Задание 1 по курсу "Вычислительная математика"

Лукашевич Илья, 792 группа

21 сентября 2019 г.

Теоретическая задача 1.3

Пусть $A = I + \alpha uu^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $u \in \mathbb{C}^n$, $\|u\|_2 = 1$. Найдите все α, при которых матрица A будет унитарной.

Решение.

Найдем эрмитово-сопряженную матрицу для матрицы A:

$$A^* = (I + \alpha uu^*)^* = I^* + (\alpha uu^*)^* = I + \alpha^*(uu^*) = I + \overline{\alpha} uu^*.$$

Найдем произведение AA^*:

$$\begin{gathered}AA^* = (I + \alpha uu^*)(I + \overline{\alpha} uu^*) = I + \overline{\alpha} uu^* + \alpha uu^* + \alpha uu^* \overline{\alpha} uu^* = \\ = I + (\alpha + \overline{\alpha})uu^* + \alpha\overline{\alpha} uu^* uu^* = I + (\alpha + \overline{\alpha})uu^* + |\alpha|^2 \|u\|_2^2 uu^* = \\ = I + (\alpha + \overline{\alpha} + |\alpha|^2)uu^*.\end{gathered} \tag{1}$$

По определению, матрица A называется унитарной, если выполнено условие $A^{-1} = A^*$. Тогда $AA^* = AA^{-1} = I$. Следовательно, должно выполняться условие $\alpha + \overline{\alpha} + |\alpha|^2 = 0$. Обозначим $Re(\alpha) = a$, $Im(\alpha) = b$. Тогда получаем, что

$$\begin{gathered}a + bi + a - bi + a^2 + b^2 = 0, \\ 2a + a^2 + b^2 = 0, \\ b = \pm\sqrt{-a(a+2)}.\end{gathered} \tag{2}$$

Понятно, что подкоренное выражение должно быть неотрицательно, следовательно $a \in [-2, 0]$. Таким образом, матрица A будет унитарной, если для α выполнено:

$$\begin{cases} Re(\alpha) \in [-2, 0], \\ Im(\alpha) = \pm\sqrt{-Re(\alpha)(Re(\alpha) + 2)}. \end{cases} \tag{3}$$