Теоретическое задание № 9.2 по курсу "Вычислительная математика"

Лукашевич Илья, 792 группа

18 ноября 2019 г.

Теоретическая задача 9.2

1. Оценить минимальное число N разбиений отрезка для вычисления заданного интеграла по составной квадратурной формуле трапеций, обеспечивающее точность 10^{-4}:
$$(\text{а})\ I = \int_0^1 e^{-x^2}dx,\ \ (\text{б})\ I = \int_0^1 \sin(x^2)dx.$$

Решение.
Погрешность метода трапеций оценивается как:

$$|I(f) - S(f)| \le \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)^3}{12N^2} \le 10^{-4} = \varepsilon.$$

(а) Найдем $f''(x)$:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2},\ \ f''(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2).$$

Максимум функции $|f''(x)|$ на отрезке $[0,1]$ достигается в точке $x = 0$, таким образом, $\max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| = |f''(0)| = 2$. Тогда получаем следующую оценку:

$$\frac{2}{12N^2} = \frac{1}{6N^2} \le \varepsilon,\ N^2 \ge \frac{\varepsilon^{-1}}{6} \approx 1667 \Longrightarrow N_{min} = 41.$$

(б) Найдем $f''(x)$:

$$f'(x) = 2x\cos(x^2),\ \ f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2).$$

Максимум функции $|f''(x)|$ на отрезке $[0,1]$ достигается в точке $x = 1$, таким образом, $\max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| = |f''(1)| \approx 2{,}29 = M$. Тогда получаем следующую оценку:

$$\frac{M}{12N^2} \le \varepsilon,\ N^2 \ge \frac{\varepsilon^{-1}M}{12} \approx 1908 \Longrightarrow N_{min} = 44.$$