Apuntes Quantum

Lukas Wolff

1. Qubit

Un qubit se puede definir como:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \tag{1}$$

Donde se debe cumplir por probabilidad que:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{2}$$

Ahora bien, se puede tener una superposicion de 2 o mas qubits, por ejemplo:

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle \tag{3}$$

Por lo tanto, el espacio lineal de n qubits es:

$$|\psi\rangle = \sum \alpha_i|i\rangle \tag{4}$$

1.1. Angulos del qubit

Un qubit se puede representar en una esfera de radio 1, conocida como esfera de Bloch. Para esto, se definen dos angulos θ y ϕ:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{\mathrm{i}\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \tag{5}$$

Donde, recordar que se un numero imaginario $a + bi$, se puede definiri como:

$$a + bi = re^{\mathrm{i}\phi} \quad \text{con} \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{y} \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \tag{6}$$

1.2. Bases

Las bases son conjuntos de qubits ortogonales entre si, que permiten representar cualquier qubit como una combinacion lineal de los qubits de la base. Algunas bases comunes son:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$|+y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + \mathrm{i}|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad |-y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - \mathrm{i}|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \tag{9}$$

2. Dual

Sea un qubit base:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \tag{10}$$

El dual de este qubit es:

$$\langle\psi| = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix} = \alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1| \tag{11}$$

Donde la notacion * denota el conjugado complejo, es decir, si $\alpha = a+bi$, entonces $\alpha^* = a-bi$. El espacio lineal de los duales es:

$$\langle\psi| = \sum \alpha_i^* \langle i| \tag{12}$$

3. Producto interno escalar o bra-ket

Sea el qubit:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Y el dual:

$$\langle\phi| = \begin{pmatrix} w_1^* & w_2^* \end{pmatrix} \tag{14}$$

El producto interno escalar entre un qubit y un dual es:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \sum_i w_i^* v_i = w_1^* v_1 + w_2^* v_2 \tag{15}$$

Donde se cumple que:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^* \tag{16}$$

Si dos vectores son ortogonales, se cumple que:

$$\langle\phi|\psi\rangle = 0 \tag{17}$$

Y si es un vector consigo mismo, se cumple que:

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \tag{18}$$

4. Producto externo o ket-bra

Sea el qubit:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Y el dual:

$$\langle\phi| = \begin{pmatrix} w_1^* & w_2^* \end{pmatrix} \tag{20}$$

El producto externo entre un qubit y un dual es:

$$|\psi\rangle\langle\phi| = \begin{pmatrix} v_1 w_1^* & v_1 w_2^* \\ v_2 w_1^* & v_2 w_2^* \end{pmatrix} \tag{21}$$

Lo cual es la matriz de proyeccion del qubit $|\psi\rangle$ sobre el dual $\langle\phi|$.
Luego, para cualquier base se cumple que:

$$I = \sum_i |i\rangle\langle i| \tag{22}$$

Donde I es el operador identidad, por ejemplo, para la base computacional:

$$I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

5. Operadores

Los operadores son matrices que actuan sobre los qubits, generando una rotacion del estado, o una transformacion del mismo. Algunos operadores basicos son:

- Operador identidad:
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

- Operador X (NOT):
$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

- Operador Y:
$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

- Operador Z:
$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

- Operador Hadamard:
$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

5.1. Operador NOT de una base cualquiera

Para calcular el operador NOT de una base cualquiera, se debe conocer los vectores de la base. Sea la base:

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad |v\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \tag{29}$$

El operador NOT en esta base se define como:

$$X_{uv} = |u\rangle\langle v| + |v\rangle\langle u| = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^* & d^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & b^* \end{pmatrix} \tag{30}$$

5.2. Operador unitario

Un operador unitario es aquel que cumple que:

$$U^{\dagger}U = UU^{\dagger} = I \tag{31}$$

Donde $U^{\dagger}$ es el conjugado transpuesto de U. Los operadores unitarios son importantes en la mecanica cuantica, ya que representan las transformaciones que pueden sufrir los estados cuanticos sin perder informacion. Se cumple que:

$$\langle\psi|U^{\dagger}U|\psi\rangle = \langle\psi|I|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1 \tag{32}$$

5.3. Operaciones

La operacion de un operador sobre un qubit se representa como:

$$|\psi\rangle \rightarrow U = U|\psi\rangle \tag{33}$$