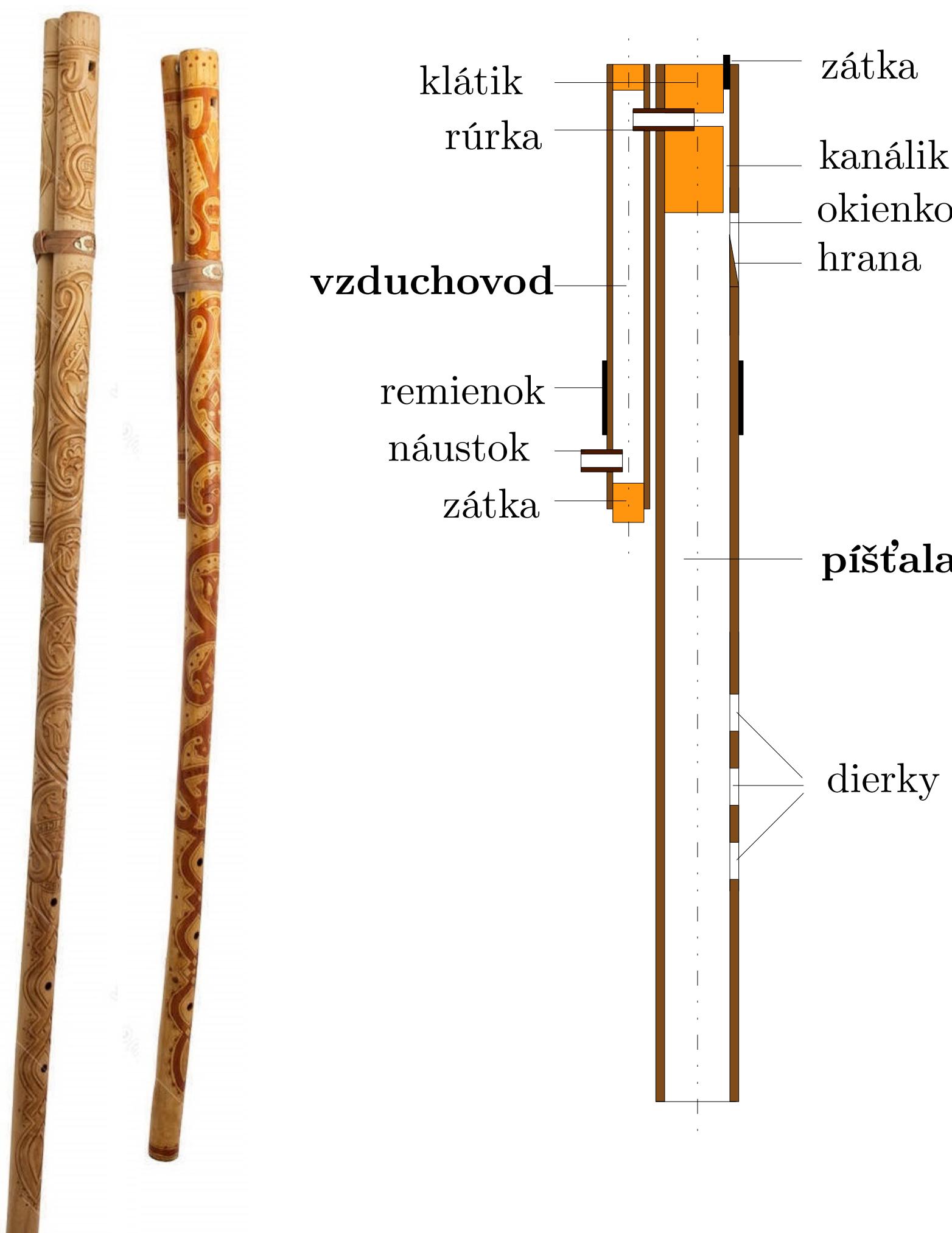


ANALÝZA VLASTNÝCH FREKVENCÍ DYCHOVÉHO HUDOBNÉHO NÁSTROJA – FUJARY

Lukáš Tomek

Čo je fujara

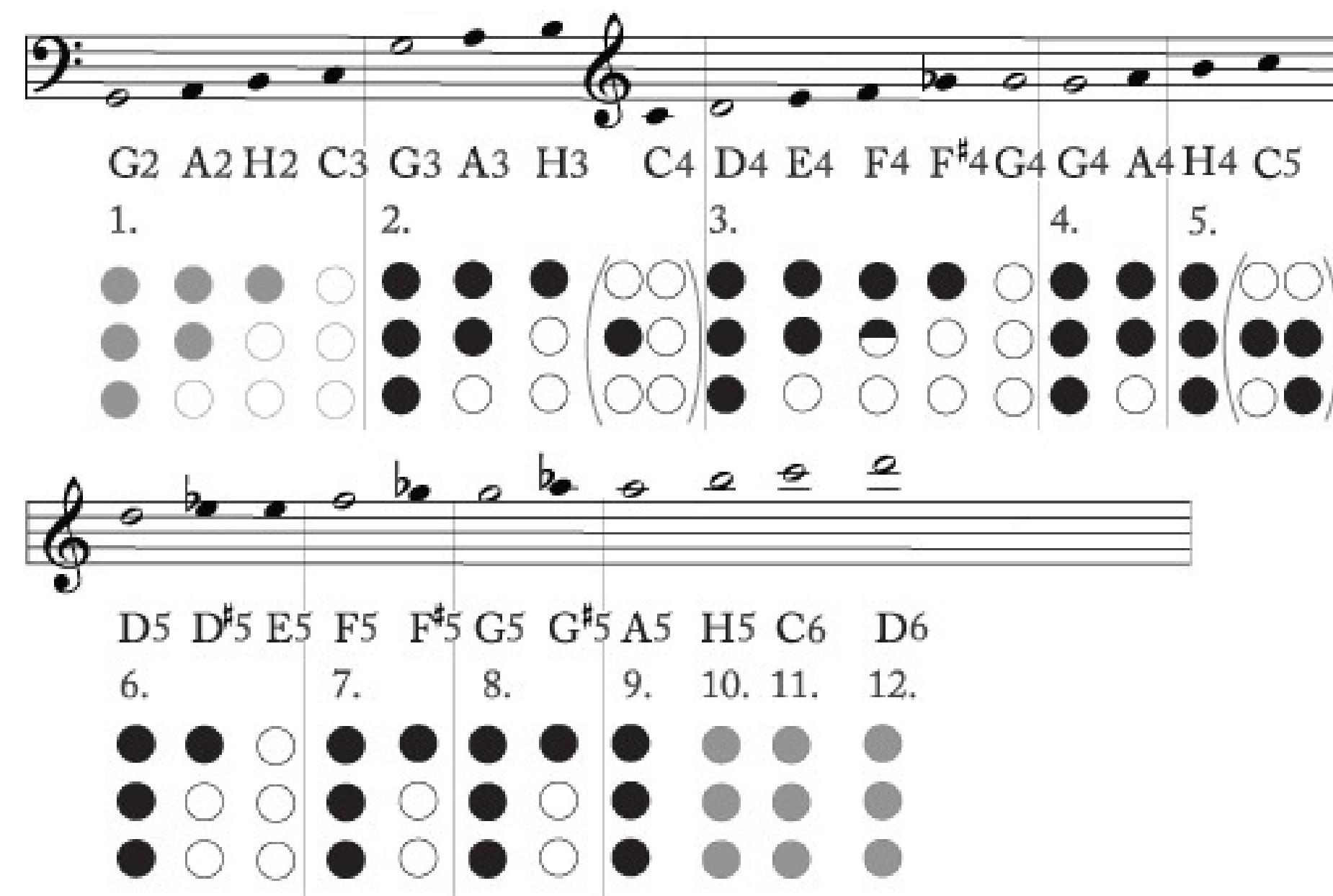
Fujara je tradičný slovenský ľudový nástroj. Skladá sa z dvoch trubíc – hlavnej **píšťaly** a kratšieho **vzduchovodu**. Fujara patrí k nástrojom s veľkým obsahom **vyšších harmonických frekvencií** a so svojou dĺžkou (približne 175 cm pre typické ladenie G-dur) je **najdlhšou** píšťalou tohto druhu **na svete**. Svoju zvukovou originalitou a výzdobou má fujara na Slovensku postavenie „kráľovského“ hudobného nástroja. Je symbolom slovenského národa, jeho kultúry a ľudovej tradície. Od roku 2008 je fujara a jej hudba zapísaná na zozname nehmotného kultúrneho dedičstva ľudstva **UNESCO**.



Ukážky typických fujárov a náčrt konštrukcie fujary.

Do fujary sa fúka cez náustok, vzduch prúdi vzduchovodom, rúrkou, kanálkom a dopadá na hranu, na ktorej sa „štiepi“ – striedavo prúdi von cez okienko a dnu do píšťaly, čím sa **rozkladá vzduchový stípec** a vzniká **zvuk**.

Fujara má **tri hmatové dierky** a dajú sa na nej zahrať dve kompletné oktavy v stupni G-dur (15 tónov G3 až G5) a niekoľko ďalších tónov. **Výška tónu** sa ovplyvňuje **odkryváním/zakrývaním** hmatových dierok a **silou fúkania**. Pri silnejšom fúknutí sa vo fujare vybudzujú **vyššie harmonické frekvencie**.



Prstoklady na pri hre na fujaru. Plný krúžok – zakrytá dierka, prázdný – odkrytá. Čísla označujú poradové číslo vyššej harmonickej.

Motivácia

Položa dierok, ich veľkosť a všetky ostatné **rozmer** fujary sa určujú podľa **empirických vzorcov** vytvorených na základe skúseností výrobcov fujár.

Základnou motívaciou je vytvorenie modelu, ktorý pre **zadanú geometriu** fujary dokáže automaticky **vypočítať** frekvencie tónov používaných pri hre na fujaru. Takýto model by mohol byť v budúcnosti použitý na vytvorenie **optimálnej geometrie** zabezpečujúcej **presnejšie ladenie** nástroja.

Matematický model

V diplomovej práci analyzujeme kmitanie vzduchu vo fujare a mimo nej. Základnou rovnicou akustiky je **vlnová rovnica**

$$\partial_t^2 P - c^2 \Delta P = 0$$

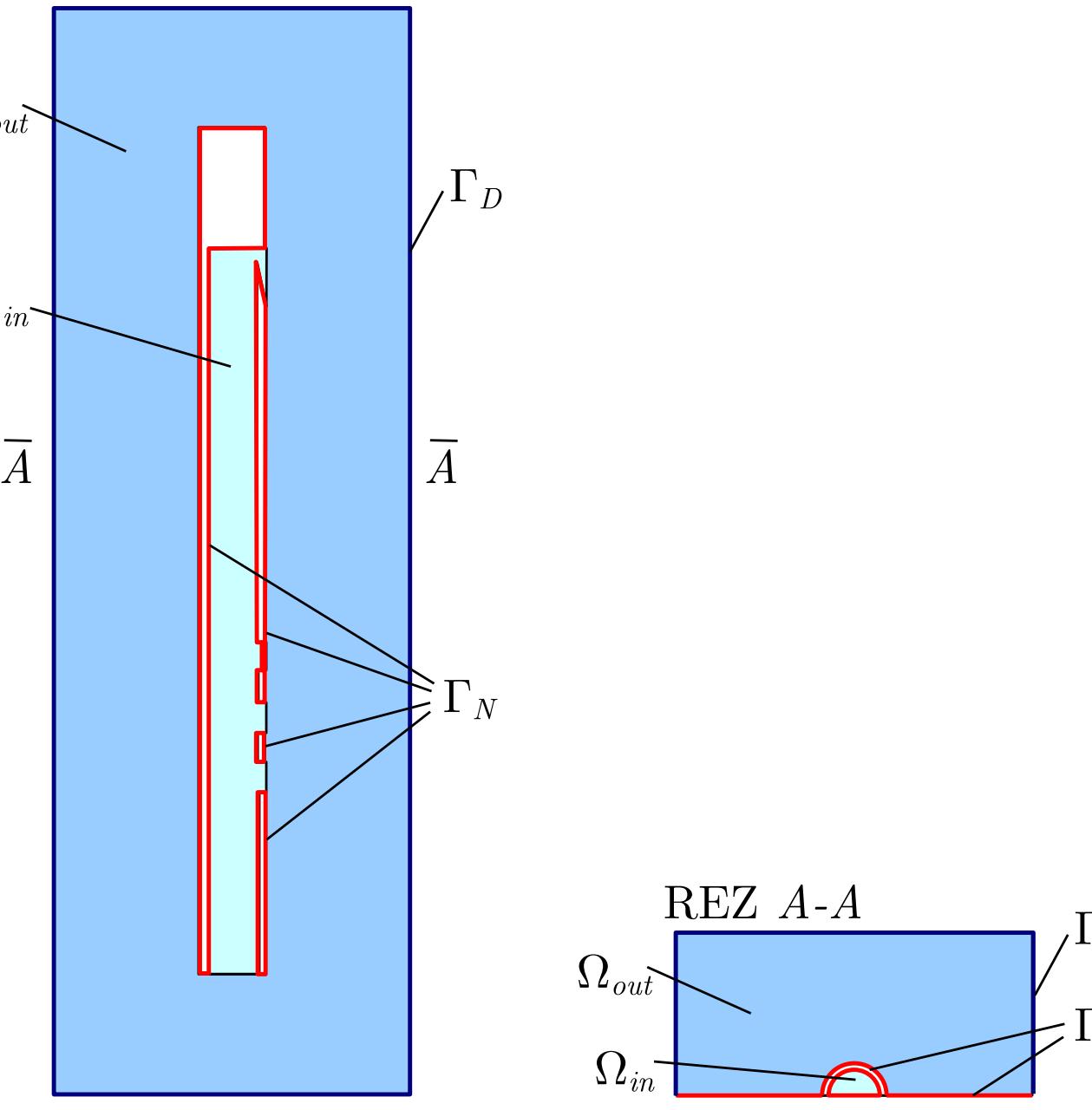
kde c je rýchlosť zvuku vo vzduchu. Neznámej funkcií $P(\mathbf{r}, t)$ sa hovorí **akustický tlak** (rozdiel tlaku voči atmosférickému tlaku). V akustike často hľadáme špeciálne riešenia, pri ktorých je časový priebeh akustického tlaku **harmonický**, čiže

$$P(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$$

Riešeniam tohto typu sa hovorí **stojaté vlny**. Vlnová rovnica vtedy prejde na tvar

$$\Delta p + \frac{c^2}{\omega^2} p = 0$$

ktorému sa hovorí **Helmholtzova rovnica**. Riešenia tejto rovnice sa nazývajú **módy**. Čísla ω sú vlastné kruhové frekvencie. **Vlastné frekvencie** sa počítajú ako $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Analýzou viacerých geometrií sme dospeeli záveru, že vhodným modelom je **rovná fujara bez vzduchovodu** a potrebný je **3D model** so zahrnutím **okolitého vzduchu**. Vďaka zrkadlovej **symetrii** fujary stačí modelovať len **polovicu vzduchu**. Helmholtzovu rovnicu riešime na oblasti $\Omega = \Omega_{in} \cup \Omega_{out}$, pričom Ω_{in} označuje vzduch vo fujare a Ω_{out} okolity vzduch.



Náčrt výpočtovej oblasti a okrajových podmienok v 2D reze.

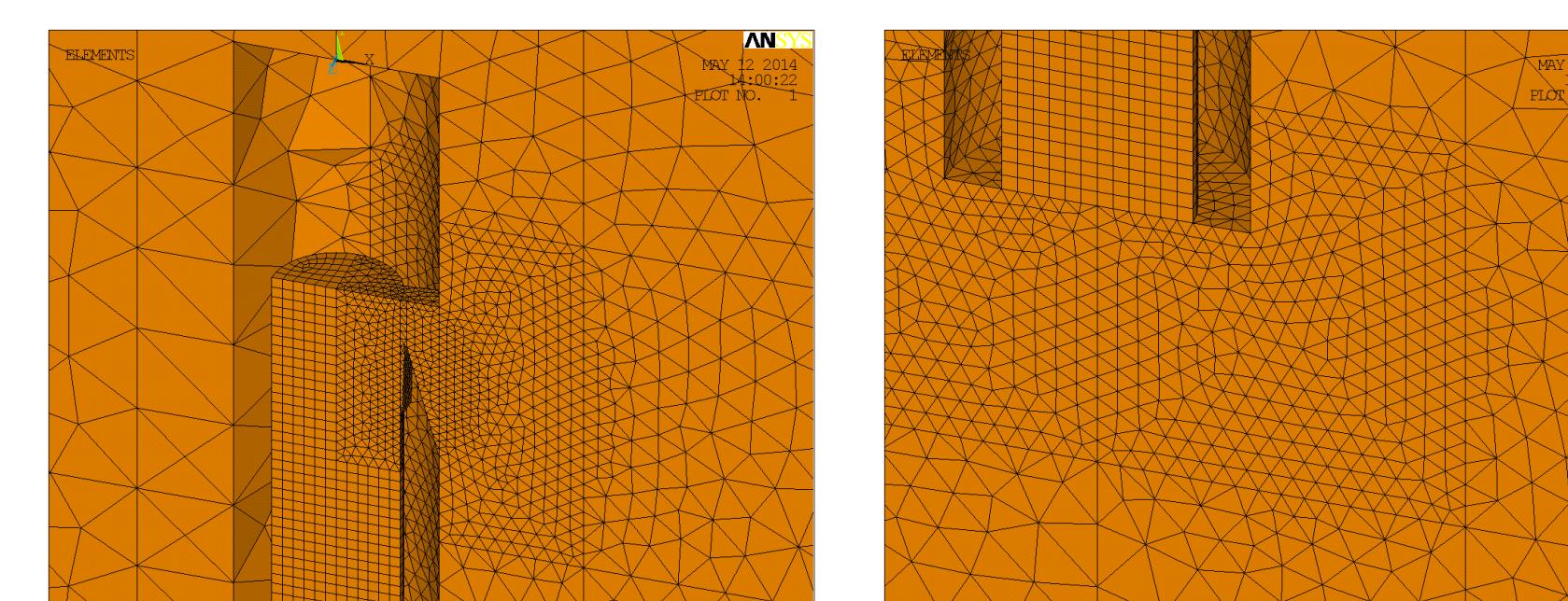
Na **vonkajšej hraniči** Γ_D okolitého vzduchu je akustický tlak blízky nule, preto na nej predpisujeme **nulovú Dirichletovu** okrajovú podmienku. Na **stenach** sa v akustike predpisuje **nulová Neumannova** okrajová podmienka (n je vonkajšia normálka ku hranici $\partial\Omega$).

$$p|_{\Gamma_D} = 0 \quad \Gamma_D \\ (\mathbf{n} \cdot \nabla p)|_{\Gamma_N} = 0 \quad \Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$$

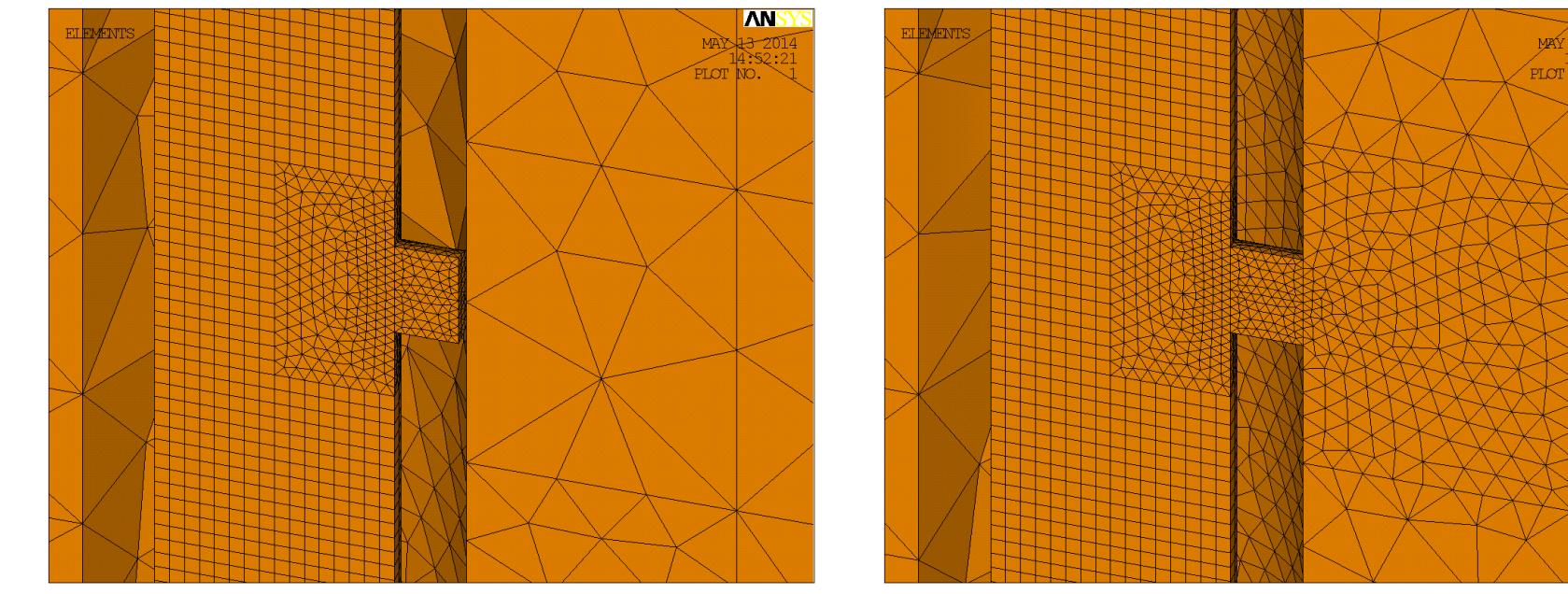
Zakrývanie dierok realizujeme geometricky ich zaslepovaním.

Numerický výpočet frekvencií fujary

Model vzduchu vo fujare a okolitého vzduchu bol vytvorený v programe **ANSYS Multiphysics** založenom na **metóde konečných prvkov**. Na diskretizáciu geometrie sa použili akustické prvky **FLUID30**. Vytvorený model je plne automatizovaný. Na vstupe sa zadajú **rozmer** a **rýchlosť zvuku** a program **automaticky** vypočíta všetky **frekvencie**.

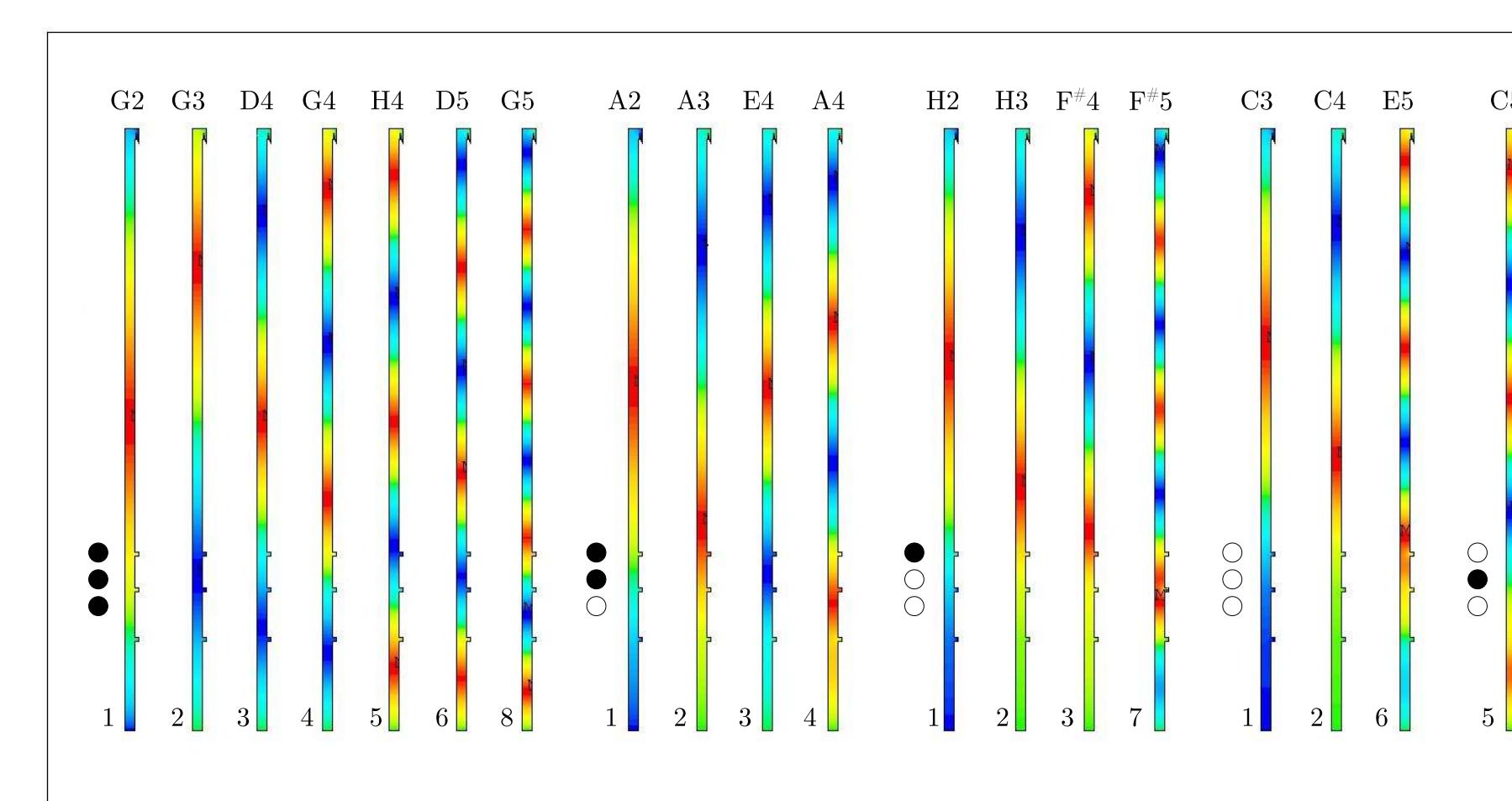


Detailed siete v hornej a dolnej časti fujary.

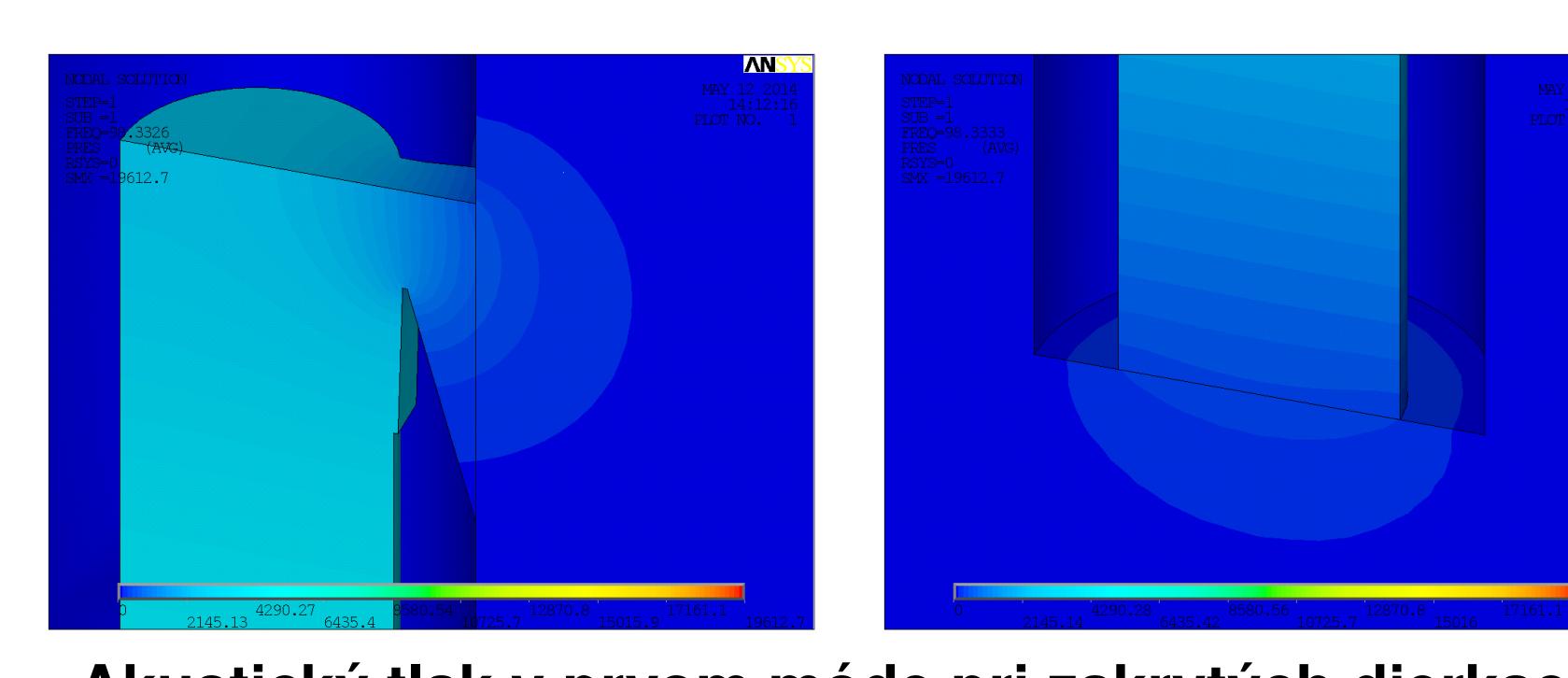


Detail siete pri odkrytej a zakrytej dierke.

Frekvencie boli počítané použitím **modálnej analýzy**. Skúmali sme 19 tónov: G2 až C3 (4 tóny) a 2 oktavy stupnice G-dur od G3 po G5 (15 tónov).



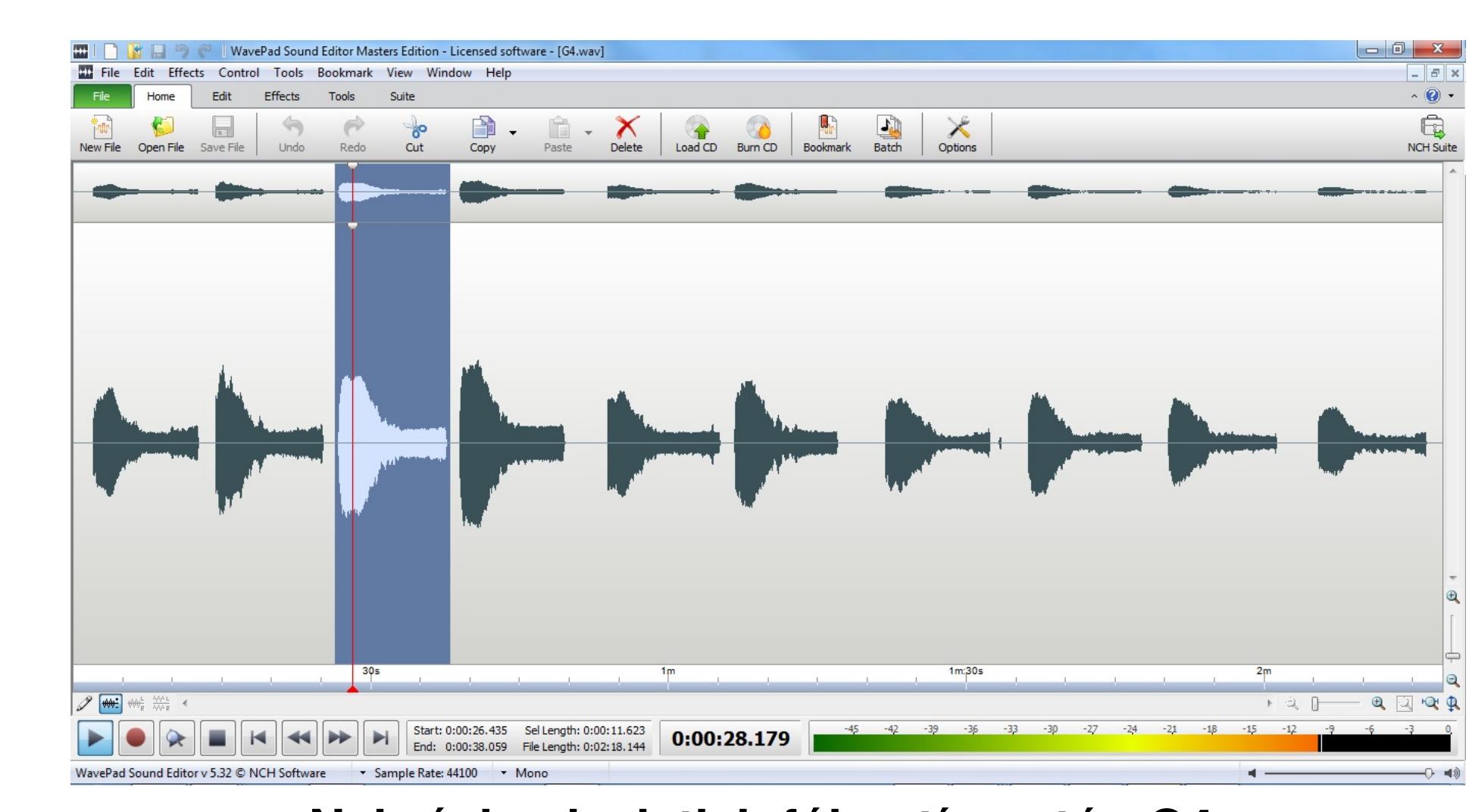
Módy pre všetky tóny, zoradené podľa prstokladov.



Akustický tlak v prvom móde pri zakrytých dierkach.

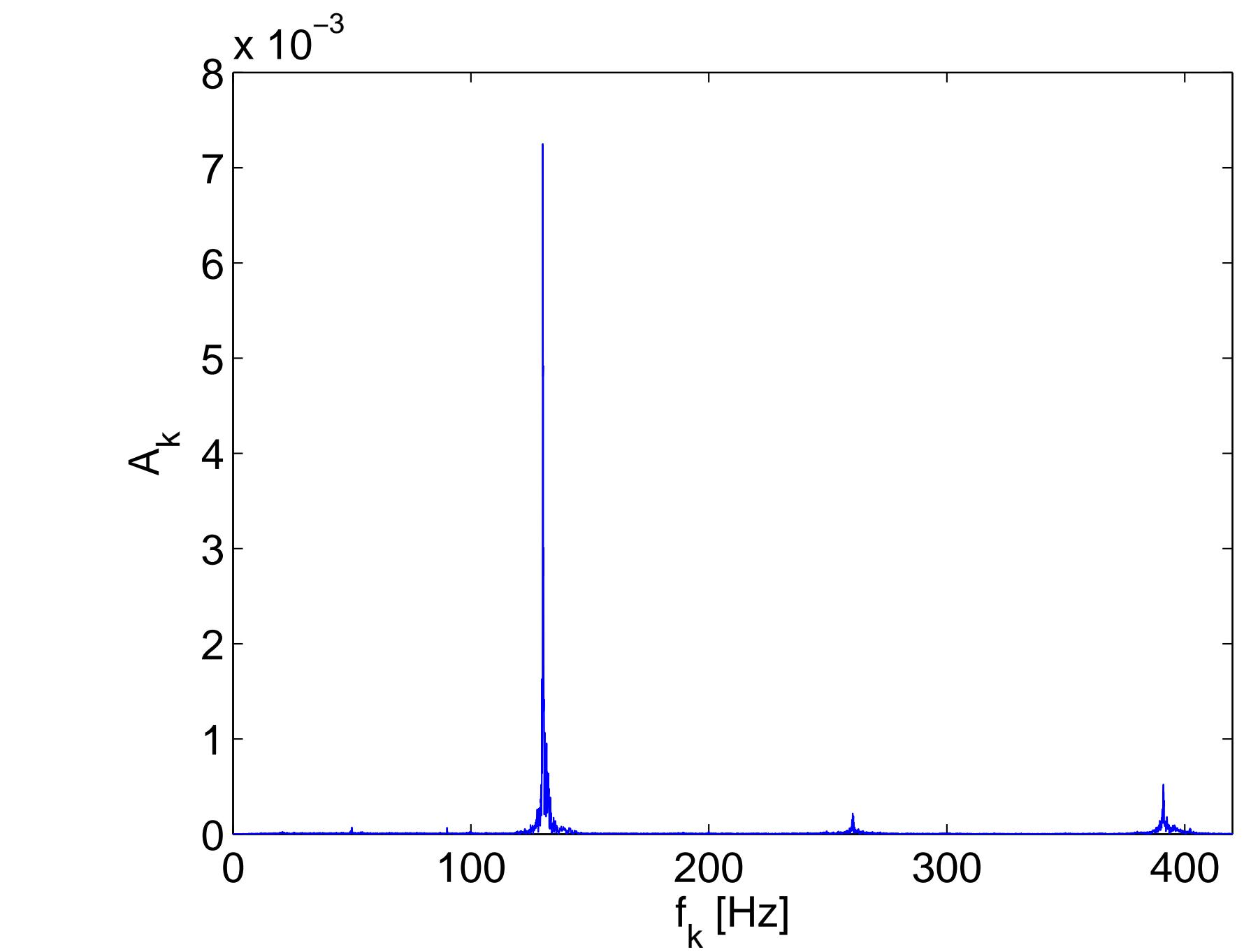
Experimentálne meranie frekvencií fujary

Cieľom experimentu bolo odmerať frekvencie tónov skutočnej fujary. Jednotlivé tóny boli nahrané v softvéri WavePad Sound Editor.



Nahrávka desiatich fúknutí pre tón G4.

Nahrávky boli analyzované v programe **Matlab**, pričom hlavným matematickým aparátom bola **diskrétna Fourierova transformácia** nahratého signálu, ktorá prevádzda nahratý signál na **frekvenčné spektrum**.

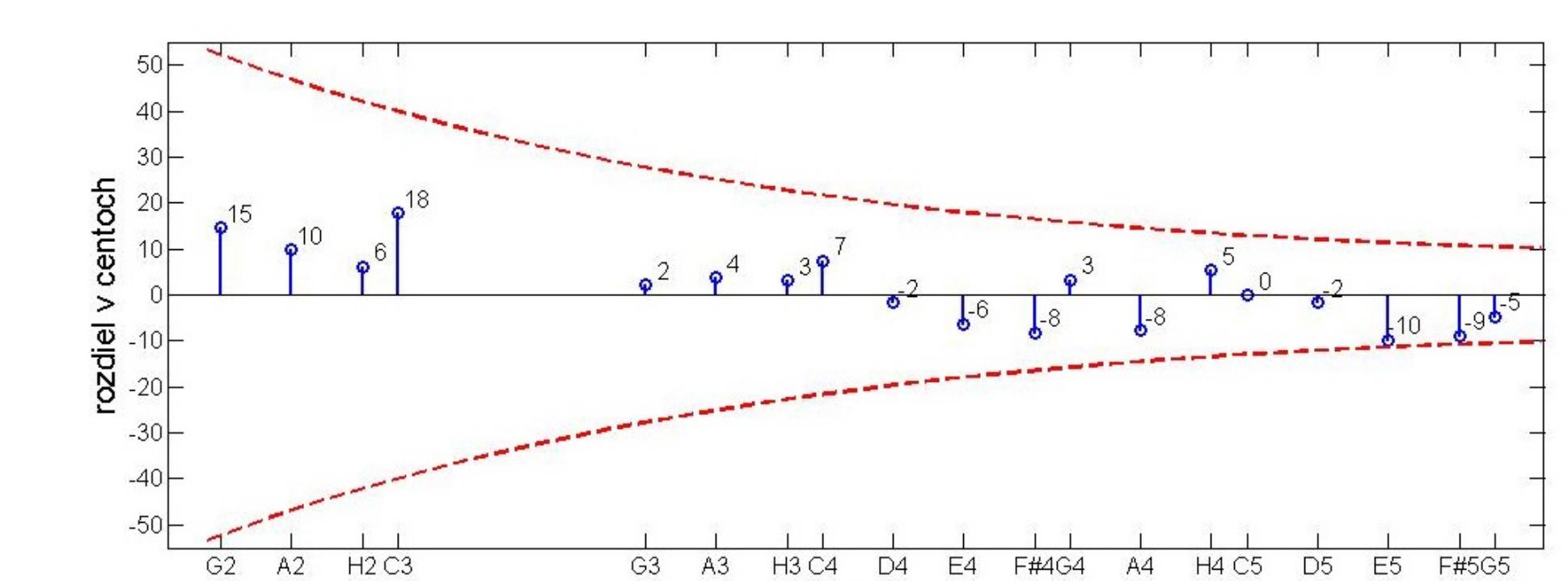


Frekvenčné spektrum jednej nahrávky tónu C3.

Porovnanie výsledkov

V nasledujúcej tabuľke a v grafe uvádzame porovnanie **numerický** vypočítaných frekvencií f_{num} a **experimentálne** namenaných frekvencií f_{exp} . Rozdiel d_C medzi f_{num} a f_{exp} počítame v centoch (jeden cent je stotina poltonu).

| Tón | G2 | A2 | H2 | C3 | D3 | E3 | F#3 | |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| f_{num} [Hz] | 98,22 | 110,07 | 121,03 | 131,17 | | | | |
| f_{exp} [Hz] | 97,39 | 109,44 | 120,60 | 129,83 | | | | |
| d_C [cent] | 14,6 | 9,9 | 6,2 | 17,7 | | | | |
| Tón | G3 | A3 | H3 | C4 | D4 | E4 | F#4 | |
| f_{num} [Hz] | 196,31 | 219,50 | 241,67 | 261,18 | 294,36 | 326,57 | 359,52 | |
| f_{exp} [Hz] | 196,06 | 219,01 | 241,22 | 260,07 | 294,64 | 327,77 | 361,23 | |
| d_C [cent] | 2,2 | 3,8 | 3,2 | 7,4 | -1,6 | -6,3 | -8,2 | |
| Tón | G4 | A4 | H4 | C5 | D5 | E5 | F#5 | G5 |
| f_{num} [Hz] | 393,71 | 426,95 | 492,88 | 526,68 | 591,02 | 637,43 | 714,26 | 790,52 |
| f_{exp} [Hz] | 392,96 | 428,85 | 491,37 | 526,72 | 591,57 | 641,05 | 717,93 | 792,65 |
| d_C [cent] | 3,3 | -7,7 | 5,3 | -0,1 | -1,6 | -9,8 | -8,9 | -4,7 |



Porovnanie výsledkov ANSYSu a experimentu.

Prerušované čiary označujú schopnosť ľudského ucha rozlísiť dva tóny blízkej frekvencie. Ak sa dva tóny líšia menej, ľudské ucho ich považuje za totožné. Čiary sa s rastúcou frekvenciou zbiehajú. To znamená, že ľudské ucho viac toleruje rozladenú basu, než (rovnako) rozladené husle.

Všetky **rozdiely** frekvencií sú **pod hranicou počutelnosti**. To znamená, že **model** je **použiteľný** na hľadanie **optimálnej geometrie**, ktorá zabezpečí **presnejšie naladenie fujary**.



Pedagóg: doc. Ing. Vladimír Kutiš, PhD.

Poslucháč: Mgr. Lukáš Tomek

Akademický rok: 2013/2014

Študijný program: 9.1.9 aplikovaná matematika

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Analýza vlastných frekvencií dychového hudobného nástroja – fujary