universität
innsbruck
Institut für Mathematik

Aufgaben zur Algebra 1

Besprechungstermin: Do. 23. Jänner 2025

Aufgabe 1

Sei $p \in k[x]$ ein irreduzibles Polynom sowie K sein Zerfällungskörper über k. Zeigen Sie, dass es für je zwei Nullstellen $a, b \in K$ von p ein $\varphi \in \mathrm{Aut}(K, k)$ gibt mit $\varphi(a) = b$.

Aufgabe 2

Sei p eine Primzahl, $\xi := e^{2\pi i/p} \in \mathbb{C}$ und $K := \mathbb{Q}(\xi)$. Zeigen Sie, dass für jedes $j = 1, \ldots, p-1$ genau ein $\mathbb{Q}$-Isomorphismus $\varphi_j \colon K \to K$ existiert mit

$$\varphi_j(\xi) = \xi^j.$$

Stimmt die Aussage auch, wenn p keine Primzahl ist?

Aufgabe 3

Sei $k \subseteq K$ eine Körpererweiterung. Man nennt

$$k_K^{\mathrm{rel}} := \{a \in K \mid a \text{ algebraisch über } k\}$$

den *relativen algebraischen Abschluss* von k in K. Falls $k = k_K^{\mathrm{rel}}$ gilt, heißt k *relativ algebraisch abgeschlossen in* K.

Zeigen Sie: Wenn K algebraisch abgeschlossen ist, so ist k genau dann algebraisch abgeschlossen, wenn k relativ algebraisch abgeschlossen in K ist.

Aufgabe 4

Sei R ein kommutativer Ring und $I \lhd R$ ein Ideal. Für $a \in R \setminus \sqrt{I}$ betrachten wir die Menge $M = \{1, a, a^2, a^3, \ldots\}$, die Lokalisierung $M^{-1}R$ und den kanonischen Homomorphismus $\iota \colon R \to M^{-1}R$. Zeigen Sie:

(*i*) Das von $\iota(I)$ in $M^{-1}R$ erzeugte Ideal ist nicht der ganze Ring $M^{-1}R$.
(*ii*) Es gibt ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \lhd M^{-1}R$ mit $\iota(I) \subseteq \mathfrak{m}$.
(*iii*) Es gibt ein Primideal $\mathfrak{p} \lhd R$ mit $I \subseteq \mathfrak{p}$ und $a \notin \mathfrak{p}$.
(*iv*) $\sqrt{I}$ ist der Durchschnitt aller über I liegenden Primideale.