

Versuch 354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Lukas Nickel

lukas.nickel@tu-dortmund.de

Rohat Kavili

rohat.kavili@tu-dortmund.de

Durchführung: 17.11.2015

Abgabe: 24.11.2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Einleitung	3
1.2	Theoretische Grundlagen	3
1.2.1	Fall 1: $\frac{1}{LC} \leq \frac{R^2}{4L^2}$	4
1.2.2	Fall 2: $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$	4
1.2.3	Angeregter Schwingkreis	5
2	Durchführung	6
3	Auswertung und Diskussion der Messwerte	7
3.0.1	Dämpfungswiderstand	7
3.0.2	Aperiodischer Grenzfall)	9
3.0.3	Resonanzüberhöhung)	10
3.0.4	Phasenverschiebung	13
	Literatur	16

1 Theorie

1.1 Einleitung

Ziel dieses Versuches ist es, die Eigenschaften eines RLC-Schwingkreises zu bestimmen. Dafür werden Messungen mit Variation des Widerstandes oder der Frequenz durchgeführt.

1.2 Theoretische Grundlagen

Ein RLC-Kreis stellt einen gedämpften Schwingkreis dar. Die Schwingung besteht aus einer Verschiebung der elektromagnetischen Energie zwischen Spule (L) und Kondensator (C). Dabei ändert der Strom periodisch sein Vorzeichen. Eine schematische Darstellung ist in

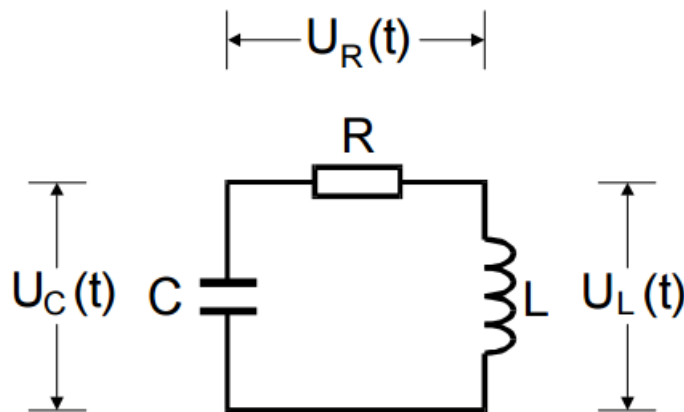


Abbildung 1: Gedämpfter Schwingkreis

1 zu sehen. Die Differentialgleichung eines RLC-Kreises entspricht der eines harmonischen Oszillators:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0. \quad (1)$$

Entsprechen ergeben sich die Lösungen zu:

$$I(t) = I_1 e^{j\omega_1 t} + I_2 e^{j\omega_2 t} \quad (2)$$

mit

$$\omega_{1,2} = j \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (3)$$

Dabei ist j die imaginäre Einheit. Wie unschwer an Gleichung 3 zu erkennen ist müssen abhängig von den Parametern R , L und C nun 3 Fälle unterschieden werden.

1.2.1 Fall 1: $\frac{1}{LC} \leq \frac{R^2}{4L^2}$

In dem Fall $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$ ist der Ausdruck in der Wurzel imaginär, in Gleichung 2 kommen also nur noch reelle Exponentialfunktionen vor. Diese beschreiben allerdings keine Schwingung, sondern die **aperiodische Dämpfung**. Nach einer gewissen Zeitspanne liegt dabei ein gewöhnliches Relaxationsverhalten vor, vorher kann allerdings noch ein Extremwert durchschritten werden. Den Fall $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$ bezeichnet man als **aperiodischen Grenzfall**. Der Wurzelterm in Gleichung 3 verschwindet und $I(t)$ geht schnellstmöglichst gegen null. Beide Fälle sind in Abb.2 dargestellt, die gestrichelte Linie zeigt den aperiodischen Grenzfall, die anderen mögliche Verläufe einer aperiodischen Dämpfung:

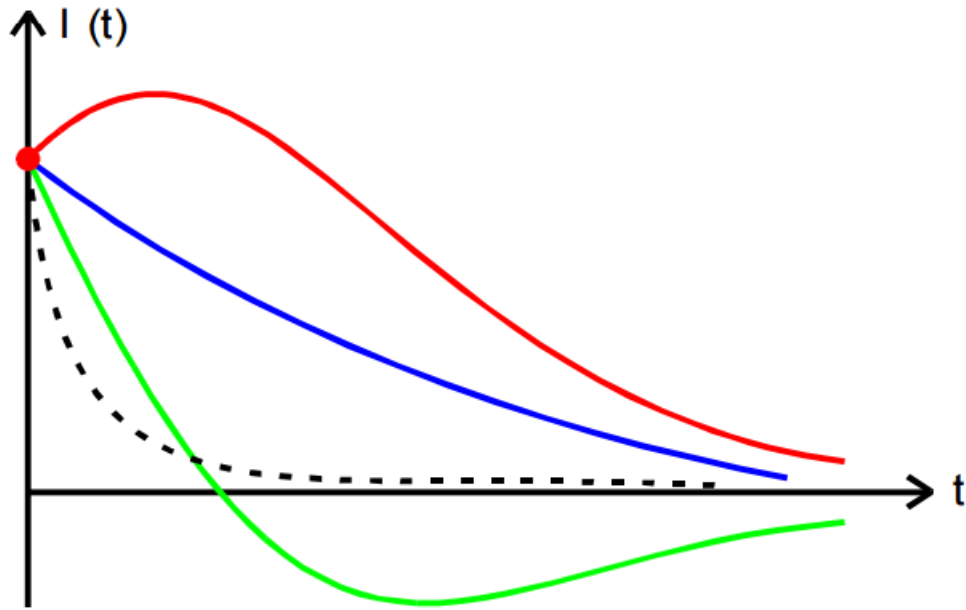


Abbildung 2: Stromverlauf in einem aperiodisch gedämpften System

1.2.2 Fall 2: $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$

Unter dieser Bedingung ist der Term unter der Wurzel in Gleichung 3 positiv, die Wurzel also reell. Damit muss $I_1 = I_2$ sein und für den Strom ergibt sich:

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t + \eta). \quad (4)$$

Dabei beschreibt die einhüllende e -Funktion die Dämpfung und der Kosinus-Term die Schwingungseigenschaft des Systems. ν entspricht der Frequenz. 2 wichtige Eigenschaften

des Schwingkreises bestehen in der Schwingungsdauer

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\sqrt{1/LC - R^2/4L^2}} \quad (5)$$

und der Abklingdauer

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R}. \quad (6)$$

Als Abklingdauer wird die Zeit bezeichnet, nach der die Amplitude auf den e-ten Teil ihres ursprünglichen Wertes abgefallen ist.

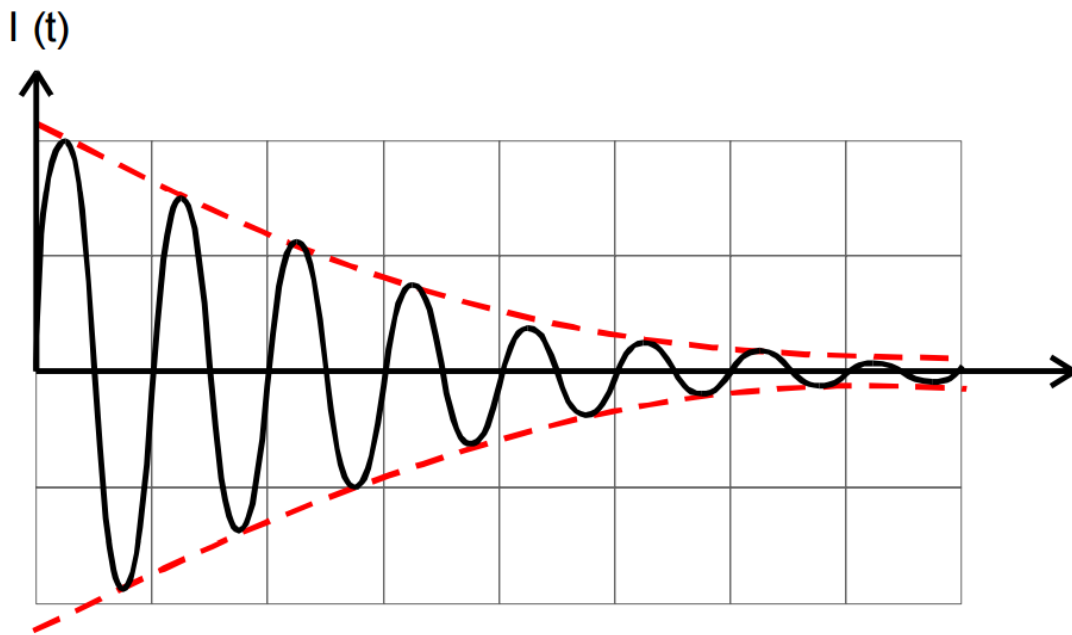


Abbildung 3: Spannungsverlauf bei einer gedämpften Schwingung

Ein solches gedämpftes Schwingungsverhalten ist in 3 dargestellt. Die Lösung für den ungedämpften Schwingkreis erhält man über den selben Weg mit der Annahme, dass $\frac{1}{LC} \gg \frac{R^2}{4L^2}$ sei.

1.2.3 Angeregter Schwingkreis

Für eine erzwungene Schwingung wird der Schwingkreis von einer äußeren sinusförmigen Wechselspannung kontinuierlich angetrieben. Die komplexe DGL wird also inhomogen und sieht wie folgt aus:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = U_0 \exp j\omega t \quad (7)$$

Wie zuvor entspricht j der imaginären Einheit, die rechte Seite der Gleichung stellt die anregende Spannung dar. Abhängig von der Frequenz dieser Spannungsquelle variieren Spannungsamplitude und Phasenverschiebung zwischen Generator und Kondensator:

$$\phi(\omega) = \arctan \frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2} \quad (8)$$

$$U_c(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (9)$$

Dabei bezeichnet ϕ die Phasenverschiebung und U_c die Spannung am Kondensator. Von besonderer Bedeutung ist die Resonanzfrequenz ω_{res} , bei der U_c ein Maximum erreicht, das größer ist als U_0 :

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (10)$$

Außerdem erkennt man an 9, dass U_c für $\omega \rightarrow \infty$ gegen 0 und für $\omega \rightarrow 0$ gegen U_0 geht. Eine weitere charakteristische Größe eines angeregten Schwingkreises ist die Güte oder Resonanzüberhöhung, gegeben durch:

$$U_{Cmax} = \frac{1}{\omega_0 RC} \cdot U_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0. \quad (11)$$

Die Größe $\frac{1}{\omega_0 RC}$ entspricht dabei der Güte q des Schwingkreises. Außerdem lässt sich zwischen Güte und Schärfe der Resonanz folgender Zusammenhang herstellen:

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-}. \quad (12)$$

Dabei bezeichnen ω_- und ω_+ die Frequenzen bei denen U_c dem $1/\sqrt{2}$ -fachen des Maximums entspricht.

2 Durchführung

Für die einzelnen Teile des Versuches wird durchgehend derselbe Schwingkreis verwendet. Zunächst werden Eigenschaften des gedämpften Schwingkreises bestimmt, namentlich der effektive Dämpfungswiderstand aus dem zeitlichen Amplitudenverlauf sowie der Dämpfungswiderstand, bei dem die aperiodische Dämpfung auftritt.

Im ersten Fall sei der Widerstand konstant und der Schwingkreis wird durch eine Rechteckspannung angeregt. Durch geeignete Wahl der Frequenz lässt sich ein gedämpfter Schwingkreis ohne Anregung simulieren. Der Spannungsverlauf wird an einem Oszilloskop aufgezeichnet und zur Auswertung abgespeichert. Die verwendete Schaltung ist in 4 dargestellt. Anstelle des Nadelimpulsgenerators wird die erwähnte Rechteckspannung verwendet.

Für den zweiten Versuchsteil wird der feste Widerstand R durch einen auf bis zu 10 k Ω regelbaren ersetzt. Dieser Widerstand wird zunächst auf seinen Maximalwert eingestellt

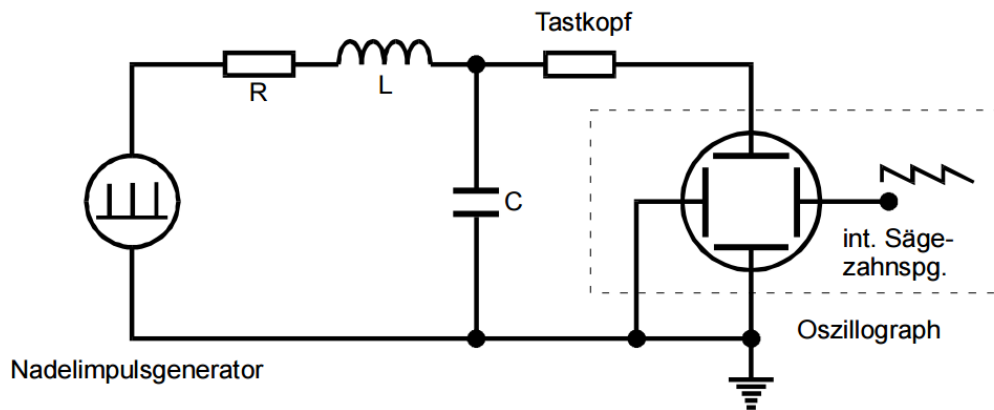


Abbildung 4: Schaltung zur Untersuchung der Zeitabhängigkeit der Amplitude

und dann allmählich verringert, bis der Spannungsverlauf auf dem Oszilloskop dem des aperiodischen Grenzfalles entspricht (siehe Abb.2).

Für die weiteren Versuchsteile wird der regelbare Widerstand wieder durch einen festen Widerstand ersetzt und die anregende Spannung zu einer sinusförmigen Wechselspannung geändert. Die Amplitude bleibt über alle Messungen konstant, die Frequenz wird geändert um die Frequenzabhängigkeit von Amplitude und Phasenverschiebung nachzuweisen. Gemessen werden bei verschiedenen Frequenzen die Erreger- und Kondensatorspannung sowie die Phase zwischen beiden.

Dafür werden die Amplitude von Kondensator- und Erregerspannung für jede Frequenz einzeln mit dem Tastkopf gemessen, weil die Messung durch den Frequenzgang der Tastkopfes beeinflusst werden kann. Um die Phase zu messen werden beide Spannungen gegeneinander am Oszilloskop aufgetragen und die Zeitdifferenz zwischen 2 Extrema oder ähnlich ausgezeichneten Punkten bestimmt.

3 Auswertung und Diskussion der Messwerte

3.0.1 Information

Im Zuge dieser Auswertung werden nur die relevanten Messwerte herangezogen, alle Werte auszudrucken würde den Rahmen dieses Protokolls sprengen. Die originalen Messwerte zu den Aufgaben 5c) und 5d) sind hinter das Protokoll gehängt, die gesamte Messreihe zu 5a) und 5b) (von dem Oszilloskop abgespeichert) sind auf Wunsch über den Link im Quellenverzeichnis zu finden (siehe [2]).

3.0.2 Dämpfungswiderstand

Abb. 5 zeigt den Verlauf der Spannung in dem gedämpften Schwingkreis. Qualitaiv gut zu erkennen sind die sinusförmige Schwingung und die einhüllende e-Funktion, die die Dämpfung beschreibt. Die Frequenz beträgt 1,35 kHz. Die Maxima der Spannungen sind in folgender Tabelle dargestellt:

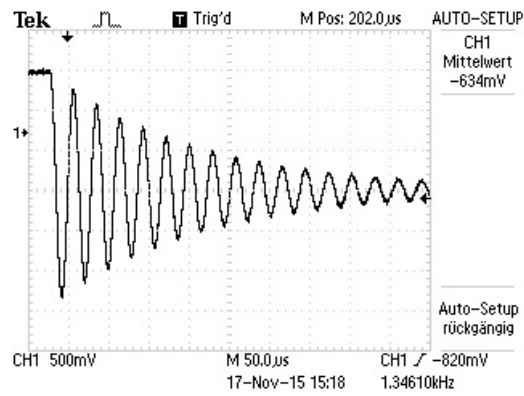


Abbildung 5: zeitlicher Spannungsverlauf

Tabelle 1: Messwerte 5a)

$t[s]$	$U[V]$
-0.0000206	0.78
-0.0000058	-2.06
0.0000078	0.54
0.00002260	-1.88
0.00003700	0.36
0.00005160	-1.70
0.00006600	0.18
0.00008100	-1.56
0.00009500	0.08
0.00010980	-1.44
0.00012500	-0.04
0.00013800	-1.34
0.00015240	-0.14
0.00016760	-1.24
0.00018160	-0.22
0.00019660	-1.18
0.00021020	-0.30
0.00022640	-1.12
0.00023860	-0.36
0.00025420	-1.06
0.00026800	-0.42
0.00028240	-1.02

Der negative Zeitabschnitt bei den ersten beiden Messwerten sowie die Tatsache, dass die Messwerte der Spannung in positiver und negativer Hinsicht nicht übereinstimmen, spielen für die Berechnung des Dämpfungswiderstandes keine größere Rolle (siehe Diskussion). Als Spannungsamplitude wird im folgenden die Differenz zwischen Maximum und Minimum der Spannung bezeichnet, auf 1 bezogen also jeweils die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Werte. Der Abfall der Spannung soll der Theorie zufolge (siehe Gleichung 4) mit $e^{-2\pi\mu t}$ erfolgen. Die Spannungsamplitude fällt unter $\frac{1}{e}$ tel des ursprünglichen Wertes bei $t=0.0001816$ s. Da der erste Messwert nicht bei $t=0$ aufgenommen wurde, ergibt sich also $T_{ex} = 0.2022$ ms. Der Exponent der e-Funktion muss zu diesem Zeitpunkt -1 betragen (auf $4/e = e^{-1}$ abgefallen), es ergibt sich also:

$$-2\pi\mu T_{ex} = -1 \Rightarrow \mu = \frac{1}{2\pi T_{ex}} = 787,111/\text{s}. \quad (13)$$

3.0.3 Aperiodischer Grenzfall)

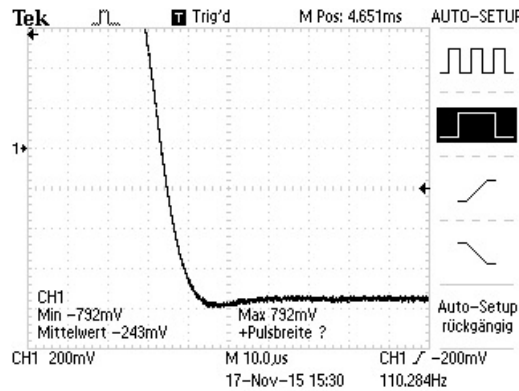


Abbildung 6: aperiodischer Grenzfall

Abb. 6 zeigt den gemessenen Spannungsabfall für $R = 3120 \Omega$. Bei diesem Widerstand tritt die aperiodische Dämpfung auf, was daran zu erkennen ist dass kein Überschwingen stattfindet wie z.B. in Abb.7 ($R=2260\Omega$).

Der theoretische Wert berechnet sich gemäß:

$$\frac{1}{LC} = R_{ap}^2/4L^2 \Rightarrow R_{ap} = \sqrt{\frac{4L}{C}} = 4390.4 \pm 9.0\Omega. \quad (14)$$

Der theoretische Wert weicht recht deutlich (40%) von dem gemessenen ab. Eine Erklärung dafür könnten die weiteren internen Widerstände sein, die in der Schaltung in Form von Kabel u.ä. enthalten sind. Außerdem ist der Fehler des regelbaren Widerstandes nicht bekannt. Zusätzlich zu der Ableseungenauigkeit können durchaus noch einige Prozentpunkte durch diesen Faktor dazukommen. Ohne Genaueres über den verwendeten Widerstand zu wissen, erscheint die Abweichung vom Theoriewert allerdings recht hoch und lässt einen Fehler bei der Messung vermuten.

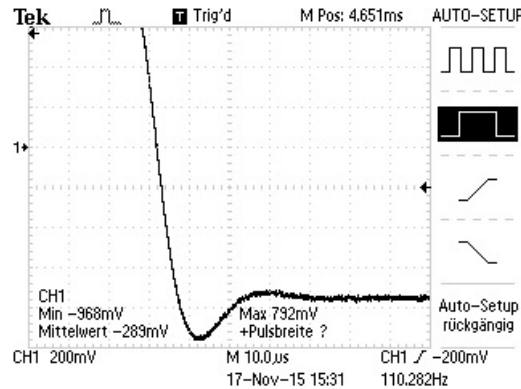


Abbildung 7: aperiodische Dämpfung mit $R \neq R_{ap}$

3.0.4 Resonanzüberhöhung)

Um die Resonanzüberhöhung zu bestimmen, wird zunächst die Kondensatorspannung relativ zu der Erregerspannung berechnet. Da beide Werte mit dem selben Tastkopf gemessen wurden, kann die Frequenzabhängigkeit dieses vernachlässigt werden und man erhält $U_{rel} = \frac{U_c}{U_0}$. Die Messwerte sind in folgender Tabelle dargestellt: In Abb.8 lässt sich das qualitativ erwartete Ergebnis wiederfinden: Um die Resonanzfrequenz ω_0 steigt die Kondensatorspannung sprunghaft an, für geringe Frequenzen nähert sie sich der Erregerspannung U_0 . Auffällig ist der Wert bei $f = 4,26\text{kHz}$, bei dem die Kondensatorspannung unter U_0 fällt. Dies ist mit der Theorie nicht vereinbar und am ehesten auf einen Fehler bei der Messung von U_c zurückzuführen. Die maximale Spannung liegt bei $4 \cdot U_0$, womit die Resonanzüberhöhung bei exakt 4 liegt.

Zur Bestimmung der Schärfe der Resonanz ist es zweckmäßig den Bereich um die Resonanzfrequenz linear darzustellen, so zu sehen in Abb.9 Die Resonanzfrequenz liegt im Rahmen der aufgenommenen Messwerte bei $\omega = 34 \text{ kHz}$. In vorliegendem Fall entspricht $U_{rel}(\omega_{\pm})$ dem 2.83 fachen von U_0 . Diese Werte werden ziemlich genau bei $\omega_- = 30 \text{ kHz}$ ($U_{rel} = 2.82$) und $\omega_+ = 38\text{kHz}$ ($U_{rel} = 2.83$) erreicht. Gemäß Gleichung 12 ergibt sich demnach für die Güte: $q = \frac{34}{38-30} = \frac{34}{8} = 4.25$ (Einheiten für ω gekürzt). Dieser Wert weicht nur um 6,25% von dem Wert ab, der aus der maximalen Spannung hergeleitet wurde. Die Abweichung lässt sich neben Messfehlern in erster Linie auf die geringe Anzahl an Messwerten im Bereich der Resonanzfrequenz zurückführen. Dadurch ist die Genauigkeit bei der Bestimmung von U_{Cmax} sowie ω_{\pm} begrenzt. Die maximale Spannung kann durchaus einige Prozentpunkte höher als der höchste gemessene Wert von $4 \cdot U_0$ liegen. Berechnet man die Güte anhand der Parameter des Schwingkreises (Vgl. 11) erhält man mit:

$$L = 10,11 \pm 0,03 \text{ mH}$$

$$C = 2,098 \pm 0,006 \text{ nF und}$$

$$R = 509,5 \pm 0,5 \Omega$$

für die Güte: $q = 4.309 \pm 0.010$. Dieser Wert liegt in guter Übereinstimmung mit den beiden aus den Messwerten erhaltenen Werten für q .

Tabelle 2: Messwerte 5c)

$U_c[\text{V}]$	$U_0[\text{V}]$	$f[\text{kHz}]$
1.28	1.44	4.26
1.48	1.45	6.00
1.51	1.44	8.00
1.56	1.44	10.00
1.60	1.45	12.00
1.71	1.44	14.00
1.80	1.48	16.00
1.93	1.48	18.00
2.10	1.48	20.00
2.33	1.48	22.00
2.60	1.48	24.00
3.00	1.48	26.00
3.50	1.48	28.00
4.28	1.52	30.00
4.96	1.48	32.00
5.52	1.38	34.00
4.92	1.38	36.00
4.08	1.44	38.00
3.20	1.48	40.00

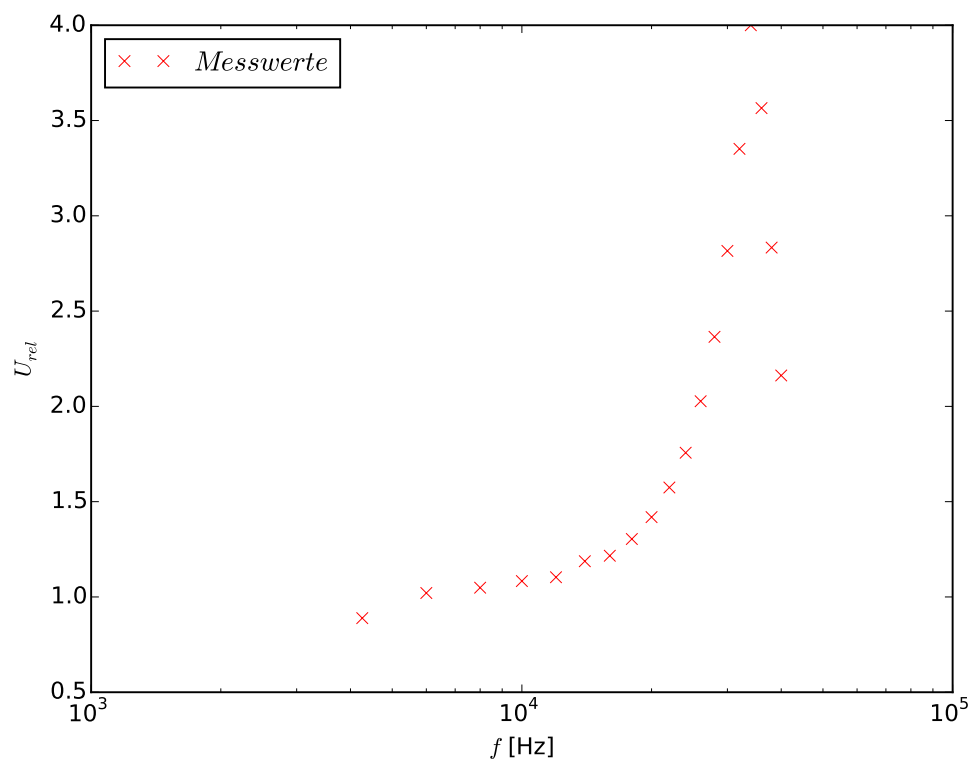


Abbildung 8: Halblogarithmischer Plot

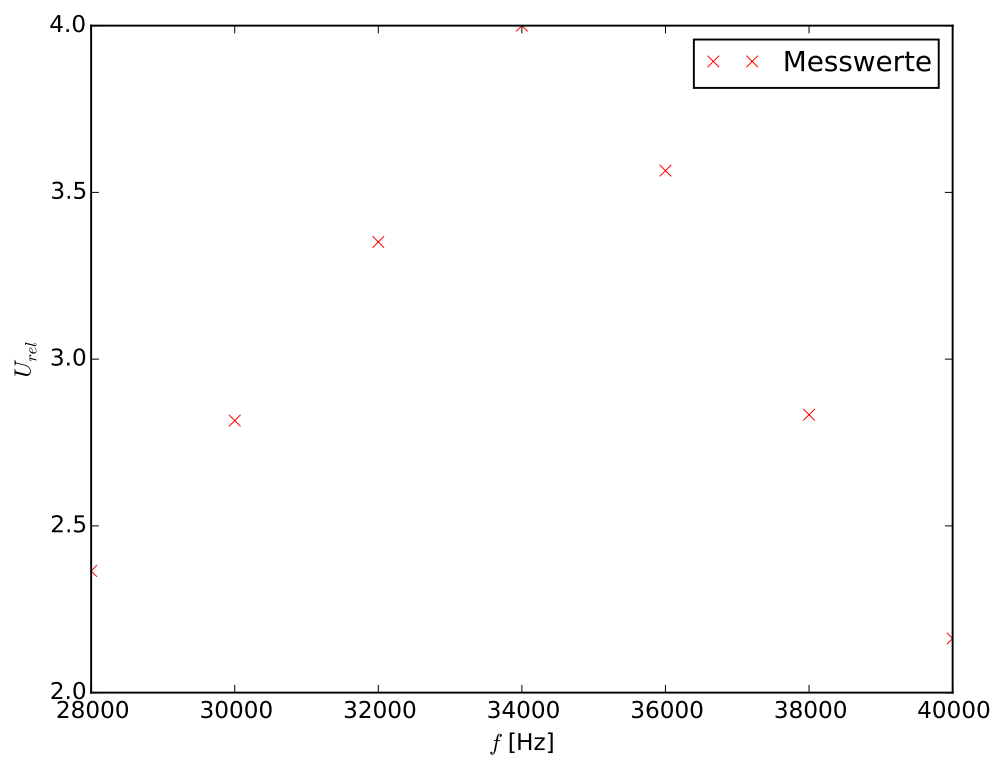


Abbildung 9: U_{rel} im Bereich der Resonanzfrequenz

3.0.5 Phasenverschiebung

Die Messwerte für ϕ sind in folgender Tabelle aufgelistet, Abb. 10 zeigt ϕ in Abhängigkeit von der Frequenz f mit logarithmischer x-Achse, Abb.11 den Bereich um $\phi = 90^\circ$ mit linearen Achsenskalierungen.

Tabelle 3: Messwerte 5c)

$\phi[\text{deg}]$	$f[\text{kHz}]$
7.67	4.26
6.48	6.00
3.46	8.00
1.44	10.00
5.18	12.00
6.05	14.00
10.37	16.00
12.96	18.00
11.52	20.00
19.01	22.00
17.28	24.00
22.46	26.00
32.26	28.00
45.36	30.00
57.6	32.00
80.78	34.00
108.86	36.00
125.86	38.00
141.12	40.00

In Abb. 11 sind außerdem die Geraden eingetragen um das Ablesen der relevanten Phasenverschiebungen zu erleichtern. ω_1 ($\phi = 45^\circ$) liegt ziemlich fast exakt bei 30kHz ($\phi=45,36^\circ$), ω_2 liegt bei 39kHz. Damit liegen ω_1 und ω_2 bei ähnlichen Frequenzen wie zuvor (Vgl. Abschnitt 3.0.3) schon ω_- und ω_+ . Dies ist das erwartete Ergebnis für den Fall schwacher Dämpfung, der hier realisiert ist. ω_1 und ω_- sind im Rahmen der begrenzten Anzahl an Messwerten identisch, ω_2 und ω_+ weichen um 13% voneinander ab.

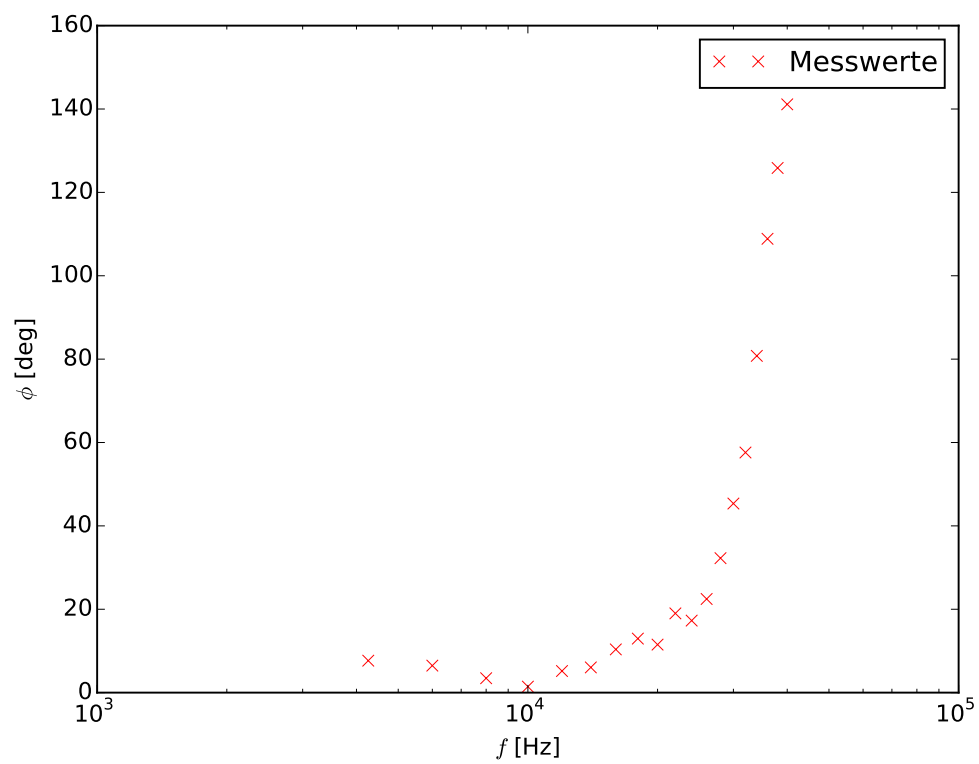


Abbildung 10: ϕ mit halblogarithmischer Achseneinteilung

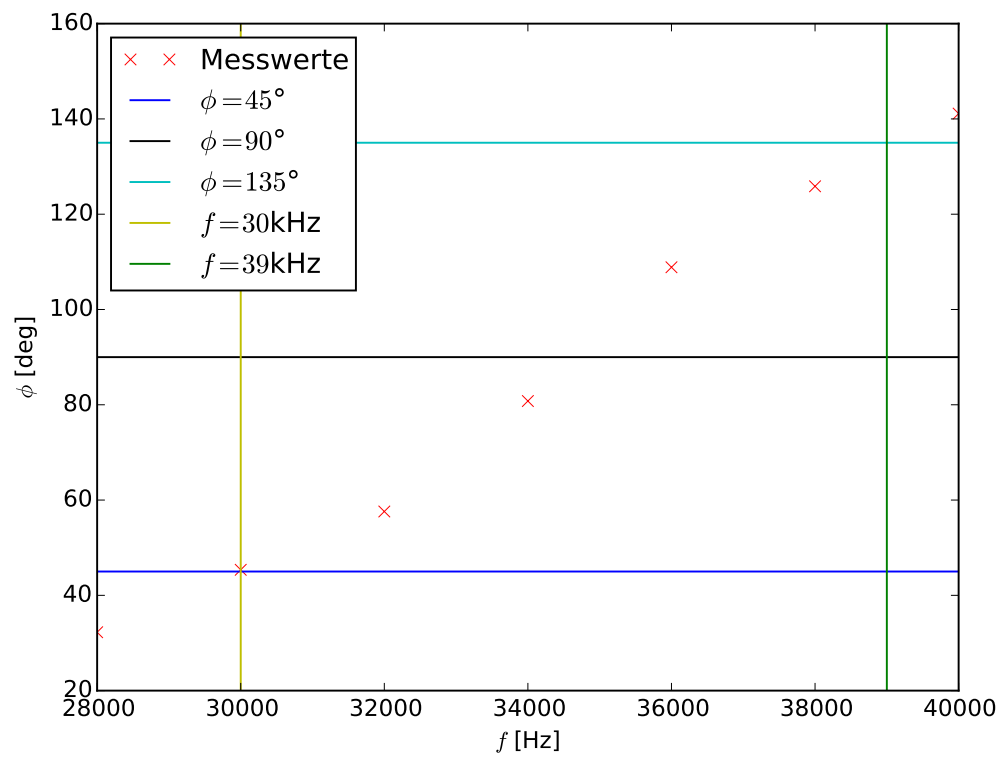


Abbildung 11: ϕ im Bereich der Resonanzfrequenz

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch Nr.354 - Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V354.pdf>.
- [2] *Messwerte zu 5a) 5b)*. URL: <https://app.box.com/s/v4zb62gwzamisj358152k999mhzwjmq>.
- [3] *Schwingkreis*. 21.11.2015. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Schwingkreis>.
- [4] Marcel C. Strzys Thorben Lünneweber. „Versuch Nr.354 - Gedämpfte und erzwungene Schwingungen“. In: (2008). URL: <http://physik-praktikum.jimdo.com/>.