Задание 2 по курсу "Вычислительная математика"

Лукашевич Илья, 792 группа

28 сентября 2019 г.

Теоретическая задача 2.2

Пусть B — действительная квадратная невырожденная матрица. Используя сингулярное разложение, выразите число обусловленности матрицы $A = B^T B$ в 2-норме через число обусловленности матрицы B в 2-норме.

Решение.

Используем сингулярное разложение матрицы B для нахождения второй нормы матрицы B и $B^T B$:

$$
\begin{gathered}
B = U\Sigma V^T,\ B^T B = V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T, \\
\|B\|_2 = \max\sqrt{\lambda_k(B^T B)} = \sigma_1, \\
\|B^T B\|_2 = \max\sqrt{\lambda_k(B^T B B^T B)} = \sigma_1^2.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Посчитаем аналогично для матрицы B^{-1}:

$$
\begin{gathered}
B^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T,\ (B^{-1})^T B^{-1} = U\Sigma^{-1}V^T V\Sigma^{-1}U^T = U\Sigma^{-2}U^T, \\
(B^T B)^{-1} = B^{-1}(B^T)^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T U\Sigma^{-1}V^T, \\
\|B^{-1}\|_2 = \max\sqrt{\lambda_k((B^{-1})^T B^{-1})} = \frac{1}{\sigma_n}, \\
\|(B^T B)^{-1}\|_2 = \max\sqrt{\lambda_k(V\Sigma^{-2}V^T V\Sigma^{-2}V^T)} = \max\sqrt{\lambda_k(V\Sigma^{-4}V^T)} = \frac{1}{\sigma_n^2}.
\end{gathered} \tag{2}
$$

Таким образом,

$$
\begin{gathered}
\operatorname{cond}(B) = \|B^{-1}\|_2\|B\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}, \\
\operatorname{cond}(B^T B) = \|(B^T B)^{-1}\|_2\|B^T B\|_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_n^2}, \\
\operatorname{cond}(B^T B) = (\operatorname{cond}(B))^2.
\end{gathered} \tag{3}
$$

Получили, что число обусловленности матрицы $A = B^T B$ в 2-норме равно квадрату числа обусловленности матрицы B в 2-норме.