Задание 1 по курсу "Вычислительная математика"

Лукашевич Илья, 792 группа

20 сентября 2019 г.

Теоретическая задача 1.2

Доказать, что

$$\|xy^*\|_F = \|xy^*\|_2 = \|x\|_2\|y\|_2 \quad \forall x,y \in \mathbb{C}^n.$$

Решение.

Рассмотрим произвольные $x, y \in \mathbb{C}^n$. Учитывая, что $|y| = |\overline{y}|$, запишем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \|x\|_2\|y\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i|^2|y_j|^2\right)^{1/2} = \\ = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |(xy^*)_{ij}|^2\right)^{1/2} = \|xy^*\|_F. \end{aligned} \tag{1}$$

Таким образом, одно из равенств доказано. Докажем еще одну равенство.
Введем обозначение $Z = xy^*$ и рассмотрим матрицу Z^*Z. Имеем:

$$Z^*Z = (xy^*)^*xy^* = yx^*xy^* = y\overline{x^T}xy^* = \|x\|_2^2 yy^*.$$

Рассмотрим матрицу yy^*. Она имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1\overline{y_1} & y_1\overline{y_2} & \dots & y_1\overline{y_n} \\ y_2\overline{y_1} & y_2\overline{y_2} & \dots & y_2\overline{y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n\overline{y_1} & y_n\overline{y_2} & \dots & y_n\overline{y_n} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что ранг рассматриваемой матрицы равен единице. Тогда у данной матрицы существует единственное собственное значение, отличное от нуля, и соответствующий ему собственный вектор. Это утверждение также справедливо и для матрицы Z^*Z. Заметим, что вектор y как раз и является этим собственным вектором, так как

$$(Z^*Z)y = \|x\|_2^2 yy^*y = \|x\|_2^2 y\|y\|_2^2 = \|x\|_2^2\|y\|_2^2 y.$$

Следовательно, собственное значение равно $\lambda = \|x\|_2^2\|y\|_2^2$. По определению второй нормы матрицы имеем

$$\|xy^*\|_2 = \|Z\|_2 = \max_k \sigma_k = \max_k \sqrt{\lambda_k(Z^*Z)} = \sqrt{\lambda} = \|x\|_2\|y\|_2.$$

Таким образом, доказано, что $\|xy^*\|_F = \|xy^*\|_2 = \|x\|_2\|y\|_2 \quad \forall x,y \in \mathbb{C}^n$.