universität innsbruck
Institut für Mathematik

Aufgaben zur Algebra 1

Besprechungstermin: Do. 16. Jänner 2025

Aufgabe 1

Sei $p \in k[x]$ und K ein Zerfällungskörper von p über k. Zeigen Sie

$$[K : k] \leq \deg(p)!$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie

$$[\mathbb{C} \colon \mathbb{R}]\,,\ [\mathbb{R} : \mathbb{Q}]\,,\ \left[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}\right],\ \left[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}\right].$$

Aufgabe 3

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, also ein Körper für den jedes Polynom $p \in K[x]$ über K in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie, dass K nicht endlich sein kann.

Aufgabe 4

Sei $k \subseteq K$ eine Körpererweiterung. Wir definieren

$$\operatorname{Aut}(K, k) := \left\{\varphi \colon K \to K \mid \varphi \text{ bijektiver Ringhomomorphismus}, \varphi_{|_k} = \mathrm{id}_k\right\}.$$

Zeigen Sie:

(*i*) $\operatorname{Aut}(K, k)$ ist eine Gruppe bezüglich Hintereinanderausführung.

(*ii*) Für jede Untergruppe $H < \operatorname{Aut}(K, k)$ ist

$$\operatorname{Fix}(H) := \{a \in K \mid \forall \varphi \in H\colon\ \varphi(a) = a\ \}$$

ein Körper zwischen k und K.

(*iii*) Für jeden Zwischenkörper $k \subseteq L \subseteq K$ ist $\operatorname{Aut}(K, L)$ eine Untergruppe von $\operatorname{Aut}(K, k)$.

(*iv*) Es gilt $L \subseteq \operatorname{Fix}(\operatorname{Aut}(K, L))$ und $H \subseteq \operatorname{Aut}(K, \operatorname{Fix}(H))$.