

Versuch 106

## **Gekoppelte Pendel**

Lukas Nickel

lukas.nickel@tu-dortmund.de

Rohat Kavili

rohat.kavili@tu-dortmund.de

Durchführung: 01.12.2015

Abgabe: 08.01.2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Theorie

## 1.1 Zielsetzung

Die Aufgabe des Versuchs besteht darin, die Schwingungsdauern verschiedener Schwingungsarten sowie die Schwebungsdauer von jeweils zwei, identischen, gekoppelten Pendeln zu bestimmen.

## 1.2 Theoretische Grundlagen

Die Bewegungs-/Schwingungsgleichung eines einzelnen Pendels lautet für kleine Winkel auslenkungen ( $\phi < 10^\circ$ ,  $\sin(\phi) \approx \phi$ ):

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0 \quad (1)$$

mit  $\omega^2 = \frac{g}{l}$ . Dabei entspricht  $l$  der Länge des Pendels,  $\omega$  der Schwingungsfrequenz und  $\phi$  dem Auslenkwinkel. Werden mehrere (in diesem Fall zwei) Pendel miteinander gekoppelt, z.B. über eine Feder, können die Schwingungen nicht mehr als voneinander unabhängig betrachtet werden. Stattdessen sind die DGLen gekoppelt, als Bewegungsformen ergeben sich zwei Eigenschwingungen:

### 1.2.1 Die Gleichsinnige Schwingung

Beide Pendel werden um den selben Winkel ausgelenkt, die Schwingung erfolgt also in Phase. Dadurch entstehen keine weiteren rücktreibenden Kräfte durch die Feder, die Bewegung ist identisch zu einer ungekoppelten Schwingung, die Schwingungsfrequenz ergibt sich daher analog zu einem einzelnen Pendel als:

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (2)$$

Für die Schwingungsdauer gilt:

$$T_+ = \frac{2\pi}{\omega_+} = 2\pi\sqrt{l/g} \quad (3)$$

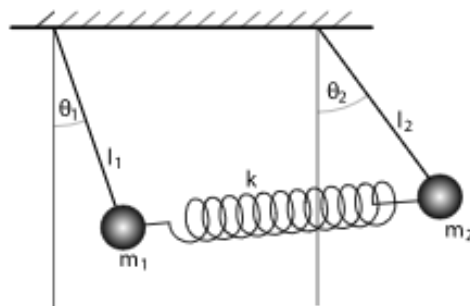


Abbildung 1: Gleichsinnige Schwingung [1]

### 1.2.2 Die Gegensinnige Schwingung

Die beiden Pendel werden in entgegengesetzte Richtungen ausgelenkt, so dass gilt :

$$\phi_1 = -\phi_2.$$

Dadurch wirkt die Feder auf beide Pendel eine gleich große, entgegengesetzte Kraft aus. Für die Schwingungsfrequenz und die Schwingungsdauer gilt dann:

$$\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{l}} \quad (4)$$

$$T_- = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{l}}} \quad (5)$$

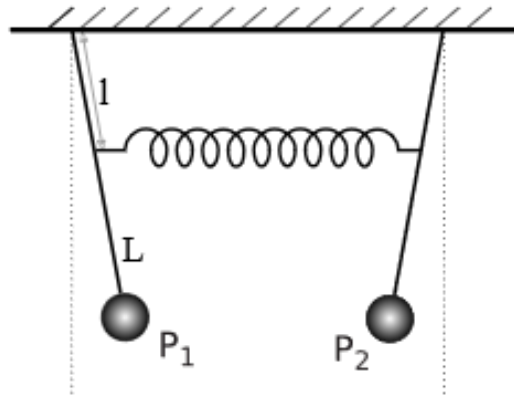


Abbildung 2: Gegensinnige Schwingung [1]

### 1.2.3 Schwebung

Jede andere gekoppelte Schwingung lässt sich als Überlagerung dieser beiden Eigenschwingungen interpretieren. Der Kopplungsgrad lässt sich über die Schwingungsdauern der gleich- und gegenphasigen Schwingungen berechnen:

$$K = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2}. \quad (6)$$

Relevant für den Versuch ist neben den Eigenschwingungen die Schwingung mit den Anfangsbedingungen  $\phi_1 = 0$  und  $\phi_2 \neq 0$ . Dabei lässt sich das Phänomen der Schwebung betrachten: Das zu  $t = 0$  ausgelenkte Pendel überträgt seine Energie und damit die Schwingungsbewegung kontinuierlich und vollständig auf das andere Pendel, bis ersteres stillsteht und letzteres mit der vollen Amplitude schwingt. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch. Die Periodendauer dieses Vorgangs wird als Schwebungsdauer  $T_s$  bezeichnet

und ist durch die Schwingungsdauern der gleich- und gegenphasigen Schwingungen gemäß 7 gegeben.

$$T_s = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} \quad (7)$$

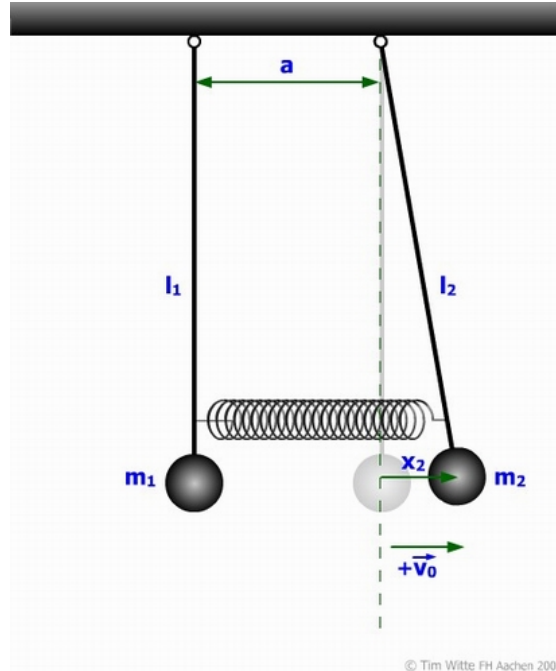


Abbildung 3: Gegensinnige Schwingung [2]

## 2 Aufbau und Durchführung

Als Pendel werden zwei identische Stabpendel mit einer Spitzenlagerung verwendet. Die jeweils zwei Spitzen der Pendel hängen in einer keilförmigen Nut um die Reibung zu minimieren. Mit einer Feder werden die Pendel gekoppelt. Die Pendelmassen ( $m = 1 \text{ kg}$ ) sind entlang des Pendels verschiebbar. Auf diese Weise lässt sich die Pendellänge einstellen.

Für die Messungen werden beide Pendel auf dieselbe Länge  $l_1$  eingestellt und zur Kontrolle die Gleichheit der Schwingungsdauern überprüft. Die Pendel sind dabei nicht gekoppelt. Bei der Messung von Schwingungsdauern werden fünf Perioden gemessen und der Mittelwert gebildet. Um den Einfluss von Messfehlern zu minimieren, werden alle Messungen außerdem jeweils zehnmal durchgeführt. Daraufhin werden die Pendel gekoppelt und die Schwingungsdauern des Doppelpendels bei gleich- und gegenphasiger Schwingung gemessen. Für die letzte Messreihe wird nur ein Pendel ausgelenkt, während das andere bei  $t = 0 \text{ s}$  in Nulllage hängt. Gemessen werden die Schwingungs- und Schwebungsdauer dieser Schwingungsform. Für die Schwebungsdauer wird nur eine halbe Periode betrachtet. Die gesamte Messreihe wird mit einer weiteren Pendellänge  $l_2$  wiederholt.

### 3 Auswertung

#### 3.1 $l = 99.5 \text{ cm}$

##### 3.1.1 Ungekoppelt

Die Pendellänge  $l_1$  beträgt  $(0.995 \pm 0.005) \text{ m}$ . Damit ergibt sich als Theoriewert für die Schwingungsdauer gemäß Gleichung 2  $T = (2.001 \pm 0.005) \text{ s}$ . Die Messwerte für die einzelnen Pendel sind in Tabelle 1 zu finden. Der Mittelwert für das erste Pendel beträgt  $(1.92840 \pm 0.00032) \text{ s}$ , für das zweite Pendel  $(1.95380 \pm 0.00032) \text{ s}$ . Die beiden Mittelwer-

**Tabelle 1:** Schwingungsdauern der ungekoppelten Pendel für  $l = 99.5 \text{ cm}$

$T_1$ [second]	$T_2$ [second]
1.926 +- 0.001	1.966 +- 0.001
1.932 +- 0.001	1.974 +- 0.001
1.976 +- 0.001	1.944 +- 0.001
1.892 +- 0.001	1.960 +- 0.001
1.922 +- 0.001	1.932 +- 0.001
1.916 +- 0.001	1.972 +- 0.001
1.952 +- 0.001	1.950 +- 0.001
1.934 +- 0.001	1.980 +- 0.001
1.900 +- 0.001	1.910 +- 0.001
1.934 +- 0.001	1.950 +- 0.001

te liegen nur um 1,3% auseinander, es kann also in guter Näherung von zwei identischen Pendeln ausgegangen werden. Die Schwingungsdauern der gekoppelten Schwingung in Phase und um  $\phi = 180^\circ$  verschoben, sind in den Tabellen 2 und ?? eingetragen. Wie aus der Theorie zu erwarten ist  $T_+$  mit im Mittel  $(1.91780 \pm 0.00032) \text{ s}$  nahezu gleich der Schwingungsdauer der ungekoppelten Pendel ( $\Delta T < 2\%$ ).

**Tabelle 2:** Schwingungsdauer der gekoppelten Pendel bei phasengleicher Bewegung

$T_{plus}$ [second]
$1.922 \pm 0.001$
$1.904 \pm 0.001$
$1.848 \pm 0.001$
$1.966 \pm 0.001$
$1.986 \pm 0.001$
$1.900 \pm 0.001$
$1.910 \pm 0.001$
$1.910 \pm 0.001$
$1.910 \pm 0.001$
$1.922 \pm 0.001$

**Tabelle 3:** Schwingungsdauer der gekoppelten Pendel bei gegenphasiger Bewegung

$T_{plus}$ [second]
$1.712 \pm 0.001$
$1.746 \pm 0.001$
$1.778 \pm 0.001$
$1.732 \pm 0.001$
$1.754 \pm 0.001$
$1.760 \pm 0.001$
$1.716 \pm 0.001$
$1.732 \pm 0.001$
$1.726 \pm 0.001$
$1.786 \pm 0.001$

Die Schwingungsdauer der gegenphasigen Schwingung liegt dabei mit  $T_- = (1.744\,00 \pm 0.000\,32)\,\text{s}$  wie aus der Theorie erwartet niedriger als die Schwingungsdauer der gleichphasigen Bewegung (Vgl. Gleichungen 2 und ??).

Die Schwingungsdauer der gekoppelten Schwingung mit  $\phi_1 = 0, \phi_2 \neq 0$  (im folgenden nur noch gekoppelte Schwingung) liegt bei  $T_{gek} = (1.893\,00 \pm 0.000\,32)\,\text{s}$  und damit zwischen  $T_+$  und  $T_-$ , was schlüssig erscheint, wenn man die gekoppelte Schwingung als Überlagerung von gleich- und gegenphasiger Schwingung betrachtet.

**Tabelle 4:** Schwingungsdauer der gekoppelten Schwingung

$T_{gek}$ [second]
$1.864 \pm 0.001$
$1.922 \pm 0.001$
$1.920 \pm 0.001$
$1.934 \pm 0.001$
$1.876 \pm 0.001$
$1.922 \pm 0.001$
$1.900 \pm 0.001$
$1.880 \pm 0.001$
$1.846 \pm 0.001$
$1.866 \pm 0.001$

Der Mittelwert für  $T_{gek}$  (Tabelle ??) beträgt  $(23.5320 \pm 0.0032)\,\text{s}$ . Aus  $T_+$  und  $T_-$  ergibt sich gemäß 6 der Kopplungsgrad zu  $K = 0.094\,60 \pm 0.000\,24$ . Mit 7 ergibt sich als Theorie wert für die Schwebung  $(19.27 \pm 0.05)\,\text{s}$ . Dieser Wert liegt um  $18.1200 \pm 0.0021\%$  unter der gemessenen Schwebungsdauer.

**Tabelle 5:** Schwebungsdauer der gekoppelten Schwingung

$T_{gek}$ [second]
$21.92 \pm 0.01$
$23.12 \pm 0.01$
$24.18 \pm 0.01$
$26.98 \pm 0.01$
$22.70 \pm 0.01$
$19.40 \pm 0.01$
$25.20 \pm 0.01$
$23.78 \pm 0.01$
$22.48 \pm 0.01$
$25.56 \pm 0.01$

## 4 Diskussion

## Literatur

- [1] *Gekoppelte Pendel*. 5.12.2015. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Gekoppelte\\_Pendel](https://de.wikipedia.org/wiki/Gekoppelte_Pendel).
- [2] Prof.Dr. Doris Samm. *Praktikum: Physik für Elektrotechnik*. URL: <http://www.physik.fh-aachen.de/startseite/physik-fuer-elektrotechnik/praktikum/gekoppeltes-pendel/5/>.