Задание 1 по курсу "Вычислительная математика"

Лукашевич Илья, 792 группа

21 сентября 2019 г.

1 Теоретические задачи

1. Докажите, что $\max_{i,j} |a_{ij}|$ не является матричной нормой.

   Решение.

   Приведем пример двух матриц A и B таких, что не выполнено свойство субмильпликативности:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   При этом получаем, что

$$\|AB\| = 2 > \|A\| \cdot \|B\| = 1 \cdot 1 = 1.$$

   Таким образом, нарушается свойство субмультипликативности, следовательно, $\max_{i,j} |a_{ij}|$ не является матричной нормой.

2. Доказать, что

$$\|xy^*\|_F = \|xy^*\|_2 = \|x\|_2\|y\|_2 \quad \forall x,y \in \mathbb{C}^n.$$

   Решение.

   Рассмотрим произвольные $x, y \in \mathbb{C}^n$. Учитывая, что $|y| = |\overline{y}|$, запишем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \|x\|_2\|y\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i|^2|y_j|^2\right)^{1/2} = \\ = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |(xy^*)_{ij}|^2\right)^{1/2} = \|xy^*\|_F. \end{aligned} \tag{2}$$

   Таким образом, одно из равенств доказано. Докажем еще одну равенство.

   Введем обозначение $Z = xy^*$ и рассмотрим матрицу Z^*Z. Имеем:

$$Z^*Z = (xy^*)^*xy^* = yx^*xy^* = y\overline{x^T}xy^* = \|x\|_2^2 yy^*.$$

   Рассмотрим матрицу yy^*. Она имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1\overline{y_1} & y_1\overline{y_2} & \dots & y_1\overline{y_n} \\ y_2\overline{y_1} & y_2\overline{y_2} & \dots & y_2\overline{y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n\overline{y_1} & y_n\overline{y_2} & \dots & y_n\overline{y_n} \end{pmatrix}.$$

   Заметим, что ранг рассматриваемой матрицы равен единице. Тогда у данной матрицы существует единственное собственное значение, отличное от нуля, и соответствующий ему собственный вектор. Это утверждение также справедливо и для матрицы Z^*Z. Заметим, что вектор y как раз и является этим собственным вектором, так как

$$(Z^*Z)y = \|x\|_2^2 yy^*y = \|x\|_2^2 y\|y\|_2^2 = \|x\|_2^2\|y\|_2^2 y.$$

Следовательно, собственное значение равно $\lambda = \|x\|_2^2\|y\|_2^2$. По определению второй нормы матрицы имеем

$$\|xy^*\|_2 = \|Z\|_2 = \max_k \sigma_k = \max_k \sqrt{\lambda_k(Z^*Z)} = \sqrt{\lambda} = \|x\|_2\|y\|_2.$$

Таким образом, доказано, что $\|xy^*\|_F = \|xy^*\|_2 = \|x\|_2\|y\|_2 \quad \forall x,y \in \mathbb{C}^n$.

3. Пусть $A = I + \alpha uu^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $u \in \mathbb{C}^n$, $\|u\|_2 = 1$. Найдите все α, при которых матрица A будет унитарной.

   Решение.

   Найдем эрмитово-сопряженную матрицу для матрицы A:

   $$A^* = (I + \alpha uu^*)^* = I^* + (\alpha uu^*)^* = I + \alpha^*(uu^*) = I + \overline{\alpha} uu^*.$$

   Найдем произведение AA^*:

   $$\begin{gathered} AA^* = (I + \alpha uu^*)(I + \overline{\alpha} uu^*) = I + \overline{\alpha} uu^* + \alpha uu^* + \alpha uu^* \overline{\alpha} uu^* = \\ = I + (\alpha + \overline{\alpha})uu^* + \alpha\overline{\alpha} uu^*uu^* = I + (\alpha + \overline{\alpha})uu^* + |\alpha|^2\|u\|_2^2 uu^* = \\ = I + (\alpha + \overline{\alpha} + |\alpha|^2)uu^*. \end{gathered} \tag{3}$$

   По определению, матрица A называется унитарной, если выполнено условие $A^{-1} = A^*$. Тогда $AA^* = AA^{-1} = I$. Следовательно, должно выполняться условие $\alpha + \overline{\alpha} + |\alpha|^2 = 0$. Обозначим $Re(\alpha) = a$, $Im(\alpha) = b$. Тогда получаем, что

   $$\begin{gathered} a + bi + a - bi + a^2 + b^2 = 0, \\ 2a + a^2 + b^2 = 0, \\ b = \pm\sqrt{-a(a+2)}. \end{gathered} \tag{4}$$

   Понятно, что подкоренное выражение должно быть неотрицательно, следовательно $a \in [-2, 0]$. Таким образом, матрица A будет унитарной, если для α выполнено:

   $$\begin{cases} Re(\alpha) \in [-2, 0], \\ Im(\alpha) = \pm\sqrt{-Re(\alpha)(Re(\alpha) + 2)}. \end{cases} \tag{5}$$