

Versuch 354

## **Gedämpfte und erzwungene Schwingungen**

Lukas Nickel

lukas.nickel@tu-dortmund.de

Rohat Kavili

rohat.kavili@tu-dortmund.de

Durchführung: 17.11.2015

zweite Abgabe: 08.12.2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>1</b>
1.1	Einleitung . . . . .	1
1.2	Theoretische Grundlagen . . . . .	1
1.2.1	Fall 1: Starke Dämpfung und aperiodischer Grenzfall . . . . .	2
1.2.2	Fall 2: Schwache Dämpfung . . . . .	2
1.2.3	Angeregter Schwingkreis . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Durchführung</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>5</b>
3.1	Zu den Messwerten . . . . .	5
3.2	Dämpfungswiderstand . . . . .	6
3.3	Aperiodischer Grenzfall . . . . .	8
3.4	Resonanzüberhöhung . . . . .	10
3.5	Phasenverschiebung . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>16</b>
4.1	Einordnung des gemessenen Dämpfungswiderstandes . . . . .	16
4.2	Vergleich der Widerstände der aperiodischen Dämpfung aus Messung und Theorie . . . . .	16
4.3	Diskussion der Güte und Resonanzkurve . . . . .	16
4.4	Diskussion der Phasenverschiebung . . . . .	17
	<b>Literatur</b>	<b>18</b>

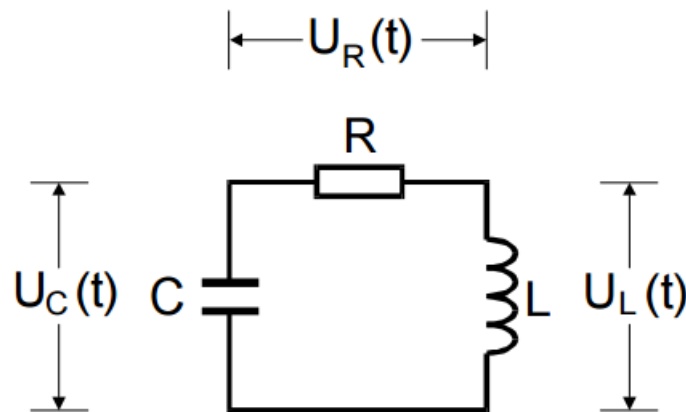
# 1 Theorie

## 1.1 Einleitung

Ziel dieses Versuches ist es, die Eigenschaften eines RLC-Schwingkreises zu bestimmen. Dafür werden Messungen mit Variation des Widerstandes oder der Frequenz durchgeführt.

## 1.2 Theoretische Grundlagen

Ein RLC-Kreis stellt einen gedämpften Schwingkreis dar. Die Schwingung besteht aus einer Verschiebung der elektromagnetischen Energie zwischen Spule  $L$  und Kondensator  $C$ . Dabei ändert der Strom periodisch sein Vorzeichen. Eine schematische Darstellung



**Abbildung 1:** Gedämpfter Schwingkreis [1].

ist in Abbildung 1 zu sehen. Die Differentialgleichung eines  $RLC$ -Kreises entspricht der eines gedämpften, harmonischen Oszillators:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0. \quad (1)$$

Entsprechen ergeben sich die Lösungen zu:

$$I(t) = I_1 e^{j\omega_1 t} + I_2 e^{j\omega_2 t} \quad (2)$$

mit

$$\omega_{1,2} = j \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (3)$$

Dabei ist  $j$  die imaginäre Einheit. Wie unschwer an Gleichung 3 zu erkennen ist müssen abhängig von den Parametern  $R$ ,  $L$  und  $C$  nun 3 Fälle unterschieden werden.

### 1.2.1 Fall 1: Starke Dämpfung und aperiodischer Grenzfall

In dem Fall  $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$  ist der Ausdruck in der Wurzel imaginär, in Gleichung 2 kommen also nur noch reelle Exponentialfunktionen vor. Diese beschreiben allerdings keine Schwingung, sondern die **aperiodische Dämpfung**. Nach einer gewissen Zeitspanne liegt dabei ein gewöhnliches Relaxationsverhalten vor, vorher kann allerdings noch ein Extremwert durchschritten werden.

Den Fall  $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$  bezeichnet man als **aperiodischen Grenzfall**. Der Wurzelterm in Gleichung 3 verschwindet und  $I(t)$  geht schnellstmöglichst gegen Null. Beide Fälle sind in Abb.2 dargestellt, die gestrichelte Linie zeigt den aperiodischen Grenzfall, die anderen mögliche Verläufe einer aperiodischen Dämpfung:

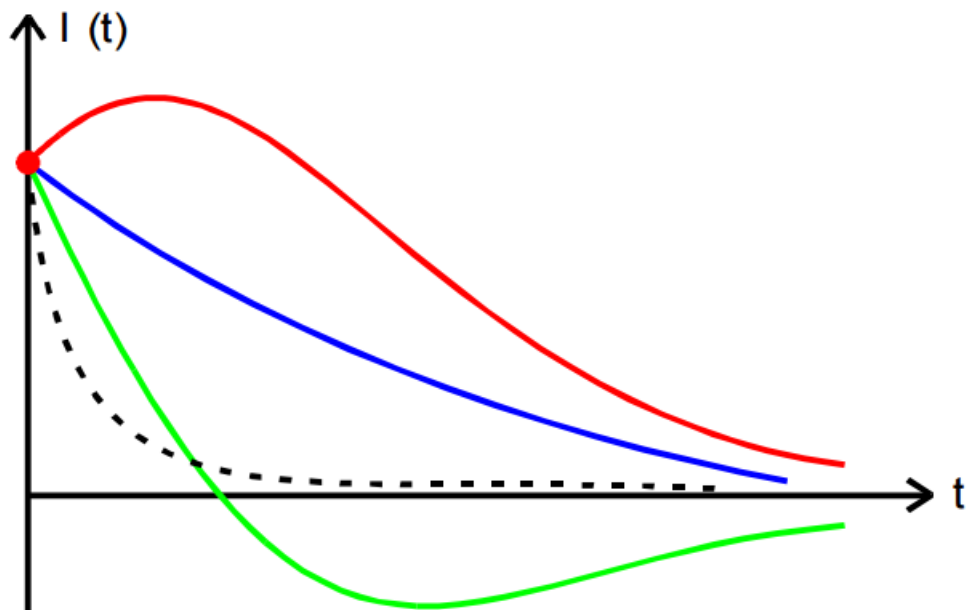


Abbildung 2: Stromverlauf in einem aperiodisch gedämpften System [1].

### 1.2.2 Fall 2: Schwache Dämpfung

Unter der Bedingung  $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$  ist der Term unter der Wurzel in Gleichung 3 positiv, die Wurzel also reell. Damit muss  $I_1 = I_2$  sein und für den Strom ergibt sich:

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t + \eta). \quad (4)$$

Dabei beschreibt die einhüllende  $e$ -Funktion die Dämpfung und der Kosinus-Term die Schwingungseigenschaft des Systems,  $\nu$  bezeichnet die Frequenz. Zwei wichtige Eigen-

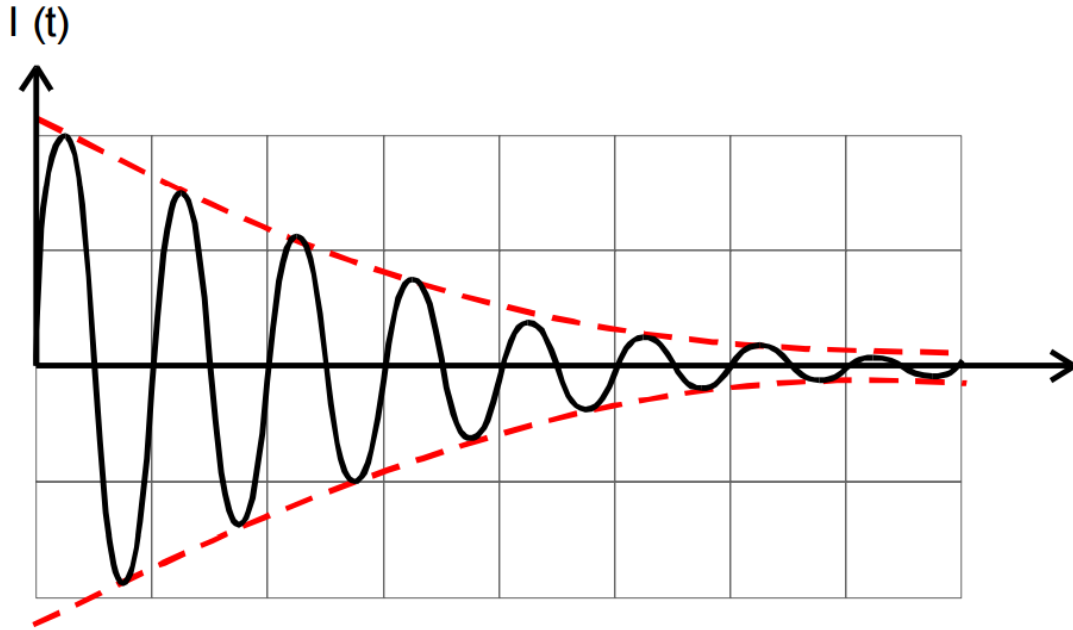
schaften des Schwingkreises bestehen in der Schwingungsdauer

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\sqrt{1/LC - R^2/4L^2}} \quad (5)$$

und der Abklingdauer

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R}. \quad (6)$$

Als Abklingdauer wird die Zeit bezeichnet, nach der die Amplitude auf den e-ten Teil ihres ursprünglichen Wertes abgefallen ist. Ein solches gedämpftes Schwingungsverhalten



**Abbildung 3:** Spannungsverlauf bei einer gedämpften Schwingung [1].

ist in 3 dargestellt. Die Lösung für den ungedämpften Schwingkreis erhält man über den selben Weg mit der Annahme, dass  $\frac{1}{LC} \gg \frac{R^2}{4L^2}$  sei.

### 1.2.3 Angeregter Schwingkreis

Für eine erzwungene Schwingung wird der Schwingkreis von einer äußeren sinusförmigen Wechselspannung kontinuierlich angetrieben. Die komplexe DGL wird also inhomogen und sieht wie folgt aus:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = U_0 \exp j\omega t \quad (7)$$

Wie zuvor entspricht j der imaginären Einheit, die rechte Seite der Gleichung stellt die anregende Spannung dar. Abhängig von der Frequenz dieser Spannungsquelle variieren

Spannungsamplitude und Phasenverschiebung zwischen Generator und Kondensator:

$$\phi(\omega) = \arctan \frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2} \quad (8)$$

$$U_c(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (9)$$

Dabei bezeichnet  $\phi$  die Phasenverschiebung und  $U_c$  die Spannung am Kondensator. Von besonderer Bedeutung ist die Resonanzfrequenz  $\omega_{\text{res}}$ , bei der  $U_c$  ein Maximum erreicht, das größer ist als  $U_0$ :

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (10)$$

Außerdem erkennt man an 9, dass  $U_c$  für  $\omega \rightarrow \infty$  gegen 0 und für  $\omega \rightarrow 0$  gegen  $U_0$  geht. Eine weitere charakteristische Größe eines angeregten Schwingkreises ist die Güte oder Resonanzüberhöhung, gegeben durch:

$$U_{\text{Cmax}} = \frac{1}{\omega_0 RC} \cdot U_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0. \quad (11)$$

Dabei entspricht

$$q = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

der Güte des Schwingkreises.

Außerdem lässt sich zwischen Güte und Schärfe der Resonanz folgender Zusammenhang herstellen:

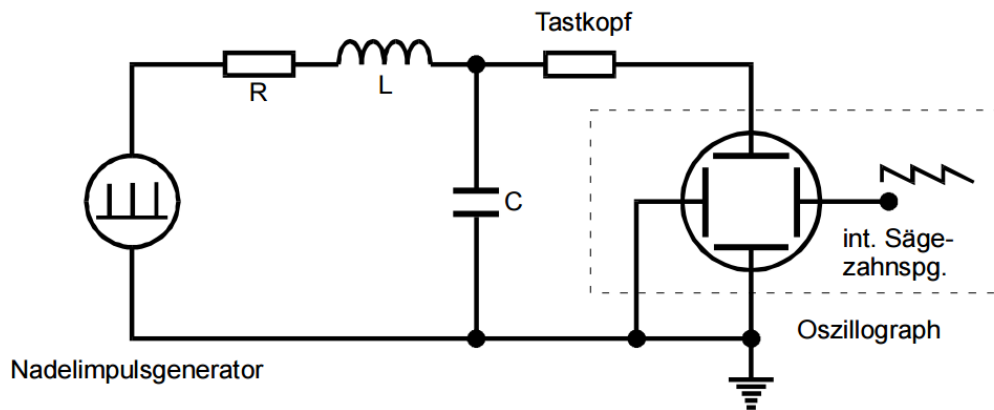
$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-}. \quad (12)$$

Dabei bezeichnen  $\omega_-$  und  $\omega_+$  die Frequenzen bei denen  $U_c$  dem  $1/\sqrt{2}$ -fachen des Maximums entspricht.

## 2 Durchführung

Für die einzelnen Teile des Versuches werden Spule und Kondensator unverändert gelassen, der Widerstand wird im Verlauf der Messungen variiert. Zunächst werden Eigenschaften des gedämpften Schwingkreises bestimmt, im speziellen der effektive Dämpfungswiderstand aus dem zeitlichen Amplitudenverlauf sowie der Dämpfungswiderstand, bei dem die aperiodische Dämpfung auftritt.

Im ersten Fall sei der Widerstand konstant und der Schwingkreis wird durch eine Rechteckspannung angeregt. Durch geeignete Wahl der Frequenz lässt sich ein gedämpfter Schwingkreis ohne Anregung simulieren. Der Spannungsverlauf wird an einem Oszilloskop aufgezeichnet und zur Auswertung abgespeichert. Die verwendete Schaltung ist in Abbildung 4 dargestellt. Anstelle des Nadelimpulsgenerators wird die erwähnte Rechteckspannung verwendet.



**Abbildung 4:** Schaltung zur Untersuchung der Zeitabhängigkeit der Amplitude [1].

Für den zweiten Versuchsteil wird der feste Widerstand  $R$  durch einen auf bis zu  $10\text{ k}\Omega$  regelbaren ersetzt. Dieser Widerstand wird zunächst auf seinen Maximalwert eingestellt und dann verringert, bis der Spannungsverlauf auf dem Oszilloskop dem des aperiodischen Grenzfalles entspricht (siehe Abb.2).

Für die weiteren Versuchsteile wird der regelbare Widerstand wieder durch einen festen Widerstand ersetzt und die anregende Spannung zu einer sinusförmigen Wechselspannung geändert. Die Amplitude bleibt über alle Messungen konstant, die Frequenz wird geändert um die Frequenzabhängigkeit von Amplitude und Phasenverschiebung nachzuweisen. Gemessen werden bei verschiedenen Frequenzen die Erreger- und Kondensatorspannung sowie die Phase zwischen beiden.

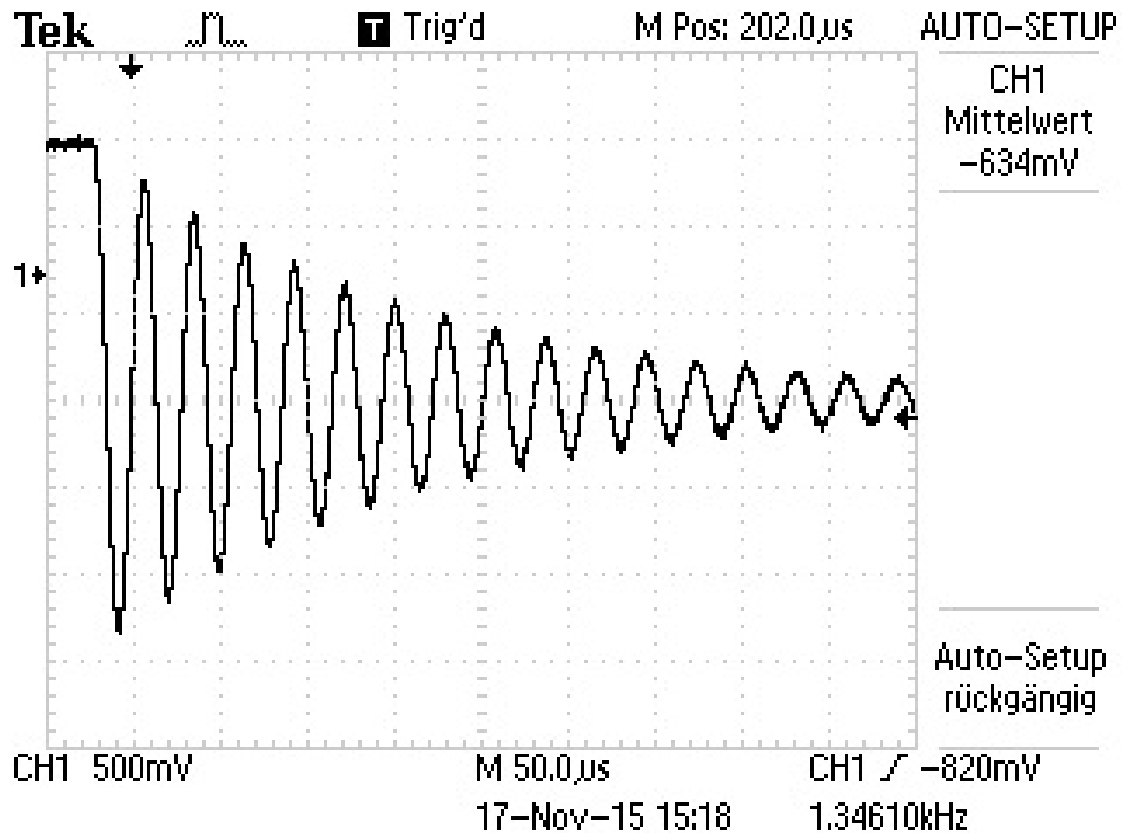
Dafür werden die Amplitude von Kondensator- und Erregerspannung für jede Frequenz einzeln mit dem Tastkopf gemessen, weil die Messung durch den Frequenzgang der Tastkopfes beeinflusst werden kann. Um die Phase zu messen werden beide Spannungen gegeneinander am Oszilloskop aufgetragen und die Zeitdifferenz zwischen zwei Extrema oder ähnlich ausgezeichneten Punkten bestimmt.

## 3 Auswertung

### 3.1 Zu den Messwerten

Im Zuge dieser Auswertung werden nur die relevanten Messwerte herangezogen, alle Werte auszudrucken würde den Rahmen dieses Protokolls sprengen. Die originalen Messwerte zu der Resonanzüberhöhung und der Phasenverschiebung sind hinter das Protokoll gehängt, alle Werte zu der Messung von Dämpfungswiderstand und aperiodischem Grenzfall (von dem Oszilloskop abgespeichert) sind auf Wunsch über den Link im Quellenverzeichnis zu finden (siehe [2]).

### 3.2 Dämpfungswiderstand



**Abbildung 5:** Zeitlicher Spannungsverlauf des gedämpften Schwingkreises

Abb. 5 zeigt den Verlauf der Spannung in dem gedämpften Schwingkreis. Gut zu erkennen sind die sinusförmige Schwingung und die einhüllende e-Funktion, die die Dämpfung beschreibt. Die Frequenz beträgt 1,35 kHz. Die Extremstellen der Spannungen sind in Tabelle 1 dargestellt, für die übrigen, für die Auswertung weniger relevanten Werte sei auf Quelle [2] verwiesen.

Der negative Zeitabschnitt bei den ersten beiden Messwerten sowie die Tatsache, dass die Messwerte der Spannung offensichtlich einem Offset unterliegen, spielt für die Berechnung des Dämpfungswiderstandes keine Rolle (siehe Diskussion). Als Spannungsamplitude wird im folgenden die Differenz zwischen Maximum und Minimum der Spannung bezeichnet, auf Tabelle 1 bezogen also jeweils die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Werte. Der Abfall der Spannung soll der Theorie zufolge (siehe Gleichung 4) mit  $e^{-2\pi\mu t}$  erfolgen. Die Spannungsamplitude fällt bei  $t=0.000\,181\,6\text{ s}$  zum ersten Mal unter  $\frac{1}{e}$ tel des ursprünglichen Wertes. Da der erste Messwert nicht bei  $t=0$  aufgenommen wurde, ergibt sich also

$$T_{\text{ex}} = t_{1/e} - t_0 = (0.182 \pm 0.005) \text{ ms} - (-0.021 \pm 0.005) \text{ ms} = (0.203 \pm 0.007) \text{ ms}. \quad (13)$$



**Tabelle 1:** Extrema der Spannungen (Offset beachten))

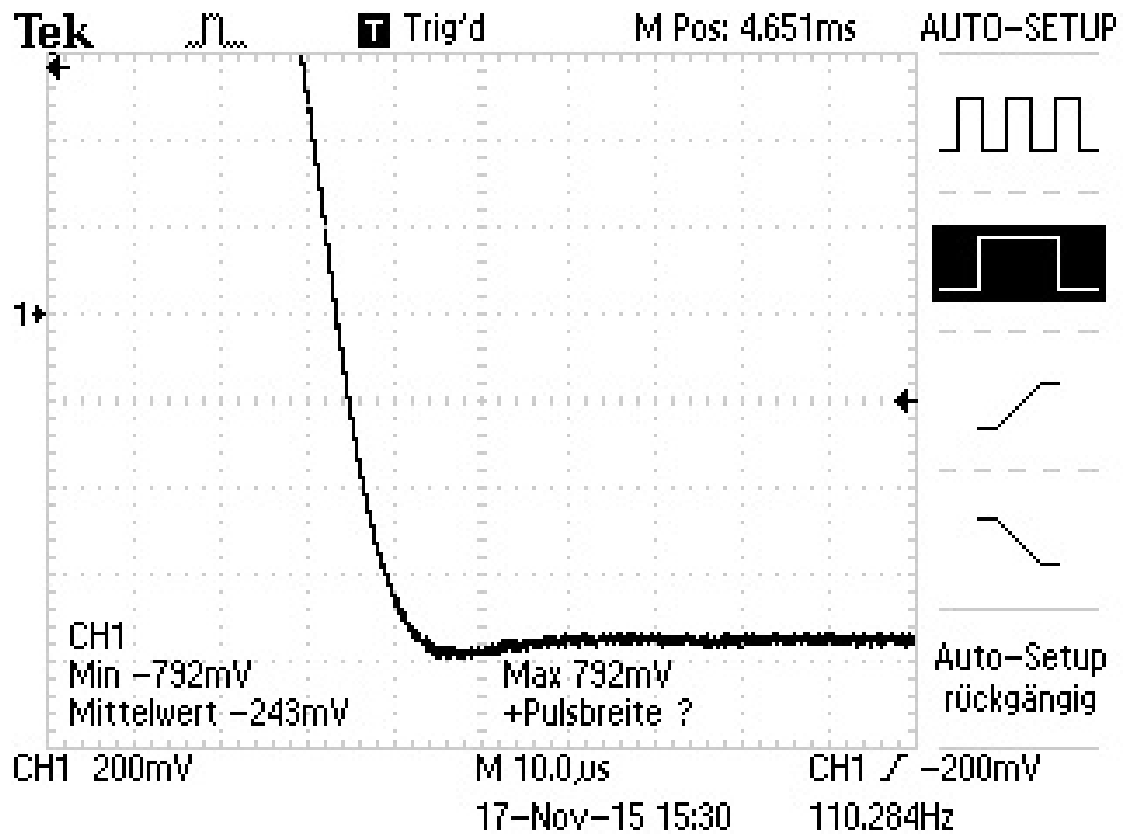
$t$ [ms]	$U$ [V]
-0.021 $\pm$ 0.0005	0.78 $\pm$ 0.005
-0.006 $\pm$ 0.0005	-2.06 $\pm$ 0.005
0.008 $\pm$ 0.0005	0.54 $\pm$ 0.005
0.023 $\pm$ 0.0005	-1.88 $\pm$ 0.005
0.037 $\pm$ 0.0005	0.36 $\pm$ 0.005
0.052 $\pm$ 0.0005	-1.70 $\pm$ 0.005
0.066 $\pm$ 0.0005	0.18 $\pm$ 0.005
0.081 $\pm$ 0.0005	-1.56 $\pm$ 0.005
0.095 $\pm$ 0.0005	0.08 $\pm$ 0.005
0.110 $\pm$ 0.0005	-1.44 $\pm$ 0.005
0.125 $\pm$ 0.0005	-0.04 $\pm$ 0.005
0.138 $\pm$ 0.0005	-1.34 $\pm$ 0.005
0.152 $\pm$ 0.0005	-0.14 $\pm$ 0.005
0.168 $\pm$ 0.0005	-1.24 $\pm$ 0.005
0.182 $\pm$ 0.0005	-0.22 $\pm$ 0.005
0.197 $\pm$ 0.0005	-1.18 $\pm$ 0.005
0.210 $\pm$ 0.0005	-0.30 $\pm$ 0.005
0.226 $\pm$ 0.0005	-1.12 $\pm$ 0.005
0.239 $\pm$ 0.0005	-0.36 $\pm$ 0.005
0.254 $\pm$ 0.0005	-1.06 $\pm$ 0.005
0.268 $\pm$ 0.0005	-0.42 $\pm$ 0.005
0.282 $\pm$ 0.0005	-1.02 $\pm$ 0.005

Der Exponent der e-Funktion muss zu diesem Zeitpunkt -1 betragen (auf  $4/e = e^{-1}$  abgefallen), es ergibt sich also:

$$-2\pi\mu T_{ex} = -1 \Rightarrow \mu = \frac{1}{2\pi T_{ex}} = (784.0 \pm 27.3) \text{ s}^{-1} \quad (14)$$

Damit ergibt sich für den effektiven Dämpfungswiderstand gemäß Gleichung 6 -umgestellt nach  $R$ - zu  $R_{\text{eff}} = (99.6 \pm 3.4) \Omega$  und damit  $107.0 \pm 0.7\%$  höher als der Nennwiderstand.

### 3.3 Aperiodischer Grenzfall



**Abbildung 6:** Spannungsverlauf bei aperiodischer Dämpfung mit  $R = (3120 \pm 20) \Omega$ .

Abb.6 zeigt den gemessenen Spannungsabfall für  $R = (3120 \pm 20) \Omega$ . Bei diesem Widerstand tritt die aperiodische Dämpfung auf, was daran zu erkennen ist dass kein Überschwingen stattfindet wie z.B. in Abb.7, bei der ein Widerstand von  $R = (2260 \pm 20) \Omega$  eingestellt wurde.

Der theoretische Wert berechnet sich gemäß:

$$\frac{1}{LC} = R_{\text{ap}}^2 / 4L^2 \Rightarrow R_{\text{ap}} = \sqrt{\frac{4L}{C}} = (4390.4 \pm 9.0) \Omega. \quad (15)$$

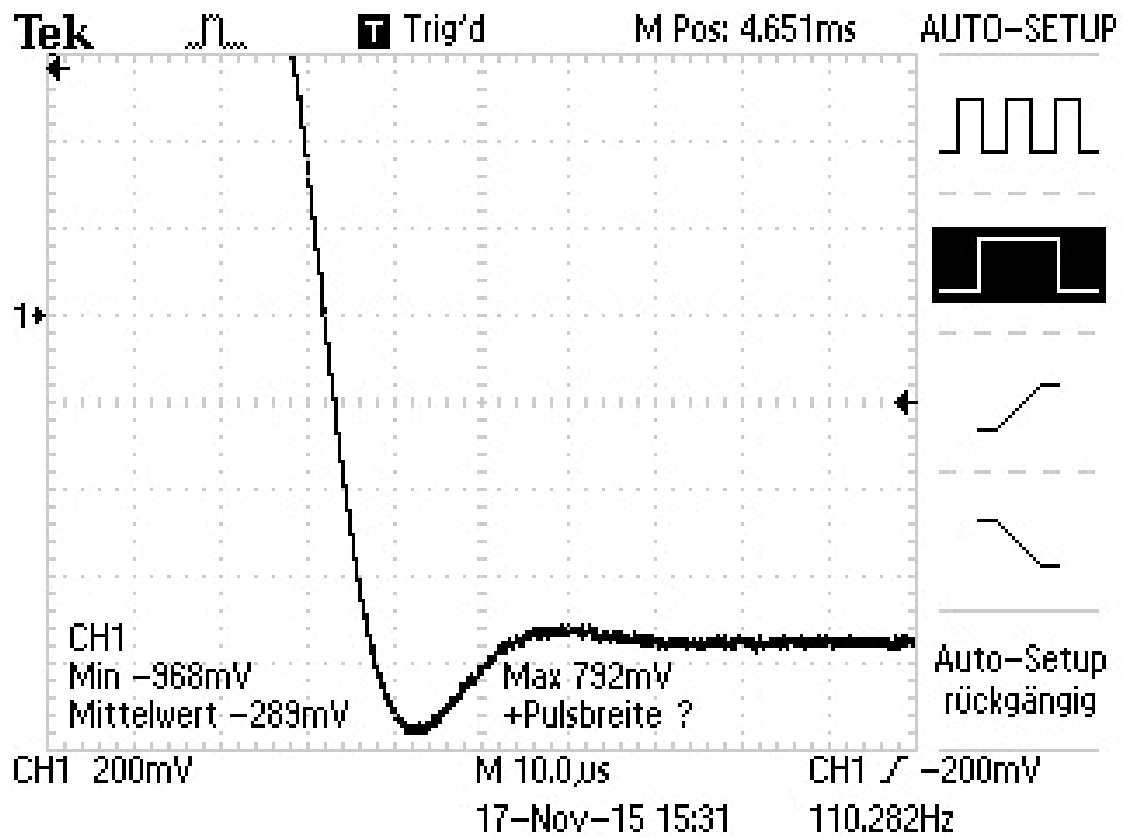


Abbildung 7: Spannungsverlauf bei aperiodischer Dämpfung mit  $R \neq R_{ap}$

Für den Fehler gilt dabei gemäß der Gaußschen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta R = \sqrt{\frac{\partial L}{\partial R(C, L)} \Delta L + \frac{\partial R(C, L)}{\partial C} \Delta C} \quad (16)$$

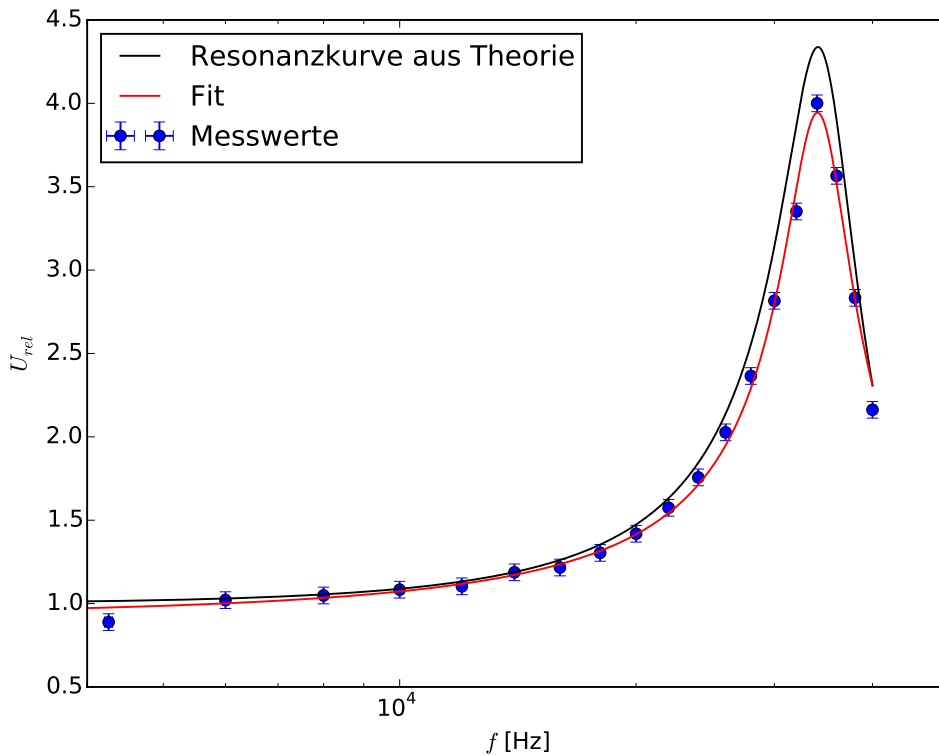
Der theoretische Wert weicht recht deutlich (30%) von dem gemessenen ab. Eine Erklärung dafür könnten die weiteren internen Widerstände sein, die in der Schaltung in Form von Kabel u.ä. enthalten sind. Außerdem ist die Toleranz des regelbaren Widerstandes nicht bekannt. Die Ungenauigkeit von R liegt also tatsächlich höher als die angegeben  $\pm 20 \Omega$ .

### 3.4 Resonanzüberhöhung

Um die Resonanzüberhöhung zu bestimmen, wird zunächst die Kondensatorspannung relativ zu der Erregerspannung berechnet. Da beide Werte mit dem selben Tastkopf gemessen wurden, kann die Frequenzabhängigkeit dieses vernachlässigt werden und man erhält  $U_{rel} = \frac{U_c}{U_0}$ . Die Messwerte sind in Tabelle 2 dargestellt.

**Tabelle 2:** Frequenzabhängige Spannung an Schwingkreis und Generator)

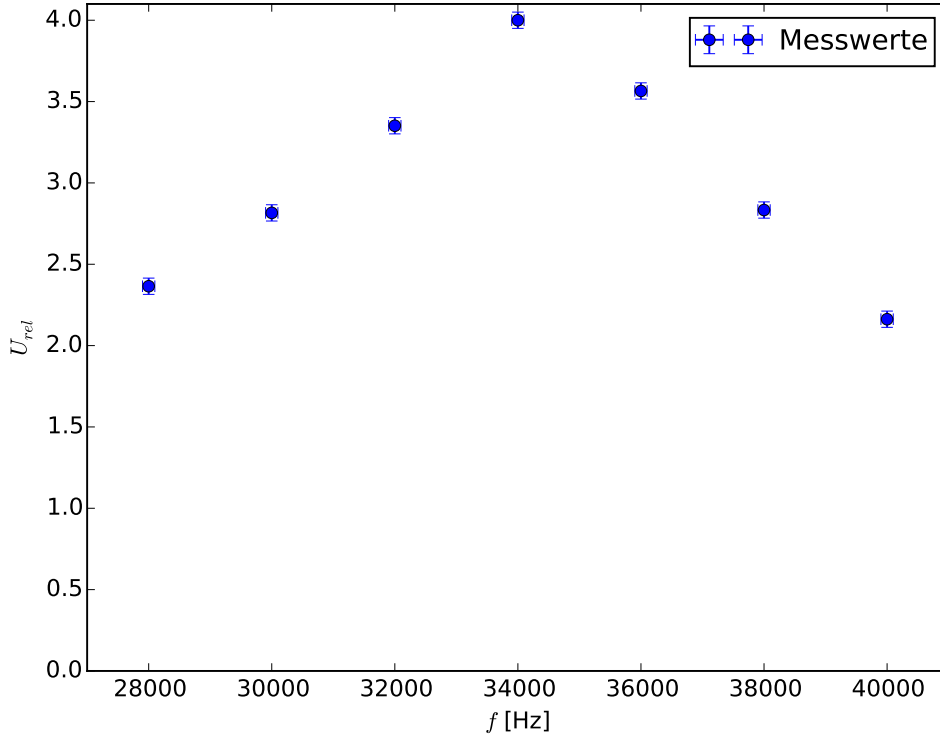
$U_c[\text{V}]$	$U_0[\text{V}]$	$f[\text{kHz}]$
1.28 $\pm$ 0.005	1.44 $\pm$ 0.005	4.26 $\pm$ 0.005
1.48 $\pm$ 0.005	1.45 $\pm$ 0.005	6.00 $\pm$ 0.005
1.51 $\pm$ 0.005	1.44 $\pm$ 0.005	8.00 $\pm$ 0.005
1.56 $\pm$ 0.005	1.44 $\pm$ 0.005	10.00 $\pm$ 0.005
1.60 $\pm$ 0.005	1.45 $\pm$ 0.005	12.00 $\pm$ 0.005
1.71 $\pm$ 0.005	1.44 $\pm$ 0.005	14.00 $\pm$ 0.005
1.80 $\pm$ 0.005	1.48 $\pm$ 0.005	16.00 $\pm$ 0.005
1.93 $\pm$ 0.005	1.48 $\pm$ 0.005	18.00 $\pm$ 0.005
2.10 $\pm$ 0.005	1.48 $\pm$ 0.005	20.00 $\pm$ 0.005
2.33 $\pm$ 0.005	1.48 $\pm$ 0.005	22.00 $\pm$ 0.005
2.60 $\pm$ 0.005	1.48 $\pm$ 0.005	24.00 $\pm$ 0.005
3.00 $\pm$ 0.005	1.48 $\pm$ 0.005	26.00 $\pm$ 0.005
3.50 $\pm$ 0.005	1.48 $\pm$ 0.005	28.00 $\pm$ 0.005
4.28 $\pm$ 0.005	1.52 $\pm$ 0.005	30.00 $\pm$ 0.005
4.96 $\pm$ 0.005	1.48 $\pm$ 0.005	32.00 $\pm$ 0.005
5.52 $\pm$ 0.005	1.38 $\pm$ 0.005	34.00 $\pm$ 0.005
4.92 $\pm$ 0.005	1.38 $\pm$ 0.005	36.00 $\pm$ 0.005
4.08 $\pm$ 0.005	1.44 $\pm$ 0.005	38.00 $\pm$ 0.005
3.20 $\pm$ 0.005	1.48 $\pm$ 0.005	40.00 $\pm$ 0.005



**Abbildung 8:** Halblogarithmische Auftragung von  $U_{rel}$  gegen  $f$

In Abb.8 lässt sich das qualitativ erwartete Ergebnis wiederfinden. Um die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  steigt die Kondensatorspannung sprunghaft an, für geringe Frequenzen nähert sie sich der Erregerspannung  $U_0$  ( $\rightarrow U_{rel} = 1$ ). Die in der Abbildung aufgetragene Resonanzkurve deckt sich in weiten Teilen mit den Messwerten. Um die Resonanzfrequenz verläuft die Resonanzkurve etwas höher.

Auffällig ist der Messwert bei  $f=4.26$  kHz, bei dem die Kondensatorspannung unter  $U_0$  fällt. Dies ist mit der Theorie nicht vereinbar und am ehesten auf einen Fehler bei der Messung von  $U_c$  zurückzuführen. Die maximale Spannung liegt bei  $U_{max} = (5.520 \pm 0.005)$  V.  $U_0$  beträgt dabei  $(1.380 \pm 0.005)$  V, damit beträgt die Resonanzüberhöhung  $4.000 \pm 0.015$ . Zur Bestimmung der Schärfe der Resonanz ist es zweckmäßig den Bereich um die Resonanzfrequenz linear darzustellen, so zu sehen in Abb.9.



**Abbildung 9:**  $U_{rel}$  um die Resonanzfrequenz linear aufgetragen

Die Resonanzfrequenz liegt im Rahmen der aufgenommenen Messwerte bei  $\omega = (34 \pm 1)$  kHz. In vorliegendem Fall entspricht  $U_{rel}(\omega_{\pm})$  dem 2.83 fachen von  $U_0$ . Diese Werte werden bei  $\omega_- = (30 \pm 1)$  kHz ( $U_{rel} = 2.816 \pm 0.010$ ) und  $\omega_+ = (38 \pm 1)$  kHz ( $U_{rel} = 2.833 \pm 0.010$ ) (Vgl. Tabelle 2) erreicht. Gemäß Gleichung 12 ergibt sich demnach für die Güte:

$$q = \frac{(34 \pm 1) \text{ kHz}}{(38 \pm 1) \text{ kHz} - (30 \pm 1) \text{ kHz}} = 4.2 \pm 0.8$$

Dieser Wert weicht nur um  $6.00 \pm 0.17\%$  von dem Wert ab, der aus der maximalen Spannung hergeleitet wurde. Die Abweichung lässt sich neben Messfehlern in erster Linie auf die geringe Anzahl an Messwerten im Bereich der Resonanzfrequenz zurückführen. Dadurch ist die Genauigkeit bei der Bestimmung von  $U_{Cmax}$  sowie  $\omega_{\pm}$  begrenzt. Die maximale Spannung kann durchaus einige Prozentpunkte höher als der höchste gemessene Wert von  $4 \cdot U_0$  liegen. Berechnet man die Güte anhand der Parameter des Schwingkreises (Vgl. Gleichung 11) erhält man mit:

$$L = (10.11 \pm 0.03) \text{ mH}$$

$$C = (2.098 \pm 0.006) \text{ nF} \text{ und}$$

$$R = (509.5 \pm 0.5) \Omega$$

für die Güte:

$$q = 4.309 \pm 0.010.$$

Dieser Wert liegt in guter Übereinstimmung mit den beiden aus den Messwerten erhaltenen Werten für  $q$ .

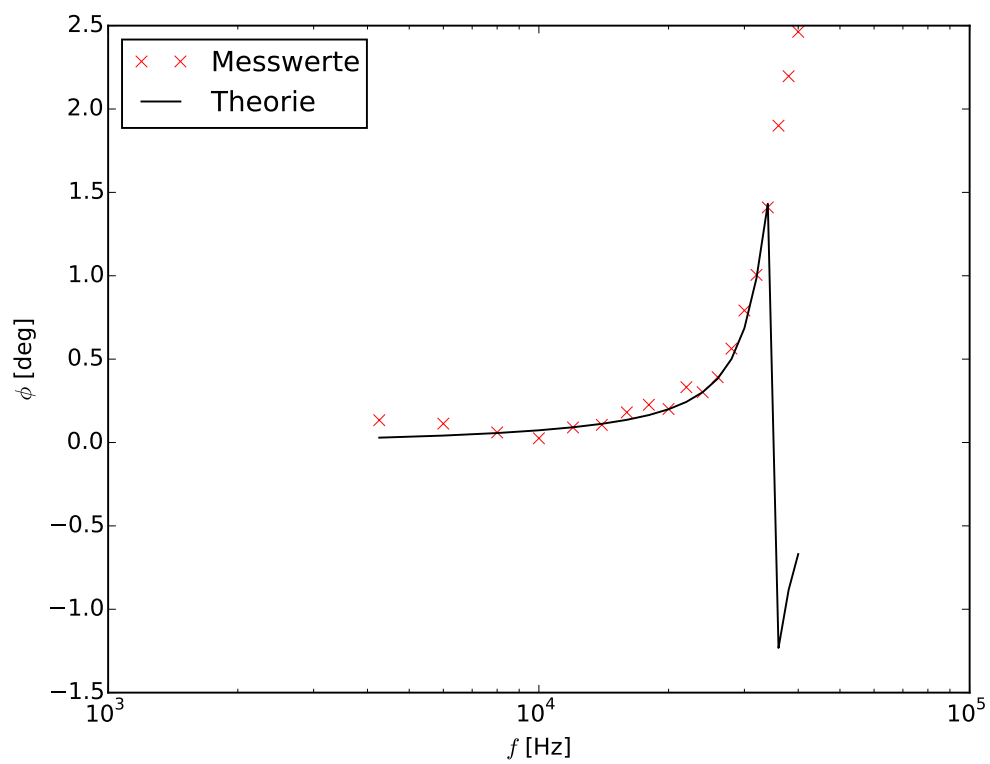
### 3.5 Phasenverschiebung

Die Messwerte für  $\phi$  sind in folgender Tabelle aufgelistet, Abb. 10 zeigt  $\phi$  in Abhängigkeit von der Frequenz  $f$  mit logarithmischer x-Achse, Abb.11 den Bereich um  $\phi = 90^\circ$  mit linearen Achsenskalierungen. Bei dem Vergleich der Messwerte mit der Theoriekurve in Abb.10 fällt auf, dass die Messwerte nicht wie zu erwarten durch  $\frac{\pi}{2}$  beschränkt sind (siehe Diskussion).

**Tabelle 3:** Phasenverschiebung in Abhängigkeit von der Frequenz)

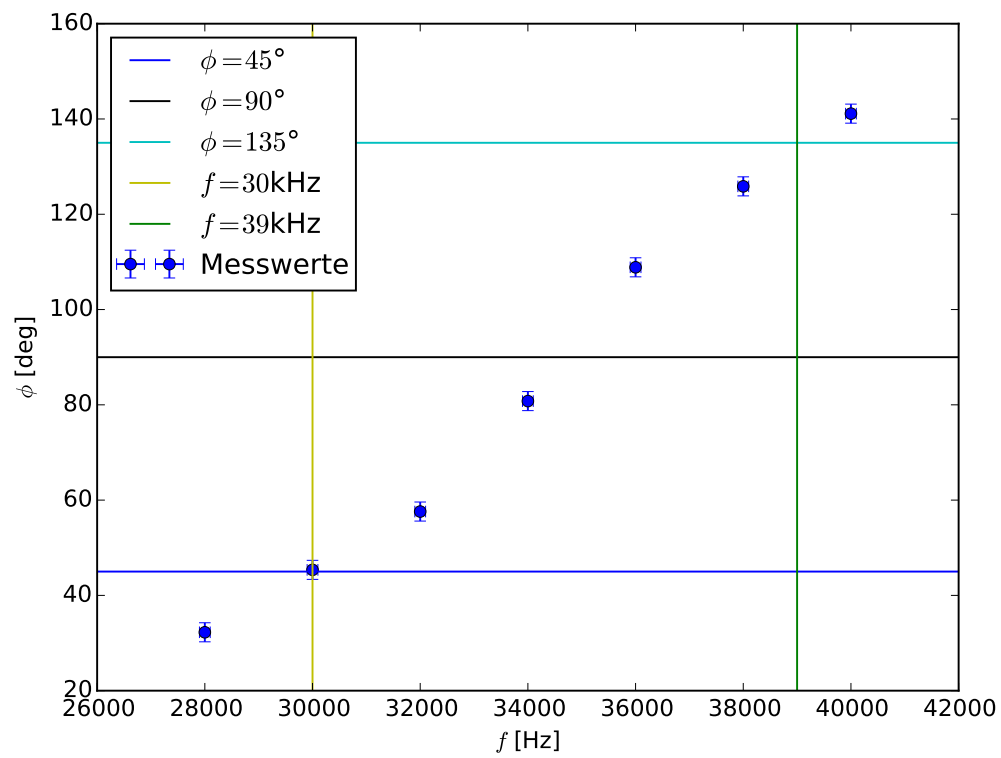
$\phi[\text{deg}]$	$f[\text{kHz}]$
$7.67 \pm 0.005$	$4.26 \pm 0.005$
$6.48 \pm 0.005$	$6.00 \pm 0.005$
$3.46 \pm 0.005$	$8.00 \pm 0.005$
$1.44 \pm 0.005$	$10.00 \pm 0.005$
$5.18 \pm 0.005$	$12.00 \pm 0.005$
$6.05 \pm 0.005$	$14.00 \pm 0.005$
$10.37 \pm 0.005$	$16.00 \pm 0.005$
$12.96 \pm 0.005$	$18.00 \pm 0.005$
$11.52 \pm 0.005$	$20.00 \pm 0.005$
$19.01 \pm 0.005$	$22.00 \pm 0.005$
$17.28 \pm 0.005$	$24.00 \pm 0.005$
$22.46 \pm 0.005$	$26.00 \pm 0.005$
$32.26 \pm 0.005$	$28.00 \pm 0.005$
$45.36 \pm 0.005$	$30.00 \pm 0.005$
$57.60 \pm 0.005$	$32.00 \pm 0.005$
$80.78 \pm 0.005$	$34.00 \pm 0.005$
$108.86 \pm 0.005$	$36.00 \pm 0.005$
$125.86 \pm 0.005$	$38.00 \pm 0.005$
$141.12 \pm 0.005$	$40.00 \pm 0.005$

In Abb. 11 sind außerdem die Geraden eingetragen um das Ablesen der relevanten Phasenverschiebungen zu erleichtern.  $\omega_1$  ( $\phi = 45^\circ$ ) liegt ziemlich fast exakt bei 30kHz ( $\phi=45,36^\circ$ ),  $\omega_2$  liegt bei 39kHz. Damit liegen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  bei ähnlichen Frequenzen wie zuvor (Vgl. Abschnitt 3.4) schon  $\omega_-$  und  $\omega_+$ . Dies ist das erwartete Ergebnis für den Fall schwacher Dämpfung, der hier realisiert ist.  $\omega_1$  und  $\omega_-$  sind im Rahmen der begrenzten Anzahl an Messwerten identisch,  $\omega_2$  und  $\omega_+$  weichen um 13% voneinander ab.



**Abbildung 10:** Phasenverschiebung  $\phi$  mit logarithmischer x-Achsenkalierung





**Abbildung 11:** Phasenverschiebung  $\phi$  im Bereich der Resonanzfrequenz mit linearer Achsenskalierung

## 4 Diskussion

### 4.1 Einordnung des gemessenen Dämpfungswiderstandes

Der Offset bei der Spannung lässt sich herausrechnen, indem jeweils die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Werten genommen wird. Auf die Weise erhält man auch eine Mittelung für die Werte. Der zeitliche Offset kann nach dem selben Prinzip eliminiert werden, indem der erste Messwert als  $t_0$  gewertet wird und  $\Delta t = t_x - t_0$  berechnet wird. Der Schwingkreis zeigt in guter Näherung das aus der Theorie bekannte Verhalten der exponentiellen Dämpfung. Der errechnete effektive Dämpfungswiderstand liegt deutlich höher als der Nennwiderstand. Ursachen dafür könnten in weiteren Widerständen in den Leitungen und den Bauteilen liegen.

### 4.2 Vergleich der Widerstände der aperiodischen Dämpfung aus Messung und Theorie

Der gemessene Wert für  $R_{ap}$  liegt ca. 30% unter dem Theoriewert. Eine Ursache dafür könnte in einer ungenauen Bestimmung des aperiodischen Grenzfalles liegen. In Abb. 6 ist bei genauem Hinsehen ein minimales Überschwingen zu erkennen. Im Vergleich mit Abb. ?? lässt sich folgern, dass der tatsächliche Wert für  $R_{ap}$  etwas höher als die gemessenen  $(3120 \pm 20) \Omega$  liegt. Dazu kommen weitere Widerstände in der realen Schaltung, sodass der regelbare Widerstand nicht den Gesamtwiderstand des Schwingkreises darstellt. Daher ist es sinnvoll anzunehmen, dass der Dämpfungswiderstand tatsächlich etwas höher und damit näher am Theoriewert liegt.

### 4.3 Diskussion der Güte und Resonanzkurve

Der Theoriewert, der aus den Parametern des Schwingkreises berechnet wurde, für die Güte liegt mit  $q = 4.309 \pm 0.010$  etwas höher als die gemessenen Werte. Dabei wurde für den Widerstand der Schaltung allerdings nur der Nennwiderstand von  $R = (509.5 \pm 0.5) \Omega$  verwendet. Für den tatsächlichen Wert muss außerdem der Innenwiderstand des Generators hinzugerechnet werden (Vgl. [1], S.296). Dadurch sinkt die Güte des Schwingkreises ab (Vgl. Gleichung 11). Der Innenwiderstand des Generators ist allerdings leider nicht bekannt. Es lässt sich daher nur festhalten, dass die Güte niedriger als  $4.309 \pm 0.010$  liegen muss.  $q = 4$  entspricht dabei einem Gesamtwiderstand von  $\approx 550 \Omega$ .

Bei dem Vergleich der Resonanzkurve mit den Messwerten fällt auf, dass  $U_{rel}$  um die Resonanzfrequenz nicht so stark steigt, wie aus der Theorie erwartet. Dies liegt daran, dass die Güte aus der Theorie etwas höher liegt als die aus den Messwerten errechnete. Eine Ursache dafür könnte darin liegen, dass die Güte umgekehrt proportional zu dem Widerstand in der Schaltung ist (siehe Gleichung 11). Da der Widerstand in der realen Schaltung durch weitere Verlustwiderstände neben dem Nennwiderstand höher als dieser liegt, ergibt sich demnach zwangsläufig eine geringere Güte und damit ein niedrigeres Maximum der Resonanzkurve.

#### 4.4 Diskussion der Phasenverschiebung

Die Theoriekurve deckt sich bis auf die letzten drei Messwerte in sehr guter Näherung mit den Messwerten. In der Theorie ist die Phasenverschiebung durch einen Arcustangens gegeben (siehe Gleichung 8) und kann damit betragsmäßig  $\frac{\pi}{2}$  nicht überschreiten. Da die letzten drei Werte allerdings allesamt größer als  $\frac{\pi}{2}$  sind, kann davon ausgegangen werden, dass ein Fehler bei der Messung gemacht wurde. Die Werte wurden mittels der Cursor-Funktion des Oszilloskops ermittelt, es ist also anzunehmen, dass dabei die Zeiger falsch positioniert wurden.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch Nr.354 - Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V354.pdf>.
- [2] *Messwerte zu Dämpfungswiderstand und aperiodischer Dämpfung*. URL: <https://app.box.com/s/v4zb62gwzamisj358152k999mhzwjq>.
- [3] *Schwingkreis*. 21.11.2015. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Schwingkreis>.
- [4] Marcel C. Strzys Thorben Lünneweber. „Versuch Nr.354 - Gedämpfte und erzwungene Schwingungen“. In: (2008). URL: <http://physik-praktikum.jimdo.com/>.