

Institut für Allgemeine, Anorganische und Theoretische Chemie



#### **Theoretische Chemie II – Tutorium 4. Termin**

Christoph Teufl (Christoph.Teufl@student.uibk.ac.at)

Lukas Meinschad (Lukas.Meinschad@uibk.ac.at)

Theman das Tutoriums

#### Kapitel 1

- Einführung in die Quantenmechanik
- Eigenwertproblem der Schrödingergleichung



#### Kapitel 2

- Einfache quantenmechanische Systeme
- Harmonischer Oszillator
- Wasserstoffatom



#### Kapitel 3

- Quantenmechanische Beschreibung von Molekülen
- Hamiltonoperator für Mehrelektronensysteme
- Born-Oppenheimer Näherung

#### **Dieses Mal:**

#### Kapitel 4

- Schwingungsanalyse
- Kern-Schrödingergleichung
- Schwingungsanalyse in Normalmoden



#### Kapitel 5

- Approximation von Mehrelektronenfunktionen
- Atomorbitale und Molekülorbitale als Einelektronenfunktionen



#### Kapitel 6

- Full-CI Verfahren
- Lösung der Schrödingergleichung
- Beispiel Berechnung des H<sub>2</sub>

#### Kapitel 7

- Basisfunktionen und Basissätze
- STOs und GTOs
- Beispiele anhand verschiedener Moleküle



#### Kapitel 8 und 9

- Hartree Fock Methode (HF)
- Roothaan-Gleichung

April 25

• Limits und Verbesserungen



#### Kapitel 10

- Post HF-Methoden
- Störungstheorie
- Dichtefunktionaltheorie

### Wiederholung: Vom Molekül zum

Um den Hamiltonoperator für Moleküle aufzustellen braucht man ein Koordinatensystem als Referenz

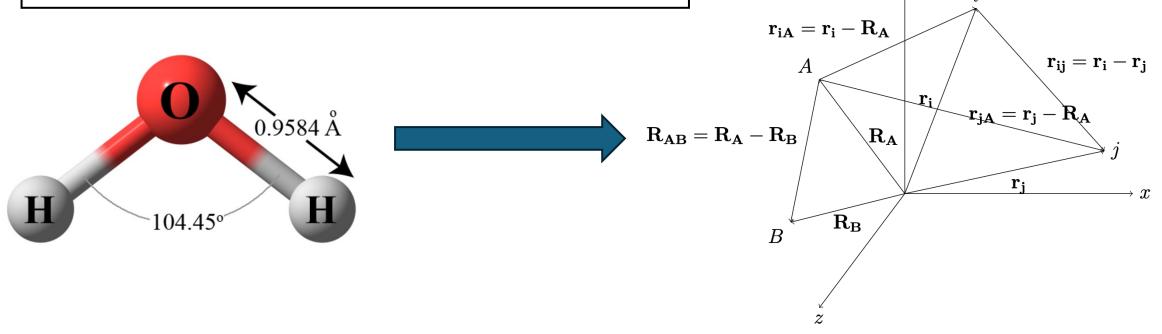


Figure 1: Molecular coordinate system: i, j = electrons; A, B = nuclei.

# Wiederholung: Der Hamiltonoperator für

$$\hat{H} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \vec{\nabla}_{i}^{2}}_{\hat{T}_{el}} - \underbrace{\sum_{A=1}^{M} \frac{1}{2M_{A}} \vec{\nabla}_{A}^{2}}_{\hat{T}_{nuc}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{A=1}^{M} \frac{Z_{A}}{r_{iA}}}_{\hat{V}_{el,nuc}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^{N} \frac{1}{r_{ij}}}_{\hat{V}_{el}} + \underbrace{\sum_{A=1}^{M-1} \sum_{B>A}^{M} \frac{Z_{A}Z_{B}}{R_{AB}}}_{\hat{V}_{nuc}}$$

- Summe der kinetischen Energie der Kerne  $\widehat{T}_{nuc}$
- Summe der kinetischen Energie der Elektronen  $\widehat{T}_{el}$
- Summe der potentiellen Energie (Attraktiv) zwischen Kern und Elektronen  $\hat{V}_{el,nuc}$
- Summe der potentiellen Energie (Repulsiv) der Elektronen  $\hat{V}_{el}$
- Summe der potentiellen Energie (Repulsiv) der Kerne  $\hat{V}_{nuc}$

### Wiederholung: Die Born Oppenheimer

Zentrale Annahme: Man kann die Wellenfunktion der Kerne und Elektronen getrennt beachten

#### Für Elektronen:

- Kinetische Energie der Kerne vernachlässigen
- Abstoßung der Kerne als Konstante

$$\hat{H}_{elec} = -\sum_{i=1}^{N} rac{1}{2} 
abla_{i}^{2} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{A=1}^{M} rac{Z_{A}}{r_{iA}} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^{N} rac{1}{r_{ij}}$$



$$\hat{H}_{elec}\psi_{elec}(\vec{r_i}, \vec{R_A}) = \epsilon_{elec}\psi_{elec}(\vec{r_i}, \vec{R_A})$$

# Wiederholung: Die Born Oppenheimer

Zentrale Annahme: Man kann die Wellenfunktion der Kerne und Elektronen getrennt beachten

#### Für Elektronen:

- Kinetische Energie der Kerne vernachlässigen
- Abstoßung der Kerne als Konstante

$$\hat{H}_{elec} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \nabla_i^2 - \sum_{i=1}^{N} \sum_{A=1}^{M} \frac{Z_A}{r_{iA}} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^{N} \frac{1}{r_{ij}}$$



$$\hat{H}_{elec}\psi_{elec}(ec{r_i}, ec{R_A}) = \epsilon_{elec}\psi_{elec}(ec{r_i}, ec{R_A})$$

#### Als Anmerkung:

Die Kernkoordinaten kommen als Parameter in der Wellenfunktion vor.

d.h für unterschiedliche Anordnungen der Kerne wird auch  $\psi_{elec}(\vec{r}_i, \vec{R}_A)$  anders

# Wiederholung: Die Born Oppenheimer

Zentrale Annahme: Man kann die Wellenfunktion der Kerne und Elektronen getrennt beachten

#### Für Elektronen:

- Kinetische Energie der Kerne vernachlässigen
- Abstoßung der Kerne als Konstante

$$\hat{H}_{elec} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \nabla_i^2 - \sum_{i=1}^{N} \sum_{A=1}^{M} \frac{Z_A}{r_{iA}} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^{N} \frac{1}{r_{ij}}$$



$$\hat{H}_{elec}\psi_{elec}(\vec{r_i}, \vec{R_A}) = \epsilon_{elec}\psi_{elec}(\vec{r_i}, \vec{R_A})$$

#### Für Kerne:

Man verwendet für Elektronische Terme Erwartungswei

$$\hat{H}_{nucl} = -\sum_{A=1}^{M} \frac{1}{2M_A} \vec{\nabla}_A^2 + \epsilon_{tot}(\vec{R}_A)$$



$$\hat{H}_{nucl}\chi(\vec{R}_A) = E_{nucl}\chi(\vec{R}_A)$$

# Genauere Betrachtung des Kern-

Hamiltonoporators 
$$\hat{H}_{nucl} = -\sum_{A=1}^{M} \frac{1}{2M_A} \vec{\nabla}_A^2 + \epsilon_{tot}(\vec{R}_A)$$

Welche Bestandteile hat dieser Operator?

- $M_A$ ... Masse des jeweiligen Kerns
- $\nabla^2$ ... Laplace Operator
- $\epsilon_{tot}(\vec{R}_A)$  ... potentielle Energie

# Genauere Betrachtung des Kern-Hamiltonoperators

$$\hat{H}_{nucl} = -\sum_{A=1}^{M} \frac{1}{2M_A} \vec{\nabla}_A^2 + \epsilon_{tot}(\vec{R}_A)$$

Welche Bestandteile hat dieser Operator?

- $M_A$ ... Masse des jeweiligen Kerns
- $\nabla^2$ ... Laplace Operator
- $\epsilon_{tot}(\vec{R}_A)$  ... potentielle Energie

Ableitungsoperator zweiter Ordnung im euklidischen Raum

$$\nabla^2 f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

https://www.youtube.com/watch?v=EW08rD-GFh0

# Genauere Betrachtung des Kern-Hamiltonoperators

$$\hat{H}_{nucl} = -\sum_{A=1}^{M} \frac{1}{2M_A} \vec{\nabla}_A^2 + \epsilon_{tot}(\vec{R}_A)$$

Welche Bestandteile hat dieser Operator?

- $M_A$ ... Masse des jeweiligen Kerns
- $\nabla^2$ ... Laplace Operator
- $\epsilon_{tot}(\vec{R}_A)$  ... potentielle Energie

$$\epsilon_{tot}(\vec{R}_A) = \sum_{A=1}^{M-1} \sum_{B>A}^{M} \frac{Z_A Z_B}{R_{AB}} + E_{elec}(\vec{R}_A)$$

Enthält also die Interaktionen der Kerne und der Elektronen, dies im Abhängigkeit der Kernkoordinaten!

# Die Potentialhyperfläche Wir sehen:

- Es ist jede Kernanordnung  $\vec{R}_A$  also mit einer potentiellen Energie verbunden
- Die Wechselwirkung der Kerne und Elektronen bestimmt man durch Lösen der elektronischen Schrödingergleichung
- Man kann sich  $\epsilon_{tot}$  also wie eine Hyperfläche vorstellen

Es gilt: Pro Atom M → x,y,z Koordinaten → 3M Dimensional

$$\epsilon_{tot}(\vec{R}_A) = \sum_{A=1}^{M-1} \sum_{B>A}^{M} \frac{Z_A Z_B}{R_{AB}} + E_{elec}(\vec{R}_A)$$

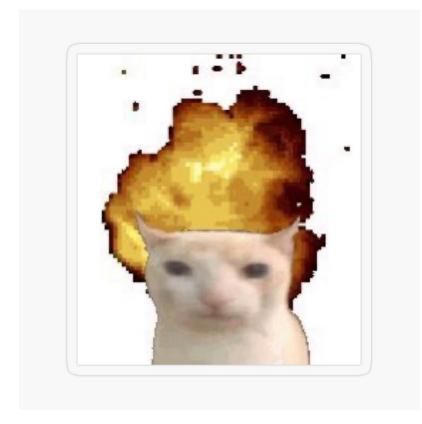
# Die Potentialhyperfläche Wir sehen:

- Es ist jede Kernanordnung  $\vec{R}_A$  also mit einer potentiellen Energie verbunden
- Die Wechselwirkung der Kerne und Elektronen bestimmt man durch Lösen der elektronischen Schrödingergleichung
- Man kann sich  $\epsilon_{tot}$  also wie eine Hyperfläche vorstellen

Es gilt: Pro Atom M → x,y,z Koordinaten → 3M Dimensional

$$\epsilon_{tot}(\vec{R}_A) = \sum_{A=1}^{M-1} \sum_{B>A}^{M} \frac{Z_A Z_B}{R_{AB}} + E_{elec}(\vec{R}_A)$$

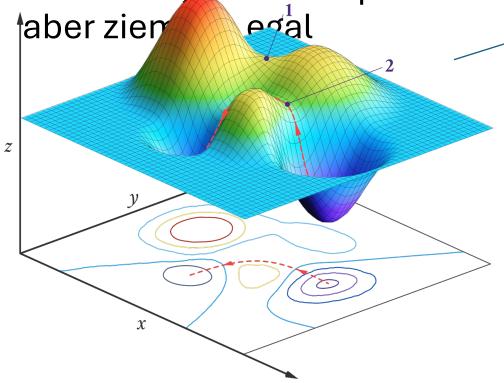
#### To much dimensions!!!



# Die Potentialhyperfläche Natürlich können wir uns 3M

Dimensionale Räume nicht

vorstellen, dem Computer ist das



$$\epsilon_{tot}(\vec{R}_A) = \sum_{A=1}^{M-1} \sum_{B>A}^{M} \frac{Z_A Z_B}{R_{AB}} + E_{elec}(\vec{R}_A)$$

Man visualiziert meist Potentialhyperflächen in Abhängigkeit von zwei Koordinaten x, y



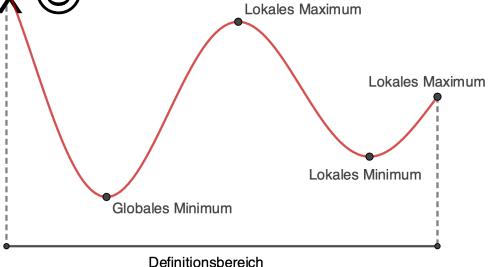
Wie finde ich nun nochmal Minima, Maxima, Sattelpunkte?

# Wiederholung: Minima, Maxima, Sattelpunkte,

Extremstellen, Hesse Matrix Global Maximum

Für eine Funktion  $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$  hat in  $x_0$ :

- Lokales Minimum  $\exists U \in D: f(x_0) \le f(x) \ \forall x \in U$
- Lokales Maximum  $\exists U \in D: f(x_0) \ge f(x) \ \forall x \in U$



# Wiederholung: Minima, Maxima, Sattelpunkte,

Extremstellen, Hesse Matrix Global Maximum

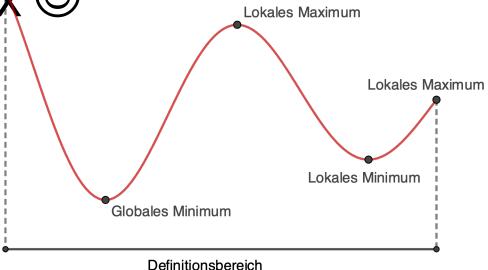
Für eine Funktion  $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$  hat in  $x_0$ :

• Lokales Minimum  $\exists U \in D: f(x_0) \le f(x) \ \forall x \in U$ 

• Lokales Maximum  $\exists U \in D: f(x_0) \ge f(x) \ \forall x \in U$ 

In einer Extremstelle ist die erste Ableitung Null, im Mehrdimensionalen schreiben wir das mit dem Gradienten

$$\nabla f(\mathbf{x_0}) = \mathbf{0}$$



# Wiederholung: Minima, Maxima, Sattelpunkte, Extremstellen, Hesse Matrix ©

Diese Extremstellen können wir nun durch die Matrix der zweiten Ableitungen aka **Hesse Matrix** weiter untersuchen, insbesondere haben wir eine Möglichkeit Minima und Maxima zu unterscheiden

$$\mathrm{H}_f(x) := \left(rac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)
ight)_{i,j=1,\ldots,n} = egin{pmatrix} rac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & rac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & rac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \ rac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & rac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x) & \cdots & rac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \ dots & dots & dots & dots \ rac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & rac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & rac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

- Sind alle Eigenwerte positive → Minimum
- Sind alle Eigenwerte negative → Maximum
- Ist die Matrix indefinit → Sattelpunkt

### Die Kern Schrödinger Gleichung

$$\hat{H}_{nucl}\chi(\vec{R}_A) = E_{nucl}\chi(\vec{R}_A)$$

$$\prod_{nucl\chi}(\vec{R}_A) = E_{nucl\chi}(\vec{R}_A)$$

$$\left[ -\sum_{A=1}^{M} \frac{1}{2M_A} \vec{\nabla}_A^2 + \epsilon_{tot}(\vec{R}_A) \right] \chi(\vec{R}_A) = E_{nucl\chi}(\vec{R}_A)$$

Wir merken uns:

Man kann Kern Schrödingergleichung mit denselben Methoden lösen wie die elektronische Schrödingergleichung

- Vibrational Configuration Interaction (VCI) → Full-CI
- Vibrational Self-Consistent-Field (VSCF) → Hartree Fock

#### Man braucht jedoch die Potential-Hyperfläche!!

### Schwingungsanalyse in Normalmoden

Im Zuge der harmonischen Näherung, machen wir eine Taylorreihenentwicklung der potentiellen Energie  $\epsilon_{tot}(\vec{R}_A)$ 

$$\sum_{m}^{\infty} f^{(n)}(a)$$

$$\epsilon_{tot}(\vec{R}) \approx \epsilon_{tot}(\vec{R}_0) + \sum_{A=1}^{M} \frac{\partial \epsilon_{tot}(\vec{R})}{\partial \vec{R}_A} (\vec{R}_A - \vec{R}_0) + \frac{1}{2} \sum_{B=1}^{M} \sum_{A=1}^{M} \frac{\partial^2 \epsilon_{tot}(\vec{R})}{\partial \vec{R}_A \partial \vec{R}_B} (\vec{R}_A - \vec{R}_0) (\vec{R}_B - \vec{R}_0)$$

Wir setzen also  $a=R_0$  was unserer Gleichgewichtsstruktur entspricht und brechen nach den zweiten Glied ab:

### Schwingungsanalyse in Normalmoden

$$\epsilon_{tot}(\vec{R}) \approx \epsilon_{tot}(\vec{R}_0) + \sum_{A=1}^{M} \frac{\partial \epsilon_{tot}(\vec{R})}{\partial \vec{R}_A} (\vec{R}_A - \vec{R}_0) + \frac{1}{2} \sum_{B=1}^{M} \sum_{A=1}^{M} \frac{\partial^2 \epsilon_{tot}(\vec{R})}{\partial \vec{R}_A \partial \vec{R}_B} (\vec{R}_A - \vec{R}_0) (\vec{R}_B - \vec{R}_0)$$

Energetischer Nullpunkt beliebig verschiebbar,

Setze 
$$\epsilon_{tot}(\vec{R}_0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \epsilon(\vec{R})}{\partial \vec{R}_i} = 0$$

$$\epsilon_{tot}(\vec{R}) \approx \frac{1}{2} \sum_{B=1}^{M} \sum_{A=1}^{M} \frac{\partial^{2} \epsilon_{tot}(\vec{R})}{\partial \vec{R}_{A} \partial \vec{R}_{B}} (\vec{R}_{A} - \vec{R}_{0}) (\vec{R}_{B} - \vec{R}_{0}) = \frac{1}{2} (\vec{R}_{A} - \vec{R}_{0})^{T} H(\vec{R}_{B} - \vec{R}_{0})$$

# Die Kernschrödingergleichung nach der

$$\sum_{A=1}^{M} \left( -\frac{1}{2M_A} \vec{\nabla}^2_A + k_A (\vec{R}_A - \vec{R}_0)^2 \right) \chi(\vec{R}) = E_{nucl} \chi(\vec{R})$$

Das kommt uns doch bekannt vor oder?

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{x^2}u(x) + \frac{m\omega^2x^2}{2}u(x) = Eu(x)$$

### Die Kernschrödingergleichung nach der

$$\sum_{A=1}^{M} \left( -\frac{1}{2M_A} \vec{\nabla}^2_A + k_A (\vec{R}_A - \vec{R}_0)^2 \right) \chi(\vec{R}) = E_{nucl} \chi(\vec{R})$$

→ Wir haben die 3M dimensionale Schrödingergleichung in 3M eindimensionale Schrödingergleichungen entkoppelt!

#### Algorithmus zum Lösen:

- Transformation in Massegewichteten Koordinaten
- Diagonalisierung der Hessse Matrix → Koordinatentransformation
- Eigenwerten sind Kraftkonstanten / Schwingungsfrequenzen
- Eigenvektoren sind Normalmoden

# Matrix-Diagonalisierung

Was heißt es wenn man eine Matrix diagonalisiert?

Ist eine Matrix A diagonalisierbar, so exestiert eine Diagonalmatrix  $D_A$  die folgende Ähnlichkeitsbedingung erfüllt

$$D_A = S^{-1}AS$$

Man macht also folgenden Algorithmus

- 1. Berechnen der Eigenwerte  $\lambda_i$  der Matrix
- 2. Bestimmen der Eigenräume  $E(\lambda_i)$  man lost also  $(A \lambda_I) = 0$
- 3. Man schreibt Eigenvektoren in Matrix  $S = (b_1, ..., b_n)$
- 4. Und fügt die Eigenwerte an die richtige Position in der Diagonalmatrix  $D_A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$

### Vibrational Normal Modes

Normalmoden beschreiben verschiedene Vibrationen in Molekülen. Hierbei sind die Moden selbst voneinander unabhängig und

Table 1: Overview of degrees of freedom

	Total Degree of Freedom	Translational degrees of freedom	Rotational degrees of freedom	Vibrational degrees of freedom
Nonlinear Molecules	3N	3	3	3N - <b>6</b>
Linear Molecules	3N	3	2	3N - 5

Wann *N* die Anzahl der Kerne ist dann haben wir 3*N* Koordinaten gesamt

### Vibrational Normal Modes

Normalmoden beschreiben verschiedene Vibrationen in Molekülen. Hierbei sind die Moden selbst voneinander unabhängig und

Table 1: Overview of degrees of freedom

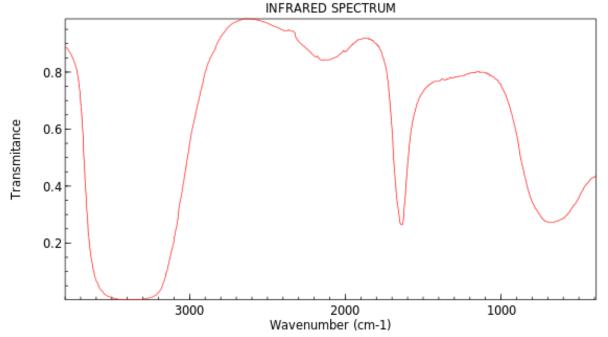
	Total Degree of Freedom	Translational degrees of freedom	Rotational degrees of freedom	Vibrational degrees of freedom
Nonlinear Molecules	3N	3	3	3N - <b>6</b>
Linear Molecules	3N	3	2	3N - 5

Wann N die Anzahl der Kerne ist dann haben wir 3N Koordinaten gesamt

Wir merken uns:

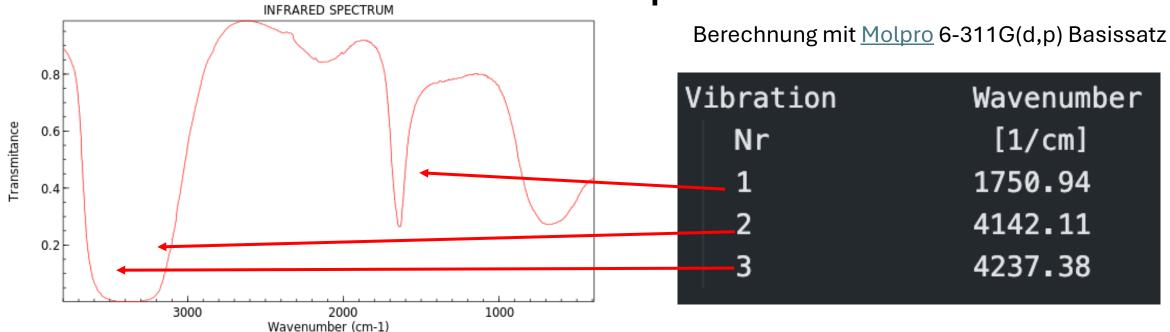
Translation und Rotationsfreiheitsgrade haben immer Eigenwert 0 in der Diagonalisierung der Hesse Matrix — es tritt keine Änderung der potentiellen Energie auf

# Schwingungsanaluse Reispiel Wasser



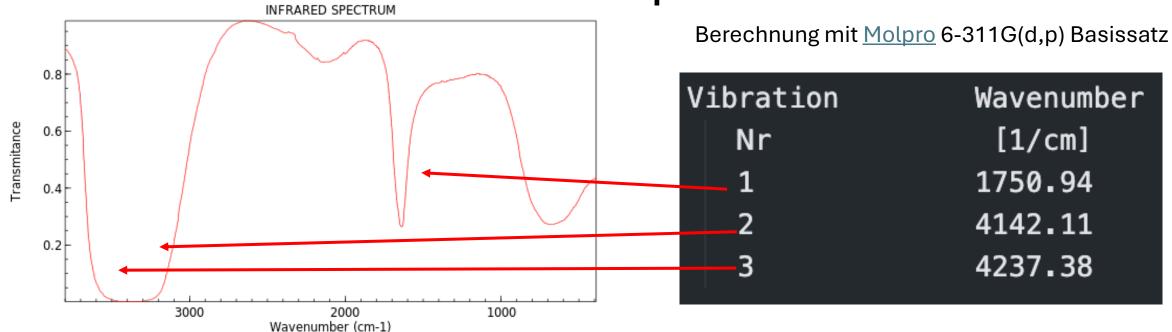
NIST Chemistry WebBook (https://webbook.nist.gov/chemistry)

# Schwingungsanaluse Reispiel Wasser



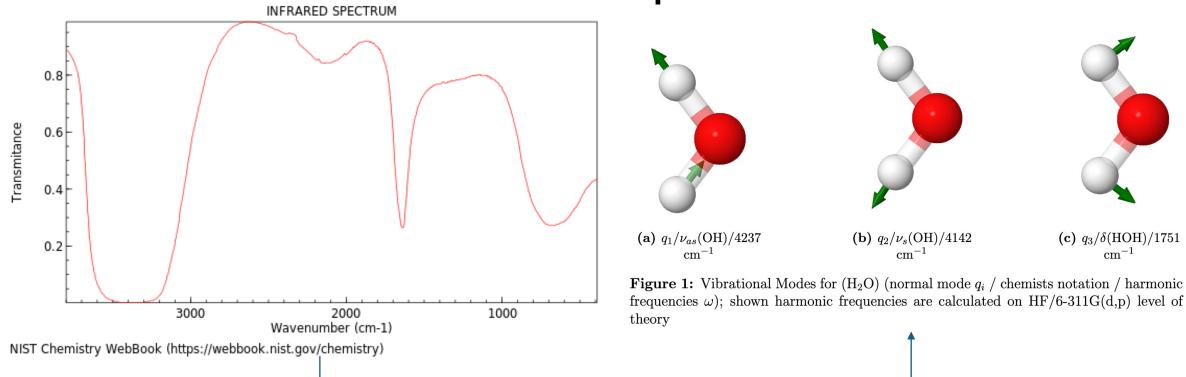
NIST Chemistry WebBook (https://webbook.nist.gov/chemistry)

# Schwingungsanaluse Reispiel Wasser



NIST Chemistry WebBook (https://webbook.nist.gov/chemistry)

### Schwingungeanalise Reispiel Wasser



Man sieht also bereits in diesem trivialen Beispiel ist es möglich spektroskopische Daten mittels QM-Rechnungen zu verifizieren

#### Mass weighted Second Derivative Matrix 0X1 0Y1 0Z1 HX2 HY2 0X1 -0.0000000 0Y1 0.0000000 0.0502202 0Z1 0.0000000 -0.0000000 0.0335472 HX2 0.0000000 0.0000000 0.0000000 -0.0000000 HY2 0.0000000 -0.1000338 0.0599467 0.0000000 0.4320315 HZ2 0.0000000 0.0761207 -0.0668228 0.0000000 -0.2710332НХЗ 0.0000000 0.0000000 0.0000000 -0.0000000 0.0000000 HY3 0.0000000 -0.1000338 -0.0599467 0.0000000 -0.0335161 HZ3 0.0000000 -0.0761207 -0.0668228 0.0000000 0.0322169 HZ2 HX3 HY3 HZ3 HZ2 0.2484835 НХЗ 0.0000000 -0.0000000 HY3 -0.0322169 0.0000000 0.4320315 HZ3 0.0177256 0.0000000 0.2710332 0.2484835 Mass Weighted 2nd Derivative Matrix Eigenvalues 1-0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.116021 0.649283 9 0.000000 0.000000 0.679494

#### Mass weighted Second Derivative Matrix 0X1 0Y1 0Z1 HX2 HY2 0X1 -0.0000000 0Y1 0.0000000 0.0502202 0Z1 0.0000000 -0.0000000 0.0335472 HX2 0.0000000 0.0000000 0.0000000 -0.0000000 HY2 0.0000000 -0.1000338 0.0599467 0.0000000 0.4320315 HZ2 0.0000000 0.0761207 -0.0668228 0.0000000 -0.2710332 НХЗ 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 -0.0000000-0.1000338 HY3 0.0000000 -0.0599467 0.0000000 -0.0335161 HZ3 0.0000000 -0.0761207 -0.0668228 0.0000000 0.0322169 HZ2 HX3 HY3 HZ3 HZ2 0.2484835 НХЗ 0.0000000 -0.0000000 HY3 -0.0322169 0.0000000 0.4320315 HZ3 0.0177256 0.0000000 0.2710332 0.2484835 Mass Weighted 2nd Derivative Matrix Eigenvalues 0.000000 0.000000 0.116021 1-9 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.649283 0.679494

# Ausblick aufs nächste Malapproximation von Mehrelektronenwellenfunktionen

#### Einführen von Spinfunktionen

$$\int d\omega \alpha^*(\omega)\alpha(\omega) = \int d\omega \beta^*(\omega)\beta(\omega) = 1$$

Antisymmetrie Prinzip der Wellenfunktionen

$$\Phi(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_N) = -\Phi(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_N)$$

Slater Determinanten 
$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_1(x_2)\psi_2(x_2))$$

Theman das Tutoriums

#### Kapitel 1

- Einführung in die **Ouantenmechanik**
- Eigenwertproblem der Schrödingergleichung



#### Kapitel 2

- Einfache quantenmechanische
- Harmonischer Oszillator
- Wasserstoffatom



#### Kapitel 3

- Quantenmechanische Beschreibung von Molekülen
- Hamiltonoperator für Mehrelektronensysteme
- Born-Oppenheimer Näherung

#### Kapitel 4

- Schwingungsanalyse
- Kern-Schrödingergleichung
- Schwingungsanalyse in Normalmoden



#### Nächstes Mal:

#### Kapitel 5

- Approximation von Mehrelektronenfunktionen
- Atomorbitale und Molekülorbitale als Einelektronenfunktionen



#### Kapitel 6

- Full-CI Verfahren
- Lösung der Schrödingergleichung
- Beispiel Berechnung des H<sub>2</sub>

#### Kapitel 7

- Basisfunktionen und Basissätze
- STOs und GTOs
- Beispiele anhand verschiedener Moleküle



#### Kapitel 8 und 9

- Hartree Fock Methode (HF)
- Roothaan-Gleichung

April 25

• Limits und Verbesserungen



#### Kapitel 10

- Post HF-Methoden
- Störungstheorie
- Dichtefunktionaltheorie

