PS Analysis 3 **WS 2024/25**

Übungszettel 3 (ODE)

Birgit Schörkhuber *ankreuzbar bis 22.10., 8:00*

1. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils das maximale Existenzintervall der Lösung an.

   (a)
   $$y'(x) + \cos(2x)y(x)^2 = 0, \quad y(0) = 1.$$

   (b)
   $$u'(t) = -\frac{u(t)}{t}, \quad u(1) = u_0, \quad u_0 > 0.$$

2. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils das maximale Existenzintervall der Lösung an.

   (a)
   $$y'(x) = \frac{x}{y(x)}, \quad y(2) = 1.$$

   (b)
   $$u'(t) = \frac{2-t}{1+u(t)}, \quad u(0) = 1.$$

3. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils das maximale Existenzintervall der Lösung an.

   (a)
   $$u'(t) = \frac{u(t)+t}{t}, \quad u(1) = 0.$$

   (b)
   $$y'(x) = \frac{x^2 + 3y(x)^2}{2xy(x)}, \quad y(1) = 1.$$

4. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

   $$u'(t) = \sqrt[3]{|u(t)|}, \ t > 0, \quad u(0) = 0,$$

   unendlich viele Lösungen $u \in C^1([0,\infty))$ besitzt. Lösen Sie das Anfangswertproblem mit Hilfe Ihres bevorzugten CAS. Was erhalten Sie?

5. Bestimmen Sie eine allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung (siehe Bemerkung 1.7 in der Vorlesung).

   (a)
   $$y'(x) = \sqrt{1 - y(x)^2}, \quad |y| < 1.$$

   (b)
   $$u'(t) = (t + u(t))^2.$$

6. *(Kettenlinie)* Bestimmen Sie eine allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

   $$y''(x) = a\sqrt{1 + (y'(x))^2}, \quad a \neq 0.$$

   Wählen Sie weiters die Konstanten so, dass $y(0) = \frac{1}{a}$ gilt. Skizzieren Sie die Lösung für verschiedene Werte von a. Berechnen Sie weiters die Länge des durch $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x, y(x))$ definierten Weges (die Länge der Kettenlinie).