PS Analysis 3 **WS 2024/25**

Übungszettel 4 (CA)

Karin Schnass *ankreuzbar bis 29.10., 8:00*

1. **The usual suspects and their derivatives.**
   Berechne die Ableitung von $\exp, \cos, \sin$ auf $\mathbb{C}$ bzw. $\log$ auf $\mathbb{C}^-$.

2. **Domains - a star is born.**
   (a) Zeige, dass $\mathbb{C}^-$ und jede konvexe Teilmenge von $\mathbb{C}$ sternförmig sind.
   (b) Zeige, dass $\mathbb{C}^*$ und $B_R(z_0) \setminus \bar{B}_r(z_0)$ für $0 < r < R$ Gebiete aber nicht sternförmig ist.

3. **I walk the line and other curves.**
   (a) Zeige, dass zwei äquivalente glatte Kurven $\gamma, \tilde{\gamma}$ dasselbe Kurvenintegral besitzen.
   (b) Zeige, dass zwei einfache, gleichorientierte und stückweise glatte Kurven, mit $\text{Bild}(\gamma) = \text{Bild}(\tilde{\gamma})$ dasselbe Kurvenintegral besitzen. Hinweis: Verwende a) und Satz 2.18).
   (c) Es sei $\gamma : [a, b] \to U$ eine glatte Kurve und $\overleftarrow{\gamma} : [a, b] \to U$ die umgekehrte Kurve oder Rückkurve, also $\overleftarrow{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$. Zeige, dass für $f : U \to \mathbb{C}$ stetig gilt
   $$\int_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

4. **Per qualche integrale in piú.**
   Sei $r > 0$, $a \in \mathbb{C}$. Berechne für $\gamma_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(t) = a + re^{\mathrm{i}t}, \gamma_2(t) = a + re^{2\mathrm{i}t}, \gamma_{-1}(t) = a + re^{-\mathrm{i}t}$ das folgende Kurvenintegral
   $$\int_{\gamma_k} \frac{1}{z - a}\,\mathrm{d}z.$$
   Folgere, dass die drei Kurven nicht äquivalent sind. Was fällt noch auf?

5. $\mathbb{C}^-$ **für** $\log$ **- as good as it gets.**
   Zeige, dass es keine offene Menge U mit $\mathbb{C}^- \subset U$ gibt, auf welcher der komplexe Logarithmus, also eine Umkehrfunktion von exp, stetig definiert werden kann.
   Hinweis: Überlege, wovon log auf U Stammfunktion wäre und verwende 4).

6. **Dogma:** $f' = 0 \Rightarrow f \equiv c$.
   Beweise Korollar 2.22. Verwende Satz 2.21 und, dass je 2 Punkte eines Gebiets durch einen stückweise linearen (affinen) Weg verbunden werden können.