Proseminar Numerische Mathematik 2 am 18. März 2025

(1) Zeigen Sie folgende Aussage: Sei $\Phi \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathbb{R})$ eine Kontraktion mit Fixpunkt $x^\star$. Ist $\Phi^{(j)}(x^\star) = 0$ für $1 \leq j \leq p$ und $\Phi^{(p+1)}(x^\star) \neq 0$, so hat die Fixpunktmethode mit Iterationsfunktion Φ die Ordnung $p+1$ und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - x^\star}{(x^{(k)} - x^\star)^{p+1}} = \frac{\Phi^{(p+1)}(x^\star)}{(p+1)!}.$$

Hinweis: Eine Iterationsfunktion $\mathbf{\Phi}$ mit Fixpunkt $\mathbf{x}^\star$ heißt genau dann konvergent von (mindestens) Ordnung $p \geq 1$, falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle Startwerte $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathcal{B}_\delta(\mathbf{x}^\star)$ gilt:

$$\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^\star\| \leq C\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^\star\|^p, \quad \text{für } n = 0, 1, \ldots$$

(2) Für die Funktion $\ln(x)$ soll an der Stelle $a > 0$ eine Näherung gefunden werden. Dazu kann das Verfahren von Newton zur Bestimmung der Nullstelle von

$$f\colon x \mapsto e^x - a$$

verwendet werden. Geben Sie die dazugehörige Iterationsvorschrift an und weisen Sie anhand von Aufgabe (1) quadratische Konvergenz nach. Ist die Konvergenz sogar kubisch?

(3) Für eine reguläre Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ist die inverse Matrix $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ die Lösung der nichtlinearen Gleichung

$$\mathbf{X}^{-1} - \mathbf{A} = 0.$$

Das Newton-Verfahren zur Lösung dieser Gleichung führt auf das **Verfahren von Schulz**

$$\mathbf{X}^{(n+1)} := \mathbf{X}^{(n)} + \mathbf{X}^{(n)}(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{X}^{(n)}) \quad \text{für } n = 0, 1, \ldots.$$

Zeigen Sie: Für jede Anfangsmatrix $\mathbf{X}^{(0)} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mit $\|\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{X}^{(0)}\| \leq q < 1$ (für eine gegebene submultiplikative Matrixnorm) konvergiert die Matrixfolge $\left\{\mathbf{X}^{(i)}\right\}_{i\geq 0}$ gegen die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ mit den Abschätzungen

$$\|\mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{A}^{-1}\| \leq \frac{\|\mathbf{X}^{(0)}\|}{1-q}\|\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{X}^{(n)}\| \leq \frac{\|\mathbf{X}^{(0)}\|}{1-q} q^{(2^n)} \quad \text{für } n = 0, 1, \ldots.$$

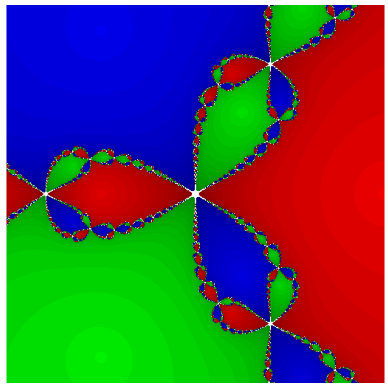
Hinweis: Sei $\mathbf{R}^{(n)} := \mathbf{A}\mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{I}$. Zeige Sie, dass $\mathbf{R}^{(n+1)} = -\left[\mathbf{R}^{(n)}\right]^2$ und bestimmen Sie damit eine obere Schranke für $\|\mathbf{R}^{(n)}\|$. Drücken Sie $\mathbf{A}^{-1}$ durch $\mathbf{R}^{(0)}$ aus.

(4) **(Newton-Fraktale)** Betrachten Sie die komplexe Funktion $z \mapsto z^3 - 1$ für $z \in \mathcal{U} := \{a + b\,\mathrm{i} \mid |a| \leq 1 \text{ und } |b| \leq 1\}$. Das Newtonverfahren konvergiert abhängig vom Startwert $z_0 \in \mathcal{U}$ zu einer der drei Lösungen. Ordnen Sie den drei Lösungen jeweils eine Farbe zu. Jedem Startwert in $\mathcal{U}$ ordnen Sie die Farbe der Lösung zu, zu der das Verfahren konvergiert. Dadurch entsteht ein fraktales Bild.
Hinweise:

- Verwenden Sie das Modul `Image` der Bibliothek `PIL`
- Erstellen Sie ein Bild mit 512×512 px
- Unterteilen Sie das Intervall $[-1, 1]$ und $[-\mathrm{i}, \mathrm{i}]$ jeweils in 512 Punkte.

- Die Punkte des so erhaltenen Gitters sind die Startwerte des Newtonverfahren.
- Verwenden Sie für das Newtonverfahren eine Toleranz von $1e{-}3$. Die maximale Anzahl von Iterationsn ist 20.
- Färben Sie das dem Startwert zugeordnete Pixel in der Farbe der Lösung, zu der der Abstand kleiner oder gleich der Toleranz ist. Ist der Abstand zu allen Lösungen größer, färben Sie das Pixel weiß. Verwenden Sie dazu die Funktion `putpixel`.
- Speichern Sie das Bild als `png` mit der Funktion `save`.

Das Ergebnis sollte ungefähr so aussehen



(5) **(λ-Strategie)** Eine einfach zu implementierende Variante des gedämpften Newton-Verfahres ist die sogenannte λ-Strategie. Wir befinden uns im k-ten Iterationsschritt, $\Delta\mathbf{x}^{(k)} := -[\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$ und $\lambda := 1$.

Solange $\left\|\mathbf{f}(x^{(k)} + \lambda\Delta\mathbf{x}^{(k)})\right\| > \left\|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})\right\|$ setzte $\lambda \leftarrow \frac{\lambda}{2}$.

Man stoppt die Iteration falls die Ungleichung nicht mehr erfüllt ist oder λ zu klein wird (z.B. $\lambda < 10^{-7}$). Im letzten Fall bricht man die Newton-Iteraiton mit einer Fehlermeldung ab, ansonsten setzt man
$$\mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{x}^{(k)} + \lambda\Delta\mathbf{x}^{(k)}.$$

Testen Sie die λ-Strategie anhand des Beispiels von Freudenstein und Roth und Aufgabe (4) von diesem Blatt. Was ändert sich?