Versuch 354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Lukas Nickel
lukas.nickel@tu-dortmund.de

Rohat Kavili
rohat.kavili@tu-dortmund.de

Durchführung: 17.11.2015

Abgabe: 24.11.2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

1.1 Einleitung

Ziel dieses Versuches ist es, die Eigenschaften eines RLC-Schwingkreises zu bestimmen. Dafür werden Messungen mit Variation der Widerstandes oder der Frequenz durchgeführt.

1.2 Theoretische Grundlagen

Ein RLC stellt einen gedämpften Schwingkreis dar. Die Schwingung besteht dabei aus einer Verschiebung der elektromagnetischen Energie zwischen Spule (L) und Kondensator (C). Dabei ändert der Strom periodisch sein Vorzeichen. Eine schematische Darstellung ist in **??** zu sehen.

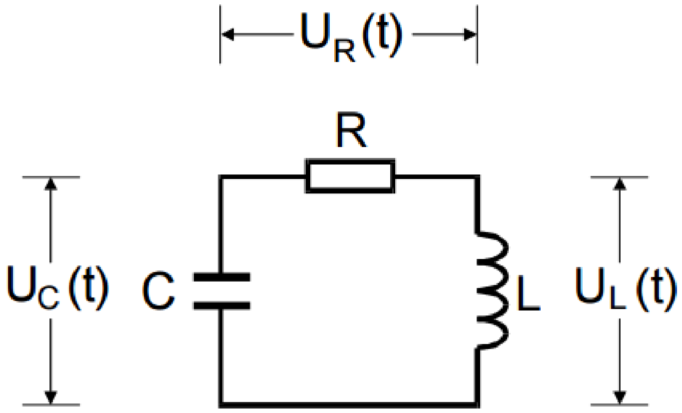

Abbildung 1: Gedämpfter Schwingkreis

Die Differentialgleichung eines RLC-Kreises entspricht der eines harmonischen Oszillators:

$$\frac{d^2I}{(dt)^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0. \tag{1}$$

Entsprechen ergeben sich die Lösungen -analog zum harmonischen Oszillator- zu:

$$I(t) = I_1 e^{j\omega_1 t} + I_2 e^{j\omega_2 t} \tag{2}$$

mit

$$\omega_{1,2} = j\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R**2}{4L**2}}. \tag{3}$$

Dabei ist j die imaginäre Einheit. Wie unschwer an Gleichung 3 zu erkennen ist müssen abhängig von den Parametern R, L und C nun 3 Fälle unterschieden werden.

1.2.1 Fall 1: $\frac{1}{LC} <= \frac{R^2}{4L^2}$

In dem Fall $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$ ist der Ausdruck in der Wurzel imaginär, in Gleichung 2 kommen also nur noch reelle Exponentialfunktionen vor. Diese beschreiben allerdings keine Schwingung, sondern die **aperiodische Dämpfung**. Nach einer gewissen Zeitspanne liegt dabei ein gewöhnliches Relaxationsverhalten vor, vorher kann allerdings noch ein Extremwert durchschritten werden. Den Fall $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$ bezeichnet man als **aperiodischen Grenzfall**. Der Wurzelterm in Gleichung 3 verschwindet und I(t) geht schnellstmöglichst gegen null. Beide Fälle sind in 2 dargestellt, die gestrichelte Linie zeigt den aperiodischen Grenzfall, die anderen mögliche Verläufe einer aperiodischen Dämpfung:

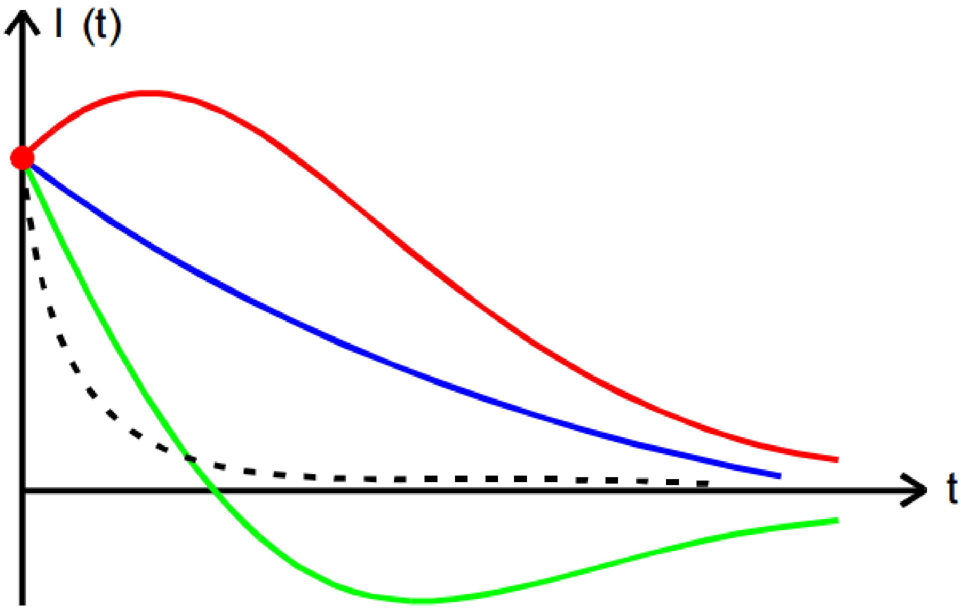

Abbildung 2: Stromverlauf in einem aperiodisch gedämpften System

1.2.2 Fall 2: $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$

Unter dieser Bedingung ist der Term unter der Wurzel in **??** positiv, die Wurzel also reell. Damit muss $I_1 = I_2$ sein und für den Strom ergibt sich:

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cos 2\pi\nu t + \eta. \tag{4}$$

Dabei beschreibt die einhüllende e-Funktion die Dämpfung und der Kosinus-Term die Schwingungseigenschaft des Systems. 2 wichtige Eigenschaften des Schwingkreises bestehen in der Schwingungsdauer

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\sqrt{1/LC - R^2/4L^2}} \tag{5}$$

und der Abklingdauer

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R}. \tag{6}$$

Als Abklingdauer wird die Zeit bezeichnet, nach der die Amplitude auf den e-ten Teil ihres ursprünglichen Wertes abgefallen ist. Ein solches gedämpftes Schwingungsverhalten ist in **??** dargestellt. Die Lösung für den ungedämpften Schwingkreis erhält man über

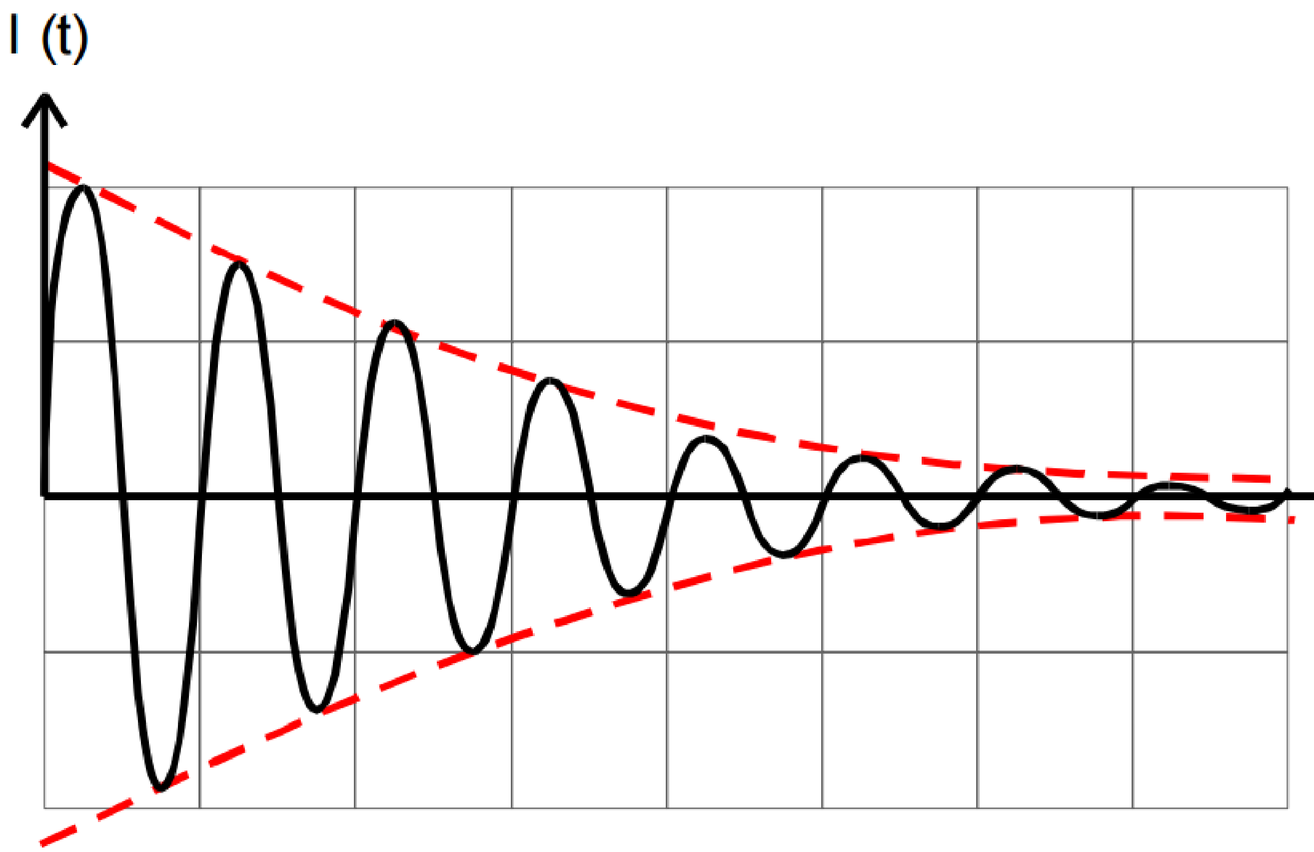

Abbildung 3: Spannungsverlauf bei einer gedämpften Schwingung

den selben Weg mit der Annahme, dass $\frac{1}{LC} >> \frac{R^2}{4L^2}$ sei.

1.2.3 Angeregter Schwingkreis

Für eine erzwungene Schwingung wird der Schwingkreis von einer äußeren Wechselspannung kontinuierlich angetrieben. Abhängig von der Frequenz dieser Spannungsquelle variieren Spannungsamplitude und Phasenverschiebung zwischen Generator und Kondensator:

$$\phi\omega = \arctan\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2} \tag{7}$$

$$U_c(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \tag{8}$$

Dabei bezeichnet ϕ die Phasenverschiebung und U_c die Spannung am Kondensator. Von besonderer Bedeutung ist die Resonanzfrequenz $\omega_r es$, bei der U_c ein Maximum erreicht, das größer ist als U_0:

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \tag{9}$$

Außerdem erkennt man an 8, dass U_c für $\omega \to \infty$ gegen 0 und für $\omega \to 0$ gegen U_0 geht.

2 Durchführung

Für die einzelnen Teile des Versuches wird durchgehend der selbe Schwingkreis verwendet. Zunächst werden Eigenschaften des gedämpften Schwingkreises bestimmt, namentlich der zeitliche Amplitudenverlauf und daraus der effektive Dämpfungswiderstand sowie der Dämpfungswiderstand, bei dem die aperiodische Dämpfung auftritt. Im ersten Fall sei der Widerstand konstant und der Schwingkreis wird durch eine Rechteckspannung angeregt. Durch geeignete Wahl der Frequenz lässt sich ein gedämpfter Schwingkreis ohne Anregung simulieren. Der Spannungsverlauf wird an einem Oszilloskop aufgezeichnet und zur Auswertung abgespeichert. Die verwendete Schaltung ist in **??** dargestellt. Anstelle des Nadelimpulsgenerators wird die erwähnte Rechtecksspannung verwendet.
Für den zweiten Versuchsteil wird der feste Widerstand R durch einen bis zu 10 kregelbaren ersetzt. Dieser Widerstand wird zunächst auf seinen Maximalwert eingestellt und dann allmählich verringert, bis der Spannungsverlauf auf dem Oszilloskop dem des aperiodischen Grenzfalles entspricht (siehe Abb.2).
Für die weiteren Versuchsteile wird der regelbare Widerstand wieder durch einen festen Widerstand ersetzt und die anregende Spannung zu einer Sinusförmigen Wechselspannung geändert. Die Amplitude bleibt über alle Messungen konstant, die Frequenz wird geändert um die Frequenzabhängigkeit von Amplitude und Phasenverschiebung nachzuweisen. Gemessen werden bei verschiedenen Frequenzen die Erreger- und Kondensatorspannung sowie die Phase zwischen jenen. Dafür werden die Amplitude von Kondensator- und Erregerspannung für jede Frequenz einzeln gemessen, weil die Messung durch den Frequenzgang der Tastkopfes beeinflusst werden kann. Um die Phase zu messen werden beide Spannungen gegeneinander am Oszilloskop aufgetragen und die Zeitdifferenz zwischen 2 Extrema oder ähnlich ausgezeichneten Punkten bestimmt.

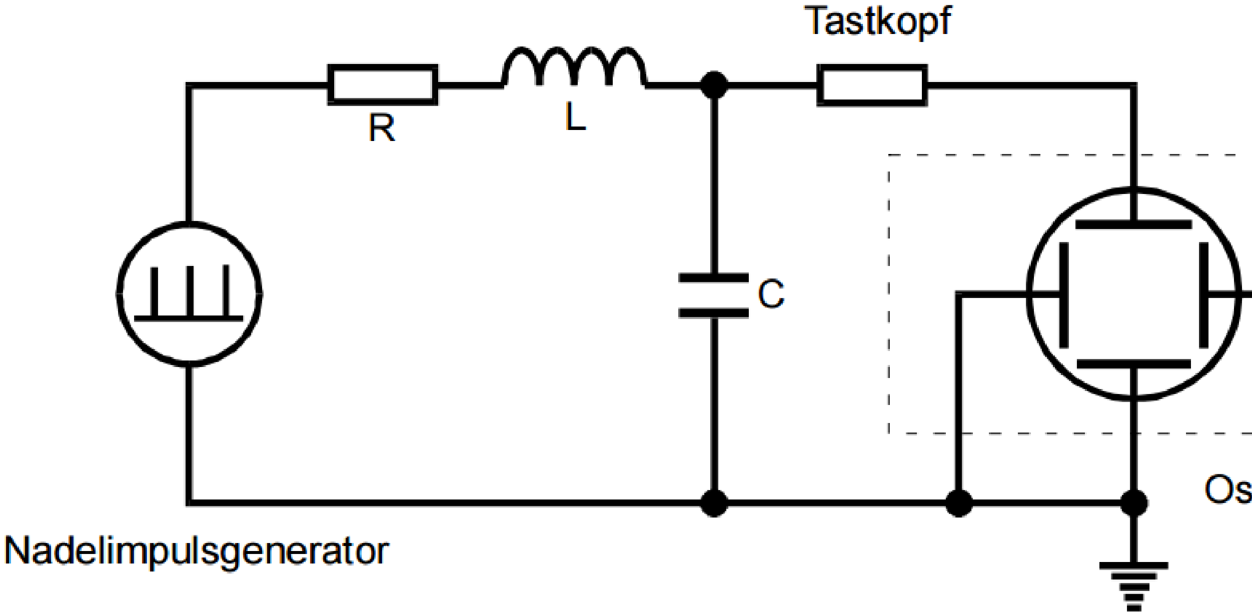

Abbildung 4: Schaltung zur Untersuchung der Zeitabhängigkeit der Amplitude

3 Auswertung

3.0.1 5a)

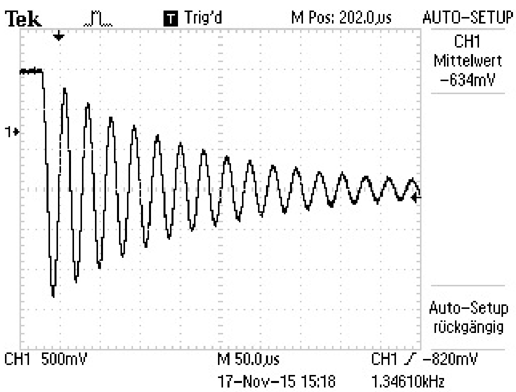

Abb. **??** zeigt den Verlauf der Spannung in dem gedämpften Schwingkreis. Qualitaiv gut zu erkennen sind die Sinusförmige Schwingung und die einhüllende e-Funktion, die die Dämpfung beschreibt. Die Frequenz beträgt 1,35 kHz. Die Maxima der Spannungen sind in folgender Tabelle dargestellt:
Der negative Zeitabschnitt dein den ersten beiden Werten sowie die Tatsache, dass die Messwerte der Spannung in positiver und nagativer Hinsicht nicht übereinstimmen,

Tabelle 1: Messwerte 5a)

t	U
$-0.000\,020\,6$	0.78
$-0.000\,005\,8$	-2.06
$0.000\,007\,8$	0.54
$0.000\,022\,60$	-1.88
$0.000\,037\,00$	0.36
$0.000\,051\,60$	-1.70
$0.000\,066\,00$	0.18
$0.000\,081\,00$	-1.56
$0.000\,095\,00$	0.08
$0.000\,109\,80$	-1.44
$0.000\,125\,00$	-0.04
$0.000\,138\,00$	-1.34
$0.000\,152\,40$	-0.14
$0.000\,167\,60$	-1.24
$0.000\,181\,60$	-0.22
$0.000\,196\,60$	-1.18
$0.000\,210\,20$	-0.30
$0.000\,226\,40$	-1.12
$0.000\,238\,60$	-0.36
$0.000\,254\,20$	-1.06
$0.000\,268\,00$	-0.42
$0.000\,282\,40$	-1.02

spielen für die Berechnung des Dämpfungswiderstandes keine größere Rolle (siehe Diskussion). Als Spannungsamplitude wird im folgenden die Differenz zwischen Maximum und Minimum der Spannung bezeichnet, auf **??** bezogen also jeweils die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Werte. Der Abfall der Spannung soll der Theorie (siehe Gleichung 4) mit $e^{-2\pi\mu t}$ erfolgen. Die Spannungsamplitude erreicht fällt unter $\frac{1}{e}$ des ursprünglichen Wertes bei t=0.0001816 s. Da der erste Messwert nicht bei t=0 aufgenommen wurde, ergibt sich also $T_e x = 0.000161$s. Der Exponent der e-Funktion muss zu diesem Zeitpunkt -1 betragen (auf 1/e=e$^-1abgefallen), esergibtsichalso: -2\pi\mu T_{ex} = -1$
$\implies \mu = \frac{1}{2\pi T_{ex}} = 988.541/s.(10)$

3.0.2 5b)

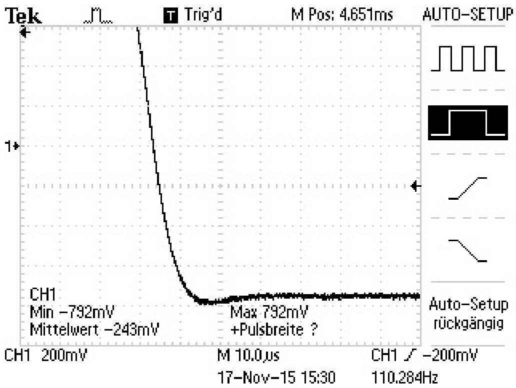

Abb. **??** zeigt den gemessen Spannungsabfall für R = 3120 . Bei diesem Widerstand tritt die aperiodische Dämpfung auf, was daran zu erkennen ist dass kein Überschwingen stattfindet wie z.B. in Abb.**??**.

data/F0002TEK.jpg

Der theoretische Wert berechnet sich gemäß:

$$\frac{1}{LC} = R_{ap}^2/4L^2 \implies R_{ap} = \sqrt{\frac{4L}{C}} = 4390.4 \pm 9.0\Omega. \tag{11}$$

Der theoretische Wert weicht recht deutlich (40%) von dem gemessenen ab. Eine Erklärung dafür könnten die weiteren internen Widerstände sein, die in der Schaltung in Form von Kabel u.ä. enthalten sind. Außerdem ist der Fehler des regelbaren Widerstandes nicht bekannt. Zusätzlich zu der Ableseungenauigkeit können durchaus noch einige Prozentpunkte durch diesen faktor dazukommen. Ohne Genaueres über den verwendeten

Widerstand zu wissen, erscheint die Abweichung vom theoriewert allerding durchaus recht hoch.

3.0.3 5c)

4 Diskussion