universität innsbruck
Institut für Mathematik

Aufgaben zur Algebra 2

Besprechungstermin Di. 18. März 2025

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ normal ist.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie sämtliche Zwischenkörper der Erweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}).$$

Aufgabe 3
Für $i = 1, \ldots, n$ definieren wir Polynome $s_i \in \mathbb{Q}[y_1, ..., y_n]$ durch

$$x^n + s_1 x^{n-1} + \cdots + s_{n-1} x + s_n = (x + y_1) \cdots (x + y_n).$$

Eine rationale Funktion $f \in \mathbb{Q}(y_1, ..., y_n)$ heißt **symmetrisch**, wenn für jede Permutation $\pi \in S_n$

$$f(y_{\pi(1)}, ..., y_{\pi(n)}) = f(y_1, ..., y_n)$$

gilt. Zeigen Sie:
(i) Die Polynome s_i sind symmetrisch.
(ii) Die Erweiterung $\mathbb{Q}(s_1, ..., s_n) \subseteq \mathbb{Q}(y_1, ..., y_n)$ ist galoissch.
(iii) Die Galois-Gruppe der Erweiterung aus (ii) ist isomorph zu S_n.
Was kann man mithilfe des Hauptsatzes der Galoistheorie über symmetrische rationale Funktionen aussagen?

Aufgabe 4
Zeigen Sie: Für jede endliche Gruppe G gibt es eine Galoiserweiterung $K \subseteq L$ mit $\mathrm{Gal}(L, K) \cong G$. (Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 3.)