Теоретическое задание № 12.1 по курсу "Вычислительная математика"

Лукашевич Илья, 792 группа

10 декабря 2019 г.

Теоретическая задача 12.1

1. Рассматривается следующее параметрическое семейство однократно диагонально-неявных методов Рунге-Кутты:

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}.$$

Найти все значения параметра, при которых метод имеет третий порядок аппроксимации.
Решение.
Рассмотрим упрощающие условия:

$$\sum_{j=1}^{s} a_{1j} = a_{11} + a_{12} = \gamma + 0 = \gamma = c_1,$$

$$\sum_{j=1}^{s} a_{2j} = a_{21} + a_{22} = 1 - 2\gamma + \gamma = 1 - \gamma = c_2.$$

Получаем, что они выполнены $\forall\gamma$.

Рассмотрим условия первого порядка:

$$\sum_{j=1}^{s} b_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Эти условия также выполнены $\forall\gamma$.

Рассмотрим условия второго порядка:

$$\sum_{j=1}^{s} b_j c_j = \frac{\gamma}{2} + \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1}{2}.$$

Они также выполнены $\forall\gamma$.

Наконец, рассмотрим условия третьего порядка:

$$\sum_{j=1}^{s} b_j c_j^2 = \frac{\gamma^2}{2} + \frac{(1-\gamma)^2}{2} = \frac{2\gamma^2 - 2\gamma + 1}{2} = \frac{1}{3},$$

$$6\gamma^2 - 6\gamma + 1 = 0,$$

$$\gamma_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}.$$

Второе условие третьего порядка:

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} b_i a_{ij} c_j = b_1(a_{11}c_1 + a_{12}c_2) + b_2(a_{21}c_1 + a_{22}c_2) = \frac{\gamma^2}{2} + \gamma - \frac{3\gamma^2}{2} =$$

$$= -\gamma^2 + \gamma = \frac{1}{6} \Longleftrightarrow 6\gamma^2 - 6\gamma + 1 = 0.$$

Таким образом, полученное уравнение равносильно уравнению для второго порядка аппроксимации. Тогда значения параметра, при которых метод имеет третий порядок аппроксимации равны

$$\gamma_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}.$$