Bemerkung 1.8 (MAXIMALES EXISTENZINTERVALL – BLOW UP)

Wir besprechen noch das Verhalten der Lösung im Fall $T < \infty$ und $(a,b) = \mathbb{R}$ in Satz 1.4.

Nach Definition von T existiert eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \nearrow T$ für $n \to \infty$, so dass $(G(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Randpunkt von J konvergiert (bzw. gegen $\pm\infty$, falls J unbeschränkt ist).

$\Rightarrow$ $u(t_n) = F^{-1}(G(t_n))$ konvergiert gegen einen Randpunkt x_0 von I oder gegen $\pm\infty$. Im letzten Fall „explodiert" die Lösung in endlicher Zeit.

Im ersten Fall gilt $f(x_0) = 0$, d.h. die Lösung kann z.B. durch $u(t) = x_0$ $t \geq T$ stetig fortgesetzt werden (diese Fortsetzung ist aber i.A. nicht eindeutig).

Beispiel 1.8 Sei $u_0 > 0$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= u(t)^2 \qquad t > 0 \\ u(0) &= u_0 > 0 \end{aligned}\right\}$$

Wir lösen die Gleichung mit Hilfe der Trennung der Variablen: Es gilt $g(t) = 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$ und $f(x) = x^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Es gilt $u_0 > 0$, d.h. mit $I = (0,\infty)$ gilt $f(x) > 0$ $\forall x \in I$, $u_0 \in I$ und I ist das maximale Intervall mit diesen Eigenschaften

Für $u \in I$, sei $F(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{1}{f(s)}\, ds = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u}$.

$$\Rightarrow \quad J = F(0,\infty) = \left(-\infty, \frac{1}{u_0}\right) \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{u_0}.$$

Für $0 \leq t < T$ folgt

$$t = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u(t)} \quad \Rightarrow \quad u(t) = \frac{1}{T-t}$$

und es gilt $\lim_{t \nearrow T} u(t) = +\infty$.

Beispiel 1.10 Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= \sqrt{|u(t)|} \qquad t > 0 \\ u(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.8)$$

Offensichtlich ist $u(t) = 0$, $t \geq 0$ eine Lösung.

Diese ist allerdings nicht eindeutig.

Betrachtet man für $\alpha > 0$ die Methode der

der Variation der Konstanten angewendet auf:

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= \sqrt{|u(t)|} \qquad t > \alpha \\ u(\alpha) &> 0 \end{aligned}\right\}$$

so erhält man

$$t - \alpha = \int_{\alpha}^{t} 1\, ds = \int_{u(\alpha)}^{u(t)} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{u(t)} - 2\sqrt{u(\alpha)}$$

für $t \geq \alpha$. Sei nun $\lim_{\alpha \searrow 0} u(\alpha) = 0$. Dann folgt

$$t = 2\sqrt{u(t)} \quad \Rightarrow \quad u(t) = \frac{1}{4} t^2, \quad \text{da } t > 0$$

Durch Einsetzen überprüft man leicht, dass u ebenfalls das Problem (1.8) löst.

Allgemeiner noch findet man für $t \geq 0$ und jedes $t_1 > 0$ folgende Schar von Lösungen

$$\vec{u} : [0, \infty) \to \mathbb{R} \qquad \vec{u}(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{1}{4}(t-t_1)^2 & t > t_1 \end{cases}$$

Auch für $t \leq 0$ läßt sich die Lösung nicht-trivial fortsetzen: Für $t_0 < 0 < t_1$ ist $u \in C^1(\mathbb{R})$,

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad u(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t-t_0)^2 & t < t_0 \\ 0 & t \in [t_0, t_1] \\ \frac{1}{4}(t-t_1)^2 & t > t_1 \end{cases}$$

eine Lösung.
Das Anfangswertproblem besitzt also unendlich viele Lösungen.

Bemerkung 1.11 (HOMOGENE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN)
In manchen Fällen lassen sich Differentialgleichungen durch eine geeignete Wahl neuer Koordinaten in eine neue Form bringen, so dass Standard-Lösungsmethoden angewendet werden können. Ein Beispiel dafür sind HOMOGENE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN (zu unterscheiden von „homogenen linearen Differentialgleichungen", siehe unten) vom Typ

$$u'(t) = f\left(\frac{u(t)}{t}\right)$$

Für $t \neq 0$ liefert die Substitution $y(t) = \frac{u(t)}{t}$

formal die Gleichung

$$y'(t) = \frac{1}{t}\left(f(y(t)) - y(t)\right)$$

Diese ist vom Typ getrennte Variable. Ist $f(x) = x$, so lautet die Gleichung $u'(t) = \frac{1}{t} u(t)$ und kann direkt gelöst werden. Ansonsten müssen nur die Stellen $f(y) = y$ gesondert untersucht werden.

Die Anfangswerte müssen entsprechend mittransformiert werden.

Generell ist bei Substititutionen (die i.A. zum Lösen von DGL sehr praktisch sind) Vorsicht geboten, so dass keine Lösungen „verloren gehen".

Um zu testen, ob eine DGL der Form

$$u'(t) = F(t, u(t))$$

homogen ist, überprüft man, ob die Funktion

$F: I \times J \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, eine HOMOGENE FUNKTION VOM GRAD α mit $\alpha = 0$ ist, d.h. es gilt

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha F(x, y) \qquad \text{für } \alpha = 0.$$

1.3.3 Lineare skalare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten lineare Differentialgleichungen der Form

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= a(t)\,u(t) + h(t) \qquad t \in I \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}\right\} \quad (1.9)$$

$I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $u_0 \in I$, $a, h: I \to \mathbb{R}$ stetig.

Ist $h = 0$, so ist die Gleichung vom Typ „getrennte Variablen" und wir erhalten sofort folgendes Resultat:

Satz 1.12 (HOMOGENER FALL $h = 0$)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$, $a: I \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $u_0 \in \mathbb{R}$.

Dann existiert genau eine Lösung $u: I \to \mathbb{R}$ von

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= a(t)\,u(t) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}\right\} \quad t \in I$$

Diese ist gegeben durch $u(t) = u_0\, e^{A(t)}$

mit

$$A(t) := \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$$