

Versuch 106

Gekoppelte Pendel

Lukas Nickel

lukas.nickel@tu-dortmund.de

Rohat Kavili

rohat.kavili@tu-dortmund.de

Durchführung: 01.12.2015

Erste Abgabe: 08.12.2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Zielsetzung	3
1.2	Theoretische Grundlagen	3
1.2.1	Die Gleichsinnige Schwingung	3
1.2.2	Die Gegensinnige Schwingung	4
1.2.3	Gekoppelte Schwingung und Schwebung	4
2	Aufbau und Durchführung	5
3	Auswertung	6
3.1	Pendellänge $l_1 = (99.5 \pm 0.2)$ cm	6
3.1.1	Ungekoppelt	6
3.1.2	Gekoppelt	6
3.1.3	Schwebung	8
3.2	Pendellänge $l_2 = (50.2 \pm 0.2)$ cm	8
3.2.1	Ungekoppelt	8
3.2.2	Gekoppelt	9
3.2.3	Schwebung	11
4	Diskussion	11
4.1	Schwingungsdauern ungekoppelt und gleichphasig	11
4.2	Gegenphasige und gekoppelte Schwingung	12
4.3	Schwebungsdauer	12
	Literatur	12

1 Theorie

1.1 Zielsetzung

Die Aufgabe des Versuchs besteht darin, die Schwingungsdauern verschiedener Schwingungsarten sowie die Schwebungsdauer von jeweils zwei, identischen, gekoppelten Pendeln zu bestimmen.

1.2 Theoretische Grundlagen

Die Bewegungs-/Schwingungsgleichung eines einzelnen Pendels lautet für kleine Winkel auslenkungen ($\phi < 10^\circ$, $\sin(\phi) \approx \phi$):

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0 \quad (1)$$

mit $\omega^2 = \frac{g}{l}$. Dabei entspricht l der Länge des Pendels, ω der Schwingungsfrequenz und ϕ dem Auslenkwinkel. Werden mehrere (in diesem Fall zwei) Pendel miteinander gekoppelt, z.B. über eine Feder, können die Schwingungen nicht mehr als voneinander unabhängig betrachtet werden. Stattdessen sind die DGLen gekoppelt, als Bewegungsformen ergeben sich zwei Eigenschwingungen:

1.2.1 Die Gleichsinnige Schwingung

Beide Pendel werden um den selben Winkel ausgelenkt, die Schwingung erfolgt also in Phase. Dadurch entstehen keine weiteren rücktreibenden Kräfte durch die Feder, die Bewegung ist identisch zu einer ungekoppelten Schwingung, die Schwingungsfrequenz ergibt sich daher analog zu einem einzelnen Pendel als:

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (2)$$

Für die Schwingungsdauer gilt:

$$T_+ = \frac{2\pi}{\omega_+} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3)$$

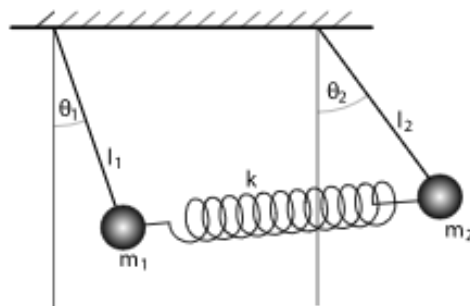


Abbildung 1: Gleichsinnige Schwingung [2]

1.2.2 Die Gegensinnige Schwingung

Die beiden Pendel werden in entgegengesetzte Richtungen ausgelenkt, so dass gilt :

$$\phi_1 = -\phi_2.$$

Dadurch wirkt die Feder auf beide Pendel eine gleich große, entgegengesetzte Kraft aus.

Für die Schwingungsfrequenz und die Schwingungsdauer gilt dann:

$$\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{l}} \quad (4)$$

$$T_- = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{l}}} \quad (5)$$

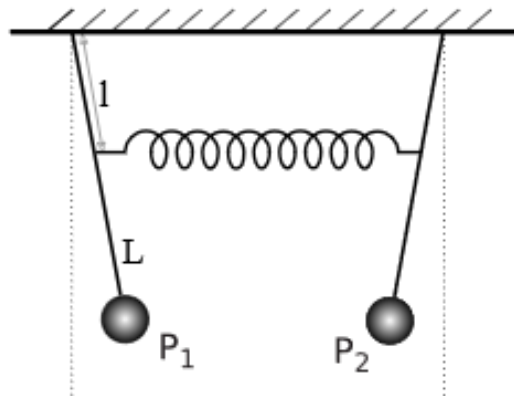


Abbildung 2: Gegensinnige Schwingung [2]

1.2.3 Gekoppelte Schwingung und Schwebung

Jede andere gekoppelte Schwingung lässt sich als Überlagerung dieser beiden Eigenschwingungen interpretieren. Der Kopplungsgrad lässt sich über die Schwingungsdauern der gleich- und gegenphasigen Schwingungen berechnen:

$$K = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2}. \quad (6)$$

Relevant für den Versuch ist neben den Eigenschwingungen die Schwingung mit den Anfangsbedingungen $\phi_1 = 0$ und $\phi_2 \neq 0$. Dabei lässt sich das Phänomen der Schwebung betrachten: Das zu $t = 0$ ausgelenkte Pendel überträgt seine Energie und damit die Schwingungsbewegung kontinuierlich und vollständig auf das andere Pendel, bis ersteres stillsteht und letzteres mit der vollen Amplitude schwingt. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch. Die Periodendauer dieses Vorgangs wird als Schwebungsdauer T_s bezeichnet

und ist durch die Schwingungsdauern der gleich- und gegenphasigen Schwingungen gemäß 7 gegeben.

$$T_s = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} \quad (7)$$

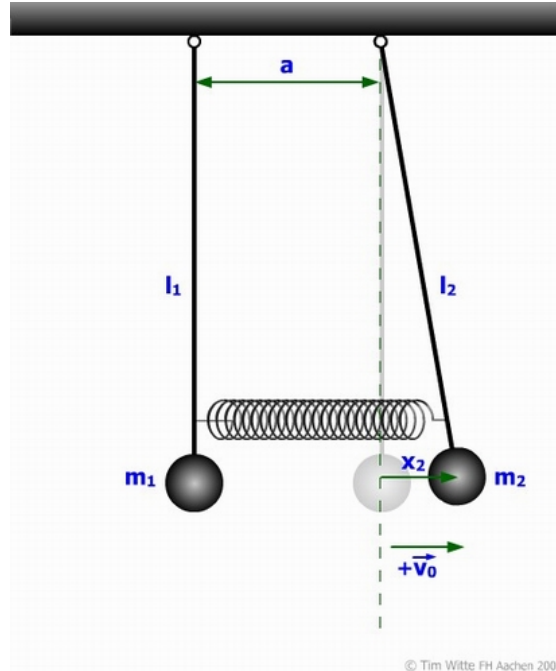


Abbildung 3: Gegensinnige Schwingung [3]

2 Aufbau und Durchführung

Als Pendel werden zwei identische Stabpendel mit einer Spitzenlagerung verwendet. Die jeweils zwei Spitzen der Pendel hängen in einer keilförmigen Nut um die Reibung zu minimieren. Mit einer Feder werden die Pendel gekoppelt. Die Pendelmassen ($m = 1 \text{ kg}$) sind entlang des Pendels verschiebbar. Auf diese Weise lässt sich die Pendellänge einstellen.

Für die Messungen werden beide Pendel auf dieselbe Länge l_1 eingestellt und zur Kontrolle die Gleichheit der Schwingungsdauern überprüft. Die Pendel sind dabei nicht gekoppelt. Bei der Messung von Schwingungsdauern werden fünf Perioden gemessen und der Mittelwert gebildet. Um den Einfluss von Messfehlern zu minimieren, werden alle Messungen außerdem jeweils zehnmal durchgeführt. Daraufhin werden die Pendel gekoppelt und die Schwingungsdauern des Doppelpendels bei gleich- und gegenphasiger Schwingung gemessen. Für die letzte Messreihe wird nur ein Pendel ausgelenkt, während das andere bei $t = 0 \text{ s}$ in Nulllage hängt. Gemessen werden die Schwingungs- und Schwebungsdauer dieser Schwingungsform. Für die Schwebungsdauer wird nur eine halbe Periode betrachtet. Die gesamte Messreihe wird mit einer weiteren Pendellänge l_2 wiederholt.

3 Auswertung

3.1 Pendellänge $l_1 = (99.5 \pm 0.2)$ cm

3.1.1 Ungekoppelt

Die Pendellänge l_1 beträgt (0.995 ± 0.005) m. Damit ergibt sich als Theoriewert für die Schwingungsdauer gemäß Gleichung 2 zu $T = (2.001 \pm 0.005)$ s. Die Messwerte für die einzelnen Pendel sind in Tabelle 1 zu finden. Der Mittelwert für das erste Pendel beträgt $(1.928\,40 \pm 0.000\,32)$ s, für das zweite Pendel $(1.953\,80 \pm 0.000\,32)$ s.

Tabelle 1: Schwingungsdauern der ungekoppelten Pendel für $l = 99.5$ cm

T_1 [s]	T_2 [s]
1.926 ± 0.001	1.966 ± 0.001
1.932 ± 0.001	1.974 ± 0.001
1.976 ± 0.001	1.944 ± 0.001
1.892 ± 0.001	1.960 ± 0.001
1.922 ± 0.001	1.932 ± 0.001
1.916 ± 0.001	1.972 ± 0.001
1.952 ± 0.001	1.950 ± 0.001
1.934 ± 0.001	1.980 ± 0.001
1.900 ± 0.001	1.910 ± 0.001
1.934 ± 0.001	1.950 ± 0.001

Die beiden Mittelwerte liegen nur um 1,3% auseinander, es kann also in guter Näherung von zwei identischen Pendeln ausgegangen werden.

3.1.2 Gekoppelt

Die Schwingungsdauern der gekoppelten Schwingung in Phase und um $\phi = 180^\circ$ verschoben, sind in den Tabellen 2 und 3 eingetragen. Wie aus der Theorie zu erwarten ist T_+ mit im Mittel $(1.917\,80 \pm 0.000\,32)$ s nahezu gleich der Schwingungsdauer der ungekoppelten Pendel ($\Delta T < 2\%$).

Tabelle 2: Schwingungsdauer der gekoppelten Pendel bei phasengleicher Bewegung

T_{plus} [s]
1.922 ± 0.001
1.904 ± 0.001
1.848 ± 0.001
1.966 ± 0.001
1.986 ± 0.001
1.900 ± 0.001
1.910 ± 0.001
1.910 ± 0.001
1.910 ± 0.001
1.922 ± 0.001

Tabelle 3: Schwingungsdauer der gekoppelten Pendel bei gegenphasiger Bewegung

T_{plus} [s]
1.712 ± 0.001
1.746 ± 0.001
1.778 ± 0.001
1.732 ± 0.001
1.754 ± 0.001
1.760 ± 0.001
1.716 ± 0.001
1.732 ± 0.001
1.726 ± 0.001
1.786 ± 0.001

Die Schwingungsdauer der gegenphasigen Schwingung liegt dabei mit $T_- = (1.744\,00 \pm 0.000\,32)$ s wie aus der Theorie erwartet niedriger als die Schwingungsdauer der gleichphasigen Bewegung (Vgl. Gleichungen 3 und 5).

Die Schwingungsdauer der gekoppelten Schwingung mit $\phi_1 = 0, \phi_2 \neq 0$ (im folgenden nur noch gekoppelte Schwingung) liegt bei $T_{gek} = (1.893\,00 \pm 0.000\,32)$ s und damit zwischen T_+ und T_- , was schlüssig erscheint, wenn man die gekoppelte Schwingung als Überlagerung von gleich- und gegenphasiger Schwingung betrachtet.

Tabelle 4: Schwingungsdauer der gekoppelten Schwingung

T_{gek} [s]
1.864 ± 0.001
1.922 ± 0.001
1.920 ± 0.001
1.934 ± 0.001
1.876 ± 0.001
1.922 ± 0.001
1.900 ± 0.001
1.880 ± 0.001
1.846 ± 0.001
1.866 ± 0.001

3.1.3 Schwebung

Tabelle 5: Schwebungsdauer der gekoppelten Schwingung

T_{gek} [second]
21.92 ± 0.01
23.12 ± 0.01
24.18 ± 0.01
26.98 ± 0.01
22.70 ± 0.01
19.40 ± 0.01
25.20 ± 0.01
23.78 ± 0.01
22.48 ± 0.01
25.56 ± 0.01

Der Mittelwert für $T_{Schwebung}$ (Tabelle 5) beträgt (23.5320 ± 0.0032) s. Aus T_+ und T_- ergibt sich gemäß Gleichung 6 der Kopplungsgrad zu $K = 0.09460 \pm 0.00024$. Mit 7 ergibt sich als Theoriewert für die Schwebungsdauer $T_S = (19.27 \pm 0.05)$ s. Dieser Wert liegt um $18.1200 \pm 0.0021\%$ unter der gemessenen Schwebungsdauer.

3.2 Pendellänge $l_2 = (50.2 \pm 0.2)$ cm

3.2.1 Ungekoppelt

Mit der Pendellänge L_2 beträgt der Theoriewert für die Schwingungsdauer $T = (1.421 \pm 0.007)$ s. Die Messwerte für die einzelnen Pendel sind in Tabelle 6 zu finden. Der Mittelwert für das erste Pendel beträgt (1.46220 ± 0.00032) s, für das zweite Pendel (1.47400 ± 0.00032) s.

Tabelle 6: Schwingungsdauern der ungekoppelten Pendel für $l_2 = (50.2 \pm 0.2) \text{ cm}$

$T_1 \text{ [s]}$	$T_2 \text{ [s]}$
1.420 ± 0.001	1.458 ± 0.001
1.482 ± 0.001	1.486 ± 0.001
1.488 ± 0.001	1.464 ± 0.001
1.452 ± 0.001	1.476 ± 0.001
1.458 ± 0.001	1.494 ± 0.001
1.448 ± 0.001	1.498 ± 0.001
1.482 ± 0.001	1.466 ± 0.001
1.446 ± 0.001	1.486 ± 0.001
1.466 ± 0.001	1.466 ± 0.001
1.480 ± 0.001	1.446 ± 0.001

Die beiden Mittelwerte liegen um $<1\%$ auseinander, auch hier können also zwei identische Pendel angenommen werden.

3.2.2 Gekoppelt

Die Schwingungsdauern der gleich- und gegenphasigen Schwingungen, sind in den Tabellen 7 und 8 eingetragen. $T_{+, \text{Mittelwert}}$ entspricht $(1.48200 \pm 0.00032) \text{ s}$ auch hier nahezu der Schwingungsdauer der ungekoppelten Pendel ($\Delta T < 1.4\%$).

Tabelle 7: Schwingungsdauer der gekoppelten Pendel bei phasengleicher Bewegung

$T_{plus} \text{ [second]}$
1.464 ± 0.001
1.464 ± 0.001
1.488 ± 0.001
1.500 ± 0.001
1.482 ± 0.001
1.442 ± 0.001
1.480 ± 0.001
1.500 ± 0.001
1.504 ± 0.001
1.492 ± 0.001

Tabelle 8: Schwingungsdauer der gekoppelten Pendel bei gegenphasiger Bewegung

T_{plus} [second]
1.248 ± 0.001
1.260 ± 0.001
1.282 ± 0.001
1.286 ± 0.001
1.264 ± 0.001
1.270 ± 0.001
1.258 ± 0.001
1.230 ± 0.001
1.242 ± 0.001
1.282 ± 0.001

Die Schwingungsdauer der gegenphasigen Schwingung ist auch hier $T_- = (1.262\,00 \pm 0.000\,32)$ s geringer als die Schwingungsdauer der gleichphasigen Bewegung (Vgl. Gleichungen 2 und 4).

Die Schwingungsdauer der gekoppelten Schwingung liegt bei $T_{gek} = (1.4310 \pm 0.0004)$ s. Sie liegt also wie schon bei l_1 zwischen der Schwingungsdauer der gleich- und gegenphasigen Schwingung. Die unterschiedlichen Ungenauigkeiten in Tabelle 9 kommen dadurch zustande, dass nach den ersten fünf Messwerten nur noch 3 Periodendauern aufgenommen wurden.

Tabelle 9: Schwingungsdauer der gekoppelten Schwingung

T_{gek} [second]
1.380 ± 0.001
1.390 ± 0.001
1.464 ± 0.001
1.512 ± 0.001
1.500 ± 0.001
1.453 ± 0.002
1.387 ± 0.002
1.410 ± 0.002
1.453 ± 0.002
1.460 ± 0.002
1.410 ± 0.002
1.357 ± 0.002
1.450 ± 0.002
1.413 ± 0.002

3.2.3 Schwebung

Tabelle 10: Schwebungsdauer der gekoppelten Schwingung

T_{gek} [second]
13.22 ± 0.01
8.92 ± 0.01
10.54 ± 0.01
8.46 ± 0.01
10.64 ± 0.01
11.10 ± 0.01
9.28 ± 0.01
11.26 ± 0.01
10.36 ± 0.01
9.20 ± 0.01
9.52 ± 0.01
9.92 ± 0.01
8.54 ± 0.01
10.08 ± 0.01

Der Mittelwert für die Schwebungsdauer $T_{Schwebung}$ beträgt (10.0740 ± 0.0032) s. Aus T_+ und T_- ergibt sich gemäß Gleichung 6 der Kopplungsgrad zu $K = 0.15890 \pm 0.00032$. Mit 7 ergibt sich als Theoriewert für die Schwebungsdauer $T_S = (8.524 \pm 0.018)$ s. Dieser Wert liegt um $15.3900 \pm 0.0018\%$ unter der gemessenen Schwebungsdauer.

4 Diskussion

Für alle Messwerte wurde die Ungenauigkeit nur als Ableseungenauigkeit angegeben, die tatsächliche Ungenauigkeit liegt also höher, lässt sich allerdings nur schwer abschätzen. Die wichtigsten Faktoren dabei sind Fehler bei der Messung und Durchführung die kaum zu vermeiden sind. So ist die Pendelbewegung z.B. nicht rein 2 dimensional, stattdessen schwingen die Pendel geringfügig senkrecht zu der erwünschten Richtung. Dadurch entstehen weitere Abweichungen bei der Schwingungs- und Schwebungsdauer. Außerdem ist die Genauigkeit der Messung durch die Reaktionsgeschwindigkeit beim Drücken begrenzt.

4.1 Schwingungsdauern ungekoppelt und gleichphasig

Die gemessenen Schwingungsdauern weichen für beide Pendellängen nur geringfügig voneinander ab. Die geringen Abweichungen lassen sich durch kleine Fehler bei der Positionierung der Massen erklären. Dazu kommt, dass die Messungen abwechselnd von zwei Personen durchgeführt wurden, wodurch wegen unterschiedlicher Reaktionszeiten erneut Abweichungen dazukommen. Bei beiden Pendellängen weicht der Theoriewert

kaum von den gemessenen Werten ab, was dafür spricht, dass der Aufbau sein Ziel der Reibungsminimierung zufriedenstellend erfüllt.

4.2 Gegenphasige und gekoppelte Schwingung

Die Werte für die gegenphasige Schwingung liegen erwartungsgemäß deutlich niedriger als bei der gleichphasigen. Da der Kopplungsgrad nicht bekannt ist (was hier als Kopplungsgrad verwendet wird, ergibt sich aus T_+ und T_- und hilft daher nicht T_- einzuordnen), ist es nicht möglich Aussagen über den absoluten Wert von T_- zu treffen. Die Schwingungsdauer der gekoppelten Schwingung ist ebenfalls schwierig absolut einzuordnen. Aus der Anleitung ist nur bekannt, dass die gekoppelte Schwingung als Überlagerung der Eigenschwingungen zu betrachten ist. Daher scheinen die Messwerte in das Gesamtbild zu passen. Eine genauere Einordnung wird auch dadurch erschwert, dass die gemessene gekoppelte Schwingung nicht exakt der theoretischen entspricht. In der Praxis bleibt das zweite Pendel nicht bei $\phi = 0$ in Ruhe, wenn das erste ausgelenkt wird. Stattdessen ergibt sich für dieses Pendel aufgrund der Federkraft eine neue Ruhelage bei $\phi \neq 0$.

4.3 Schwebungsdauer

Bei der Schwebungsdauer der gekoppelten Schwingung fällt auf, dass (für beide Pendellängen) der gemessene (und gemittelte) Wert recht deutlich ($\approx 15/18\%$) von dem Theoriewert ab, der sich aus T_+ und T_- ergibt. Dabei sei anzumerken, dass die Bestimmung der Schwebungsdauer mit den vorhandenen Mitteln nur begrenzt genau möglich ist, da der Zeitpunkt an dem das Pendel still steht schwierig zu messen ist. Teilweise bleibt das Pendel auch über einen gewissen Zeitraum (annähernd) in Ruhe, was die Messung weiter erschwert.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *V106 Gekoppelte Pendel*. 2015.
- [2] *Gekoppelte Pendel*. 5.12.2015. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Gekoppelte_Pendel.
- [3] Prof.Dr. Doris Samm. *Praktikum: Physik für Elektrotechnik*. URL: <http://www.physik.fh-aachen.de/startseite/physik-fuer-elektrotechnik/praktikum/gekoppeltes-pendel/5/>.