(1) FOLGERUNGEN AUS HAHN-BANACH: Sei X ein normierter Raum. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Für jedes $x \in X$, $x \neq 0$ existiert ein $x^* \in X^*$ mit

$$\|x^*\| = 1, \quad \text{und } x^*(x) = \|x\|.$$

(b) Zu $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ existiert ein $x^* \in X^*$ mit

$$x^*(x_1) \neq x^*(x_2).$$

(c) Für alle $x \in X$ gilt

$$\|x\| = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in X^*, \|x^*\|_{X^*} \leq 1\}.$$

(2) EXISTENZ EINER STETIGEN INVERSEN UND VOLLSTÄNDIGKEIT: Wir betrachten den Vektorraum der *endlichen Folgen*,

$$c_{00}(\mathbb{N}) := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \exists\ m_x \in \mathbb{N} \text{ so dass } x_n = 0 \text{ für alle } n > m_x\}.$$

Auf $c_{00}(\mathbb{N})$ ist für jedes $p \in [1, \infty]$, $\|\cdot\|_{\ell^p}$ eine Norm.

(a) Zeigen Sie, dass $T : c_{00}(\mathbb{N}) \to c_{00}(\mathbb{N})$,

$$T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (nx_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine lineare Abbildung definiert, die jedoch bezüglich keiner $p-$Norm stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass $A : c_{00}(\mathbb{N}) \to c_{00}(\mathbb{N})$,

$$A((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (n^{-1}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine bijektive Abblidung definiert, die bezüglich jeder $p-$Norm stetig ist, die aber keine stetige Inverse besitzt. Erklären Sie, warum dies nicht im Widerspruch zum Satz über die stetige Inverse steht.

(3) ℓ^∞ UND DUALITÄT: Wir zeigen, dass $\ell^1(\mathbb{N})$ nicht der Dual von $\ell^\infty(\mathbb{N})$ sein kann.

(a) Zeigen Sie dass ein Banachraum X separabel ist wenn X^* separabel ist.
Hinweis: Wählen Sie eine dichte Folge $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Einheitssphäre von X^* und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\|x_n\|_X = 1$ und $x_n^*(x_n) \geq \frac{1}{2}$. Verwenden Sie Korollar 4.12 aus Teil 2 der Vorlesung.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Menge

$$D \subset c_{00}(\mathbb{N}), \quad D := \{x \in c_{00}(\mathbb{N}) : x_n \in \mathbb{Q}\ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

dass $\ell^1(\mathbb{N})$ separabel ist und schließen Sie aus (a) und Aufgabe 2 von Blatt 7, dass $\ell^1(\mathbb{N}) \not\simeq (\ell^\infty(\mathbb{N}))^*$ ist.

(4) BANACHRÄUME HABEN KEINE ABZÄHLBARE HAMEL-BASIS: Es sei X ein unendlich-dimensionaler Banachraum. Verwenden Sie den Satz von Baire, um zu zeigen, dass X keine abzählbare Hamel-Basis hat.

(5) EXISTENZ NIRGENDS DIFFERENZIERBARER FUNKTIONEN: Wir betrachten den Raum $C[0,1]$ der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$.

(a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$O_n = \left\{ f \in C[0,1] \colon \sup_{|h| \leq 1/n,\ t+h \in [0,1]} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| > n \text{ für alle } t \in [0,1] \right\}$$

eine dichte offene Teilmenge von $C[0,1]$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede Funktion $f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ nirgends differenzierbar ist.

(c) Schließen Sie mit dem Satz Baire die Existenz von stetigen, aber nirgends differenzierbaren Funktionen.