universität innsbruck
Institut für Mathematik

Aufgaben zur Algebra 1

Besprechungstermin: Do. 5. Dezember 2024

Aufgabe 1

Überprüfen Sie die folgenden Polynome auf Irreduzibilität im Polynomring $\mathbb{Q}[x]$:

$$\begin{aligned} p_1 &= x^2 - 2x + 2 \\ p_2 &= x^{10} + 2x^8 + 4x^6 + 6x^4 + 8x^2 + 10 \\ p_3 &= 3x^2 - 9x - 27 \\ p_4 &= x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

Welche der Polynome sind auch irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$?

Aufgabe 2

Sei R ein kommutativer Ring und M eine nichtleere und unter Multiplikation abgeschlossene Teilmenge von R mit $1 \in M, 0 \notin M$. Zeigen Sie:

(i) Auf $R \times M$ ist durch folgende Vorschrift eine Äquivalenzrelation definiert:

$$(r_1, m_1) \sim (r_2, m_2) :\Leftrightarrow \exists m \in M : m(r_1 m_2 - r_2 m_1) = 0.$$

Für die Äquivalenzklasse von (r, m) schreiben wir dann auch $\frac{r}{m}$ und für die Menge aller Äquivalenzklassen $M^{-1}R$.

(ii) Auf der Menge $M^{-1}R$ sind die folgenden Verknüpfungen wohldefiniert:

$$\frac{r_1}{m_1} + \frac{r_2}{m_2} := \frac{r_1 m_2 + r_2 m_1}{m_1 m_2}, \quad \frac{r_1}{m_1} \cdot \frac{r_2}{m_2} := \frac{r_1 r_2}{m_1 m_2}.$$

Dadurch wird $M^{-1}R$ zu einem kommutativen Ring (das müssen Sie nicht nachrechnen).

(iii) Die Abbildung $\varphi \colon R \to M^{-1}R; r \mapsto \frac{r}{1}$ ist ein Ringhomomorphismus. Falls M keine Nullteiler enthält, ist φ injektiv.

(iv) Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq M^{-1}R$ ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal in R, das leeren Schnitt mit M hat.

Aufgabe 3

Sei R ein kommutativer Ring, $M \subseteq R$ eine unter Multiplikation abgeschlossene Teilmenge wie in Aufgabe 2, $M^{-1}R$ der dort konstruierte Ring (genannt die *Lokalisierung von R nach M*) und $\varphi \colon R \to M^{-1}R$ der kanonische Homomorphismus. Zeigen Sie:

(i) Die Vorschrift $\mathfrak{q} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ liefert Bijektion zwischen Primidealen der Lokalisierung $M^{-1}R$ und Primidealen von R, die M nicht schneiden.

(ii) Stimmt (i) auch für beliebige Ideale?

(iii) Ist M von der Gestalt $M = R \setminus \mathfrak{p}$ für ein Primideal $\mathfrak{p} \lhd R$, so ist M unter Multiplikation abgeschlossen und $M^{-1}R$ hat genau ein maximales Ideal.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass für eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ und $i = 1, \ldots, p-1$ in $\mathbb{Z}$ stets

$$p \mid \binom{p}{i}$$

gilt. Stimmt die Aussage auch, wenn p keine Primzahl ist?