Теоретическое задание № 9.1 по курсу "Вычислительная математика"

Лукашевич Илья, 792 группа

18 ноября 2019 г.

Теоретическая задача 9.1

1. Табличная функция $\{f_i\}$ есть проекция на равномерную сетку с шагом h бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$. Используется приближенный метод вычисления первой производной:

$$f'(x_2) \approx \overline{f'}(x_2) = \frac{f_0 - 6f_1 + 3f_2 + 2f_3}{6h}.$$

Каков порядок аппроксимации этой формулы? Указать оптимальный шаг численного дифференцирования и максимальную точность, с которой может быть найдено значение производной.

Решение.

Распишем выражение для приближенного вычисления производной, используя формулу Тейлора:

$$f'(x_2) \approx \frac{f_0 - 6f_1 + 3f_2 + 2f_3}{6h} = \frac{f(x_2-2h) - 6f(x_2-h) + 3f(x_2) + 2f(x_2+h)}{6h} =$$

$$= \frac{f(x_2) - 2f'(x_2)h + 4f''(x_2)h^2/2 - 4f^{(3)}(x_2)h^3/3 + 2f^{(4)}(x_2)h^4/3}{6h} +$$

$$+ \frac{-6f(x_2) + 6f'(x_2)h - 6f''(x_2)h^2/2 + 6f^{(3)}(x_2)h^3/6 - 6f^{(4)}(x_2)h^4/24}{6h} +$$

$$+ \frac{3f(x_2)}{6h} +$$

$$+ \frac{2f(x_2) + 2f'(x_2)h + 2f''(x_2)h^2/2 + 2f^{(3)}(x_2)h^3/6 + 2f^{(4)}(x_2)h^4/24}{6h} + \mathcal{O}(h^4) =$$

$$= f'(x_2) + \frac{f^{(4)}(x_2)h^3}{12} + \mathcal{O}(h^4) =$$

$$= f'(x_2) + \frac{f^{(4)}(\xi)h^3}{12}.$$

Таким образом, порядок аппроксимации этой формулы равен трем. В машинной арифметике для ошибки аппроксимации имеем:

$$|f'(x_2) - \overline{f'}(x_2)| \leq \frac{Mh^3}{12} + \left| \frac{\varepsilon_0 f_0 - 6\varepsilon_1 f_1 + 3\varepsilon_2 f_2 + 2\varepsilon_3 f_3}{6h} \right| \leq$$

$$\leq \frac{Mh^3}{12} + \frac{2\varepsilon M_0}{h},$$

где M — максимальное значение четвертой производной функции f на отрезке $[x_0, x_3]$, M_0 — максимальное значение функции $f(x)$ на сетке, ε — машинный эпсилон, $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon$. Для нахождения оптимального шага h^* найдем производную выражения выше и приравняем ее к нулю:

$$\frac{Mh^2}{4} - \frac{2\varepsilon M_0}{h^2} = 0,$$

$$h^* = \left(\frac{8\varepsilon M_0}{M}\right)^{1/4}.$$

Тогда для минимального значения ошибки получаем:

$$E = \frac{M(h^*)^3}{12} + \frac{2\varepsilon M_0}{h^*} = \frac{M}{12}\left(\frac{8\varepsilon M_0}{M}\right)^{3/4} + 2\varepsilon M_0 \left(\frac{M}{8\varepsilon M_0}\right)^{1/4} = \frac{2^{9/4}}{3} M^{1/4} (\varepsilon M_0)^{3/4}.$$