Blatt 4 Lukas Meinschad

Mittwoch, 23. Oktober 2024 18:43

1 The usual suspects and their derivatives

Berechnen Sie die Ableitungen von exp cos sin auf $\mathbb{C}$ bzw. log auf $\mathbb{C}^-$

Definition Komplex Differenzierbar

Sei $U \neq \emptyset$ offen. Eine Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ heißt auf $\mathbb{C}$ in z_0 komplex differenzierbar falls ein $f'(z_0) := c \in \mathbb{C}$ existiert mit

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \left| \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z} - c \right| \leq \varepsilon \quad \forall z \in B_\delta(z_0),\ z \neq z_0$$

$$\iff \lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z} = c$$

Sinus / Cosinus

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Cauchy-Riemann DGL

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \text{ gilt } \quad \delta_x u = \delta_y v, \quad \delta_y u = -\delta_x v$$

Satz 2.10

$f: U \to \mathbb{C}$ genau dann komplex differenzierbar in $z_0 = x_0 + iy_0$, falls

$$f_r(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, f(x+iy) \\ \mathrm{Im}\, f(x+iy) \end{pmatrix}$$ Cauchy Riemann DGL erfüllt

① $\exp(z)$

Definition: $\exp(z) := e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Sei $z = x + iy$ beliebig dann

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin(y)) = e^x \cos y + e^x \sin y\, i$$

Setze nun $u(x,y) = e^x \cos y$

$v(x,y) = e^x \sin y$

Betrachte $\delta_x u = e^x \cos y \quad \delta_y u = -e^x \sin(x)$

$\delta_y v = e^x \cos y \quad -\delta_x v = -e^x \sin(x)$

damit ist exp differenzierbar es gilt

· $\cos(z)$ $z \in \mathbb{C}$

Es gilt $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

Kettenregel $(h \circ g)' = (g' \circ f) \cdot f'$

damit $e^{iz} = \exp(iz)' = i \cdot e^{iz}$

damit $e^{-iz} = \exp(-iz)' = -ie^{-iz}$

insgesamt mit Linearität

$$\frac{d}{dz} \cos(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz} e^{iz} + \frac{d}{dz} e^{-iz}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(ie^{iz} - ie^{-iz}\right)$$

$$= \frac{i}{2} \cdot \left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

mit Sinus: $\frac{i}{2} \cdot (2i \sin(z)) = -\sin(z)$

· $\sin(z)$ mit $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{d}{dz} \sin(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{d}{dz} e^{iz} - \frac{d}{dz} e^{-iz}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} + ie^{-iz}\right)$$

$$= \frac{i}{2i}\left(e^{iz} + ie^{-iz}\right) = \cos(z)$$

· log auf $\mathbb{C}^-$

WH: $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\} = \{re^{i\varphi}, r > 0\ \varphi \in (-\pi, \pi)\}$

$\log: \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ mit $z = re^{i\varphi} \to \log(r) + i\varphi$ ist Hauptzweig

Es gilt $e^{\log(z)} = z$ ist Umkehrfunktion von $\exp(z)$

$$\frac{d}{dz} e^{\log(z)} = \frac{d}{dz} z = 1$$

Ableitung von exp

zudem liefert Kettenregel: $\frac{d}{dz} e^{\log(z)} = e^{\log(z)} \frac{d}{dz} \log(z) = z \cdot \frac{d}{dz} \log(z)$

nun also $1 = z \frac{d}{dz} \log(z)$ mit $z \in \mathbb{C}^- \Rightarrow \frac{d}{dz} \log(z) = \frac{1}{z}$

Aufgabe 5 C geschlitzt für Log aß good as it gets

Zeige dass es keine offene Menge U mit $\mathbb{C}^- \subset U$ gibt, auf welcher der komplexe Logarithmus also eine Umkehrfunktion von exp, stetig definiert werden kann

Hinweis: Überlege wovon log auf $\mathbb{C}^-$ Stammfunktion war und verwende 4

Es ist wieder $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$

Eine generelle Definition des Logarithmus $\log(z) = \ln(|z|) + i \arg(z)$

da sich $\arg(z)$ um 2π verschieben lässt Logarithmus auf $\mathbb{C}$ nicht eindeutig $\Rightarrow$ Äste

Aufgabe 6 Dogma

Beweise Korollar 2.22. Verwende Satz 2.21 und, dass je 2 Punkte eines Gebietes durch einen stückweise (linearen) Weg verbunden werden können

Korollar 2.22

Sei G ein Gebiet und und $f: G \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $f' = 0$ dann gilt $c \in \mathbb{C}$

sind F_1, F_2 zwei Stammfunktionen von f auf G, dann gilt $F_2 - F_1 \equiv c$

Satz 2.21 (Stammfunktion und Kurvenintegrale)

Sei $f: U \to \mathbb{C}$ stetig mit Stammfunktion F also $F' = f$, dann gilt für stückweise glatte Kurve

$y: [a,b] \to U \quad \int_y f(z)\, dz = F(y(b)) - F(y(a)) \Rightarrow$ insbesondere $\int_y f(z)\, dz = 0$ falls y geschlossen

Beweis: Angenommen $f: G \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $f' = 0$

LEMMA 2.3

insbesondere ist f differenzierbar $\Rightarrow f$ auch stetig

Seien nun $z_1, z_2 \in G$ und G ein Gebiet $\hat{=}$ offen + wegzusammenhängend und man kann z_1 und z_2 durch stückweise lineare (affine) Weg verbinden $\Rightarrow \exists\ y\ [a,b] \to G$ als stückweise glatte Kurve damit kann man Satz 2.21 anwenden

da f stetig, und $f' = 0$ auch stetig $\Rightarrow \int_y f'(z)\, dz = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$

jedoch ist $f'(z) = 0 \Rightarrow f(\varphi(a)) = f(\varphi(b))$ und man kann sagen

$f(z_1) = f(z_2)$ wodurch $f(z) = c$ konstant ist da z_1, z_2 beliebig

Sind F_1, F_2 zwei Stammfunktionen auf G dann gilt $F_2 - F_1 = c$

Da F_1 Stammfunktion $F_1'(z) = f(z)$ und $F_2'(z) = f(z)$

Definiere $H(z) = F_2(z) - F_1(z) \Rightarrow H'(z) = F_2'(z) - F_1'(z) = f(z) - f(z) = 0$

insbesondere ist nun $H'(z) = 0$ damit $H(z) = F_2(z) - F_1(z) = c$ nach erstem Teil

Domains a Star is born

a) Zeige, dass $\mathbb{C}^-$ und jede konvexe Teilmenge von $\mathbb{C}$ sternförmig sind

Definition (sternförmiges Gebiet)

Ein Gebiet G heißt sternförmig falls ein Punkt $z_0 \in G$ existiert so dass $\forall z \in G$ die Verbindungsstrecke zwischen z, z_0 in G liegt $\{sz + (1-s)z_0 \mid s \in [0,1]\} \subseteq G$

$\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$

Nehme einen Punkt $x_0 = 0$ den Ursprung und ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{C}^-$

Sei $x = a + bi$ mit $a \geq 0$ dann gilt für VBS

$(1-t) \cdot 0 + t \cdot (a+bi) = ta + tbi$ mit $t \in [0,1]$

mit $a \geq 0$, $t \geq 0 \Rightarrow ta \geq 0$ damit $\mathrm{Re}(ta + bti) \geq 0 \in \mathbb{C}^-$

damit Sternförmig mit $x_0 = 0$

Definition (konvexe Menge)

Sei $x, y \in M \quad M :=$ konvexe Teilmenge von $\mathbb{C}$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \in [0,1]$ gilt

$\lambda x + (1-\lambda) y \in M$

Angenommen $x \in M$ ein Punkt und $x_0 \in M$ ebenfalls

Betrachte $z(t) = (1-t)x_0 + x \quad t \in [0,1]$ z.z. $z(t) \in M$

da M konvex $\quad z(0) = (1-0) + 0x = x_0 \in M$

$\qquad z(1) = 0x_0 + 1x = x \in M$

$t \in (0,1)$ sogar M konvex dadurch gilt dann eh :)

b) Zeige dass $\mathbb{C}^*$ und $B_R(z_0) \setminus \bar{B}_r(z_0)$ für $0 < r < R$ Gebiete aber nicht sternförmig sind

b 1) $\mathbb{C}^*$ ist nicht sternförmig aber Gebiet

zusammenhängend / Gebiet

$U \subseteq \mathbb{C}$ ist zusammenhängend $\Rightarrow$ disjunkte Vereinigung von offenen nichtleeren Mengen geschrieben werden kann. Nicht leere offene zusammenhängende Menge ist Gebiet

Es ist $\mathbb{C}$ offen und damit $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$ ebenfalls.

auch ist $\mathbb{C}$ Gebiet, das ändert sich durch Entfernen eines Punktes nicht

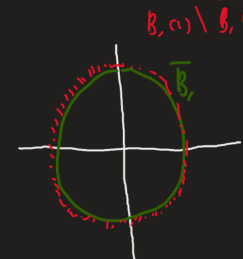
$B_R(z_0) \setminus \overline{B_r(z_0)}$ ist Gebiet:

$B_r(z_0)$ ist offene Kreisscheibe

$\bar{B}_r(z_0)$ ist abgeschlossene Kreisscheibe

$\Rightarrow$ Differenzmenge ist offener Ringbereich, welcher immer noch offen und zusammenhängend ist

$B_r(z_0) \setminus \overline{B_r(z_0)}$



· $B_R(z_0) \setminus \overline{B_r(z_0)}$ nicht sternförmig

sagen angenommen $r = 1$ und Ringförmig

$B_1(z_0) \setminus \overline{B_1(z_0)}$

Angenommen Sternförmig um z_0

Betrachte den Punkt gespiegelt von z_0 spiegel auf der anderen Seite des Kreises hier verläuft Verbindungslinie zwingend durch $\overline{B_r(z_0)}$ damit nicht sternförmig

· $\mathbb{C}^*$ nicht sternförmig

Angenommen $\mathbb{C}^*$ ist sternförmig $\exists z_0 \in \mathbb{C}^*$ sodass $\forall z \in \mathbb{C}^*$ auch die Verbindungslinie enthalten ist

Betrachte Linie von z_0 durch den Ursprung nach z_1

dann $zt + (1-t)z_0 \quad \forall t \in [0,1] \in \mathbb{C}^*$

jedoch $\exists t$ sodass $zt + (1-t)z_0 = (0,0)$ ist ↯

Aufgabe 3 i walk the line and other curves

(a) Zeige, dass zwei äquivalente glatte Kurven $y, \tilde{y}$ das gleiche Kurvenintegral besitzen

Definition (glatte, stückweise glatte Kurve)

$y: [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt glatte Kurve falls sie als Abbildung nach $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar ist

$x, y: [a,b] \to \mathbb{R} \quad x = \mathrm{Re}(x)$ und $y = \mathrm{Im}(y)$ stetig diffbar ist $\dot{y}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}'(t)$

Definition (Kurvenintegral)

$f: U \to \mathbb{C}$ stetig $\ y: [a,b]$ stückweise glatt f entlang y ist $\int_y f(z)\, dz := \int_{[a,b]} (f \circ y)\, y'\, d\lambda$

Definition äquivalent:

Zwei glatte Kurven $y: [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\tilde{y}: [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{C}$ heißen äquivalent $y \sim \tilde{y}$ falls stetig diffbare Abbildung $\psi: [a,b] \to [\tilde{a}, \tilde{b}]$ existiert mit $\psi' > 0$ existiert $y = \tilde{y} \circ \psi$

z.z. $\int_{\tilde{y}} f(x)\, dx = \int_y f(x)\, dx$

da $y \sim \tilde{y}\ \exists\ \psi: [a,b] \to [\tilde{a}, \tilde{b}]$ sodass $y = \tilde{y}(\psi(x))$

$$\text{damit ist } \int_y f(x)\, dx = \int_a^b f(y(t))\, y'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b f(\tilde{y}(\psi(t))) \cdot \tilde{y}'(\psi(t))\, \psi'(t)\, dt$$

$u = \psi(t) \quad du = \psi'(t)dt$ Substitution

$$= \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\tilde{y}(u)) \cdot \tilde{y}'(u)\, du = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\tilde{y}(u))\, \tilde{y}'(u)\, du \quad ✓$$

es bleiben also die Grenzen unverändert da $\psi(a) = \tilde{a} \quad \psi(b) = \tilde{b}$

b) Zeige, dass zwei einfach, gleichorientierte und stückweise glatte Kurven mit Bild(y) = Bild$(\tilde{y})$ dasselbe Kurvenintegral besitzen

Satz 2.18) Zwei einfach glatte Kurven sind genau dann äquivalent wenn sie das gleiche Bild und Orientierung haben

Da y stückweise glatt $\exists$ Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ sodass $\forall k \in \{1 \ldots n\}$ einschränkung $y_k: [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{C}$, $t \to y(t)$ eine glatte Kurve ist

Beweis: · y stückweise glatt $\Rightarrow \exists\ a = t_0 < t_1 \ldots < t_n = b$ sodass $[t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{C}$ glatte Kurve

· $\tilde{y}$ stückweise glatt $\Rightarrow \exists\ c = t_0 < t_1 \ldots < t_n = b$ sodass $[s_{k-1}, s] \to \mathbb{C}$ glatte Kurve

äquivalent da gleiche Orientierung dank a)

$$\int_{\tilde{y}} f(z)\, d = \sum_{k=1}^{n} \int_{y_k} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{s_{k-1}}^{s_k} f(\tilde{y}(t))\, \tilde{y}'(t) = \sum_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(y(u))\, y'(u)\, du = \int_y f(z)\, dz$$

c) Es sei $y: [a,b] \to U$ eine glatte Kurve und $\overleftarrow{y}: [a,b] \to U$ die umgekehrte Kurve oder Rückkurve also $\overleftarrow{y}(t) = y(a+b-t)$ zeige dass für $f: U \to \mathbb{C}$ stetig gilt

$$\int_{\overleftarrow{y}} f(z)\, dz = -\int_y f(z)\, dz$$

Beweis: Berechne Ableitung $\overleftarrow{y}'(t) = \frac{d}{dt} y(a+b-t) = -y'(a+b-t)$

$$\text{nun gilt } \int_{\overleftarrow{y}} f(z)\, dz = \int_{[a,b]} f(\overleftarrow{y}(t))\, \overleftarrow{y}'(t) = \int_a^b f(y(a+b-t))(-y'(a+b-t))\, dt$$

$$= -\int_a^b f(y(a+b-t))\, y'(a+b-t)\, dt \quad \text{Sei } u = a+b-t \quad du = -dt$$

$$= -\int_b^a f(y(u))\, y'(u) - du = -\int_y f(z)\, dz$$

Aufgabe 4 per qualche Integrale in più

Sei $r > 0$ $a \in \mathbb{C}$. Berechne für $y_k: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $y_1(t) = a + re^{it}$, $y_2(t) = a + re^{2it}$, $y_{-1}(t) = a + re^{-it}$ folgern dass Kurven nicht äquivalent sind, was fällt auf das folgende Kurvenintegral $\int_{y_k} \frac{1}{z-a}\, dz$,

① $y_1(t) = a + re^{it}$

$y_1'(t) = ire^{it}$ (nach Aufgabe 1)

$$\int_{y_k} \frac{1}{z-a}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+re^{it})-a} \cdot y'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{re^{it}}} \cdot i\cancel{re^{it}}\, dt = i\int_0^{2\pi} dt = i[t]_0^{2\pi} = 2\pi i$$

② $y_2(t) = a + re^{2it}$

$y_2'(t) = 2ire^{2it}$

$$\int_{y_k} \frac{1}{z-a}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+re^{2it})-a}\, 2rie^{2it}\, dt$$

$$= \frac{1}{\cancel{re^{2it}}}\, 2\cancel{r}i\cancel{e^{2it}}\, dt = 2i\int_0^{2\pi} dt = 2i[t]_0^{2\pi} = 4i\pi$$

③ $y_{-1}(t) = a + re^{-it}$