tilde{f}_0(z) \quad \forall z \in B_0 \cap \tilde{B}_0 \qquad \Rightarrow \qquad f_n(z) = \tilde{f}_m(z) \quad \forall z \in B_n \cap \tilde{B}_m.$$

Die analytische Fortsetzung hängt also wirklich nur vom Weg und nicht von der gewählten Kreiskette ab.

Satz 5.8 (Monodromiesatz, Wege homotop ⇒ analytische Fortsetzungen ident).
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $\gamma, \tilde{\gamma} : [0,1] \to U$ zwei homotope Wege in U mit $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = z_0$ und $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(1) = z_1$ und Homotopie $h : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$. Desweiteren sei $f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion die entlang jeden Weges $\gamma_s = h(\cdot, s)$ analytisch fortsetzbar ist, dann gilt, dass die analytische Fortsetzung g von f entlang γ mit der analytischen Fortsetzung $\tilde{g}$ von f entlang $\tilde{\gamma}$ übereinstimmt, d.h. es existiert $\delta > 0$, sodass

$$g(z) = \tilde{g}(z) \quad \forall z \in B_\delta(z_1).$$

Korollar 5.9 (Homotopieinvarianz von Kurvenintegralen).
Sei $U \neq \emptyset$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma, \tilde{\gamma} : [0,1] \to U$ zwei homotope stückweise glatte Wege/Kurven in U, dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Insbesondere gilt $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, falls γ nullhomotop ist.

Korollar 5.10 (Stammfunktion auf einfach zusammenhängenden Gebieten ✓).
Sei $G \neq \emptyset$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent

(a) f ist holomorph.

(b) f besitzt eine Stammfunktion.

(c) Für alle stückweise glatten, geschlossenen Kurven γ in G gilt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Insbesondere, erfüllt jedes einfach zusammenhängende Gebiet Bedingung (a) im Residuensatz 4.16.

Korollar 5.11.
Sei $G \neq \emptyset$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $0 \notin f(G)$, dann existiert eine holomorphe Funktion $g : G \to \mathbb{C}$, genannt ein holomorpher Logarithmus von f, mit

$$e^g = f.$$

Lemma 5.12.
Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine bijektive holomorphe (=biholomorphe) Abbildung, dann ist auch $f(G)$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet.