universität innsbruck
Institut für Mathematik

Algebra 2
Sommersemester 2025

Aufgaben zur Algebra 2

Besprechungstermin Di. 20. Mai 2025

Aufgabe 1
Beweisen Sie Proposition 7.2.3 aus dem Skript.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass es sich bei den folgenden Vorschriften um Funktoren handelt. Geben Sie jeweils sinnvolle Urbild- und Bild-Kategorien an, sowie die Abbildungen auf Ebene der Morphismen. Entscheiden Sie, ob die Funktoren kontra- oder kovariant sind.

(i) $\mathrm{Hom}(X, \cdot)\colon M \mapsto \mathrm{Hom}(X, M)$.
(ii) $\mathrm{Hom}(\cdot, X)\colon M \mapsto \mathrm{Hom}(M, X)$.
(iii) $\cdot \otimes X\colon M \mapsto M \otimes X$.
(iv) $G \mapsto \mathcal{K}(G)$, wobei G eine Gruppe und $\mathcal{K}(G)$ die Menge der Konjugationsklassen ihrer Elemente ist.
(v) $M \mapsto M^{\mathrm{tor}}$.

Aufgabe 3
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ sowie $f \in \mathcal{C}(X, Y), g \in \mathcal{C}(Y, X)$. Wenn $g \circ f = \mathrm{id}_X$ gilt, so heißt g *Retraktion* und f *Schnitt*. Zeigen Sie:

(i) Kovariante Funktoren führen Retraktionen in Retraktionen und Schnitte in Schnitte über. Wie sieht es bei kontravarianten Funktoren aus?
(ii) In den Kategorien der Mengen, Gruppen, Ringe, k-Vektorräume, R-Moduln, k-Varietäten und topologischen Räume sind Retraktionen surjektiv und Schnitte injektiv.
(iii) Finden Sie einen kovarianten Funktor zwischen zwei der Kategorien aus (ii), der injektive Morphismen nicht immer in injektive Morphismen überführt. Finden Sie weiter einen kovarianten Funktor, der surjektive Morphismen nicht immer in surjektive Morphismen überführt.

Aufgabe 4
Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei Ringgarben auf dem topologischen Raum X. Zeigen Sie, dass dann durch
$$\mathcal{H}(U) := \mathcal{F}(U) \times \mathcal{G}(U)$$
und den offensichtlichen Restriktionsabbildungen eine Ringgarbe $\mathcal{H}$ auf X definiert wird.