Proseminar Numerische Mathematik 2 am 13.May 2025

(1) Zeigen Sie, dass die Stabilitätsfunktion eines impliziten Runge-Kutta-Verfahrens eine rationale Funktion

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

ist.

(2) Lösen Sie die Aufgabe in Übung 3, Blatt 5 mit den Kollokationsschemata Gauß und Radau IIA mit einer und zwei Stufen (s = 1, 2), wie auf Seite 72 beschrieben. Lösen Sie die gleiche Aufgabe mit dem Kollokationsschema Lobatto IIIA mit s = 2, 3, 4. Ein Verweis auf diese Verfahren ist in Ref1 beigefügt. Vergleichen Sie mit den klassischen Schemata, die wir in Blatt 5 verwendet haben, und kommentieren Sie.

(3) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y' = -2000(y - \cos(x)), \quad y(0) = 0$$

auf dem Intervall $[0, 1.5]$.
Vergleichen Sie die numerischen Lösungen von implizitem Euler Verfahren und impliziter Mittelpunktsregel mit der exakten Lösung. Was fällt auf?

(4) Lösen Sie mit dem impliziten Euler Verfahren und impliziter Mittelpunktsregel das Räuber-Beute Modell

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -c_3 u^2 + c_4 uv \\ \dot{v} &= c_1 v - c_2 v^2 - c_4 uv. \end{aligned}$$

Dabei steht $c_1 v$ für die Vermehrung der Beute, $-c_2 v^2$ steht für die soziale Reibung unter der Beute, $-c_3 u^2$ für die soziale Reibung unter den Räubern und $\pm c_4 uv$ beschreibt den Faktor Räuber frisst Beute und vermehrt sich.

Verwenden Sie $c_1 = 4, c_2 = 0.002, c_3 = 0.3$ und $c_4 = 0.05$ Als Startwert verwenden Sie $u_0 = 100$ und $v_0 = 2000$. Verwenden Sie verschiedene Zeitschrittweiten und stellen Sie die zeitliche Entwicklung der Räuber-Beute Population graphisch dar.

Vergleichen Sie die Lösung, wenn Sie das Räuber-Beute Modell mit dem expliziten Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4 lösen.