Aufgabe 2

Geben Sie allgemein an, welche Graphen in einfach/doppelt logarithmischer Skalierung als Geraden erscheinen

Einfach logarithmisch:

Form $y = a \cdot b^x$ mit $a > 0$ $b > 0$

wird hier die y-Skala logarithmisch skaliert $\log(y) = \log(a) + x \cdot \log(b)$

Bei Doppelt Logarithmischen:

Potenzfunktionen $y = k \cdot x^n$

in Logarithmisch: $\log(y) = \log(k) + n \cdot \log(x)$

↳ hier wird auf beide Achsen der Logarithmus Funktion angewandt!

Wiederholung Landau Symbole

Big - O - Notation wird bei Laufzeitalgorithmen verwendet

zB: Addition $n \to n$ hat $O(n)$

Multiplikation $n \to n^2$ hat $\mathcal{O}(n^2)$

Definitionen (formal)

$f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ genau dann wenn $\exists k > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ |f(n)| \leq k \cdot g(n)$

oder $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ genau dann wenn $\limsup \frac{|f(n)|}{g(n)} < \infty$

Aufgabe 4

a) Zeigen sie: Ist $f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0 \Rightarrow f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \to x_0$

Betrachte die Definition ist $f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$

d.h $\forall \varepsilon > \exists n_0$ sodass für $n > n_0$: $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x)| < \varepsilon |g(x)|\ \forall n > n_0$ (*)

Sei nun $f(x) = o(g(x))$ und nehme $\varepsilon = 1 \overset{(*)}{\Longrightarrow} |f(x)| < |g(x)|$

damit $\exists C$ in diesem Fall zB 1 sodass $f(x) = O(g(x))$

b) Zeigen sie: Ist $f(x) = o(x^k)$ für $x \to 0$ so ist auch $f(x) = o(x^\ell)$ für $\ell < k$

Sei $f(x) = o(x^k)$ für $x \to 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{|x^k|} = 0$

Für $\ell < k$ gilt $\frac{|f(x)|}{|x^\ell|} = \frac{|f(x)|}{|x^k|} |x^{k-\ell}|$

da $\ell < k$ geht $x^{k-\ell}$ gegen null und $\frac{|f(x)|}{|x^k|}$ eben $\to 0$

Es folgt $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{|x^\ell} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{|x^k|} x^{k-\ell}| = 0$ wenn $f(x) \in$ (

c) Zeigen Sie oder widerlegen Sie: Ist $f(x) = \mathcal{O}(h(x))$ für $x \to x_0$ und $g(x) = \mathcal{O}(h(x))$ für $x \to x_0$ so auch $f(x)+g(x) \in \mathcal{O}(h(x))$

Beim addieren von Funktionen dominiert die höchste Potenz

Allgemein: Sei $T_1(n) = O(f(n))$ und $T_2(n) = O(g(n))$ so gilt $T_1(n) + T_2(n) = O(\max(f(n), g(n)))$

Beweis: Da $T_1(n) = O(f(n)) \iff \exists C_1 > 0 \; \exists \varepsilon_1 > 0 \; \forall x \in B_\varepsilon(x_0): |T_1(n)| \le C_1 |f(n)|$

für $T_2(n) = O(g(n)) \iff \exists C_2 > 0 \; \exists \varepsilon_2 > 0 \; \forall x \in B_\varepsilon(x_0): |T_2(n)| \le C_2 |f(n)|$

$a + b \le 2 \cdot \max(a, b)$

nehme nun $\max(C_1, C_2)$ und $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

dann gilt $|T_1(n)| + |T_2(n)| \le C_1 |f(n)| + C_2 |g(n)| \le C(|f(n)| + |g(n)|) \le 2C \max(f(n), g(n))$

nun gilt also vor allem für $f_1 = O(g)$ und $f_2 = O(g)$ dann $f_1 + f_2 = O(\max(g, g)) = O(g)$ ✓

d) Zeigen Sie oder widerlegen sie:

(i) $2^x = o(4^x)$ für $x \to \infty$

müsste gelten $\exists C > 0 \; \exists \varepsilon \quad \forall x \in B_\varepsilon(x_0): |2^x| \le C \cdot 4^x)$

Es ist $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$ damit $2^x \le C \cdot (2^x)^2$ da $x \to \infty \iff 1 \le C \cdot 2^x$ Sei $C \ge 5$ ✓

(ii) $\dfrac{x}{1-x^2} - x + x^3 + o(x^4)$ für $x \to 0$

Betrachte die Taylorreihe $\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$

durch Multiplikation $\dfrac{x}{1-x^2} = x \cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6) = x + x^3 + x^5 + \dots$

Vergleich beide Seiten $x + x^3 + x^5 + \dots$ und $x + x^3 + o(x^4)$ da $\lim_{x \to 0} \dfrac{|x^5|}{|x^4|} = 0$ ist diese Aussage wahr!

es stimmt hier bis x^4 wobei dabei das Restterm schneller gegen null geht als x^4

(iii) $\dfrac{x}{1-x^2} = x + x^3 + \mathcal{O}(x^5)$ für $x \to 0$

Betrachte Taylor Series für $\dfrac{1}{1-x} = x + x^2 + x^4 + \dots$

Bedeutung: Restterm ist höchstens von Ordnung x^5

wiederum gilt durch Taylorreihe $\dfrac{1}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 \implies$ Vgl: $x + x^3 + \mathcal{O}(x^5)$ das Verhalten richtig erfasst

da bis x^3 volle Übereinstimmung und ab $\mathcal{O}(x^5)$

(iv) $\cos(x) = \mathcal{O}(1)$ für $x \to \infty$

Wenn $\cos(x) = O(1) \iff \exists C > 0 \; \exists \varepsilon > 0 \; \forall x \in B_\varepsilon(x_0): |\cos(x)| < C|g(x)$

da $|\cos(x)| \le 1 \; \exists C$ sodass $|\cos(x)| \le C \cdot 1$ damit ist diese Aussage für $x \to \infty$ wahr

Aufgabe 5

Schreibe die folgenden Ausdrücke in der Form $f(h) = \mathcal{O}(h^p)$ für $h \downarrow 0$ mit möglichst großem $p \in \mathbb{N}$

oder $g(n) = \mathcal{O}(n^q)$ für $n \in \mathbb{N}, n \to \infty$ mit kleinem $q \in \mathbb{N}$

a) $f(h) = 4(h^3+h)^2 - 4h^2 = 4(h^6 + 2h^4 + h^2) - 4h^2$

$$= 4h^6 + 8h^4 + 4h^2 - 4h$$

$$= 4h^6 + 8h$$

Berechne nun

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \left| \frac{4h^6+8h^4}{h^3} \right| = 4h^3 + 8h = 0 \\ &\lim_{h\to 0} \left| \frac{4h^6+8h^4}{h^4} \right| = 4h^2 + 8 = 8 \\ &\lim_{h\to 0} \left| \frac{4h^6+8h^4}{h^5} \right| = 4h + \frac{8}{h} = \infty \end{aligned}\right\} f(h) = \mathcal{O}(h^4)$$

b) $f(h) = \dfrac{e^h - e^{-h}}{2h} - 1$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{e^h - e^{-h}}{2h} - 1}{h} = \frac{e^h - e^{-h}}{2h^2} - \frac{2h}{2h^2} = \frac{e^h - e^{-h} - 2h}{2h^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hosp}}{\Longrightarrow}} \frac{e^h + e^{-h} - 2}{4h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{e^h - e^{-h}}{4} = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{e^h - e^{-h}}{2h} - 1}{h^2} = \frac{e^h - e^{h}}{2h^3} - \frac{1}{h^2} = \frac{e^h - e^{-h} - 2h}{2h^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{e^h + e^{-h} - 2}{6h^2} \overset{0/0}{=} \frac{e^h - e^h}{12h} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{e^h - e^{-h}}{2h} - 1}{h^3} = \frac{e^h - e^{-h}}{2h^4} - \frac{1}{h^3}$$

$\Rightarrow$ damit $f(h) = \mathcal{O}(h^2)$

$$= \frac{e^h - e^{-h} - 2h}{2h^4}$$

$$= \frac{e^h + e^{-h} - 2}{8h^3} = \frac{e^h - e^{-h}}{24h^2} = \frac{e^h + e^{-h}}{48h} = \infty!!$$

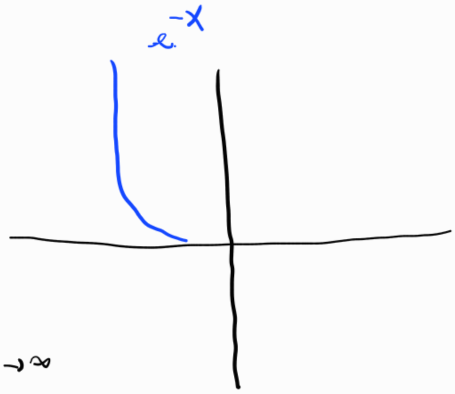
c) $g(n) = 4(n^3+n)^2 - 4n^2$

$= 4\cdot(n^6+2n^4+n^2) - 4n^2$

$= 4n^6+8n^4+4n^2-4n^2$

$= 4n^6+8n^4$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{4n^6+8n^4}{n^6}\right| = 4+\dfrac{8}{n^2} = 4 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{4n^6+8n^4}{n^5}\right| = 4n+\dfrac{8}{n} = \infty\end{array}\right\}\ \text{damit } O(n^6) \text{ mit kleinstem } n$$



d) $(n) = \sup\limits_{x>0} \dfrac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}$

Ziel: finde für $g(n) = O(n^q)$ mit möglichst kleinem q für $n\to\infty$

zur Erinnerung $g(n) = O(f(n))$ für $x\to x_0 \iff \exists C>0\ \exists \varepsilon>0\ \forall x\in B_\varepsilon(x_0): |f(x)| \le C|g(x)|$

Sei $g(n) = \sup\limits_{x>0} \dfrac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}$

damit in Näherung $1-e^{-x} \approx x$ und $1-e^{-nx} \approx nx$

für $x\to 0$: $\dfrac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}} = \dfrac{nx}{x} = n$

Betrachte Taylorreihe von e^{-x}

$\sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = 1 - x + O(x^2)$

$f^{(0)}(0) = e^0 = 1$

$f'(0) = -e^{-0} = -1$

$f''(0) = e^{-0} = 1$

für $x\to 0$ gilt also $g(n) \approx n$

nun betrachte $x\to\infty$ dann ist $e^{-x} = 0$ und $e^{-nx}\to 0$

damit $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}} = \dfrac{1}{1} = 1$

und die Funktion konvergiert für große x gegen 1

Um das Maximum zu finden betrachte Ableitung $\dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}\right)$ es ist $\dfrac{d}{dx}(1-e^{-nx}) = n e^{-nx}$

$\dfrac{d}{dx}(1-e^{-x}) = e^{-x}$

Quotientenregel: $f'(x) = \dfrac{n e^{-nx}(1-e^{-x}) - e^{-x}(1-e^{-nx})}{(1-e^{-x})^2}$

$= \dfrac{n e^{-nx} - n e^{-(n+1)x} - e^{-x} + e^{-(n+1)x}}{1-2e^{-x}+e^{-2x}}$

$= \dfrac{n e^{-nx} - (n-1)e^{-(n+1)x} - e^{-x}}{1-2e^{-x}+e^{-2x}}$ für $n\to\infty$ $\dfrac{-e^{-x}}{1-2e^{-x}-e^{-x}}$ für große x dann $\dfrac{0}{1}$

damit das Supremum $g(n) = \sup \dfrac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}} \approx n$ und $g(n) = O(n)$

Taylor-Series: $\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

in null $\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$

für $\frac{1}{1+x^2}$

$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

$f^{1}(x) = f'(x) = \frac{+2x}{(1-x^2)^2}$

$f^{2}(x) = f''(x) = \frac{2}{(1-x^2)^2} + \frac{-4x^2 \cdot -2}{(1-x^2)^3} = \frac{8x^2}{(1-x^2)^3} + \frac{2}{(1-x^2)^2}$

$f''' = \frac{48x^3}{(1-x^2)^4} + \frac{24x}{(1-x^2)^3}$

Thus $\sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots$