# 3 LINEARE SYSTEME

Wir betrachten im Folgenden lineare Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= A(t)u(t) + g(t) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}\right\}$$

für $A \in C(J; \mathbb{R}^{d\times d})$, $g \in C(J, \mathbb{R}^d)$, $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in J$.

Wir betrachten auf dem Vektorraum der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, den wir mit dem Raum der Matrizen $\mathbb{R}^{d\times d}$ identifizieren können, eine Matrix-Norm $\|\cdot\|$, die mit der Norm $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}^d$ verträglich ist, d.h. es gilt

$$|Ax| \leq \|A\|\,|x|,$$

und die außerdem submultiplikativ ist, d.h. es gilt

$$\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\| \qquad \forall A, B \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

Für die Euklidische Norm $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}^d$ besitzt etwa

$$\|A\| := \left( \sum_{i,j=1}^{d} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \qquad (\text{„Frobenius-Norm"})$$

diese Eigenschaft. (Beachte, dass diese Norm keine Operatornorm im Sinne der Definition aus Analysis 2)

**Lemma 3.1** Für $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ gilt, $A = (a_{ij})$

$$|a_{ij}| \leq \|A\| \leq d \max_{i,j \in \{1,..d\}} |a_{ij}| \qquad \forall i,j \in \{1, .. d\}$$

Insbesondere ist die Konvergenz in $\mathbb{R}^{d\times d}$ bezüglich $\|\cdot\|$ äquivalent zur komponentenweisen Konvergenz.
Außerdem ist $(\mathbb{R}^{d\times d}, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.

Beweis: Folgt aus der obigen Abschätzung und die ist offensichtlich zu beweisen.

**Bemerkung 3.2**

Für komplexe Matrizen $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ ist die Frobenius-Norm wie oben definiert und $(\mathbb{C}^{d \times d}, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

**Bemerkung 3.3**

i) Für Matrix-wertige Funktionen: $J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d \times d}$, $t \mapsto A(t)$ ist die Stetigkeit also äquivalent zur komponentenweise Stetigkeit. Für $A \in C(J; \mathbb{R}^{d \times d})$ mit $A(t) = (a_{ij}(t))$ schreiben wir

$$\int_a^b A(s)\,ds = \left( \int_a^b a_{ij}(t)\,dt \right)$$

ii) Für komplex-wertige stetige Funktionen $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ ist

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b \mathrm{Re} f(t)\,dt + i \int_a^b \mathrm{Im}\, f(t)\,dt$$

In diesem Sinne ist die Formel aus i) für $A \in C(J; \mathbb{C}^{d \times d})$ zu interpretieren.

iii) Die Ableitung von Matrix-wertigen Funktionen wird analog zur totalen Ableitung der Analysis 2 definiert (siehe auch Analysis 4) und es gilt:

$$A \in C^1(J, \mathbb{R}^{d \times d}),\ A(t) = (a_{ij}(t)) \Leftrightarrow a_{ij} \in C^1(J)\ \forall i,j \in \{1, .., d\}$$

und $A'(t) = (a_{ij}'(t))$

**Lemma 3.4** Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $(\mathbb{C}^{d\times d}, \|\cdot\|)$.

Die matrix-wertige Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \text{ konvergiert,}$$
falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\|$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Beweis:

Sei für $N \in \mathbb{N}_0$, $S_N := \sum_{k=0}^{N} A_k$. Für $N > M \in \mathbb{N}$, betrachte
$$\|S_N - S_M\| = \left\| \sum_{k=M+1}^{N} A_k \right\| \leq \sum_{k=M+1}^{N} \|A_k\| \to 0 \quad \text{für } M \to \infty$$

$\Rightarrow$ $(S_N)_{N\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Cauchy-Folge und aufgrund der Vollständigkeit von $(\mathbb{C}^{d\times d}, \|\cdot\|)$ konvergent.

## 3.1 AUTONOME LINEARE SYSTEME

Wir betrachten zunächst den Fall $g \equiv 0$ und $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ unabhängig von $t$: Durch Picard-Iteration findet man für $u_0 \in \mathbb{R}^d$
$$u_{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} A u_n(s)\,ds \qquad n \in \mathbb{N}_0$$
$u_0(t) = u_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$
$$u_1(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} A u_0(s)\,ds = u_0 + (t-t_0) A u_0$$
$$u_2(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} A u_1(s)\,ds = u_0 + \int_{t_0}^{t} A u_0\,ds + \int_{-t_0}^{t} (s-t_0) A^2 u_0\,ds$$
$$= u_0 + (t-t_0) A u_0 + \frac{1}{2}(t-t_0)^2 A^2 u_0$$
Und mit Induktion folgt $u_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{j!} (t-t_0)^k A^k u_0$

und wir wissen, dass $(u_n)$ in $C(J, \mathbb{R}^d)$ konvergiert für jedes Intervall $J = [t_0 - T, t_0 + T]$ (und zwar gegen die Lösung der DGL)

**Definition 3.5** Für $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ sei das

MATRIX-EXPONENTIAL

$$\mathbb{C}^{d\times d} \to \mathbb{C}^{d\times d} : A \mapsto e^A$$ definiert als

$$e^A := \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Die Reihe konvergiert, da gilt

$$\left\| \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \frac{1}{k!} \|A\|^k \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

siehe Lemma 3.3

**Bemerkung 3.6** Sind $A, B \in \mathbb{C}^{d\times d}$, so gilt im Allgemeinen

$$e^{A+B} \neq e^A e^B$$

außer in dem Fall, dass der KOMMUTATOR $[A,B] = AB - BA$ verschwindet, d.h.

$$[A,B] = AB - BA = 0.$$

siehe Übungen (Beweis analog zum skalaren Fall, Analysis 1)

**Lemma 3.7** Sei $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$. Für die Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C}^{d\times d} : \quad t \mapsto e^{tA}$$ (MATRIXEXPONENTIALFUNKTION) gilt

i) $e^{0\cdot A} = I$, wobei $0$ die Nullmatrix und $I$ die Einheitsmatrix bezeichnen.

$$Ae^{tA} = e^{tA}A \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \text{ sowie}$$

$$e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA} = e^{sA} e^{tA} \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

ii) $\forall t \in \mathbb{R} : \quad (e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$

iii) $\forall t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$: $t \mapsto e^{tA}$ ist n-mal stetig differenzierbar und

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(e^{tA}\right) = A^n e^{tA} = e^{tA} A^n$$

<u>Beweis:</u> i) Aus der Definition folgt $e^{0A} = I$ (mit $A^0 = I$ und $0^0 = 1$.)

Da $A\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k\right) A$ folgt die 2. Identität durch Bildung des Grenzwerts

Die letzte Behauptung folgt aus Bemerkung 3.2.

ii) Folgt aus i), denn $e^{tA} e^{-tA} = e^{-tA} e^{tA} = e^{(t-t)A} = I$

iii) Wir schreiben für $N \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$ $S_N(t) := \sum_{k=0}^{N} \frac{t^k}{k!} A^k$

Es gilt $S_N'(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k = A \sum_{k=0}^{N-1} \frac{t^k}{k!} A^k = A S_{N-1}(t)$

Für $t \in \mathbb{R}$, sei $T > 0$, so dass $t \in [-T, T]$. Dann folgt $\forall N \in \mathbb{N}$ und für alle $t \in [-T, T]$

$$\| A e^{tA} - S_N'(t) \| \leq \| A \| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{T^k}{k!} \|A\|^k$$

$\Rightarrow$ $(S_N'(t))_{N \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $Ae^{tA}$ auf $[-T, T]$.

Dies ist äquivalent zur glm. komponentenweise Konvergenz

$$(S_N'(t))_{ij} \to (Ae^{tA})_{ij} \quad \text{glm. auf } [-T, T] \ \forall i, j \in \{1, \dots, d\}$$

Analysis 1 $\Rightarrow$ $(e^{tA})'_{ij} = (Ae^{tA})_{ij}$

Für $n \in \mathbb{N}$ folgt iii) durch Induktion. $\square$

**Satz 3.8** Sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $g \in C(J, \mathbb{R}^d)$, $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.
Dann ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$u(t) = A u(t) + g(t)$$
$$u(t_0) = u_0 \qquad t_0 \in J,\ u_0 \in \mathbb{R}^d$$

gegeben durch

$$u(t) = e^{(t-t_0)A} u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} g(s)\, ds \qquad \forall\, t \in J.$$

**Beweis:** Die Existenz einer eindeutigen Lösung für alle $t \in J$ haben wir bereits in Beispiel 2.19 gezeigt.
Dass für $g = 0$ die Lösung des homogenen Problems gegeben durch $u_h(t) = e^{(t-t_0)A}$ gegeben ist, zeigt bereits die Picard-Iteration.
Im Allgemeinen Fall verifiziert man die Formel durch Bildung der Ableitung.

$\#$

Im Folgenden untersuchen wir, wie man die Matrix $e^{tA}$, $t \in \mathbb{R}$ konkret berechnen kann.

**Beispiel 3.9** i) Sei $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen $\lambda_i \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, $i \in \{1, .., d\}$.

Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!} \operatorname{diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_d^n) = \operatorname{diag}\left( \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n \lambda_1^n}{n!}, \dots, \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n \lambda_d^n}{n!} \right) =$$

$$\Rightarrow \qquad e^{tA} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots e^{\lambda_d t})$$

ii) Ist $A$ allgemeiner eine Blockdiagonalmatrix: Für $n \in \mathbb{N}$, $n \leq d$:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix} \quad \text{für } A_k \text{ quadratische Matrizen}$$

gilt $e^{tA} = \operatorname{diag}(e^{tA_1}, \dots, e^{tA_n})$, siehe Übungen.

iii) Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $A^n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

(d.h. $A$ ist nilpotent) und

$$e^{tA} = I + tA = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beachte, dass $(e^{tA})_{ij} \neq (e^{ta_{ij}})$