Теоретическое задание № 11.1 по курсу "Вычислительная математика"

Лукашевич Илья, 792 группа

9 декабря 2019 г.

Теоретическая задача 11.1

1. Для численного решения краевой задачи

$$u''(x) = f(x),\ u(0) = a,\ u(1) = b$$

используется конечно-разностная аппроксимация

$$U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1} = \frac{h^2}{12}(f_{i+1} + 10f_i + f_{i-1}).$$

Найдите порядок аппроксимации разностной схемы.
Решение.
Представим систему уравнений в виде $AU = BF$. Здесь B — некая трехдиагональная матрица, F — вектор значений функции $f(x)$ в узлах сетки.

Найдем порядок аппроксимации разностной схемы. Рассмотрим вектор невязки $r = A\hat{U} - BF$, где $\hat{U}$ — проекция точного решения на узлы сетки. Разностная задача имеет порядок аппроксимации p, если $\|r\| = \mathcal{O}(h^p)$. Тогда рассмотрим j-ую компоненту вектора невязки:

$$r_j = \frac{12}{h^2}(A\hat{U} - BF)_j =$$

$$\frac{12}{h^2}\big((u(x_{j-1}) - 2u(x_j) + u(x_{j+1})) - (f(x_{j-1}) + 10f(x_j) + f(x_{j+1}))\big) =$$

$$= \frac{12}{h^2}\big((u(x_j - h) - 2u_(x_j) + u(x_j + h)) - (f(x_j - h) + 10f(x_j) + f(x_j + h))\big) =$$

$$= \frac{12}{h^2}\Bigg(u(x_j) - u'(x_j)h + \frac{u''(x_j)h^2}{2!} - \frac{u'''(x_j)h^3}{3!} + \frac{u^{(4)}(x_j)h^4}{4!} - \frac{u^{(5)}(x_j)h^5}{5!} +$$

$$+\frac{u^{(6)}(x_j)h^6}{6!} - 2u(x_j) + u(x_j) + u'(x_j)h + \frac{u''(x_j)h^2}{2!} + \frac{u'''(x_j)h^3}{3!} + \frac{u^{(4)}(x_j)h^4}{4!} +$$

$$+\frac{u^{(5)}(x_j)h^5}{5!} + \frac{u^{(6)}(x_j)h^6}{6!} -$$

$$-\Big(f(x_j) - f'(x_j)h + \frac{f''(x_j)h^2}{2!} - \frac{f'''(x_j)h^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(x_j)h^4}{4!} + 10f(x_j) +$$

$$+f'(x_j)h + \frac{f''(x_j)h^2}{2!} + \frac{f'''(x_j)h^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(x_j)h^4}{4!}\Big)\Bigg) + \mathcal{O}(h^6)$$

Упрощая полученную формулу, сокращая подобные слагаемые, и пользуясь тем, что $u''(x) = f(x)$, получим:

$$r_j = -\frac{u^{(6)}(x_j)h^4}{20} + \mathcal{O}(h^6) = \mathcal{O}(h^4).$$

Таким образом, порядок аппроксимации разностной схемы по определению равен четырем.