Apuntes Quantum

Lukas Wolff

1. Qubit

Un qubit se puede definir como:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \tag{1}$$

Donde se debe cumplir por probabilidad que:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{2}$$

Ahora bien, se puede tener una superposicion de 2 o mas qubits, por ejemplo:

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle \tag{3}$$

Por lo tanto, el espacio lineal de n qubits es:

$$|\psi\rangle = \sum \alpha_i |i\rangle \tag{4}$$

1.1. Angulos del qubit

Un qubit se puede representar en una esfera de radio 1, conocida como esfera de Bloch. Para esto, se definen dos angulos θ y ϕ:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{\mathrm{i}\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \tag{5}$$

Donde, recordar que se un numero imaginario $a + bi$, se puede definiri como:

$$a + bi = re^{\mathrm{i}\phi} \quad \text{con} \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{y} \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \tag{6}$$

2. Dual

Sea un qubit base:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \tag{7}$$

El dual de este qubit es:

$$\langle\psi| = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix} = \alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1| \tag{8}$$

Donde la notacion * denota el conjugado complejo, es decir, si $\alpha = a+bi$, entonces $\alpha^* = a-bi$. El espacio lineal de los duales es:

$$\langle\psi| = \sum \alpha_i^* \langle i| \tag{9}$$

3. Producto interno escalar o bra-ket

Sea el qubit:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Y el dual:

$$\langle\phi| = \begin{pmatrix} w_1^* & w_2^* \end{pmatrix} \tag{11}$$

El producto interno escalar entre un qubit y un dual es:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \sum_i w_i^* v_i = w_1^* v_1 + w_2^* v_2 \tag{12}$$

Donde se cumple que:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^* \tag{13}$$

Si dos vectores son ortogonales, se cumple que:

$$\langle\phi|\psi\rangle = 0 \tag{14}$$

Y si es un vector consigo mismo, se cumple que:

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \tag{15}$$

4. Estados ortogonales

Existen algunos estados que son ortogonales entre si, y conocidos como estados base. Estos son:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + \mathrm{i}|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - \mathrm{i}|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \tag{18}$$

5. Operadores

Los operadores son matrices que actuan sobre los qubits, generando una rotacion del estado, o una transformacion del mismo. Algunos operadores basicos son:

- Operador identidad:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

- Operador X (NOT):

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

- Operador Y:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

- Operador Z:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

- Operador Hadamard:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{23}$$