PS Analysis 3 **WS 2024/25**

Übungszettel 2 (CA)

Karin Schnass *ankreuzbar bis 15.10., 8:00*

1. **Polarkoordinaten**

   (a) Sei $I = [a, a+2\pi)$ bzw. $I = (a, a+2\pi]$, $a \in \mathbb{R}$, ein Intervall der Länge 2π. Zeige, dass $z \neq 0$ eindeutig geschrieben werden kann als
   $$z = re^{\mathrm{i}\varphi} \quad \text{mit} \quad r = |z| > 0 \quad \text{und} \quad \varphi \in I.$$

   (b) Zeige, dass für $c \in \mathbb{C}, c \neq 0$ die Gleichung $z^n = c$ genau n verschiedene Lösungen besitzt und dass im Fall $n = 2$ für die Lösungen z_1, z_2 gilt $z_1 = -z_2$.

2. **Periodizität**
   Zeige, dass für $z \in \mathbb{C}$ gilt
   $$\begin{array}{ll} (a) & \cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \sin(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \\ (b) & \exp(z + 2\pi\mathrm{i}) = \exp(z), \qquad \cos(z + 2\pi) = \cos(z), \qquad \sin(z + 2\pi) = \sin(z). \end{array}$$

3. **Logarithmus**

   (a) Zeige, dass das Hauptargument $\arg : C^- \to (-\pi, \pi)$ mit $z = re^{\mathrm{i}\varphi} \mapsto \varphi$ stetig ist und folgere daraus die Stetigkeit des Hauptzweigs des Logarithmus.
   Hinweis: Verwende, dass $\arg(z) = \arg(z/|z|)$ und dass der Cosinus auf $(-\pi, 0)$ bzw. $(0, \pi)$ stetig und monoton ist, also auch seine Umkehrfunktion stetig und monoton ist.

   (b) Zeige, dass für $z, w \in \mathbb{C}^-$ mit $z \cdot w \in C^-$ gilt
   $$\log(zw) = \log(z) + \log(w) + 2\pi\mathrm{i}\eta \quad \text{für} \quad \eta \in \{-1, 0, 1\}.$$

4. **Potenzen**

   (a) Zeige, dass für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $z, w \in \mathbb{C}^-$ mit $zw \in \mathbb{C}^-$ gilt:
   $$(i) \quad z^{\alpha+\beta} = z^\alpha \cdot z^\beta \qquad (ii) \quad z^n = e^{n\log(z)} = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{\text{n-mal}} \qquad (iii) \quad (zw)^\alpha = z^\alpha \cdot w^\alpha.$$

   (b) Berechne
   $$(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}} \qquad 2^{\mathrm{i}} \qquad \mathrm{i}^{\sqrt{2}} \qquad (\mathrm{i}^{\mathrm{i}})^5 \qquad (i^5)^{\mathrm{i}}$$

5. **Differenzieren**

   (a) Beweise Satz 2.6 a)-c) und folgere daraus dass Polynomfunktionen auf ganz $\mathbb{C}$ und rationale Funktionen, wo definiert, differenzierbar sind. Bestimme die Ableitungsfunktion für
   $$p(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n (z - z_0)^n.$$

   (b) Zeige, dass die Betragsfunktion $z \mapsto |z|$ nirgends differenzierbar ist.

6. Zeige, dass eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, mit Konvergenzradius $R > 0$ und ihre formale Ableitung

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} z^n$$

denselben Konvergenzradius besitzen, also

$$\limsup_n |a_n|^{1/n} = \limsup_n |(n+1)a_{n+1}|^{1/n}. \tag{2.1}$$