(1) FOLGEN IN METRISCHEN RÄUMEN: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeigen Sie:

(a) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist der Grenzwert eindeutig.

(b) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

(c) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist die Folge eine Cauchy-Folge.

(d) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, so ist die Folge selbst konvergent.

(e) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $x \in X$ und ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen $y \in X$ konvergiert, so gilt $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

(2) TOPOLOGIEN - BEISPIELE: Überprüfen Sie, ob folgenden Mengensysteme Topologien auf den jeweiligen Mengen definieren.

(a) Sei X eine Menge und $\mathcal{T}_{\text{cofin}} := \{A \subset X : X \setminus A \text{ endlich}\} \cup \{\varnothing\}$.

(b) $S = \{0, 1, 2\}, \mathcal{T} := \{\varnothing, S, \{0, 1\}, \{1, 2\}\}$.

(c) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_1 := \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$.

(d) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_2 := \{A \subset \mathbb{R} : \forall x \in A \exists r \in \mathbb{Q}_+ \text{ mit } B(x, r) \subset A\}$, wobei

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} : d(x, y) < r\} \qquad \text{für} \qquad d(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|.$$

(3) TOPOLOGISCH ÄQUIVALENTE METRIKEN: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X$$

eine Metrik auf X definiert, so dass für die durch die Metriken induzierte Topologie gilt $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\tilde{d}}$. Hinweis: Verwenden Sie die Monotonie-Eigenschaften der Funktion $[0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

(4) P-ADISCHE METRIK: Für $X = \mathbb{Z}$, eine feste Primzahl p und $x, y \in X$ setzen wir

$$d_{(p)}(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ \frac{1}{p^{n(p)}}, & x \neq y, \ x - y = \pm\Pi_{q \text{ prim}} q^{n(q)} \end{cases}.$$

Dabei ist $\pm\Pi_{q \text{ prim}} q^{n(q)}$ die eindeutige Primfaktorenzerlegung von $x - y$.

(a) Zeigen Sie die Ungleichung

$$d_{(p)}(x, y) \leq \max\{d_{(p)}(x, z), d_{(p)}(z, y)\}$$

für $x, y, z \in \mathbb{Z}$ und folgern Sie, dass $d_{(p)}$ eine Metrik ist.

(b) Sei p eine feste Primzahl. Zeigen Sie, das $(p^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich $d_{(p)}$ gegen Null konvergiert.

(5) Diskrete Metrik: Sei $X \neq \varnothing$ eine Menge und $d : X \times X \to [0, \infty)$,

$$d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

die diskrete Metrik auf X. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) d definiert eine Metrik auf X.

(b) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in (X, d), so ist die Folge ab einem gewissen Index konstant.

(c) (X, d) ist vollständig.

(d) d induziert auf X die diskrete Topologie $\mathcal{T}_d$.

(e) Jede Teilmenge von X ist offen und abgeschlossen.

(f) Sei $(Y, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Jede Abbildung $(X, \mathcal{T}_d) \to (Y, \mathcal{T})$ ist stetig.