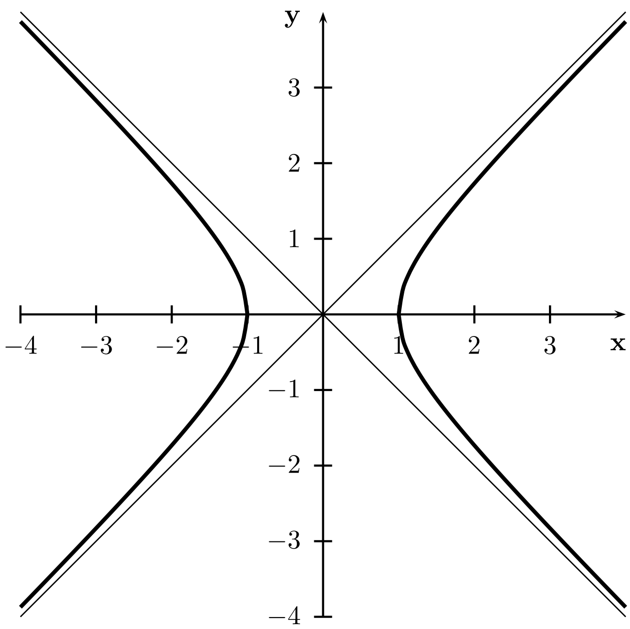
Eine Drehung der Einheits-Hyperbel $\mathbf{x^2 - y^2 = 1}$ und Hyperbelfunktionen

Holger Horn

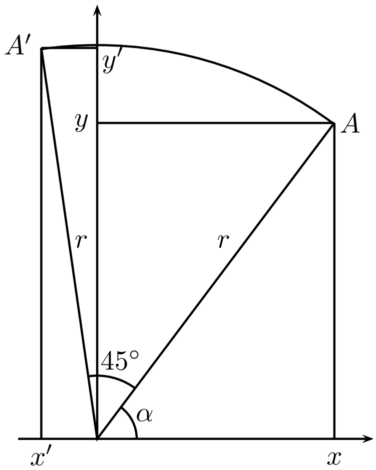
22. Dezember 2006

Aus der allgemeinen Gleichung einer Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, bei der die Hauptscheitel $(\pm a|0)$ sind und die Asymptoten durch $(\pm a| \pm b)$ gehen, erhält man für $a = b = 1$ die „Einheits"-Hyperbel:



Durch Drehung der Asymptoten und der Hyperbel um O um 45° erhält man eine Hyperbel, wie sie aus der Analysis geläufig ist. Gesucht ist ihre Gleichung (vielleicht $y = \frac{1}{x}$?).

1 „Drehgleichungen“ für Drehung um $O(0|0)$ um 45°



Aus dem Bild, in dem A um O um 45° gedreht wurde, liest man ab:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}; \quad \cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\sin(45° + \alpha) = \frac{y'}{r}; \quad \cos(45° + \alpha) = \frac{x'}{r}$$

Mit den Additionstheoremen der Winkelfunktionen und $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ erhält man:

$$\frac{y'}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha + \sin\alpha)$$

$$\frac{x'}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha - \sin\alpha)$$

Durch Multiplikation mit r ergeben sich die „Drehgleichungen“:

$$\boxed{x' = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \quad \wedge \quad y' = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y)}$$

2 Drehung der Einheitshyperbel

Hyperbelgleichung: $x^2 - y^2 = 1 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$, betrachte zunächst die obere Hälfte des Schaubildes: „+“ und setze in die addierten und subtrahierten Drehgleichungen ein:

$$y' + x' = \frac{2}{\sqrt{2}}x; \quad y' - x' = \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2 - 1}$$

Durch Quadrieren und ineinander Einsetzen erhält man:

$$\begin{aligned} y'^2 - 2x'y' + x'^2 &= 2x^2 - 2 \\ &= y'^2 + 2x'y' + x'^2 - 2 \end{aligned}$$

Somit

$$-4x'y' = -2 \Longrightarrow \boxed{y' = \tfrac{1}{2x'}}$$

Für die untere Hälfte des Schaubildes der Einheitshyperbel („ – “) ergeben sich dieselben Gleichungen wie oben, nur sind x’ und y’ vertauscht, was am Endergebnis nichts ändert.
Die Hyperbel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}\frac{1}{x}$ entsteht aus der Hyperbel mit $y = \frac{1}{x}$ durch „Stauchung“ in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$; da die Hyperbel symmetrisch zur ersten Winkelhalbierenden ist, ist dies gleichzeitig eine Stauchung in x-Richtung mit demselben Faktor! (Eine erstaunliche Eigenschaft dieser Hyperbel! - aller Hyperbeln?) [Forme in $2xy = 1$ um und vertausche x, y! Für welche weiteren Hyperbeln gilt also diese schöne Eigenschaft?]
[Betrachte die Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ und drehe so, dass die Asymptote durch $(a|b)$ auf die y-Achse abgebildet wird. Allgemein dreht man um $O(0|0)$ um den Winkel φ durch:

$$\boxed{\bar{x} = x\cos\varphi - y\sin\varphi \quad \wedge \quad \bar{y} = x\sin\varphi + y\cos\varphi}$$

(Für $\varphi = 45°$ ergeben sich die oben verwendeten Gleichungen.)
Nach der Drehung entsteht eine Hyperbel mit einer schrägen Asymptote; solche Funktionen haben wir in den gebrochen-rationalen Funktionen gefunden, deren Zählergrad um eins größer als der Nennergrad ist.]

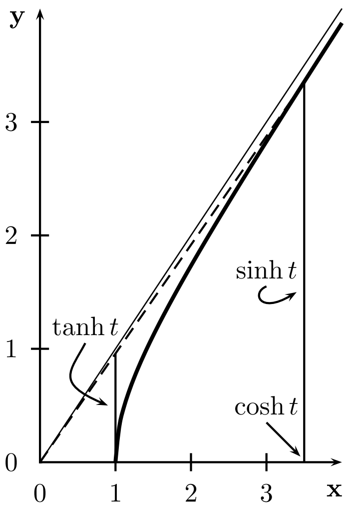
3 Hyperbelfunktionen und ihre Beziehung zur Einheitshyperbel

Die Hyperbelfunktionen haben gewisse Analogien zu den Winkelfunktionen (vgl. die Abbildung unten links mit der Definition der Winkelfunktionen im Einheitskreis). Sie sind folgendermaßen definiert:

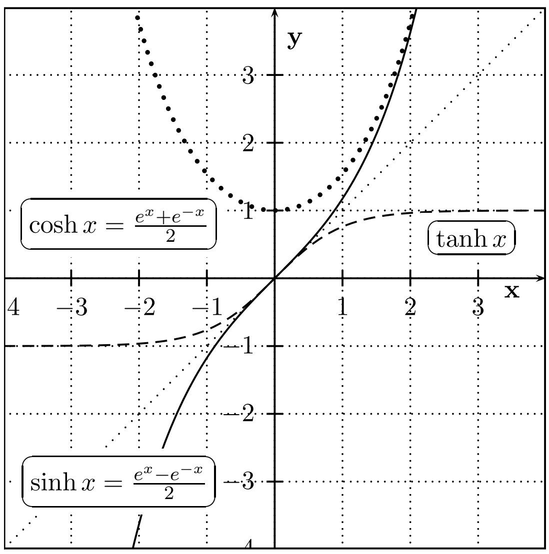
$$\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{(Kettenlinie)} \\
\tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}
\end{aligned}$$

Dem trigonometrischen Pythagoras entspricht: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Damit ergibt sich ein Bezug zur Einheitshyperbel: Setzt man $x = \cosh t$ und $y = \sinh t$, so hat man eine Parameterdarstellung der Hyperbel, wobei sich uns die Bedeutung des Parameters noch erschließen wird. Betrachte dazu das Bild; ferner lässt sich aus dem Bild mit dem 2. Strahlensatz entnehmen:

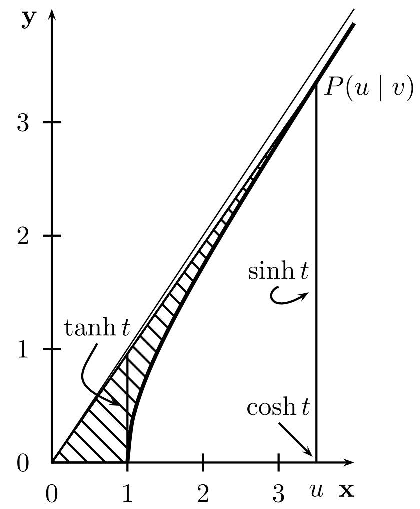
$$\frac{\tanh t}{1} = \frac{\sinh t}{\cosh t}$$



Man beachte die 1,5-fache Längeneinheit in y-Richtung!



Die Graphen der Hyperbelfunktionen



Inhalt A der schraffierten Fläche in obigem Bild. Die Fläche wird durch die Gerade OP (Steigung ist tanh t), die x-Achse und die Einheitshyperbel begrenzt.

$$\begin{aligned} A &= A_\triangle - \int_1^u \sqrt{x^2-1}dx \\ &= \frac{1}{2}u\sqrt{u^2-1} - \left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right]_1^u \qquad \text{(vgl. Formelsammlung)} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\boxed{A = \tfrac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right) \qquad (u>0)}$$

Nun lässt sich der Parameter t deuten:

$$\begin{aligned} u = \cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2} \quad &\Longrightarrow \quad 2u = e^t + e^{-t} \quad | \cdot e^t \\ \Longrightarrow 2ue^t = e^{2t}+1 \quad &\Longrightarrow \quad e^{2t} - 2ue^t + 1 = 0 \\ \Longrightarrow e^t = u \pm \sqrt{u^2-1} \quad &\Longrightarrow \quad t = ln\left(u \pm \sqrt{u^2-1}\right) \end{aligned}$$

Ergebnis: Der Parameter t ist das Doppelte der zugehörigen schraffierten Fläche!
Überlege, wie mit ± im Ergebnis für t umzugehen ist; welches Zeichen gilt?
[Übung: Werte das Integral ohne Benutzung der Formelsammlung aus!]