ii) Ist A allgemeiner eine Blockdiagonalmatrix: Für $n \in \mathbb{N}$, $n \leq d$:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix} \qquad \text{für } A_k \text{ quadratische Matrizen}$$

gilt $\quad e^{tA} = \operatorname{diag}\left(e^{tA_1}, \dots, e^{tA_n}\right)$, siehe Übungen.

iii) Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $A^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$

(d.h. A ist nilpotent) und

$$e^{tA} = I + tA = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beachte, dass $\left(e^{tA}\right)_{ij} \neq \left(e^{ta_{ij}}\right)$

Lemma 3.10 Sei $U \in GL(d)$ eine invertierbare (reelle oder komplexe) $d \times d$ Matrix. Dann gilt

$$U^{-1} e^{tA} U = e^{tU^{-1}AU} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Beweis: Für $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$U^{-1}\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!} A^n\right) U = \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!} U^{-1} A^n U = \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!} \left(U^{-1} A U\right)^n$$

Aufgrund der Stetigkeit des Matrix-Produkts

gilt $$\lim_{N \to \infty} \left(U^{-1}\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!} A^n\right) U\right) = U^{-1} e^{tA} U = e^{tU^{-1}AU}. \qquad \square$$

Faktum 3.11 (LINEARE ALGEBRA)

Sei $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$. Dann existiert ein $U \in GL(d)$ und ein $n \in \mathbb{N}$:

$$U^{-1} A U = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{pmatrix} =: J \quad \text{(JORDAN'SCHE NORMALFORM)}$$

mit

$$J_k := \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

dem k-ten JORDAN BLOCK $J_k \in \mathbb{C}^{m_k\times m_k}$ $k = 1, \dots, n$, $\sum_{k=1}^{d} m_k = d$

wobei λ_k ein Eigenwert von A ist. Mit

$$N_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m_k\times m_k}$$

läßt sich jeder Jordan-Block schreiben als

$$J_k = \lambda_k \mathbb{1} + N_k$$

Die Spalten von U sind (verallgemeinerte) Eigenvektoren von A.

Diese Bilden eine Basis des $\mathbb{C}^n$.

Satz 3.12 (BERECHNUNG DER MATRIXEXONENTIALFKT.)

Sei $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$. Mit der obigen Notation gilt

$$e^{tA} = U \operatorname{diag}(e^{tJ_1}, \dots, e^{tJ_n}) U^{-1}$$

wobei

$$e^{tJ_k} = e^{t\lambda_k} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m_k-1}}{(m_k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Beweis</u> Mit Lemma 3.10 gilt

$$e^{tA} = U e^{tU^{-1}AU} U^{-1}$$

$$= U e^{t\,\mathrm{diag}(J_1, .. J_n)} U^{-1} \overset{\text{Übungen}}{=} U \,\mathrm{diag}(e^{tJ_1}, .. e^{tJ_n}) U^{-1}$$

Für $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt $J_k = \lambda_k \mathbb{1} + N_k$

Da gilt $\lambda_k \mathbb{1} N_k = N_k \lambda_k \mathbb{1}$ folgt mit Bemerkung 3.6

$$e^{t(\lambda_k \mathbb{1} + N_k)} = e^{t\lambda_k I} e^{tN_k} \qquad (*)$$

Für $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt: N_k ist nilpotent der Ordnung m_k:

$$N_k^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \dots \quad N_k^{m_k-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_k^{m_k} = 0$$

Daher gilt

$$e^{tN_k} = \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{t^j}{j!} N_k^j = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m_k-1}}{(m_k-1)!} \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Da $e^{t\lambda_k \mathbb{1}} = e^{t\lambda_k} \mathbb{1}$ gilt folgt die Behauptung aus $(*)$.

Beispiel Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= A u(t) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}\right\}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad u_0 \in \mathbb{R}^2$$

Zur Berechnung der Matrix-Exponentialfunktion bemerke, dass A symmetrisch ist, d.h. A ist diagonalisierbar.

Da gilt $\det(\lambda \mathbb{1} - A) = (\lambda - 1)^2 - 1$ ist die Menge der Eigenwerte $\sigma(A) = \{0, 2\}$ mit jeweils Vielfachheit eins.

Der Eigenvektor zu $\lambda_1 = 0$ ist $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} =: v_1$, und $v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist der EV zu $\lambda_2 = 2$. $\Rightarrow$ $U = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Mit $A = U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} U^{-1}$ folgt

$$e^{tA} = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} U^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^{2t} & -1 + e^{2t} \\ -1 + e^{2t} & 1 + e^{2t} \end{pmatrix}$$

Die Lösung der obigen DGL ist also gegeben durch

$$u(t) = e^{tA} u_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + e^{2t}) u_{0,1} + \frac{1}{2}(e^{2t} - 1) u_{0,2} \\ \frac{1}{2}(e^{2t} - 1) u_{0,1} + \frac{1}{2}(1 + e^{2t}) u_{0,2} \end{pmatrix}$$

3.2 ALLGEMEINE LINEARE SYSTEME

Wir betrachten nun allgemeine (nicht-autonome) Systeme der Form

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= A(t)u(t) + g(t) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

für $A \in C(J;\mathbb{R}^{d\times d})$, $g \in C(J,\mathbb{R}^d)$, $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in J$.

Angesichts der Resultate im Fall $d = 1$, sowie im autonomen Fall könnte man annehmen, dass für $g = 0$ die Lösung durch $u(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds} u_0$ gegeben ist. Dies ist aber im Allgemeinen <u>NICHT</u> der Fall, außer es gilt

$$[A(t), A(s)] = 0 \qquad \forall t,s \in J$$

Unser Ziel ist es also, die Matrix-Exponentialfunktion zu verallgemeinern, um die eindeutige Lösung von (3.1) darstellen zu können.

Wir benötigen später folgende Beziehungen für Matrix-wertige Funktionen.

Lemma 3.13

Sind $A, B \in C^1(J;\mathbb{R}^{d\times d})$, $u \in C^1(J,\mathbb{R}^d)$, so gilt

i) $\quad (AB)'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$

ii) $\quad (Au)'(t) = A'(t)u(t) + A(t)u'(t)$

Ist $\det A(t) \neq 0$, so gilt außerdem

iii) $\quad \frac{d}{dt} A(t)^{-1} = -A(t)^{-1}A'(t)A(t)^{-1}$

Beweis: Aus

$$(AB)_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{d} a_{ik}(t)\, b_{kj}(t) \quad \text{und} \quad (Au)_i(t) = \sum_{k=1}^{d} a_{ik}(t) u_k(t)$$

und der Produktregel für reelwertige Funktionen folgen die ersten beiden Identitäten.

Aus i) und $\mathbb{1} = A(t)A^{-1}(t)$ folgt iii) $\square$

Notation 3.14 Gegeben Vektoren $a_1, \dots, a_d$ schreiben wir $A = (a_1 \ \cdots \ a_d)$ für die Matrix mit den entsprechenden Spalten.

Im Folgenden charakterisieren wir für gegebenes $g \in C(J;\mathbb{R}^d)$ und $A \in C(J;\mathbb{R}^d)$, $t_0 \in J$ den LÖSUNGSRAUM $\mathcal{L}_g \subset C^1(J,\mathbb{R}^d)$,

$$\mathcal{L}_g := \{ u \in C^1(J,\mathbb{R}^d) : \forall t \in J \text{ gilt } u'(t) = A(t)u(t) + g(t) \}$$

Satz 3.15 Sei $A \in C(J;\mathbb{R}^d)$ und $g = 0$. Dann ist $\mathcal{L}_0$ ein d-dimensionaler Untervektorraum von $C^1(J;\mathbb{R}^d)$. Weiters ist die Abbildung $S(t_0): \mathcal{L}_0 \to \mathbb{R}^d$ $S(t_0)u = u(t_0)$ bijektiv und linear.

Beweis: Seien $u_1, u_2 \in C^1(J,\mathbb{R}^d)$ Lösungen von

$$u'(t) = A(t)u(t) \qquad (*)$$

für $t \in J$. Dann gilt für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und

$v := \alpha u_1 + \beta u_2$, $\quad v'(t) = \alpha u_1'(t) + \beta u_2'(t) = A(t)v(t)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}_0$ ist ein Untervektorraum von $C^1(J, \mathbb{R}^d)$

Weiters gilt

$$S(t_0)(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha u_1(t_0) + \beta u_2(t_0) = \alpha S(t_0)u_1 + \beta S(t_0)u_2$$

so dass $S(t_0)$ linear ist.

Die Injektivität von $S(t_0)$ folgt aus der Eindeutigkeit der Lösungen des Anfangswertproblems zu (*): Gilt

$S(t_0)u = S(t_0)v$, also $u(t_0) = v(t_0)$, so folgt

$u(t) = v(t) \quad \forall\, t \in J$.

$S(t_0)$ ist surjektiv, denn ist $u_0 \in \mathbb{R}^d$, so ist das Anfangswertproblem (*) mit $u(t_0) = u_0$ lösbar, d.h. es existiert ein $u \in \mathcal{L}_0$ mit $S(t_0)u = u(t_0) = u_0$.

$S(t_0)$ definiert also einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{L}_0$ und $\mathbb{R}^d$. Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass in diesem Fall dann $\dim(\mathbb{R}^d) = \dim(\mathcal{L}_0)$ gelten muss. $\square$

Bemerkung 3.16

Die Tatsache, dass Linearkombinationen linearer, homogener Gleichungen wieder eine Lösung liefern bezeichnet man auch als das SUPERPOSITIONSPRINZIP.

Aus dem letzten Satz folgt, dass in $\mathcal{L}_0$ eine Basis aus d linear unabhängigen Lösungen existiert.