Теоретическое задание № 6.1 по курсу "Вычислительная математика"

Лукашевич Илья, 792 группа

4 ноября 2019 г.

Теоретическая задача 6.1

1. Функция e^x приближается на $[0, 1]$ интерполяционным многочленом степени 3 с чебышёвским набором узлов интерполяции. Доказать, что погрешность интерполяции в равномерной норме не превосходит 10^{-3}.
   Решение.
   Оценка ошибки интерполяции имеет в общем случае вид:
   $$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} |\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)|,$$
   где $M_{n+1} = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$.
   В случае чебышёвского набора узлов имеем такую оценку ошибки интерполяции:
   $$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$
   Знаем, что $M_{n+1} = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |e^x| = e$. Тогда
   $$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{e}{2^7 \cdot 4!} = \frac{e}{24 \cdot 128} \approx 0.00088 < 10^{-3}.$$

2. Оцените погрешность приближения функции e^x интерполяционным многочленом Лагранжа L_2 по узлам $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1, x_2 = 0.2$ в точках 0.05 и 0.15.
   Решение.
   Оценка погрешности приближения функции в точке x имеет вид:
   $$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n}(x - x_k).$$
   Знаем, что $M_{n+1} = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| = M_3 = \sup\limits_{x\in[0,0.2]} |e^x| = e^{0.2}$.
   Тогда для $x = 0.05$ имеем
   $$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{e^{0.2}}{3!}|(0.05-0)(0.05-0.1)(0.05-0.2)| \approx 7.6 \cdot 10^{-5}.$$
   Для $x = 0.15$ имеем
   $$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{e^{0.2}}{3!}|(0.15-0)(0.15-0.1)(0.15-0.2)| \approx 7.6 \cdot 10^{-5}.$$

3. Задана табличная функция

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\sin(x)$	0	0.5	0.71	0.87

   С какой точностью можно восстановить значение в точке $x = \pi/5$, если известно, что функция в узлах задана с абсолютной погрешностью, не превосходящей

10^{-2}.
Решение.
Погрешность в задаче складывается из погрешности интерполяции и погрешности задания функции ($f^*(x_i) = f(x_i) + \delta(x_i)$, $|\delta(x_i)| \le \delta = 10^{-2}$). Найдем суммарную погрешность в точке $x^* = \pi/5$:

$$|L_n(x^*) - f(x^*)| = |f^*(x_0)l_0(x^*) + f^*(x_1)l_1(x^*) + f^*(x_2)l_2(x^*) + f^*(x_3)l_3(x^*) - f(x^*)| =$$

$$= |\delta(x_0)l_0(x^*) + \delta(x_1)l_1(x^*) + \delta(x_2)l_2(x^*) + \delta(x_3)l_3(x^*) +$$

$$+ f(x_0)l_0(x^*) + f(x_1)l_1(x^*) + f(x_2)l_2(x^*) + f(x_3)l_3(x^*) - f(x^*)| \le \Delta_1 + \Delta_2.$$

$$\Delta_1 = \frac{M_4}{4!}|(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2)(x^* - x_3)|.$$

$$M_4 = \sup_{x\in[a,b]} |\sin^{(4)}(x)| = \sup_{x\in[a,b]} |\sin(x)| = 0.87$$

Тогда

$$\Delta_1 = \frac{0.87}{24} \cdot \frac{\pi}{5} \cdot \frac{\pi}{30} \cdot \frac{\pi}{20} \cdot \frac{2\pi}{15} \approx 1.57 \cdot 10^{-4}.$$

Для Δ_2 имеем:

$$\Delta_2 = \delta(|l_0(x^*)| + |l_1(x^*)| + |l_2(x^*)| + |l_3(x^*)|).$$

Найдем соответствующие $|l_j|$:

$$|l_0(x)| = \left|\frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}\right|, \ |l_0(x^*)| = 0.016,$$

$$|l_1(x)| = \left|\frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_0 - x_3)}\right|, \ |l_1(x^*)| = 0.576,$$

$$|l_2(x)| = \left|\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}\right|, \ |l_2(x^*)| = 0.512,$$

$$|l_3(x)| = \left|\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}\right|, \ |l_3(x^*)| = 0.072.$$

Тогда

$$\Delta_2 = 10^{-2}(0.016 + 0.576 + 0.512 + 0.072) = 0.01176.$$

Таким образом,

$$|L_n(x^*) - f(x^*)| \le \Delta_1 + \Delta_2 \approx 1.19 \cdot 10^{-2}.$$

4. Про функцию известно, что она имеет максимум при $x = 1$ и ее значение в этой точке равно 1. В точке $x = 2$ ее значение равно 0, а первая производная равна 3. Приблизить функцию интерполяционным полиномом 3-й степени на отрезке $[1, 2]$.
Решение.

Пусть интерполяционный полином имеет вид $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$. При этом $f' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2$. Тогда условия на функцию эквиваленты системе:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 1, \\ c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3 = 0, \\ c_1 + 4c_2 + 12c_3 = 3, \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему, получим, что $c_0 = -10$, $c_1 = 27$, $c_2 = -21$, $c_3 = 5$. Таким образом, интерполяционный многочлен имеет вид $f(x) = 5x^3 - 21x^2 + 27x - 10$.