(1) Projektion zur direkten Summe: Sei X ein vollständiger normierter Raum und seien $X_1, X_2 \subset X$, so dass gilt

$$X = X_1 \oplus X_2.$$

Insbesondere gilt für alle $x \in X$, $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Zeigen Sie, dass $P : X \to X$, $Px = x_1$ die eindeutige Projektion ist mit $\mathrm{rg}(P) = X_1$ und $\ker(P) = X_2$.

(2) Graphensatz und Vollständigkeit: Wir betrachten den Unterraum

$$X := \{f \in C[0,1] \colon f' \text{ existiert und ist stetig}\} \subset C[0,1]$$

versehen mit der Supremumsnorm und die lineare Abbildung

$$A \colon X \to C[0,1], \qquad f \mapsto f',$$

wobei f' die Ableitung von f bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass der Graph von A abgeschlossen ist.

(b) Zeigen Sie, dass A unbeschränkt ist.

(3) Kompaktheit in metrischen Räumen I: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $M \subset X$ ist relativ kompakt.

(b) Jede Folge in M besitzt eine Teilfolge, die in X konvergiert.

(4) Kompaktheit in metrischen Räumen II: Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ heißt *totalbeschränkt*, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_n \in A$ mit $A \subset \bigcup_{j=1}^n B(x_j, \varepsilon)$ gibt.

(a) Zeigen Sie, dass $A \subset X$ genau dann kompakt ist, wenn A abgeschlossen und totalbeschränkt ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass die Voraussetzung dass X vollständig ist, nicht weggelassen werden kann.

(5) Kompakte Operatoren: Seien X, Y, Z Banachräume. Seien $A \in L(X, Y)$, $B \in L(Y, Z)$. Ist einer der beiden Operatoren A, B kompakt, so ist BA kompakt.