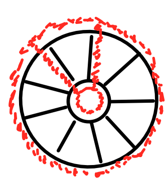
PS Analysis 3 **WS 2024/25**

Übungszettel 6 (CA)

Karin Schnass *ankreuzbar bis 12.11., 8:00*

1. (a) Es sei $\gamma : [a,b] \to U$ eine stückweise glatte Kurve und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Zeige, dass $M = \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| < \infty$ und dass
$$\Big|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \leq M \cdot \ell(\gamma).$$
   (b) Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Zeige, dass f genau dann (reell) differenzierbar in t_0 ist, wenn $\mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in t_0 differenzierbar sind. Zur Erinnerung f is differenzierbar in t_0, wenn $c \in \mathbb{C}$ existiert, sodass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit
$$\left|\frac{f(t_0) - f(t)}{t_0 - t} - c\right| \leq \varepsilon \qquad \forall t \in [a,b] : |t_0 - t| \leq \delta.$$
   Zeige, dass falls f auf $[a,b]$ differenzierbar ist, gilt $(\mathrm{Re}f)' = \mathrm{Re}(f')$ und $(\mathrm{Im}f)' = \mathrm{Im}(f')$.
   (c) Es sei $\gamma : [a,b] \to U \subseteq \mathbb{C}$ (reell) differenzierbar mit Ableitungsfunktion $\gamma' : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Zeige, dass $f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ (reell) differenzierbar ist und dass gilt $(f \circ \gamma)' = (f' \circ \gamma) \cdot \gamma'$.

2. Beweise ohne das Lemma von Goursat zu verwenden, aber mit derselben Beweisstrategie:
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Dann gilt für jedes abgeschlossene Quadrat (mit Innerem) $\square \subseteq U$, und jede einfache stückweise glatte Kurve γ, die $\partial\square$ durchläuft,
$$\int_{\partial\square} f(z)\,\mathrm{d}z := \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{6.1}$$

3. Beweise den Cauchy'scher Integralsatz für $\circledcirc \subseteq U$:
Sei $U \neq \emptyset$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Falls $\{z : |z - z_0| \in [r,R]\} = \bar{B}_R(z_0) \backslash B_r(z_0) \subseteq U$ dann gilt für $C_r = \partial B_r(z_0)$ bzw. $C_R = \partial B_R(z_0)$
$$\oint_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z.$$
Hinweis: 

4. Zeige (mittels partieller Integration), dass der folgende Grenzwert existiert, und berechne ihn mit derselben Strategie wie in der VO und Hilfsfunktion $f(z) = \frac{e^{iz}-1}{z}$,
$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

5. Berechne mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung und einem geeigneten Satz aus der VO für $C_1 = \bar{B}_{1/2}(0)$, $C_2 = \bar{B}_2(0)$ und $C_3 = \bar{B}_1(1)$ das folgende Integral
$$\oint_{\partial C_i} \frac{\sin(z)}{z^2 - 1}\,\mathrm{d}z.$$