Satz 2.13 (EINDEUTIGKEITSSATZ)

Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, $U \neq \emptyset$ und $f \in C(U, \mathbb{R}^d)$ lokal Lipschitz-stetig bzgl. des 2. Arguments. Dann existiert höchstens eine Lösung des Anfangswertproblems (2.1).

Beweis:

Seien $u, v \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^d)$ Lösungen für ein $t_1 > 0$.
Insbesondere gilt $(t, u(t)), (t, v(t)) \in U \quad \forall\, t \in [t_0, t_1]$.

Dann ist die Menge

$$\mathcal{K} := \{ (t, u(t)), (t, v(t)) \in U : t \in [t_0, t_1] \} \subset U \quad \text{kompakt}$$

und wegen Proposition 2.6 existiert ein $L > 0$, so dass

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L\,|x-y| \qquad \forall\, (t,x), (t,y) \in \mathcal{K}.$$

Da u, v auch die Integralgleichung erfüllen folgt

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,ds \quad , \qquad v(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\,ds$$

für $t \in [t_0, t_1]$. Also gilt für $t \in [t_0, t_1]$

$$|u(t) - v(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) - f(s, v(s))\,ds \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, u(s)) - f(s, v(s))|\,ds \leq L \int_{t_0}^{t} |u(s) - v(s)|\,ds$$

Mit $\varphi(t) := |u(t) - v(t)|$ für $t \in [t_0, t_1]$ gilt $\varphi \in C([t_0, t_1])$ und

$$\varphi(t) \leq L \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,ds$$

Mit dem Lemma von Gronwall folgt

$$0 \leq \varphi(t) \leq 0 \Rightarrow \varphi(t) = 0 \Rightarrow u(t) = v(t).$$

Für u, v Lsg. auf $[t_2, t_0]$ für ein $t_2 < t_0$ ist der Beweis analog. $\square$

Bemerkung 2.14 Wir haben in Beispiel gesehen, dass für $f(u) = \sqrt{|u|}$ keine eindeutige Lösung existiert für (t_0, u_0) mit $u_0 = 0$. Insbesondere kann daher f in keiner Umgebung von $u=0$ lokal Lipschitz-stetig sein. Dies kann man folgendermaßen sehen:

Ang: $\exists\, L > 0: \quad |f(u) - f(\bar{u})| \leq L|u - \bar{u}| \quad \forall\, u, \bar{u} \in I \subset \mathbb{R},\ 0 \in I$ ein Intervall

Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ eine Folge in I.

Nach dem Mittelwertsatz (Analysis I) existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein ξ_n zwischen u_n und u_{n+1} mit

$$|f(u_{n+1}) - f(u_n)| = \frac{1}{2}\xi_n^{-1/2}\,|u_{n+1} - u_n|$$

Da $u_n \to 0$ für $n \to \infty$ folgt $\xi_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Wähle also $N \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{2}\xi_N^{-1/2} > L$. Dann liefert dies einen Widerspruch zur behaupteten Lipschitz-Stetigkeit.

In vielen Fällen ist die Funktion f auf der rechten Seite der Gleichung (2.1) von höherer Regularität.
Dies überträgt sich unmittelbar auf die Lösung.

Lemma 2.15 Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, $U \neq \emptyset$ und $f \in C^k(U; \mathbb{R}^d)$, $k \geq 1$. Sei $u \in C^1(I; \mathbb{R}^d)$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$, die lokale Lösung des Anfangswertproblems (2.1).
Dann gilt $u \in C^{k+1}(I; \mathbb{R}^d)$.

Beweis: Da $u \in C^1(I;\mathbb{R}^d)$ die Gleichung erfüllt folgt mit $u=(u_1,\dots,u_d)$: $u_i'(t) = f_i(t,u(t))$ für $i \in \{1,\dots,d\}$

Mit der Kettenregel folgt dass u_i' differenzierbar ist

$$u_i''(t) = \partial_1 f_i(t,u(t)) + \nabla_x f_i(t,u(t)) \cdot u'(t)$$

und nachdem die rechte Seite nach Voraussetzung stetig ist, folgt $u_i \in C^2(I)$ und somit $u \in C^2(I,\mathbb{R}^d)$.

Für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ folgt die Aussage mit Induktion. $\square$

Eine weitere Anwendung des Lemmas von Gronwall liefert die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsbedingungen, bzw. von kleinen Störungen der rechten Seite

Satz 2.13 (STETIGE ABHÄNGIGKEIT VON ANFANGSBEDINGUNG bzw. RECHTER SEITE)

Sei $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ offen und $g,f \in C(U,\mathbb{R}^d)$ lokal Lipschitz-stetig bezgl. des 2. Arguments. Sei $V \subset U$ kompakt und seien $(t_0,u_0),(t_0,v_0) \in V$. Sind u und v Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= f(t,u(t)) \\ u(t_0) &= t_0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} v'(t) &= g(t,v(t)) \\ v(t_0) &= v_0 \end{aligned}\right\}$$

so dass die Graphen der Lösungen in V enthalten sind, so existieren $L>0$ und $M = \max_{(t,x)\in K} |f(t,x)-g(t,x)| \geq 0$:

$$|u(t)-v(t)| \leq \left(|u_0 - v_0| + M|t-t_0|\right)e^{L|t-t_0|}.$$

Beweis: Sei $t \geq t_0$, so dass $(s,u(s)), (s,v(s)) \in \tilde{V} \;\forall s \in [t_0,t]$
Dann folgt

$$|u(t) - v(t)| \leq |u_0 - v_0| + \int_{t_0}^{t} |f(s,u(s)) - g(s,v(s))| ds$$

Nach Voraussetzung existiert $L > 0$ sodass gilt

$$|f(s,u(s)) - g(s,v(s))| \leq |f(s,u(s)) - f(s,v(s))| + |f(s,v(s)) - g(s,v(s))|$$
$$\leq L|u(s) - v(s)| + M$$

$$\Rightarrow |u(t) - v(t)| \leq |u_0 - v_0| + L\int_{t_0}^{t} |u(s) - v(s)| ds + M|t - t_0|$$

Mit $\phi(t) := |u(t) - v(t)|$ und Gronwall folgt die
Analog für $t \leq t_0$, indem die Vorzeichen entsprechend angepasst werden. □

2.2 MAXIMALES EXISTENZINTERVALL – GLOBALE EXISTENZ

Wir betrachten wieder das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= f(t,u(t)) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}\right\} \quad (2.3)$$

für $f: U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, U offen, $U \neq \emptyset$, f stetig und lokal Lipschitz-stetig bezüglich des 2. Arguments („bzgl. x").

m letzen Abschnitt haben wir die lokale Lösbarkeit für $v_0 \in U$ auf einem Intervall $[t_0 - T, t_0 + T]$ diskutiert, für hinreichend kleinen $T > 0$.

Ist $u \in C^1([t_0-T, t_0+T], \mathbb{R}^d)$ die eindeutige Lösung, dann können wir, da $u(t_0+T) =: \tilde{v}_0 \in U$ gilt, das Anfangswertproblem für obige Differentialgleichung mit Anfangswert $u(t_0+T) = \tilde{v}_0$ betrachten und wieder den Satz von Picard-Lindelöf anwenden, um eine Lösung auf einem Intervall um t_0+T zu erhalten und so die Lösung lokal fortsetzen. Dazu ist folgende Beobachtung essentiell.

Bemerkung 2.14 Ist u_1 eine Lösung auf $[t_0, t_1]$ und u_2 eine Lösung auf $[t_1, t_2]$ mit Anfangswerten $u_1(t_0) = u_0$ und $u_2(t_1) = u_1(t_1)$, dann ist

$$u(t) := \begin{cases} u_1(t) & t \in [t_0, t_1] \\ u_2(t) & t \in [t_1, t_2] \end{cases} \in C^1([t_0, t_2], \mathbb{R}^d)$$

eine Lösung von (2.3).
Dabei folgt die stetige Differenzierbarkeit in $t = t_1$ aus der Gleichung, denn es gilt

$$u_1'(t_1) = f(t_1, u_1(t_1)) = f(t_1, u_2(t_1)) = u_2'(t_1)$$

mit den jeweils einseitigen Ableitungen.

Diese Eigenschaft und die Eindeutigkeit von Lösungen zeigt, dass folgende Definition sinnvoll ist.

Definition 2.15 Für $(t_0, u_0) \in U$ seien $T_\pm(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ wie folgt definiert