1 EINFÜHRUNG

1.1 KLASSIFIKATION

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Sei $C^k(U, V)$ die Menge der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f: U \to V$.

Im Folgenden schreiben wir $C(U,V) = C^0(U,V)$

$$C^\infty(U,V) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(U,V) \quad \text{und} \quad C^k(U) = C^k(U,\mathbb{R})$$

Eine GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNG („GDGL" bzw. engl. „ODE" für ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION) ist eine Funktionalgleichung der Form

$$\boxed{F(t, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(k)}) = 0} \qquad (*)$$

für eine unbekannte Funktion $u \in C^k(J)$, $J \subset \mathbb{R}$ mit Ableitungen $u^{(j)}(t) := \dfrac{d^j u(t)}{d x^j}$ $\quad j \in \{1, \ldots, k\}$.

Weiters sei $F \in C(U)$ und $U \subset \mathbb{R}^{k+2}$ offen.

Man nennt t auch die „unabhängige Variable" und u die „abhängige Variable".

Die höchste in $(*)$ vorkommende Ableitung von u definiert die ORDNUNG der Differentialgleichung.

Eine (KLASSISCHE) LÖSUNG von $(*)$ ist eine Funktion $\phi \in C^k(I)$, $I \subset J$, sodass $F(t, \phi(t), \phi^{(1)}(t), \ldots, \phi^{(k)}(t)) = 0 \quad \forall t \in I$

Mit Hilfe der impliziten Funktionensatzes läßt sich (*) unter geeigneten Voraussetzungen an F nach $u^{(k)}$ auflösen und man erhält eine EXPLIZITE Form

$$\boxed{u^{(k)}(t) = f(t, u(t), u^{(1)}(t), \ldots, u^{(k-1)}(t))} \quad (*)$$

Dies ist die Form, in der DGLs in der Praxis am häufigsten auftreten und wir beschränken uns in Zukunft auf Gleichungen der Form (*) bzw. allgemeiner auf SYSTEME VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN: für $u = (u_1, \ldots, u_n) \in C^k(J, \mathbb{R}^n)$, $J \subset \mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} u_1^{(k)} &= f_1(t, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(k-1)}) \\ &\vdots \\ u_n^{(k)} &= f_n(t, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(k-1)}) \end{aligned}\right\}$$

für $f = (f_1, \ldots, f_e) \in C(\mathbb{R}^{k+1})$ und $u^{(j)} = (u_1^{(j)}, \ldots u_n^{(j)})$.

Ein System von Differentialgleichungen heißt LINEAR, falls

$$u_i^{(k)}(t) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} a_{i,j,m}(t)\, u_m^{(j)}(t) + g_i(t)$$

für Funktionen $a_{i,j,m}, g_i : J \to \mathbb{R}$.

Weiters heißt ein lineares System HOMOGEN, falls $g_i = 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Eine Gleichung der Form (*) kann immer auf ein System 1. Ordnung transformiert werden:

Sei $v := (\underset{v_1,}{u}, \underset{v_2,}{u^{(1)}}, \dots, \underset{v_k}{u^{(k-1)}})$. Dann läßt sich (*) schreiben als

$$v_1'(t) = v_2(t)$$
$$\vdots$$
$$v_{k-1}'(t) = v_k(t)$$
$$v_k'(t) = f(t, v)$$

Weiters kann man auch $w := (t, v)$ definieren und erhält

$$w_1'(t) = 1$$
$$w_2'(t) = w_3(t)$$
$$\vdots$$
$$w_k'(t) = w_{k+1}(t)$$
$$w_{k+1}'(t) = f(w(t))$$

Ein solches System, wo die rechte Seite (insbesondere f) nicht explizit von t abhängt nennt man AUTONOM.

1.2 Erste Beispiele und Anmerkungen

Gewöhnliche Differentialgleichungen treten in der Modellierung dynamischer Vorgänge auf. Die unabhängige Variable (oben "t") steht oft (aber natürlich nicht immer) für die „Zeit".

Je nach Literatur und Kontext wird oft recht unterschiedliche Notation verwendet. Insbesondere liest man oft statt u' bzw. u'' auch $\dot{u}$ bzw. $\ddot{u}$.
Weiters ist die Bezeichnung der abhängigen und unabhängigen Variablen natürlich willkürlich.

<u>Beispiel</u>:

$$u''(t) + \frac{1}{t} u'(t) + \sin(t + u(t)^2) = 0$$

oder
$$\ddot{y} + \frac{\dot{y}}{x} + \sin(x + y^2) = 0$$

Gegeben eine Differentialgleichung, ist natürlich unser vorrangiges Ziel, diese zu lösen. Dabei ist a priori nicht klar, ob eine Lösung überhaupt existiert bzw. falls, wie viele. Auch ist es im Allgemeinen nicht möglich, Lösungen explizit anzugeben (außer in einfachen Spezialfällen, die wir in der VO teilweise behandeln).

Neben „gewöhnlichen" Differentialgleichungen, in denen die unbekannte Funktion von <u>einer</u> Variable abhängt, spielen auch „partielle" Differentialgleichungen („PDEs") eine zentrale Rolle, z.B. $u = u(t,x)$

$$\partial_t^2 u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0$$

(Wellengleichung in 1+1 Dim.)

Dies sind <u>nicht</u> Gegenstand der VO.

Beispiel 1.1

Sei $u(t)$ die Größe einer Population zur Zeit t (oder des Kapital, ...). Die Ableitung u' beschreibt die zeitliche Änderung der Population:

$$u'(t) < 0 \rightarrow \text{Abnahme}$$

$$u(t) = 0 \rightarrow \text{keine Änderung}$$

$$u'(t) > 0 \rightarrow \text{Zunahme}$$

Annahme (sehr vereinfacht): Die zeitliche Änderung der Population ist proportional zum aktuellen Bestand, d.h. es gilt die Gleichung

$$\underline{u'(t) = a u(t)} \qquad a \in \mathbb{R} \qquad (1.1)$$

a .. Wachstumsrate

Eine Familie von Lösungen von (1.1) ist

$$\underline{u(t) = c e^{at}} \qquad \text{für beliebiges } c \in \mathbb{R}.$$

Ein Lösung, die noch von allgemeinen Kontenten („Parametern") abhängt, nennt man <u>ALLGEMEINE LÖSUNG</u> der Differentialgleichung.

Oft werden zusätzlich noch Bedingungen an die Lösung gefordert, z.B. es soll gelten $u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}$ zum Zeitpunkt $t_0 \in \mathbb{R}$. Solche Bedingungen nennt man <u>RANDBEDINGUNGEN</u> bzw.

ANFANGSBEDINGUNGEN (wenn t_0 der „Startpunkt" ist und wir an der Lösung für $t > t_0$ bzw. $t \in I$ für $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $t_0 \in I$ interessiert sind.)

Diese Bedingungen legen den Wert freier Parameter einer allgemeinen Lösung fest und man erhält eine SPEZIELLE (bzw. PARTIKULÄRE) LÖSUNG. Die Forderung nach Anfangsbedingungen führt auf ein ANFANGSWERTPROBLEM:

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= a\,u(t), \quad t > t_0 \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

Als Lösung finden wir

$$\underline{u(t) = u_0\, e^{a(t-t_0)},} \qquad t \geq t_0 .$$

1.3 Skalare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Skalare Differentialgleichungen 1. Ordnung sind von der Form

$$u'(t) = F(t, u(t))$$

Für allgemeine F existiert keine Lösungsformel. Allerdings für spezielle Fälle, die wir im Folgenden betrachten werden. Zunächst wollen wir eine solche Gleichung geometrisch interpretieren:

1.3.1 Geometrische Interpretation

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= F(t, u(t)) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}\right\}$$

mit $F: I \times D$, $D \subset \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$.

Angenommen u ist eine Lösung, so ist

$$\gamma: t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ u(t) \end{pmatrix} \quad \text{ein Weg im } \mathbb{R}^2$$

der als LÖSUNGSKURVE oder INTEGRALKURVE bezeichnet wird.

Für den Tangentenvektor dieser Lösungskurve gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ u'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ F(t, u(t)) \end{pmatrix}$$

$\forall (t, u(t)) \in I \times D$, d.h. F bestimmt den Anstieg des Tangentialvektors an die Lösungskurve.

Das Vektorfeld $(t,x) \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ F(t,x) \end{pmatrix}$ bezeichnet man als das RICHTUNGSFELD zur Gleichung

$$u'(t) = F(t, u(t))$$

„Dies wird veranschaulicht, indem man jedem Punkt (t,x) ein kleines Geradenstück in Tangentialrichtung zuordnet. Lösungskurven lassen sich in dieses Richtungsfeld einpassen".

Die Niveaumengen

$$\mathcal{N}_c(f) = \{ (t,x) \in I \times D : F(t,x) = c \}$$

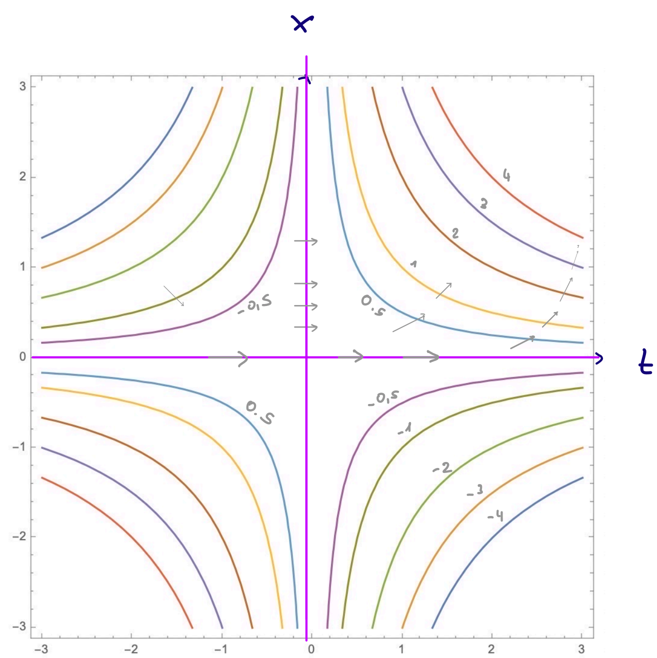
heißen <u>ISOKLINEN</u>.

<u>Beispiel 1.2</u> Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u'(t) = t\, u(t)$$

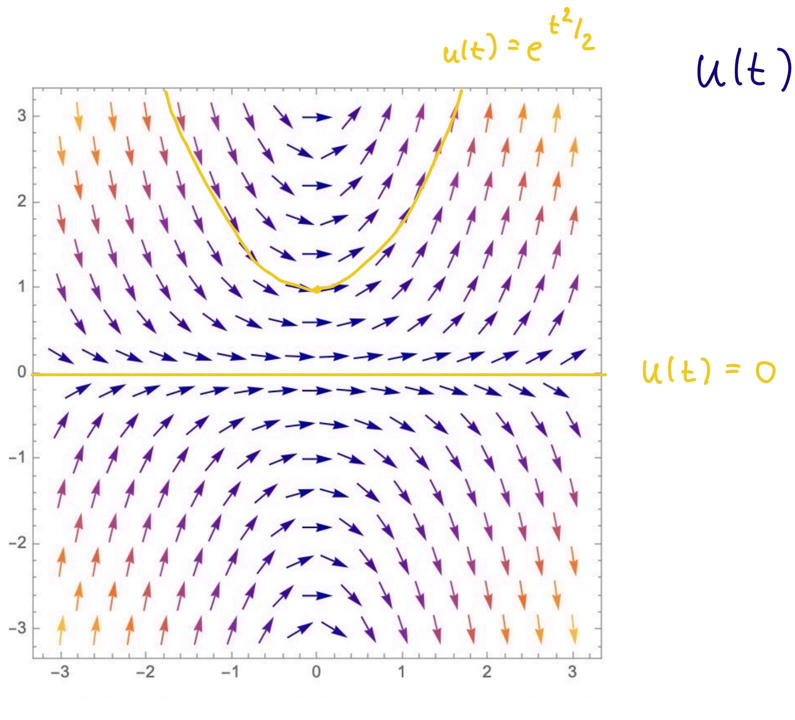
d.h: $F(t,x) = tx$. Für $c \in \mathbb{R}$ ist

$$F(t,x) = c \iff t \cdot x = c \iff x = \frac{c}{t} \quad t \neq 0$$



Die allgemeine Lösung der Gleichung lautet

$$u(t) = c\, e^{t^2/2}$$



1.3.2 TRENNUNG DER VARIABLEN

Wir betrachten im Folgenden skalare Differentialgleichungen der Form

$$u'(t) = g(t)\, f(u(t))$$

für gegebene Funktionen g, f. Man nennt eine solche Gleichung Differentialgleichung mit GETRENNTEN VARIABLEN.