Aufgaben zur Algebra 2

Besprechungstermin Di. 13. Mai 2025

Eine Folge von Modulhomomorphismen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ heißt **exakt an der Stelle** B, wenn $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(g)$ gilt. Eine (evtl. längere) Folge heißt **exakt**, wenn sie exakt an jeder Stelle ist.

Aufgabe 1

Gegeben sei die exakte Folge

$$0 \to A \to B \xrightarrow{f} C \to 0.$$

Zeigen Sie, dass wenn f ein Rechtsinverses besitzt (d.h. $g\colon C \to B$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_C$), dann

$$B \cong A \oplus C$$

gilt.

Aufgabe 2

In folgendem kommutativen Diagramm von R-Moduln seien die Zeilen exakt:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & D \arrow[r] \arrow[d, "i"] & E \arrow[d, "j"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E'.
\end{tikzcd}$$

Zeigen Sie: Sind g, i Isomorphismen, f surjektiv und j injektiv, so ist h ein Isomorphismus.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein kommutatives Diagramm von R-Moduln und -Morphismen, in dem alle Spalten und die unteren beiden Zeilen exakt sind:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[d] \\
E \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[d] \\
I \arrow[r] \arrow[d] & J \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d] \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

Zeigen Sie, dass dann die obere Zeile exakt bei C ist.

Aufgabe 4

Gegeben sei eine endliche Folge von Vektorräumen und linearen Abbildungen

$$0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} 0$$

mit $f_{i+1} \circ f_i = 0$ für alle i. Wir definieren

$$H_i := \ker(f_i)/\mathrm{im}(f_{i-1}).$$

Zeigen Sie

$$\sum_i (-1)^i \dim H_i = \sum_i (-1)^i \dim V_i.$$