universität innsbruck
Institut für Mathematik

Aufgaben zur Algebra 1

Besprechungstermin: Do. 12. Dezember 2024

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Polynome irreduzibel im jeweiligen Polynomring sind:

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 \in \mathbb{R}[x]$$
$$x^4 - 2x^2 + 9 \in \mathbb{Q}[x].$$

Aufgabe 2
Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome in $\mathbb{C}[x]$ und in $\mathbb{R}[x]$. Ist der Grad aller irreduziblen Polynome in $\mathbb{Q}[x]$ beschränkt?

Aufgabe 3
Sei R ein faktorieller Ring und $p \in R[x]$ ein primitives Polynom. Sei weiter $a \in R$ Primelement, das den Leitkoeffizienten von p nicht teilt. Setze $\overline{R} := R/(a)$ und sei $\overline{p} \in \overline{R}[x]$ das Polynom das durch Reduktion der Koeffizienten von p modulo (a) entsteht. Zeigen Sie: ist $\overline{p}$ in $\overline{R}[x]$ irreduzibel, so auch p in $R[x]$.

Aufgabe 4
Sei R ein kommutativer Ring und $\partial\colon R[x] \to R[x]$ die formale Ableitungsabbildung (d.h. $\partial(\sum_{i=0}^d c_i x^i) := \sum_{i=1}^d i c_i x^{i-1}$). Zeigen Sie für $p, q \in R[x]$ und $r \in R$ die folgenden Aussagen:

(*i*) $\partial(p+q) = \partial(p) + \partial(q),\ \partial(rp) = r\partial(p)$.
(*ii*) $\partial(pq) = p\partial(q) + q\partial(p)$.