universität innsbruck
Institut für Mathematik

Aufgaben zur Algebra 1

Besprechungstermin: Di. 21. November 2024

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle ganzzahligen Lösungen des folgenden Systems linearer Kongruenzen:

$$x \equiv 1 \bmod 3$$
$$x \equiv 2 \bmod 7$$
$$x \equiv 3 \bmod 4.$$

Aufgabe 2

(i) Zeigen Sie dass die beiden folgenden Ideale jeweils nicht von einem Element als Ideal erzeugt werden:

$$(x_1, x_2) \lhd \mathbb{Q}[x_1, x_2], \quad (2, x) \lhd \mathbb{Z}[x].$$

(ii) Bestimmen Sie sämtliche Ideale in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3

Sei R ein kommutativer Ring und $I \lhd R$ ein Ideal. Wir definieren:

$$\sqrt{I} := \{a \in R \mid \ a^m \in I \text{ für ein } m \geq 1\}.$$

Zeigen Sie:

(i) $\sqrt{I}$ ist ein Ideal in R mit $I \subseteq \sqrt{I}$.

(ii) Es gilt $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

Berechnen sie im Ring $R = \mathbb{Z}$

$$\sqrt{2\mathbb{Z}}, \ \sqrt{4\mathbb{Z}}, \ \sqrt{6\mathbb{Z}}.$$

Für welche $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\sqrt{n\mathbb{Z}} = n\mathbb{Z}$?

Aufgabe 4

Sei R ein Integritätsring. Zeigen Sie dass $R[x]$ genau dann ein Hauptidealring ist, wenn R ein Körper ist.