

# Задание 4 по курсу "Вычислительная математика"

Лукашевич Илья, 792 группа

11 октября 2019 г.

## Теоретическая задача 4.1

Итерационный метод Якоби применяется для решения линейной системы с трехдиагональной матрицей  $A$ . Диагональные элементы ( $i = j$ ) равны 4, элементы на 2-ух ближайших диагоналях ( $|i - j| = 1$ ) равны 1. Найдите число итераций, нужное для достижения точности  $10^{-6}$  в  $\infty$  норме, если известно, что для начального приближения  $\|x - x_0\|_\infty < 10$ , где  $x$  — точное решение системы.

**Решение.**

Воспользуемся достаточным условием сходимости итерационного метода:

$$\|e^k\| = \|S^k e^0\| \leq \|S\|^k \|e^0\|,$$

где  $e^k$  — вектор ошибки решения на  $k$ -ом шаге,  $e^0$  — вектор ошибки при начальном приближении, то есть в данной задаче  $e^0 = x - x_0$ .

Тогда оценим число итераций, необходимое для достижения заданной точности ( $\varepsilon = 10^{-6}$ ):

$$\|S\|^k \|e^0\| \leq \varepsilon \Rightarrow k \geq \frac{\log(\varepsilon / \|e^0\|)}{\log \|S\|} > \frac{\log(10^{-7})}{\log \|S\|}.$$

В итерационном методе Якоби  $S = -D^{-1}(L + U)$ , где  $D$  — диагональная часть матрицы  $A$ ,  $L$ ,  $U$  — строго нижнетреугольная и верхнетреугольная части матрицы  $A$  соответственно. Матрица  $-D^{-1}$  имеет вид

$$-D^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & & & \\ & -1/4 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица  $S = -D^{-1}(L + U)$  является трехдиагональной с элементами главной диагонали, равными 0, при этом элементы на двух ближайших диагоналях равны  $-1/4$ . Тогда имеем

$$\|S\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, искомое число итераций можно оценить как

$$k > \frac{\log(10^{-7})}{\log \|S\|} = \frac{\log(10^{-7})}{\log(1/2)} \approx 23,2 \Rightarrow k_{\min} = 24.$$

Следовательно, для достижения необходимой точности нужно не менее 24 итераций.