Blatt 4 Lukas Meinschad

Mittwoch, 23. Oktober 2024 22:08

Aufgabe 3

Beweisen sie folgende Rekursionsformel für Legendre Polynome:

$(k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)x P_k(x) - kP_{k-1}(x)$ für $k \geq 1$

Leibnitz Produkt Regel ⇒ Derivative

$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{k} g^{n-k}$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k!)}$

Betrachte Definition 1.31 (Rodrigues Formula)

$P_k(x) := \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k}\left((1-x^2)^k\right) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

eine Ableitung gleich lieber

Betrachte $(n+1)P_{n+1}(x) = (n+1)\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2+1)^{n+1}$

$\Leftrightarrow (n+1)P_{n+1}(x) = (n+1)\frac{1}{2^{\cancel{n+1}}(n+1)!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\cancel{(n+1)}(x^2-1)^n \cancel{2}x\right)$

$\hookrightarrow (n+1)\cdot n!$

$\Leftrightarrow (n+1)P_{n+1}(x) = (n+1)\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n x\right)$

Derivative „n"

Apply Leibnitz

$\Leftrightarrow (n+1)P_{n+1}(x) = (n+1)\frac{1}{2^n n!}\left(x D^n (x^2-1)^n + \binom{n}{1} D^{n-1}(x^2-1)^n\right)$

$\Leftrightarrow (n+1)P_{n+1}(x) = (n+1)\frac{1}{2^n n!}\left(x D^n (x^2-1)^n + n D^{n-1}(x^2-1)^n\right) = (n+1)xP_n(x) + \frac{n+1}{2^n(n-1)!}D^{n-1}(x^2-1)^n$

LEMMA: $xD^n = D^n x - nD^{n-1}$

$\Leftrightarrow (n+1)P_{n+1}(x) = (n+1)xP_n(x) \pm nxP_n(x) + \frac{n+1}{2^n(n-1)!}D^{n-1}(x^2-1)^n$

$\Leftrightarrow (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) + \frac{n+1}{2^n(n-1)!}D^{n-1}(x^2-1) - \frac{nx}{2^n n!}D^n(x^2-1)^n$

$\Leftrightarrow (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) + \frac{n+1}{2^n(n-1)!}D^{n-1}(x^2-1) \quad \frac{1}{2^n(n-1)!}\left[D^n x(x^2-1)^n - nD^{n-1}(x^2-1)^n\right]$

$\Leftrightarrow (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) \quad \frac{2n+\cancel{1}}{2^n(n-1)!}D^{n-1}(x^2-1)^n - \frac{1}{2^n(n-1)!}\left[\cancel{D^{n-1}(x^2-1)^n} + xn(x^2-1)^{n-1}\cdot 2x\right]$

$\Leftrightarrow (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) + \frac{n}{2^{n-1}(n-1)!}\left[D^{n-1}\underbrace{\left((x^2-1)^n - x^2(x^2-1)^{n-1}\right)}_{(x^2-1)^{n-1}(x^2-1) - x^2(x^2-1)^{n-1}}\right]$

$\Leftrightarrow (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - \frac{n}{2^{n-1}(n-1)!}\left[D^{n-1}(x^2-1)^{n-1}\right]$ → Rodrigues $P_{n-1}(x)$

$\Leftrightarrow (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$ ☒

Aufgabe 4

Seien $c_1^{(s)} \dots c_s^{(s)}$ die Knoten einer Gauß-Quad mit Ordnung $2s$, aufsteigend und $c_1^{(s+1)} \cdot c_{s+1}^{(s+1)}$ die $s+1$ Knoten der QF mit Ordnung $2s+2$.

Zeigen Sie dass die Knoten die Eigenschaft $0 < c_1^{(s+1)} < c_1^{(s)} < c_2^{(s+1)} < c_2^{(s)} < \dots < c_s^{(s)} < c_{s+1}^{(s+1)} < 1$ erfüllen

Betrachte die Nullstellen der Legendre Polynome

Rodrigues Formel: $P_k(x) := \frac{(-1)^k}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}\left((1-x^2)^k\right)$

Es gilt nach Satz 1.34: für jedes $s \in \mathbb{N}$ $\exists$ QF mit $p = 2s$. Dabei sind die Knoten gegeben durch $c_i := \frac{1}{2}(1+y_i)$ $i = 1 \dots s$

⇒ Damit zeigen wir alternativ die gleiche Eigenschaft gilt für Legendre Polynome dann sind wir fertig

. Induktionsanfang $s=1$ ⇒ z.z. $0 < c_1^{(2)} < c_1^{(1)} < c_2^{(2)} < 1$

c_s mit $y_1 \dots y_s$ Nullstellen von Legendre Polynom $P_s(x)$

$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2}(1+\tilde{y}_1) < \frac{1}{2}(1+y_1) < \frac{1}{2}(1+\tilde{y}_2) < 1$

wobei $\tilde{y}$ Nullstellen von P_{s+1} und y Nullstellen von P_s

$\Leftrightarrow 0 < 1+\tilde{y}_1 < 1+y_1 < 1+\tilde{y}_2 < 2$

$\Leftrightarrow \boxed{-1 < \tilde{y}_1 < y_1 < \tilde{y}_2 < 1}$

$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ $\quad P_1(x) = x \Rightarrow 0$

damit gilt Induktions hypothese

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{2}x^2$

$\Leftrightarrow 1 = 3x^2$

$\Leftrightarrow$ Nullstelle $\tilde{y}_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\tilde{y}_2 = +\sqrt{\frac{1}{3}}$

Note: Die durch Umformen zeigt man also

$\Rightarrow -1 < \tilde{y}_1 < y_1 < \tilde{y}_2 < y_2 < \dots < y_s < \tilde{y}_{s+1} < 1$

mit $\bar{y}$ Nullstellen $P_{s+1}(x)$ und y_s Nullstelle P_s

Angenommen es gilt für s und betrachte $s+1$

$\Rightarrow$ z.z. $-1 < \hat{y}_1 < \bar{y}_1 < \hat{y}_2 \dots < 1$

mit $\hat{y}$ Nullstelle P_{s+2}

RKI: $(s+2)P_{s+2}(x) = (2s+3)xP_{s+1}(x) - (s+1)P_s(x)$

Betrachte Nullstelle $\bar{y}_i$ also von $P_{s+1}(x)$

$\Rightarrow (s+2)P_{s+2}(\bar{y}_i) = -(s+1)P_s(\bar{y})$

an $\bar{y}_i$ hat P_{s+2} anderes Vorzeichen wie P_s

Insbesondere hat jedoch $P_s(x)$ einen Vorzeichenwechsel $\bar{y}_i < y_i < \bar{y}_{i+1}$

$\Rightarrow P_{s+2}$ ist stets gleich gerade/ungerade wie P_s

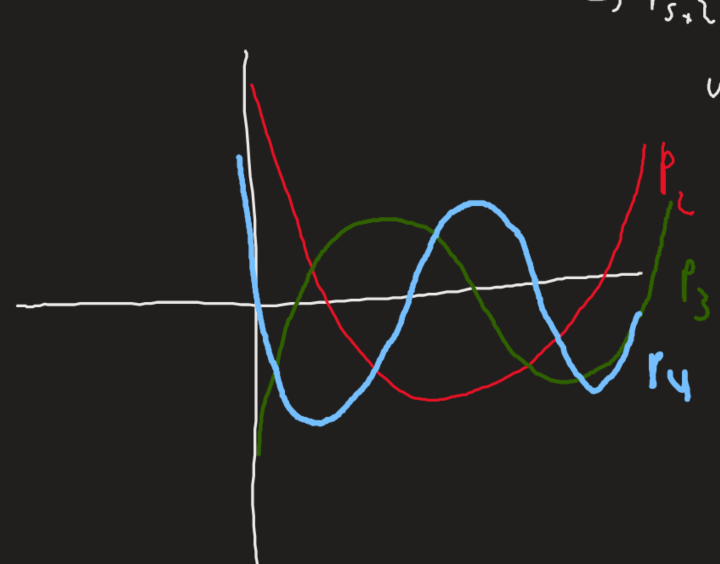
und P_{s+1} ist genau das Umgekehrte

da z.B. P_{s+2} und P_s gerade sind und nach IV $\bar{y}_i < y_i < \bar{y}_{i+1}$

aber P_s erst nach Nullstelle von P_{s+1} vorzeichen wechselt muss

P_{s+2} die Nullstelle $\leq P_{s+1}$ haben sogar $<$ da orthogonal

⇒ damit folgt gewünschte Eigenschaft



Aufgabe 5

Die Chebyshev-Polynome T_k sind in $[-1,1]$ folgendermaßen definiert

$T_k(x) = \cos(k \arccos(x))$, $k = 0, 1, 2 \dots$

a) $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$

$T_0(x) = \cos(0 \arccos(x)) = \cos(0) = 1$

$T_1(x) = \cos(1 \arccos(x)) = x$

b) $T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$ für $k \in \mathbb{N}$

Additionstheoreme $\cos(x+y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$T_{k+1}(x) = \cos((k+1)\arccos(x))$

$= \cos(k\arccos(x) + \arccos(x))$

$= \cos(k\arccos(x))\cdot\cos(\arccos(x)) - \sin(k\arccos(x))\cdot\sin(\arccos(x))$

gleich :)

$2xT_k(x) = 2x\cos(k\arccos(x))$

$T_{k-1}(x) = \cos((k-1)\arccos(x))$

$= \cos(k\arccos(x) - \arccos(x))$

$= \cos(k\arccos(x))\cos(\arccos(x)) - \sin(k\arccos(x))\cdot\sin(\arccos(x))$

$= xT_k(x) - \sin(k\arccos(x))\sin(\arccos(x))$

damit $2xT_k(x) - T_{k-1}(x) = xT_k(x) - \sin(k\arccos(x))\sin(\arccos(x))$

c) Für $k, j \in \mathbb{N}_0$ gilt $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x)T_j(x)\,dx = \begin{cases} \pi & k=j=0 \\ \frac{\pi}{2} & k=j>0 \\ 0 & k \neq j \end{cases}$

Standard int

Fall 1: $k = j = 0 \overset{a)}{\Rightarrow} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} 1\,dx = \arcsin(x)\Big|_{-1}^{1} = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi$

Fall 2, Fall 3 noch einfacher, weil ich sehe

Sei $x = \cos(\theta)$ $\quad dx = -\sin(\theta)\,d\theta$

dann ist $\Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2(\theta)} = \sin(\theta)$

Grenzen: $-1 \to \pi$, $\quad x = 1 \to 0$

$\int_{\pi}^{0} \frac{1}{\sin(\theta)} T_k(\cos(\theta))T_j(\cos(\theta))(-\sin)(\theta)\,d\theta$

$= \int_0^{\pi} T_k(\cos(\theta))T_j(\cos(\theta))\,d\theta$

$= \int_0^{\pi} \cos(k\arccos(\cos(\theta)))\cdot\cos(j\arccos(\cos(\theta)))\,d\theta$

$= \int_0^{\pi} \cos(k\theta)\cdot\cos(j\theta)\,d\theta$

Fall 1: $\cos(0) = 1 \to \pi$

Partiell Int.

Fall 2: $k = j > 0$: $\int_0^{\pi} \cos^2(\underbrace{k\theta}_{x}) \approx \frac{\frac{\sin(2x)}{2} + x}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

Fall 3: $\int_0^{\pi} \cos(j\theta)\cos(k\theta) = \int \frac{\cos((k+1)\theta) + \cos((k-1)\theta)}{2}$ ⇒ Linearität

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((k+1)\theta)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((k-1)x)\,dx$

$\int \cos(v)\,dx = \frac{\sin(v)}{k+j}$ da $\sin \pi$ und $\sin(0) = 0$ sind im Endeffekt beide Integrale $= 0$

d) die Chebyshev-Polynome $T_0, T_1 \dots T_n$ bilden eine Basis vom Raum der reellen Polynome vom Grad kleiner gleich n

Vektorraum $P_n[x]$ hat Polynome der Form: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

1) Lineare Unabhängigkeit Um zu zeigen $T_0(x)T_1(x)\dots T_n(x)$ sind linear unabhängig

z.z. $c_0T_0(x) + c_1T_1(x) \dots c_nT_n(x) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

Betrachte $T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

Trig ID: $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$

$T_2(x) = \cos(2\arccos(x)) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = \cos(3\arccos(x)) = 2xT_2(x) - T_1(x)$

$= 2x\cdot(2x^2-1) - x$

$= 4x^3 - 3x$

⋮

Insgesamt mit b) sieht man ⇒ $c_0 \cdot 1 + c_1(x) + c_2(2x^2-1) + c_3(4x^3-3x) + \dots + c_nT_n(x) = 0$

damit $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ da man Polynom vom Grad n erhält und es muss alle $c_i = 0$

sein somit nur triviale Linearkombination

ergo mit b) wird auch klar dass man Polynome x^n bilden kann damit maximal linear unabhängig mit Grad $\leq n$ damit Basis