Automatická segmentácia obrazu pomocou siete rovinných kriviek

Bc. Eva Sabatulová

Matematický model

Model automatickej segmentácie je založený na vývoji uzavretej Lagrangeovskej krivky v segmentovanej oblasti. Naším cieľom je vytvoriť a jednoznačne určiť hranicu medzi segmentovanými oblasťami. Na segmentáciu použijeme množinu rovinných kriviek, uzavretých a otvorených. Otvorené krivky budú navzájom prepojené a budeme ich vnímať ako sieť kriviek. Pre vykonanie experimentov sme použili satelitné snímky získané z misie Sentinel-2.

Budeme pracovať s dvojrozmerným čiernobielym obrazom, ktorý vieme reprezentovať funkciou intenzity $I^0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pričom $I^0(x) = I^0(x_1, x_2)$ predstavuje hodnotu intenzity pixelu s priestorovými súradnicami (x_1, x_2). Pre segmentáciu oblasti obrazu musíme určiť počiatočnú krivku, ktorú budeme vyvíjať v čase k hranici segmentovanej oblasti obrazu, pričom evolúcia je daná vhodným vektorovým poľom. Umiestnením počiatočnej krivky určíme intenzitu obrazu, ktorú segmentujeme, preto by mala celá krivka ležať vo vnútri segmentovanej oblasti. Majme vyvíjajúcu sa krivku

$$\gamma : \Gamma \times T \to \mathbb{R}^2.$$

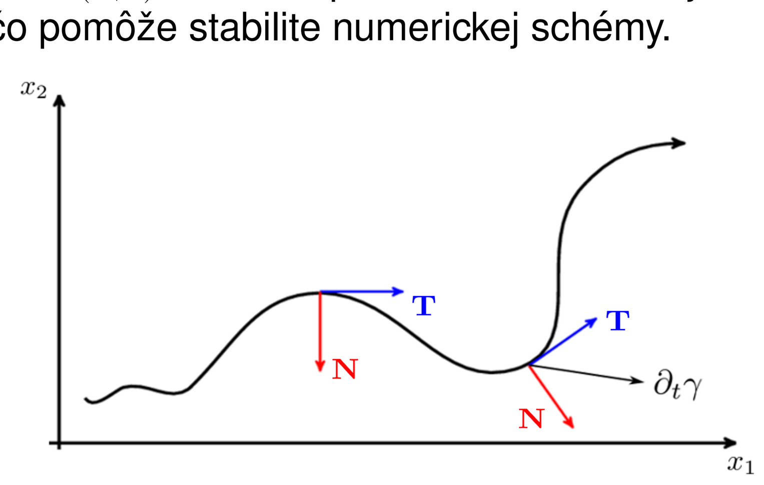
Nech $\Gamma = [0,1]$ a $T = [t^0, t^f]$, predstavuje časový interval, kde t^0 je počiatočný čas a t^f je koncový čas. Hodnota $\gamma(u,t)$, kde $u \in \Gamma$, vyjadruje pozíciu krivky γ v čase $t \in T$.
Evolúcia krivky riadená vektorovým polom $\mathbf{V}(u,t)$ je daná diferenciálnou rovnicou

$$\frac{\partial \gamma(u,t)}{\partial t} = \mathbf{V}(u,t),$$

s počiatočnou podmienkou $\gamma(u,t^0) = \gamma^0$, kde γ^0 označíme ako počiatočnú krivku.
Vo všeobecnosti vieme pohyb krivky rozložiť na pohyb v normálovom a tangenciálnom smere.

$$\frac{\partial \gamma(u,t)}{\partial t} = \beta(u,t)\mathbf{N}(u,t) + \alpha(u,t)\mathbf{T}(u,t),$$

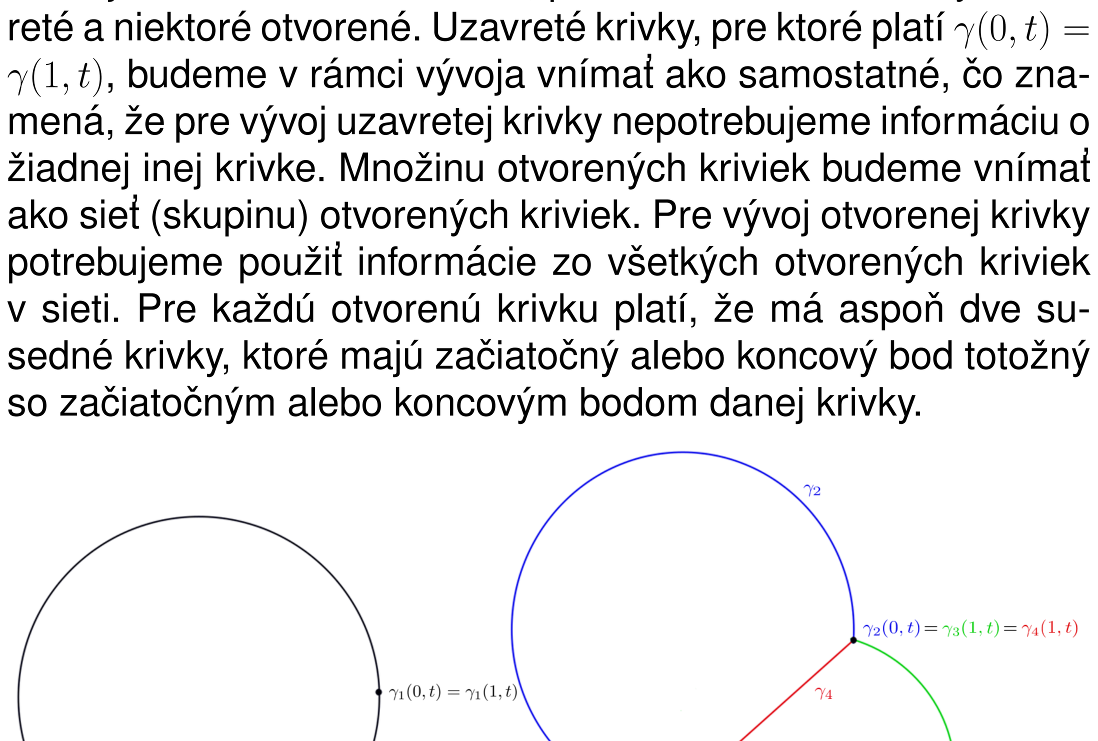
kde $\alpha(u,t)$ označuje tangenciálnu rýchlosť, $\beta(u,t)$ normálovú rýchlosť, $\mathbf{T}(u,t)$ jednotkový dotykový vektor a $\mathbf{N}(u,t)$ jednotkový normálový vektor. Vplyvom tangenciálnej rýchlosti v rovnici sa nemení tvar krivky, iba sa body krivky posúvajú v tangenciálnom smere. Je preto dôležité zvoliť vhodnú tangenciálnu rýchlosť $\alpha(u,t)$ na zabezpečenie rovnomernej redistribúcie bodov, čo pomôže stabilite numerickej schémy.



Rozloženie pohybu krivky na tangenciálny a normálový smer.

Sieť kriviek

Pracujeme s množinou kriviek, pričom niektoré môžu byť uzavreté a niektoré otvorené. Uzavreté krivky, pre ktoré platí $\gamma(0,t) = \gamma(1,t)$, budeme v rámci vývoja vnímať ako samostatné, čo znamená, že pre vývoj uzavretej krivky nepotrebujeme informáciu o žiadnej inej krivke. Množinu otvorených kriviek budeme vnímať ako sieť (skupinu) otvorených kriviek. Pre vývoj otvorenej krivky potrebujeme použiť informácie zo všetkých otvorených kriviek v sieti. Pre každú otvorenú krivku platí, že má aspoň dve susedné krivky, ktoré majú začiatočný alebo koncový bod totožný so začiatočným alebo koncovým bodom danej krivky.



Príklad uzavretej krivky γ_1 a sieť otvorených kriviek $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$.

Normálová rýchlosť

Normálovú rýchlosť definujeme v tvare

$$\beta(u,t) = (1-\lambda(t))g_2^{\gamma}(\gamma(u,t)) - \lambda(t)\nabla g_1(\gamma(u,t))\cdot\mathbf{N}(u,t) - \delta(t)k(u,t).$$

Druhý člen $-\nabla g_1(\gamma(u,t)) \cdot \mathbf{N}(u,t)$ riadi evolúciu krivky k hrane segmentovej oblasti. Prvý člen $g_2^{\gamma}(\gamma(u,t))$ expanduje krivku z jej počiatočnej pozície cez segmentovanú oblasť v smere normály. Pomocou parametra $\lambda(t)$, ktorý vystupuje v oboch členoch vieme meniť to, ktorý člen bude mať na vývoj väčší vplyv. Tretí člen $\delta(t)k(u,t)$ reprezentujuje krivostnú regularizáciu.

Člen priťahujúcu krivku ku hranici

V druhom člene normálovej rýchlosti je funkcia $g_1(x)$ definovaná ako

$$g_1(x) = G_{\sigma_1} * g(\zeta, s(x)),$$

kde

$$g(\zeta, s(x)) = \frac{1}{(1+\zeta s(x)^2)},$$

je funkcia hranového detektora. Parameter ζ určuje výraznosť detekovaných hrán. Funkciu $s(x)$ definujeme ako normu gradientu konvolúcie pôvodného obrazu $I^0(x)$ s Gaussovým filtrom s rozptylom σ_0,

$$s(x) = |\nabla G_{\sigma_0}(x) * I^0(x)|.$$

Expanzný člen

V expanznom člene funkciu $g_2^{\gamma}(x)$ definujeme v tvare

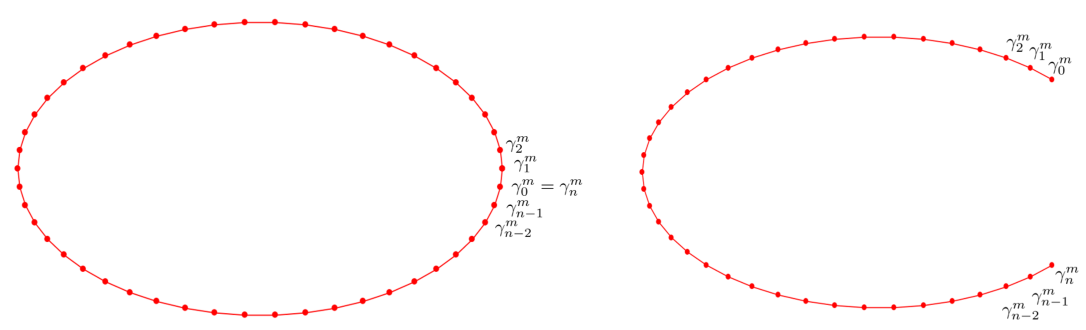
$$g_2^{\gamma}(x) = G_{\sigma_2} * (H^{\gamma}(x) g_1(x)),$$

kde vynásobenú funkciu homogenity $H^{\gamma}(x)$ s hranovým detektorom $g_1(x)$ zhladíme konvolúciou s Gaussovou funkciou G_{σ_2}. Funkcia homogenity určuje, podobnosť intenzity vo vnútri počiatočnej krivky a v bode x.

$$H^{\gamma}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } I^{\sigma_0}(x) \in (\rho - \varepsilon\rho, \rho + \varepsilon\rho) \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Numerická diskretizácia

Diferenciálnu rovnicu vývoja krivky budeme riešiť numericky. Krivku γ diskretizujeme na množinu bodov $\gamma_0^m, \gamma_1^m, ..., \gamma_n^m$, kde n predstavuje počet bodov krivky v čase m.



Diskretizácia uzatvorenej a otvorenej krivky.

Pred diskretizáciou si zavedieme pomocnú premennú w, $\beta(u,t) = w(u,t) - \delta(t)k(u,t)$. Pre priestorovú diskretizáciu použijeme metódu konečných objemov a časovú deriváciu aproximujeme konečnou diferenciou. Získame tak explicitnú schému pre riešenie rovnice vývoja krivky v tvare

$$\begin{aligned}\gamma_i^{m+1} &= \gamma_i^m + \tau w_i^m \frac{(\gamma_{i+1}^m - \gamma_{i-1}^m)^{\perp}}{h_i^m + h_{i+1}^m} \\ &- \delta_i^m \tau \frac{2}{h_i^m + h_{i+1}^m}\left(\frac{\gamma_{i+1}^m - \gamma_i^m}{h_{i+1}^m} - \frac{\gamma_i^m - \gamma_{i-1}^m}{h_i^m}\right) + \alpha_i^m \tau \left(\frac{\gamma_{i+1}^m - \gamma_{i-1}^m}{h_i^m + h_{i+1}^m}\right).\end{aligned}$$

Úprava výpočtu pre začiatočný bod otvorenej krivky

Pre začiatočný bod γ_0^{m+1} otvorenej krivky, by sme pri použití explicitnej schémy narazili na problém, aký bod zvoliť za predošlý, teda za bod γ_{i-1}^m. Využijeme sieť kriviek a do úvahy budeme brať body zo susedných kriviek, ktoré majú totožné koncové alebo začiatočné body so začiatočným bodov danej krivky. Nech $k \in 1, ..., K$, potom $\gamma_{k,i}^m$ predstavuje i-ty bod k-tej krivky v časovom kroku m. Výpočet pre začiatočný bod otvorenej krivky definujeme v tvare

$$\begin{aligned}\gamma_{k,0}^{m+1} &= \gamma_{k,0}^m + \tau \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{K} w_{(k,k,j),(0,1,b_j)} \frac{(\gamma_{k,1}^m - \gamma_{j,b_j}^m)^{\perp}}{h_{(k,j),(0,b_j)}^m + h_{k,1}^m} \\ &+ \tau \sum_{\substack{c=1\\ c\neq k}}^{K-1} \sum_{\substack{d=c+1\\ d\neq k}}^{K} w_{(k,c,d),(0,b_c,b_d)} \frac{(\gamma_{c,b_c}^m - \gamma_{d,b_d}^m)^{\perp}}{h_{(k,c),(0,b_c)}^m + h_{(k,d),(0,b_d)}^m} \\ &- \delta_0^m \tau \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{K} \frac{2}{h_{(k,j),(0,b_j)}^m + h_{k,1}^m}\left(\frac{\gamma_{k,1}^m - \gamma_{k,0}^m}{h_{k,1}^m} - \frac{\gamma_{k,0}^m - \gamma_{j,b_j}^m}{h_{(k,j),(0,b_j)}^m}\right) \\ &- \delta_0^m \tau \sum_{\substack{c=1\\ c\neq k}}^{K-1} \sum_{\substack{d=c+1\\ d\neq k}}^{K} \frac{2}{h_{(k,c),(0,b_c)}^m + h_{(k,d),(0,b_d)}^m}\left(\frac{\gamma_{c,b_c}^m - \gamma_{k,0}^m}{h_{(k,c),(0,b_c)}^m} - \frac{\gamma_{k,0}^m - \gamma_{d,b_d}^m}{h_{(k,d),(0,b_d)}^m}\right),\end{aligned}$$

kde b_j je index bodu na krivke γ_j a nadobúda hodnoty

$$b_j = \begin{cases} 1 & \text{ak } \gamma_{k,0}^m = \gamma_{j,0}^m \\ n-1 & \text{ak } \gamma_{k,0}^m = \gamma_{j,n}^m. \end{cases}$$

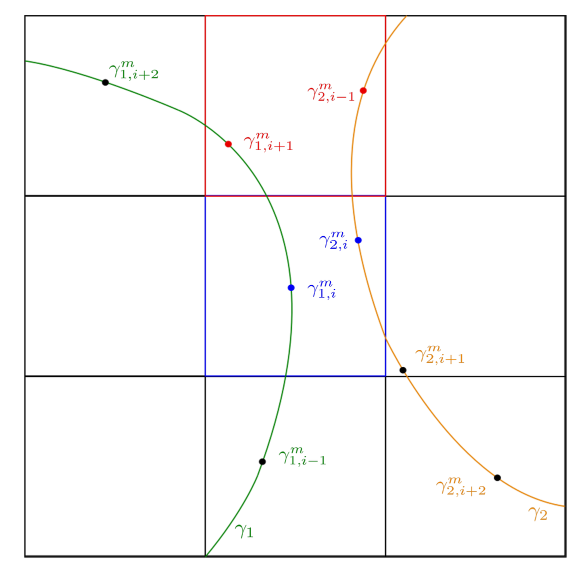
Vzdialenosť $h_{(k,j),(0,b_j)}^m = |\gamma_{k,0}^m - \gamma_{j,b_j}^m|$ a hodnota $w_{(k,c,d),(0,b_c,b_d)}$ taktiež závisí od viacerých kriviek, preto v tvare

$$\begin{aligned}w_{(k,c,d),(0,b_c,b_d)} &= (1-\lambda_0^m) g_2^{\gamma_c}(\gamma_{k,0}^m) g_2^{\gamma_d}(\gamma_{k,0}^m) \\ &- \lambda_0^m \nabla g_1(\gamma_{k,0}^m) \cdot \frac{(\gamma_{c,b_c}^m - \gamma_{d,b_d}^m)^{\perp}}{h_{(k,c),(0,b_c)}^m + h_{(k,d),(0,b_d)}^m}.\end{aligned}$$

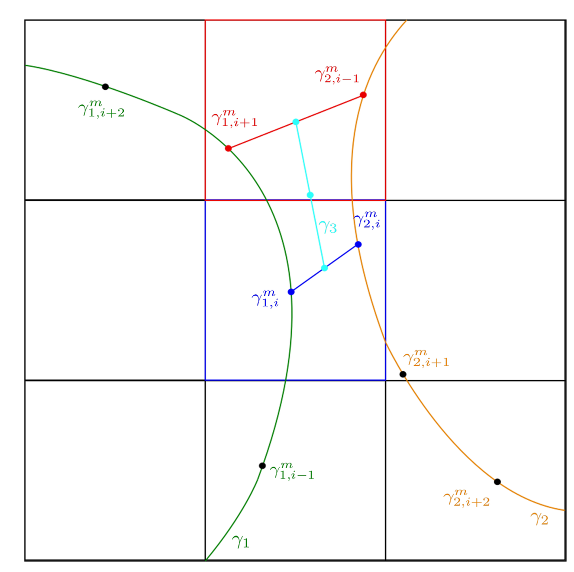
Rovnakým postupom upravíme aj výpočet pre koncový bod otvorenej krivky.

Vytvorenie siete kriviek

Majme dve krivky, ktoré sa súčasne vyvíjajú. Počas vývoja sa môže stať, že krivky na seba narazia, inak povedané stretnú sa v jednom pixeli. Situácia, kedy nájdeme aspoň dve dvojice rôznych bodov (jeden bod z jednej krivky, druhý bod z druhej krivky), pre nás signalizuje detekciu nastávajúcej topologickej zmeny, konkrétne vznik siete kriviek. To znamená, že musí vzniknúť nová krivka na rozhraní medzi dvomi pôvodnými krivkami a pôvodné krivky v mieste tohto rozhrania prerušíme. Novo vzniknutú krivku na rozhraní budeme ďalej označovať ako hraničnú krivku. Krivky, ktoré sa počas vývoja stretli označíme ako rodičovské pre novovzniknutú hraničnú krivku. Body hraničnej krivky získame vypočítaním priemeru dvojíc bodov, ktoré sa stretli v jednom pixeli.

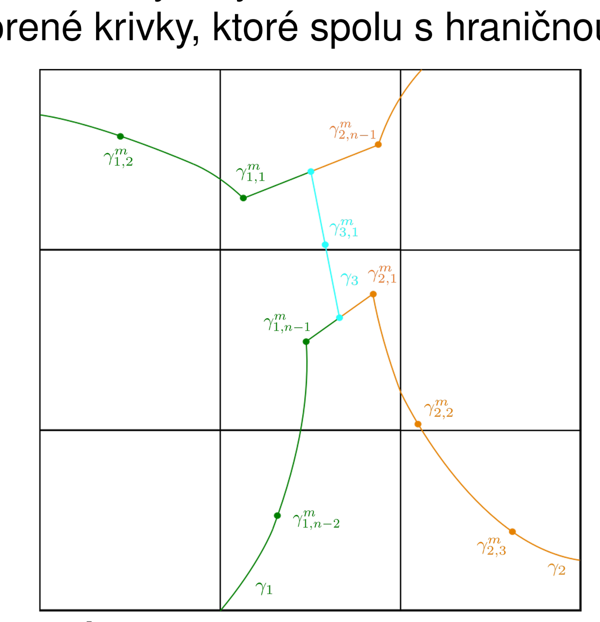


Ukážka, kedy je splnená podmienka pre vznik novej, hraničnej krivky.



Vznik novej krivky, stretnutím rodičovských kriviek γ_1 a γ_2, vznikla nová hraničná krivka γ_3.

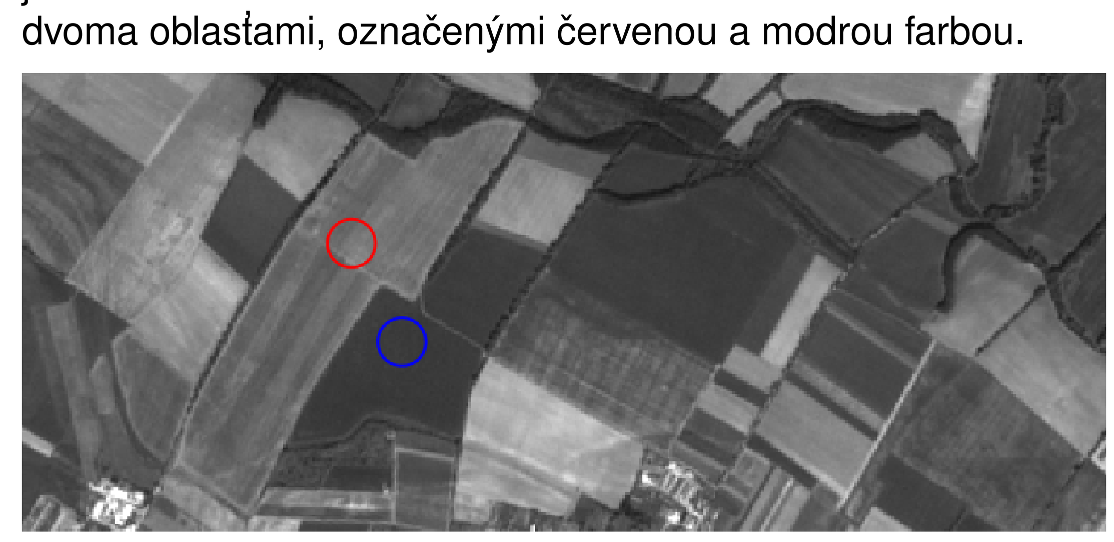
Pre každú rodičovskú krivku odstránime všetky body od prvého bodu, v ktorom sa rodičovské krivky stretli až po posledný nájdený bod spoločný bod. Dôležité je zanechať orientáciu krivky. Po tomto kroku musíme ešte každej rodičovskej krivke pridať začiatočný alebo koncový bod hraničnej krivky, vďaka čomu budú krivky v týchto bodoch totožné. Vzniknú nám tak dve otvorené krivky, ktoré spolu s hraničnou krivkou tvoria sieť.



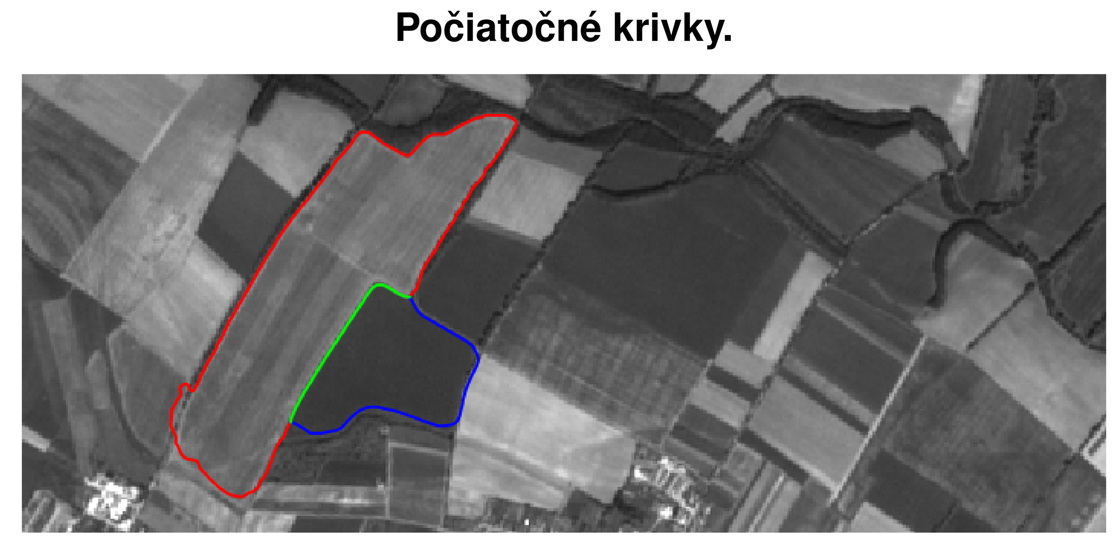
Úprava rodičovských kriviek γ_1 a γ_2.

Numerické experimenty

Na začiatku vyvíjame uzatvorené krivky, pričom pri stretnutí vzniká nová, hraničná krivka a následne sa všetky tri krivky vyvíjajú už ako otvorené krivky. Na konci vývoja tak získame jednoznačne určenú hranicu označenú zelenou farbou medzi dvoma oblasťami, označenými červenou a modrou farbou.



Počiatočné krivky.



Krivky v poslednom časovom kroku vývoja.