Aufgabe 4

Betrachten Sie die Gauß-Chebyscheff Quadratur

$$\sum_{j=1}^{s} w_j f(x_j) \approx \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

wobei $x_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2s}\pi\right)$ für $j=1\ldots s$. Zeigen Sie: Wählt man $w_j = \frac{\pi}{s}$ für $j=1\ldots s$

als Gewichte so hat die Quadraturformel mindestens Ordnung s.

Hinweis: Chebyshev Polynome: $T_k\,[-1,1] \to \mathbb{R} : x \to \cos(k \arccos x)$ für $k \in \mathbb{N}_0$

und verwende komplexwertige Exponentialfunktion von Cosinus

Es gilt: QF hat Ordnung $s \Leftrightarrow$ Polynome vom Grad $\leq s-1$ werden exakt integriert

z.z.: $\sum_{i=1}^{s} w_j f(x_j) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ mit $\deg(f(x)) \leq s-1$

Verwenden von Chebyshev-Polynome $T_k(x) = \cos(k \arccos(x))$

wobei gilt $\int_{-1}^{1} \frac{T_k(x)\,T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ für $k \neq j$

Wir zeigen also das Polynome $T_k(x)$ korrekt integriert werden für $k \leq s-1$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{s} w_j T_k(x_j)}_{(1)} = \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{(2)}$$

Cosinus als komplexwertige Funktion

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-i}\right)$$

Euler Formula $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

Betrachte zuerst (2): nach Aufgabe 5 Blatt 4

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_k}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & k > 0 \\ \pi & k = 0 \end{cases}$$

Betrachte nun (1)

$$\sum_{j=1}^{s} w_j T_k(x_j) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\pi}{s} \cos\left(k \arccos\left(\cos\left(\frac{2j-1}{2s}\pi\right)\right)\right) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\pi}{s} \cos\left(k\pi \frac{(2j-1)}{2s}\right)$$

nun die komplexwertige Exponentialfunktion $\Rightarrow \sum_{j=1}^{s} \frac{\pi}{s} \frac{1}{2}\left(e^{i\left(k\pi\frac{(2j-1)}{2s}\right)} - e^{-i\left(k\pi\frac{(2j-1)}{2s}\right)}\right)$

Auftrennen:

$$\underbrace{\frac{\pi}{2s}\sum_{j=1}^{s} e^{i\left(k\pi\frac{(2j-1)}{2s}\right)}} - \underbrace{\frac{\pi}{2s}\sum_{j=1}^{s} e^{-i\left(k\pi\frac{(2j-1)}{2s}\right)}}$$

$$\frac{\pi}{2s}\sum_{j=1}^{s} e^{\frac{i\pi k j}{s} - \frac{ik\pi}{2s}}$$

$$\frac{\pi}{2s} e^{-\frac{i\pi k}{2s}} \sum_{j=0}^{s-1} \left(e^{\frac{i\pi k}{s}}\right)^{j}$$

$e^{ik\pi} = (-1)^k$

" für k = gerade

$\Downarrow$ Geometrische Reihe

$$\frac{\pi}{2s} e^{-\frac{i\pi k}{2s}} \cdot \frac{1-\left(e^{\left(i\frac{\pi k}{s}\right)}\right)^{s}}{1-e^{ik\pi/s}}$$

$\hookrightarrow$ $\frac{1-(-1)^k}{1-e^{ik\pi/s}}$ dann eigentlich null

für k ungerade

$$\frac{\pi}{2s} e^{-i\pi k} \cdot \frac{2}{1-e^{ik\pi/s}}$$

Aufgabe 5

Die Folge $\{S_n\}$ besitze die Eigenschaft

$$S_{n+1} - S = p_n(S_n - S) \quad \text{mit } p_n \to p \text{ und } p \neq 1$$

zeigen Sie, dass durch den Δ^2 Prozess von Aitken die Folge $\{S_n'\}$ schneller gegen S konvergiert als die ursprüngliche Folge $\{S_n\}$ d.h.

$$\frac{S_n' - S}{S_n - S} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

Beweis:

Wir wissen $S_{n+1} - S = p_n(S_n - S)$

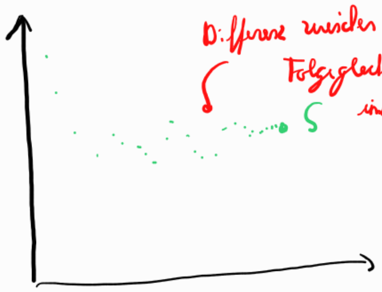
mit $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ mit $p \ 1$

Nach dem Aitken Prozess wissen wir:

$$\Delta S_n = S_{n+1} - S_n \qquad \Delta^2 S_n = \Delta(\Delta S_n) = \Delta S_{n+1} - \Delta S_n = S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n$$

$$\Delta S_{n+1} = S_{n+2} - S_{n+1}$$

Wenn nun $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ gilt muss das Argument angewandt auf die Differenzen gegen null gehen



Nun ist

$$\Delta S_n = S_{n+1} - S_n$$

damit $(p_n - 1)(S_n - S)$

$$\Leftrightarrow p_n S_n - S_n - p_n S + S$$

$$\Leftrightarrow p_n(S_n - S) - S_n + S$$

$$\Leftrightarrow S_{n+1} - S - S_n + S = S_{n+1} - S_n$$

und $\Delta S_{n+1} = S_{n+2} - S_{n+1} = (p_{n+1} - 1)(S_{n+1} - S)$

Nun gilt $S_n' := S_{n+1} - \dfrac{\Delta S_{n+1} \cdot \Delta S_n}{\Delta^2 S_n}$

ergo dann setzen wir mal alles ein

$p(S_n - S)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n' - S}{S_n - S} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1} - \frac{\Delta S_{n+1} \cdot \Delta S_n}{\Delta^2 S_n} - S}{S_n - S} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n(S_n - S) - \frac{\Delta S_{n+1} \cdot \Delta S_n}{\Delta^2 S_n}}{S_n - S}$$

$$= \lim_{n\to\infty} p_n - \frac{\Delta S_{n+1} \cdot \Delta S_n}{\Delta^2 S_n} \cdot \frac{1}{S_n - S} = \lim_{n\to\infty} p_n - \frac{\Delta S_{n+} \cdot S_n}{(\Delta S_{n+1} - \Delta S_n)(S_n - S)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} p_n - \frac{(S_{n+2} - S_{n+1}) \cdot (S_{n+1} - S_n)}{(\Delta S_{n+1} - \Delta S_n)\ (S_n - S)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} p_n - \frac{(p_n - 1)(S_n - S)(p_{n+1} - 1)(S_{n+1} - S)}{\big((p_{n+1} - 1)(S_{n+1} - S) - (p_n - 1)(S_n - S)\big)(S_n - S)}$$

$(S_{n+1} - S) = p_n(S_n - S)$

$$= \lim_{n\to\infty} p_n - \frac{(p_n - 1)\cancel{(S_n - S)}(p_{n+1} - 1)\, p_n \cancel{(S_n - S)}}{\big((p_{n+1} - 1)\, p_n \cancel{(S_n - S)} - (p_n - 1)\cancel{(S_n - S)}\big)\cancel{(S_n - S)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} p_n - \frac{(p_n - 1)(p_{n+1} - 1)\, p_n}{(p_{n+1} - 1)\, p_n - (p_n - 1)}$$

$$\underset{\text{lim anwenden}}{=} p - \frac{(p-1)(p-1)\,p}{(p-1)\,p - (p-1)}$$

$$= p - \frac{(p-1) \cdot p}{p - 1} = p - p = 0 \quad \blacksquare$$

Theorie Konvergenzbeschleunigung

Gegeben Folge $\{S_1, S_2 \dots\}$ die langsam gegen S konvergiert

Ziel: neue Folge $\{S_1', S_2' \dots\}$

Einschränken auf Situation $S_{n+1} - S \approx \rho (S_n - S) \approx \rho^n (S_1 - S)$

also $S_n = S + C\rho^n$

Aitken Idee:

Definition von Vorwärtsdifferenzen

$$\Delta S_n = S_{n+1} - S_n$$

dann ist $\Delta S_{n+1} = \rho \, \Delta S_n \iff q = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$

Andererseits gilt $\Delta S_{n+1} = S_{n+2} - S - (S_{n+1} - S) = (\rho - 1)(S_{n+1} - S)$

somit $$S = S_{n+1} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\rho - 1} = S_{n+1} - \frac{\Delta S_{n+1} \cdot \Delta S_n}{\Delta S_{n+1} - \Delta S_n}$$

die zweite Vorwärtsdifferenz

$$\Delta^2 S_n = \Delta(\Delta S_n) = \Delta S_{n+1} - \Delta S_n$$

Und der Aitken Prozess $$S_n' := S_{n+1} - \frac{\Delta S_{n+1} \cdot \Delta S_n}{\Delta^2 S_n}$$